YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kapalı Sis. İçin Lie. Teo. Mom., Johansson Kanonik Yap.

Yüksek Lisans Tezi

GÜLAY BAHADIROĞLU

FİZİK

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

20.000 TL

1180

KAPALI SİCİMLER İÇİN LİOUVİLLE TEORİSİNDE MARNELİUS, JOHANSSON KANONİK YAPISI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

A. Gülay BAHADIROĞLU

İSTANBUL — 1989

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAPALI SİCİMLER İÇİN LİOUVİLLE TEORİSİNDE MARNELİUS, JOHANSSON KANONİK YAPISI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

35

A. Gülay BAHADIROĞLU

İSTANBUL — 1989

İÇİNDEKİLER

T E Ş E K K Ü R

Bu tez çalışmasında bana bu ortamı sağlayan ve tez yürütücülüğünü üstlenen hocam Yard.Doç.Dr.Mehmet Şirin'e teşekkür etmeyi bir görev sayarım.

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve önerilerinden yararlandığım hocam Prof.Dr.K.Gediz Akdeniz'e şükran ve minnet duygularımı ifade etmekten haz duyuyorum. Aynı şekilde; çalışmam süresince göstermiş olduğu özellikle geniş hoşgörü, teşvik ve hesapların kontrolündeki katkılarından dolayı hocam Prof.Dr.Emine Rızaoğlu'na saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bu tezin hazırlanması sırasında beni Chalmers Teknik Üniversitesine kabul edip, maddi ve manevi en iyi şartlarda çalışmam hususunda olanca gayreti ve titizliği gösteren, bilgilerinden yararlandığım Prof.Dr.Robet Marnelius'a ve Chalmers Teknik Üniversitesi Teorik Fizik Enstitüsüne şükran ve minnet duygularımı sunarım.

Ayrıca, ICTP-Trieste'de çalışma olanağı sağlayan Prof.Dr.Abdus Salam'a müteşekkir olduğumu ifade ederim.

Tezin daktilosunu üstlenen İ.Ü. Fizik Bölümü sekreterlerinden Hamdiye Babür'e de teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada modifiye bozonik sicimin kanonik kuantizasyonu problemi özetlenerek Marnelius ve Johansson tarafın- sicimlerin kanonik kuantizasyonu için önerilen ve sicimlerin kuantizasyonunun 25 boyutun altında da olabileceğini gösteren farklı zaman kanonik kuantizasyon yöntemi incelenmiştir. Ayrıca, gene bu çalışmada yanlız kapalı sicimler için geçerli olabilen yeni bir yaklaşımla Marnelius Johansson yöntemi elde edilmiştir.

SUMMARY

In this thesis, a canonical quantization within the modified string theory is summarized and the method of non-equal time canonical quantization which proposed by Marnelius and Johansson is investigated. By means of this method, we see that quantization of strings can be in less than 25 space-time dimension.

Moreover, in this thesis Marnelius-Johansson's method is found with a new approach.

BÖLÜM-I
GİRİŞ

Leptonlar, hadronlar, ... ve tanecikler arası kuvvetleri oluşturan alanlardan meydana gelen bir evrendeyiz. Bütün bu tanecikler 1) Özel Relativite Teorisi ve 2) Kuantum Mekaniği prensiplerine uyarlar.

Taneciklerin birbirleri ile etkileşmelerini tanımlayan nicel bir teori kurmak çok zordur. Eğer Planck boyu (10^{-33}cm) civarındaki mikroskobik dünyanın özelliklerini bilseydik bu görüşümüz muhtemelen farklı olacaktı.

Hadronların yapısı hakkındaki çalışmalar 1960 lı yılların sonlarına doğru yoğunluk kazandı. Bu çalışmalar, Regge teorisi yardımı ile Veneziano dual modelinin [1] ortaya atılmasıyla sonuçlandı. Kısa bir süre sonra Nambu [2], Nielsen [3] ve Susskind [4] birbirlerinden bağımsız olarak, bu modelin aslında, tek boyutlu yapıların yani sicimlerin saçılmasını tarif ettiği önemli buluşunu gerçekleştirdiler.

Sicimler, matematik dilinde eğriler olarak adlandırabileceğimiz tek boyutlu yapılardır ve açık, kapalı sicimler olmak üzere iki kısımda incelenirler. Açık sicimler iki uç noktaya sahiptirler ve sicim üzerinde değişen uzay koordinatı σ ,

$$0 < \sigma < \pi$$

dır. Kapalı sicimler topolojik açıdan çemberdirler ve σ ;

$$0 \leq \sigma \leq \pi$$

dır. Sicimin hareketi esnasında sicim üzerindeki σ noktasının zaman koordinatı τ ise

$$-\infty \leq \tau \leq \infty$$

olmak üzere değerler alır.

Bozonik sicim modeli fenomonolojik açıdan çok başarılı idi. Çok geçmeden Virasoro [5] bu modelin sonsuz bir cebire, Virasoro cebrine tekabül eden simetrisinin bulunduğunun farkına vardı. Virasoro'nun keşfettiği simetri model için sakınca oluşturan, tachyonları ortadan kaldırmaktadır. Bu simetriyi anlamak üzere Nambu [6] (daha sonra Hara [7] ve Goto [8]) sicimler için sicimin taradığı uzay-zaman yüzeyinin reparametrizasyonu altında invaryant kalan aksiyon prensibini oluşturdu. Daha sonra aksiyonun reparametrizasyon invaryant oluşunun bizi Virasoro cebrine götürdüğünü gösterdi. Nambu aksiyonu Goldstone, Goddard, Rebbi, Thorn [9] tarafından tamamen kuantize edildi.

Bu arada, Ramond [10] Virasoro cebrini antikomütatif jeneratörleri içerecek şekilde genişletti. Bu da süper simetriye bir temel oluşturdu ve bizi fermionlu dual modele götürdü.

Az bir zaman sonra, Neveu ve Schwarz [11] böyle bir simetriyi gerçekleyen bir diğer bozonik model kurdular. Ve nihayet, Ramond fermionlarını, Neveu - Schwarz modeline uydurarak hem bozonları ve hem de fermionları içeren yeni bir modelin olabileceği gösterildi [12] .

Sicim modellerinin kuantizasyonunun, bozonik sicimler halinde 26 boyutlu uzay-zamanda ve bozonik-fermionik sicimler halinde de 10 boyutlu uzay-zamanda mümkün olduğu görüldü. Bugün, hala $D = 4$ boyutunda bir model oluşturmayı ümit etmemize rağmen, bu olay bize sicim modellerinin hadron fiziği için kullanılamayacağını göstermektedir. Neveu ve Scherk [13] Spini 1 olan kütlesiz parçacıkların saçılma amplitütlerinin Yang-Mills parçacıklarınınkine benzer olduğunu, Scherk ve Schwarz [14] ise kütlesiz, spini 2 olan parçacığın graviton olarak tanımlanacağını gösterdiler. Cüretkar bir öneride bulunarak sicim modellerinin gravitasyon içeren birleşik alan teorileri olarak düşünülebileceğini söylediler.

Ramond-Neveu-Schwarz modeli bu yeni ışık altında düşünüldüğünde, tachyon içermesi ve kuplajların detaylı incelenmesi sonucu bazı çelişkilerin ortaya çıkması nedeni ile bugün hala uygun bir model değildir. Öte yandan, Gliozzi, Olive ve Scherk [15] tachyonların spektrum üzerinde belirli bir izdüşüm yapılarak ortadan kaldırılabileceğini gösterdiler. Süper sicimler olarak adlandırılan bu model daha sonraları Green, Schwarz ve kısmen Brink [16] tarafından geliştirildi. Bu sayede güzel bir tablo ortaya çıktı: Bu modeller büyük bir ihtimalle gravitasyon içeren kuantum teorileri ile uyumludur.

Bozonik sicim modelinin kanonik ve ışık konisi kuantizasyonu metodları kullanılarak kuantize edilmesi halinde, tachyonların ortaya çıkmaması için, sicimin 26 boyutta hareket etmesi gerektiğini biliyoruz. Bir başka kuantizasyon metodu Feynman tarafından verilen path integrallerine dayanmaktadır. Polyakov bu yoldan giderek önce bozonik sicimi [17] ve hemen ardından da fermionik sicimi [18] kuantize etmiş ve kuantizasyonun bozonik ve fermionik hallerde sırasiyle 26 ve 10 dan daha küçük uzay-zaman boyutunda mümkün olabileceğini göstermiştir. Bu çalışmada ayrıca, Polyakov yan ürün olarak sicimin uzay-zaman yüzeyinin skaler eğriliğinin de Liouville denklemini sağladığını bulmuştur.

Öte yandan iki boyutta Einstein denklemlerinin geçerliliklerini yitirdiği bilinmektedir. 1982 yılında D'Hoker ile Jackiw iki boyutlu gravitasyon teorisinin Liouville tipi bir dinamiğe sahip olabileceğini göstermişlerdir [19] . Bu bakımdan Polyakov'un elde ettiği sicimin uzay-zaman yüzeyinin eğriliğinin Liouville denklemini sağlaması beklenen bir sonuç olmaktadır.

Bu çalışmada, modifiye sicim teorilerinin kanonik kuantizasyonunda yani Liouville teorilerinin kanonik yapısının belirlenmesinde Robert Marnelius ve Lars Johansson tarafından önerilen farklı zaman kanonik kuantizasyon metodunu inceleyeceğiz ve yaptıkları hesapları ayrıntılı bir şekilde kapalı sicimler için tekrarlayacağız.

Bu tez, aşağıdaki gibi düzenlenmiştir;

İkinci bölümde, Polyakov kuantizasyonu sonucunda, modifiye sicimlerin ortaya çıkışı anlatılmaktadır.

Üçüncü bölümde, sicimlerin sınır şartları göz önüne alınmaksızın Liouville denkleminin minumum enerji çözümleri belirlenmektedir.

Dördüncü bölümde ise, kapalı sicimlerin minumum enerjileri bulunmakta ve bu enerjilere tekabül eden çözüm şektörleri belirlenmektedir.

Beşinci bölümde, Poisson Parantezleri metodu ile kanonik olarak tam olan regüler periyodik sektörün osilatör parçalanmaları bulunmakta ve bu yolla 25 uzay-zaman boyutunun altındaki kanonik kuantizasyon gerçekleştirilmektedir.

Altıncı bölüm, bulunan sonuçların tartışılmasına ayrılmıştır.

EK-A, EK-B ve EK-C de sırasıyla Bölüm III, Bölüm IV ve Bölüm V in ayrıntılı hesapları verilmektedir.

BÖLÜM-II

MODİFİYE SİCİM TEORİLERİNE GİRİŞ

Serbest relativistik sicim Lagrange yoğunluğu [8], τ= zaman koordinatı, σ= uzay koordinatı, $\alpha,\beta = 0,1$ $(\partial_0 \equiv \partial_\tau, \partial_1 \equiv \partial_\sigma)$, $g_{\alpha\beta}$= uzay-zamanın metrik tensörü, $g \equiv \mathrm{Det}\, g_{\alpha\beta}$, x_μ= sicim değişkeni (μ= 0,1 .... D-1), $N = 2\pi\alpha'$= sabit normalizasyon faktörü olmak üzere,

$$\mathcal{L}_0(\tau,\sigma) = \frac{1}{2N}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{2-1}$$

dır. Buradan, hareket denklemleri

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu\right) = 0 \tag{2-2}$$

$$T_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, g^{\lambda\delta}\partial_\lambda X^\mu \partial_\delta X_\mu = 0 \tag{2-3}$$

olur. $T_\alpha^\alpha = 0$ dan dolayı, $T_{\alpha\beta}$ sadece iki bağımsız elemana sahiptir. Konformal ayar:

$$g_{\alpha\beta} = e^{\phi}\eta_{\alpha\beta} \,, \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

(e^{ϕ} = bilinmeyen konformal faktör.)

altında, $N = 1$ alınırsa sırasıyla (2-1), (2-2), (2-3) ifadeleri:

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu \tag{2-5}$$

$$\Box X^\mu \equiv \ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0 \tag{2-6}$$

$$T_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) \equiv \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\lambda X^\mu \partial^\lambda X_\mu \tag{2-7}$$

$$= 0$$

$$\dot{X}\cdot X' = 0 \quad , \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0$$

formlarına indirgenir. (2-1) orjinal Lagrange yoğunluğu Weyl invaryant ($g_{\alpha\beta} \to \lambda g_{\alpha\beta}$) olduğundan yukarıdaki ifadelerde e^{ϕ} görülmüyor. Bu noktada, (2-1) Lagrange yoğunluğunun reparametrizasyon invaryant olduğunu vurgulamak gerekir. (2-1) ifadesi τ ve σ'nın seçiminden bağımsızdır. Bu da konformal ayar ile (2-5), (2-7) ifadelerinin, konformal dönüşümler:

$$\xi \to \xi'(\xi) \,, \quad \eta \to \eta'(\eta)$$

($\xi = \tau + \sigma$, $\eta = \tau - \sigma$ ışık konisi koordinatları) olur. $T_\alpha^\alpha=0$ dan dolayı, $T_{\alpha\beta}$ sadece iki bağımsız elemana sahiptir. Konformal ayar:

$$g_{\alpha\beta}=e^{\phi}\eta_{\alpha\beta}\,,\quad \eta_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{2-4}$$

(e^{ϕ} = bilinmeyen konformal faktör.)

altında, $N=1$ alınırsa sırasıyla (2-1), (2-2), (2-3) ifadeleri:

$$\mathcal{L}_S=\frac{1}{2}\,\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu \tag{2-5}$$

$$\Box X^\mu \equiv \ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0 \tag{2-6}$$

$$T_{\alpha\beta}(\tau,\sigma)\equiv\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\lambda X^\mu\partial^\lambda X_\mu \tag{2-7}$$

$$=0$$

$$\dot{X}\cdot X'=0\quad,\quad \dot{X}^2+X'^2=0$$

formlarına indirgenir. (2-1) orjinal Lagrange yoğunluğu Weyl invaryant ($g_{\alpha\beta}\rightarrow\lambda g_{\alpha\beta}$) olduğundan yukarıdaki ifadelerde e^{ϕ} görülmüyor. Bu noktada, (2-1) Lagrange yoğunluğunun reparametrizasyon invaryant olduğunu vurgulamak gerekir. (2-1) ifadesi τ ve σ'nın seçiminden bağımsızdır. Bu da konformal ayar ile (2-5), (2-7) ifadelerinin, konformal dönüşümler:

$$\xi\rightarrow\xi'(\xi)\,,\quad \eta\rightarrow\eta'(\eta)$$

($\xi=\tau+\sigma$, $\eta=\tau-\sigma$ ışık konisi koordinatları) altında invaryantlığına indirgenir.

