

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SELF-DUALİTE VE TAMAMEN ÇÖZÜLEBİLİR
SİSTEMLER**

Ferhat TAŞKIN

F.B.E. Fizik Anabilim Dalında Hazırlanan

106261

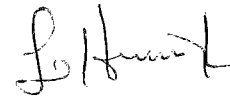
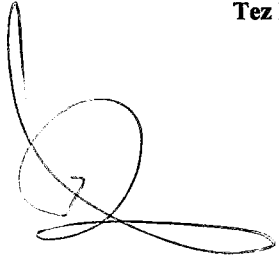
YÜKSEK LİSANS TEZİ

106261

Prof. Dr. Semra Öztürk

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Oya OĞUZ

Prof. Dr. Şehsuvar
Zebitay



İSTANBUL, 2001

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TAMAMEN ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER.....	3
2.1 Lax Metodu.....	3
2.2 AKNS Denklemleri.....	6
3. AYAR TEORİLERİ ve SELF-DUAL YANG-MİLLS DENKLEMLERİ.....	17
3.1 Abelian Ayar Teorileri-Maxwell Teorisi.....	17
3.2 Abelian olmayan Ayar Teorileri -Yang-Mills Ayar Teorisi.....	20
3.3 Self-Dualite Şartları.....	23
3.4 Self-Dualite Denkleminin İki Lineer Denklemin Çözülebilirlik Şartı Olarak Elde Edilmesi.....	25
3.5 AKNS Tipi Denklemler.....	27
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	39

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmamın başından beri her zaman ve hiç eksilmeyen desteğini gördüğüm ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer Prof.Dr. Oya OĞUZ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Değerli yardımlarından dolayı Prof.Dr. Ömer OĞUZ' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımı sürdürürken her türlü imkanı sağlayan Y.T.Ü. Fen-Ed. Fak. Dekanı Prof.Dr. Durul Ören' e, Fizik Bölümü Başkanı Prof.Dr. Emel Çıngı' ya teşekkür ederim. Yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Yard.Doc.Dr Reyhan Kaya ' ya, Yard.Doc.Dr. Zehra Can 'a, Arş.Gör.Dr. Devrim Yazıcı 'ya ve Arş.Gör. Zeynep Güven 'e teşekkür ederim.



ÖZET

Bu çalışmada lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin (1+1) boyutta çözülebilirliği incelenmektedir. Bu denklemlerin çözülebilirliğini göstermek için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemler KdV (Korteweg-de Vries), mKdV (modified Korteweg de Vries), lineer olmayan Schrödinger denklemi ve Sine-Gordon denkleminde gösterilmiştir. Abelian ayar teorileri ve abelian olmayan ayar teorileri incelenerek Yang-Mills ayar teorisinin Self-dualite şartı ile (1+1) boyutta tamamen çözülebilirlik arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Self-dual Yang-Mills (SDYM) denklemlerinin iki lineer denklemin çözülebilirlik şartından elde edilebileceği gösterilmiştir. SDYM denklemlerinde simetri yardımı ile boyut indirgemesi yapılarak AKNS denklemlerine benzer denklemler elde edilmiştir. Örnek olarak KdV ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri SDYM denklemlerinden elde edilmiştir.



ABSTRACT

In this work the integrability of non-linear partial differential equations are studied in $(1+1)$ dimension. There are various methods to show the integrability of the non-linear partial differential equations. These methods are investigated for integrability of KdV (Korteweg de Vries), mKdV (modified Korteweg-de Vries), nonlinear Schrödinger equation and Sine-Gordon equations. An introduction to abelian and non-abelian gauge theories is given. There exists a relationship between self-duality condition of Yang-Mills gauge theory and the integrability condition in $(1+1)$ -dimension. Shown that self-dual Yang-Mills (SDYM) equations can be derived from the integrability condition of two linear equations. AKNS type equations are induced by making dimensional reduction in SDYM equations. KdV and nonlinear Schrödinger equations are obtained from SDYM equations as an example.



1. GİRİŞ

Doğadaki birçok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan diferansiyel denklemler içermektedir. Bu nedenle denklemlerin çözümlerinin olup olmaması hem fizik, hem de matematik açısından oldukça önem kazanmaktadır (Das, 1989). Kısmi olmayan diferansiyel denklemlerin tam olarak çözülebilirliğinin gösterilmesi için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerden bazıları sistemin sonsuz tane korunan büyüklüğe sahip olması, bi-Hamiltonian yapıya sahip olması (Olver, 1986), Lax çiftinin olması (Lax, 1968), AKNS metodu (Ablowitz vd., 1973) ve soliton bağ fonksiyonu için düz uzay (Das, 1989) şartının sağlanması olarak sıralanabilir. Denklemin bu yöntemlerden birini veya bir kaçını sağlaması denklemin tamamen çözülebilir denklem olduğunu gösterir.

Literatürde çok iyi bilinen ve $(1+1)$ boyutta tamamen çözülebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerden bazıları KdV (Korteweg-de Vries), mKdV (modified Korteweg-de Vries), lineer olmayan Schrödinger denklemi ve Sine-Gordon denklemleridir. Bu denklemler yukarıda belirtilen yöntemlerin hepsini veya bir kaç tanesini sağlamaktadır.

