

154493

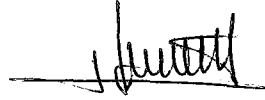
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOĞRUSAL OLMAYAN BAZI SİSTEMLERİN
İNCELENMESİ**

Fizikçi Atilla ÇİFCİ

F.B.E Fizik Anabilim Dalı Fizik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ



Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Prof. Dr. Turgay Armağan

T. Armağan

Doç. Dr. Getin Taşseven



İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ.....	vviii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1 GİRİŞ.....	1
2 DOĞRUSAL OLMAYAN OLAYLAR VE BU OLAYLARIN DOĞADAKİ ÖNEMİ	5
2.1 Basit Sarkaç	5
2.2 Kulak Zarının Titreşimi	5
2.3 Doğrusal Olmayan Sönümlenmeler.....	6
2.4 Doğrusal Olmayan Kafes(Örgü) Dinamiği.....	7
2.5 Volterra-Lotka Rekabet Denklemleri	9
2.6 Doğrusal Olmayan İndüktans	11
2.4 Solitonlar	12
3 DOĞRUSAL OLMAYAN OLAYLAR NASIL MODELLENİR?	15
4 TEKİL NOKTA TİPLERİ VE FAZ UZAYI KAVRAMLARININ ANALİZİ	18
4.1 Faz Uzayı Kavramına Genel Bir Bakış	18
4.2 Basit Tekil Nokta Tipleri	21
4.2.1 Merkez Nokta	21
4.2.2 Eyer Noktası	22
4.2.3 Spiral Nokta	22
4.2.4 Düğüm Noktası	24
4.3 Basit Tekil Noktaların Sınıflandırılması.....	25
4.4 Basit Sarkaç İçin Düzlem Faz Analizi.....	29
5 BOYUT KAVRAMI VE FRAKTAL YAPILAR	32
5.1 Boyut Kavramına Genel Bakış	32
5.2 Fraktal Boyut Kavramı	36
5.3 Benzerlik Boyutu	38
5.3.1 Ölçekleme	38
5.3.2 Basit Geometrik Formlar ve Boyutları	38
5.3.2.1 Temel Aşama	39

5.3.2.2	Silme Aşaması	40
5.3.2.3	Silme ve Yerine Koyma Aşaması	41
5.4	Kıvrımlı Bir Hattın Boyutu	43
6	DORUSAL OLMAYAN DENKLEMLER NE ZAMAN KAOTİK DAVRANIRLAR? KAOS TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI NELERDİR?48	
6.1	Kaos Nedir? Nerelerde Ortaya Çıkar?	48
6.2	Zorlamalı Titreşimler	49
6.2.1	Duffing Eşitliği	51
6.2.1.1	Harmonik Çözüm	55
6.2.1.2	Doğrusal Olmayan Karakteristik Eğriler	58
6.3	Garip Çekerler	62
6.3.1	Lorenz Çekeri	62
6.3.2	Rössler Çekeri	64
6.4	Doğrusal Olmayan Haritalar	65
6.4.1	Giriş	65
6.4.2	Lojistik Harita	67
6.4.3	Geometrik Betimleme	72
7	LYAPUNOV ÜSTELİ	75
8	SONUÇLAR VE TARTIŞMA	81
	KAYNAKLAR	83
	ÖZGEÇMİŞ	85

SİMGE LİSTESİ

a	Nonlineerlik parametresi
C	Sığa
D	Boyut
f	Tilkilerin sayısı
$f(t)$	Basınçtan dolayı kulak zarına etkiyen kuvvet
k	Pozitif sabit
L_0	Bobinin indüktansı
n	İterasyon(tekrar) sayısı
N	Sarım sayısı
N_B	Büyük balıkların sayısı
N_L	Küçük balıkların sayısı
r	Tavşanların sayısı
$\varnothing$	Cismin ani hızı
V	Potansiyel
$x(t)$	Dende konumundan ayrılma mesafesi
X_0, Y_0	Faz düzleminde birbirine yakın iki başlangıç noktası
α	Etkileşim katsayısı
Φ	Bobinden geçen manyetik akı
δ	Faz farkı
γ	Pozitif sönümleme sabiti
λ	Lyapunov üsteli

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Basit sarkaç	6
Şekil 2.2 FPU problemi için kurgulanmış nonlinear yay sistemi	7
Şekil 2.3 Toda potansiyeli	8
Şekil 2.4 Tavşan sayısına karşılık gelen tilki sayısı	11
Şekil 2.5 Doğrusal olmayan indüktör devre	11
Şekil 4.1 $\theta_{max} < \pi$ için basit sarkacın düzlem faz diyagramı	20
Şekil 4.2 Bir merkez noktanın komşu yörüngeleri	21
Şekil 4.3 Bir S eyer noktasına komşu yörüngeler	22
Şekil 4.4 Bir spiral noktaya komşu yörüngeler	23
Şekil 4.5 Düşük sönümlemeli basit sarkaç için faz yörüngesi	24
Şekil 4.6 Bir düğüm noktasının komşu yörüngeleri	24
Şekil 4.7 Aşırı sönümlü harmonik osilatör için faz yörüngesi	25
Şekil 4.8 Tekil nokta tipleri için p-q düzlemi	28
Şekil 4.9 Basit sarkaç için tanjant alanı	30
Şekil 4.10 Sönümsüz basit sarkaç için faz düzlemi	31
Şekil 4.11 Sönümlü sarkaç için faz düzlemi	31
Şekil 5.1 Öklid boyutu	32
Şekil 5.2 Topolojik boyut	33
Şekil 5.3 Yedi boyutlu hava sistemi	33
Şekil 5.4 Üç boyutlu ağırlık sistemi	33
Şekil 5.5 Sekiz boyutlu boy-ağırlık sistemi	34
Şekil 5.6 Üç boyutlu vektör, gömülü boyut ve bir boyutlu harita	34
Şekil 5.7 Ölçüm sayısındaki artış ile ölçek değeri arasındaki üstel ilişki	35
Şekil 5.8 Çeşitli geometrik nesneler ve boyutları	39
Şekil 5.9 Cantor seti	41
Şekil 5.10 Koch eğrisi	42
Şekil 6.1 Duffing eşitliğinde bir periyotlu, iki periyotlu, dört periyotlu ve kaotik davranışlı durumlar için x-v grafikleri	51
Şekil 6.2 Sıkıştırılmış yaylarda Duffing eşitliği için harmonik çözüm	52
Şekil 6.3 Ters Duffing eşitliğinin $x(0)=0,09001$ ve $0,09002$ başlangıç değerleri ve $F=0,325$ $F=0,34875$ ve $F=0,355$ değerler için çözümleri	53
Şekil 6.4 Ters Duffing eşitliğinin $x(0)=0,09001$ ve $0,09002$ başlangıç değerleri ve $F=0,40$ için çözümü	55
Şekil 6.5 Farklı F değerleri ve sıfır sönüm için karakteristik lineer eğriler	57
Şekil 6.6 $\omega_0=1$, $\beta=0,4$, $\gamma=0$ ve $F=0,1,2,4$ değerleri için A ya karşılık gelen ω değerleri	59
Şekil 6.7 $\omega_0=1$, $\beta=0,4$, $\gamma=0$ ve $F=1,2,4$ değerleri için A- ω grafiğinin karakteristik eğrileri ...	59
Şekil 6.8 $\omega_0=1$, $\beta=0,2$, $\gamma=0$ ve $F=1,2,4$ değerleri için 1. dereceden nonlinear karakteristik eğriler	62
Şekil 6.9 Lorenz çeki “kelebek kanatları”	63
Şekil 6.10 Kaotik Rössler çeki	65
Şekil 6.11 $X_0=0,2$ için X_n değerlerinin lojistik haritadaki çözümleri	68
Şekil 6.12 Lojistik model için çatallanma diyagramları	70
Şekil 6.13 Kaos içerisindeki düzen pencereleri	72
Şekil 6.14 $a=2,8$; $X_0=0,2$ değerleri için lojistik eşitliğin geometrik tasviri	72
Şekil 6.15 $X_0=0,2$ ve $a=3,3$ değerleri için geometrik çizim	73
Şekil 6.16 $X_0=0,2$ ve $a=3,8$ değerleri için geometrik resim	74
Şekil 7.1 Başlangıç noktaları birbirine çok yakın iki yörüngenin lojistik eşitlik(parabol) ve	

tahmini değişimi	75
şekil 7.2 İki komşu yörünęe arasındaki boşluğun tahmini değişimini ifade eden bir boyutlu harita	76
şekil 7.3 $X_0=0,2$ başlangıç değeri için a parametresine göre Lyapunov üstelinin değişim grafiği	80



ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 5.1 Gatun Gölü kıyıları için tespit edilmiş olan deneysel veriler.....	46
--	----



ÖNSÖZ

Bu çalışmada doğrusal olmayan bazı sistemler incelendi. Bu konuyu belirleyip, çalışmalarımı yönlendiren ve her aşamada bana yardımcı olan danışmanım Prof.Dr. Hasan Tatlıpınar'a, bana bu tez çalışmasını yapabilme fırsatını veren bölüm başkanımız Prof.Dr. Emel Çingir'ya, çalışmalarım esnasında bana destek olan aileme ve öğretmen arkadaşlarıma teşekkür ederim.



ÖZET

Doğada bir çok olay doğrusal değildir(nonlineerdir). Doğrusal olmayan olaylar günümüzde, fizikte, kimyada, mühendislikte, matematikte, biyolojide, ekonomide en çok çalışılan modern konuların başında gelmektedir. Bu tezde, sarkaç, doğrusal olmayan kafes dinamiği, kulak zarı gibi bazı doğrusal olmayan sistemler çalışıldı.

Doğrusal olmayan denklemleri çalışmanın standart bir yöntemi yoktur. Bu denklemler, topolojik, analitik ve nümerik olarak çalışılabilir. Faz uzayı analizi, doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çalışmanın önemli bir tekniğidir. Faz uzayı analizi elemanter olarak incelenerek, basit tekil noktaların sınıflandırılması yapıldı. Doğrusal olmayan davranışın önemli bir özelliği olan boyut kavramı çalışıldı.

Bazı durumlarda doğrusal olmayan denklemlerin çözümleri kaotik davranır. Bu çalışmada kaos teorisinin temel kavramları verilerek, zorlamalı salıncı, Lorentz sistemi, Rössler sistemi ve doğrusal olmayan haritalar Maple bilgisayar programı kullanılarak çalışıldı. Çalışılan örneklerin çoğunda sonuçlar tekrar elde edildi. Bazı örneklerde parametreler kaynaklarda belirtilen çalışmalarla aynı alındı, bazılarında ise sonuçlar farklı parametreler için elde edildi. Kaotik davranışın önemli bir kriteri olan Lyapunov üsteli de tartışıldı.

Anahtar kelimeler: Nonlineer sistemler, faz uzayı analizi, kaos teorisi, zorlamalı salınımlar.

ABSTRACT

There are many phenomena in nature which is nonlinear. Nonlinear phenomena is one of the most dynamical area of the modern reseach which has the applications in physics, chemistry, , engineering, mathematics, biology, economy. In this thesis some nonlinear systems such as pendulum, nonlinear lattice dynamics, nonlinear damping, eardrum are studied.

There is no general way to study nonlinear equations. They are studied topologically, analytically and numerically. Phase space analysis is important technique of studying nonlinear differantial equations. Elementary phase space analysis and simple singular points, classifications studied. One of the important properties of the nonlinear behaviour dimension definitions studied.

Under some circumstances solutions of the nonlinear equations behave chaotic. In this study basic ideas of chaos theory rewieved and as a examples forced oscillators, Lorentz system, Rössler system and nonlinear maps studied by using Maple computer program. Phase space analysis of the most studied example is rederived. In some example all parameter taken same as in their original form which indicated in referances, and in some example results derived for different parameters. The important criteria of the chaotic behavior Lyapunuv exponent also discussed.

Keywords: Nonlinear systems, phase space anallysis, chaos theory, forced oscillators.

1. GİRİŞ

Günlük hayatta çevremize baktığımızda, gerek nesnel olaylarda gerekse sosyal olaylarda bir çok durumda karmaşık yapılar veya ilişkiler görürüz. Bu karmaşık yapı ve ilişkileri kısaca karmaşa olarak adlandırabiliriz. Karmaşa hem çok küçük hem de çok büyük ölçeklerde karşılaşılan bir olgudur. Karmaşık yapıya sahip bir sistemin davranışı bazı özel durumlar dışında öngörülemmez. Bu tür yapıların davranışları genelde doğrusal değildir.

Doğrusal olmayan sistemlerde başlangıç durumundaki çok küçük bir değişim, sistemin herhangi bir anında çok büyük değişimlere neden olur. Bir sistemin yapısını veya sistemin değişimini(dinamiğini) matematiksel olarak modelleyecek olursak, bu model ya doğrusal ya da doğrusal olmayan denklemlerle ifade edilir. Fiziğin temel iki teorisi olan klasik mekanik ve kuantum mekaniğinde kullanılan matematiksel denklemler lineer denklemlerdir. Fiziksel olayların klasik mekaniğe göre yorumlanması sosyal olaylarda da karşılığını bulmuş, determinist ve sosyal teorilerin oluşmasında ve kalıcılığında etkin olmuştur. Kuantum mekaniği de doğrusal bir teori olmasına karşın, dalga fonksiyonunun olasılıkçı yorumundan dolayı, klasik determinist davranışın dışında da doğa olaylarının yorumlanabileceği savunulmaktadır. Kuantum mekaniğinin pozitif bilimlere getirdiği yorumun sosyal olaylarda da yansımaları olmuş ve yeni bakış açıları yada teorilere kaynaklık etmiştir.

Günümüzde bazı bilim adamları fizik bilimini tarihsel olarak üç bölüme ayırmaktadır(Çambel, 1993). Klasik mekanik dönemi, kuantum mekaniği dönemi ve karmaşa problemlerinin tartışıldığı dönem. Klasik mekanik 19. yüzyıla kadar bilimin öncü ve tek teorisi olmuştur. 19. yüzyılın sonundan 21. yüzyıla kadar kuantum mekaniği bilime damgasını vurmuştur. Günümüzde bu iki teoriyi birleştirme çalışmalarının yanında, yeni bir dönem olarakta adlandırılabilir, karmaşa problemi tartışılmaktadır.

Karmaşa problemi genel olarak doğrusal olmayan matematiksel denklemlerle ifade edildiği için çeyrek asır öncesine kadar çok fazla incelenmeyen bir problem idi. Günümüzde bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişim bu tür problemlerin detaylı incelenmesi için büyük olanaklar sağlamaktadır ve bu konudaki çalışmalar gittikçe yaygınlaşmaktadır.

Tezimde bazı doğrusal olmayan olaylara örnekler verip, bu olayların incelenmesi için hangi yöntemlerin nasıl kullanıldıklarını açıkladım.

Tezin ikinci bölümü, gelenekselleşmiş harmonik salınım problemi ile başlayıp, kulak zarının titreşimi, dorusal olmayan örgü dinamiği, rekabet denklemleri ve solitonlar gibi doğrusal olmayan olaylara verilmiş bazı örnekleri içermektedir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde nonlinear olayların nasıl modelleneceği, faz uzayı kavramı, faz uzayında tekil noktaların tipleri ve sınıflandırılması incelenmiştir.

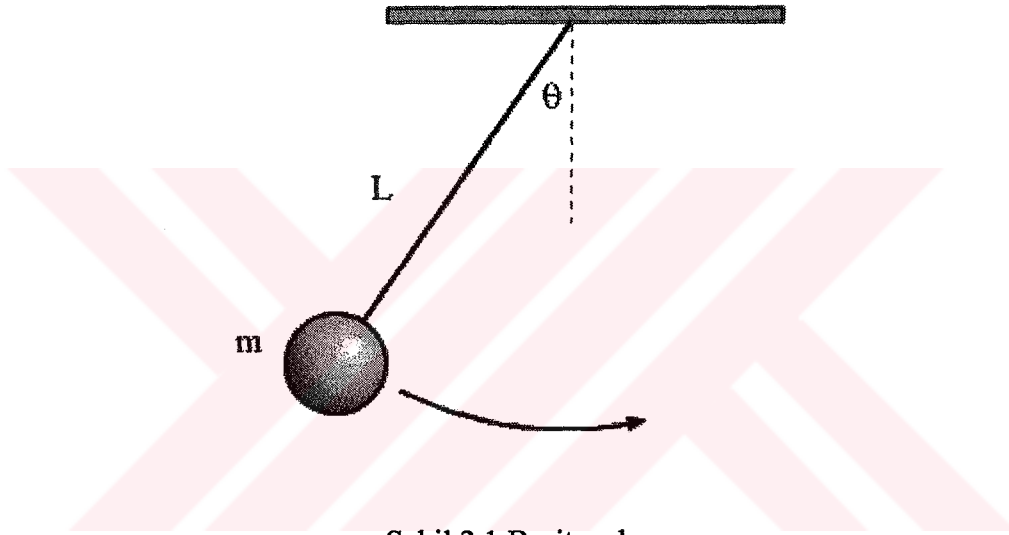
Beşinci bölüm boyut kavramı ve fraktal yapılar hakkında bilgi vermektedir. Altıncı ve yedinci bölümlerde ise doğrusal olmayan denklemlerin davranışları, kaos teorisinin temel kavramları ve Lyapunov üsteli anlatılmıştır. Altıncı bölümde ayrıca kaotik davranan sistemlere bazı örnekler seçilerek bu sistemlerin davranışları incelenmiştir.

Doğrusal olmayan olaylarla ilgili olarak oldukça zengin bir literatür mevcuttur. Bu çalışmada temel olarak Richard H. Enns, George G. Mc Guire tarafından yazılan “Nonlinear Physics” ve Garnett P. Williams tarafından yazılan “Chaos Theory Tamed” adlı kitaplardan faydalandım. Seçtiğim örneklerin incelenmesinde Maple 8 programından yararlandım. Örneklerin bazıları birebir olmasına karşılık, birçoğu değişik parametreler için incelendi.

2. DOĞRUSAL OLMAYAN OLAYLAR VE BU OLAYLARIN DOĞADAKİ ÖNEMİ

2.1 Basit Sarkaç

Doğrusal olmayan sistemlere ilk örnek olarak bu konuda geleneksel olarak incelenen basit sarkaç gözönüne alınabilir. Basit sarkaç küçük bir m kütesinin, l uzunluklu esnek olmayan ve ağırlıksız olduğu kabul edilen bir çubuğun ucuna bağlanmasıyla oluşur. Hareket düşey düzlemde gerçekleşir ve yer çekimi ivmesi ile beslenir. Doğrusal olmayan bu sistemin davranışını incelemek için Newton'un II.yasası veya $L = T - V$ olan Lagrangian formülü kullanılabilir.



Şekil 2.1 Basit sarkaç

Sistemde sürtünme ve hava direnci ihmal edilmiştir. Gravitasyonel çekim kuvveti $m\vec{g}$ düşey ve yatay bileşenlerine ayrıştırılabilir.

Yatay bileşen için;

$$x = l\theta \quad (2.1)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (2.2)$$

Buradaki $(-)$ işareti kuvvetin denge konumuna yöneldiğini yani θ daki artışa zıt yönde olduğunu gösterir.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (2.3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.4)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta \quad (2.5)$$

Yukarıdaki denklemde görüldüğü gibi sağ taraf θ ile değil $\sin\theta$ ile orantılıdır. Bu yüzden bu hareket basit harmonik hareket değildir. Ancak ($\sin\theta = \theta - \theta^3/3! + \dots$) olan $\sin\theta$ nın seri açılımı incelendiğinde θ nın küçük değerleri için $\sin\theta = \theta$ olduğu görülür.

Kuvvet daha karmaşık bir hal aldığında Lagrangian yaklaşımı ile çalışmak potansiyel ve kinetik enerjinin tanımlanmasında kolaylık sağlar. Lagrangian formülü kullanılarak aynı sonuç elde edilebilir. Şekilden yararlanılarak sarkacın potansiyel ve kinetik enerjisi şu şekilde yazılabilir (Blümel ve Reinhardt, 1997).

$$V = mgl - mgl \cos\theta = mgl(1 - \cos\theta) \quad (2.6)$$

$$T = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2 \quad (2.7)$$

Buradan Lagrangian;

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad (2.8)$$

yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.9)$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (2.10)$$

olduğu bulunur. Bu denklem yukarıda da belirtildiği gibi doğrusal olmayan bir denklemdir. Çünkü buradaki $\sin\theta$ terimi θ nın nonlinear bir fonksiyonudur. Ancak θ nın küçük değerleri için $\sin\theta = \theta$ kabul edilerek yazılırsa denklem lineer bir denklem, hareket ise basit harmonik hareket olur.

2.2 Kulak Zarının Titreşimi

Newton'un II. Yasası kulak zarının titreşimi gibi biyolojik sistemlerin hareketini anlamada da kullanılabilir. Orta kulakta bulunan kulak zarının denge noktası etrafındaki titreşimi bir boyutlu sistem gibi düşünülebilir. $x(t)$ denge konumundan ayrılma mesafesi olmak üzere, küçük yer değiştirmeler için, zar $x(t)$ kadar yer değiştirdiğinde geri çağırıcı $F(x)$ kuvveti Taylor serisi ile açılabilir.

$$F(x) = F_0 + \left(\frac{dF}{dx} \right) \Big|_0 x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right) \Big|_0 x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 F}{dx^3} \right) \Big|_0 x^3 + \dots \quad (2.11)$$

Denge konumunda $x = 0$ ve geri çağırıcı kuvvet $F(x) = F_0 = 0$ olmaktadır. Lineer x 'li terimin etkin olduğu düşünülürse;

$$F(x) = \left(\frac{dF}{dx} \right) \Big|_0 x \quad (2.12)$$

eşitliği göz önüne alınır. x 'in pozitif olduğu durumlar için $(dF/dx) \Big|_0 < 0$ olur. $(dF/dx) \Big|_0 = -k$ olarak alınırsa, k pozitif yay sabiti olmak üzere, küçük x değerleri için Hook yasası elde edilir.

$$F(x) = -kx \quad (2.13)$$

Dışarıdan gelen ses dalgaları, kulak zarı üzerinde periyodik olarak değişen bir basınç oluşturur. m kulak zarının kütlesi ve $f(t)$ de basınçtan dolayı zara etkiyen periyodik kuvvet olmak üzere, Newton'un II. Yasası ,

$$m\ddot{x} = -kx + f(t) \quad (2.14)$$

bağıntısını verir. Bu bağıntı düzenlenerek $[k/m]^{1/2}$ yerine ω_0 yazılırsa,

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x + \frac{f(t)}{m} = -\omega^2 x + \frac{f(t)}{m} \quad (2.15)$$

ve $f(t)/m$ ifadesi de $F(t)$ ile gösterilecek olursa;

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t) \quad (2.16)$$

bağıntısı elde edilir. Bu ise basit harmonik osilatör problemindeki kuvvet bağıntısıdır. $F(t)=A \cos (\omega t)$ şeklinde ise kulak zarı başlangıç periyodundan sonra yalnızca ω frekanslı seslere karşılık verecektir. ω 'dan farklı frekanstaki seslerin işitilebilmesi için $F(x)$ bağıntısındaki lineer olmayan terimlerle de bağlantı kurulmalıdır. Kulak zarının yapısı incelendiğinde ses dalgalarının yarattığı basınç kuvvetinden kulak zarının asimetrik olarak etkilenecek asimetrik titreşimler yaptığı gözlenmiştir. Taylor açılımındaki ikinci terim de göz önüne alınacak olursa;

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right) \Big|_0 = -\beta m \quad (2.17)$$

ifadesi denklemde yerine konularak ;

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta x^2 = F(t) \quad (2.18)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemdeki x^2 li terim asimetriyi ifade eder. Bu denklem Helmholtz(1895) tarafından üretilmiştir ve doğrusal olmayan sistemlerdeki titreşimi sağlayan kuvveti göstermektedir. Çok çeşitli fiziksel olaylarda, sönümlenmelerde, harmonik yada subharmonik titreşimlerde, kaotik yada periyodik olmayan hareketlerde bu tip bir denklem kullanılabilir.

2.3 Doğrusal Olmayan Sönümlenmeler

Bir cisim viskoz bir akışkanın içerisinde(atmosfer ya da su gibi) hareket ederken akışkan tarafından cisme geciktirici(sürtünme) bir kuvvet uygulanır. Hava taşıtlarının uçuşlarında bu sürtünme kuvveti önemli bir rol oynar. Özellikle havada hareket eden cisimler yüksek hızlara ulaştıklarında bu kuvvet daha da önem kazanır. Yatlar, yarış arabaları ve hava taşıtları gibi bir çok cisme etki eden bu kuvvet matematiksel olarak ifade edilebilir ve geniş su tankları, hava tünelleri kullanılarak deneysel olarak bu bağıntılar ispat edilebilir.

$\vec{v}$ cismin ani hızı, $\vec{F}(\vec{v})$ ise cisme etkiyen kuvvettir. Bu kuvvetin analitik olarak belirlenmesi mümkün değildir. Fakat basitçe;

$$\vec{F} \propto |\vec{v}|^{n-1} \vec{v} \quad (2.19)$$

gibi düşünülebilir. Burada n bir tam sayıdır. Buna göre yeryüzüne yakın bir yerdeki cismin hareket denklemi

$$m\ddot{\vec{\vartheta}} = m\vec{g} - mk\left|\dot{\vec{\vartheta}}\right|^{n-1} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Burada k , havanın viskozitesine, yoğunluğuna ve atılan cismin şekline bağlı bir pozitif sabittir.

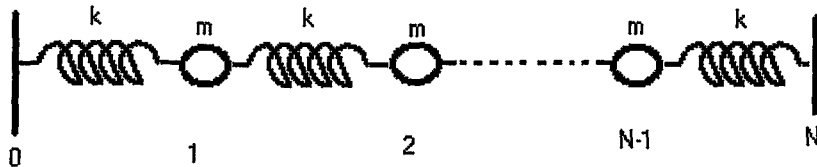
Deneyssel verilere göre havadaki hızı 24 m/s olan bir cisim için $n=1$ dir. Bu da Stokes'un direnç yasasıdır. 24 m/s den büyük fakat ses hızından (~330 m/s) küçük değerlerde $n=2$ alınabilir. Bu ise Newton'un direnç yasası olarak bilinir. $n=1$ ve $n=2$ değerleri için denklem analitik olarak çözülebilir. Ses hızından yüksek 600 m/s den düşük hızlarda havada hareket etmekte olan bir cisme karşı havanın gösterdiği direnç oldukça artar ve cisim patlayabilir. 600 m/s den sonra ise havanın cisme uyguladığı kuvvet tekrar lineer bir hal alır (Marion ve Thornton, 1973). Bu konu otomobil, gemi ve uçak sektörleri için oldukça önemlidir. Örneğin; dalgalı denizlerde gemilerin aşırı sallanmaları bu çalışmalar sayesinde önlenabilir.

2.4 Doğrusal Olmayan Kafes(Örgü) Dinamiği

Nonlineer örgü dinamiği üzerinde ilk ciddi araştırmalar 1950'li yıllarda Enrico Fermi, J.Pasta ve Stan Ulam tarafından Los Alamos'ta yapılmaya başlanmıştır (Fermi vd., 1955). N tane basit harmonik osilatörden oluşan bir sistemin normal modlarda enerjisinin sabit kalacağı klasik mekanikten bilinmektedir.

Fermi ve arkadaşları, böyle sistemlerde küçük nonlineer salınımların sistemdeki modlar arasında enerji geçişlerine neden olacağını ve bir süre sonra bütün modların enerjisinin birbirine eşit olacağını öne sürmüşlerdir. Bu denge durumuna "termodinamiğin sıfırıncı yasası" denir.

FPU Newton'un hareket denklemini kullanarak şekilde gösterilen $N=64$ ve bir boyutlu yay sistemini çözümlenmiştir.