Görüldüğü gibi Lagrange yoğunluğu (2-1) konformal ayar altında sıfıra gidiyor. O halde, (2-1) teorisinin sadece 26 uzay-zaman boyutunda kuantize edilebileceği söylenebilir [20].

Polyakov, klasik açıdan Nambu aksiyonuna denk olan:

$$S_{BVH} = \frac{1}{2N} \int dz \int d\sigma \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha X_\mu\, \partial_\beta X^\mu \qquad (2\text{-}8)$$

aksiyonuna tekabül eden

$$\int \mathcal{D} g^{\alpha\beta}(z,\sigma) \int \mathcal{D} X(z,\sigma)\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[S_{BVH} + \lambda \int dz\, d\sigma \sqrt{-g}\right]} \qquad (2\text{-}9)$$

bölüşüm fonksiyonundan yola çıkarak, klasik olarak

$$g^{\alpha\beta} T_{s\alpha\beta} = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

olmasına karşılık, kuantik açıdan R(z,σ) skaler eğriliği göstermek üzere

$$g^{\alpha\beta} \langle T_{s\alpha\beta} \rangle = \hbar \frac{D}{24\pi} \{ R(z,\sigma) + \text{Sabit} \} \neq 0 \qquad (2\text{-}11)$$

ve

$$e^{\frac{i}{\hbar} F} = \int \mathcal{D} X(z,\sigma)\, e^{\frac{i}{\hbar} S_{BVH}} \qquad (2\text{-}12)$$

olduğunu gösterdi. ($\langle T^{\alpha}_{s\alpha} \rangle = \frac{\hbar D}{24\pi} \{ R(z,\sigma) + sabit \}$

2 boyutlu eğri uzay-zamanda D skaler alanının trace anomali ilişkisidir.) Konformal ayar yapıldığında

$$R = e^{-\varphi}(\ddot{\varphi} - \varphi'') \tag{2-13}$$

dır. (2-12) çözüldüğünde:

$$F = \hbar \frac{D}{48\pi} \int dz \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \varphi'^2 - \mu^2 e^{\varphi} \right] \tag{2-14}$$

(μ^2, λ kozmolojik sabitinin tekrar normalize edilmiş şekli) bulunur. Bu $X^{\mu}(z,\sigma)$ komponentinin D sayısının integrasyonundan gelen kısımdır. $g_{\alpha\beta}(z,\sigma)$ nın integrasyonundan, $g_{\alpha\beta} = e^{\phi} \eta_{\alpha\beta}$ ayar seçiminin Fadeev-Popov detenminantı gelir. Bu katkıda konformal anomali ile hesaplanacak şekle indirgenir. Polyakov, (2-14) F faktörünü

$$- \frac{13\hbar}{24\pi} \quad \left(\text{veya } \frac{\hbar D}{48\pi} \right) \tag{2-15}$$

şeklinde buldu. Böylece, (2-9) kapalı sicimler için

$$\int \mathcal{D}\varphi(z,\sigma)\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\hbar \frac{26-D}{48\pi}\right) \int dz \int d\sigma \left\{ \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi'^2 - \mu^2 e^{\varphi} \right\}} \tag{2-16}$$

ye orantılı hale geldi. (Açık sicimler için (2-16) ya sınır teriminden bir ilave gelir. [11])

Sonuç olarak, relativistik sicimler 26 dan düşük uzay-zaman boyutunda, ancak (2-16) ile verilen Lagrange fonksiyonu hesaba katıldığında kuantize edilebilirler. Bu da bizi modifiye sicim teorisine başka bir deyişle, Polyakov'un hesapladığı gibi:

$$C = \frac{26-D}{48\pi} \tag{2-17}$$

ve

$$\mathcal{L}_{Liouville} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi - \mu^2 e^{\varphi} - \Box \varphi \tag{2-18}$$

olmak üzere

$$L = L_{sicim} - CL_{Liouville} \tag{2-19}$$

Lagrange yoğunluğuna götürür. Böylece, konformal ayar altında (2-19) ifadesi

$$L = L_{Liouville} \tag{2-20}$$

olacağından, problem Liouville teorisinin kuantizasyonuna indirgenmiş olur. L, Lagrange yoğunluğu enerji-momentum tensörü [13]:

$$T_{\alpha\beta} \equiv T_{S\alpha\beta} - C\,T_{L\alpha\beta} = 0 \tag{2-21}$$

dır. (2-7) ile verilen $T_{S\alpha\beta}$ nın izi sıfır olduğundan (2-21) ifadesinden:

$$Tr\, T_{\alpha\beta} = 0$$

olması gerektiği aşikardır.

$$T_{L\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \, \partial_\beta \varphi - \eta_{\alpha\beta} \mathcal{L}_L - 2 \partial_\alpha \partial_\beta \varphi \quad (2\text{-}22)$$

veya

$$\mathcal{L}_L = \mathcal{L}_0 - 2 \Box \varphi \quad (2\text{-}23)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \varphi'^2 - \mu^2 e^{\varphi} \quad (2\text{-}24)$$

olmak üzere

$$T_L^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \varphi \, \partial^\beta \varphi - \eta^{\alpha\beta} L_0 - 2(\partial^\alpha \partial^\beta - \eta^{\alpha\beta} \Box) \varphi \quad (2\text{-}25)$$

dır.

BÖLÜM-III

LİOUVİLLE TEORİSİNİN GENEL MİNİMUM ENERJİ ÇÖZÜMLERİ

R. Marnelius ve L.Johansson tarafından geliştirilen modifiye sicim teorisinin farklı zamanlı kanonik kuantizasyon metodu kararlı minumum enerji çözümlerine dayanmaktadır. Bu nedenle, bu bölümde Liouville teorisinin kararlı minumum enerji çözümlerini kısaca gözden geçirip bu yeni kuantizasyon metodunu anlamaya çalışacağız.

İki boyutlu Minkowski uzayında φ skaler alanı, (2-18) Lagrange yoğunluğundan türetilen,

$$\Box\varphi = \ddot{\varphi} - \varphi'' = -\mu^2 e^{\varphi} \qquad (3\text{-}1)$$

Liouville denklemini sağlar. Burada

$$\dot{\varphi} \equiv \partial_\tau \varphi \quad , \quad \varphi' \equiv \partial_\sigma \varphi$$

kısaltmaları kullanılmıştır. (3-1) denkleminin en genel çözümünün h(ξ) ve k(η), $\xi = \tau + \sigma$, $\eta = \tau - \sigma$, ışık konisi koordinatlarının reel ve monoton artan fonksiyonları olmak üzere

$$\varphi = \ln \frac{8 h'(\xi) k'(\eta)}{M^2 [h(\xi) - k(\eta)]^2} \tag{3-2}$$

olduğu biliniyor[12]. Doğal olarak

$$h'(\xi) > 0 \quad , \quad k'(\eta) > 0$$

dır[15]. (3-2) çözümü, h(ξ) ve k(η) nın eşzamanlı Möbius dönüşümleri, yani [16]

$$h \longrightarrow T(h) \equiv \frac{a_{11} h + a_{12}}{a_{21} h + a_{22}}$$

$$k \longrightarrow T(k) \equiv \frac{a_{11} k + a_{12}}{a_{21} k + a_{22}}$$

altında invaryanttır. Burada a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}

$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 1$ şartını sağlayan reel sayılardır. $-T$ dönüşümünün T dönüşümüne eşit olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan, T dönüşümünün

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Det}\, T = 1$$

matrisi ile tanımlandığı aşikardır. Möbius dönüşümlerinin oluşturduğu grup, Möbius grubu, $SL(2,\mathbb{R})/Z_2$, $SO(1,2)$ e izomorftur. EK-A-1 de gösterildiği gibi $SL(2,\mathbb{R})/Z_2 \cong SO(1,2)$ (Lorentz grubu) dur.

Şimdi, sicim sınır şartlarını göz önüne almadan Liouville denkleminin minumum enerjiye tekabül eden çözümlerini bulmaya çalışalım.

Enerji yoğunluğunun ($\mathcal{H}$) T^{00} şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Daha önceki bölümde enerji-momentum tensörünün (2-25) bağıntısı ile verildiğini görmüştük. Buradan

$$T^{00}(\tau,\sigma) = (\partial^0\varphi)^2 - \mathcal{L}_0 - 2(\partial^{0\,2} - \Box)\varphi$$

ve

$$\mathcal{H} = T^{00}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2 - \ddot{\varphi} - \varphi'' \qquad (3\text{-}3)$$

elde edilir. (3-2) genel çözümü (3-3) ifadesinde yerine konulduğunda, ayrıntılı hesabı EK-A-1 de verildiği gibi,

$$D(f(\xi)) = 4f'^{1/2}\,\partial_\xi^2 (f'^{-1/2}) \qquad (3\text{-}4)$$

Schwarziyen türevi cinsinden

$$\mathcal{H}(\tau,\sigma) = D(h) + D(k) \qquad (3\text{-}5)$$

formuna indirgenir. Bu noktada, sınır şartlarını göz önüne almaksızın, Hamilton fonksiyonu

$$H = \int d\sigma\, \mathcal{H}(\tau,\sigma) = \int_0^L d\xi\, D(h(\xi)) + \int_0^L d\eta\, D(k(\eta)) \qquad (3\text{-}6)$$

yı minimize edeceğiz. (h ve k nın bağımsız fonksiyonlar olduğunu hatırlayalım). H'ya varyasyon prensibini uygularsak, integrantın h ve k fonksiyonlarının birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerini içermesi dolayısıyla,

$$\delta H = 0$$

bizi

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\frac{\partial D(h)}{\partial h'''} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{\partial D(h)}{\partial h''} + \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial D(h)}{\partial h'} = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\frac{\partial D(k)}{\partial k'''} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\frac{\partial D(k)}{\partial k''} + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial D(k)}{\partial k'} = 0. \qquad (3\text{-}7)$$

denklemlerine götürecektir. D(h) ve D(k) nın açık ifadeleri (3-5) de kullanılarak

$$-\frac{3h''^3}{h'^4}+\frac{4h''h'''}{h'^3}-\frac{h''''}{h'^2}=0$$

(3-8)

$$-\frac{3k''^3}{k'^4}+\frac{4k''k'''}{k'^3}-\frac{k''''}{k'^2}=0$$

elde edilir. Bu denklemler bir kere integre edilirse, c_1 ve c_2 gerçek integrasyon sabitleri olmak üzere

$$\partial_\xi^2 \ln h' = -c_1 h'$$

ve (3-9)

$$\partial_\eta^2 \ln k' = -c_2 k'$$

sonucuna varılır. Bu denklemleri bir kere daha kısmi integrasyon metodunu kullanarak integre edersek, d_1 ve d_2 yine reel integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$(\partial_\xi \ln h')^2 = -2c_1 h' + d_1$$

ve (3-10)

$$(\partial_\eta \ln k')^2 = -2c_2 k' + d_2$$

eşitlikleri bulunur. (3-9) ve (3-10) arasında c_1 ve c_2 yok edilip, (3-4) tanımı hatırlanarak

$$d_1 = D(h(\xi))$$

ve (3-11)

$$d_2 = D(k(\eta))$$

olduğu kolayca görülür. O halde

$$H = L\,(d_1 + d_2) \qquad (3\text{-}12)$$

dir. d_1 ve d_2 üzerinde hiçbir kısıtlama olmadığından en küçük enerjiye tekabül eden çözümler bulunabilir.

Ayrıntılı hesabı EK-A-2 de verildiği gibi minumum enerji çözümlerinin açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$d_1 > 0 \Longrightarrow \quad h(\xi) = T(\mathrm{th}\,\alpha\xi) \quad , \quad \alpha \equiv \frac{\sqrt{d_1}}{2} \qquad (3\text{-}13.a)$$

$$d_1 = 0 \Longrightarrow \quad h(\xi) = T(\xi) \qquad (3.13.b)$$

$$d_1 < 0 \Longrightarrow h(\xi) = T(tg\,\alpha\xi) \quad , \alpha \equiv \frac{\sqrt{-d_1}}{2} \tag{3-13.c}$$

Bu çözümlerin herbiri, uygun bir aralıkta değerler alan Θ parametresi ve M_Θ Möbius dönüşümü için

$$h(\xi + \Theta) = M_\Theta(h(\xi)) \tag{3-14}$$

şartını gerçeklerler. Şimdi, teker teker Möbius dönüşümlerinin açık şeklini belirleyelim. Ayrıntılı bilgi EK-A-3 de verildiği gibi

$d_1 < 0$ durumu için

$$R_\Theta = \begin{bmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & \sin\frac{\Theta}{2} \\ -\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 2\sqrt{-d_1} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{-d_1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M_\Theta = T R_{2\alpha\Theta} T^{-1} \quad , \quad \alpha \equiv \frac{\sqrt{-d_1}}{2}$$

bulunur.

$d_1 = 0$ durumu için

$$P_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M_\theta = T P_\theta T^{-1}$$

ve son olarak

$d_1 > 0$ durumu için

$$L_\theta = \begin{bmatrix} ch\frac{\theta}{2} & sh\frac{\theta}{2} \\ sh\frac{\theta}{2} & ch\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} -2\sqrt{d_1} & 0 \\ 0 & -1/2\sqrt{d_1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M_\theta = T L_{2\alpha\theta} T^{-1} \quad , \quad \alpha \equiv \frac{\sqrt{d_1}}{2}$$

veya

$$B_\varepsilon = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon/2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M_\theta = T' B_{2\alpha\theta} T'^{-1} \quad , \quad T' = T R^{-1}_{\pi/2}$$

bulunur.