Son yıllarda ayar teorileri bütün temel etkileşmelerin tanımında başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Bu teorilerin ortak özelliği kütleli alanlarda lokal faz dönüşümleri altında aksiyonun invariant olmasıdır. Ayar dönüşümleri kullanılarak bir fonksiyonun iki farklı noktadaki değerleri karşılaştırılarak fonksiyondaki değişim belirlenir. Fakat bu küçük değişim, koordinat uzayından farklı olarak, bir kovaryant türev tanımlayarak ifade edilmektedir. Bu tanımda ayar bozonu olarak adlandırılan bir vektör alanı kullanılmaktadır. Temel etkileşmeler için farklı modeller vardır: örneğin elektromanyetizmada ($U(1)$), kuantum chromodinamikte (renk $SU(3)$), elektro-zayıf etkileşmelerde ($SU(2) \otimes U(1)$) modelleri ön plana çıkmaktadır. Ayar grubu bir abelian olmayan grup olduğunda, Yang-Mills ayar teorisi elde edilir (Yang ve Mills, 1954; Mason ve Woodhouse, 1996).

Fizikçilerin olduğu kadar matematikçilerin de ilgi gösterdiği self-dual Yang-Mills denklemleri (SDYM) farklı alanlarda kullanımı vardır. SDYM denklemleri kuantum teorilerinin çözümlerinin elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda SDYM denklemleri ile iki boyutlu tamamen çözülebilir sistemler arasında bir ilişki olduğu ortaya çıkmıştır. Hatta iki boyuttaki tamamen çözülebilir sistemlerin SDYM denklemlerinden elde dileyebileceği öngörülmektedir (Ward, 1985).

Bu çalışmada SDYM denklemleri ile tamamen çözülebilir sistemlerin arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Elde edilen denklemlerin irdelenmesi sonucunda iki boyutlu bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözülebilirliği bu formalisim çerçevesinde gösterilmiştir.

1. Bölümde çalışmanın içeriği ve amacı anlatılmıştır. 2. Bölümde tamamen çözülebilir sistemler incelenmiş ve çözülebilirliği test etmek için kullanılan Lax çifti formalizmi ve AKNS denklem sistemleri incelenmiştir. 3. Bölümde abelian ayar teorileri ve Maxwell teorisi incelenmiş, ardından abelian olmayan ayar teorileri ve Yang-Mills ayar teorisinde self dualite şartları incelenmiştir. SDYM denklemlerinin iki lineer denklemin çözülebilirlik şartından elde edilebileceği gösterilmiştir. Lineer denklem sisteminin çözülebilirlik şartından elde edilen denklemlerde simetri yardımı ile indirgeme yapılarak AKNS denklemlerine benzer denklemler elde edilmiştir. Bu denklemler, değişkenlerin alabileceği değerlere göre sınıflandırılarak farklı çözülebilir sistemler elde edilmiştir. Örnek olarak KdV ve lineer olmayan Schrödinger denklemlerinin tamamen çözülebilirliği bulunan denklem sistemleri yardımı ile gösterilmiştir.

2. TAMAMEN ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER

2.1 Lax Metodu

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmiş sistemlerin tamamen çözülebilirliğinin test edilmesi önemlidir. Bu konuda çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlardan biri de Lax genelleştirmesidir. Lax genelleştirmesinde bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem iki lineer operatörün birleşimi olarak yazılabilirse denklem tamamen çözülebilir demektir, diğer bir ifadeyle verilen bir lineer olmayan denklemde özdeğerleri lineer olmayan değişim altında sabit kalan lineer operatörleri bulmaktır (Das, 1989). Spektral parametrelerin operatörü L ve dalga fonksiyonlarının zaman içinde değişimini ifade eden operatör M olsun. L ve M denklemleri özdeğer ve zaman evrimi denklemi şeklinde sırasıyla

$$Lv = \lambda v \quad (2.1a)$$

$$v_t = Mv \quad (2.1b)$$

olarak tanımlanır, burada λ bir sabittir. Şimdi verilen (2.1) denklemlerinden yararlanarak Lax denklemini elde edelim. (2.1a) denklemini t ' ye göre kısmi türevi alınırsa

$$L_t v + Lv_t = \lambda_t v + \lambda v_t$$

halini alır ve denklem (2.1b) kullanılarak

$$L_t v + LMv = \lambda_t v + \lambda Mv = \lambda_t v + M\lambda v = \lambda_t v + MLv$$

ve bu denklem düzenlenerek

$$[L_t + (LM - ML)]v = \lambda_t v$$

elde edilir. Bulunan denklemdeki $v(x, t)$ dalga fonksiyonlarını çözmek için $\lambda_t = 0$ seçilirse

$$L_t + [L, M] = 0 \quad (2.2)$$

denklemini elde edilir ve burada

$$[L, M] = LM - ML$$

olarak tanımlanan komutasyon bağıntısıdır. (2.2) denkleminde Lax denklemi denir. Uygun seçilen L ve M operatörleri için (2.2) denkleminde lineer olmayan değişim denklemleri elde edilir. Örneğin. L ve M operatörleri

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \quad (2.3a)$$

ve α bir sabit olmak üzere

$$M = (\alpha + u_x) - (4\lambda + 2u) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3b)$$

olarak seçelim (Ablowitz ve Clarkson, 1991). (2.2) denkleminde L ve M değerleri yerine yazalım ve denklemdaki bileşenleri tek tek hesaplayalım, ilk terim

$$L_1 \psi = u_1 \psi \quad (2.4a)$$

ikinci terim

$$LM\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \right) \{ (\alpha + u_x) \psi - (4\lambda + 2u) \psi_x \}$$

ve bu ifade de düzenleme yapılarak

$$LM\psi = (\alpha + u_x) \psi_{xx} - 4u_x \psi_{xx} - (4\lambda + 2u) \psi_{xxx} - (4\lambda + 2u) u \psi_x + (\alpha + u_x) u \psi + u_{xxx} \psi \quad (2.4b)$$