Şekil 2.2 FPU problemi için kurgulanmış nonlineer yay sistemi

Sistem elemanlarının etkileşim içinde oldukları göz önünde bulundurularak, komşu parçacıkların etkileşim potansiyeli;

$$V(r) = \frac{1}{2} kr^2 + \frac{1}{3} k\alpha r^3 \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir. Burada r , denge konumundan olan uzaklık, k ve α ise sabitleri ifade etmektedir. Kuvvet $F(r) = -dV/dr$ olduğundan;

$$F(r) = -kr - k\alpha r^2 \quad (2.22)$$

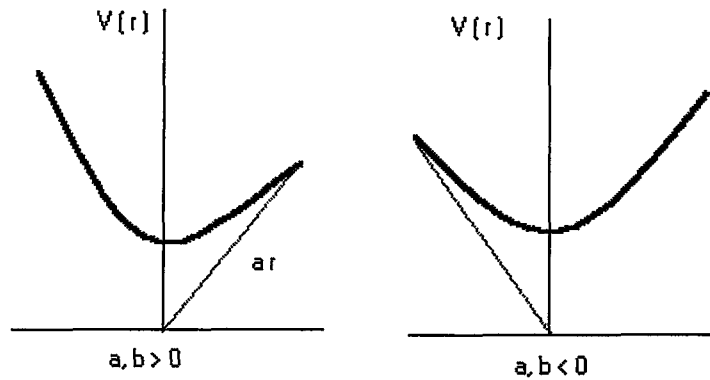
bağıntısı yazılabilir. Kulak zarının titreşimi içinde böyle bir kuvvet bağıntısı yazılmıştı. Yukarıdaki denklemde 1.terim harmonik, 2.terim ise anharmonik ifadelerdir.

Los Alamos'ta Maniac bilgisayarı ile yapılan hesaplamalar sonucu sistemin belli bir denge durumuna yaklaşmadığı, fakat sistemin enerjisinin belli modlara yaklaştığı görüldü. Bu olaya "FPU Anomalisi" adı verildi.

FPU Anomalisinin(bozukluğunun) kaldırılması için bir çok çalışmalar yapılmıştır. FPU nun nümerik olarak yaptığı hesabı Morikazu Toda analitik olarak yapmayı başarmıştır(Toda, 1989). Bunun için en yakın komşular arasındaki etkileşim potansiyelini

$$V(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \quad (2.23)$$

olarak ifade etmiştir. Burada ab çarpımı pozitifdir.



Şekil 2.3 Toda potansiyeli

$V(r)$ potansiyeli $a, b > 0$ ve $a, b < 0$ olduğu durumlarda yukarıda görüldüğü gibi kavisli bir hal almaktadır.

$$F(r) = a(e^{-br} - 1) \quad (2.24)$$

şeklinde kuvveti yazılabilmektedir. Çok küçük r değerleri için üslü ifadeyi şöyle açılabilir;

$$e^{-br} = 1 - br + \frac{1}{2!} b^2 r^2 - \dots \quad (2.25)$$

ve bu açılım yukarıdaki denklemde yerine yazılarak,

$$F(r) = -abr + \frac{1}{2} ab^2 r^2 - \dots \quad (2.26)$$

eşitliği elde edilebilir. Bu eşitlikteki ilk terim harmonik ikinci terim ise anharmoniktir.

Toda bu potansiyeli kullanarak FPU problemini analitik olarak çözmüş ve aynı sonuçları bulmuştur. Nonlineer latis dinamiği üzerindeki çalışmalar yalnızca istatistiksel fizikte yapılan teorik çalışmalar için önemli değildir. Örneğin; katıların erimesinin anlaşılmasında da önemlidir. Bir katının sıcaklığı yükselince atom yada iyonlarının titreşimlerinde genleşme görülür. Bazı kritik sıcaklıklarda titreşimler çok genişler ve katı madde sıvı hale dönüşür.

2.5 Volterra-Lotka Rekabet Denklemleri

Doğada bulunan çeşitli türler arasındaki rekabetler de doğrusal olmayan denklemlerle ifade edilebilir. Volterra – Lotka eşitliği de biyolojik türler arasındaki rekabeti ifade etmektedir. Bu denklem Vito Volterra'nın arkadaşı D'Ancona'nın 1905-1923 yılları arasındaki Adriyatik Denizi'nde yakalanan balık miktarının istatistiksel bir analizini yapmasıyla ortaya çıkmıştır. İki balık türü topluluğu(büyük balıklar ve küçük balıklar) aynı periyotlarda gözlenmiştir. Büyük balıklar küçük balıkları yiyerek yaşamlarını sürdürürler ve gittikçe büyüyerek sayılarını artırır. Bununla beraber belli bir süre sonunda küçük balıkların sayısı gittikçe azalır. Böylece büyük balıklar da açlık gibi sebeplerden ölmeye başlarlar ve sayıları azalır. Büyük balıkların sayılarının azalmasıyla birlikte küçük balık popülasyonu tekrar artmaya

başlar, çünkü küçük balıklar için tehlike kalmaz. Ancak küçük balıkların sayısının artması büyük balık popülasyonunun tekrar genişlemesine olanak sağlar ve bu çevrim tekrarlanarak devam eder(Volterra, 1926). Volterra bu av-avcı ilişkisini bir çift denklemle ortaya koymuştur;

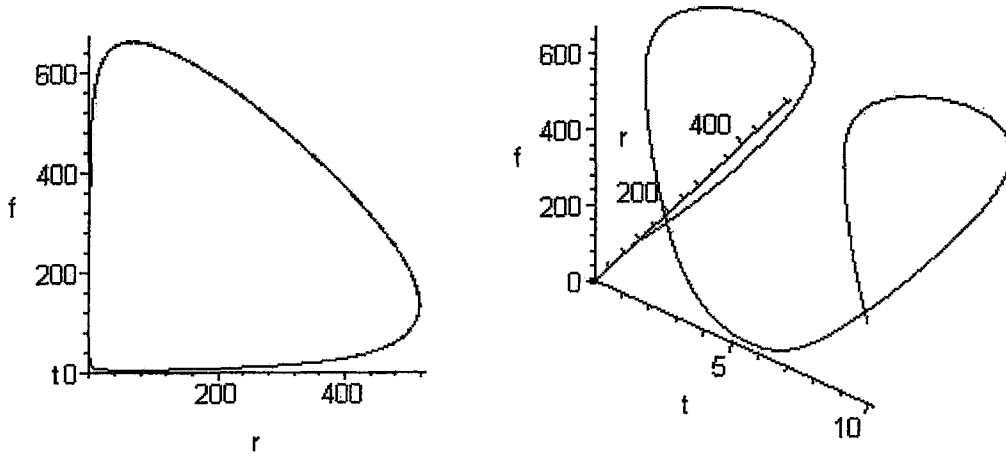
$$\begin{aligned}\dot{N}_B &= (-\alpha_B + g_B N_L) N_B \\ \dot{N}_L &= (\alpha_L - g_L N_B) N_L\end{aligned}\tag{2.27}$$

N_B büyük balıkların, N_L ise küçük balıkların sayısını sembolize etmektedir. İki balık türü arasında hiç etkileşim olmuyorsa, $g_B=g_L=0$ kabul edilir, büyük balıkların sayısı N_B azalır, küçük balıkların sayısı artar. Etkileşim olduğu zamanlarda $g_B N_L$, şu anki küçük balıkların sayısına bağlı olarak büyük balıklarda ortaya çıkacak artışı gösteren “artış sabiti”dir. Buna karşılık küçük balıkların denkleminde $-g_L N_B$ de azalma sabitidir. g_L ve g_B genellikle farklı sayılardır. Çünkü bir büyük balık bir çok küçük balığı yiyebilir. Yukarıda yazılan av-avcı ilişkisi denklemleri bir çok sisteme uygulanabilir. Bu tür nonlinear denklemler analitik ve sayısal tekniklerle topolojik bir kombinasyon olarak ele alınabilir. Denklemlerin doğru ve çabuk çözümleri popülasyondaki başlangıç koşullarının kesinliğine ve etkileşme şekillerinin sadeliğine bağlıdır.

Neff ve Tillman, tavşan-tilki eşitliklerinin sayısal çözümlerlerini irdelemişlerdir(Neff ve Tillman, 1975).

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \gamma_1 r - \alpha r f = 2r - \alpha r f \\ \dot{f} &= -\gamma_2 f + \alpha r f = -f + \alpha r f\end{aligned}\tag{2.28}$$

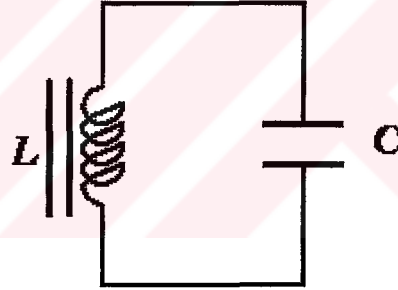
Burada r ve f tavşan ve tilki popülasyonlarının sayılarını belirtmektedir. $\alpha = 0$ da herhangi bir karşılaşma olmamaktadır. α etkileşim gücünün ölçülmesiyle hesaplanabilir. Tavşan-tilki popülasyonlarının sayılarındaki değişim grafiği aşağıdaki gibidir. Bu grafikte $\alpha = 0,015$ alınmıştır.



Şekil 2.4 Tavşan sayısına karşılık gelen tilki sayısı(İki ve üç boyut)

Eigen ve Schuster, bu modeli RNA molekülleri gibi biyolojik moleküllerin evrimi ve seleksiyonu için kullanmışlardır(Eigen, 1971; Eigen vd., 1981).

2.6 Doğrusal Olmayan İndüktans



Şekil 2.5 Doğrusal olmayan indüktör devre

Doğrusal olmayan elektrik devrelerine basit bir örnek olarak sığası C olan bir kondansatör ve buna bağlı N sarımlı ve demir çekirdekli bir bobinden oluşan bir devre alınabilir. Bu devredeki akım ile manyetik akı arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilebilir;

$$i = \frac{N\Phi}{L_0} + A\Phi^3 \quad (2.29)$$

Eğer bu bağıntıdaki küplü terim olmasaydı $N\Phi = L_0 I$ olacağı için lineer bir ilişki söz konusu olacaktı. Burada L_0 bobinin indüktansını, Φ ise bobinden geçen manyetik akıyı göstermektedir. Bu bağıntıdaki kübik terim devrede bulunan demir çekirdekten kaynaklanır.

Nonlinearite bu terime bağlıdır. Kondansatörden t sürede q yükü geçerse, devredeki toplam potansiyel değişimi;

$$\frac{q}{C} + N \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (2.30)$$

şeklindedir. Yukarıda verilen iki eşitlik kullanılarak ve $i=dq/dt$ yazılarak ;

$$\frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + N \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{C} \frac{N\Phi}{L_0} + \frac{A}{C} \Phi^3 + N \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{C} \frac{\Phi}{L_0} + \frac{A}{NC} \Phi^3 + \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = 0 \quad (2.33)$$

$$\ddot{\Phi} + \alpha\Phi + \beta\Phi^3 = 0 \quad (2.34)$$

denklemini elde edilir. Bu doğrusal olmayan denklemde $\alpha=1/L_0C$ ve $\beta=A/NC$ sabitlerdir.

2.7 Solitonlar

Doğrusal olmayan sistemlere verilebilecek örneklerden biri solitonlardır. Solitonlar fiziğin bir çok dalında çalışılan geniş kapsamlı bir konudur. Burada ise solitonlar sadece kavramsal olarak incelenecektir.

Bir boyutta sağa doğru c hızı ile ilerleyen ve şekli zamanla değişmeyen bir dalga atmasının yer değiştirme miktarı;

$$\Psi(x, t) = \Psi(x - ct) \quad (2.35)$$

şeklinde yazılabilir. Bu dalga atması gibi küçük dalga genlikleriyle karakterize edilen lineer ve dispersiyona uğramayan lokalize olmuş dalgaya solitary dalga denir. Bu solitary dalganın çözümlerine ise soliton adı verilir. Lokalize olmuş dalgalar;

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.36)$$

eşitliğine uygun olarak x doğrultusunda sabit hızla giderler. Doğada pek çok dalga olayı, hareketli tek bir puls ile açıklanamaz. Bunun yerine pek çok ilerleyen dalganın bir araya geldiği bileşke dalga şekilleri analiz edilir. Bu işlem için de üst-üste gelme prensibi uygulanır. Bu prensibe uyan dalgalar lineer dalgalar, uymayanlar ise nonlinear dalgalar olarak adlandırılmaktadır. Nonlinear dalgalar, lineer dalgaların aksine büyük genliklerle karakterize edilirler.

Bir çok solitary dalgadan oluşmuş dalga denklemi göz önüne alınacak olursa,

$$\Psi(x, t) = \sum_{j=1}^N \Psi_{sol}(x - c_j t) \quad (2.37)$$

denklemi yazılabilir. Dalgalar arasındaki bir çok etkileşimden sonra sadece bir δ faz farkı kadar değişim oluyorsa soliton çözümü,

$$\Psi(x, t) \sim \sum_{j=1}^N \Psi_{sol}(x - c_j t + \delta_j) \quad (2.38)$$

olacaktır. Yapılan bu işlemlerde atmanın, şeklini ve hızını değiştirmede kabul edilmiştir. Ancak gerçekte atma şeklini değiştirecek ve hareket esnasında kademeli olarak zayıflayacaktır. Bu etkiye dağılım (dispersiyon) denir. Yani zamanla atmaların genliği ve hızı değişeceği için solitary dalga olmaktan çıkacaktır. İşte bunu önlemek için dalga denkleminde nonlinear terimler eklenir. Böylece dalganın enerji dağılımında daha yüksek frekanslı terimler devreye girecek ve frekansta bir genişleme görülecektir. Belirsizlik ilkesine göre enerji artacağı için konumda bir daralma olacaktır. Sonuçta bu iki kavram birbirine dengeleyecektir. Bu da solitary dalganın tekrar oluşumu için önemli bir nokta olacaktır.

Buna göre solitonu oluşturan dalganın genliğinin (enerjisinin) bir dağılıma sahip olmasından dolayı solitary dalgaların deforme olması, nonlinear terimlerden gelen yüksek enerjili (genlikli) terimlerin katkısı ile engellenecek ve soliton oluşumu tekrar sağlanacaktır.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 6 \frac{\partial^2 (\Psi^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = 0 \quad (2.39)$$

Yukarıda yazılmış olan eşitlik 1-boyutta Boussinesq eşitliğidir ve sığ sularda aynı doğrultuda yayılan dalgaların soliton çözümlerini ifade eder(Boussinesq, 1872). Bu denklemdeki 3. terim nonlinear terimdir.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} = 0 \quad (2.40)$$

denklemini ise Korteweg-de Vries eşitliği olarak bilinir ve dikdörtgen bir kanalda düzgün akan bir suda ani bir değişim sonucu oluşan soliton çözümlerini verir(Korteweg ve Vries, 1895). Bu denklemde ise 2. terim nonlineariteyi meydana getiren terimdir.

3. DOĞRUSAL OLMAYAN OLAYLAR NASIL MODELLENİRLER?

Lineer bir ilişkinin matematiksel olarak tanımlanması kolaydır. Lineer ilişkileri bir grafik üzerindeki bir doğru ile ifade etmek mümkündür. Lineer bir eşitlik $y = bx + c$ formundadır. Lineer sistemler modüler sistemlerdir. Bu sistemler parçalara ayrılabilir. Sonra tekrar bir araya getirebilir ve bu parçaları birbirine eklenebilir.

Nonlinear sistemler ise genellikle çözüme elverişli sistemler değildir. Lineer sistemlerin tersine modüler özellik taşımazlar. Nonlinear bir sistemde parçalar arasındaki ilişkiler öyle bir şekilde karşılıklı olarak eşleştirilmişlerdir ki, bu sistemin bir alt sistemini çekip alarak, yalnızca onu inceleyemeyiz. Klasik matematik nonlinear etkileri analiz edememektedir. Bu yüzden eğrilere lineer yaklaşımlar yapılmakta ve bir çok kişi tarafından nonlinear ilişkiler dorusal çizgilerle ifade edilmeye çalışmaktadır.

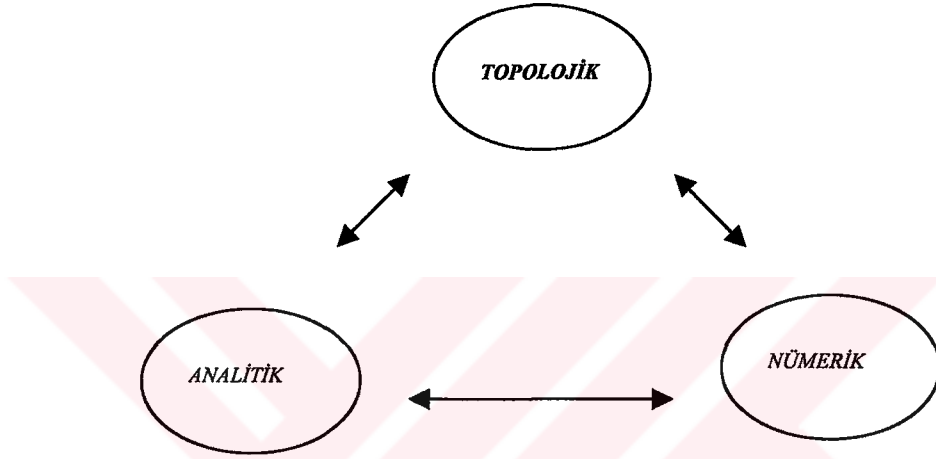
Campell(1989) tarafından lineer ve nonlinear fenomenlerin farklı yönleri şu şekilde ortaya konmuştur:

1. Zaman içerisindeki davranışlar bakımından; lineer olaylar düzenlidir. Nonlinear olaylar ise başlangıçta düzenli olabilmelerine karşın zamanla değişerek ne yapacağı belli olmayan bir hal alırlar.
2. Ortam yada uyarıcılardaki küçük değişikliklere verilen yanıtlar bakımından; lineer olaylardaki değişiklikler düzgün ve uyarıyla orantılıdır. Bunun tam zıttı olarak nonlinear sistemlerin küçük değişikliklere cevabı çok daha büyük olur.
3. Lokal atmaların ömrü; lineer sistemlerin atmaları zamanla ölür, sönümlenir. Nonlinear sistemlerde, birbirine yapışık şekildeki yüksek genlikli atmalar uzun süre sönümlenmezler, belki de hiç sönümlenmezler.

Akışkan sistemlerde ve mekanik sistemlerde, nonlinear şartlar genellikle insanların konuyu basite indirgeyip kolayca anlaşılabilir hale getirmek istedikleri zaman, devre dışı bırakmak istedikleri özellikler arasında sayılır. Çünkü bu nonlinear ilişkilerin çözümü zor veya imkansız olarak görülmüştür. Örneğin; Galileo basit sarkaçla yaptığı deneyde kütle hareketinin değişen açısının lineerlikten sapma yaratmasını ihmal etmiştir.

Nonlinear sistemler, lineer sistemlerde hiçbir zaman bulunmayan bir davranış biçimi zenginliği yaratmaktadır. Örneğin; akışkanlar dinamiğinde, bir akışkanın hızını, basıncını, yoğunluğunu ve viskozitesini kısa ve özlü bir şekilde ifade eden Navier-Stokes denklemi bir nonlinear denklemdir(Gleick, 1995). Doğada meydana gelen bunun gibi bir çok nonlinear olay nonlinear diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Son yirmi beş yılda bilgisayar teknolojisindeki devrim, nonlinear matematiği erişilebilir kılmıştır.

Nonlinear sistemleri ifade eden diferansiyel denklemleri çözmek için yaygın olarak kullanılan üç tip yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlar:



Topolojik yaklaşımda; adi diferansiyel denklemler tarafından ifade edilen nonlinear sistemler ve çözümleri faz diyagramları ile şematize edilmektedir.

Analitik yaklaşımda ise; sadece birkaç basit nonlinear adi yada parçalı(kısmi) diferansiyel denklemin kesin çözümü bulunabilir.

Nümerik yaklaşımda; bilgisayar kullanılarak özel başlangıç koşullarının diferansiyel denklemlerde yerine konmasıyla çözümler elde edilir.

Verilen bir diferansiyel denklemin lineer mi yoksa nonlinear mi olduğunu anlamak için şu iki noktaya dikkat edilmelidir(Dönmez, 2000).

- Bağlı değişken y nin türevleri hep birinci dereceli ve y terimi bulunan yerde y teriminin üssü bir ise denklem lineer diferansiyel denklemdir. Değilse nonlinear diferansiyel denklemdir. Örneğin; $\ddot{y} + y^2 = 0$ diferansiyel denkleminde y bağlı değişkeninin üssü 1 değil 2 dir. Bu nedenle denklem doğrusal değildir.

- Diferansiyel denklemdeki her katsayı fonksiyonu x bağımsız değişkeni cinsinden verilmiş ise denklem lineerdir. Fakat $y\ddot{y} - 2\dot{y} = x$ gibi diferansiyel denklemlerde y teriminin katsayısı x değişkenine değil de y değişkenine bağlı olduğundan bu tip denklemler nonlinear denklemlerdir.

Aşağıda doğadaki bazı nonlinear olayların hangi diferansiyel denklemlerle ifade edildikleri belirtilmiştir:

Sığ sularda oluşan dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 6 \frac{\partial^2 (\Psi^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = 0 \quad (3.1)$$

Dikdörtgen bir kanalda düzgün akan bir suda ani bir değişim sonucu oluşan soliton çözümlerini veren Korteweg-DeVries denklemi;

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} = 0 \quad (3.2)$$

Sönümlü basit sarkaç;

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = F \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

Yaylarda Duffing eşitliği;

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

Kulak zarı için titreşimi sağlayan kuvveti gösteren Helmholtz denklemi;

$$\ddot{x} + \tilde{\omega}^2 x + \beta x^2 = F(t) \quad (3.5)$$

Nonlinear LC devresi;

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{L_0 C} \Phi + \frac{A}{NC} \Phi^3 = 0 \quad (3.6)$$

4. TEKİL NOKTA TİPLERİ VE FAZ UZAYI KAVRAMLARININ ANALİZİ

4.1 Faz Uzayı Kavramına Genel Bir Bakış

Bir çok nonlinear sistemin kesin çözümü yapılamaz. Bu yüzden yaklaşık çözümler elde etmek için çeşitli yaklaşım yöntemlerine başvurulur. Spesifik durumların belirlenmesinde nümerik ya da analitik yöntemlere başvurulmadan önce faz diyagramlarını kullanmak bu durumların tespitinde kolaylık sağlayacaktır. Bu bölümde öncelikle faz uzaylarının analizi yapılacaktır.

Bir çok fiziksel problemin tanımlanmasında birinci derece denklemlerle ifade edilen sistemler kullanılır.

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

Buradaki P ve Q, bağımsız x ve y değişkenlerinin nonlinear fonksiyonlarıdır. P ve Q, t'ye açıkça bağlı olmadıkları için otonom eşitliklerdir(Enns ve McGuire, 1997).

Bütün mekanik problemlere Newton'un II . yasası uygulanabilir.

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \quad (4.2)$$

Buradaki F kuvveti x ve $\dot{x}$ nin nonlinear bir fonksiyonudur. (4.1) standart formundaki eşitlikler basit bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y \quad (4.3)$$

(4.2) eşitliğinden;

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = F(x, y) \quad (4.4)$$

denklemini elde edilir.

Bu son iki eşitlikten $P(x,y)=y$ ve $Q(x,y)=F(x,y)$ olduğu açıkça görülmektedir. Nitekim, basit sarkaç, nonlinear sıkıştırılmış yay denklemleri, Van der Pol denklemleri standart formda yazılabilir. Her biri sırasıyla $Q(x,y)= -\omega_0^2 \sin x$, $(-k/m)(1+a^2x^2)x$ ve $-x+\epsilon[1-x^2]y$ şeklinde ifade edilebilir. Tabiki büyük balık-küçük balık ilişkisi, lazer etkileşim ve biyolojik sistemlerin gelişimi gibi birçok olayı da burada olduğu gibi standart formdaki eşitliklerle ifade edilebilir.

(4.1) ile ifade edilen zamandan bağımsız temel otonom eşitliklerine dönülerek birbirine bölünecek olursa;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (4.5)$$

denkleme ulaşılır.

Bu denklemlerin çözümü x-y düzlemlerinin dairesel(eğrisel) koordinatları şeklindeki düzlem faz diyagramları ile verilebilir. Faz uzayında sayısal değerler, geometrik görüntülere dönüştürülür. Faz uzayı olarak adlandırılan hayali alandaki koordinatlara karşılık gelen sayılar kullanılır. Örneğin; Newton mekanik problemleri için faz diyagramları yerdeğiştirmeye karşılık gelen hız değerleri için çizilir(Redheffer, 1992).

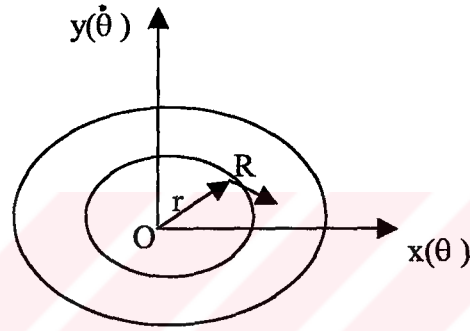
Tilki ve tavşan nüfusları arasındaki karşılıklı etkileşim, tilki sayısı ve tavşan sayısı değişkenlerinden oluşan bir dinamik sistemle ifade edilebilir. Bu sayılar iki boyutlu bir grafikteki boyutlar olarak düşünülürse, bu nüfusların nasıl değiştiğini gösteren resimler çizebilir. Zaman içerisinde tilki ve tavşan sayıları azalır, artar ve böylece faz uzayında temsil edilen nokta hareketli bir hal alır.

Sistemin zaman içerisinde herhangi bir noktada gösterdiği gerçek davranış n-boyutlu bir faz alanındaki bir nokta olarak gösterilir. Bu yaklaşım nonlinear denklemlerin, doğal olayları grafik ve geometrik olarak açıklayan çözümlerine imkan verir. Bu yöntemin sonucu formüller değil, sistemin zaman içerisinde gösterdiği davranışların grafik gösterimidir.

Nonlinear sistemlerde herbir noktanın sistemin evrimi içinde ne olacağını tahmin etmek mümkün değildir. Ancak, nonlinear sistem davranışındaki bu görünüşteki rastlantısallığa karşın, faz alan çalışmalarındaki gözlemler noktaların rasgele dağılmadığını ortaya çıkarmıştır. Zaman içerisinde ki pek çok gözlemden sonra, faz alanındaki noktalar bütün sistemin davranışının ayırtedici görüntülerini oluşturmuşlardır. Ortada “derin düzen boyutları”

olduğu, bunların bazı sınırları belirlediği ve sistemin genel davranış görüntülerine rehberlik ettiği görülmektedir ki bunlara çekici(atraktör) denmektedir.

(4.5) denkleminde tekrar göz önüne alınsın. Bu denklem (x,y) noktasından geçen eğrinin tanjantının alınması ile eğimi verir. Şimdi basit spesifik bir örneği göz önüne getirilsin. $\theta_{max} < \pi$ olmak üzere θ_{max} ve $-\theta_{max}$ arasında salınım yapan sönümsüz bir basit sarkaç düşünölsün. $\mp \theta_{max}$ ta açısal hız $\dot{\theta}=0, \theta=0$ iken açısal hız $\dot{\theta} = \mp$ maksimumdur. θ_{max} ya da toplam enerjiyi vermesi için sarkaç sistemi $(\dot{\theta} - \theta)$ düzlemlerindeki kapalı bir yörünge –genellikle elips- tarafından ifade edilmektedir. θ_{max} yada enerjinin farklı değeri için şekil 4.1 olduğu gibi farklı elipsler kullanılabilir(Enns ve McGuire, 1997).