Bundan sonraki bölümde, bu yöntemin kapalı sicimlere nasıl ve hangi sınırlarda uygulanabileceğini gözden geçireceğiz.

BÖLÜM-IV

KAPALI SİCİMLERDE DEĞİŞİK SEKTÖRLER İÇİN MİNİMUM ENERJİ ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Bu bölümde Liouville denkleminin kapalı sicimlerin sınır şartını sağlayan minumum enerji çözümlerini Bölüm III de incelediğimiz kuantizasyon tekniğini kullanarak hesaplayacağız.

$$\varphi(z,\sigma+L)=\varphi(z,\sigma)$$
$$\varphi'(z,\sigma+L)=\varphi'(z,\sigma)$$

dır. φ nin en genel şeklinin (3-2) ile verildiğini biliyoruz. Bu sınır şartları (3-2) ye uygulanırsa

$$\varphi(z,\sigma)=\varphi(z,\sigma+L)$$

$$\frac{[h(\xi)-k(\eta)]^2}{h'(\xi)\,k'(\eta)} = \frac{[h(\xi+L)-k(\eta+L)]^2}{h'(\xi+L)\,k'(\eta+L)} \qquad (4\text{-}1)$$

olur. M bir Möbius dönüşümü olmak kaydı ile

$$\begin{aligned} h(\xi+L) &= M(h(\xi)) \\ k(\eta+L) &= M^{-1}(k(\eta)) \end{aligned} \qquad (4\text{-}2)$$

olması halinde (4-1) in gerçeklendiği kolayca görülebilir.

Bundan böyle, (4-2) periyodiklik koşullarını sağlayan h ve k fonksiyonlarını h(M) ve $k(M^{-1})$ şeklinde göstereceğiz. Bu durumda dönüştürülmüş fonksiyonlar:

$$T(h(M)) = \tilde{h}(TMT^{-1})$$

$$T(k(M^{-1})) = \tilde{k}(TM^{-1}T^{-1})$$

dir.

Bu hazırlıklardan sonra, tanımları EK-A-3 de verilen değişik sektörler için minumum enerji çözümlerinin bulunmasına geçelim.

1°) Eliptik sektör için:

(3-13.c) ile verilen çözümlerin kapalı sicimin sınır şartları göz önüne alındığı takdirde nasıl olacağını araştıralım.

$$M = R_{2\theta}\,, \quad \theta = \arccos \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M$$

seçilebilir. (3-13-c) den esinlenerek genel çözüm için, ayrıntılı hesabı EK-B-1 de verildiği gibi

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= \alpha\xi + \tilde{\psi}_1(\xi) \\ \psi_2(\eta) &= \beta\eta + \tilde{\psi}_2(\eta) \end{aligned} \qquad (4\text{-}3)$$

ve

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi+L) &= \psi_1(\xi) + \theta + n\pi \\ \psi_2(\eta+L) &= \psi_2(\eta) - \theta + m\pi \end{aligned} \qquad (4\text{-}4.a)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\theta + n\pi}{L} \\ \beta &= \frac{-\theta + m\pi}{L} \end{aligned} \qquad (4\text{-}4.b)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \mathrm{tg}\,\psi_1(\xi) \\ k(\eta) &= \mathrm{tg}\,\psi_2(\eta) \end{aligned} \qquad (4\text{-}5)$$

alalım.

(3-13.c) den minumum enerji çözümlerinin

$$h_0(\xi)=tg\alpha\xi$$
$$k_0(\eta)=tg\beta\eta \qquad (4-6)$$

olacağını tahmin edebiliyoruz. Bu çözümlere bağlı enerjilerin stabil minumum enerjiler olup olmadığını bulabilmek için de bu çözümler etrafındaki küçük değişimleri düşünelim. Bunun için

$$\delta\tilde{\Psi}_1=\sum_n a_n e^{in2\pi/L\xi}$$
$$\delta\tilde{\Psi}_2=\sum_m b_m e^{im2\pi/L\eta} \qquad (4-7)$$

yazıp, (3-6) enerji ifadesinde (4-5), (4-3) ve (4-7) yi yerleştirelim. Sonuçta

$$H=\int_0^L d\xi\, D(h(\xi))+\int_0^L d\eta\, D(k(\eta))$$
$$=-4L(\alpha^2+\beta^2)+\frac{(2\pi)^4}{\alpha^2L^3}\sum_n n^2\left[n^2-\left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2\right]|a_n|^2$$
$$+\frac{(2\pi)^4}{\beta^2L^3}\sum_m m^2\left[m^2-\left(\frac{\beta L}{\pi}\right)^2\right]|b_m|^2 \qquad (4-8)$$

buluruz. (Ayrıntılı hesap için EK-B-2 ye bakınız) öte yandan (3-12) ifadesi

$$\alpha = \frac{\sqrt{-d_1}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \beta = \frac{\sqrt{-d_2}}{2}$$

kısaltmaları göz önünde tutularak (4-6) minumum enerji çözümleri için

$$H = -4L(\alpha^2+\beta^2) \tag{4-9}$$

şeklinde yazılabilir. (4-8) ve (4-9) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$\frac{(2\pi)^4}{\alpha^2 L^3} \sum_n n^2 \left[n^2 - \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2 \right] |a_n|^2 \overset{n=1}{=\!=} 0 \longrightarrow \alpha = \mp \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{(2\pi)^4}{\beta^2 L^3} \sum_m m^2 \left[m^2 - \left(\frac{\beta L}{\pi}\right)^2 \right] |b_m|^2 \overset{m=1}{=\!=} 0 \longrightarrow \beta = \mp \frac{\pi}{L} \tag{4-10}$$

olması gerektiği ve böylelikle (4-6) fonksiyonlarının

$$|\alpha| \le \frac{\pi}{L} \quad , \quad |\beta| \le \frac{\pi}{L} \tag{4-11}$$

şartları altında stabil minumum enerjiye bağlı çözümler olduğu görülür. Bölüm III den $h'(\xi) > 0$, $k'(\eta) > 0$ şartlarını hatırlayarak

$$\alpha > 0 \quad , \quad \beta > 0 \tag{4-12}$$

sonucuna varılır. $\theta > 0$, $\theta < \pi$ olduğunda (4-4.b), (4-11) ve (4-12) göz önünde tutulursa

$$\alpha = \frac{\theta}{L}$$
$$\beta = \frac{\pi - \theta}{L} \qquad (4\text{-}13)$$

bulunur. Böylece

$$H_{min} = -\frac{4}{L}\left[(\theta-\pi)^2 + \theta^2\right] \qquad (4\text{-}14)$$

olur. Minumum enerjinin limit durumları incelenirse;

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} H_{min} = -\frac{2\pi^2}{L}$$

$$\lim_{\substack{\theta \to \pi \\ \theta \to 0}} H_{min} = -\frac{4\pi^2}{L}$$

$$-\frac{4\pi^2}{L} < H_{min} < -\frac{2\pi^2}{L} \qquad (4\text{-}15)$$

bulunur.

$\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ olması halinde:

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{L}$$

$$M = R_{2\pi} \longrightarrow M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

veya

$$M = R_0 \longrightarrow M = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan görüldüğü gibi bu hal açıkça Möbius invaryant durumdur. Bu duruma tekabül eden minumum enerji

$$H_{min} = -\frac{8\pi^2}{L} \tag{4-16}$$

dir. Bu da gerçekte bizim ulaşabildiğimiz en düşük stabil enerjidir. Minumum enerji çözümleri ise

$$\begin{aligned} h_0(\xi) &= T\left(tg\frac{\pi}{L}\xi\right) \\ k_0(\eta) &= T'\left(tg\frac{\pi}{L}\eta\right) \end{aligned} \tag{4-17}$$

şeklindedir.

2°) Parabolik sektör için:

Periyodiklik koşulu (3-2) nin

$$\begin{aligned} h(\xi+L) &= P_\lambda(h(\xi)) = h(\xi)+\lambda \\ k(\eta+L) &= P_{-\lambda}(k(\eta)) = k(\eta)-\lambda \end{aligned} \tag{4-18}$$

şeklini aldığına ve buradan da, ayrıntılı hesabı EK-B-3 de verildiği gibi,

$$h(\xi) = \alpha\xi + \tilde{h}(\xi) \qquad \alpha = \frac{\lambda}{L} \qquad (4\text{-}19)$$
$$k(\eta) = -\alpha\eta + \tilde{k}(\eta)$$

olması gerektiği sonucuna varılır. Böylece, eliptik sektördekine benzer olarak kolaylıkla

$$h_o(\xi) = \alpha\xi \qquad (4\text{-}20)$$
$$k_o(\eta) = -\alpha\eta$$

çözümleri ve bu çözümlere tekabül eden minumum enerjinin de ($d_1 = d_2 = 0$)

$$H_{min} = 0 \qquad (4\text{-}21)$$

olduğu gösterilebilir. Fakat,

$$h_o' = -k_o' \qquad (4\text{-}22)$$

olması

$$h'(\xi) > 0 \quad , \quad k'(\eta) > 0$$

şartları ile çeliştiğinden, bu durumu göz önüne almayacağız.

3^{o}) Hiperbolik sektör için:

Periyodiklik koşulu (4-2) nin

$$h(\xi+L)=e^{\varepsilon}h(\xi)$$
$$k(\eta+L)=e^{-\varepsilon}k(\eta) \qquad (4-23)$$

şeklini aldığı aşikardır. h (ξ) ve k (η) periyodu L olan fonksiyonlar olmak üzere

$$h(\xi)=e^{\varepsilon/L\,\xi}\,\tilde{h}(\xi)$$
$$k(\eta)=e^{-\varepsilon/L\,\eta}\,\tilde{k}(\eta) \qquad (4-24)$$

kabulünü yapabiliriz. Çünkü, bu bağıntılar

$$\begin{aligned} h(\xi+L) &= e^{\varepsilon/L\,(\xi+L)}\,\tilde{h}(\xi+L) \\ &= e^{\varepsilon}h(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(\eta+L) &= e^{-\varepsilon/L\,(\eta+L)}\,\tilde{k}(\xi+L) \\ &= e^{-\varepsilon}k(\eta) \end{aligned}$$

olmak üzere, (4-23) periyodiklik koşulunu sağlamaktadır. Diğer durumlara benzer olarak ve (3-13.a) bağıntısı da göz önüne alındığında, minumum enerji çözümlerinin

$$h_0(\xi) = e^{\varepsilon/L\,\xi}$$

$$k_0(\eta) = -e^{-\varepsilon/L\,\eta} \qquad (4\text{-}25)$$

şeklinde ve minumum enerjinin de

$$H_{min} = \frac{2\varepsilon^2}{L} \qquad (4\text{-}26)$$

formunda olduğu bulunabilir.

Her üç sektör için minumum enerjiye tekabül eden φ fonksiyonları aşağıdaki gibi olur.

(1) $\pm M = B_\varepsilon$

$$\varphi_0(\tau,\sigma) = \ln \frac{8\varepsilon^2 e^{\varepsilon/L}(\xi-\eta)}{L^2\mu^2\left[e^{\varepsilon/L\,\xi} + e^{-\varepsilon/L\,\eta}\right]^2}$$

$$= \ln \frac{2\varepsilon^2}{L^2\mu^2 \mathrm{ch}^2 \frac{\varepsilon}{L}\tau}$$

(2) $\pm M = R_{2\theta}$, $0<\theta<\pi$

$$\varphi_0(\tau,\sigma) = \ln \frac{8\theta(\pi-\theta)\, 1/\cos^2\theta/L\,\xi \times 1/\cos^2\pi-\theta/L\,\eta}{L^2\mu^2\left(\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{L}\xi - \mathrm{tg}\,\frac{\pi-\theta}{L}\eta\right)^2}$$

$$= \ln \frac{8\theta(\pi-\theta)}{L^2\mu^2 \sin^2\left[\frac{\pi}{L}\left(\sigma \pm \left(1-\frac{2\theta}{\pi}\right)\tau\right)\right]}$$

(3) $\pm M = 1$

$$\varphi_0(\tau,\sigma) = \ln \frac{8\pi^2}{L^2 \mu^2 (\cos^2 \frac{\pi}{L}\xi \cos^2 \frac{\pi}{L}\eta)(tg\frac{\pi}{L}\xi - tg\frac{\pi}{L}\eta)}$$

$$= \ln \frac{8\pi^2}{L^2 \mu^2 \{a_1 \sin[\frac{2\pi}{L}\tau + \theta_1] + a_2 \sin[\frac{2\pi}{L}\sigma + \theta_2]\}^2}$$

(a_1, a_2, θ_1 ve θ_2 ($a_2 > a_1 > 0$) sabitler.)

Görüldüğü gibi sadece hiperbolik sektör için $\varphi_0(\tau,\sigma)$ regülerdir. Eliptik sektör için $\varphi_0(\tau,\sigma)$ bir singulariteye, Möbius invaryant sektör için ise $\varphi_0(\tau,\sigma)$ iki singulariteye sahiptir. Bununla birlikte Möbius invaryant sektör en düşük enerjiye sahip olması nedeni ile sicim teorisinde önemli bir rol oynar.

BÖLÜM - V

REGÜLER SEKTÖRÜN KANONİK KUANTİZASYONU

Eliptik ve Möbius invaryant sektörlerin sahip olduklarını singülariteler $\frac{(h-k)}{h'k'}$ ifadesini sıfır yapan noktalardır, zaman içinde korunurlar ve Liouville teorisinin konformal enerji-momentum tensörü (2-25), bu singüler noktalarda regülerdir [18] . Bu nedenle, bu sektörler kanonik olarak kuantize edilemezler [21,22]. Biz bu bölümde regüler periyodik sektörü kuantize etmeye çalışacağız.