elde edilir. Denklemin son terimi

$$ML\psi = \left\{ (\alpha + u_x) - (4\lambda + 2u) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (\psi_{xx} + u \psi)$$

ve düzenleme yapılarak

$$ML\psi = (\alpha + u_x) \psi_{xx} - (4\lambda + 2u) \psi_{xxx} - (4\lambda + 2u) u_x \psi + (\alpha + u_x) u \psi - (4\lambda + 2u) u \psi_x \quad (2.4c)$$

elde edilir. Bulunan değerler (2.2) denkleminde yerine konup, düzenlenirse

$$L_1 \psi + [L, M] \psi = u_1 \psi + u_{xxx} \psi - 4u_x \psi_{xx} + (4\lambda + 2u) u_x \psi = 0 \quad (2.4d)$$

bulunan eşitliği bilinen bir lineer olmayan denklem formuna dönüştürmek için (2.4a) denklemini ile verilen

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi \quad (2.5)$$

Schrödinger saçılma denkleminde yararlanılır. (2.4d) denklemde Schrödinger saçılma denklemini kullanılarak

$$4u_x \psi_{xx} = 4u_x (-u\psi + \lambda\psi)$$

elde edilir. Bu ifade (2.4d) denkleminde yerine konularak

$$L_t \psi + [L, M]\psi = u_t \psi + u_{xxx} \psi - 4u_x (-u\psi + \lambda\psi) + (4\lambda + 2u)u_x \psi = 0$$

bulunur. Buradan

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.6)$$

KdV denklemini elde edilir.

Bu konuyla ilgili olarak Zakarov ve Shabat tarafından lineer olmayan Schrödinger denklemini ile Lax çifti arasında bir ilişki bulunmuştur. Eğer L ve M operatörleri

$$L = i \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7a)$$

$$M = ik \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} -\frac{iuu^*}{1+k} & u_x^* \\ -u_x & \frac{iuu^*}{1-k} \end{pmatrix} \quad (2.7b)$$

şeklinde matris formunda seçilerek (Ablowitz ve Clarkson, 1991) (2.2) denkleminde yerine yazılırsa ilk terim

$$L_t \psi = \begin{pmatrix} 0 & u_t^* \\ u_t & 0 \end{pmatrix} \psi \quad (2.8a)$$

ve diğer terim

$$\begin{aligned} LM\psi = & -k \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \psi_{xxx} + \begin{pmatrix} uu^* & i(1+k)u_x^* \\ -i(1-k)u_x & -uu^* \end{pmatrix} \psi_x + \begin{pmatrix} 0 & iku^* \\ iku & 0 \end{pmatrix} \psi_{xx} \\ & + \begin{pmatrix} \frac{uu_x^*}{1-k} & \frac{i(1-k^2)u_{xx}^* + iuu^{*2}}{1-k} \\ -\frac{i(1-k^2)u_{xx} + iu^2 u^*}{1+k} & -u_x u^* \end{pmatrix} \psi \end{aligned} \quad (2.8b)$$

olarak bulunur. Son terim de

$$\begin{aligned}
 ML\psi = & -k \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \psi_{xxx} + \begin{pmatrix} uu^* & i(1+k)u_x^* \\ -i(1-k)u_x & -uu^* \end{pmatrix} \psi_x + \begin{pmatrix} 0 & iku^* \\ iku & 0 \end{pmatrix} \psi_{xx} \\
 & + \begin{pmatrix} uu_x^* & \frac{ik(1+k)u_{xx}^* - iuu^{*2}}{1+k} \\ \frac{ik(1-k)u_{xx} + iu^2u^*}{1-k} & -u_x u^* \end{pmatrix} \psi
 \end{aligned} \quad (2.8c)$$

bulunur. Bileşenler (2.2) denkleminde yerine yazılarak ve $\kappa = \frac{2}{1-k^2}$ alınarak

$$L_t \psi + [L, M] \psi = \begin{pmatrix} 0 & u_t^* + iu_{xx}^* + ikuu^{*2} \\ u_t - iu_{xx} - iku^2u^* & 0 \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (2.8d)$$

eşitliğinden lineer olmayan Schrödinger denklemi

$$u_t - iu_{xx} - iku^2u^* = 0 \quad (2.9a)$$

$$u_t^* + iu_{xx}^* + ikuu^{*2} = 0 \quad (2.9b)$$

elde edilir. Burada * operasyonu kompleks eşleniği göstermektedir. Böylece (2.7) denkleminde verilen L ve M operatörlerinin (2.2) Lax denklemini sağladığı görülür.

Örneklerde görüldüğü gibi KdV ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri (2.2) denkleminde verilen iki lineer operatörün tamamen çözülebilirlik şartı olarak ortaya çıkmaktadır. Eğer bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem L ve M gibi iki operatörün yardımıyla yukardaki şekilde elde edilebiliyorsa, (2.2) denkleminde kısmi diferansiyel denklemin Lax temsili denir ve L ve M operatörleri Lax çifti olarak adlandırılır.

2.2 AKNS Denklemi

Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur (AKNS) (Ablowitz vd. 1973), lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tamamen çözülebilirliğini test etmek için yeni bir denklem takımı oluşturdular. Bu yöntem ile lineer olmayan değişim denklemlerinin büyük bir kısmı için başlangıç değer problemi çözülebilmektedir. Şimdi AKNS denklem takımını inceleyelim. İlk olarak

$$v_x = Xv \quad (2.10a)$$

$$v_t = Tv \quad (2.10b)$$

şeklinde iki lineer denklem düşünelim. Burada v , n boyutlu vektördür ve X ve T , $n \times n$ boyutunda matrislerdir. (2.10) denklemlerini çözmek için denklemleri sırayla t ve x 'e göre kısmi türevlerini alalım

$$v_{xt} = X_t v + X v_t = X_t v + XT v$$

ve

$$v_{tx} = T_x v + T v_x = T_x v + TX v$$

elde edilir. Tam çözülebilirlik şartı

$$v_{xt} = v_{tx}$$

kullanılarak

$$X_t v + XT v = T_x v + TX v$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenerek

$$X_t - T_x + [X, T] = 0 \quad (2.11)$$

ilişkisi bulunur. Bulunan (2.11) denklemi (2.2) Lax denklemine benzemektedir.