Şekil 4.1 $\theta_{max} < \pi$ için basit sarkacın düzlem faz diyagramı

Yukarıda verilen şekilde yörünge boyunca hareket eden R faz noktası, zamanın bir fonksiyonu gibidir. Eğer r , O dan R ye doğru olan yarıçap vektörü ise, R noktasındaki hız faz hızı olarak adlandırılır ve

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} \dot{x} + \hat{j} \dot{y} \quad (4.6)$$

bağıntısı ile verilir. $\hat{i}$ ve $\hat{j}$ x,y eksenleri boyunca uzanan birim vektörlerdir. $\theta_{max} \ll \pi$ ise, hareket lineer olduğu için sarkacın hareketi basit harmonik harekettir ve faz hızı;

$$\vec{v} = \theta_{max} \omega_0 \left[\hat{i} \cos \omega_0 t - \hat{j} \sin \omega_0 t \right] \quad (4.7)$$

ile ifade edilir. ω_0 'ın sıfır olmadığı durumlarda, $\theta_{max} = 0$ olmadıkça faz hızı da asla sıfır olmaz. Burada O noktası denge noktasına karşılık gelmektedir. Çünkü m kütlesine uygulanan kuvvet burada ortadan kalkmaktadır. O noktası bir çeşit sabit ya da tekil noktadır. Tekil nokta

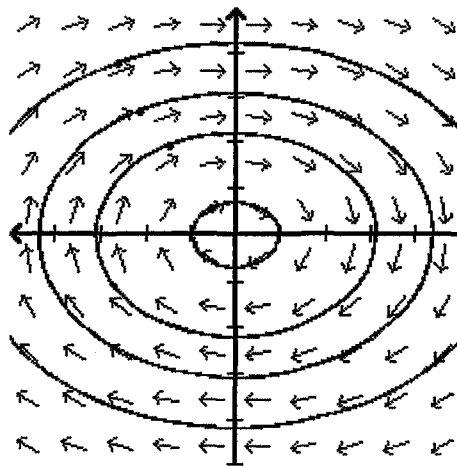
$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ durumunu sağlayan (x_0, y_0) noktası olarak tarif edilebilir. Basit sarkaç için faz düzleminde sadece O noktası tekil nokta değildir. Aynı zamanda $\dot{\theta}=0$ olduğu $\theta = \mp\pi, \mp2\pi, \dots$ noktaları da tekildir. O noktasının tekil nokta olmasının nedeni, sarkaç eşitliğine sönümlenme eklendiğinde, $\theta_{max} < \pi$ için t sonsuza giderken kütlenin O noktasına doğru yönelmesidir. Bütün bu olaylar fiziksel olarak rahatlıkla gözlenebilir. Örneğin; $\theta = \pi, \dot{\theta}=0$ konumunda sarkaç uçta bulunur ve hızı sıfırdır. Bu mekanikteki kararlı olmayan denge noktasına bir örnektir. Hafif bir dokunuş $\theta = \pi$ konumundaki kütlenin harekete geçmesine sebep olacaktır. Diğer tekil noktalar $\sin\theta$ tekrarına karşılık gelir. Açısal hızın sıfır olduğu $P=y=0$ ve net bir kuvvet ve ivmenin olmadığı $Q=F(x,y)=0$ noktaları tekil noktalar. Faz düzlemindeki diğer noktalar sıradan, adi noktalar olarak adlandırılırlar. (4.2) eşitliği kullanılarak bir adi noktanın değeri o noktadan geçen yörüngenin eğiminden tespit edilebilir. Fakat bir (x_0, y_0) tekil noktasının değeri hesaplanamaz. Çünkü (x, y) adi noktasından birkaç defa geçebilen eğri sonlu bir zaman içerisinde (x_0, y_0) a asla ulaşamayacaktır.

4.2 Basit Tekil Nokta Tipleri

Bu bölümde de kullanılmakta olan 4 tip tekil nokta incelenecektir.

4.2.1 Merkez(Center) Noktası

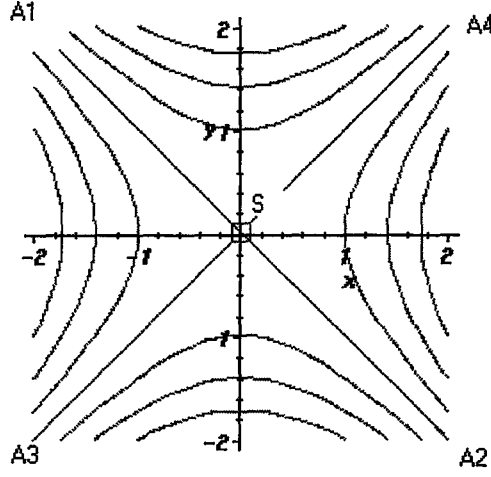
Merkez noktası $\theta=0, \dot{\theta}=0$ konumundaki basit sarkaç probleminde gözlenir. Bu yörüngeler, sarkaç problemindeki eliptik, sürekliliği olan kapalı yörüngelerdir.



Şekil 4.2 Bir merkez noktanın komşu yörüngeleri

4.2.2 Eyer(Saddle) Noktası

n tek sayı olmak üzere $\theta = \mp n\pi$ olduğu durumlarda basit sarkaç için komşu yörüngeler aşağıda olduğu gibi şekillendirilebilir.

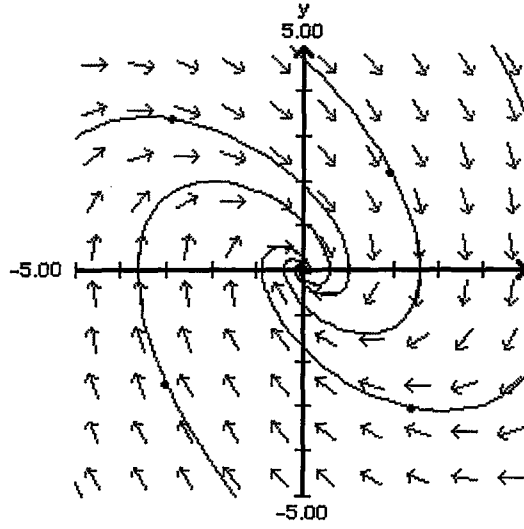


Şekil 4.3 Bir S eyer noktasına komşu yörüngeler

A_1S , A_2S , A_3S ve A_4S yörüngeleri S eyer noktasının etrafındaki alanı dört bölgeye ayırmaktadır. Temsili noktamız t sonsuza giderken A_1S ve A_2S boyunca S ye yaklaşırken yine zaman sonsuza giderken A_3S ve A_4S boyunca S den uzaklaşmaktadır. Başlangıçta $\theta = \pi$ durumunda bulunan basit sarkaca saat yönüne doğru hafifçe dokunulduğu takdirde sarkaç sönümsüzse enerji korunur. A_1S , A_2S gibi yörüngelerin eyer noktaları bitişiktir. Zaman sonsuza giderken sarkaç bir eyer noktasından diğerine doğru salınır.

4.2.3 Spiral(Focal) Nokta

Şekil 4.4 te F focal noktasına hızla yaklaşmakta olan spiral şeklindeki yörüngeler gösterilmiştir.



Şekil 4.4 Bir spiral noktaya komşu yörüngeler

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi bir çok yörünge spiral bir biçimde F nin çevresinde defalarca kez dönükten sonra F noktasına gittikçe yaklaşmaktadır. Buradaki F spiral noktası çekici bir noktadır. Basit bir fiziksel örnek olması açısından sabit bir spiral noktanın nasıl oluştuğu basit sarkaç üzerinde incelenebilir. Bir basit sarkaç vizkoz bir ortama sokulduğunda hızla orantılı olan bir direnç kuvvetine maruz kalacaktır. Eğer sarkaç denge konumundan küçük bir θ_0 açısı kadar çekilip serbest bırakılırsa sarkacın hareketi doğrusal sönümlenme ($\gamma > 0$) olarak ifade edilir (Gleick, 1995). Bu durumdaki harmonik osilatör eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (4.8)$$

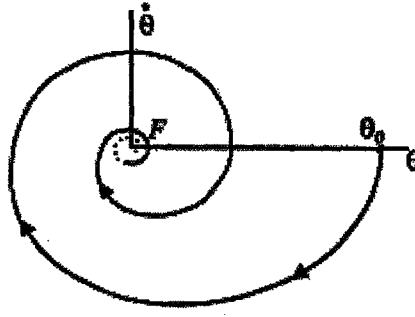
Düşük sönümlenmeler için denklemin çözümü şu şekildedir.

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} [\omega \cos \omega t + \gamma \sin \omega t] / \omega \quad (4.9)$$

Bu bağıntıda ,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

olacaktır. θ sıfıra doğru sarkacın salınım genliği gittikçe azalır. Şekil 4.5 ile ifade edilen düzlem faz diyagramında sistem başlangıçta $\theta = \theta_0$ ve $\dot{\theta} = 0$ konumundadır. t sonsuza giderken sistem $\theta = 0$ ve $\dot{\theta} = 0$ a yaklaşır. Orjin bu durumda sabit spiral noktası gibi davranır.

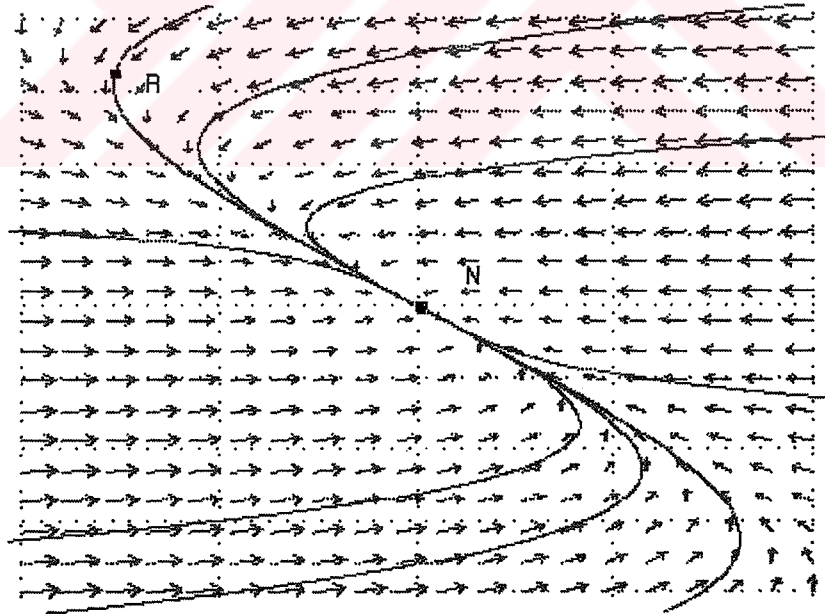


Şekil 4.5 Düşük sönümlü basit sarkaç için faz yörüngesi(Enns ve McGuire, 1997)

Eğer sarkaç geniş bir açı ile çekilirse faz yörüngesi F den uzaklaşır ve tamamen nonlinear denklemlerle ifade edilir.

4.2.4 Düğüm(Nodal) Noktası

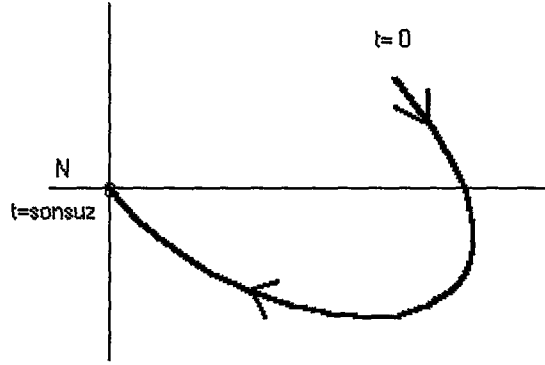
Bir düğüm noktasının özelliği yörüngelerin birbirlerini izleyerek yaklaşmalarıdır. Şekil 4.6 da gösterilen düğüm noktası sabit bir düğüm noktasıdır. Çünkü temsili bir R noktası t sonsuza giderken N ye yaklaşmaktadır. Sabit olmayan düğüm noktalarında ise ok yönleri buradakinin zıttıdır.



Şekil 4.6 Bir düğüm noktasının komşu yörüngeleri

Tekrar küçük titreşimli sönümlü sarkaç örneğine dönülecek olursa, burada aşırı sönüm için genel çözüm $\theta = Ae^{-r_1 t} + B e^{-r_2 t}$ dir. r_1 ve r_2 sıfırdan büyük ve gerçektir. Örneğin; $\theta > 0$ ve $\dot{\theta} > 0$

ise sarkacın hareketi şekil 4.7 de olduğu gibi ifade edilebilir. Bu durumda orijin sabit düğüm noktasıdır(Enns ve McGuire, 1997).



Şekil 4.7 Aşırı sönümlü harmonik osilatör için faz yörüngesi

4.3 Basit Tekil Noktaların Sınıflandırılması

(x_0, y_0) tekil noktasına komşu olan adi (x, y) noktasından geçen bir eğrinin eğimini veren genel ifade tekrar yazılsın.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (4.10)$$

Tekil noktada $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ dır. Adi noktada ise Q veya P den biri sıfır olabilir, ikisi birden sıfır olamaz. Tekil noktanın yanındaki adi noktalar için u ve v küçük değerler almak üzere;

$$x = x_0 + u \quad (4.11)$$

$$y = y_0 + v$$

eşitliklerini yazılabilir. O zaman, bir adi nokta;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x_0 + u, y_0 + v)}{P(x_0 + u, y_0 + v)} \quad (4.12)$$

dir. Pay ve paydayı küçük u ve v değerleri için Taylor serisi ile ifade edilebilir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{cu + dv + c' u^2 + d' v^2 + f' uv + \dots}{au + bv + a' u^2 + b' v^2 + e' uv + \dots} \quad (4.13)$$

$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ olarak alındı.

$$c \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}$$

$$d \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$$

$$a \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}$$

$$b \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$$

Q ve P reel ise $a, b, c, \dots$ sabitleri de reeldir. Basit tekillikte, yörüngelerin davranışlarının doğrusal bir şekilde ifadesi için yalnızca (4.14) eşitliğinde pay ve payda da yer alan lineer u ve v terimleri göz önüne alınır. Yani basit tekillik şu şekilde ifade edilebilir;

$$\frac{dv}{du} = \frac{cu + dv}{au + bv} \quad (4.14)$$

Eğer a, b, c ve d sıfırdan farklı, u ile v de yeterince küçükseler (4.14) eşitliği (4.13) denkleminin iyi bir yaklaşımıdır denilebilir. c ve d ya da a ve b yok edilirse, paydada ki yada paydaki yüksek dereceli terimler göz önüne alınmalıdır. a, b, c ve d nin her biri sıfırdan farklı ise u ve v nin de sıfıra eşit olmadığı durum için $au + bv = 0$ ve $cu + dv = 0$ dir. $au + bv = 0$ ve $cu + dv = 0$ ifadelerinin çözümü determinantla ortaya çıkarılır (Redheffer, 1992).

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

Yukarıda ki determinantın çözümü de $bc - ad = 0$ şeklindedir. c ve d ya da a ve b nin her biri sıfıra eşitse $bc - ad = 0$ olur. Determinantın çözümünün sıfırdan farklı olduğu durumlarda basit tekillik ortaya çıkabilir. Tekil noktaların çevresindeki yörüngeler (4.14) eşitliği ile betimlenmişti. Bu ifadede ki dv/du ifadesi birinci dereceden bir denklem çiftinin sonucu gibi düşünülebilir.

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = au + bv \quad (4.16)$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = cu + dv$$

(4.16) numaralı iki denklemden birincisi v için çözülerek ikinci denklemde yerine konur.

$$\ddot{u} + p\dot{u} + qu = 0 \quad (4.17)$$

$$p = -(a + d) \quad (4.18)$$

$$q = ad - bc$$

Yukarıda ki denklem gibi sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerde çözüm $u \sim \exp(\lambda t)$ formunda aranır. Bu denklemin çözümünden iki kök elde edilir.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (4.19)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \quad (4.20)$$

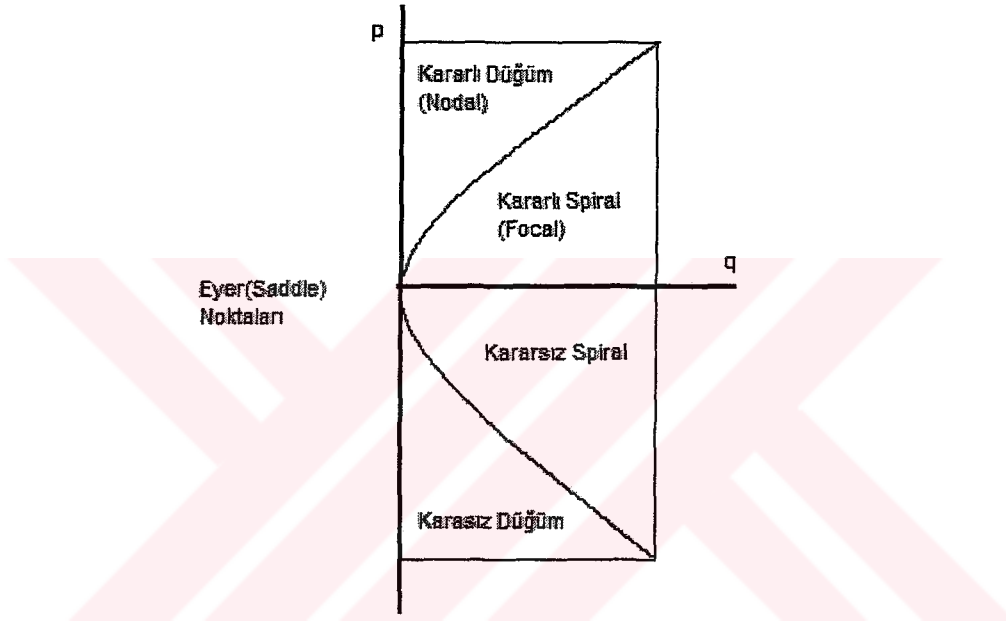
Basit tekil noktalar için, q sıfırdan farklı bir değer almalıdır. Bu yüzden köklerin sıfır olması imkansızdır. $q=0$ olduğu durumlarda yüksek dereceli tekil noktalar söz konusudur. Olası λ_1 ve λ_2 kökleri p ve q nun büyüklük ve işaretlerine bağlıdır.

$p^2 > 4q$ için kökler gerçel iken $p^2 < 4q$ için komplekstir. p 'nin sıfırdan farklı olduğu durumlarda, $p > 0$ ise tekil noktalar sabit, $p < 0$ ise sabit değildir. Bu son durum özel bir durumdur ve "Lyapunov Teoremi" olarak adlandırılır. Lyapunov teoremi, gerçel kökleri negatif olduğu durumlarda tekil noktaların sabit, en azından köklerden birinin pozitif olduğu durumlarda ise tekil noktanın hareketli olduğunu ifade eder.

Son olarak; bir önceki bölümde açıklanmış olan dört tekil nokta tipi için köklerin analizi yapılarak bu tekil noktaların p ve q değerlerine nasıl bağlı oldukları açıklanacaktır. Şekil 4.8 de p - q düzlemindeki bölgelerin tekil nokta çeşitlerinden hangisine ait olduğu gösterilmiştir.

Düğüm(nodal) noktası, λ_1 ve λ_2 köklerinin reel ve aynı işaretli olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu da aşırı sönümlü harmonik osilatörde gözlenir. Düğüm noktasının gözlemlendiği alan parabolün üstünü içerir. Ancak buraya p eksenini dahil değildir. Sabit düğüm noktası için $p > 0$, sabit olmayan düğüm noktası içinse $p < 0$ dır.

λ_1 ve λ_2 köklerinin gerçel fakat zıt işaretli olduğu durumlarda ise eyer(saddle) noktaları gözlenir. Bu noktalar p pozitifte olsa negatifte olsa p ekseninin-p eksenini dahil değil-sol tarafında yer alırlar. Bu da köklerin zıt işaretli olmasından kaynaklanır. Eyer noktaları daima hareketli tekil noktalardır.



Şekil 4.8 Tekil nokta tipleri için p-q düzlemi

Spiral noktalar λ_1 ve λ_2 köklerinin reel kısımları sıfırdan farklı kompleks eşlenik olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu durum düşük sönümlü osilatörlerde gözlenir ve parabolün iç kısmını içerir(Redheffer, 1992).

Vortex(merkez) noktalarda da kökler komplekstir. Fakat bu sefer reel kısımlar sıfırdır. Sadece imajiner kısmı vardır. $p=0$ ve $q>0$ durumunda gözleneceği açıktır. Bu durumda sönümsüz harmonik osilatör için geçerlidir. Bununla beraber merkez noktaları için kesin bir analiz yapılamaz. Bunun sebebi de (4.13) denklemi ile ifade edilmiş olan Taylor açılımında sadece birinci dereceden terimler olan u ve v yi alınmış olmasıdır. Bu açılımda ki yüksek dereceli terimler vortexleri spiral noktalara çevirebilir. Bu sebepten dolayı pozitif q eksenini hem merkez hemde spiral noktaları ihtiva eder. Bir O noktasının merkez noktası mı yoksa spiral

noktamı olduğunu anlamak için $x=p(x,y)$, $y=q(x,y)$ sistem eşitliklerini O'nun çevresindeki $P(x,y)$, $Q(x,y)$ fonksiyonlarında yerlerine koyulmalıdır.

$$P(x,-y) = -P(x,y) \quad (4.21)$$

$$Q(x,-y) = Q(x,y)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa nokta merkez(vortex) noktasıdır. Bu işlem merkez noktalar için Poincare Teoremi olarak adlandırılmaktadır(Enns ve McGuire, 1997).

4.4 Basit Sarkaç İçin Düzlem Faz Analizi

Öncelikle basit sarkaç eşitliğinin tekrar yazılması gerekmektedir.

$$\ddot{x} = \ddot{y} = -\omega^2 \sin x \quad (4.22)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega^2 \sin x}{y} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (4.23)$$

Tekil noktalar $y_0=0$ ve $x_0=n\pi$ de gözlenir. $x = x_0+u$, $y = y_0+v$ yazılır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{-\omega^2 (\sin(x_0+u))}{y_0+v} \quad (4.24)$$

İlk olarak; $x_0=0$, $y_0=0$ tekil noktasını düşünülecek olursa;

$$\frac{dv}{du} = \frac{-\omega^2 \sin u}{v} = \frac{-\omega^2 \left(u - \frac{u^3}{3!} + \dots\right)}{v} \approx \frac{-\omega^2 u}{v} \quad (4.25)$$

ifadesi ortaya çıkar. Burada yalnızca paydaki 1.terimi gözönüne alınmıştır. (4.27) ve (4.14) denklemleri karşılaştırılacak olursa;

$$\frac{cu + dv}{au + bv} = \frac{-\omega^2 u}{v} \quad a=0 ; b=1 ; c=-\omega^2 ; d=0 ; p=0 ; q>0$$

denklemini elde edilir. Şekil 4.8 tekrar incelendiğinde $p=0$; $q>0$ olduğu durumda tekilliğin merkez ya da spiral olacağı ortaya çıkar. Poincare teoremi tekilliğin vortex(merkez) olup

olmadığını söyleyebiliyordu. O halde bu teorem kullanılarak tekilliğin tipi tespit edilebilir. $x_0=0, y_0=0$ da;

$$P(x, -y) = -y = -P(x, y)$$

(4.26)

$$Q(x, -y) = -\omega^2 \sin x = Q(x, y)$$

Buna göre $x_0=0, y_0=0$ da tekilliğin vortex olduğu ortaya çıkmış olur.

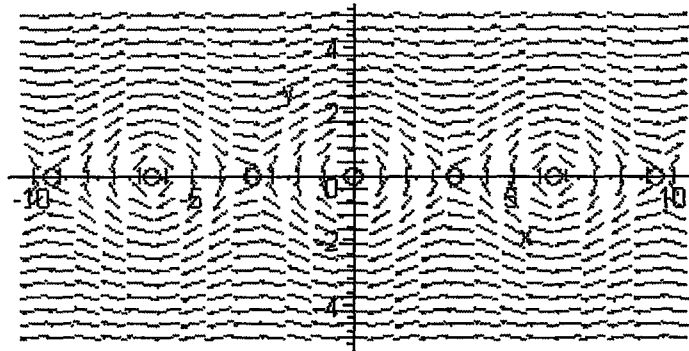
Şimdi de $x_0=\pi, y_0=0$ durumunu incelensin. Paydaki $\sin(\pi+u)$ ifadesi $\sin u$ 'ya eşittir.

$$\sin(\pi + u) = -\sin u \simeq -u$$

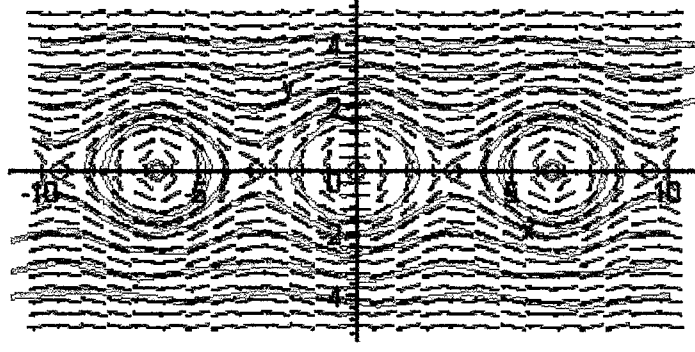
$$\frac{dv}{du} \simeq \frac{-\omega^2 u}{v}$$

(4.27)

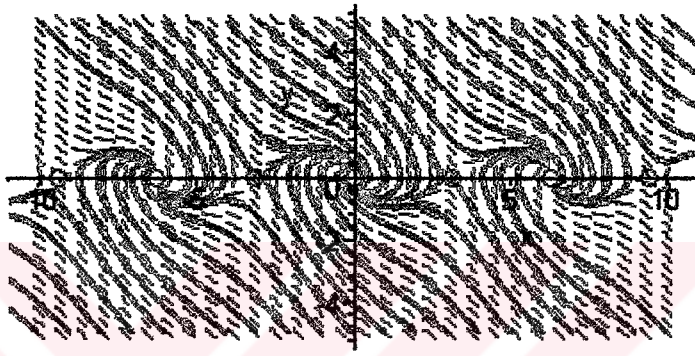
Buradan $a=0$; $b=1$; $c=\omega^2$; $d=0$ olduğu ve bundan dolayı da $p=0$; $q=-\omega^2 < 0$ olacağı rahatlıkla hesaplanabilir. p - q diyagramında $q < 0$, $p=0$ durumunda eyer noktaları söz konusu idi. n 'nin farklı değerleri için tekillikler analiz edilirse aynı sonuçlar alınacaktır. n 'nin çift değerleri için merkez, tek değerleri içinse eyer noktalarının ortaya çıkacağı rahatlıkla görülebilir. Bu yazılan ifadeler faz diyagramına da dökülebilir. Bitişik yörüngelerin bağlandıkları noktalar eyer noktalarıdır. Hatırlanacak olursa t sonsuza giderken basit sarkaç hareketi sarkacın bir eyer noktasından diğer bir eyer noktasına geçmesi şeklinde idi.