(2-23) ile verilen Lagrange fonksiyonunun (2-25) ile verilen enerji-momentum ifadesini ışık konisi koordinatları $\xi = z+\sigma$, $\eta = z-\sigma$ cinsinden yazarsak;

$$\begin{aligned} T_{++}(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(T_{00}+T_{01}\right) \\ T_{--}(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(T_{00}-T_{01}\right) \end{aligned} \tag{5-1}$$

ve $Tr\, T_{\alpha\beta}=0$ olması nedeniyle

$$T_{+-} = T_{-+} = 0$$

bulunur. Backlund dönüşümü [23] (Ayrıntılı bilgi için EK-C-1 e bakınız.) ile serbest ψ alanına geçelim. ψ nin enerji-momentum tensörünü $\Theta_{\alpha\beta}$ ile gösterirsek

$$T_{\alpha\beta}(\varphi) = \Theta_{\alpha\beta}(\psi) \tag{5-2}$$

ve $\varepsilon_{\alpha\beta}\,(\varepsilon^{01} = 1)$ iki boyuttaki antisimetrik tensörü göstermek üzere

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha\beta}(\psi) &= \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\partial_\gamma \psi \partial^\gamma \psi) \\ &- (\varepsilon_{\alpha\gamma}\partial^\gamma \partial_\beta + \varepsilon_{\beta\gamma}\partial^\gamma \partial_\alpha)\psi \end{aligned} \tag{5-3}$$

dır. $\mathrm{Tr}\ \Theta_{\alpha\beta} = 0$ olması nedeni ile de $\Theta_{\alpha\beta}$ iki bağımsız değişkene sahiptir. Işık konisi koordinatlarına geçilirse

$$\begin{aligned} \Theta_{++}(\psi) &= (\partial_\xi \psi)^2 - 2\partial_\xi^2 \psi \\ \Theta_{--}(\psi) &= (\partial_\eta \psi)^2 + 2\partial_\eta^2 \psi \end{aligned} \tag{5-4}$$

olur. (Ayrıntılı hesap için EK-C-2 ye bakınız.) $h(\xi)$ ve $k(\eta)$ fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned} T_{++}(\varphi) &= \Theta_{++}(\psi) = (\partial_\xi \ln h')^2 - 2\partial_\xi^2 \ln h' \\ T_{--}(\varphi) &= \Theta_{--}(\psi) = (\partial_\eta \ln k')^2 - 2\partial_\eta^2 \ln k' \end{aligned} \tag{5-5}$$

dır. Buradan sistemin kuantizasyonunun $\ell nh'$, $\ell nk'$ osilatör parçalanmalırının yazılmasına indirgendiği görülür. İşte, bu bölümde bu amaca uygun farklı zamanlı kanonik kuantizasyon için Poisson parantezleri cebrini kullandığımız bir metod geliştireceğiz.

Önce yazacağımız Poisson parantezlerinin uyacağı aksiyonları gözden geçirelim. τ , τ' düşünülen sektörde keyfi zamanlar olmak üzere

$$\{\varphi(\tau,\sigma),\varphi(\tau',\sigma')\} \tag{5-6}$$

Poisson parantezi

1- Jacobi özdeşliğini sağlamalı ve

$$\{\varphi(\tau,\sigma),\varphi(\tau',\sigma')\} = -\{\varphi(\tau',\sigma'),\varphi(\tau,\sigma)\}$$

antisimetrik olmalıdır.

2- Aşağıdaki özdeğer denkleminin sıfır sektörüne tekabül eden çözüm olmalıdır.

$$(\Box - \mu^2 e^{\varphi})\{\varphi(\tau,\sigma),\varphi(\tau',\sigma')\} = 0 \tag{5-7}$$

3- $\tau = \tau'$ için eşit zaman Poisson parantezlerine indirgenebilmelidir.

$$\{\varphi(\sigma),\varphi(\sigma')\}_{ET} = \{\dot\varphi(\sigma),\dot\varphi(\sigma')\}_{ET} = 0 \tag{5-8}$$

$$\{\varphi(\sigma),\dot\varphi(\sigma')\}_{ET} = \delta(\sigma-\sigma')$$

Bir sektörde bu aksiyonlar gerçeklenecek şekilde Poisson parantezleri tanımlamak mümkünse o sektöre kanonik olarak tam diyeceğiz.

Şimdi bu koşullar çerçevesinde h(ξ) ve k(η) nın Jacobi özdeşliğini sağlayan antisimetrik olan ve bu fonksiyonların regüler sektördeki özellikleri ile uyuşan uygun Poisson parantezlerini yazmaya çalışalım. (3-2) ifadesi ve

$$h \equiv h(\xi),\ k \equiv k(\eta),\ \tilde{h} \equiv h(\tilde{\xi}),\ \tilde{k} \equiv k(\tilde{\eta})$$
$$\xi = z + \sigma,\ \eta = z - \sigma,\ \tilde{\xi} = z' + \sigma',\ \tilde{\eta} = z' - \sigma'$$

kısaltmaları göz önünde tutulursa

$$\{\varphi(z,\sigma), \varphi(z',\sigma')\} = \{\ln h'k', \ln \tilde{h}'\tilde{k}'\}$$
$$+ \frac{2}{(h-k)(\tilde{h}-\tilde{k})}\left[2\{h-k, \tilde{h}-\tilde{k}\} - (\tilde{h}-\tilde{k})\{h-k, \ln \tilde{h}'\tilde{k}'\}\right.$$
$$\left. -(h-k)\{\ln h'k', \tilde{h}-\tilde{k}\}\right] \qquad (5\text{-}9)$$

olduğu görülür. Eğer $\{h,\tilde{h}\}$, $\{k,\tilde{k}\}$, ... için

$$\{\varphi(z,\sigma), \varphi(z',\sigma')\} = 0 \qquad (5\text{-}10)$$

denklemi sağlanıyorsa, bunlara homogen çözümler, diğerlerine de homogen olmayan (inhomogen) çözümler diyeceğiz. Buna göre

$$\{h,\tilde{h}\} = \{h,\tilde{h}\}_I + \{h,\tilde{h}\}_H$$
$$\{k,\tilde{k}\} = \{k,\tilde{k}\}_I + \{k,\tilde{k}\}_H \qquad (5\text{-}11)$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

şeklindedir. Şimdi,

$$\{h'(\xi), h'(\xi')\} = h'(\xi)\, h'(\xi')\, F(\xi,\xi')$$

ön koşulunu sağlayacak $F(\xi,\xi')$ fonksiyonunun ne gibi özellikleri sağlaması gerektiğini inceleyelim.

$$\{h'(\xi),\{h'(\xi'),h'(\xi'')\}\}+\{h'(\xi'),\{h'(\xi''),h'(\xi)\}\}$$
$$+\{h'(\xi''),\{h'(\xi),h'(\xi')\}\}=0$$

Jakobi özdeşliğinin $F(\xi,\xi')$ nün antisimetrik bir fonksiyon olması halinde sağlandığı kolayca görülebilir. İkinci olarak, $E(\xi,\tilde{\xi})$ stair-step fonksiyonunu (Ayrıntılı bilgi için EK-C-3 e bakınız.) göstermek üzere

$$F(\xi,\tilde{\xi})=-F(\tilde{\xi},\xi)=-\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi})-\frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})\right]$$

olmak kaydı ile

$$\{h'(\xi),h'(\tilde{\xi})\}=-\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi})-\frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})\right]h'(\xi)h'(\tilde{\xi}) \qquad (5\text{-}12)$$

ve aynı yolla

$$\{k'(\eta),k'(\tilde{\eta})\}=-\frac{1}{4}\left[E(\eta-\tilde{\eta})-\frac{1}{L}(\eta-\tilde{\eta})\right]k'(\eta)k'(\tilde{\eta}) \qquad (5\text{-}13)$$

$$\{h'(\xi),k'(\tilde{\eta})\}=\frac{1}{4L}(\xi-\tilde{\eta})\,h'(\xi)k'(\tilde{\eta}) \qquad (5\text{-}14)$$

olduğunu kabul edelim.

Öte yandan, (4-23) periyodiklik koşulları ve $h'(\xi)>0$,

$k'(\eta) > 0$ şartları birlikte göz önüne alındığında regüler periyodik sektörün

i) $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\xi \to -\infty} h = 0 \qquad \lim_{\eta \to \infty} k = 0$$

$$h = \int_{-\infty}^{\xi} h' d\xi > 0 \quad , \quad k = \int_{\infty}^{\eta} k' d\eta' < 0$$

ii) $\varepsilon < 0$

$$\lim_{\xi \to \infty} h = 0 \qquad \lim_{\eta \to -\infty} k = 0$$

$$h = \int_{\infty}^{\xi} h' d\xi < 0 \quad , \quad k = \int_{-\infty}^{\eta} k' d\eta' > 0$$

şeklinde parçalanabileceği aşikardır. Bu ifadeler göz önünde tutularak ayrıntılı hesabı EK-C-4 te verildiği gibi,

$$\{h(\xi), h(\tilde{\xi})\} = -\frac{1}{4} [E(\xi-\tilde{\xi}) - \frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})] h\tilde{h}$$

$$+ \frac{1}{4L} [h \int_{\infty}^{\tilde{\xi}} d\bar{\xi}' h(\bar{\xi}') - \tilde{h} \int_{\infty}^{\xi} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi})]$$

$$+ \frac{1}{8 sh\frac{\varepsilon}{2}} [e^{\varepsilon/2\, E(\xi-\tilde{\xi})} \tilde{h}^2 - e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\xi)} h^2] \qquad (5\text{-}15)$$

ve aynı yolla

$$\{k(\eta), k(\tilde{\eta})\} = -\frac{1}{4}\left[E(\eta-\tilde{\eta}) - \frac{1}{L}(\eta-\tilde{\eta})\right]k\tilde{k}$$

$$+\frac{1}{4L}\left[k\int_{-\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' k(\bar{\eta}') - \tilde{k}\int_{-\infty}^{\eta} d\bar{\eta}\, k(\bar{\eta})\right]$$

$$+\frac{1}{8\,sh\frac{\varepsilon}{2}}\left[e^{\varepsilon/2\, E(\eta-\tilde{\eta})}k^2 - e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\eta}-\eta)}\tilde{k}^2\right] \qquad (5\text{-}16)$$

ile

$$\{h(\xi), k(\tilde{\eta})\} = \frac{1}{4L}(\xi-\tilde{\eta})h\tilde{k}$$

$$+\frac{1}{4L}\left[h\int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' k(\bar{\eta}') - \tilde{k}\int_{-\infty}^{\xi} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi})\right] \qquad (5\text{-}17)$$

bulunur. Buradan, kolayca

$$\{\ln h', \tilde{h}'\} = -\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi}) - \frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})\right]\tilde{h}'$$

$$\{\ln k', \tilde{k}'\} = -\frac{1}{4}\left[E(\eta-\tilde{\eta}) - \frac{1}{L}(\eta-\tilde{\eta})\right]\tilde{k}'$$

$$\{\ln h', \ln \tilde{h}'\} = -\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi}) - \frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})\right]$$

$$\{\ln k', \ln \tilde{k}'\} = -\frac{1}{4}\left[E(\eta-\tilde{\eta}) - \frac{1}{L}(\eta-\tilde{\eta})\right]$$

$$\{h', \tilde{k}\} = \frac{1}{4L}(\xi-\tilde{\eta})h'\tilde{k} + \frac{1}{4L}h'\int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' k(\bar{\eta}')$$

$$\{\ln h', \tilde{k}\} = \frac{1}{4L}(\xi-\tilde{\eta})\tilde{k} + \frac{1}{4L}\int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' k(\bar{\eta}')$$

$$\{\ln h', \ln \tilde{k}'\} = \frac{1}{4L}(\xi-\tilde{\eta}) \qquad (5\text{-}18)$$

$$\{\ln h'k', \ln \tilde{h}'\tilde{k}'\} = \frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi}) + E(\eta-\tilde{\eta})\right] + \frac{1}{2L}(\xi-\tilde{\xi}+\eta-\tilde{\eta})$$

elde edilir. (5-18) ifadeleri (5-9) da Poisson parantezlerinin özellikleri hatırlanarak yerleştirilirse

$$\{\varphi(\xi,\eta), \varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\} = -\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi}) + E(\eta-\tilde{\eta})\right]$$

$$\times \frac{(h+k)(\tilde{h}+\tilde{k})}{(h-k)(\tilde{h}-\tilde{k})} + \frac{1}{2sh\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(h-k)(\tilde{h}-\tilde{k})}$$

$$\times\left[hk\left(e^{\varepsilon/2\, E(\eta-\tilde{\eta})} - e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\xi)}\right)\right.$$

$$\left. + \tilde{h}\tilde{k}\left(e^{-\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\xi)} - e^{-\varepsilon/2\, E(\eta-\tilde{\eta})}\right)\right] \qquad (5\text{-}19)$$

bulunur. Bu ifadenin doğruluğundan emin olmak için sırasıyla (5.6-7-8) bağıntılarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

1- Jacobi özdeşliği;

$$\{\varphi(z,\sigma), \{\varphi(z',\sigma'), \varphi(z'',\sigma'')\}\}$$
$$+\{\varphi(z',\sigma'), \{\varphi(z'',\sigma''), \varphi(z,\sigma)\}\}$$
$$+\{\varphi(z'',\sigma''), \{\varphi(z,\sigma), \varphi(z',\sigma')\}\} = 0$$

2- $\{\varphi(z,\sigma), \varphi(z',\sigma')\} = -\{\varphi(z',\sigma'), \varphi(z,\sigma)\}$

dır.

$$3\text{-}\ \Box\{\varphi(z,\sigma),\varphi(z',\sigma')\}=4\,\partial_\xi\partial_\eta\{\varphi(z,\sigma),\varphi(z',\sigma')\}$$
$$=-\frac{8h'k'}{(h-k)^2}\{\varphi(z,\sigma),\varphi(z',\sigma')\}$$

Diğer yandan, (3-1) tanımı yardımı ile

$$\Box\varphi(z,\sigma)=-\mu^2 e^{\varphi(z,\sigma)}=-\frac{8h'k'}{(h-k)^2}$$

bulunur. Böylece

$$\Box\{\varphi(z,\sigma),\varphi(z',\sigma')\}=-\mu^2 e^{\varphi(z,\sigma)}\{\varphi(z,\sigma),\varphi(z',\sigma')\}$$

olur.

$$4\text{-}a)\ \{\varphi(\sigma),\varphi(\sigma')\}_{ET}=-\frac{1}{4}\,[E(\sigma-\tilde{\sigma})-E(\sigma-\tilde{\sigma})]$$
$$\times\frac{(h+k)(\tilde{h}+\tilde{k})}{(h-k)(\tilde{h}-\tilde{k})}+\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{\varepsilon}{2}}\;\frac{1}{(h-k)(\tilde{h}-\tilde{k})}$$
$$\times[hk\,(e^{\varepsilon/2\,E(\tilde{\sigma}-\sigma)}-e^{\varepsilon/2\,E(\tilde{\sigma}-\sigma)})$$
$$+\tilde{h}\tilde{k}\,(e^{-\varepsilon/2\,E(\tilde{\sigma}-\sigma)}-e^{-\varepsilon/2\,E(\tilde{\sigma}-\sigma)})]=0$$

ve

$$b)\ \{\varphi(\sigma),\dot{\varphi}(\tilde{\sigma})\}_{ET}=(\partial_{\tilde{\xi}}+\partial_{\tilde{\eta}})\{\varphi(\xi,\eta),\varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\}_{ET}$$
$$=\frac{1}{2}\,(\Delta(\xi-\tilde{\xi})+\Delta(\eta-\tilde{\eta}))_{ET}$$
$$=\delta(\sigma-\tilde{\sigma})$$

ve

$$d\{\dot{\varphi}(\tau,\sigma),\dot{\varphi}(\tau',\sigma')\}_{ET}=[(\partial_{\xi}+\partial_{\eta})(\partial_{\tilde{\xi}}+\partial_{\tilde{\eta}})\{\varphi(\xi,\eta),\varphi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\}]_{ET}$$
$$=0$$

bulunur.