Bulunan denklemlere örnek olarak 2×2 saçılma problemini ele alalım. Bu probleme ait v_1 ve v_2 değişkenleri

$$v_{1,x} = -ikv_1 + q(x, t)v_2 \quad (2.12a)$$

$$v_{2,x} = ikv_2 + r(x, t)v_1 \quad (2.12b)$$

olarak alalım, burada alt indis olarak bulunan “ 1 ”, “ 2 ” ifadesi kısmi türevi temsil etmektedir. En genel şekilde v_1 ve v_2 değişkenlerinin zamana bağımlılığı

$$v_{1,t} = A v_1 + B v_2 \quad (2.13a)$$

$$v_{2,t} = Cv_1 + Dv_2 \quad (2.13b)$$

olsun. Buradaki A, B, C ve D fonksiyonları k , $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ değerlerinin skaler fonksiyonlarıdır. (2.11) denkleminde bulunan X ve T 2×2 matris formunda

$$X = \begin{pmatrix} -ik & q \\ r & ik \end{pmatrix} \quad (2.14a)$$

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.14b)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer (2.13) denkleminin sağ tarafında x 'e bağlı türevler varsa (2.12) denklemini kullanarak yok edilebilir. Ek olarak $r = -1$ alındığı takdirde (2.12b) denkleminden yararlanılarak

$$v_{2,xx} = ikv_{2,x} - v_{1,x} = ik(ikv_2 - v_1) + ikv_1 - qv_2$$

bulunur. v_1 ihtiva eden terimler elenerek

$$v_{2,xx} + (k^2 + q)v_2 = 0 \quad (2.15)$$

Schrödinger saçılma problemine indirgenir.

Şimdiye kadar bahsedilen işlem sırası (2.12) denklemleri kullanarak (2.13) zaman evrimi denkleminin bilinen lineer olmayan değişim denklemlerinin bulunmasında basit bir teknik sağlar. (2.13) ve (2.14) denklemlerinin tamamen çözülebilirlik şartı için, yani $v_{j,xt} = v_{j,tx}$ $j=1,2$, k özdeğeri zamandan bağımsızdır olmalıdır $dk/dt = 0$.

Lineer olmayan denklemleri elde etmemizi sağlayacak denklem takımını bulmak için A, B, C ve D fonksiyonları tanımlanarak bir set oluşturulmalıdır. Bunun için

$$v_{1,xt} = -ikv_{1,t} + qv_{2,t} + q_tv_2$$

denklemden $v_{1,t}$ ve $v_{2,t}$ değerleri yerlerine yazılarak

$$v_{1,xt} = -ik(Av_1 + Bv_2) + q_tv_2 + q(Cv_1 + Dv_2)$$

ve

$$v_{1,xt} = (-ikA + qC)v_1 + (-ikB + q_1 + qD)v_2 \quad (2.16.a)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $v_{1,bx}$ için

$$v_{1,bx} = A_x v_1 + A v_{1,x} + B_x v_2 + B v_{2,x}$$

bulunur ve $v_{1,x}$ ve $v_{2,x}$ değerleri denklemde yerine yazılarak

$$v_{1,bx} = A_x v_1 + A(-ikv_1 + qv_2) + B_x v_2 + B(ikv_2 + rv_1)$$

ve

$$v_{1,bx} = (A_x - ikA + rB)v_1 + (Aq + B_x + ikB)v_2 \quad (2.16b)$$

bulunur. Elde edilen (2.16a) ve (2.16b) denklemleri karşılaştırılarak

$$A_x = qC - rB \quad (2.17a)$$

$$B_x + 2ikB = q_t - (A - D)q \quad (2.17b)$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde $v_{2,xt}$ için

$$v_{2,xt} = ikv_{2,t} + rv_{1,t} + r_t v_1$$

denklemde $v_{1,t}$ ve $v_{2,t}$ değerleri yerlerine yazılarak

$$v_{2,xt} = ik(Cv_1 + Dv_2) + r_t v_1 + r(Av_1 + Bv_2)$$

ve

$$v_{2,xt} = (ikC + rA + r_t)v_1 + (ikD + rB)v_2 \quad (2.18a)$$

elde edilir. Benzer şekilde $v_{2,bx}$ için

$$v_{2,bx} = C_x v_1 + C v_{1,x} + D_x v_2 + D v_{2,x}$$

olarak bulunur ve $v_{1,x}$ ve $v_{2,x}$ değerleri denklemde yerine yazılarak

$$v_{2,bx} = C_x v_1 + C(-ikv_1 + qv_2) + D_x v_2 + D(ikv_2 + rv_1)$$

ve

$$v_{2,bx} = (C_x - ikC + rD)v_1 + (qC + D_x + ikD)v_2 \quad (2.18b)$$

bulunur. Elde edilen (2.18a) ve (2.18b) denklemleri karşılaştırılarak

$$C_x - 2ikC = r_t + (A - D)r \quad (2.19a)$$

$$(-D)_x = qC - rB \quad (2.19b)$$

denklemleri elde edilir. (2.17a) ve (2.19b) denklemleri karşılaştırıldığında $D = -A$ olduğu görülür. Sonuç olarak A, B ve C için

$$A_x = qC - rB \quad (2.20a)$$

$$B_x + 2ikB = q_t - 2Aq \quad (2.20b)$$

$$C_x - 2ikC = r_t + 2Ar \quad (2.20c)$$

denklemleri bulunur. (2.20) denklemlerine AKNS denklemleri denir. (2.20) denklemlerini A, B ve C için çözelim. A, B ve C ifadelerini k spektral parametre olmak üzere seriye açarak

$$A = \sum_{j=0}^n A_j k^j \quad B = \sum_{j=0}^n B_j k^j \quad C = \sum_{j=0}^n C_j k^j \quad (2.21)$$