Şekil 4.9 Basit sarkaç için tanjant alanı



Şekil 4.10 Sönümsüz basit sarkaç için faz düzlemi



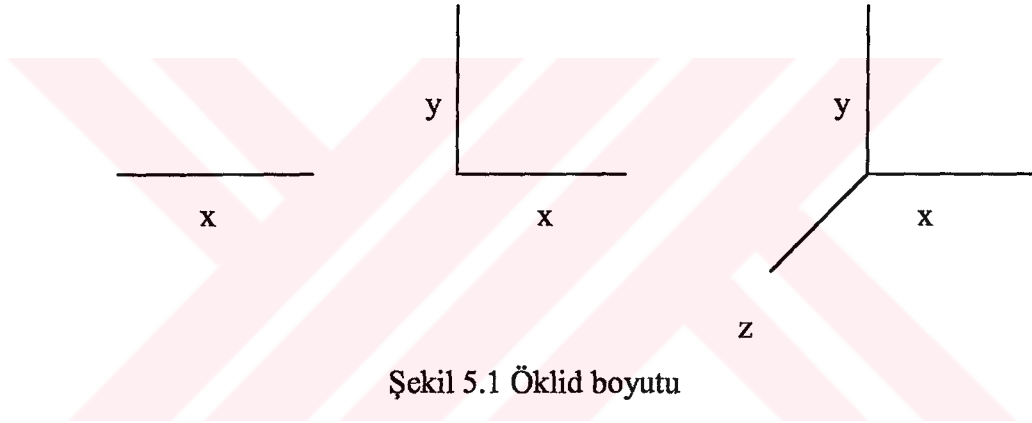
Şekil 4.11 Sönümlü sarkaç için faz düzlemi

5. BOYUT KAVRAMI VE FRAKTAL YAPILAR

5.1 Boyut Kavramına Genel Bakış

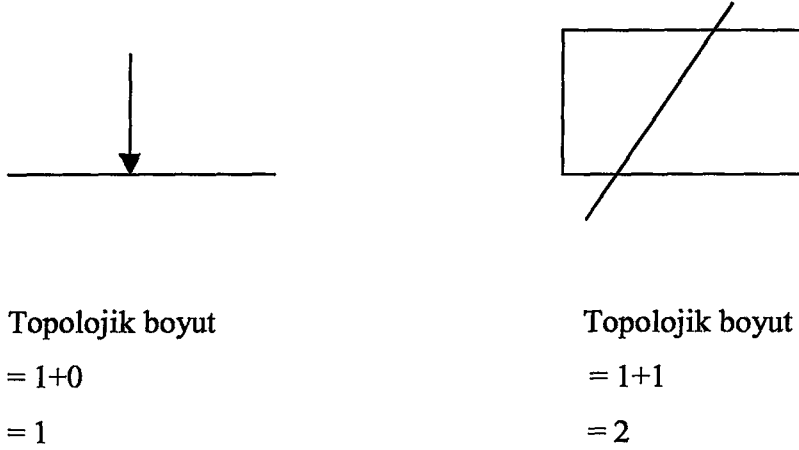
Kaos teorisinde boyut kavramı genellikle yedi ayrı alanda kullanılmaktadır(Williams, 1997).

1. Öklid boyutunda bir öklid şeklinin ya da objesinin tasvir edilebilmesi için koordinatlara ihtiyaç vardır. Örneğin, uzunluk tek bir koordinatla ifade edilebilir. Bu da düz bir çizgiyle gösterilebilir. Bir alan da uzunluk ve genişlik boyutları ile tasvir edebilir. Bir oda ise uzunluk, genişlik ve yükseklik olmak üzere 3 boyutta ifade edilebilir. Bu arada bir noktanın boyutunun sıfır olduğu da bilinmelidir. Bir, iki ve üç boyut aynı zamanda çizgi, alan ve hacim olarak da ifade edilebilir.



Şekil 5.1 Öklid boyutu

2. Bir nesnenin topolojik boyutu ise bu yapının en basit geometrik objesinin öklid boyutuna bir eklenmesi ile elde edilir. Örneğin, düz bir çizgi yani birbirleriyle bağlantılı seri noktalar kümesi ele alınsın. Her hangi bir nokta bu noktalar zincirinden çıkarıldığı zaman düz çizgi, daha küçük iki çizgi halini alacaktır. Formüle uygun olarak, bir doğrunun topolojik boyutu $1+0=1$ olacaktır. Peki bir yüzey hakkında ne söylenebilir? Bir yüzeyden iki küçük yüzey elde etmek için bu yüzeyden bir nokta çıkarılması bir işe yaramayacaktır. Bu durumda sadece yüzeyde küçük bir delik oluşacaktır. Onun yerine bir çizgi çıkarılması daha uygun olur. Bir doğrunun öklid boyutu 1 dir. Bu yüzden yüzeyin topolojik $1+1=2$ olacaktır. Benzer şekilde, bir çizgi üç boyutlu bir katıdan çıkartılamayacaktır. Çünkü bu durumda bu katıda sadece bir çukur oluşacaktır. Bir düzlemin çıkartılması bu katıyı bölmek için yeterli olacaktır. Böylece bu katının topolojik boyutu $1+2=3$ olacaktır. Önemli bir noktada; topolojik boyutun daima tam sayı olması ve genellikle öklid boyutu ile aynı değeri almasıdır.



Şekil 5.2 Topolojik boyut

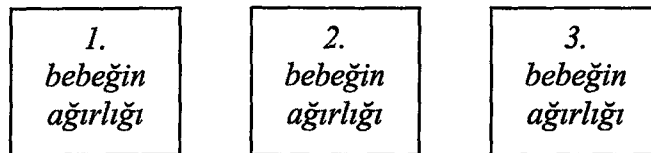
3. Standart faz düzleminde değişkenlerin nelere nasıl bağlı oldukları 3 kategori de incelenebilir. Bütün bu üç durumda da bu değişkenler gerçek anlamda ölçülebilir niceliklerdir.

1. Durum: Bir sistemin etkileşim içindeki unsurları; örneğin, hava durumu yedi değişken yada boyutta ifade edebilir. Bu boyutlar ; sıcaklık, hava basıncı, rüzgar hızı, rüzgarın yönü, bulutların durumu, nem ve yağış miktarı(Ruelle, 1994).



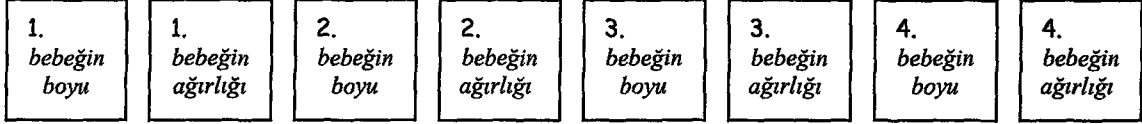
Şekil 5.3 Yedi boyutlu hava sistemi

2. Durum: Örneğin, iki bebeğin bulunduğu ve bu bebeklerin ağırlıklarının haftada bir tartılarak ölçüldüğü bir sistem oluşturulmuş olsun. Oluşturulan bu sistem her iki bebeğinde kilosundaki değişimi içerecektir. Bu nedenle iki boyutlu bir faz uzayında bu değişim gösterilebilir. Aynı şey üç bebek yada dünyadaki bütün bebekler içinde yapılabilir. Burada faz uzayının boyut sayısı N_d ile ifade edilebilir ve bu da ölçümü yapılan bebek sayısına eşittir.



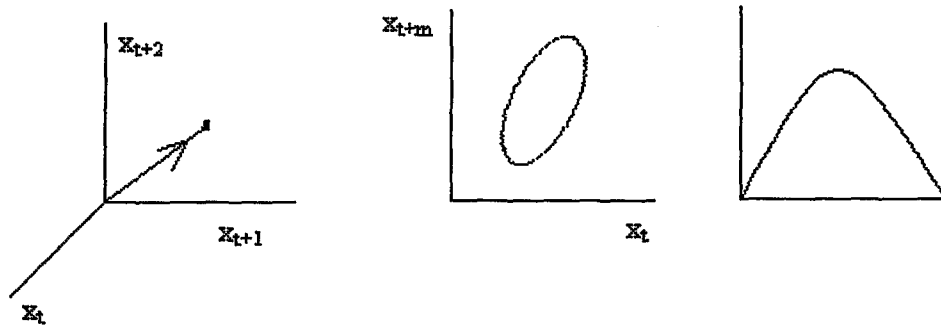
Şekil 5.4 Üç boyutlu ağırlık sistemi

3. Durum: Burada da bebeklerin boy ve kilolarının ölçülmesi sonucu bir sistem oluşturulmuş olsun. Bu durumda iki bebeğin ölçümü için dört boyutlu bir faz uzayı gerekmektedir. Boy ve ağırlık ölçümü dört bebek için yapılacaksa sekiz boyut yada eksen söz konusu olacaktır (Dört bebek x her bebek için iki özellik). Burada da boyut ölçülebilir niceliklerin sayısı olarak kullanılmıştır.



Şekil 5.5 Sekiz boyutlu boy-ağırlık sistemi

4. N_d ise boyut vektörüdür. İki boyutlu bir vektör ile iki eksen ile tarif edilen faz uzayındaki bir noktanın yeri gösterilir ve x_t ve x_{t+m} olarak adlandırılır. Aynı şekilde üç boyutlu bir vektör ile de grafikteki herhangi bir noktanın yeri gösterilebilir ve x_t , x_{t+m} ve x_{t+2m} olarak ifade edilir.
5. Gömülü boyut N_d boyutsal vektörü ile yakından ilişkili olan genellikle bir çekiciyi canlandırma amaçlı varsayılan dört boyutlu sistem taslağında kullanılan $(x_t, x_{t+m}, vb.)$ gibi örtülü sayısal değerleridir.
6. Bir boyutlu harita, ayrı eşitlik veya fonksiyonun değerlerini ve geçmişten bugüne kadar nasıl değiştiğini gösterir. Bu tabi ki bir boyut değildir. Ancak bunun yerine kullanılabilecek daha popüler bir kelime de yoktur.

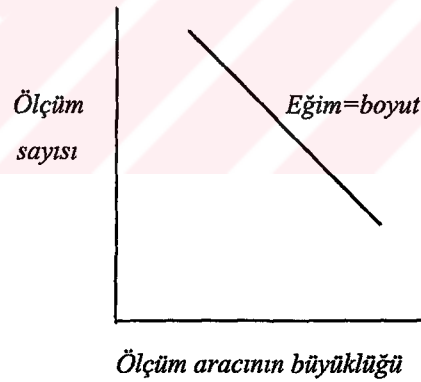


Şekil 5.6 Üç boyutlu vektör, gömülü boyut ve bir boyutlu harita

Burada boyut kavramının altı farklı tarifi yapıldı. Bunların ortak özelliği hepsinin tam sayı ile ifade edilebilen boyutlar olması idi. Finalde ise diğerlerinden farklı bir boyut kavramından söz edilecektir.

7. Uzunluğu bilinen çubuk gibi düzgün bir nesne ile iki nokta arasındaki uzaklık ölçümünün yapılacağı farzedilsin. Eğer çubuk yeterince uzunsa birkaç defa da bu mesafeyi rahatlıkla ölçebilir. Ancak çubuk yeterince uzun değilse bu mesafeyi ölçmek için çok daha fazla ölçüm yapılması gerekecektir. Örneğin, bir bahçenin boyu uzun bir çubuk parçasıyla 10 defada ölçebiliyorsa, daha kısa bir çubuk kullanıldığında belki de 100 keredede ölçülebilecektir. Burada elde edilen sonuçların alanın düzgün yada engebeli olup olmamasına göre değişiklik göstereceği de muhakkaktır.

Deneysel genel bir kurala göre, yapılan ölçümün sayısındaki artış ile ölçüm yapılırken kullanılan çubuğun uzunluğu arasında düzgün logaritmik bir ilişki vardır. Burada düz çizginin eğimi logaritmik oranın üstel bir ifadesidir. Bu üstel ifade de boyut olarak adlandırılmaktadır. Çubuğun boyunun azalmasıyla birlikte ölçüm sayısının artacağı bu grafikte rahatlıkla görülebilmektedir. Burada ki ters orantıdan dolayı üstel ifade yani boyut negatif olmak zorundadır(Williams, 1997).



Şekil 5.7 Ölçüm sayısındaki artış ile ölçek değeri arasındaki üstel ilişki

Yukarıdaki ifadeler aşağıdaki gibi formülize edilebilir.

$$\text{Ölçüm sayısındaki artış} \propto (\text{Ölçüm aracının uzunluğu})^{-\text{boyut}} \quad (5.1)$$

Burada boyut üstel olarak formülle ilişkilidir. Bu yüzden bir çok kişi tarafından “üstel boyut” ifadesi kullanılmaktadır. Boyut kavramı, matematiksel anlamda önemli bir karakteristik

terimdir. Çünkü boyut, ölçek boyutu ile ölçüm sayısı arasındaki özel bir artışı ifade etmektedir. Aynı genel ilişki iki yada daha fazla boyuttaki faz uzaylarında da geçerlidir.

Genellikle bu eşitlikteki üstel terimin verilmesine doğrudan ihtiyaç duyulmaktadır. (5.1) denkleminde eşitliğin her iki tarafının da logaritması alınarak yeni bir düzenleme yapılabilir:

$$\log (\text{ölçüm sayısındaki artış}) \propto (- \text{boyut}) \times \log (\text{ölçüm aracının uzunluğu})$$

$$(- \text{boyut}) \propto \log (\text{ölçüm sayısındaki artış}) / \log (\text{ölçüm aracının uzunluğu})$$

Boyut ifadesinde yer alan eksi işareti önce ölçüm aracının uzunluğu kavramının önüne yazılıp sonra da ortadan kaldırabilir.

$$\text{Boyut} \propto \log (\text{ölçüm sayısındaki artış}) / \log (1/\text{ölçüm aracının uzunluğu}) \quad (5.2)$$

Burada “boyut” bir çok durumda tam sayı ile ifade edilebilen bir değer almaz.

5.2 Fraktal Boyut Kavramı

Fraktal boyut kavramı son zamanlarda teknik literatürde sık sık rastlanan bir terimdir. Boyut ailesinin bu popüler üyesi gerçekten de önemli bir yere sahiptir. “Fraktal boyut”, aynı düzeydeki diğer boyut kavramlarından farklı olarak üstel boyutları ifade etmek için kullanılmaktadır(Mandelbrot, 1967).

Fraktal kavramının önemi iki noktada toplanabilir. Birinci nokta, nesnelerin uzunluklarını, yukarıda açıklandığı gibi ölçek boyutu ile sayım sayısı arasındaki ilişkiyi üstel bir şekilde ifade ederek tahmin edebilmesidir. İkinci nokta ise, tamsayı olmayan analitik boyut tiplerinin ifade edilmesinde kullanılmasıdır. Bu yüzden insanlarda fraktal kavramı, tamsayı ile ifade edilemeyen yani kesirli boyutu çağrıştırmaktadır.

Fraktal boyut kavramı yerine 1980 li yıllardan itibaren yaygın olarak benzer boyut, Hausdorff boyutu ya da kapasitesi kavramları da kullanılmıştır.

Fraktal bir model, geniş bir alan üzerinde birbirine benzeyen ya da tekrar edilen desenler topluluğudur. Her şeyden öteye, fraktal kendine benzeyen demektir. Fraktal parçacıklara büyütülerek bakıldığında birbirlerini tekrar ettikleri gözlenir. Örneğin, bir ağaç gövdesinden

çıkan bir çok dal birbirini tekrar edercesine aynı deseni oluşturarak yayılır. Kendi kendine benzerlik her düzeydeki ölçekte simetri demektir. İçeriğinde, başlanan yere geri dönülmesi, patern içinde patern bulunması vardır.

Fraktal geometri malzemeye, yani, metallerin yüzeylerinde mikroskopla görülebilecek küçüklükteki pürüzlere, petrol içeren gözenekli kayalardaki ufacık deliklere ve kanallara, bir deprem bölgesindeki kırık arazi şekillerine bakmak için başvuru bir yöntemdir.

Fraktaller ve kaos birbirleri ile iç içe geçmiş kavramlardır ve sık sık beraber gözlenirler. Örneğin, bir kaotik çeker, fraktal yapıya sahiptir. Çünkü bu çekerlerde kendini tekrar eden bir yapıya sahiptirler(Gleick, 1995).

Fraktaller dünyanın her köşesinde gözlenebilirler. Bu alanlardan bazıları şunlardır:

1. Damarların dallanması, nehir yatakları, ağaçlar ve eğrelti otları,
2. Dağ ve kayalıklar gibi engebeli yer yüzü şekilleri,
3. Yer yüzünde ortaya çıkan çatlaklar ve ağsı yapılar,
4. Astreoid ve meteorlar, toprak,kaya ve kömür gibi zamanla değişime ve parçalanmaya uğramış objeler,
5. Türbülans, jetlerin havada bıraktığı izler, bulutlar, sigara dumanı, geminin suda bıraktığı iz, sis ve duman,
6. Kıtaların kıyı şeritleri,
7. Satürn halkaları ve gezegenler arası manyetik alan dalgalanmaları,
8. Hisse senedi fiyatlarındaki değişimler,
9. Kalp atış ritmindeki frekans spektrumu, idrar yolları sistemi,
10. Kar taneleri,
11. İnsanların gelirleri.

Buraya kadar söylenenler kısaca maddeler halinde şöyle özetlenebilir:

- Fraktaller düzgün ve pürüzsüz olamazlar. Genellikle kırık, engebeli, düzensiz, kabarık görünümlü olurlar.
- Fraktal kelimesi düzensiz ve parçalı, kırıklı ve kesikli şekilleri-kar tanelerinin billurumsu eğrilerinden galaksilerin kesintili tozlarına kadar düşünebileceğimiz bütün şekilleri-betimlemek, hesaplamak ve düşünmek için kullanılacak bir araç yerine geçen kelime olmuştur.

- Fraktaller tamsayı ile ifade edilemeyen kesirli boyutlardır.
- Fraktal nesneler basit cebirsel eşitliklerle ifade edilemezler. Kendi özgü ifade edilme şekilleri vardır.
- Fraktaller genellikle matematiksel işlemlerin bir çok kez tekrar edilmesiyle elde edilmişlerdir. Bu işlemlerin defalarca kez tekrar edilmesi ise ancak bilgisayar yardımı ile olabilmektedir.

5.3 Benzerlik Boyutu

Benzer boyut, bütün üstel boyut tiplerinin temel prensiplerini içeren bir boyut kavramıdır. Nesnelerin geometrik yapısını yalnız bir sayı ile adlandırır. Nesnelerin içeriklerine bakarak düz çizgilere-kare, küp, üçgen vb...-benzetmeye çalışır.

5.3.1 Ölçekleme

Benzer boyutun temelinde objelerin içinden çok küçük parçaların çıkarılması vardır. “Ölçekleme”nin buradaki anlamı bir nesnenin küçültülerek ya da büyütülerek orijinal şeklin kopyalarının elde edilmesidir. Kaosun çözümlenmesinde büyütmenin tersine daima bir küçültme söz konusudur.

Düz bir çizgi ele alınarak dört eşit parçaya ayrıldığında ortaya çıkan her yeni parça orijinalinin minyatür bir kopyası olacaktır. Oluşan bu yeni parçalar orijinal şeklin $\frac{1}{4}$ oranında küçültülmüş hali olacaktır. “Küçültme” oranına bağlı olarak fraktal yani küçük parçalar elde edilecektir.

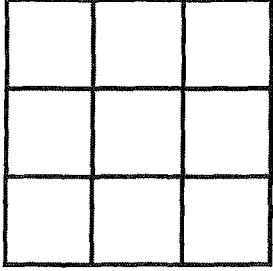
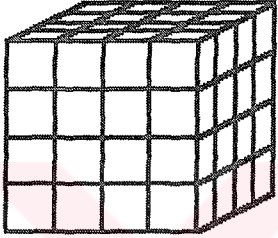
5.3.2 Basit Geometrik Formlar ve Boyutları

Bir çok kez “küçültme” yapılarak aynı şeklin küçük kopyaları elde edilebilir. Düz bir çizgiden dört küçük parça elde edilmesi gibi bir çok geometrik objenin de bu yöntemle küçük kopyaları elde edilebilir. Bu yöntem 3 ana bölüme ayrılabilir. Bu aşamalar; temel aşama, çıkarım aşaması ve silerek yerine koyma aşamasıdır(Williams, 1997).

Bu üç aşamada şu iki adımı kapsar:

- 1- Objelerin belirlenen oranlara göre eşit parçalara ayrılması. Örneğin, düz bir çizginin dört küçük parçaya ayrılması.

2- Her yeni küçük kopya için bu adımın tekrarı.

	$\frac{1}{r}$	N	$D = \frac{\log N}{\log 1/r}$
	5	5	1
	3	9	2
	4	64	3

Şekil 5.8 Çeşitli geometrik nesneler ve boyutları

5.3.2.1 Temel aşama

Bu en temel aşamada, her yeni kopya yeni paternlerin oluşumuna katkı sağlar. Burada oluşan her yeni parça orijinal kopyası ile aynı yönde yönelmektedir. Düz bir çizgiden parça alınması örneği şekil 5.8 in üst sırasında gösterilmiştir.

Şimdi de ölçeklenme oranı ile oluşan yeni parça sayısı arasındaki ilişki incelensin. Birim uzunluktaki orijinal çizgi parçalara ayrılsın. Beş yeni küçük çizgi, orijinal parçanın uzunluğunun $1/5$ i kadar bir uzunluğa sahiptir. Ana çizginin uzunluğunun 1.0 olarak kabul edilmesi yapılacak işi bir hayli kolaylaştıracaktır. Ölçek oranı (r) bu durumda $1/5$ olacaktır. Oluşan parça sayısı (N) ise 5 tir. Bu değerler aşağıdaki denklemde yerine yazılsın.

$$\text{Orijinal parçanın uzunluğu} = \text{ölçek oranı} \times \text{parça sayısı}$$

Ya da sembolleri ile yazılacak olursa,

$$1 = r N \quad (5.3)$$

Düz bir çizginin boyutu $D=1$ idi.

$$N r^D = 1 \quad (5.4)$$

denkleminde değerler yerine yazılarak bu söylenenler doğrulanabilir. $5(1/5)^1 = 1$. İki boyuttaki şekilleri incelemek için birim alana sahip bir kare küçük karelere bölünmelidir. Bu karenin bir kenar uzunluğu üç parçaya bölünürse yani scaling oranı $1/3$ olursa bu kareden dokuz tane küçük kare elde edilir. Bu da (5.8) numaralı şeklin 2.sirasında gösterilmiştir. Bir karenin boyutu $D=2$ dir. Bu nedenle; (5.4) numaralı eşitliğin sol tarafında değerler yerine yazılırsa $N r^D = 9(1/3)^2 = 1$ olduğu görülmüş olur. Böylece orijinal objenin birim alanı da elde edilmiş olur. Aynı şekilde “ölçek” oranı $1/4$ alınarak yeni karenin bir kenarı 4 parçaya ayrılırdı 16 tane küçük kare elde edilmiş olacaktı. Üç boyutlu cisimlere örnek olarak bir küp alınsın ve bu küpün her bir kenarı dört eşit parçaya ayrılınsın. Bunun anlamı ölçek oranının $r = 1/4$ olmasıdır. Bu işlemin sonucunda 64 tane küçük küp elde edilmiş olur. $N r^D = 64 (1/4)^3 = 1$. (5.4) denklemi (5.2) denkleminde elde edilmiştir. D nin değerinin bulunması amacıyla (5.4) denklemi tekrar düzenlensin.

$$\log N + D (\log r) = \log 1$$

$$\log N + D (\log r) = 0$$

Bütün terimler $\log r$ ye bölünerek D tek başına bırakılırsa,

$$D = - (\log N / \log r)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Bu denklemdeki eksi işareti de ortadan kaldırıldığında son olarak şu denklem ortaya çıkar.

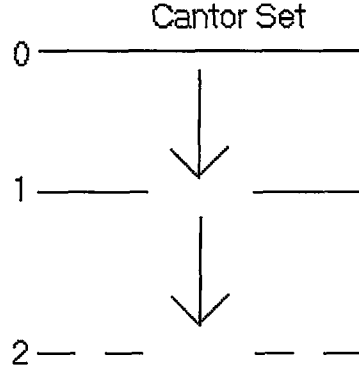
$$D = \log N / \log (1/r) = \text{logaritma (Parça sayısı)} / \text{logaritma (1/scaling oranı)} \quad (5.5)$$

Bu eşitlik yalnızca düz çizgilerden oluşmuş objeler için uygulanabilir(Mandelbrot, 1967).

5.3.2.2 Silme aşaması

Bu evre ilk evreye göre biraz daha komplekstir. Yeni kopyalar elde edilirken basit bir kural olarak düz hatlar parçalara ayrılıyordu. Burada bu ayrılan küçük parçalardan biri çıkartılacaktır. Örneğin, scaling oranı $1/3$ alınarak, düz bir çizginin 3 parçaya ayrılmış olduğu

varsayalım. Bu aşamada bu parçalardan ortadaki çıkartılır. Genel şemayı koruyarak işlem aynı şekilde devam ettirilir. Şekil (5.9) da da gösterildiği gibi birinci basamaktan kalan iki parça için de aynı işlem uygulanır. Yani önce parçalara ayrılır daha sonra ortadaki parçalar çıkartılır, böylece 4 yeni parça elde edilmiş olur. Bu metot tekrar tekrar uygulanarak sonsuz küçük parçalar serisi elde edilir. Bu seri sonucu çizgilerin çok küçültülerek noktalar haline geldiği bir limit değere ulaşılır. Bu sete ise Cantor seti adı verilmiştir(Gleick, 1995).



Şekil 5.9 Cantor seti

Peki Cantor setinin boyutu nedir? Orjinal bir boyutlu çizgi küçük küçük parçalara ayrıldığı için Cantor setinin boyutu 1'den küçük olmalıdır. Kaç kez parçalara ayrılmış olursa olsun, geriye kalan çok küçük, toz şeklinde ki segmanlar ya da noktalar hala bir çizgi şeklindedir. Bunun anlamı boyutun sıfırdan büyük olacağıdır. Tekrar (5.5) denkleminde dönelim. Verilen herhangi bir çizgi ya da kopyanın orta parçası çıkarıldıktan sonra 2 segman olacaktır. Bundan dolayı parça sayısı $N = 2$ dir. Scaling oranı $r = 1/3$ tür. Bu değerler denklem (5.5) te yerine yazılırsa Cantor setinin boyutu bulunmuş olur.

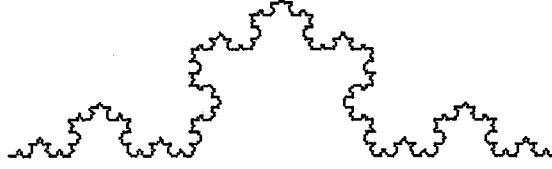
$$D = \log 2 / \log 3 = 0,631$$

Buradan da anlaşılacağı gibi benzer boyutun tam sayı olması gerekmemektedir! Bu gerçek, diğer üstel boyutlar içinde geçerlidir.

5.3.2.3 Silme ve yerine koyma aşaması

Bu üçüncü aşamada yine parçalama ve silme söz konusudur. Fakat burada iki ya da daha fazla küçük çizginin yer değiştirmesi söz konusudur. Burada yeni parçaların aynı yönde yönelmiş olmaları şart değildir. Buna en iyi örnek “ Koch kar tanesi” modelidir. 1904 yılında İsveçli

matematikçi Helge von Koch'un bu şekli ilk kez tanımlamış olması dolayısıyla Koch eğrisi olarak bilinmektedir(Çambel, 1993).



Şekil 5.10 Koch eğrisi

Bu şekli oluşturmak için öncelikle bir eşkenar bir üçgen alınır. Bundan sonraki prosedür ise şöyledir:

1. Bu eşkenar üçgenin her bir kenarı üç eşit parçaya ayrılır. Yani $r = 1/3$ olur.
2. Ortada ki parça çıkartılır.
3. Oluşan boşluğa iki segmenden oluşan üçgen şeklinde sivri bir tepe yapılır. Yani yeni oluşturulan şekil aynı boyuttaki 4 segmenden oluşacaktır. $N=4$. Her segmen orijinal çizgiyle aynı görünümde fakat farklı yönelimlerde olacaktır.
4. Bu şekilde adımlar tekrar edilerek sonsuz uzunlukta bir yapı oluşturulur. Tıpkı Cantor dizisinin gittikçe daha dağınık hale gelmesi gibi bu şeklin çevresi de gittikçe daha detaylı bir görünüm kazanacaktır.

Şimdi de oluşturulan bu kar tanesi modelinin boyutu (5.5) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplınsın. Bu eşitlikte pay kısmındaki $\log N$ yerine bir çizgiden 4 yeni parça elde edildiği için paya $\log 4$ yazılır. Paydaya ise scaling oranı $r=1/3$ olduğu için $\log 3$ yazılır.

$$D = \log 4 / \log 3 = 1,26186$$

Yine benzer boyutun tam sayı olmadığı bir durumla karşılaşıldı. Burda boyut 1' den büyük fakat 2' den küçük çıkmıştır.