Sonuç olarak, (5-19) bağıntısı (5.6-7-8) şartlarını sağlayan doğru Poisson parantezidir.

Bulduğumuz Poisson parantezlerinin homogen ve homogen olmayan kısımlarını ayırmaya çalışalım. (5-10), (5-11) ve (5-19) ifadeleri göz önüne alındığında homogen çözümlerin

$$\{h,\tilde{h}\}_H=\frac{1}{4L}(\xi-\tilde{\xi})h\tilde{h}+\frac{1}{4L}h\int_{-\infty}^{\tilde{\xi}}d\bar{\xi}'\,h(\bar{\xi}')$$
$$-\frac{1}{4L}\tilde{h}\int_{-\infty}^{\xi}d\bar{\xi}\,h(\bar{\xi})$$

$$\{k,\tilde{k}\}_H=\frac{1}{4L}(\eta-\tilde{\eta})k\tilde{k}+\frac{1}{4L}k\int_{\infty}^{\tilde{\eta}}d\bar{\eta}'k(\bar{\eta}')$$
$$-\frac{1}{4L}\tilde{k}\int_{\infty}^{\eta}d\bar{\eta}\,k(\bar{\eta}) \qquad (5\text{-}20)$$

$$\{k',\tilde{k}\}_H=\frac{1}{4L}(\eta-\tilde{\eta})\tilde{k}k'+\frac{1}{4L}k'\int_{\infty}^{\tilde{\eta}}d\bar{\eta}\,k(\bar{\eta})$$

$$\{\ln k',\tilde{k}'\}_H=\frac{1}{4L}(\eta-\tilde{\eta})\tilde{k}'$$

$$\{\ln k',\ln\tilde{k}'\}_H=\frac{1}{4L}(\eta-\tilde{\eta})$$

$$\{\ln h', \ln \tilde{k}'\}_H = \frac{1}{4L}(\xi - \tilde{\eta})$$

$$\{\ln h'k', \ln \tilde{h}'\tilde{k}'\}_H = \frac{1}{2L}(\xi - \tilde{\xi} + \eta - \tilde{\eta})$$

şeklinde ve benzeri olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda, homogen olmayan çözümler:

$$\{h, \tilde{h}\}_I = -\frac{1}{4} E(\xi - \tilde{\xi}) h\tilde{h} + \frac{1}{8 \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}} \left(e^{\varepsilon/2 \, E(\xi - \tilde{\xi})} \tilde{h}^2 - e^{\varepsilon/2 \, E(\tilde{\xi} - \xi)} h^2 \right)$$

$$\{k, \tilde{k}\}_I = -\frac{1}{4} E(\eta - \tilde{\eta}) k\tilde{k} + \frac{1}{8 \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}} \left(e^{\varepsilon/2 \, E(\eta - \tilde{\eta})} k^2 - e^{\varepsilon/2 \, E(\tilde{\eta} - \eta)} \tilde{k}^2 \right)$$

$$\{\tilde{k}, h\}_I = 0 \qquad (5\text{-}21)$$

$$\{\ln h', \ln \tilde{h}'\}_I = -\frac{1}{4} E(\xi - \tilde{\xi})$$

$$\{\ln k', \ln \tilde{k}'\}_I = -\frac{1}{4} E(\eta - \tilde{\eta})$$

$$\{\ln h', \ln \tilde{k}'\}_I = 0$$

şeklinde ve benzeridir.

Bulduğumuz Poisson parantezleri kanonik olarak tam olduklarından h(ξ) ve k(η) fonksiyonları sonsuz sayıda hareket sabitleri cinsinden, örneğin hareket açıları, osilatör değişkenleri ve diğer sabit değişkenler cinsinden yazılabilir. Kuantizasyonda kullanmak üzere gerekli olan $\ln h'(\xi)$ ve $\ln k'(\eta)$ nün osilatör parçalanmalarını yazalım. (4-23) bağıntısından

$$\ln h'(\xi+L)=\ln h'(\xi)+\varepsilon \tag{5-22}$$

dır. EK-C-3 deki $E(\xi,\tilde{\xi})$ tanım bağıntısından

$$E(\xi+L-\tilde{\xi})=E(\xi-\tilde{\xi})+2 \tag{5-23}$$

dır. (5-22) ve (5-23) bağıntıları (5-21) da yerine konursa;

$$\begin{aligned}\{\varepsilon,\ln h'\}_I&=-\frac{1}{2}\\ \{\varepsilon,\ln k'\}_I&=\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{5-24}$$

dır. Diğer taraftan, homogen çözümlerin genel formunu göz önüne alalım. α, β sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\{\ln h',\ln \tilde{h}'\}_H&=\frac{\alpha}{4L}(\xi-\tilde{\xi})\\ \{\ln k',\ln \tilde{k}'\}_H&=\frac{\beta}{4L}(\eta-\tilde{\eta})\\ \{\ln h',\ln \tilde{k}'\}&=\frac{\alpha\xi-\beta\tilde{\eta}}{4L}\end{aligned} \tag{5-25}$$

olması gerektiğini biliyoruz. (5-23) ve (5-22) bağıntıları

(5-19) ve (5-20) bağıntıları ile birlikte göz önüne alındığında, kolayca

$$\{\varepsilon, \ln \tilde{h}'\} = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}$$
$$\{\varepsilon, \ln \tilde{k}'\} = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4} \qquad (5\text{-}26)$$

$$\{\varepsilon, \ln \tilde{h}'\} = -\frac{\beta}{4}$$
$$\{\varepsilon, \ln \tilde{k}'\} = \frac{\alpha}{4} \qquad (5\text{-}27)$$

formuna indirgenirler. Bu da bize

$$\beta = 2 - \alpha \qquad (5\text{-}28)$$

olması gerektiğini verir. Bölüm IV den

$$h(\xi) = e^{\varepsilon/L\,\xi}\, \tilde{h}(\xi)$$
$$k(\eta) = e^{-\varepsilon/L\,\eta}\, \tilde{k}(\eta)$$

olması gerektiğini biliyoruz.

$$h'(\xi) > 0 \quad \text{ve} \quad k'(\eta) > 0$$

durumlarından emin olmak için $\tilde{r}_1(\xi)$ ve $\tilde{r}_2(\eta)$ keyfi periyodik fonksiyonlar olmak üzere

$$h'(\xi) = e^{\varepsilon/L\,\xi}\, e^{\tilde{r}_1(\xi)}$$
$$k'(\eta) = e^{-\varepsilon/L\,\eta}\, e^{-\tilde{r}_2(\eta)}$$

şeklinde yazalım.

$$\tilde{h}(\xi) = e^{-\varepsilon/L\,\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left[\frac{\varepsilon}{L}\bar{\xi} + \tilde{r}_1(\bar{\xi})\right] d\bar{\xi}$$

$$\tilde{k}(\eta) = e^{\varepsilon/L} \int_{\infty}^{\eta} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{L}\eta - \tilde{r}_2(\bar{\eta})\right] d\bar{\eta}$$

dır. Bu ifadelerden görüleceği gibi $\tilde{h}(\xi)$ ve $k(\eta)$ fonksiyonlarının aynı sabit ile çarpımı $\varphi(\xi, \eta)$ fonksiyonunu değiştirmez. Bu keyfiyetten kurtulmak için p ve q sabitler olmak üzere

$$\tilde{r}_1(\xi) = q + r_1(\xi) \qquad \int_0^L r_1(\xi)\,d\xi = 0$$

$$\tilde{r}_2(\eta) = p + r_2(\eta) \qquad \int_0^L r_2(\eta)\,d\eta = 0$$

alalım. Bu durumda

$$h'(\xi) = e^{\varepsilon/L\,\xi}\, e^{q + r_1(\xi)}$$

$$k'(\eta) = e^{-\varepsilon/L\,\eta}\, e^{-(p + r_2(\eta))}$$

ve

$$\ln h'(\xi) = \frac{\varepsilon}{L}\xi + q + r_1(\xi)$$

$$\ln k'(\eta) = -\frac{\varepsilon}{L}\eta - p - r_2(\eta)$$

dır. $r_1(\xi)$ ve $r_2(\eta)$ fonksiyonlarının periyodikliği

$$r_1(\xi) = \sum_{n\neq 0} a_n\, e^{-\frac{2in\pi}{L}\xi}$$

$$r_2(\eta) = \sum_{n\neq 0} b_n\, e^{-\frac{2in\pi}{L}\eta}$$

olmasını önerir. Böylece

$$\ln h' = \frac{\varepsilon}{L}\xi + q + \sum_{n\neq 0} a_n\, e^{-\frac{2in\pi}{L}\xi}$$

$$\ln k' = -\frac{\varepsilon}{L}\eta - p + \sum_{n\neq 0} b_n\, e^{-\frac{2in\pi}{L}\eta} \tag{5-29}$$

bulunur. (5-23) ve (5-26) bağıntıları kullanılarak (ε, a_n, b_n, δ sabitler)

$$\{a_n, \varepsilon\} = \{b_n, \varepsilon\} = \{a_n, \delta\}$$

$$= \{b_n, \delta\} = \{a_n, b_m\} = 0 \tag{5-30}$$

$$\{\delta, \varepsilon\} = 1$$

olması gerektiği ve bu şartlar altında

$$\ln h' = \frac{\varepsilon}{L}\xi + \frac{(2-\alpha)}{4}\delta + \sum_{n\neq 0} a_n\, e^{-\frac{2in\pi}{L}\xi}$$

$$\ln k' = -\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)\eta - \frac{\alpha}{4}\delta + \sum_{n\neq 0} b_n\, e^{-\frac{2in\pi}{L}\eta} \tag{5-31}$$

olduğu görülür.

Bütün bu hazırlıklardan sonra, relativistik sicimlerin Liouville teorisinin regüler sektörünü kuantize etmeye çalışalım. Sektörü sonlu aralıkta düşündüğümüzden, kolaylık getirmesi açısından $L=2\pi$ alarak $\lambda=\frac{\varepsilon}{2\pi}$ kısaltması ile, ayrıntılı hesabı EK-C-5 de verildiği gibi;

$$\frac{1}{2\pi}M_n=\lambda^2\delta_{n,0}-\sum_m(n-m)m\,a_{n-m}a_m+2a_n n^2-2i\lambda a_n n$$

ve

$$\frac{1}{2\pi}N_n=\lambda^2\delta_{n,0}-\sum_m(n-m)m\,b_{n-m}b_m+2b_n n^2-2i\lambda b_n n. \tag{5-32}$$

olmak üzere

$$T_{++}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\sum_n M_n e^{-in\xi}$$
$$T_{--}(\eta)=\frac{1}{2\pi}\sum_n N_n e^{-in\eta} \tag{5-33}$$

buluruz. Ayrıntılı hesabı EK-C-6 daki gibi, konformal enerji:

$$H=\int_0^{2\pi}T^{00}(\sigma)d\sigma=\int_0^{2\pi}T_{++}(\xi)d\xi+\int_0^{2\pi}T_{--}(\eta)d\eta$$
$$=4\pi\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^2+4\pi\sum_{m=1}^{\infty}m^2(a_m^*a_m+b_m^*b_m) \tag{5-34}$$

dır.

$$\{M_n, M_m\} = i(m-n) M_{n+m} - 4\pi i n^3 \delta_{n,-m} \qquad (5-35)$$

dır. (Ayrıntılı hesap için EK-C-7 ye bakınız.)

Modifiye sicim teorisinde;

$$T_{S\alpha\beta}(X^{\mu}) = C\, T_{\alpha\beta}(\varphi) \qquad (5-36)$$

idi. Enerji-momentum tensörünün Fourier modları şeklinde tanımlanan Virasoro değişkeni L_n cinsinden [7]

$$\tilde{L}_n \equiv L_n - C M_n = 0 \qquad \forall n \qquad (5-37)$$

dir. Öte yandan, a_n Liouville osilatörleri

$$\{a_n^*, a_m\} = -\frac{i}{4\pi C n} \delta_{n,m} \qquad (5-38)$$

Poisson parantezini sağlarlar. (Ayrıntılı hesap için EK-C-8 e bakınız.) $a_o = 0$ olmak kaydı ile

$$i\sqrt{4\pi C}\, n\, a_n \longrightarrow a_n$$

kısaltması yapılırsa; (5-32) ifadesi

$$M_n' = -C M_n = -2\pi C \lambda^2 \delta_{n,0} - \frac{1}{2} \sum_m a_{n-m} a_m + i\sqrt{4\pi C}\, n\, a_n + \lambda\sqrt{4\pi C}\, a_n \qquad (5-39)$$

formuna indirgenir. Yeni osilatörler a_n, M_n'

$$\{a_n, a_m^*\} = in\,\delta_{n,m} \tag{5-40}$$

$$\{M'_n, M'_m\} = i(m-n)M'_{n+m} + i\,4\pi C n^3 \delta_{n,-m} \tag{5-41}$$

Poisson parantezlerini sağlarlar. (Ayrıntılı hesabı EK-C-7 ve EK-C-8 e benzerdir.)