şeklinde yazalım. (2.21) seri açılımlarını (2.20) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{j=0}^n A_{j,x} k^j = q \sum_{j=0}^n C_j k^j - r \sum_{j=0}^n B_j k^j \quad (2.22a)$$

$$\sum_{j=0}^n B_{j,x} k^j + 2i \sum_{j=0}^n B_j k^{j+1} = q_t - 2q \sum_{j=0}^n A_j k^j \quad (2.22b)$$

$$\sum_{j=0}^n C_{j,x} k^j - 2i \sum_{j=0}^n C_j k^{j+1} = r_t - 2r \sum_{j=0}^n A_j k^j \quad (2.22c)$$

elde edilir. Açılımda k parametresinin kuvvet serilerindeki ifadeleri birbirine eşitlendiğinde sistemi çözmek için gerekli denklemler elde edilir. A_j , B_j ve C_j $j=0,1,2,\dots,n$ kullanılarak r ve q için iki tane lineer olmayan zaman değişimi denklemleri elde edilir. Bu denklemlere birkaç örnek gösterelim.

Örnek 1 : $n = 2$ olmak üzere A, B ve C fonksiyonları k 'nın sıralı kuvvetleri olarak

$$A = A_2 k^2 + A_1 k + A_0 \quad (2.23a)$$

$$B = B_2 k^2 + B_1 k + B_0 \quad (2.23b)$$

$$C = C_2 k^2 + C_1 k + C_0 \quad (2.23c)$$

yazılır. (2.23) denklemleri (2.20) denklemlerinde yerine yazılırsa, en genel halde (2.22) denklemlerinin $n = 2$ durumundaki denklem açılımı elde edilir. Elde edilen denklemde k parametresinin kuvvet serileri eşitlenerek istenilen lineer olmayan denklemler elde edebilir. Kuvvet serisinden elde edilen denklemleri inceleyelim.

k^3 katsayıları terimler için : B_2 ve C_2 için

$$B_2 = 0, \quad C_2 = 0$$

elde edilir.

k^2 katsayıları terimler için : A_2 için

$$A_{2,x} = qC_2 - qB_2 = 0$$

denklemden $A_2 = a$ elde edilir, burada a integral sabitidir. B_1 için

$$2iB_1 = -2qA_2$$

denklemden $B_1 = iaq$ elde edilir. C_1 için

$$-2iC_1 = 2rA_2$$

denklemden $C_1 = iar$ elde edilir.

k katsayıları terimler için : A_1 için

$$A_{1,x} = qC_1 - qB_1$$

denkleminde bilinenler yerine yazılarak $A_1 = b$ bulunur, burada b integral sabitidir ve işlemleri basitleştirmek için $b = 0$ seçelim. B_0 için

$$B_{1,x} + 2iB_0 = 0$$

denklemden $B_0 = -\frac{1}{2}aq_x$ bulunur. C_0 için

$$C_{1,x} - 2iC_0 = 0$$

denkleminde $C_0 = \frac{1}{2}ar_x$ bulunur.

k^0 katsayılı terimler için : A_0 için

$$A_{0,x} = qC_0 - qB_0 = \frac{1}{2}a(rq_x + qr_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}aqr)$$

denkleminde $A_0 = \frac{1}{2}arq + c$ elde edilir, burada c integral sabitidir ve yine işlemleri basitleştirmek için $c = 0$ seçelim.

Sonuç olarak q ve r için değişim denklemleri (2.20b) ve (2.20c) denklemlerinde k parametresinin sıfırcı kuvvetinin yardımı ile bulunur. q için değişim denklemi

$$B_{0,x} = q_t - 2qA_0 \quad (2.24a)$$

denkleminde faydalanılarak

$$-\frac{1}{2}aq_{xx} = q_t - aq^2r \quad (2.24b)$$

olarak elde edilir. r için değişim denklemleri

$$C_{0,x} = r_t + 2rA_0 \quad (2.25a)$$

denkleminde faydalanılarak

$$\frac{1}{2}ar_{xx} = r_t + ar^2q \quad (2.25b)$$

olarak elde edilir. Eğer (2.24b) ve (2.25b) denklemlerinde $r = \pm q^*$ ve $a = 2i$ yazılırsa

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^* \quad (2.26)$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi elde edilir. (2.23) açılımında $r = -q^*$ alınırsa A , B ve C denklemleri k parametresinin kuvvet serisi halinde

$$A = 2ik^2 \pm iqq^* \quad (2.27a)$$

$$B = 2qk + iq_x \quad (2.27b)$$

$$C = m 2q * k \pm iq_x * \quad (2.27c)$$

bulunur ve $q(x,t)$ (2.26) denklemindeki lineer olmayan Schrödinger denklemini sağlar.