Koch'un kesirli boyuta sahip olan şekli düz bir çizgiden ortaya çıkmıştır ve bazı kısımları iki boyutlu bir alanı kaplamaktadır. Bu özel durum, bir çizginin de bir alanı doldurabileceğini ve 2 boyutlu bir hal alabileceğini ifade etmektedir. Aynı şekilde, bir çizgi bir kübü de doldurabilir. Böylece bir doğrunun boyutu 1 ile 3 arasında bir değer alabilir.

Bir objenin boyutu asla uzayda doldurduğu topolojik boyuttan daha büyük olamaz. Örneğin, iki boyutlu bir alan olan bir defter sayfasının bazı kısımlarını kıvrılarak dolduran bir çizgi

çizilsin. Bu çizgi iyice kıvrılmış bir hal alsın. Çizgi sayfayı iyice kaplasa bile asla 2 boyuttan fazla bir hal alamaz. Bu yüzeyi buruşturduğumuzda ise 2 boyutu geçerek 3 boyutlu bir hal alabilir. Ancak 3 ten fazla boyutu olamaz.

Benzer boyut ya da diğer üstel boyut tipleri engebeli, pürüzlü kompleks sistemler hakkında da fikir sahibi olmamızı sağlar. Örneğin, bir çizginin çok daha kompleks bir hal alarak düz bir halden bir eğri haline dönmesi yani 1 boyuttan 2 boyuta ulaşması...

5.4 Kıvrımlı Bir Hattın Boyutu

Şekil (5.8) ile ifade edilen temel durumlar incelendiğinde doğanın bu şekilde gösterilmiş olan düzenli objelerle tamamen dolmadığı görülür. Bu sebeple aşağıda belirtilen 4 noktaya dikkat etmek gerekir(Williams, 1997).

1. Doğa düzenli öklid objeleri(kareler, küpler vb.) ile düz çizgiler yerine tamamen bunun zıttı olan düzensiz ve pürüzlü bir çok nesne içermektedir.
2. Doğa hemen hemen birbirinin aynısı olan yada birbirine çok benzeyen küçük segmenlerden oluşmuştur. Bu durumda da benzer boyut kavramına başvurulur.
3. Keyfi olarak gösterilen uzunluk birim uzunluk 1 olarak alınır ve küçük parçalara ayrılır.
4. Bu birbirinin kopyası olan küçük parçalar orjinalinin kesirleridir. Yani bu küçük parçaların uzunluklarının ölçülmesi ile uzunluğun tamamı bulunabilir.

Doğanın karmaşıklığı gittikçe artmaktadır. Bu yüzden doğa da sık sık çizgilere, hatlara rastlanacaktır. Ancak bu çizgiler tabiki dümdüz çizgiler değildir. Bunlar kıvrımlı hatlar olarak adlandırılabilir. Bu bölümde benzer boyut kavramı ile bu kıvrımlı hatların uzunluklarının nasıl hesaplanabileceği üzerinde durulacaktır. Uzunluğu bilinmeyen kıvrımlı bir hattın uzunluğunu tahmin edebilmek için boyutunun bilinmesi gerekir. Kıvrımlı bir hattın uzunluğunu kesin olarak ölçülemeyebilir. Onun yerine kıvrımlı hattın küçük parçalarını kullanarak tahminde bulunulabilir. Bu tahminin yapılabilmesi için de 1 metrelik bir cetvel kullanılabilir(Cetvelin uzunluğu keyfi olarak seçilebilir). Cetvel yardımı ile bu uzunluğu hesaplamak için defalarca ölçüm yapılması gerekebilir. Ölçüm yapılacak hat dümdüz bir çizgi ise, örneğin yemek masanın uzunluğunu yapılacak işlem oldukça kolay olacaktır. Ölçüm yapmak için kullanılan çubuğun uzunluğunun 1 metre olduğu ($\epsilon=1m$) kabul edilirse ve masanın uzunluğunu iki ölçümde bulunabiliyorsa masanın uzunluğu 2 cetvel boyu yani 2

metre olacaktır. $N \approx 2$ cetvel boyu = 2×1 metre = 2 metre. Aynı yöntem eğrisel hatlar için de kullanıldığında bu hattın kesin uzunluğunu olmasa da tahmini bir uzunluğunu bulunabilir. Burada bir çift önemli nokta vardır. Birinci nokta, burada yapılan ölçümün teorik değil de uzunluğu ϵ olan bir cetvel kullanılarak yapılan deneysel bir ölçüm olmasıdır. İkinci nokta ise, bir eğrinin tahmini uzunluğunun, bu eğrinin kaç parçaya ayrılarak ölçüm yapıldığına bağlı olarak değişim göstermesidir. Bu suretle, bir eğrinin tahmini uzunluğu,

$$L_\epsilon = \epsilon N \quad (5.6)$$

formülü ile ifade edilebilir. Bu formüldeki N küçük segmenlerin sayısını ifade eder. Burada N yerine (5.4) formülünden hareketle $N = 1/r^D$ yazılabilir. Eğrisel hatlardan oluşmuş bir nesne de N yi bulabilmek için üç değişiklik yapılması gerekir. Bunlardan ilki, bu formüle birim uzunlukla orantılı bir sabit dahil edilmesidir. Böylece $N = (1/r^D)$ formülü $N = a (1/r^D)$ şeklini alacaktır. Burada a , bir sabiti ifade etmektedir. İkinci değişiklik, r yerine yeni bir standart ölçek kullanılmasıdır. Bu da ϵ ile gösterilebilir. Bu değişiklik bağıntıyı, $N = a(1/\epsilon^D)$ formuna sokacaktır. Üçüncü değişiklik ise, parantez içerisindeki bölümün tekrar yazılmasıdır. $1/\epsilon^D = \epsilon^{-D}$ Bütün bu değişikliklerden sonra formül son olarak şu şekli alacaktır,

$$N = a \epsilon^{-D} \quad (5.7)$$

(5.7) eşitliğinin (5.1) eşitliği ile aynı formda olduğu aşıkardır. Burada amaç; tahmini uzunluk L_ϵ , cetvel uzunluğu ϵ ve boyut D arasındaki ilişkinin ortaya konmasıdır. Bunun içinde (5.7) eşitliğini (5.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$L_\epsilon = \epsilon N = \epsilon (a \epsilon^{-D}) = \epsilon a (\epsilon^{-D}) = a \epsilon^1 \epsilon^{-D} = a \epsilon^{1-D} \quad (5.8)$$

denklemini elde edilir. Eşitlik (5.8), (5.5) denkleminin doğadaki nesneler için kullanılan değişik bir versiyonudur. (5.8) denklemi logaritmik formda yazılarak yeniden düzenlenirse $D \propto \log L_\epsilon / \log(1/\epsilon)$ ifadesini elde edilir ki bu ifade (5.5) ve (5.2) denklemleri ile aynı formdadır. (5.8) eşitliği düzensiz kıvrımlı bir hattın uzunluğunun tahmini olarak bulunmasını sağlar. a sabiti her obje için farklıdır. Bu ölçüm cetvelin uzunluğuna(ϵ) bağlıdır. Yeterince uzun bir cetvelle iki mesafe arasındaki dümdüz bir çizgi tam olarak ölçülebilir. Ancak iki mesafe arasındaki kıvrımlı bir çizgiyi kesin bir doğrulukla ölçmek olası değildir. Çünkü kıvrımlı hattın rotasındaki bir çok kıvrım ve zigzag ölçülemeden atlanacaktır. Daha küçük bir cetvel seçildiğinde ise daha fazla kıvrımı ölçülebilir. Bu durumda tahmin edilen uzunluk ilk

duruma göre daha fazla bir değer olur. Buradan da anlaşılabileceği gibi tahmini uzunluk ile cetvelin uzunluğu arasında ters bir ilişki söz konusudur. Yani ϵ azaldıkça, L_ϵ artar.

(5.8) denklemi ile cetvel uzunluğu (ϵ)na bağlı olarak farklı uzunluk tahminleri (L_ϵ) yapılabilir. Bu ölçüm yapılırken bir logaritmik grafik kağdına L_ϵ ve ϵ eksen olarak kabul edilerek elde edilen veriler ışığında çizim yapılabilir.

Sonuçta eşitlik (5.8) kıvrımlı çizgilerde benzerlik boyutu D nin tespitini sağlar. Farklı cetvel uzunlukları ile farklı tahminlerde bulunulabilir. Bu veriler L_ϵ 'a karşılık gelen ϵ değerleri olarak logaritmik kağda dökülerek çizim yapılabilir. Bu noktalar düzgün bir çizgi oluşturacak şekilde sıralanmalıdırlar. Bu grafikte üstel ifade doğrunun eğimini verecektir. Yani, eğim $1-D$ ye eşit olacaktır. Buradan benzerlik boyutu $D = 1-\text{eğim}$ dir. Böylece bu logaritmik grafikteki düz bir çizgi ile ifade edilen L_ϵ ve ϵ arasındaki ilişki eğimin bulunması ile nesnenin benzerlik boyutunun tespit edilmesini sağlar(Williams, 1997).

Bu metot ile kıyı şeritleri gibi düzensiz hatların benzerlik boyutunun bulunması bir gelenek halini almıştır. Örneğin, 1961 yılında Richardson ve 1967 yılında da Mandelbrot Britanya kıyılarının, 1988 de ise Feder Norveç kıyılarının toplam uzunluklarını bu metotla hesaplamışlardır. Bu hesaplama şu 4 basit adımdan oluşmaktadır.

1. A noktasından B noktasına kadar olan kıyı şeridinin uzunluğu için üst üste tahminlerde bulunulur. Fakat her tahminde farklı bir sabit kullanılır.
2. L_ϵ ye karşılık gelen ϵ değerleri için logaritmik kağda bu veriler çizilir.
3. Eğer bu noktalar düz bir patern oluşturacak şekilde sıralanıyorsa, düz bir çizgi şeklinde çizim yapılır.
4. Doğrunun eğimi birden çıkartılarak D tespit edilir.

Bu konuda çok önemli araştırmalar yapan Mandelbrot'un iddiasına göre, aslında her sahil bir bakıma sonsuz uzundur. Bir başka bakış açısından, bu sorunun cevabı daha önce de belirtildiği gibi tamamen ölçüm için kullanılan aracın uzunluğuna bağlıydı. Örneğin, genişliği 1 metre olacak şekilde ayarlanmış bir pergel ile sahil boyunca yürünerek ölçme işlemi yapılsın. Kullanılan pergelin açıklığı azaltılarak bu işlem tekrarlandıkça kıyı seridinin tahmin edilen uzunluğu gittikçe artacaktır. Bir uydudan bakıp İngiltere sahillerinin uzunluğunu kestirmeye çalışan bir gözlemci yapacağı tahminde, sahil boyunca bütün burunları ve plajları dolaşan bir gözlemcinin yapacağı tahmine göre daha düşük bir değer bulacaktır; kaldı ki, bu

ikinci gözlemcinin yapacağı tahmin de sahilde ki her taşı aşırp yol alan bir salyangozun tahminine göre daha düşük olacaktır. Mandebrot'a göre, bir ölçek küçüldükçe ölçülen sahil uzunluğu sınırsız olarak artmakta, körfez ve yarımadalardan daha da küçük körfezcik ve yarımadacıklar çıkmakta ve bu işlem ancak en sonda, atom ölçeğine kadar indikten sonra belki de sona ermektedir(Gleick, 1995).

Bu bölümde son olarak bu konu üzerinde yapılmış olan bir çalışma incelenecektir. Bu çalışma Panama'da bulunan Gatun Gölü kıyılarının bir bölümünün uzunluğunun ölçülmesidir. İlk olarak ölçüm yapılacak bölge geniş bir şekilde bir harita üzerine yansıtılmıştır. Daha sonra bir pergel alınmış ve bu pergelin iki ucu arasındaki mesafe $\varepsilon=16$ cm olacak şekilde ayarlanmıştır. Bu açıklık harita üzerinde 16 km ye karşılık gelmektedir. Gölün çevresinin A ve B noktaları arasında kalan bölümü bu şartlar altında 2,61 defa da ölçülmüştür. Bu da $2,61 \times 16 \text{ km} = 41,8$ km. lik bir çevre uzunluğunu vermiştir. (Çizelge 5.1)

Çizelge 5.1 Gatun Gölü kıyıları için tespit edilmiş olan deneysel veriler(Williams, 1997)

<i>Pergel Genişliği</i> ε (cm)	<i>Karşılık Geldiği</i> <i>Gerçek Uzunluk(km)</i>	<i>Ölçüm Sayısı N</i>	<i>Tahmin Edilen</i> <i>Uzunluk L (km)</i>
16	16	2,61	41,8
8	8	6,78	54,2
4	4	19,00	76,0
2	2	49,90	99,8
1	1	136,4	136,4
0,5	0,5	396,0	198,0

İkinci ölçümde ise pergel genişliği 8 cm ye ayarlanmıştır ki bu gerçekte 8 km lik bir uzunluğu ifade etmektedir. Bu sefer belirlenen mesafe 6,78 kere de ölçülmüştür. $6,78 \times 8 \text{ km} = 54,2$ km olarak ikinci uzunluk tahminin de bulunulmuştur. Bu şekilde pergelin genişliği sürekli yarıya indirilerek ölçümlere devam edilmiş ve gittikçe ölçüm sonuçları gerçeğe yaklaşmıştır.(5.1) numaralı tablodan da kolaylıkla anlaşılabildiği gibi gölün belirlenen çevre parçasının ölçümü 41,8 km ile başlamış ve 198 km ye kadar ulaşmıştır. Yani pergel açıklığı azaldıkça çok daha sağlıklı sonuçlar alınmıştır.

(5.8) eşitliği kullanılarak sahil şeridinin uzunluğunu L_ε ye karşılık gelen, cetvel uzunluğu ε 'un değerleri bir grafiğe yansıtılmış ve buradaki doğrunun eğimi -0,45 olarak tespit edilmiştir. $D=1-\text{eğim}$ formülünden $D = 1-(-0,45) = 1,45$ olarak bulunmuştur.

Bu değer düzensiz yapılar ile benzer boyutlar arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Aynı Koch kar tanesi modelinde olduğu gibi boyut 1 ile 2 arasında bir değer almaktadır.



6. DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLER NE ZAMAN KAOTİK DAVRANIRLAR? KAOS TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI NELERDİR?

6.1 Kaos Nedir? Nerelerde Ortaya Çıkar?

Kaos; deterministik, nonlinear ve dinamik sistemlerde ortaya çıkan, karmaşık yapılı bir çok olayın özel matematiksel kriterlerle ifadesidir. Fiziğin 400 yılı boyunca, fizik kanunları, doğadaki neden ve sonuç arasındaki bağlantıyı yansıtmışlardır. Dolayısı ile yakın zamanlara kadar, başlangıç koşulları yeterince iyi bilindiği takdirde herhangi bir fiziksel sistem hakkında her zaman uzun vadeli doğru tahminler yapılabilceği varsayılıyordu. Ancak doğada yer alan kaotik sistemlerin keşfedilmesi bu anlayışın kökten yıkılmasına neden olmuştur(Çambel, 1993).

Kaotik hareket ilk keşfedildiğinde, matematiksel bir gariplik olarak değerlendirilmişti. O günden bu güne kadar geçen on yıllar içerisinde fizikçiler, kaotik hareketin evrendeki temel ilkelerden biri olduğunu keşfettiler. En önemli keşiflerden biri, 1963 yılında havanın basitleştirilmiş bir modelini çalışmak üzere basit bir matematiksel bilgisayar programı yazan meteorolog Edward Lorenz tarafından yapıldı. Lorenz özgül olarak bir hava akımının güneş tarafından ısıtıldıkça nasıl azalıp çoğalacağına ilişkin bir model üzerinde çalışıyordu. Lorenz'in yazdığı bilgisayar kodları hava akımlarının akışlarını düzenleyen matematiksel formülleri içermekteydi. Bilgisayar kodları tamamen deterministik özellikte olduğundan Lorenz, aynı başlangıç koşulları verildiği takdirde, programın çalıştırılması sonucu hep aynı sonuçları almayı bekliyordu. Fakat aynı sandığı başlangıç değerlerini girdiği zaman, çok farklı sonuçlar elde etmek Lorenz'i şaşkına çevirmişti. Daha dikkatli bir inceleme yaptığında başlangıç değeri olan 0,506127 ondalık sayısının yerine 0,506 sayısını girdiğini farketti. Lorenz sayıları kısaltarak son üç rakamı yuvarlamış, binde birlik bir farkın sonucu etkilemeyeceğini düşünmüştü. Bu olaydan sonra zamanla, kaotik bir sistemin temel özelliği, başlangıç koşullarındaki en ufak bir farklılığın bile sonraki veya önceki zamanlarda büyük farklılıklara yol açacağı, bilinen bir gerçek haline geldi(Ruelle, 1994). Bu durum nonlinear sistemlerin uzun vadeli tahmininin mümkün olmadığını ortaya çıkarmıştır. Çünkü, sistemdeki küçük hareketler, çoğaltan etkisiyle sistemi yeni doğrultulara yönlendirir ve sonuçta önceden görülmemiş, tahmin edilmemiş bir noktaya varılır. Bu özellik bazen "kelebek etkisi" olarak adlandırılır. Bu etkiyi şu cümle ile açıklanabilir: "Diğer girdilerle birlikte kelebeğin

kanadından çıkan bir hava hareketi hava sistemindeki etkileşimle, başka bir kıtada domino etkisi yaratarak fırtınaya sebep olabilir.”

Daha öncede kaosu yalnızca deterministik, nonlinear ve dinamik sistemlerde ortaya çıktığı belirtilmişti. Burada dinamik kelimesinden kastedilen kuvvet, enerji, hareket ya da değişimdir. Doğada sürekli olarak bir hareket ve değişim söz konusudur.

Reel dünyada kaos bir çok alanda ortaya çıkan çok önemli bir kavramdır. Başlangıçta bazı bilim adamları kaos konusundaki kanıtların çok uzak olduğunu ve kaosu çok yanıltıcı bir alan olduğunu savunmuş olmalar dahi zamanla kaos üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda tekrar edilen nonlinear denklemlerle, matematiksel açılımlarla kaos olayına açıklık getirilmiştir. Kaos, klasik mekanik ve kuantum mekaniğinden sonra 20. yüzyılın 3. bilimi olarak ifade edilmeye başlanmıştır. Araştırmacılar kimyasal reaksiyonlarda, hava olaylarında, asteroit hareketlerinde, lazerlerde, atomların elektromanyetik alanlardaki hareketlerinde, beyin ve işitmedeki elektriksel aktivitelerde, hayvan ve bitki populasyonlarındaki dalgalanma ve değişimlerde, ekonomik değişimlerde hatta yeni doğan bebeklerin ağlamalarında bile kaos bulunduğunu ifade etmişlerdir(Williams, 1997).

6.2 Zorlamalı Titreşimler

Basit bir mekanik örnek olması açısından sönümlü basit sarkacın kaotik davranışı incelenebilir.

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = F \cos(\omega t) \quad (6.1)$$

Bu denklemde γ , pozitif sönümleme sabitini F ise periyodik kuvvetin genliğini ifade etmektedir. $\tau = \omega_0 t$, $b = 2\gamma/\omega_0$, $\mathcal{F} = F/\omega_0^2$ ve $a = \omega/\omega_0$ olarak ifade edilebilir. (6.1) denklemi θ , μ ve ϕ değişkenlerine bağlı üç tane birinci dereceden diferensiyel denklem olarak ifade edebilir.

$$\dot{\theta}(\tau) = \mu$$

$$\dot{\mu}(\tau) = -b\mu - \sin\theta + \mathcal{F}\cos\theta \quad (6.2)$$

$$\dot{\phi}(\tau) = a$$

ω_0 doğal frekansını kolaylık olması açısından 1 olarak alabiliriz. ($\omega_0=1$) (6.2) denklemleri ile ifade edilen sistemin periyodik yada kaotik çözümleri b , $\mathcal{F}$ ve a nın başlangıç koşullarında seçilen değerler bağlıdır.

(6.1) eşitliği uzun süre incelenmiş ve Duffing eşitliği olarak bilinen denklem ortaya konmuştur.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t) \quad (6.3)$$

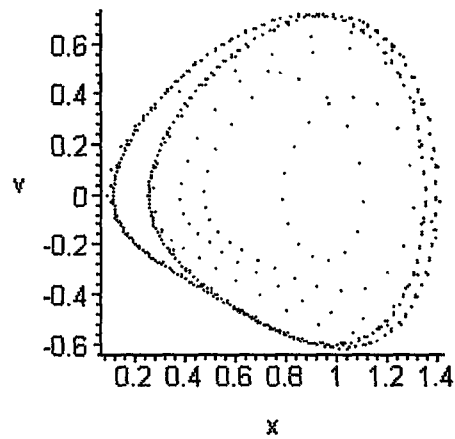
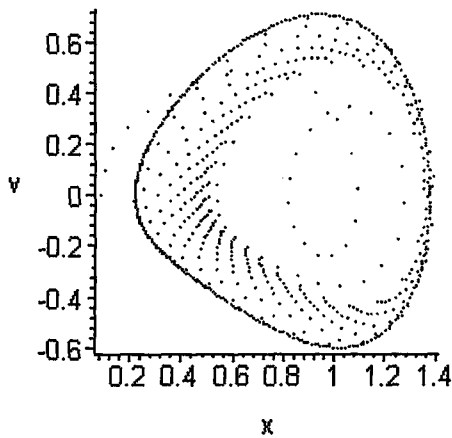
α ve β nın sıfırdan büyük olduğu durumlar “*hard spring*” sıkıştırılmış yaylarda Duffing eşitliği olarak bilinir. (6.1) eşitliğindeki $\sin\theta$ terimi açılırsa β nın değeri negatif çıkar ki bu durumda “*soft spring*” gevşek yaylarda duffing eşitliğidir.

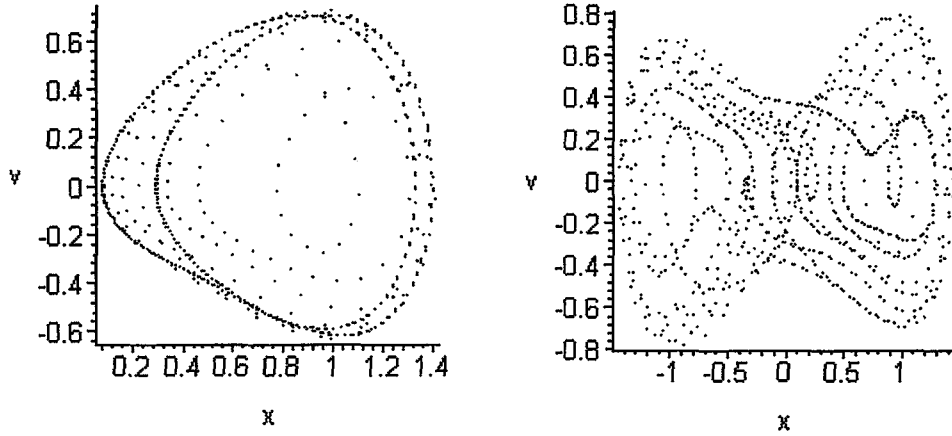
$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = F \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) = F \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{3!} \theta^3 = F \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \alpha\theta - \beta\theta^3 = F \cos(\omega t)$$





Şekil 6.1 Duffing eşitliğinde bir periyotlu, iki periyotlu, dört periyotlu ve kaotik davranışlı durumlar için x-v grafikleri

Yukarıdaki grafiklerde ters Duffing eşitliğinin $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=0,25$, $\omega=1$ değerleri kullanılarak yerdeğiştirme X'e karşılık gelen hız V değerleri gösterilmiştir. İlk grafikte $F=0,325$ ikinci grafikte $F=0,34875$ üçüncü grafikte $F=0,355$ dördüncüsünde ise $F=0,420$ alınmıştır. Şekil 6.1. a 'da "*bir periyotlu*" şekil 6.1.b'de tekrarlanan iki titreşimli modelin "*iki periyotlu*" çözümü şekil 6.1.c 'de "*dört periyotlu*" çözüm gösterilmektedir. Şekil 6.1.d 'deki modelin ise düzensiz olduğu apaçık ortadadır. Yani bu model kaotik çözüme bir örnektir. Sonuç olarak bu grafikler sırasıyla bir periyotlu, iki periyotlu, dört periyotlu ve kaotik çözüm için çizilmiştir denilebilir. Non harmonik Duffing eşitliğinde Ueda tarafından yapılan çalışmalarda ise $\alpha=0$ alınacağı ortaya konmuştur(Enns ve McGuire, 1997).

6.2.1 Duffing Eşitliği

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t)$$

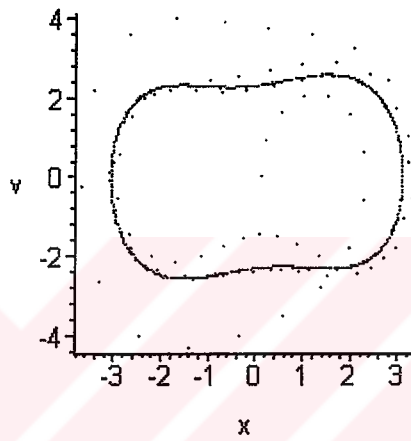
Bu bölümde yukarıda yazılmış olan Duffing eşitliği çeşitli durumlar için incelenerek bu eşitlikten yararlanılan bir çok örnekle konuya derinlik kazandırılacaktır. Duffing eşitliğinin sol tarafı sönümlü nonlinear yayları, sağ tarafı ise uygulanan kuvveti ifade eden terimleri içermektedir.

- "*Hard spring*" sıkıştırılmış yay için : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- "*Soft spring*" serbest durumdaki yay için: $\alpha > 0$, $\beta < 0$
- Ters çevrilmiş duffing osilatörü: $\alpha < 0$, $\beta > 0$
- Harmonik olmayan duffing osilatörü: $\alpha = 0$, $\beta > 0$

Zorlamalı osilatörler başlangıç şartlarına ve parametrelere bağlı olarak bir çok çözüm şekli gösterirler.

Klasik mekanikten bilindiği üzere lineer yay sistemlerindeki duffing eşitliğinde parametrelerden, $\alpha > 0$, $\beta = 0$ olmaktadır. Lineer yay sistemlerini çözmek için standart analitik yaklaşımlar kullanılabilir. Nonlineer yay sistemleri ise bir çok yönüyle lineer yay sistemlerinden farklıdır.

Bununla beraber burada yapılına nonlineer osilatörler üzerinde çalışmalar lineer osilatörler üzerindeki işlemlere paralel olarak başlayacaktır.



Şekil 6.2 Sıkıştırılmış yaylarda Duffing eşitliği için harmonik çözüm

Analize başlamadan önce $\alpha=1$, $\beta=0,2$, $\gamma=0,2$, $\omega=1$ ve $F=4,0$ ile $x(0)=0,09$, $\dot{x}(0)=0$ başlangıç değerleri ile yukarıdaki çizimler yapılabilir.