Kanonik komütasyon bağıntılarına geçersek

$$[a_n, a_m^+] = n\,\delta_{n,m} \tag{5-42}$$

ve

$$\hat{M}_n \equiv :M'_n: + \frac{\delta_{n,0}}{24} \tag{5-43}$$

olmak üzere

$$[\hat{M}_n, \hat{M}_m] = (m-n)\hat{M}_{n+m} + \left(4\pi C + \frac{1}{12}\right) n^3 \delta_{n,-m} \tag{5-44}$$

dır. Bu bağıntıdan

$$C = \frac{25-D}{48\pi}$$

olduğu görülür.

BÖLÜM-VI

SONUÇLAR

Bu çalışmanın II.Bölümünde klasik Liouville teorisinin stabil minumum enerjiye sahip sicim çözümlerinin bulunmasını gözden geçirdik ve stabil minumum enerjinin iki integrasyon sabitinin toplamı ile orantılı olduğunu gördük.

III.Bölümde, kapalı sicim sınır şartları altında stabil minumum enerjileri ve bu enerjilere tekabül eden minumum enerjili çözüm sektörlerini belirledik. Sadece hiperbolik sektörün regüler olduğunu, başka bir deyişle, bu sektör için φ Liouville değişkeninin singülarite içermediğini gördük. $0 \leqslant \sigma \leqslant L$ aralığında Möbius invaryant sektör çözümü iki singülariteye, eliptik sektör çözümü bir singülariteye sahip olarak bulundu. φ Liouville değişkenindeki bu singülaritelerin sicimi singüler yapmamaları ilk etapta, bu sektörlerin elimine edilmelerini engeller [22]. Fakat, bu singülaritelerin zaman içinde korunuyor olmalarından dolayı bu çözüm sektörlerinin singülarite sayıları ile karakterize edilmeleri [18], stabil, sonlu minumum enerjiler için bu singüler sektörlerin düşünülmemesine ve böylece yarı klasik olarak kuantize edilememelerine sebebiyet verir[22].

IV.Bölümde, Marnelius ve Johansson tarafından önerilen metod ile kapalı sicimlerin regüler periyodik sektörünün kanonik olarak tam olduğu belirlendi.ve III.Bölümde elde edilen hareket denklemlerinin çözümleri kullanılarak bu metod yardımı ile osilatör parçalanmaları bulundu. Bäcklund dönüşümleri yardımı ile serbest kanonik alanlara geçilerek sonlu aralıkta modifiye sicim teorisi için kanonik kuantizasyon gerçekleştirildi. $C = \frac{25-D}{48\pi}$ olarak bulundu. $C > 0$ olarak kabul edildiğinden sonuçlarımız $D < 25$ için geçerlidir. $D=25$ olması $C=0$ verecek ve $T_{\alpha\beta} = T_{S\alpha\beta} - CT_{L\alpha\beta} = 0$ enerji-momentum tensöründeki Liouville kısmı ortadan kalkacaktır. Bu da modifiye sicim teorisinin 25 boyutta anlamını yitirmesi demektir.

Bu çalışmadan ortaya çıkan diğer bir önemli sonuçta; Marnelius ve Johansson yönteminin başka bir yaklaşımla da gerçekleştirilebileceğinin gösterilmiş olmasıdır.

E K - A

1- $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2 - \ddot{\varphi} - \varphi''$ (3-3)

ifadesindeki terimleri (3-2) yi kullanarak ayrı ayrı hesaplayıp yerine koyarsak

$$\dot{\varphi}^2 = h'^{-2}(\partial_\xi h')^2 + k'^{-2}(\partial_\eta k')^2 + 2\partial_\xi h'\partial_\eta k'$$

$$+ \frac{4}{(h-k)^2}\left[(\partial_\xi h)^2 + (\partial_\eta k)^2 - 2\partial_\xi h\,\partial_\eta k\right]$$

$$- \frac{2}{(h-k)}\left[h'^{-1}\partial_\xi h'\partial_\xi h - h'^{-1}\partial_\xi h'\partial_\eta k\right.$$

$$\left. + k'^{-1}\partial_\eta k'\partial_\xi h - h'^{-1}\partial_\eta k'\partial_\eta k\right]$$

$$\varphi'^2 = h'^{-2}(\partial_\xi h')^2 + k'^{-2}(\partial_\eta k')^2 - 2\partial_\xi h'\partial_\eta k'$$

$$+ \frac{4}{(h-k)^2}\left[(\partial_\xi h)^2 + (\partial_\eta k)^2 + 2\partial_\xi h\,\partial_\eta k\right]$$

$$- \frac{2}{(h-k)}\left[h'^{-1}\partial_\xi h'\partial_\xi h - k'\partial_\eta k'\partial_\xi h\right.$$

$$+h'\partial_\xi h'\partial_\eta k - k'^{-1}\partial_\eta k'\partial_\eta k]$$

$$\ddot{\varphi} = 2h'^{-1}k'^{-1}\partial_\eta k'\partial_\xi h' + h'^{-1}\partial_\xi^2 h' + k'^{-1}\partial_\eta^2 k'$$
$$-(h'^{-1}\partial_\xi h' + k'^{-1}\partial_\eta k')^2 - \frac{2}{(h-k)}(\partial_\xi^2 h - \partial_\eta^2 k)$$
$$+\frac{2}{(h-k)^2}(\partial_\xi h - \partial_\eta k)^2$$

$$\varphi'' = h'^{-1}\partial_\xi^2 h' + k'^{-1}\partial_\eta^2 k' - 2h'^{-1}k'^{-1}\partial_\eta k'\partial_\xi h'$$
$$-(h'^{-1}\partial_\xi h' - k'^{-1}\partial_\eta k')^2 - \frac{2}{(h-k)}(\partial_\xi^2 h - \partial_\eta^2 k)$$
$$+\frac{2}{(h-k)^2}(\partial_\xi h + \partial_\eta k)^2$$

$$\mathcal{H} = 3h'^{-2}(\partial_\xi h')^2 + 3k'^{-2}(\partial_\eta k')^2 - 2h'^{-1}\partial_\xi^2 h'$$
$$-2k'^{-1}\partial_\eta^2 k'$$

bulunur. (3-4) cinsinden

$$\mathcal{H}(z,\sigma) = D(h) + D(k)$$

şeklindedir.

2- Genel minumum enerji çözümlerinin açık ifadesini (3-9) denklemlerinden hareketle bulalım.

$$\partial_\xi^2 \ln h' = -c_1 h'$$

$$\partial_\eta^2 \ln k' = -c_2 k'$$

$$\partial_\xi^2 \ln h' = -c_1 h' \Rightarrow c_1 = \frac{h''^2}{h'^3} - \frac{h'''}{h'^2}$$

Bu ifadeyi (3-10) da yerine koyarsak;

$$3h''^2 - 2h'h''' - d_1 h'^2 = 0$$

homogen differansiyel denklemini elde ederiz.

$$h' = p \,, \quad h'' = p\frac{dp}{dh} \,, \quad h''' = p^2\frac{d^2p}{dh^2} + p\left(\frac{dp}{dh}\right)^2$$

dönüşümü altında;

$$p'^2 - 2pp'' - d_1 = 0$$ denklemine,

bu denklem de

$$p' = t = \frac{dp}{dh} \,, \quad p'' = t\frac{dt}{dp}$$

dönüşümü altında

$$\frac{dp}{p} = \frac{2t\,dt}{t^2 - d_1}$$

denklemine indirgenir.

1°) $d_1 > 0$ ise;

$$\frac{dp}{p} = \frac{2t\,dt}{t^2-d_1}$$

c = integrasyon sabiti.

$$pc = \left(\frac{dp}{dh}\right)^2 - d_1$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{d_1}}\int \frac{dp}{\left(\frac{pc}{d_1}+1\right)^{1/2}} \Longrightarrow h = \frac{2\sqrt{d_1}}{c_1}\sqrt{\frac{c}{d_1}\frac{dh}{d\xi}+1}$$

$$h = -\frac{2\sqrt{d_1}}{c}\, th\, \frac{\sqrt{d_1}}{2}\xi$$

bulunur.

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad Det\,T = 1, \quad h \rightarrow T(h) = \frac{a_{11}h+a}{a_{21}h+}$$

olduğu hatırlanarak;

$$C = -\frac{1}{2\sqrt{d_1}}$$ olmak üzere;

$$h = T\left(th\frac{\sqrt{d_1}}{2}\xi\right)$$ şeklinde elde edilir.

2°) $d_1 = 0$ ise;

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dt}{t} \Rightarrow p = ct^2$$ c = integrasyon sabiti.

$$h = 2\sqrt{c}\left(\frac{dh}{d}\right)^{1/2}$$

$$h(\xi) = -\frac{4c}{\xi}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$h(\xi) = T(\xi)$$

bulunur.

3°) $d_1 < 0$ ise

$$\frac{dp}{p} = \frac{2t\,dt}{t^2 + (-d_1)}$$

$$h = 2\sqrt{-d_1}\sqrt{\frac{cp}{(-d_1)} + 1}$$ c = integrasyon sabiti

$$h = \frac{2\sqrt{-d_1}}{c}\, tg\, \frac{\sqrt{-d_1}}{2}\xi, \quad c = \frac{1}{2\sqrt{-d_1}}$$

$$h = T\left(tg\,\frac{\sqrt{-d_1}}{2}\xi\right)$$

bulunur.

Aynı işlemler yapılırsa d_2' ye bağlı olarak benzer ifadeler $k(\eta)$ içinde belirlenebilir.

3- Möbius invaryantlık ve $SL(2,\mathbb{R})$ nin parametrizasyonu:

Bölüm III de gösterildiği gibi (3-2) genel çözümü Möbius grubu altında invaryanttır. T ve $-T$ matrisleri aynı dönüşümü sağladıklarından Z_2 $\{-1, 1\}$ ve bölüm grubu tanımı:

$$SL(2,\mathbb{R}) \supset Z_2 \,, \quad SL(2,\mathbb{R})/Z_2 = \{ hZ_2 \mid h \in SL(2,\mathbb{R}) \}$$

hatırlanarak, invaryantlık grubunun $SL(2,\mathbb{R}) / Z_2$ olduğu söylenebilir. Sonuç olarak Möbius grubu aşağıdaki yapı ile belirlenen (1+2) boyutlu Minkowski uzayında bulunan Lorentz grubu $SO(1,2)$ ye izomorftur. (x^0, x^1, x^2), Minkowski uzayında bir vektör ve matris formu:

$$X = \begin{bmatrix} X^2 & -X^0+X^1 \\ X^0+X^1 & -X^2 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$|X| = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 \,, \qquad T \in SL(2,\mathbb{R})$$

olmak üzere

$$X \longrightarrow T^{-1} X T$$

dönüşümü altında invaryanttır.

Daha önce $T \in SL(2,\mathbb{R})$ olduğunu belirtmiştik. Bu nedenle, T nin seçimi için, bu grubta x^{μ} üzerinde yapılan dönüşümleri en basit hali ile göz önüne alabiliriz. İlk olarak:

$$T = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

(x^1, x^2) düzleminde θ açısı ile yapılan uzay dönmelerini düşünelim. $-\pi < \theta < \pi$ iken, R_θ bütün dönmeleri içerir. Diğer bir seçim:

$$P_\lambda^{(\rho)} = \begin{bmatrix} \rho & \lambda \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad P_\lambda \equiv P_\lambda^{(1)}, \quad |\rho| = 1, \ \lambda = \text{reel}$$

şeklinde verilen ışık cinsinden dönüşümlerdir. Son olarak: Sırasıyla (x^0, x^1) ve (x^0, x^2) düzlemlerindeki Lorentz dönmeleri

$$B_\varepsilon = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon/2} \end{bmatrix}, \quad -\infty < \varepsilon < \infty$$

$$L_\varepsilon = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\frac{\varepsilon}{2} & \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2} & \operatorname{ch}\frac{\varepsilon}{2} \end{bmatrix}$$

alınabilir.

R_θ, $\pm P_\lambda$ ve $\pm B_\varepsilon$ izleri sırası ile $2\cos\frac{\theta}{2}$, ± 2 ve $\pm 2\operatorname{ch}\frac{\varepsilon}{2}$ dir.

SO(1,2) bir Möbius grub olmasına rağmen, SL(2,$\mathbb{R}$) grubunda çalışmak daha kullanışlıdır. Şimdi, SL(2,$\mathbb{R}$) grubunun parametrizasyonunu geliştirelim: Matrislerin izlerinin önemli bir role sahip olduğunu öncelikle belirtmeliyiz. İz, 3 grup parametresinden birinin yerine kullanılabilir. Diğer 2 parametreyi de T dönüşümünün sabit noktaları olarak alabiliriz.

$$z = T(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$$

dönüşümünü sağlayan bir kompleks sayı olsun. Sabit noktalar

$$z^2 + \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{21}} z - \frac{a_{12}}{a_{21}} = 0$$

denkleminin kökleri olup

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a_{21}} \left\{ (a_{11} - a_{22}) \pm [(\mathrm{Tr}\, T)^2 - 4]^{1/2} \right\}$$

dirler. Sabit noktalar $|\mathrm{Tr}\, T| > 2$ durumunda reel ve farklı, $|\mathrm{Tr}\, T| < 2$ durumunda kompleks ve $|\mathrm{Tr}\, T| = 2$ durumunda gerçek ve çakışıktırlar. Birinci duruma hiperbolik, ikinci duruma eliptik, üçüncü duruma parabolik denir.