Örnek 2 : $n = 3$ olmak üzere A , B ve C fonksiyonlarını k parametresinin üçüncü mertebeden polinomlarının sıralı kuvveleri olarak

$$A = A_3 k^3 + A_2 k^2 + A_1 k + A_0 \quad (2.28a)$$

$$B = B_3 k^3 + B_2 k^2 + B_1 k + B_0 \quad (2.28b)$$

$$C = C_3 k^3 + C_2 k^2 + C_1 k + C_0 \quad (2.28c)$$

şeklinde yazılır. (2.28) denklemini (2.20) denklemlerinde yerine yazılarak en genel halde olan (2.22) denklemlerinin $n = 3$ durumundaki denklem açılımı elde edilir. Elde edilen denklemde k parametresinin kuvvet serilerini eşitleyelim.

k^4 katsayılı terimler için : B_3 ve C_3 için

$$B_3 = C_3 = 0$$

elde edilir.

k^3 katsayılı terimler için : A_3 için

$$A_{3,x} = qC_3 - qB_3 = 0$$

denklemden $A_3 = a_3$ elde edilir, burada a_3 integral sabitidir. B_2 için

$$2iB_2 = -2qA_3$$

denklemden $B_2 = iqa_3$ değeri elde edilir. C_2 için

$$-2iC_2 = 2rA_3$$

denklemden $C_2 = ira_3$ elde edilir.

k^2 katsayılı terimler için : A_2 için

$$A_{2,x} = qC_2 - qB_2 = irqa_3 - iqra_3 = 0$$

denkleminde $A_2 = a_2$ elde edilir, a_2 integral sabitidir. B_1 için

$$B_{2,x} + 2iB_1 = -2qA_2$$

denkleminde bilinenler yerine yazılarak $B_1 = -\frac{1}{2}q_x a_3 + iqa_2$ elde edilir. C_1 için

$$C_{2,x} - 2iC_1 = 2rA_2$$

denkleminde bilinenler yerine yazılarak $C_1 = \frac{1}{2}r_x a_3 + ira_2$ elde edilir.

k katsayılı terimler için : A_1 için

$$A_{1,x} = qC_1 - qB_1 = \frac{1}{2}a_3(qr_x + rq_x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}qra_3 \right)$$

eşitlikten $A_1 = \frac{1}{2}qra_3 + a_1$ elde edilir, burada a_1 integral sabitidir. B_0 için

$$B_{1,x} + 2iB_0 = -2qA_1$$

denkleminde bilinenler yerine yazılarak $B_0 = ia_1q - \frac{1}{2}a_2q_x + \frac{1}{4}ia_3(2q^2r - q_{xx})$ elde edilir. C_0 için

$$C_{1,x} - 2iC_0 = 2rA_1$$

denkleminde bilinenler yerine yazılarak $C_0 = ia_1r + \frac{1}{2}a_2r_x + \frac{1}{4}ia_3(2r^2q - r_{xx})$ elde edilir.

k^0 katsayılı terimler için : A_0 için

$$A_{0,x} = qC_0 - qB_0$$

denkleminde bilinenler yerine yazılarak $A_0 = \frac{1}{2}a_2rq - \frac{1}{4}ia_3(qr_x - rq_x) + a_0$ elde edilir. Elde edilen bütün ifadelerden sonra A , B ve C fonksiyonları k parametresinin kuvvet açılımı olarak

$$A = a_3k^3 + a_2k^2 + \frac{1}{2}(a_3qr + 2a_1)k + \frac{1}{2}a_2qr - \frac{1}{4}ia_3(qr_x - rq_x) + a_0 \quad (2.29a)$$

$$B = ia_3qk^2 + (ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x)k + [ia_1q - \frac{1}{2}a_2q_x + \frac{1}{4}ia_3(2q^2r - q_{xx})] \quad (2.29b)$$

$$C = ia_3rk^2 + (ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x)k + [ia_1r + \frac{1}{2}a_2r_x + \frac{1}{4}ia_3(2r^2q - r_{xx})] \quad (2.29c)$$

elde edilir. $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ için tanımlanan zaman değişimi (2.29) denklemleri kullanarak elde edilebilir. q için zaman değişim denklemi (2.24a) denkleminde yararlanılarak

$$q_t + \frac{1}{4}ia_3(q_{xxx} - 6qrq_x) + \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2q^2r) - ia_1q_x - 2a_0q = 0 \quad (2.30a)$$

ve r için zaman değişim denklemi (2.25a) denkleminde yararlanılarak

$$r_t + \frac{1}{4}ia_3(r_{xxx} - 6qr_r) - \frac{1}{2}a_2(r_{xx} - 2r^2q) - ia_1r_x + 2a_0r = 0 \quad (2.30b)$$

elde edilir. (2.30) denklemlerinde a_3 , a_2 , a_1 ve a_0 özel olarak seçildiği takdirde farklı çözülebilir denklemler elde edebiliriz. Eğer $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -4i$ ve $r = -1$ alınırsa (2.30) denklemlerinden

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \quad (2.6)$$

KdV denklemi elde edilir. Eğer $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -4i$ ve $r = q$ ise (2.22)

$$q_t - 6q^2q_x + q_{xxx} = 0 \quad (2.31)$$

denkleminde mKdV denklemi elde edilir.

Şimdiye kadar k parametresinin pozitif tamsayı üstelleri için örnekler yapıldı. Aynı işlemleri A , B ve C denklemlerinin k parametresinin negatif tamsayı üstelleri için de yapılabilir.