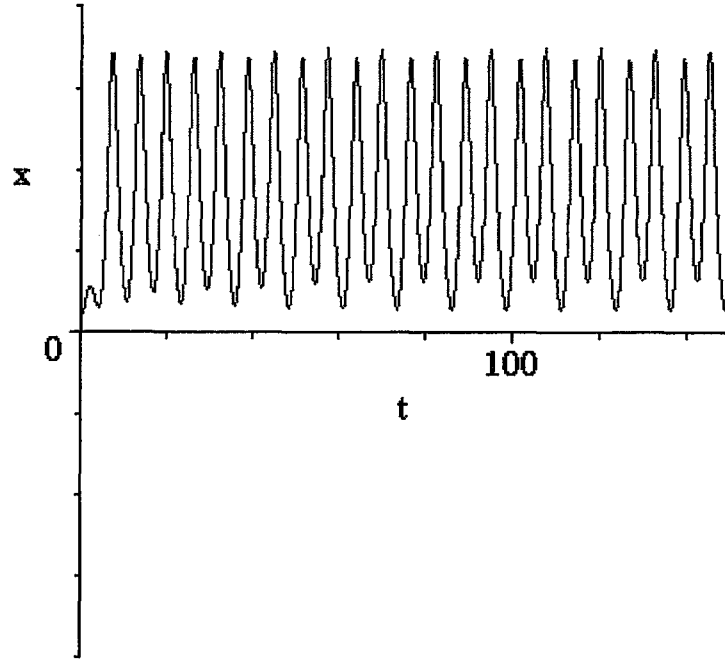
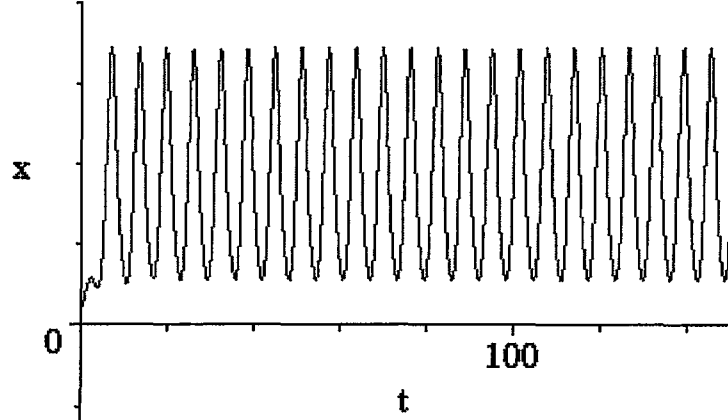
Sistemin çözümü kapalı bir eğri içerisinde dolaşmaktadır. $\omega=1$ değeri için periyot $T=2\pi$ dir. Harmonik yani bir periyotlu çözümü *poincaré* ile de doğrulanabilir. Ayrıca harmonik çözüm için başka bir yaklaşım tekniği olan iteration(tekrarlama) metodu da kullanılabilir. Tekrarlama metodunun temel düşüncesi Duffing eşitliğinin aşağıdaki formda yazılması ile ortaya çıkar.

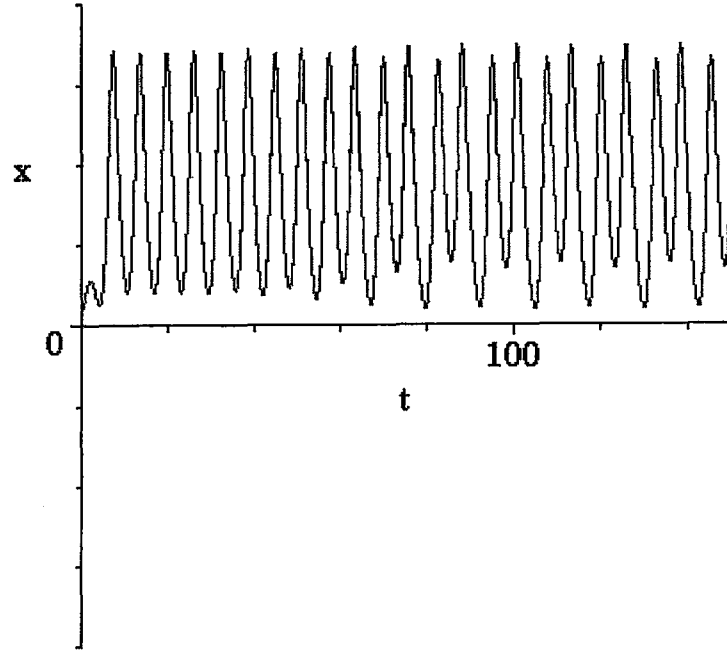
$$\ddot{x} = -2\gamma \dot{x} - \alpha x - \beta x^3 + F \cos(\omega t) \quad (6.4)$$

Bu formun derecesi en küçük (örneğin sıfır) olacak şekilde alınarak $x_0 = A \cos(\omega t)$ çözümü (6.4) eşitliğinin sağ tarafında yerine yazılsın. Ortaya çıkan diferensiyel denklem çözüldüğünde birinci dereceden bir $x_1(t)$ çözümü elde edilir. Daha iyi yaklaşımlar sonucu $x(t)$, β nın kesin sonucunu verebilir. x için kesin çözümler ortaya çıkarılana kadar bu yöntem

tekrarlanabilir n kadar tekrarlandıktan sonra sonuca ulaşılabilir, $x(t) \cong x_n(t)$. Bu yöntem Duffing tarafından harmonik çözümlerin elde edilmesinde kullanılmıştır.

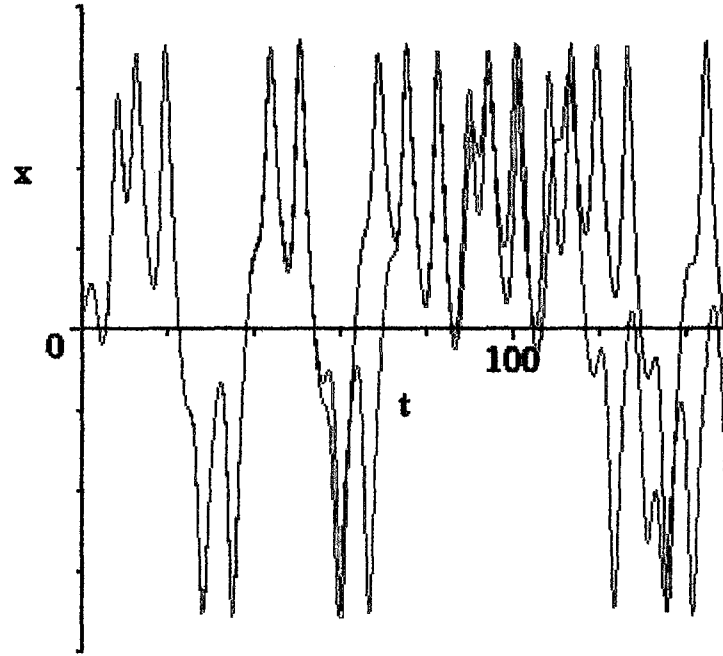
Duffing eşitliğinde başlangıç şartlarında çok küçük bir değişiklik yapıldığı varsayalım. Örneğin, 0,09001 ve 0,09002 olarak iki farklı $x(0)$ başlangıç değeri alınsın.





Şekil 6.3 Ters Duffing eşitliğinin $x(0)=0,09001$ ve $0,09002$ başlangıç değerleri ve $F=0,325$ $F=0,34875$ ve $F=0,355$ değerler için çözümleri

F değerlerinin $0,325$; $0,34875$ ve $0,355$ olarak alındığı yukarıdaki 3 grafikte de başlangıç koşullarındaki çok küçük değişime rağmen herhangi bir değişim gözlenmemiştir. Bunun sebebi de burada kaotik rejimin değil periyodik rejimin söz konusu olmasıdır. Bu üç grafikte de her iki başlangıç değeri için yapılan çözümler de önemli bir farklılık gözlenmez. Yani kaotik olmayan rejimlerde başlangıç koşullarına hassas bir bağlılık söz konusu değildir. Üstteki grafikte 1 periyot, ortadaki grafikte 2 periyot ve alttaki grafikte de 4 periyot gözlenmektedir.



Şekil 6.4 Ters Duffing eşitliğinin $x(0)=0,09001$ ve $0,09002$ başlangıç değerleri ve $F=0,40$ için çözümü

F değerinin 0,40 olarak alındığı (6.4) grafiğinde ise tamamen farklı bir durum söz konusudur. Başlangıç koşullarında yapılan bu çok küçük değişiklik başlangıçta aynı olan iki çözümün zamanla birbirinden ayrılmasına neden olmuştur. Çünkü burada kaotik bir durum söz konusudur ve başlangıç koşullarına hassas bir bağlılık vardır.

6.2.1.1 Harmonik Çözüm

Analizi basitleştirmek için sönümlenme sabiti γ yı sıfır alınabilir ($\gamma=0$). Bu durumda Duffing eşitliği şu hale gelir:

$$\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3 + F \cos(\omega t) \quad (6.5)$$

Sıfırıncı dereceden çözüm için kabul edilen harmonik çözüm şu formatta idi:

$$x_0(t) = A \cos(\omega t) \quad (6.6)$$

A tayini mümkün olan bir sabittir. $x_0(t)$ değeri (6.5) eşitliğinin sağ tarafında yerine koyularak $\cos(3\omega t) = 4\cos^3(\omega t) - 3\cos(\omega t)$ trigonometrik bağıntısı kullanılabilir.

$$\cos(3\omega t) = 4\cos^3(\omega t) - 3\cos(\omega t)$$

$$\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t)$$

$$x^3(t) = A^3 \cos^3(\omega t) = A^3 \left[\frac{1}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t) \right]$$

$$\ddot{x}_1 = -\alpha A \cos(\omega t) - \beta \frac{A^3}{4} \cos(3\omega t) - \frac{3}{4} \beta A^3 \cos(\omega t) + F \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_1 = -\left[\alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 - F \right] \cos(\omega t) - \frac{1}{4} \beta A^3 \cos(3\omega t) \quad (6.7)$$

denklemini elde edilmiş oldu. Bu denklemin de iki kez integrali alınarak $x(t)$ ye ulaşabilir.

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-\left[\alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 - F \right]}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\frac{1}{4} \beta A^3}{3\omega} \sin(3\omega t)$$

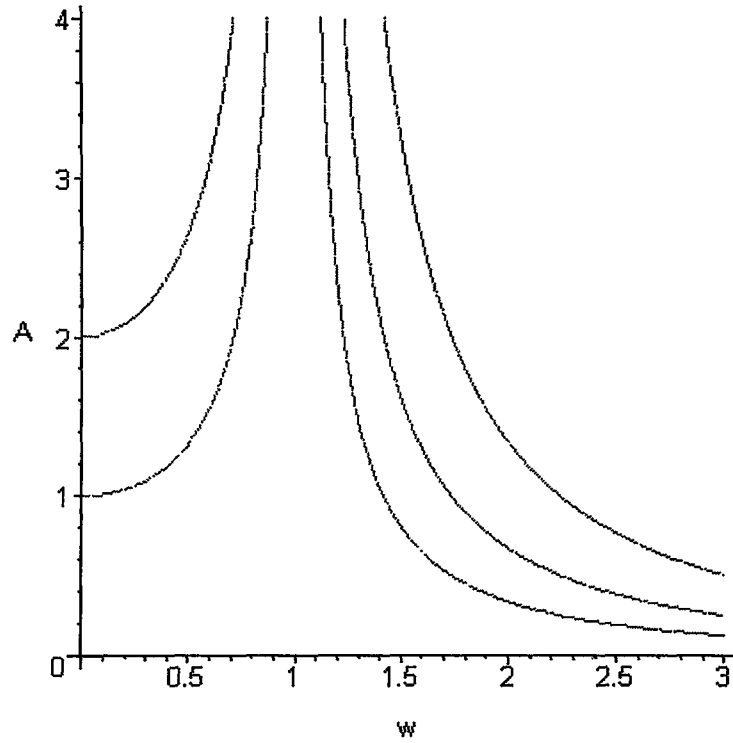
$$x_1(t) = \frac{\alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 - F}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{1}{36} \frac{\beta A^3}{\omega^2} \cos(3\omega t)$$

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + \frac{1}{36} \frac{\beta A^3}{\omega^2} \cos(3\omega t) \quad (6.8)$$

$$A_1 = \frac{1}{\omega^2} \left[\alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 - F \right]$$

Perturbasyon teorisinin Lindstedt's versiyonu uygulanarak, integrasyon sabitleri sıfıra eşitlenir ve secular terimlerden kurtulunursa arzu edilen çözüme ulaşılır.

Şimdi x_1 , x_2 yi kullanılsın. Burada karışık yüksek dereceli yaklaşımlar türetilmeyecektir. Klasik mekanikten bilinen özel F değerleri için lineer bir osilatörde ω frekansına karşılık gelen genliğin şiddeti aşağıdaki grafikte ifade edilmiştir.



Şekil 6.5 Farklı F değerleri ve sıfır sönüm için karakteristik lineer eğriler

Karakteristik eğriler $\omega_0 = (\alpha)^{1/2}$ de yok olmaktadır. Çünkü sönümleme tamamem ihmal edilmiştir. β nın sıfırdan farklı küçük değerleri için; lineer karakteristik eğrilerin etrafında, nonlinear karakteristik eğrilerin uzanması beklenir. $\chi_1(t)$ de yer alan A_1 sabit $\chi_0(t)$ deki A sabitinden çok az farklıdır. O yüzden $A_1 = A$ alınabilir.

$$A_1 = \frac{1}{\omega^2} \left[\alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 - F \right] = A \quad (6.9)$$

veya

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \beta A^2 - \frac{F}{A} \quad (6.10)$$

Buradan;

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{36} \frac{\beta A^3}{\left[\omega_0^2 + \frac{3}{4} \beta A^2 - \frac{F}{A} \right]} \cos(3 \omega t) \quad (6.11)$$

$\beta=0$ kabul edildiği takdirde (6.10) eşitliği şu hali alır;

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{F}{A} \quad (6.12)$$

veya

$$A = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (6.13)$$

$$|A| = \frac{F}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (6.14)$$

İşte şekil 6.4 'de bu ifadenin lineer karakteristik eğrileri resmedilmiştir. Böylece ;

$$x(t) = \left[\frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \cos(\omega t) \quad (6.15)$$

ifadesinin sönümsüz lineer osilatör problemi için çözüm bağıntısı olduğu da elde edilmiş oldu.

$\beta > 0$ olmasına rağmen yeteri derece de küçük ise birinci dereceden tekrarlanan kesin bir sonuç vermesi beklenebilir. (6.10) eşitliği birinci dereceden yaklaşımla lineer olmayan karakteristik eğrileri verecektir(Enns ve McGuire, 1997).

6.2.1.2 Doğrusal Olmayan Karakteristik Eğriler

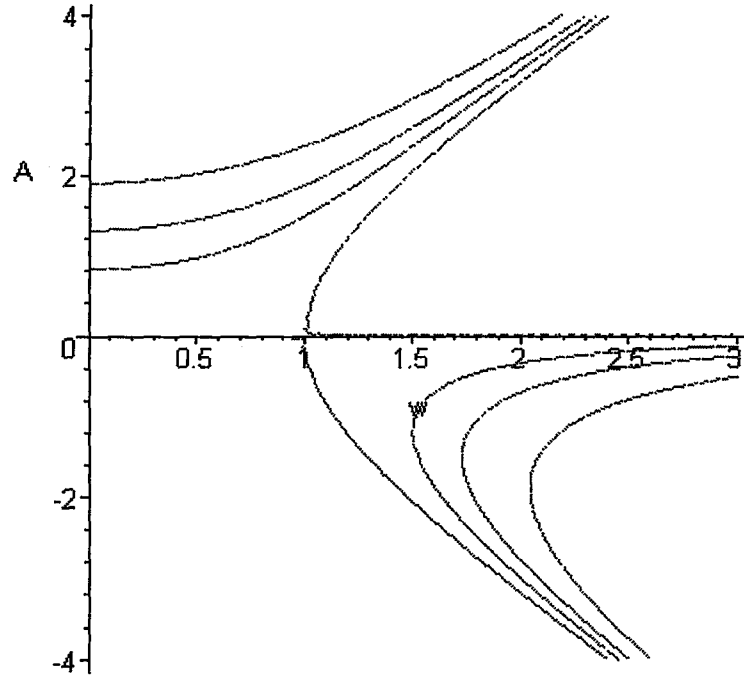
Şimdi de doğrusal olmayan karakteristik eğrileri veren

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \beta A^2 - \frac{F}{A} \quad (6.16)$$

bağıntısını analiz edilsin. Öncelikle yukarıda ki denklemde yer alan F ifadesi tek başına bırakılsın.

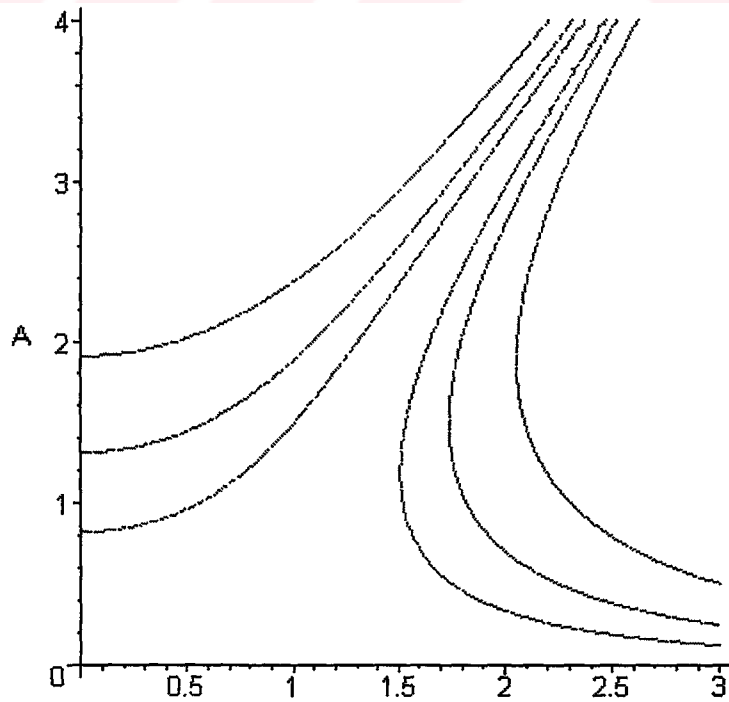
$$F = (\omega_0^2 - \omega^2) A + 0,75 \beta A^3 \quad (6.17)$$

Lineer durumda $\beta = 0$ idi. Burada $|A|$ ya karşılık gelen ω grafiği ($\beta > 0$ için) çizilecektir. Örneğin ; $\omega_0 = 1, \beta = 0,4$ seçilerek $F = 0,1,2,4$ değerleri için bu grafik çizilebilir.



Şekil 6.6 $\omega_0=1$, $\beta=0.4$, $\gamma=0$ ve $F=0,1,2,4$ değerleri için A ya karşılık gelen ω değerleri

Yatay parabol $F=0$ a karşılık gelir. F nin değeri birden dörde doğru arttıkça parabolik iki eğri dışa doğru açılır. F nin sıfırdan farklı her bir değeri için iki kol vardır. Bunlardan biri $A>0$ ve diğeri de $A<0$ dır. $|A|$ ya karşılık gelen ω değerleri için yine çizim yapılsın. F nin sıfırdan farklı olduğu durumlar için nonlinear karakteristik eğriler aşağıda grafikte gösterilmiştir.



Şekil 6.7 $\omega_0=1$, $\beta=0,4$, $\gamma=0$ ve $F=1,2,4$ değerleri için $A-\omega$ grafiğinin karakteristik eğrileri

$F=1$ değerine en içte yer alan iki eğri karşılık gelir. $F=4$ değerine ise en dıştaki eğri çifti karşılık gelmektedir. Sıkıştırılmış nonlinear yaylar için doğrusal olmayan karakteristik çizgiler sağa doğru eğilmeleri haricinde doğrusal gibi gözükürler. Yumuşak nonlinear yaylar ise sola doğru eğimlidirler.

Lineer durum şekil 6.5 de açıkça ortaya konmuştur. Daha kompleks olan karakteristik nonlinear eğriler ise şekil 6.7 de ifade edilmiştir. Sönümlenmenin sıfır olduğu sistemde A tespit edilebilir. Bundan dolayı yerdeğiştirme uygulanan kuvvetle beraber ya fazın içerisinde ya da fazın 180° dışında yer alacaktır. Sönümlenme içeren lineer osilatör probleminde, klasik mekanikten de hatırlanacağı gibi kuvvet ve yerdeğiştirme 0 ile π arasında değişen açılarda fazın dışında olacaktır. Faz açısının kesin değeri problemdeki parametrelere bağlıdır. Nonlinear problemler içinde benzer davranışlar beklenebilir(Enns ve McGuire, 1997).

Sönümlenme içeren formdaki, hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\ddot{x} = -2\gamma \dot{x} - \alpha x - \beta x^3 + F \cos(\omega t + \phi) \quad (6.18)$$

Burada F kuvvetinin genliği değişmez, fakat faz açısı ϕ tespit edilemez. Aşağıdaki trigonometrik bağıntılar kullanılarak denklem düzenlenebilir.

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t) \cos\phi - \sin(\omega t) \sin\phi$$

$$F \cos\phi = H, \quad F \sin\phi = G$$

$$\ddot{x} = -2\gamma \dot{x} - \alpha x - \beta x^3 + F \cos\phi \cos(\omega t) - F \sin\phi \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -2\gamma \dot{x} - \alpha x - \beta x^3 + H \cos(\omega t) - G \sin(\omega t) \quad (6.19)$$

β nın çok küçük bir değer olduğu kabul edilerek önceki yöntem yeniden uygulanır. Sıfıncı derece çözüm için $x_0 = A \cos(\omega t)$ alınır. Daha önce uygulanan olan işlem tekrar edilerek x_0 değeri, adi diferansiyel denklemde yerine yazılarak iki kez integral alınır. Daha sonra ise sabitler sıfıra eşitlenir ve aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) + \frac{1}{36} \frac{\beta A^3}{\omega^2} \cos(3\omega t) \quad (6.20)$$

$$A_1 \equiv \frac{1}{\omega^2} \left[\alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 - H \right] \quad (6.21)$$

$$B_1 \equiv -\frac{1}{\omega^2} (2\gamma\omega A - G)$$

Eğer sıfırcı derece çözümde başlangıç noktası olarak $A_1 = A$ ve $B_1 = 0$ kabul edilecek olursa, $\alpha = \omega_0^2$ olmak üzere

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3 = H \quad (6.22)$$

$$2\gamma\omega A = G$$

elde edilir. Böylece faz açısı bulunmuş olur.

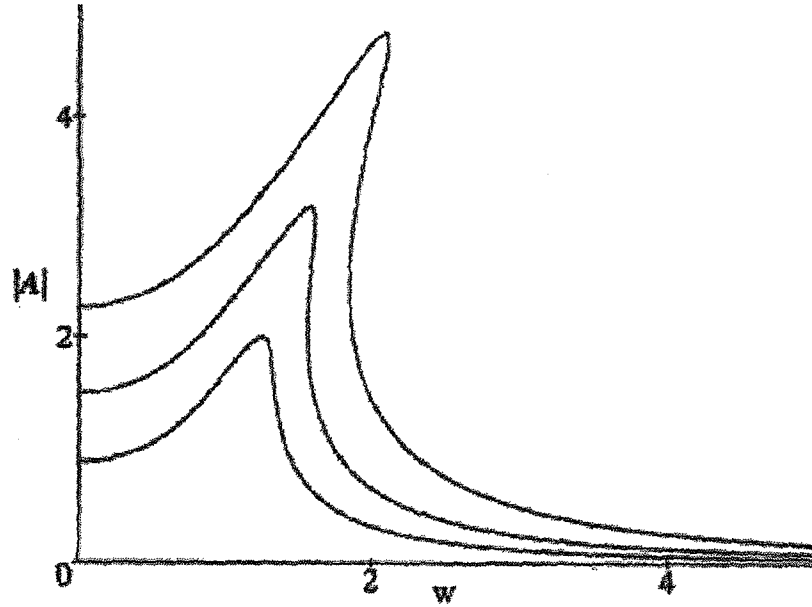
$$\tan\phi = \frac{G}{H} = \frac{2\gamma\omega A}{(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3} \quad (6.23)$$

Denklem kontrol edilecek olursa, $\gamma = 0$ iken $\tan\phi = 0$ olacak, dolayısıyla beklenildiği gibi $\phi = 0$ ya da π olacaktır.

$F^2 = H^2 + G^2$ olduğu göz önüne alınarak, A ile ω arasındaki ilişkiden F yi ortaya çıkartılabilir.

$$F = \sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \beta A^3 \right]^2 + [2\gamma\omega A]^2} \quad (6.24)$$

Aşağıdaki grafik $\omega_0 = 1$; $\beta = 0,2$; $\gamma = 0,2$; $F = 1, 2, 4$ değerleri için yukarıda ki (6.24) denkleminde elde edilen birkaç nonlinear karakteristik eğriyi göstermektedir.



Şekil 6.8 $\omega_0=1$, $\beta=0,2$, $\gamma=0,2$ ve $F=1,2,4$ değerleri için 1. dereceden nonlinear karakteristik eğriler(Enns ve McGuire, 1997)

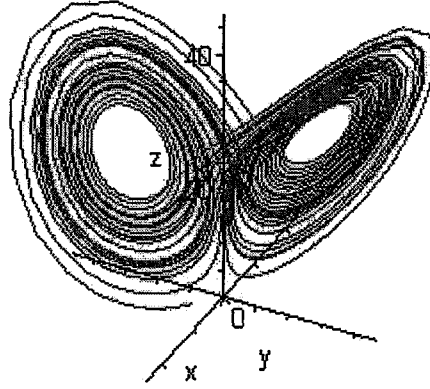
Nonlinear karakteristik eğriler $\beta>0$ ve $\gamma>0$ sağa eğimlidirler ve karakteristik lineer eğrilere benzerler. Önceden de bahsedildiği gibi $\beta A^2/36\omega^2 \ll 1$ durumunda üç eğride aynı noktaya yaklaşacaklardır.

Şekil 6.8 deki her eğri F nin kritik değerlerinin üzerinde iki noktaya sahiptir. Bu noktaların $dA/d\omega$ dan eğimleri sonsuzdur. Nonlinear karakteristik eğriler bu iki nokta arasında uzanır. Basit bir yaklaşımla $x(t)$ çözümü alınır ve küçük bir $u(t)$ değişimi yapılarak $x(t)+u(t)$ şeklini alır. $x+u$ orijinal diferansiyel denklemde yerine yazılır ve u lineerize edilerek $u(t)$ için yeni lineer bir eşitlik elde edilir. $u(t)$ nin davranışı üzerindeki çalışmalarda ya zamanla arttığı(sabit olmayan durum) ya da zamanla azaldığı(sabit durum) görülmüştür.

6.3 Garip Çekerler

Garip çeker, modern bilimin en büyük buluşlarından biri olan faz uzayında yaşamaktadır. Faz uzayı sayıları resimlere dönüştürür, hareket halindeki mekanik yada akışkan bir sistemden bütün temel bilgileri, en küçük ayrıntısına kadar çekip çıkartır ve bunları çizerek gösterir. Fizikçiler daha önceleri de çekicilerin iki basit çeşidi üzerinde çalışmışlardır: Sabit noktalar ve limit devreler. Bunlar düzenli bir hale erişen ya da kendini durmadan tekrarlayan bir davranış biçimi gösterirler.

6.3.1 Lorenz Çekeri



Şekil 6.9 Lorenz çekeri “kelebek kanatları”

Yukarıdaki şekil zaman içerisindeki evrimin üç boyutlu perspektif bir görünümü olup “Lorenz çekeri” dediğimiz karmaşık bir kümeyi göstermektedir.

Massachusetts Teknoloji Enstitüsü’nde meteoroloji uzmanı olan Edward Lorenz, atmosferik konveksiyon olgusuna ilişkin bazı araştırmalar yapmıştır. Bu araştırmaları kısaca şöyle özetlenebilir: Güneş ışınlarının yeryüzünü ısıtması ve bu ısının havaya yansması nedeniyle atmosferin alt katmanlarındaki hava üst katmanlarındakinden daha sıcak ve hafif duruma gelir. Isınan ve hafifleyen hava yukarı doğru yükselirken daha soğuk ve yoğun olan üst katmanlardaki hava aşağı doğru hareket eder. Bu iki yönlü harekete atmosferik konveksiyon denir. Hava da su gibi akışkan olduğu için sonsuz sayıda boyutları bulunan bir uzaydaki nokta ile tanımlanması gerekir. E.Lorenz yaklaşık bir biçimde sonsuz boyutlu uzaydaki gerçek zamansal evrimi bilgisayarda inceleyebileceği üç boyutlu bir evrimle değiştirmiş ve bu işlemin sonucunda ortaya şekildeki Lorenz çekeri olarak bilinen nesne çıkmıştır(Ruelle, 1994).