EK - B

1- $h(\xi) = tg\,\psi_1(\xi)$, $k(\eta) = tg\,\psi_2(\eta)$ dan

$\psi_1(\xi)$ ve $\psi_2(\eta)$ nın açık ifadelerini bulmaya çalışalım;

(4-2) bağıntılarından

$$tg\,\psi_1(\xi+L) = \frac{tg\,\psi_1(\xi) + tg\,\Theta}{1 - tg\,\Theta\, tg\,\psi_1(\xi)} \quad , \quad M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= tg\,(\Theta + \psi_1(\xi))$$

$$\Rightarrow \psi_1(\xi + L) = \psi_1(\xi) + \theta + n\pi$$

ve benzer yolla

$$\psi_2(\eta + L) = \psi_2(\eta) - \Theta + m\pi$$

belirlenir. (n,m tamsayılar olmak üzere)

$$\psi_1(\xi+L) = \psi_1(\xi) + L\,\psi_1'(\xi) + \frac{L^2}{2}\psi_1''(\xi) + \dots = \psi_1(\xi) + \Theta + n\pi$$

$$\int \left(\psi_1'(\xi) + \frac{L}{2} \psi_1''(\xi) + \cdots \right) d\xi = \int \frac{\theta + n\pi}{L} d\xi$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{\theta + n\pi}{L} \xi + \tilde{\psi}_1(\xi)$$

ve benzer yol ile

$$\psi_2(\eta) = -\frac{\theta + m\pi}{L} \eta + \tilde{\psi}_2(\eta)$$

bulunur. $\tilde{\psi}_1(\xi)$ ve $\tilde{\psi}_2(\eta)$ nın periyodik fonksiyonlar olduğu aşikardır.

2- (4-8) ifadesini (4-7) bağıntılarını da göz önünde bulundurarak hesaplayalım.

$$H = \int_0^L d\xi \, D(h(\xi)) + \int_0^L d\eta \, D(k(\eta))$$

(4-6) ve (4-7) bağıntılarından

$$\psi_1(\xi) = \alpha\xi + \sum_n a_n e^{in 2\pi/L \xi}$$

olduğu görülmektedir.

$$D(h(\xi)) = 4 h'^{1/2} \partial_\xi^2 (h'^{-1/2})$$

Schwarzyen türevinde

$$h(\xi) = tg\,\Psi_1(\xi) = tg\left(\alpha\xi + \sum_n a_n e^{in2\pi/L\,\xi}\right)$$

ifadesinden yararlanarak, terimler ayrı ayrı hesaplanıp yerine konulursa

$$D(h(\xi)) = -4\Psi_1'^{2} + 3\Psi_1'^{-2}\Psi_1''^{2} - 2\Psi_1'^{-1}\Psi_1'''$$

olduğu görülür. Benzer işlemler yapılarak

$$D(k(\eta)) = -4\Psi_2'^{2} + 3\Psi_2'^{-2}\Psi_2''^{2} - 2\Psi_2'^{-1}\Psi_2'''$$

bulunur.

$$D(h(\xi))\ , \quad D(k(\eta))$$

$$H = \int_0^L d\xi\, D(h(\xi)) + \int_0^L d\eta\, D(k(\eta))$$

ifadesinde yerine konulur ve kısmı integrasyon metodu ile integre edilir ise

$$H = -4\alpha^2 L + \frac{(2\pi)^4}{\alpha^2 L^3}\sum_n n^2\left[n^2 - \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2\right]|a_n|^2$$
$$-4\beta^2 L + \frac{(2\pi)^4}{\beta^2 L^3}\sum_m m^2\left[m^2 - \left(\frac{\beta L}{\pi}\right)^2\right]|b_n|^2$$

bulunur.

3- (4-19) bağıntısını (4-18) bağıntısından hareket ile çıkalım.

$$h(\xi+L) = h(\xi) + \lambda$$
$$= h(\xi) + L\,h'(\xi) + \frac{L^2}{2}\,h''(\xi) + \dots .$$

$$\int \left(L\,h'(\xi) + \frac{L^2}{2}\,h''(\xi) + \dots \right) d\xi = \int \lambda\, d\xi$$

$$h(\xi) = \alpha\xi + \tilde{h}(\xi) \quad , \quad \alpha = \frac{\lambda}{L}$$

ve benzer şekilde

$$k(\eta) = -\alpha\eta + \tilde{k}(\eta)$$

bulunulabilir. ($\tilde{h}(\xi)$ ve $\tilde{k}(\eta)$ nın periyodik fonksiyonlar olduğu aşikardır.)

EK-C

1- Bäcklund dönüşümü;

Liouville denklemi için Bäcklund dönüşümü ψ serbest alanı göstermek üzere, aşağıdaki ifadelerle verilir.

$$\partial_\xi(\varphi-\psi) = -\frac{\mu}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}$$

$$\partial_\eta(\varphi+\psi) = \frac{\mu}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}$$

Burada φ Liouville denklemi (3-1) yı, ψ ise

$$\Box\psi = 0$$

denklemini sağlamaktadır ve

$$\psi = \ln \frac{h'(\xi)}{k'(\eta)}$$

dır. Bu çözüm α, β, γ sabitler olmak üzere

$$h \longrightarrow \alpha h+\beta$$
$$k \longrightarrow \alpha k+\gamma$$

dönüşümleri altında invaryanttır.

$$\Theta_{\alpha\beta}(\psi)=\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\partial_\gamma\psi\partial^\gamma\psi)$$
$$-(\varepsilon_{\alpha\gamma}\partial^\gamma\partial_\beta+\varepsilon_{\beta\gamma}\partial^\gamma\partial_\alpha)\psi$$

ψ serbest alanının enerji-momentum tensörüdür ve Backlund dönüşüm altında

$$T_{\alpha\beta}(\varphi)=\Theta_{\alpha\beta}(\psi)$$

dır.

2- (5-4) bağıntılarını $\varepsilon_{\alpha\beta}$ $(\varepsilon^{01}=1)$ in iki boyutta antisimetrik bir matris olduğunu göz önünde bulundurarak çıkaralım. EK-C-1 dan;

$$\Theta_{\alpha\beta}(\psi)=\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\partial_\gamma\psi\partial^\gamma\psi)$$
$$-[(\varepsilon_{\alpha 0}\partial^0\partial_\beta+\varepsilon_{\alpha 1}\partial^1\partial_\beta)+(\varepsilon_{\beta 0}\partial^0\partial_\alpha+\varepsilon_{\beta 1}\partial^1\partial_\alpha)]\psi$$

dır.

$$\Theta_{00}(\psi)=\partial_\tau\psi\partial_\tau\psi-\frac{1}{2}(\partial_\tau\psi\partial_\tau\psi-\partial_\sigma\psi\partial_\sigma\psi)$$
$$-\partial_\sigma\partial_\tau\psi-\partial_\tau\partial_\sigma\psi$$

$$\Theta_{01}(\Psi) = \partial_z \Psi \, \partial_\sigma \Psi - \partial_\sigma^2 \Psi - \partial_z^2 \Psi$$

$$\Theta_{++}(\Psi) = (\partial_\xi \Psi)^2 - 2\, \partial_\xi^2 \Psi$$

ve benzer yolla

$$\Theta_{--}(\Psi) = (\partial_\eta \Psi)^2 + 2\, \partial_\eta^2 \Psi$$

bulunur.

3- Stair - Step fonksiyonu;

$$E(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(\xi + nL)$$

$$= \frac{1}{i\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{in\frac{2\pi}{L}\xi} + \frac{2}{L}\xi$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki bağıntıları sağlar.

1- $E(-\xi) = -E(\xi)$

2- $E(\xi + L) = E(\xi) + 2$

3- $\partial_\xi E(\xi) = 2\Delta(\xi)$

4- $\Delta(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi + nL) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}\xi}$

$$f^{(n)}(E) \equiv \frac{\partial^n}{\partial E^n} f(E)$$

olmak koşulu ile, genel formül

$$\partial_\xi f(E(\xi)) = 2\Delta(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(E(\xi))$$

hatırlanarak

$$\partial_\xi e^{\lambda E(\xi)} = 2 \operatorname{sh} \lambda \, e^{\lambda E(\xi)} \Delta(\xi)$$

bulunur. $(\lambda \neq 0)$

5) Son olarak

$$\Delta(\xi - \tilde{\xi})\, h(\xi) = \Delta(\xi - \tilde{\xi})\, e^{\frac{\varepsilon}{2} E(\xi - \tilde{\xi})} \tilde{h}(\xi)$$

$$\Delta(\eta - \tilde{\eta})\, k(\eta) = \Delta(\eta - \tilde{\eta})\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} E(\eta - \tilde{\eta})} \tilde{k}(\eta)$$

kabulünü yapabiliriz. Çünkü bu bağıntılar (4-23) periyodiklik koşulunu sağlarlar;

$$\Delta(\xi + L - \tilde{\xi})\, h(\xi + L) = \Delta(\xi + L - \tilde{\xi})\, e^{\frac{\varepsilon}{2} E(\xi + L - \tilde{\xi})} \tilde{h}(\xi + L)$$

$$\Delta(\xi - \tilde{\xi})\, h(\xi + L) = \Delta(\xi - \tilde{\xi})\, e^{\varepsilon} h(\xi)$$

ve

$$\Delta(\eta+L-\tilde{\eta})k(\eta+L)=\Delta(\eta+L-\tilde{\eta})e^{-\varepsilon/2\,E(\eta+L-\tilde{\eta})}\tilde{k}(\eta+L)$$

$$\Delta(\eta-\tilde{\eta})\,k(\eta+L)=\Delta(\eta-\tilde{\eta})\,e^{-\varepsilon}k(\eta)$$

dır. Bu bağıntılar yardımı ile, kolayca

$$\int_{\infty}^{\xi}\Delta(\xi-\tilde{\xi})h(\xi)d\xi=\frac{e^{\varepsilon/2\,E(\xi-\tilde{\xi})}}{2\,sh\frac{\varepsilon}{2}}\tilde{h}(\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{\tilde{\xi}}\Delta(\bar{\xi}-\xi)h(\bar{\xi})d\bar{\xi}=\frac{e^{\varepsilon/2\,E(\tilde{\xi}-\xi)}}{2\,sh\frac{\varepsilon}{2}}h(\xi)$$

$$\int_{\infty}^{\eta}\Delta(\eta-\bar{\eta})k(\bar{\eta})d\bar{\eta}=\frac{e^{-\varepsilon/2\,E(\tilde{\eta}-\eta)}}{2\,sh\frac{\varepsilon}{2}}k(\eta)$$

$$\int_{\infty}^{\eta}\Delta(\eta-\bar{\eta})k(\eta)d\eta=-\frac{e^{-\varepsilon/2\,E(\eta-\tilde{\eta})}}{2\,sh\frac{\varepsilon}{2}}\tilde{k}(\eta)$$

bulunur.

4- Sırasıyla (5-12), (5-13) ve (5-14) bağıntılarından (5-15) (5-16) (5-17) bağıntılarını çıkarmaya çalışalım.

$$\{h(\xi), h(\tilde{\xi})\} = \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, \{h'(\bar{\xi}), h(\bar{\xi}')\}$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, E(\bar{\xi}-\bar{\xi}')\, h'(\bar{\xi})\, h'(\bar{\xi}')$$

$$+ \frac{1}{4L} \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, (\bar{\xi}-\bar{\xi}')\, h'(\bar{\xi})\, h'(\bar{\xi}')$$

$$E(\xi-\xi') = \frac{1}{i\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\, e^{in2\pi/L\,(\xi-\xi')} + \frac{2}{L}(\xi-\xi')$$

olduğu hatırlanarak

$$\{h(\xi), h(\tilde{\xi})\} = -\frac{1}{4} \underbrace{\int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi} \left(\frac{1}{i\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\, e^{in\frac{2\pi}{L}(\bar{\xi}-\bar{\xi}')}\right) \times h'(\bar{\xi})\, h'(\bar{\xi}')}_{I_1} - \frac{1}{4L} \underbrace{\int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, (\bar{\xi}-\bar{\xi}')\, h'(\bar{\xi})\, h'(\bar{\xi}')}_{I_2}$$

bulunur. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$I_2 = \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi} \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' \Big[\partial_{\bar{\xi}}\big(\bar{\xi}\, h(\bar{\xi})\, h'(\bar{\xi}')\big) - \partial_{\bar{\xi}'}\big(\bar{\xi}'\, h'(\bar{\xi})\, h(\bar{\xi}')\big)$$

$$- h'(\bar{\xi})\, h'(\bar{\xi}') + h'(\bar{\xi})\, h(\bar{\xi}') \Big]$$

$$= (\xi-\tilde{\xi})\, h\tilde{h} + \tilde{h} \int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi}) - h \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}'\, h(\bar{\xi}')$$

$$I_1 = \frac{1}{i\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\int_{\xi}^{\infty} d\bar\xi \int_{\tilde\xi}^{\infty} d\bar\xi' \Big[\partial_{\bar\xi}\big(e^{in\frac{2\pi}{L}\bar\xi}\, h(\bar\xi)\big)$$

$$\times\, \partial_{\bar\xi'}\big(e^{-in\frac{2\pi}{L}\bar\xi'}\, h(\bar\xi')\big)$$

$$-\, h(\bar\xi)\, h(\bar\xi')\, \partial_{\bar\xi}\big(e^{in\frac{2\pi}{L}\bar\xi}\big)\, \partial_{\bar\xi'}\big(e^{-in\frac{2\pi}{L}\bar\xi'}\big)$$

$$-\, h(\bar\xi')\, h'(\bar\xi)\, e^{in\frac{2\pi}{L}\bar\xi}\, \partial_{\bar\xi'} e^{-in\frac{2\pi}{L}\bar\xi'}$$

$$-\, h'(\bar\xi)\, h(\bar\xi')\, e^{-in\frac{2\pi}{L}\bar\xi'}\, \partial_{\bar\xi} e^{-in\frac{2\pi}{L}\bar\xi}\Big]$$