Örnek 3 : $n = -1$ olmak üzere A , B ve C fonksiyonları denklemleri k parametresi cinsinden olarak

$$A = \frac{a(x,t)}{k} \quad (2.32a)$$

$$B = \frac{b(x,t)}{k} \quad (2.32b)$$

$$C = \frac{c(x,t)}{k} \quad (2.32c)$$

şeklinde olsun. (2.32) denklemi (2.20) denklemlerinde yerine yazarak, elde edilen denklemde k parametresinin kuvvet serilerini eşitleyelim.

k^0 katsayılı terimler için : q ve r için

$$q_t = 2ib \quad (2.33a)$$

$$r_t = -2ic \quad (2.33b)$$

elde edilir.

k^{-1} katsayılı terimler için : a , b ve c için

$$a_x = qc - rb \quad (2.34a)$$

$$b_x = -2qa \quad (2.34b)$$

$$c_x = 2ra \quad (2.34c)$$

denklemleri elde edilir. (2.33) denklemlerinin x 'e göre kısmi türevi alınıp bilinenler yerine yazılırsa

$$q_{tx} = 2ib = 2i(-2qa) = -4iqa \quad (2.35a)$$

$$r_{tx} = -2ic = -2i(2ra) = -4ira \quad (2.35b)$$

denklemleri elde edilir. (2.34a) denkleminde bilinenler yerine yazılarak

$$a_x = \frac{i}{2}(qr)_t \quad (2.36)$$

bulunur. Yukardaki denklemleri özel durumlar için inceleyelim

(i) $a = \frac{i}{4} \cos u$, $b = c = \frac{i}{4} \sin u$ ve $q = -r = -\frac{1}{2}u_x$ ise (2.36) denkleminde yararlanılarak

$$u_{xt} = \sin u \quad (2.37)$$

şeklinde verilen Sine-Gordon denklemi elde edilir.

(ii) $a = \frac{i}{4} \cosh u$, $b = c = \frac{i}{4} \sinh u$ ve $q = r = \frac{1}{2}u_x$ ise (2.36) denkleminde yararlanılarak

$$u_{xt} = \sinh u \quad (2.38)$$

şeklinde verilen Sinh-Gordon denklemi elde edilir.

3. AYAR TEORİLERİ ve SELF-DUAL YANG-MİLLS DENKLEMLERİ

3.1 Abelian Ayar Teorileri-Maxwell Teorisi

Bu kısımda Yang-Mills alan teorisine bir hazırlık olması açısından abelian alan teorilerinin özelliklerini inceleyeceğiz. Abelian ayar teorisi $U(N)$ simetrisine sahiptir, A_μ 'ler $U(N)$ değerli vektör potansiyeller olmak üzere,

$$[A_\mu, A_\nu] = 0 \quad (3.1)$$

şartını sağlar ve

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

alan tensörünü tanımlarlar. $F_{\mu\nu}$ tensörünün antisimetrik olduğu kolayca görülebilir. Bir başka deyişle

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (3.3)$$

dır ve ek olarak $F_{\mu\nu}$ tensörü

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde Bianchi özdeşliğini sağlar. Öte yandan, A_μ potansiyeli $F_{\mu\nu}$ tensörünü tek bir şekilde belirleyemez. Yani $F_{\mu\nu}$ tensörü, χ bir skaler fonksiyon olmak üzere,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (3.5)$$

ayar dönüşümü altında invariant kalmaktadır. (3.5) denklemi ile verilen dönüşüm ayar dönüşümü adı verilmektedir. Abelian ayar teorileri ayar dönüşümleri altında invarianttır. j^μ 4-lü vektörü kaynak terimini temsil etmek üzere alan denklemi

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem A_μ vektör potansiyeli cinsinden yazıldığında, $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ d'Alembert operatörü olmak üzere

$$\square A^\mu - \partial^\nu (\partial_\nu A^\mu) = j^\mu \quad (3.7)$$

elde edilir. Uzayda kaynak olmaması durumunda $j^\mu = 0$ olacaktır. Ayar invaryansını göz önüne alarak bir ayar seçimi yapmak mümkündür. Lorentz ayar seçimi

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3.8)$$

şeklinde yapıldığında (3.7) denklemi

$$\square A^\mu = 0 \quad (3.9)$$

şeklini alır. Bu da dalga denklemdir.

Maxwell teorisi kovaryant formda abelian bir alan teorisi ile ifade edilmektedir. Şimdi 4-lü vektörünü, elektrik alan

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad (3.10)$$

ve manyetik alan

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.11)$$

olmak üzere 4-lü vektör potansiyel

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (3.12)$$

ve ρ yük yoğunluğu ve $\vec{j}$ akım yoğunluğu olmak üzere 4-lü kaynak vektörü

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (3.13)$$

şeklinde seçildiğinde (3.6) denkleminde,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.15)$$

elde edilir. Kalan iki Maxwell denklemi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.17)$$

(3.4) Bianchi özdeşliğinden elde edilir. Diğer taraftan skaler ve vektör potansiyellerin ayar dönüşümü

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \quad (3.18)$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (3.19)$$

şeklinde olacağından, $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ 'nin ayar dönüşümleri altında invaryant olduğu kolayca görülür. Ayrıca,

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \right)_i = -E^i \quad (3.20)$$

ve

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (3.21)$$

şeklinde seçilerek $F^{\mu\nu}$ tensörü $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ cinsinden

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir (Ryder, 1985).