Baykuş gözleri yada kelebek kanatlarını andıran bu sihirli şekil kaosun ilk keşifleri tarafından bir sembol olarak benimsenmiştir. Düzensiz bir veri akışının içinde sağlam ve güzel bir yapının saklı bulunduğu bu şekil sayesinde ortaya konmuştur. Üç değişkenli üç denklem bu sistemin hareketini tümüyle tanımlamıştır.

$$\dot{x} = \sigma (y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

(6.25)

$$z = xy - bz$$

Lorenz sistemi iki tane nonlinear çapraz terim içerir ve sonuç olarak karmaşık davranışlarda bulunur. Bu davranış sabitlerin aldıkları değerlere bağlıdır. Burada Lorenz tarafından $\sigma=10$, $b=8/3$ alınmıştır. r ise çatallanma parametresidir ve sıfırdan başlayarak artar.

$$\dot{x} = 10(y - x)$$

$$\dot{y} = -xz + 28x - y \quad (6.26)$$

$$\dot{z} = xy - \frac{8}{3}z$$

r artarken, Lorenz sisteminde ani davranış değişiklikleri olur. $r=28$, $x(0)=2$, $y(0)=5$, $z(0)=5$ de kelebek kanatlarına benzeyen güzel kaotik bir yörünge ortaya çıkar.

Lorenz sistemi hiçbir zaman kendini tekrar etmediği için, yörünge kendi kendisi ile asla kesişmez. Tam tersine sonsuza kadar kendi etrafında sarılaya devam eder(Williams, 1997).

6.3.2 Rössler Çekeri

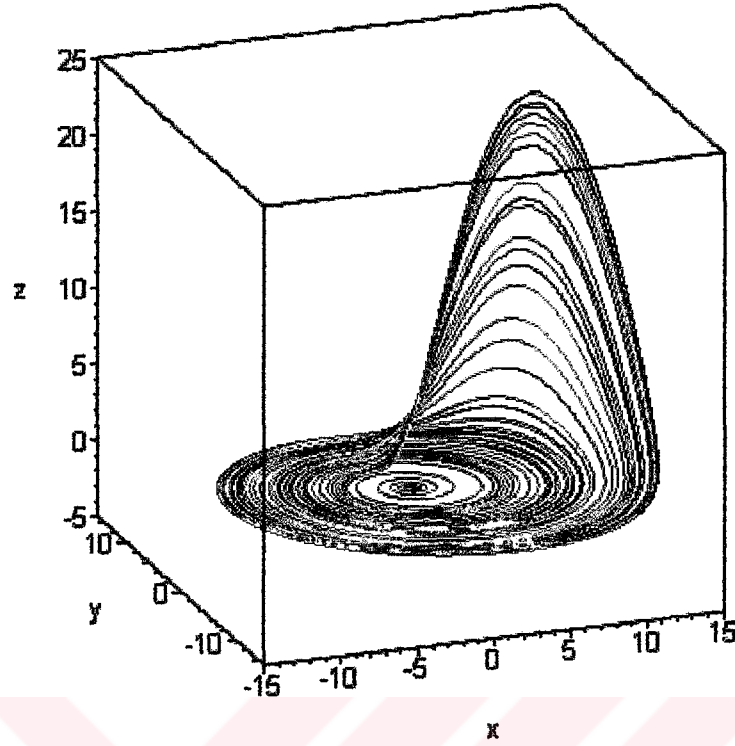
Rössler sistemi başlangıçta ;

$$\dot{x} = -(y + z)$$

$$\dot{y} = x + ay \quad (6.27)$$

$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

olarak ifade edilerek $a=b=0,2$ standart değerleri ele alınmış ve $c>0$ olarak değiştiği kabul edilmiştir. Rössler sistemi Lorenz sisteminden daha basittir. Çünkü sadece bir nonlinear terim vardır. Bununla beraber c arttıkça harekette zenginleşme olacaktır. c nin artarak giden değerleri için kaotik Rössler çekeri aşağıdaki gibi bir çizimle ortaya konmuştur.



Şekil 6.10 Kaotik Rössler çekeri

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi yörünge zamanla orijinin dışında x-y düzleminde spiral bir şekil alır. Belli bir süre sonra z ekseninde sıçrama yaparak z deki maksimum değerine ulaşır. Başlangıç durumunda yapılacak bir değişiklik farklılıklar meydana getirmesine rağmen sonuçta ortaya yine benzer bir şekil çıkaracaktır(Enns ve McGuire, 1997).

6.4 Nonlineer Haritalar

6.4.1 Giriş

Lojistik haritalar kolayca anlaşılabilen basit haritalardır. Nonlineer haritalar bir çok olayın gelecekte izleyeceği yolun anlaşılmasına rehberlik ederler. Burada nonlineer diferansiyel denklemler ile bunların haritaları arasında direk bir bağlantı kurmak önemli bir rol oynar.

Matematiksel biyoloji, denklem ve haritaları kullanarak olayları açıklama yoluna gider. Biyologlar böcek popülasyonunun bir jenerasyondan diğerine geçişini incelemişlerdir. Burada her nesil, diğer nesil yumurtadan çıkmadan önce ölmüştür.

Robert May (1976) tarafından şu ünlü lojistik model ortaya konmuştur.

$$N_{n+1} = \left(1 + r - \frac{r}{k} N_n\right) N_n \quad (6.28)$$

Burada r pozitif gelişme sabiti, k pozitif bir sayı, N_n ise n . nesildeki popülasyon sayısıdır. $r=0$ iken $N_{n+1}=N_n$ olur ve birbirini takip eden nesiller boyunca büyüme gözlenmez. $(-r/k)N_n^2$ terimi ortamda bulunan yiyecek yetersizliğine bağlı olarak popülasyondaki azalma eğilimini gösterir. Bu da av-avcı ilişkisini ifade eden diferansiyel denklem modelini hatırlatır.

$X_n = rN_n / k(r+1)$ ve $a=1+r$ olarak ifade edilirse (6.28) eşitliği şu hali alacaktır.

$$X_{n+1} = aX_n (1 - X_n) \quad (6.29)$$

Burada asıl önemli olan durum X in $0 < X < 1$ olduğu durumdur ve bu da lojistik haritanın bir boyutlu çizimidir (May, 1976).

Av-avcı ilişkisi tipindeki 2 boyutlu haritalar matematikçi Lauwerier (1986) tarafından şu formda ortaya konmuştur.

$$X_{n+1} = aX_n (1 - X_n - Y_n) \quad (6.30)$$

$$Y_{n+1} = bX_n Y_n$$

Bu formlarda $a, 2 < a < 4$ ve $b, 2 < b < 4$ arasında değerler almaktadır (Lauwerier, 1986).

En meşhur iki boyutlu haritalardan birisi de Mandelbrot tarafından ortaya konmuştur. Mandelbrot kompleks haritada çalışmıştır.

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (6.31)$$

Burada $Z=X+iY$ ve $C=p+iq$ kompleks ifadeleridir. Bu ifadeler yerlerine yazılırsa;

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + p \quad (6.32)$$

$$Y_{n+1} = 2X_n Y_n + q$$

denklemleri elde edilir. Burada p ve q iki gerçel kontrol parametresidir. Mandelbrot haritası iki boyutlu fraktal yapıları ilüstre etmektedir (Mandelbrot, 1967).

6.4.2 Lojistik Harita

20. yüzyılda matematik ağırlıklı düşünen biyologlar ekoloji adında yeni bir bilim dalı oluşturdular. Bu bilim dalı gerçek hayatı gürültü ve renk unsurlarından ayıklayarak popülasyonlara dinamik sistemler muamelesi yapmıştır. Çevre bilimciler hayatın iniş ve çıkışlarını tanımlamak için, matematiksel fiziğin temel araçlarını kullandılar. Gıdanın sınırlı olduğu bir yerde çoğalan, hayatta kalabilmek için birbirleriyle mücadele eden bir çok canlı türünü, bir çok popülasyonu etkisi altına alan salgın hastalıkları laboratuvarında olmasa bile zihinlerinde canlandırma imkanları vardı. Popülasyonlar biyolojisinde uygulanan denklemler fizikçilerin başvurdukları modellerin basit ve ilkel benzerleriydi.

Popülasyonlar biyolojisi hayatın tarihi, avcı hayvanların avlarıyla nasıl etkileşim sağladığı, bir ülkenin nüfus yoğunluğundaki değişikliğin bir hastalığın yayılmasını nasıl etkilediği gibi konularda epeyce bilgi sahibi olmuştur. Belirli bir matematiksel modelin çalıştırılması sırasında büyüme, dengeye kavuşma ya da yok olma gibi sonuçlar çıkarsa çevre bilimciler buna bakarak, gerçek hayattaki popülasyonların veya salgın hastalıkların hangi durumlarda aynı şeyleri yapabileceği hakkında bazı sonuçlara varabilir(Gleick, 1995).

Çok kompleks davranışları gösteren basit bir model matematiksel biyolog Robert May tarafından ortaya konmuştur. Bu nonlinear harita şu formda verilmiştir(May, 1976).

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n) \quad (6.33)$$

Burada a ; $0 \leq a \leq 4$ değerlerini alabilir. a nın değişen değerlerine X in de 0 ile 1 arasında değişen değerleri karşılık gelir. Örneğin; $a=6$ iken $X_0=0,25$ olur. Bu da,

$$X_1 = 6 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25) = 1,125 > 1$$

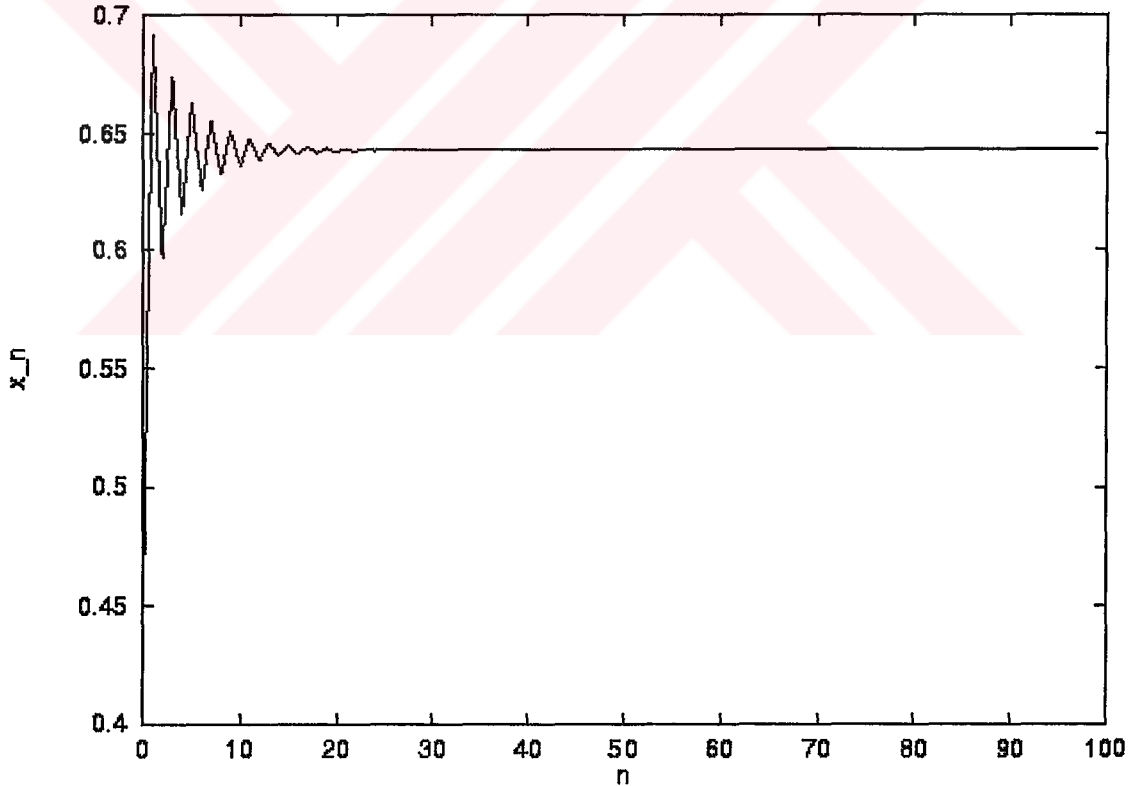
değerini verir. (6.33) denklemindeki “ a ” parametresi yüksek veya düşük tutulabilecek bir artış hızını temsil etmektedir. Bu denklemdeki $(1-X_n)$ ifadesi, artışın sınırlı kalmasını sağlamaktadır. Çünkü X_n arttıkça $(1-X_n)$ düşer.

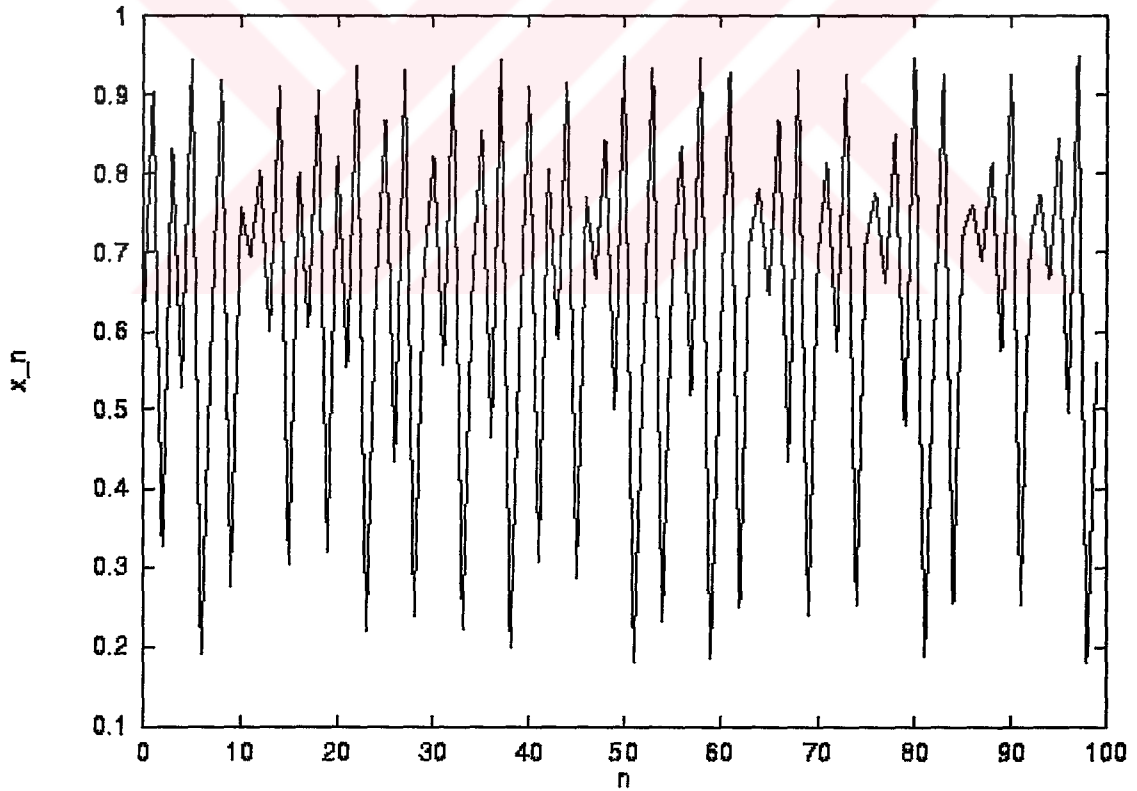
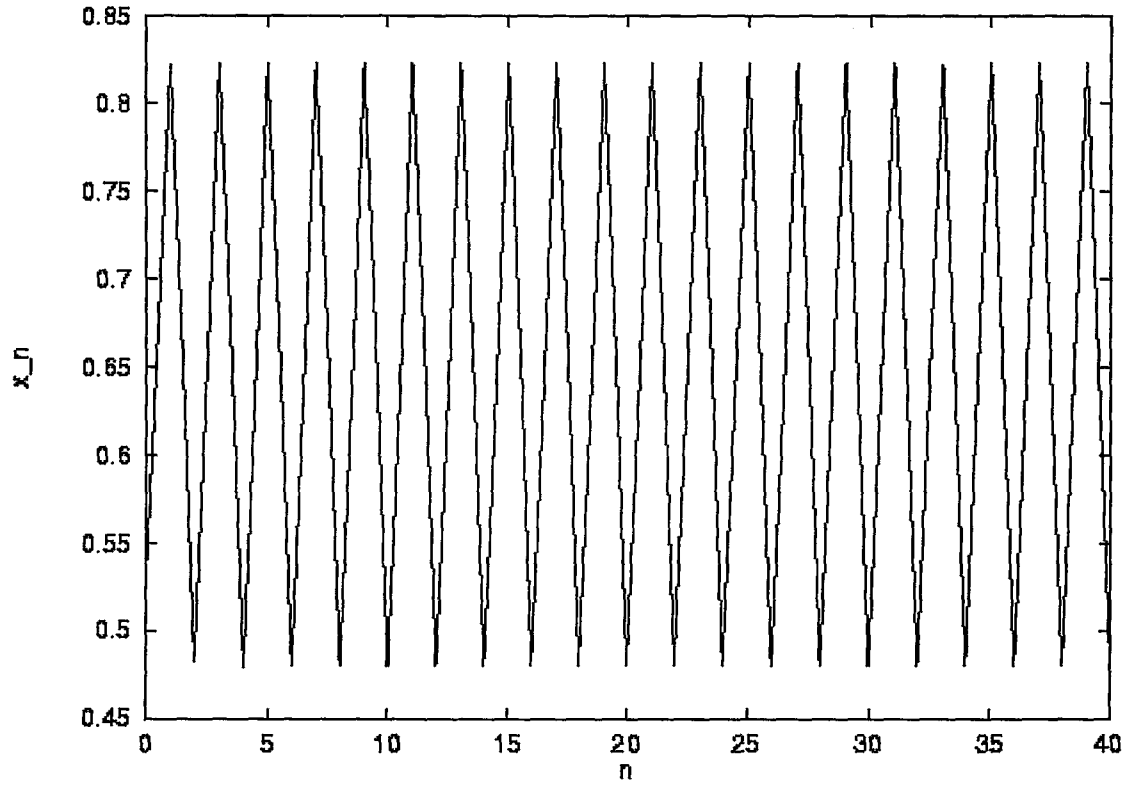
1950 li yıllara kadar, çevre bilimcilerden bir çoğu lojistik fark denklemi adıyla bilinen bu özel denklemin değişik şekillerini araştırdılar ve çevre bilimciler artış hızını gösteren “ a ” parametresinin modelin önemli özelliklerinden birini oluşturduğunu anladılar. Bu denklemlerin kaynağını teşkil eden fiziksel sistemlerde, bu parametre ısı miktarına veya sürtünme miktarına ya da ortaklığı karıştıran başka bir nicelik miktarına karşılık geliyordu.

Kısacası nonlinearlik miktarına. May, bu nonlinear parametre için değişik değerler tanımlayıp problemi çözmeye çalışırken, sistemin karakterini tamamen değiştirebileceğini keşfetti. Parametrenin değerini yükseltmek demek nonlinearlik derecesini yükseltmek anlamına geliyordu. Bu işlemde sadece nüfusun nihai dengesini değil, nüfusun bir dengeye kavuşup kavuşamayacağını belirliyordu.

Parametre küçük bir değerde iken May'ın basit bir modeli düzenli bir halde karar kılıyordu. Parametrenin değeri yükseldiğinde düzenli hal bozuluyor ve nüfus iki alışılagelmiş değer arasında salınmaya başlıyordu. Parametrenin değeri çok yüksek ise sistemin davranış biçimi öngörülemez bir hale dönüşüyordu(Gleick, 1995).

Aşağıdaki grafikler nümerik noktalar arasında çizgilerle bağlantı sağlanarak çizilmiştir. a nın 3,83 e kadar olan çeşitli değerleri için lojistik haritalar ortaya çıkartılmıştır. Şekil (6.15) $X_0=0,2$ olmak üzere $a=2,8$; $a=3,3$ ve $a=3,8$ değerleri alınarak üç grafiğe ayrılmıştır.



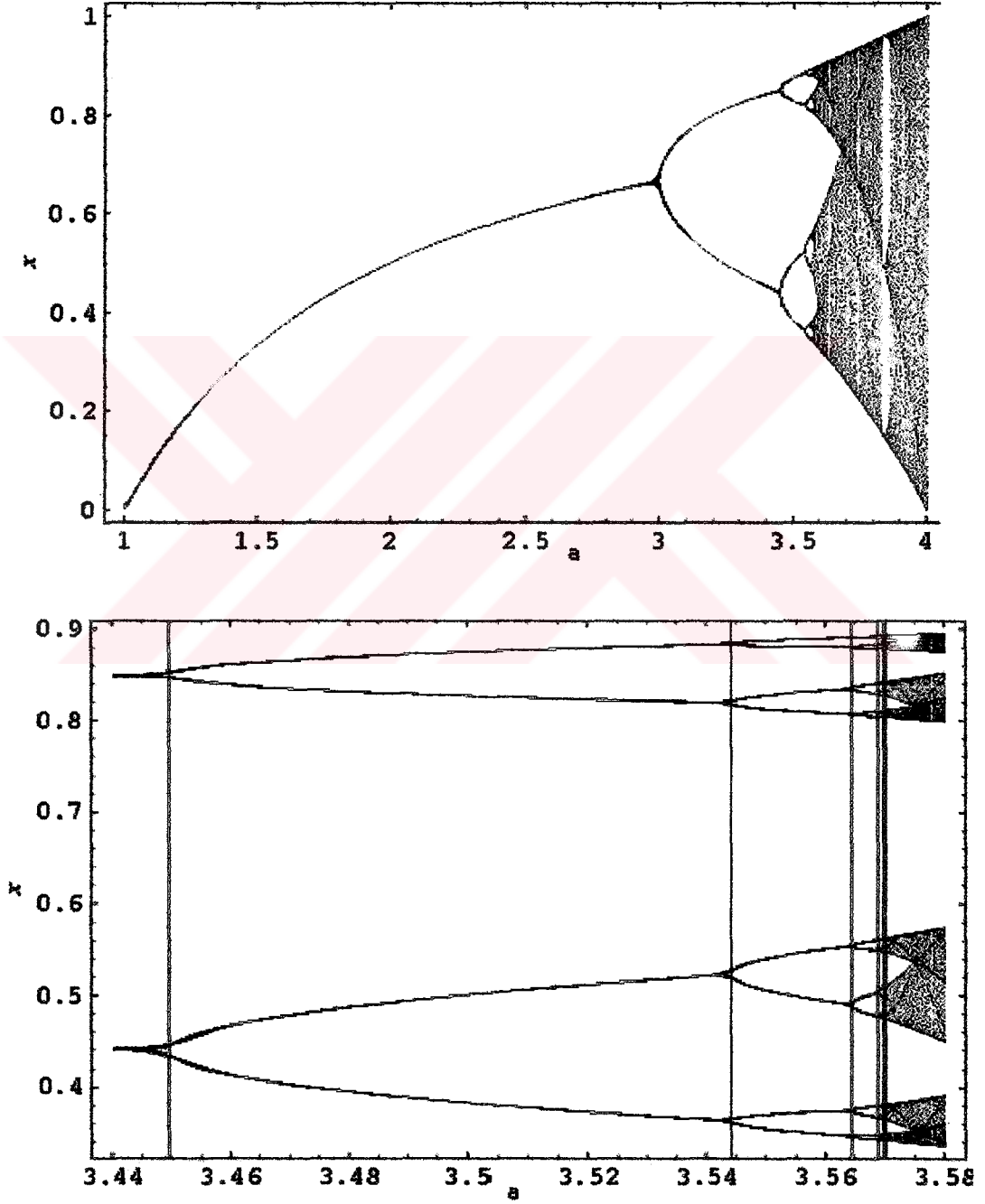


Şekil 6.11 $X_0=0,2$ için X_n değerlerinin lojistik haritadaki çözümleri

Şekil 6.11a 'da geçici aralıkta küçük bir titreşim sonucunda X_n sabit bir değere ulaşmıştır. Bu değer 0,642857... dir. Aynı zaman aralıklarında aynı X_n okunduğu için çözüm 1 periyotludur.

Şekil 6.11 b'de titreşimlerin X_n in 0,479427 ile 0,823603... değerleri arasında ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Belli zaman aralıklarında iki değer arasında tekrarlar olduğu gözlemlendiğinden iki periyotlu bir çözüm vardır.

Son olarak şekil 6.11 c'nin kaotik bir çözümü olduğu gözlenmektedir. Çünkü zamanla farkedilebilir belli bir şablon ortaya çıkmamaktadır.



Şekil 6.12 Lojistik model için çatallanma diyagramları

Robert May, Feigenbaum ve bazı bilimadamları birbirinden farklı doğurganlık oranlarına sahip popülasyonların davranış biçimlerini göstermek üzere ayrı ayrı grafikler kullanmak yerine, bütün bilgileri tek bir resimde toplayabilmek için bir “çatallanma grafiği” kullanmışlardır.

Yukarıdaki grafiklerde, bir parametredeki değişikliklerin bu basit sistemin nihai davranış biçimini nasıl değiştirebileceğini göstermektedir. Parametrenin değerleri soldan sağa doğru gösterilmiştir; nihani nüfus dikey ekseninde işaretlenmiştir. Parametrenin değerini yükseltmek sistemi daha zor hale getirmek, nonlinearliği artırmak anlamına gelmektedir.

Parametrenin düşük olduğu yerlerde yani grafiğin solunda popülasyon yok olmaktadır. Parametre yükselişe geçtiğinde popülasyonun dengesi de daha yüksek bir düzeyde oluşmaktadır. Ondan sonra parametre daha da arttıkça, denge ikiye bölünmekte ve tıpkı konveksiyon halindeki bir akışkanın taşıdığı ısı artırıldığı zaman ortaya istikrarsızlık çıkması durumuna benzemektedir. Bölünmeler yada çatalanmalar gittikçe hızlanmakta 2,4,8,16 lı periyotlar meydana getirmektedir. Yani $k=1,2,...$ olmak üzere 2^k lı periyotlar oluşturmaktadır. İlk sekiz çatallanma noktası a_k sırasıyla; $a_1=3$, $a_2=3,449490$, $a_3=3,544090$, $a_4=3,564407$, $a_5=3,568759$, $a_6=3,568759$, $a_7=3,569891$, $a_8=3,569934$ tür. Bu zincir aynı noktaya yaklaşarak limit durumu oluşturur.

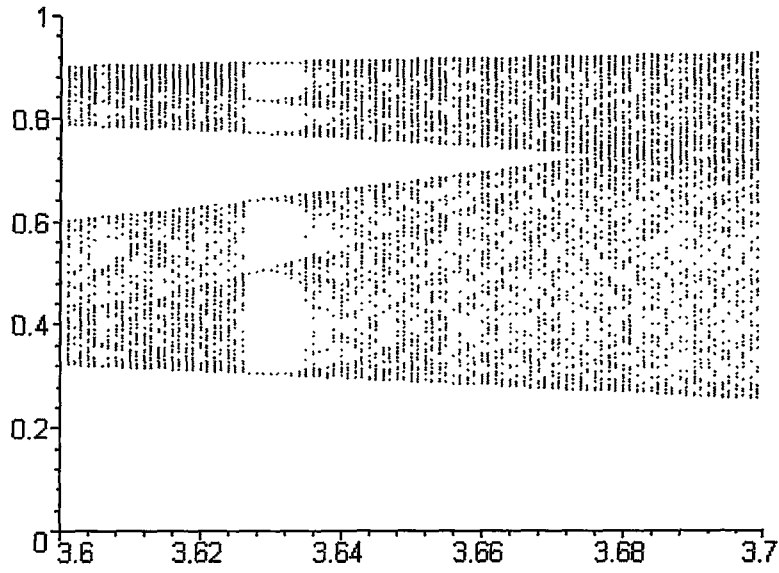
$$\lim a_{\infty} = 3,569946...$$

$$a_k \approx a_{\infty} - \frac{c}{\delta^k}$$

formülü ile durumu ifade edilebilir. Burada $c=2,6327...$ ve δ yani Feigenbaum sabiti 4,669201609... dur (Blümel ve Reinhardt, 1997). Bu sabit şu şekilde elde edilmiştir.