EK-C-1 daki bağıntılar yardımı ile

$$I_1 = \Big[E(\xi-\tilde\xi) - \frac{2}{L}(\xi-\tilde\xi)\Big] h\tilde h - 2\tilde h \int_{\xi}^{\infty} d\bar\xi\, \Delta(\bar\xi-\tilde\xi)\, h(\bar\xi)$$

$$+\, 2h\int_{\tilde\xi}^{\infty} d\bar\xi'\, \Delta(\xi-\bar\xi')\, h(\bar\xi') - 2\int_{\xi}^{\infty} d\bar\xi \int_{\tilde\xi}^{\infty} d\bar\xi'\, \partial_{\bar\xi}\Delta(\bar\xi-\bar\xi')\, h(\bar\xi)\, h(\bar\xi')$$

$$-\, \frac{2}{L}\tilde h\int_{\xi}^{\infty} d\bar\xi\, h(\bar\xi) + \frac{2}{L} h\int_{\tilde\xi}^{\infty} d\bar\xi'\, h(\bar\xi')$$

bulunur.

$$\{h(\xi), h(\tilde{\xi})\} = -\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi}) - \frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})\right] h\tilde{h}$$

$$+ \frac{1}{4L}\tilde{h}\int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi}) - \frac{1}{4L} h \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' h(\bar{\xi}')$$

$$+ \frac{1}{2}\tilde{h}\int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\,\Delta(\bar{\xi}-\tilde{\xi}) h(\bar{\xi}) - \frac{1}{2} h \int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}'\Delta(\xi-\bar{\xi}') h(\bar{\xi}')$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}'\,\partial_{\bar{\xi}}\Delta(\bar{\xi}-\bar{\xi}') h(\bar{\xi}) h(\bar{\xi}')}_{I_3}$$

EK-C-3 bağıntıları hatırlanırsa;

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\xi} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi})\, \partial_{\bar{\xi}}\left(\int_{-\infty}^{\tilde{\xi}} d\bar{\xi}'\Delta(\bar{\xi}-\bar{\xi}') h(\bar{\xi}')\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\xi} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi})\, \partial_{\bar{\xi}}\left(\frac{e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\bar{\xi})}}{2\,\mathrm{sh}\frac{\varepsilon}{2}} h(\tilde{\xi})\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{2}\, d\bar{\xi}\; \partial_{\bar{\xi}}\left(\frac{e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\bar{\xi})}}{2\,\mathrm{sh}\frac{\varepsilon}{2}} h^2(\bar{\xi})\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{2}\, d\bar{\xi}\; h^2(\bar{\xi})\, \partial_{\bar{\xi}}\left(\frac{e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\bar{\xi})}}{2\,\mathrm{sh}\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,\mathrm{sh}\frac{\varepsilon}{2}}\left[e^{\varepsilon/2\, E(\tilde{\xi}-\xi)} h^2(\xi) - e^{\varepsilon/2\, E(\xi-\tilde{\xi})} \tilde{h}^2(\xi)\right]$$

ve

$$\{h(\xi), h(\tilde{\xi})\} = -\frac{1}{4}\left[E(\xi-\tilde{\xi}) - \frac{1}{L}(\xi-\tilde{\xi})\right] h\tilde{h}$$

$$+\frac{1}{4L}\left[\tilde{h}\int_{\xi}^{\infty} d\bar{\xi}\, h(\bar{\xi}) - h\int_{\tilde{\xi}}^{\infty} d\bar{\xi}' h(\bar{\xi}')\right]$$

$$+\frac{1}{8\,sh\frac{\varepsilon}{2}}\left(e^{\varepsilon/2\, \varepsilon(\xi-\tilde{\xi})}\tilde{h}^2 - e^{\varepsilon/2\, \varepsilon(\tilde{\xi}-\xi)} h^2\right)$$

bulunur. Benzer yolla, EK-C-3 bağıntılarıda göz önüne alınarak

$$\{k(\eta), k(\tilde{\eta})\} = -\frac{1}{4}\left[E(\eta-\tilde{\eta}) - \frac{1}{L}(\eta-\tilde{\eta})\right] k\tilde{k}$$

$$+\frac{1}{4L}\left(k\int_{\infty}^{\eta} d\bar{\eta}\, k(\bar{\eta}) - \tilde{k}\int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}\, k(\bar{\eta})\right)$$

$$+\frac{1}{8\,sh\frac{\varepsilon}{2}}\left(e^{\varepsilon/2\, \varepsilon(\eta-\tilde{\eta})} k^2 - e^{\varepsilon/2\, \varepsilon(\tilde{\eta}-\eta)} \tilde{k}^2\right)$$

elde edilir. Yine EK-C-3 bağıntıları ile

$$\{h(\xi), k(\tilde{\eta})\} = \int_{-\infty}^{\xi} d\bar{\xi} \int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' \{h'(\bar{\xi}), k'(\bar{\eta}')\}$$

$$= \frac{1}{4L} \int_{-\infty}^{\xi} d\bar{\xi} \int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' \left[\partial_{\bar{\xi}} (\bar{\xi} h(\bar{\xi}) k'(\bar{\eta}')) - h(\bar{\xi}) k'(\bar{\eta}') - \partial_{\bar{\eta}'} (\bar{\eta}' k(\bar{\eta}') h'(\bar{\xi})) + k(\bar{\eta}') h'(\bar{\xi}) \right]$$

$$= \frac{1}{4L} \left[(\xi - \tilde{\eta}) h \tilde{k} + h \int_{\infty}^{\tilde{\eta}} d\bar{\eta}' k(\bar{\eta}') - \tilde{k} \int_{-\infty}^{\xi} d\bar{\xi} h(\bar{\xi}) \right]$$

dir.

5- (5-5) ve (5-29) bağıntılarını kullanarak (5-32) ve (5-33) bağıntılarını bulmaya çalışalım.

(5-29) bağıntısından, $L = 2\pi$ için

$$\partial_\xi \ln h' = \frac{\varepsilon}{2\pi} - i \sum_{n \neq 0} n a_n e^{-in\xi}$$

$$\partial_\xi^2 \ln h' = \sum_{n \neq 0} n^2 a_n e^{-in\xi}$$

dır. (5-5) bağıntısında yerlerine konulursa

$$T_{++}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon^2}{2\pi} - 2i\varepsilon \sum_{n \neq 0} n a_n e^{-in\xi} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} m(n-m) a_{n-m} a_m e^{-in\xi} \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n \neq 0} n^2 a_n e^{-in\xi})$$

bulunur.

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2\pi} \; ,$$

$$\frac{1}{2\pi} M_n = \lambda^2 \delta_{n,0} - \sum_m (n-m) m \, a_{n-m} a_m$$

$$+ 2 a_n n^2 - 2 i \lambda a_n n .$$

olmak kaydı ile

$$T_{++}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n M_n e^{-in\xi}$$

dir. Benzer şekilde

$$\frac{1}{2\pi} N_n = \lambda^2 \delta_{n,0} - \sum_m m (n-m) b_{n-m} b_m$$

$$+ 2 b_n n^2 - i \frac{\varepsilon}{\pi} b_n n$$

olmak koşulu ile

$$T_{--}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \sum_n N_n e^{-in\eta}$$

bulunur.

6- (5-34) konformal enerjiyi $T_{++}(\xi)$ ve $T_{--}(\eta)$ nın açık ifadelerini yerlerine koyarak hesaplayalım.

$$H=\int_0^{2\pi} d\sigma\, T^{00}(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\xi\, T_{++}(\xi) + \int_0^{2\pi} d\eta\, T_{--}(\eta)$$

$$(m=-n\,,\ a_m^* = a_{-m})$$

$$H = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m a_m^* m^2 d\xi$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} b_m b_m^* m^2 d\eta$$

$$= 4\pi\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^2 + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^* a_m + b_m^* b_m)$$

dır.

7- (5-35) bağıntısını M_n ve N_n değişkenlerinin açık ifadelerini ve (5-30) bağıntılarını kullanarak çıkaralım.

$$M_m = \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\delta_{m,0} - 2\pi \sum_j (m-j)\, j\, a_{m-j}\, a_j$$

$$+ 4\pi a_m m^2 - 2i\varepsilon a_m m$$

$$M_n = \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\delta_{n,0} - 2\pi \sum_k (n-k)k\, a_{n-k}\, a_k$$

$$+ 4\pi a_n n^2 - 2i\varepsilon a_n n$$

$$\{M_n, M_m\} = \frac{(2\pi)^2}{4\pi i}\sum_k (n-k)k\Big[\frac{1}{n-k}(k-n)(n-k+m)$$

$$\times a_{n-k+m}\, a_k + \frac{1}{n-k}(m+n-k)(k-n)\, a_{m+n-k} a_k$$

$$+ \frac{1}{k}(-k)(m+k)\, a_{n-k}\, a_{k+m} + \frac{1}{k}(m+k)(-k)\, a_{n-k}\, a_{m+k}\Big]$$

$$+ \frac{1}{2i}(4\pi m^2 - 2i\varepsilon m)\big[-(m+n)\, a_{m+n} - (n+m)\, a_{m+n}\big]$$

$$- \frac{1}{2i}(4\pi n^2 - 2i\varepsilon n)\big[-(m+n)\, a_{m+n} - (m+n)\, a_{m+n}\big]$$

$$+ (4\pi n^2 - 2i\varepsilon n)(4\pi n^2 + 2i\varepsilon n)\frac{1}{4\pi i n}\delta_{n,-m}$$

$$k \longrightarrow j$$

$$\{M_n, M_m\} = 2\pi i(n-m)\sum_j (m+n-j)j\, a_{m+n-j}\, a_j$$

$$+ 2i(m-n)\, a_{m+n}\big[(m+n)^2 - i\lambda(m+n)\big] - 4\pi i n^3 \delta_{n,-m}$$

$$+ 2\pi i \lambda^2 (m-n)\,\delta_{n+m,0}$$

$$\{M_n, M_m\} = i(m-n)M_{m+n} - 4\pi i n^3 \delta_{n,-m}.$$

bulunur.

8- (5-20), (5-21) bağıntılarından hareketle ve (5-30) bağıntılarınıda kullanarak

$$\{a_n, a_m\} = \frac{1}{4\pi i n}\delta_{n,-m}$$

olduğunu gösterelim.

$$\{\ln h', \ln \tilde{h}'\} = -\frac{1}{4} E(\xi - \tilde{\xi}) + \frac{\alpha}{4L}(\xi - \tilde{\xi})$$

$$= \Big\{ \frac{E}{L}\xi + \frac{(2-\alpha)}{4}\delta + \sum_{n\neq 0} a_n e^{-in\frac{2\pi}{L}\xi},$$

$$\frac{E}{L}\tilde{\xi} + \frac{2-\alpha}{4}\delta + \sum_{m\neq 0} a_m e^{-im\frac{2\pi}{L}\tilde{\xi}} \Big\}$$

$$= \frac{2-\alpha}{4L}(\tilde{\xi} - \xi) + \sum_{n\neq 0}\sum_{m\neq 0}\{a_n, a_m\} e^{-\frac{2\pi i}{L}(n\xi + m\tilde{\xi})}$$

$E(\xi - \tilde{\xi})$ nın açık ifadesi hatırlanarak

$$\{a_n, a_m\} = \frac{1}{4\pi i n}\delta_{n,-m}.$$

bulunur.

K A Y N A K L A R

[1] G.Veneziano: Nuovo Cim., 57A (1968) 190.

[2] L.Suskind: Phys. Rev., Dl (1970) 1182.

[3] C.Rebbi: Phys. Rep., 12 (1974) 1.

[4] M.B.Green, J.H. Schwarz, E.Witten: "Superstring theory", Volume I. (Cambridge Univ. Press. 1987).

[5] M.B.Green, J.H.Schwarz: Nucl. Phys. B198 (1982) 252.

[6] A.M.Polyakov: Phys. Lett. 103B (1981) 211.

[7] P.Goddard, J.Goldstone, C.Rebbi, C.B.Thorn: Nucl. Phys. B56 (1973) 109.

[8] L.Brink, P. di Vecchia, P.Howe: Nucl. Phys. B118 (1977) 76.

[9] R.Marnelius: Phys. Lett. 123B (1983) 207.

[10] A.M.Polyakov: Phys. Lett. 103B (1981) 207.

[11] B.Durhuus, P.Olesen, J.L.Petersen: Nucl. Phys. B198 (1982) 157.

[12] J.Liouville: J. Math. Pures Appl. 18 (1853) 71.

[13] R.Marnelius: Nucl. Phys. B211 (1983) 409.

[14] T.Curtright, C.Thorn: Phys. Rev. Lett.48 (1982) 1309.

[15] A.Kihlberg: Phys. Rew. D27 (1983) 2542.

[16] L.Bianchi: Ann. Sci. Norm. Super. Pisa Ser. IV 2 (1879) 285

[17] G.P.Jorjadze, A.K.Pogrevkov, M.C.Polivanov: "On the Solutions with singularities of the Liouville equation $\varphi \pm \frac{m}{2} e^{\varphi} = 0$" Preprint IC/78/126, Trieste (1978).

[18] G.Jorjadze, A.K.Pogrevkov, M.C.Polivanov: Theor. Math. Phys. 40 (1980) 706.

[19] R.Marnelius: Nucl. Phys. B211 (1983) 14.

[20] E.Braaten, T.Curtright, C.Thorn: Phys. Lett. B118 (1982) 115.

[21] L.Johansson, A.Kihlberg, R.Marnelius: Phys. Rew. D29 (1984) 2798

[22] T.Curtright, C.Thorn: Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1768.

[23] E.D'Hoker, R.Jackiw: Preprint MIT-CTP. 984.

Ö Z G E Ç M İ Ş

1961 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladıktan sonra 1980 yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Fizik-Lisans Bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 1984 yılında bu bölümden mezun oldu. 1984-1985 yılları arasında Boğaziçi Üniversitesi Yabancı Diller Yüksek Okulunda İngilizce - hazırlık sınıfına devam etti. 1985 yılında İngilizce yaterlilik sınavını verdi ve 1987 yılında Yıldız Üniversitesi Fizik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 1986 yılında girdiği Yıldız Üniversitesi - Fizik Bölümünde halen Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.