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} \quad (6.34)$$

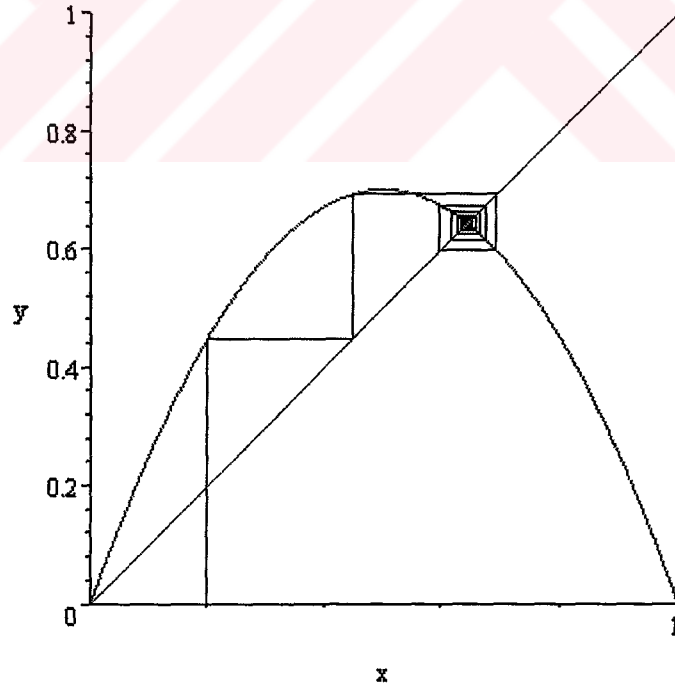
a_{∞} ile 4 arasındaki bölgede küçük kaos pencereleri oluşur ve bunun arkasından periyotların ikiye katlanması olayı tekrar başlar: 6,12,24... ilk pencere üçlü periyotta $a=3,828427$ ile $a=3,841499$ arasındaki bölgede ortaya çıkar. Bu yapının sonsuz bir derinliği vardır.



Şekil 6.13 Kaos içerisindeki düzen pencereleri

6.4.2 Geometrik Betimleme

Geometrik resimler a değerinde ortaya çıkan artışın takip edilerek lojistik haritaya yansıtılması ile ortaya çıkar. $y=f(x)=aX(1-X)$ parabolü için çizim yapılır ve eşitliğin sağ tarafındaki $a=2,8$ olarak alınırsa aşağıdaki şekil ortaya çıkar.

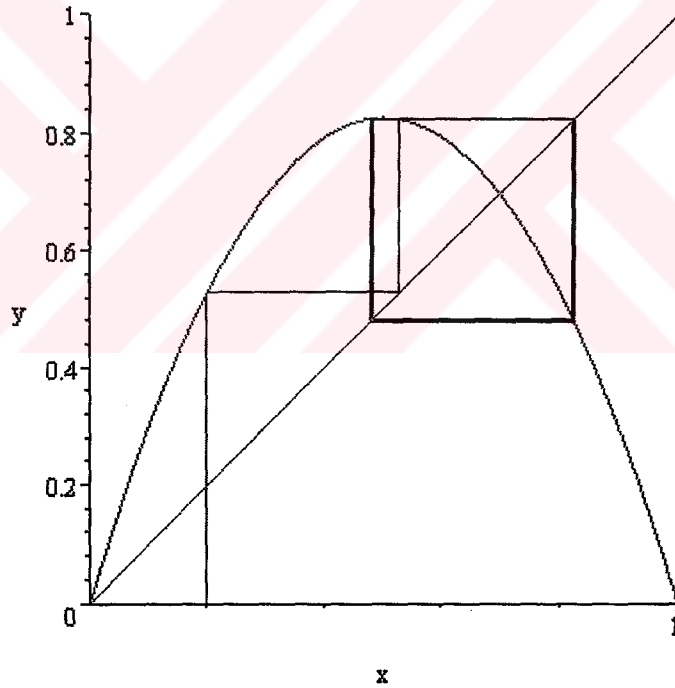


Şekil 6.14 $a=2,8$; $X_0=0,2$ değerleri için lojistik eşitliğin geometrik tasviri

Parabolü çizildikten sonra yatayla 45° lik bir açı yapacak şekilde bir doğru çizilsin. Daha sonra X_0 in değeri 0 ile 1 arasında bir değer örneğin 0,2 seçilsin. (6.33) deki X_0 değerini yerine yazılsın. Daha sonra ise $X_1=f(X_0)$ te lojistik haritaya yeni değerler girilsin. $X_2=f(X_1)=f(f(X_0))=f^{(2)}(X_0)$. Aynı prosedürü tekrar edilerek sonuçta yukarıda görüldüğü gibi parabol ile doğrunun kesiştiği noktaya yani dengeye ya da sabit bir noktaya ulaşılacaktır. Bu sabit nokta; $X_{n+1}=X_n=X_1$ de bir periyodu olarak ortaya çıkaracaktır(Enns ve McGuire, 1997).

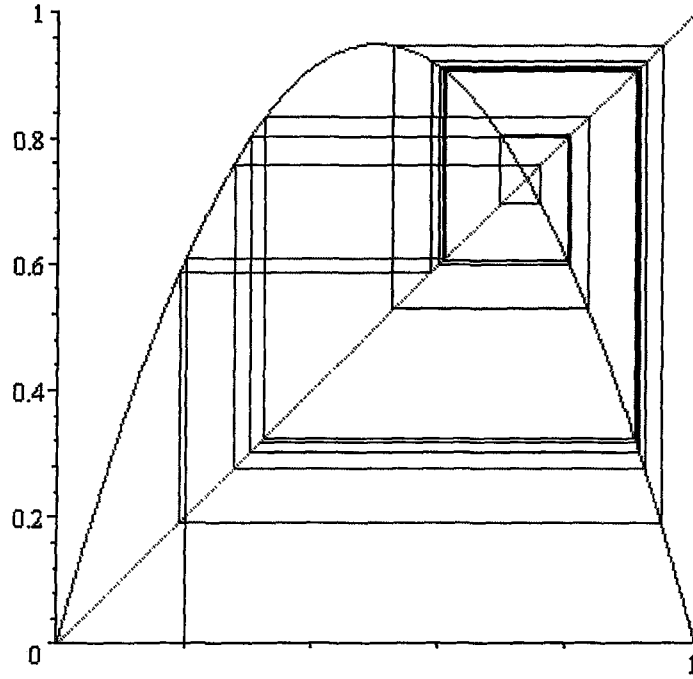
Burada sabit nokta şekil 6.11a 'da ortaya konmuş olan $X_1=0,642857...$ dir. Şekil 6.14 bu şekilde 20 tekrardan sonra oluşturulmuştur.

$a=3,3$ değerine uygun olan geometrik çizim şekil 6.15 ile verilmiştir. Bu geometrik resimde yörünge bir dikdörtgen şeklinde tuzaklanmıştır. Bu durum da sürekli iki değer arasında gidip gelen bir değişim söz konusudur. Bundan dolayı sabit noktalar iki periyotlu olarak adlandırılmaktadır. Doğru ile parabolün tek bir nokta da kesişmedekileri görülmektedir.



Şekil 6.15 $X_0=0,2$ ve $a=3,3$ değerleri için geometrik çizim

Son olarak $a=3,8$ değeri için kaotik durumun haritası incelendiğinde buradaki yörüngelerin asla düzene girmedikleri ve devamlı olarak parabolün farklı noktaları ile kesiştikleri gözlenecektir.



Şekil 6.16 $X_0=0,2$ ve $a=3,8$ değerleri için geometrik resim

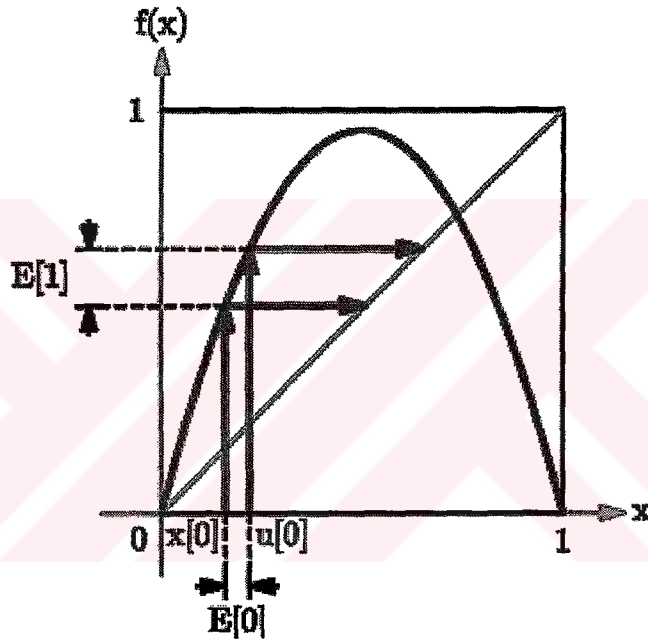
Böylece Robert May'in hayvan gruplarında, bu yılın popülasyonu ile gelecek yılın popülasyonu arasındaki ilişkiyi ortaya koyan basit bir fonksiyonu grafik haline getirilerek, girdileri yatay eksen, çıktıları da dikey eksenle işaretlenmiş oldu. Burada muhtemel her girdi(x) için, sadece bir tek çıktı(y) vardır ve bunlar yukarıda olduğu gibi kalın bir çizgi ile gösterilen şekiller meydana getirmiştir.

Burada davranış biçimi hassas olarak parabolün eğimine -nonlineerlik derecesine- ya da Robert May'in tanımıyla "patlama ve aşırı nüfus"a bağlıydı. Fonksiyon çok yatıksa nüfus yok oluyordu: Başlangıçtaki nüfus ne kadar olursa olsun sonunda sifıra düşüyordu. Eğimi artırmakla klasik bir çevrecinin öngördüğü kararlı denge gerçekleşiyordu. Bütün güzergahları kendine doğru çeken bu nokta tek boyutlu bir çekici idi.

Belirli bir noktanın ötesinde, bir çatallanma iki periyodunda salınan bir nüfus vermiştir. Bundan sonra daha çok periyot ikiye katlanmış ve sonunda şekil 6.16'da olduğu gibi güzergah kararlı duruma geçmeyi tamamen reddetmiştir.

7. LYAPUNOV ÜSTELİ

Rus matematikçi Aleksandr Mikhailovich Lyapunov'un adıyla anılan Lyapunov üsteli, dinamik bir sistemin gelişim sürecini tasvir eder(Williams, 1997). Faz uzayındaki komşu iki yörüngenin birbirine yaklaşması ya da uzaklaşması durumuna göre; negatif, sıfır ya da pozitif değerler alır. Negatif değerin anlamı iki yörüngenin birbirini çekmesine yaklaşmasıdır. Pozitif üstün anlamı ise yörüngelerin birbirinden uzaklaşması ve kaotik durumun gözlenmesidir. Yani, pozitif Lyapunov üsteli kaosun çok önemli bir göstergesidir(Gleick, 1995). Pozitif Lyapunov üsteli başlangıç durumlarına hassas bağlılığın ölçümünü bitişik iki noktanın ayrılma süresine göre yapar.



Şekil 7.1 Başlangıç noktaları birbirine çok yakın iki yörüngenin lojistik eşitlik(parabol) ve tahmini değişimi(Bu grafikte yörüngeler zamanla birbirinden uzaklaşmaktadır).

Lyapunov üstelinin en basit şekildeki tanımı ve özelliklerinin açıklanması bir boyutlu harita ile mümkün olabilmektedir. Yukarıda ki gibi bir boyutlu harita için,

$$X_{n+1} = f(X_n) \quad (7.1)$$

eşitliğini yazılabilir. X_0 ve Y_0 , faz düzleminde birbirine yakın iki başlangıç noktasını, n de buradaki iterasyon(tekrar) sayısını ifade etmektedir.

$$X_n = f^{(n)}(X_0) \quad (7.2)$$

$$Y_n = f^{(n)}(Y_0)$$

Bir atraktörün(çekerin) çeşitli bölgelerindeki bütün eğimleri uygun tek bir değerde gösterilebilir. Bu ortalama değerde “Lyapunov Üsteli” olarak adlandırılır. Bunun içinde öncelikle temel üstel eşitlik ifade edilmelidir(Williams, 1997).

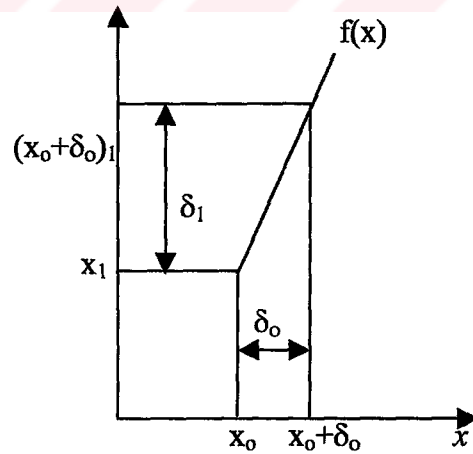
$$|X_n - Y_n| = |X_0 - Y_0| e^{\lambda n}$$

$$\delta_n = \delta_0 e^{\lambda n} \quad (7.3)$$

Bu eşitlik de;

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{\lambda n} \quad (7.4)$$

formunda yazılabilir. Bu denklemde yer alan δ_0 sembolü iki nokta arasındaki başlangıç anındaki boşluğu göstermektedir. Bu denklemin sol tarafında ifade edilen oran, n.tekrar sonucunda başlangıçtaki boşluğun genişlediğinin mi yoksa daraldığının mı anlaşılmasını sağlar.



İki nokta arasındaki
ortalama eğim
= *ordinat aralığı/apsis aralığı*

Şekil 7.2 İki komşu yörünge arasındaki boşluğun tahmini değişimini ifade eden bir boyutlu harita

Yukarıdaki şekilde referans yörüngesi X_0 noktasında başlar. Komşu yörünge başlangıç anında bu noktadan δ_0 kadar uzak bir noktadan başlamaktadır. Yani komşu yörüngenin başlangıç değeri Y_0 , $X_0 + \delta_0$ a eşit olmaktadır.

Sonraki tekrardaki değerler ordinat üzerinde gösterilmiştir. Burada referans yörüngesinin değeri X_1 , boşluk değeri δ_1 ve komşu yörüngenin değeri de $(X_0 + \delta_0)_1$ olmaktadır. Ayrılma aralığındaki bu değişimi iki nokta arasındaki ortalama eğim vermektedir. Doğadaki bir değişiklik ifade edileceği zaman “x’in bir fonksiyonudur” denir ve $f(x)$ olarak yazılır. İşte buradaki δ_1/δ_0 oranı da $f(x)$ teki değişimi verir. Grafikten de anlaşılabileceği gibi, δ_1/δ_0 , ordinat aralığının apsis aralığına bölünmesi ile elde edilir. Diğer bir deyişle bu oran, ard arda gelen iki noktayı birbirine bağlayan doğru ya da eğrinin ortalama eğimidir.

Matematikçiler n.tekrarda x’in herhangi bir fonksiyonunu $f^n(x)$ olarak ifade etmişlerdir. Şimdi başlangıç aralığı δ_0 ’ı küçültülerek sıfıra yakın bir değere indirgensin. Bunun anlamı şekil 7.2 deki iki başlangıç noktasının birbirlerine yaklaşmasıdır. Bu durumda değişim oranının hesaplanabilmesi için türev alma yoluna gidilir. df veya $df^n(x)$ ifadesi ard arda gelen iki tekrar arasındaki son derece küçük farkı içerir.

$$\text{değişim oranı} = \frac{df^n(x)}{dx} = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{\text{ordinat aralığı}}{\text{apsis aralığı}} = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{\delta_n}{\delta_0} \quad (7.5)$$

Başlangıç noktası X_0 ’ın ilk tekrar sonucu değişim oranı şu şekilde hesaplanabilir.

$$X_0 \text{ daki değişim} = \frac{\delta_1}{\delta_0} = f'(X_0) \quad (7.6)$$

Bir sonraki tekrarda, X_1 değeri, X_0 ’ın, δ_1 ise δ_0 aralığının yerini alır ve yeni oluşan δ_2 aralığı da eski δ_1 aralığının yerine geçer. Aynı model bu şekilde devam ettirilir.

$$X_1 \text{ daki değişim} = \frac{\delta_2}{\delta_1} = f'(X_1) \quad (7.7)$$

Artık ard arda gelen bu tekrarlar için zincir kuralı uygulanabilir.

$$\frac{d}{dx} f^n(X_0) = f'(X_{n-1}) \frac{d}{dx} f^{n-1}(X_0) \quad (7.8)$$

Örneğin ard arda gelen dört tekrar için bu kural uygulanacak olursa (7.8) eşitliğinin $n=4$, $n=3$, $n=2$ ve $n=1$ değerleri için dört kez yazılması gerekir. Ne var ki, $n=1$ terimi $n=2$ için yazılan ifadenin bir bölümünü oluşturacağı için ayrıca yazılmasına gerek yoktur. Bu işlemler yapıldığında,

$$\frac{d}{dx} f^4(X_0) = f'(X_3) \cdot f'(X_2) \cdot f'(X_1) \cdot f'(X_0) = f'(X_i) \text{ lerin çarpımı} \quad (7.9)$$

sonucunu elde edilecektir. Kolaylıkla anlaşılabilceği gibi X_i ardarda gelen tekrar değerlerini sembolize etmektedir. i ise 0 dan $(n-1)$ e kadar olan ardışık dizidir.

$$\frac{d}{dx} f^4(X_0) = \frac{\delta_4}{\delta_3} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{\delta_4}{\delta_0} \quad (7.10)$$

Bu denklem aşağıda ifade edilen şekliyle genel bir forma sokulabilir ,

$$\frac{d}{dx} f^n(X) = \frac{\delta_n}{\delta_0} \quad (7.11)$$

(7.9) ve (7.11) denklemlerinden,

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = f'(X_i) \text{ lerin çarpımı} \quad (7.12)$$

olduğunu söylenebilir. Bölümün başında ele alınmış olan (7.3) denklemi tekrar göz önüne alınarak bu denklemdeki üstel λ ifadesi tek başına bırakılsın.

$$\log_e \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right) = \lambda n \log_e e$$

$$\log_e \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right) = \lambda n$$

Buradan da λ çekilerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \quad (7.13)$$

δ ların her ikisi de aynı birimde oldukları için $\delta n / \delta_0$ oranı birimsizdir. Dolayısıyla bu oranın logaritması alındığında da herhangi bir birim söz konusu olmayacaktır. Tekrarlar genellikle zamanla ifade edilirler. Bu yüzden, λ' nın boyutu $1/\text{zaman}(1/\text{saniye}, 1/\text{sene vb.})$ olacaktır.

(7.13) denklemi (7.3) denkleminin logaritmik halidir. Bu denklemdeki δ_n / δ_0 ifadesi yerine (7.12) denklemindeki karşılığı olan $f'(X_i)$ değerlerinin çarpımı yazılabilir.

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln [f'(x_3) \cdot f'(x_2) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0)]$$

$$\lambda = \frac{1}{n} [\ln f'(x_3) + \ln f'(x_2) + \ln f'(x_1) + \ln f'(x_0)]$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln f'(x_i)$$

Her ne kadar boşluklar pozitif veya negatif değer alsalarda, bunların logaritmalarının negatif bir değer alması mümkün olmamaktadır. Bu yüzden (7.13) eşitliği şu şekilde yazılabilir.

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| f'(x_i) \right| \quad (7.14)$$

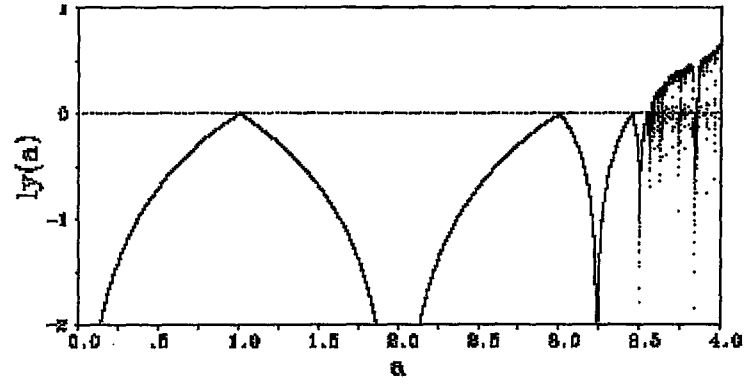
Buradaki logaritmik ifade sayesinde sadece bir noktanın eğimi değil bütün eğimlerin bir ortalama değeri alınmış olur. Son olarak (7.14) denkleminde limit terimi eklenerek bu denklemin daha geniş kapsamlı bir şekil alması sağlanabilir.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| f'(x_i) \right| \quad (7.15)$$

Bu eşitlik Lyapunov üstelinin logaritmik bir ifade olduğunu göstermektedir. Bir sistemin tamamı hassas değilse kaotik olmayan bir rejim söz konusudur ve iki komşu yörünge birleşmektedir. Bunun tam tersi söz konusu olduğunda yani sistem başlangıç koşullarına hassas bir şekilde bağlı ise kaotik bir rejim söz konusudur. Bu durumda iki komşu yörünge hızlı bir şekilde birbirinden uzaklaşır (Çambel, 1993).

Sonuç olarak denilebilir ki; Lyapunov üsteli sistemin hassaslığını ölçer. $\lambda > 0$ olduğu durumlarda kaos, $\lambda < 0$ olduğu durumlarda ise periyodik davranışlar gözlenir.

Aşağıdaki grafikte a parametresine göre Lyapunov üstelinin nasıl değişiklik gösterdiği ifade edilmiştir.



Şekil 7.3 $X_0=0,2$ başlangıç değeri için a parametresine göre Lyapunov üstelinin değişim grafiği

8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde doğrusal olmayan bazı sistemleri inceledim. Doğrusal olmayan olayların incelenmesi için genel bir yöntem yoktur. Bu tür olayları temsil eden denklemler, analitik olarak, topolojik olarak ve nümerik olarak incelenebilir. Analitik olarak ancak bazı özel durumları temsil eden kısmi(parçalı) denklemlerin çözümleri bulunabilir. Topolojik incelemede ise sistemin faz uzayı oluşturulur ve bu faz uzayında sistemin davranışı incelenir. Faz uzayı kavramı doğrusal olmayan olayların incelenmesi için merkezi bir önem taşır. Nümerik teknikler ise günümüzde gittikçe yaygınlaşan ve gelişen bir yöntemdir. Sistemi temsil eden denklemler değişik nümerik analiz yöntemleri ile belli sınır değerleri koşulları altında incelenebilir.

Bu tezde lineer olmayan sistemlere bazı örnekler vererek bu olayları temsil eden denklemler ifade edildi. Bu denklemlerin faz uzaylarındaki basit tekil noktalar incelendi ve sınıflandırıldı.

Doğrusal olmayan denklemlerin çözümleri yapıldığında karşımıza boyut problemi çıkmaktadır. Çünkü bir çok durumda göz önüne alınan boyut, klasik tamsayı boyuttan farklıdır. Bu nedenle tezde boyut kavramı ve fraktal boyut detaylı olarak incelendi.

Karmaşa probleminin matematiksel olarak modellenmesinin nasıl olacağı tartışılan bir konudur. Bu problemin genel olarak doğrusal olmayan denklemleri içerdiği söylenebilir. Bu denklemler ise bazı durumlarda kaotik davranışlar gösterirler. Bazı bilim adamları kaos teorisinin karmaşa probleminin incelenmesi için bir paradigma(yöntemler ve teoriler bütünlüğü) oluşturacağını söylemektedir. Bu nedenle bu tezde doğrusal olmayan olayların ne zaman kaotik davrandığı ve kaos teorisinin temelleri incelendi.

Kaotik davranan sistemlere örnek olarak, zorlamalı sönümlü bir basit sarkaç alındı ve bu örnek detaylı olarak incelendi. Sisteme ait denklemler verilen parametrelerle beraber Maple 8 programı yardımı ile çözümlenerek sonuçlar şekiller ile birlikte ortaya kondu.

Ele alınan diğer iki örnek ise kaos teorisinin klasik örneği olan Lorenz çekeri ve Rössler çekeri idi. Her iki çekeri ait denklemler yeniden çözümlenerek şekilleri 6.9 ve 6.10 ile ifade edildi.

Kaotik davranan doğrusal olmayan olaylara başka bir örnek ise rekabet denklemleridir. Bu denklemlerin çözümleri doğrusal olmayan haritalar veya lojistik haritalarla ifade edilir. bu haritaların incelenmesi oldukça basit olmasına rağmen, bir çok olayda karşımıza çıkmaktadır.

Tezde bu konu da ayrıntılı olarak incelenmiş ve sonuçlar 6.14, 6.15 ve 6.16 numaralı grafiklerle ortaya konmuştur. Bu grafiklerde denklemlerin hangi parametreler için doğrusal hangi parametreler için kaotik olduğu kolayca görülmektedir.

Son olarak tezde bir sistemin kaotik olup olmadığının anlaşılmasını sağlayan Lyapunov Üsteli kavramı üzerinde durulmuştur.



KAYNAKLAR

- Blümel, R. ve Reinhardt, W.P., (1997), Chaos in Atom Physics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boussinesq, J. (1872), "Journal of Mathematics", Pure and Applied Series 2, 17: 55.
- Campbell, D., (1989), Introduction to Nonlinear Phenomena, Addison-Wesley, Redrock City.
- Çambel, A. B., (1993), Applied Chaos Theory, Academic Press, New York.
- Dönmez, Ali., (2000), Diferensiyel Denklemler, Beta Yayınları, İstanbul.
- Eigen, M., (1971), "Self-Organization of Matter and Evolution of Biological Macromolecules", Die Naturwissenschaften, 58:465.
- Eigen, M., Gardiner, W., Schuster, P. Ve Winkler-Oswatitsch, R., (1981), "The Origin of Genetic Information", Scientific American, April:88,.
- Enns, R.H. ve McGuire, G.C., (1997), Nonlinear Physics, Birkhauser, Boston.
- Fermi, E., Pasta, J.R. ve Ulam, S.M., (1955), Studies of Nonlinear Problems, Los Alamos Science Laboratory Report, Los Alamos.
- Gleick, J., (1995), Kaos Yeni Bir Bilim Teorisi(Çev., F. Üçcan), Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu, Ankara.
- Helmholtz, H., (1895), Sensation of Tone, Longmans Green, London.
- Korteweg, D.J. ve DeVries, G., (1895), "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and a New Type of Long Stationary Wave", Philosophical Magazine, 39:422.
- Lauwerier, H.A., (1986), Two-Dimensional Iterative Maps Chaos, Princeton University Press, Princeton.
- Mandelbrot, B.B., (1967), "Biological Populations with Nonoverlapping Generations", Science 186, 573:99.
- Marion, J.B. ve Thornton, S.T., (1995), Classical Dynamics of Particles and Systems, Saunder College Publishing, Orlando.
- May, R.M., (1976), "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", Nature, 261: 459.
- Neff, R.B. ve Tillman, L., (1975), "Hewlett-Packard Journal", Nov.1975.
- Redheffer, R.M., (1992), Introduction to Differential Equations, Jones and Bartlett Publishers, Boston.

Ruelle, D., (1994), Raslantı ve Kaos(Çev., D. Yurtören), Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu, Ankara.

Toda, M., (1989), Theory of Nonlinear Lattices, Springer-Verlog, NewYork.

Volterra, V., (1926), "Variazione Fluttuazioni Del Numero D'individui in Specie Animali Conviventi", Mem.Acad.Lincei, 2:31.

Williams, G.P., (1997), Chaos Theory Tamed, Taylor&Francis, London.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	17.12.1976	
Doğum yeri	Kırklareli	
Lise	1990-1993	Adana Erkek Lisesi- Mehmet Akif Ersoy Lisesi
Lisans	1995-1999	Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliği
Yüksek Lisans	2001-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Bölümü

Çalıştığı kurum(lar)

2000-Devam ediyor Dr. Reşit Galip İlköğretim Okulu