Dual alan tensörü $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ dört boyutlu Levi-Civita sembolü olmak üzere

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanır. Dual alan tensörü de $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanları cinsinden

$$*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) ifadesinden de görülebileceği gibi $*F^{\mu\nu}$ dual tensörü $F^{\mu\nu}$ tensöründe $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ve $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ dönüşümü yapılarak elde edilebilmektedir. Elektromanyetik enerji yoğunluğu

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(E^2 - B^2) \quad (3.25)$$

olur. (3.22) ve (3.24) denklemleri kullanılarak

$$*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 4\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.6) alan denkleminin her iki tarafının türevini alırsak

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu \quad (3.27)$$

ve

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

olduğunda

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) denklem de bileşenler cinsinden yazıldığında

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

süreklilik denklemi elde edilir. Böylece elektromanyetik teorisinin abelian bir ayar teorisi şeklinde kovaryant formda ifade edilebileceği görülmektedir.

3.2 Abelian Olmayan Ayar Teorileri-Yang-Mills Ayar Teorisi

Elektromanyetik teorisinin ayar invaryansının abelian olmayan gruplara genellemesi 1954 yılında Yang ve Mills tarafından önerilmiştir. Abelian olmayan teorilerinin renormalizasyonu ve kuantizasyonu başarı ile yapılmıştır. Bu tür teorilerin zayıf ve elektromanyetik etkileşmeler yanında kuvvetli çekirdek etkileşmelerini de kapsayacak şekilde birleştirilmiş alan teorilerini sağlayacağı düşünülmektedir.

Lokal abelian olmayan ayar teorilerinde skaler alan için iki ayrı noktada karşılaştırma yaptığımızdan

$$\phi(x^\mu + dx^\mu) - \phi(x^\mu) = \partial_\mu \phi dx^\mu \quad (3.29)$$

yazamayız. Bu denklemin sol tarafındaki ifadede kısmi türevin bir kovaryant türev ile değiştirilmesi gerekmektedir. A_μ^a ayar alanı olmak üzere Lie cebri elemanı

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir. Burada T^a Lie cebri elemanlarının bir gösterimidir. Bu elemanlar, C^{ab}_c yapı sabitleri olmak üzere

$$[T^a, T^b] = C^{ab}_c T^c \quad (3.31)$$

komütasyon bağıntısını sağlar. a, b, c indisleri Lie cebri temsilcilerinin sayısını gösterir. $SU(2)$ grubunun Lie cebri için $a, b, c = 1, 2, 3$ ve $SU(3)$ için $a, b, c = 1, 2, \dots, 8$ değerlerini alır. Ayar alanları kullanarak abelian olmayan grup için

$$\phi(x^\mu + dx^\mu) - \phi(x^\mu) = dx^\mu D_\mu \phi \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada kovaryant türev diye adlandırılan D_μ operatörü

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu(x) \quad (3.33)$$

olarak verilmektedir. Geometrik bir yorum yapılırsa $A_\mu(x)$ fonksiyonları uzayın bağ fonksiyonları rolünü oynadığı görülmektedir. $F_{\mu\nu}$ alan tensörü

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \quad (3.34)$$

veya

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

şeklinde olmaktadır. Ayrıca $F_{\mu\nu}$ tensörü

$$[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu} \quad (3.35)$$

özdeşliğini sağlamaktadır. Abelian $F_{\mu\nu}$ tensörünün sağladığı Bianchi özdeşliğinin yerine abelian olmayan $F_{\mu\nu}$ tensörü

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}] + [D_\nu, F_{\lambda\mu}] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (3.36)$$

şeklinde bir özdeşlik sağlamaktadır (Itzykson ve Zuber, 1980).

Abelian teoride ayar dönüşümleri altında $F_{\mu\nu}$ tensörü invaryant kalmaktaydı. Burada ise A_μ tensörü ayar dönüşümleri altında

$$A'_\mu = [\partial_\mu g] g^{-1} + g A_\mu g^{-1} \quad (3.37)$$

veya e grubun birim elemanı olmak üzere

$$g = e + \delta\alpha_a T^a \quad (3.38)$$

infinitesimal dönüşümleri altında

$$A'_{\mu a} = A_{\mu a} + \partial_\mu (\delta\alpha_a) + C_{ca}^{bc} \delta\alpha_b A_{\mu c} \quad (3.39)$$

şeklinde dönüşmektedir. $F_{\mu\nu}$ tensörü de ayar dönüşümleri altında

$$F'_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu} g^{-1} \quad (3.40)$$

veya infinitesimal dönüşümler için

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + C_a^{bc} \delta\alpha_b A_{\mu\nu c} \quad (3.41)$$

şeklinde dönüşmektedir. Kolayca görülebileceği gibi A_μ vektörü saf ayar alanı olduğunda, yani

$$A_\mu = (\partial_\mu g) g^{-1} \quad (3.42)$$

ise $F_{\mu\nu} = 0$ olmaktadır.

Ayar serbestliği abelian olmayan teoride de vardır. Abelian teorilerde olduğu gibi A_μ vektörünün lokal olarak sağladığı bazı şartlar bir ayar seçimi olarak verilebilir. Örneğin n^μ belirli bir dördümlük vektör olmak üzere $A \rightarrow A'$ ayar dönüşümünde

$$n^\mu \cdot A'_\mu = 0 \quad (3.43)$$

ayar seçimi invaryant kalmaktadır. Buna eksensel (axial) ayar adı verilmektedir. Ayar dönüşümü altında invaryanttır. Maxwell denklemlerinin genelleştirmesi

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.44)$$

şeklinde lineer olmayan bir denklemlerle, abelian olmayan halde, verilmektedir. Maxwell teorisine şeklen benzerliği korursak elektrik ve manyetik alanların abelian olmayan teorideki karşılıkları sırasıyla

$$E_a^i = F^{0i}_a \quad (3.46)$$

ve

$$B_a^i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \quad (3.47)$$

olmaktadır. Burada “a” Lie cebirinin indisidir.

Bir sonraki kısımda abelian olmayan ayar teorisinde self-dualite şartını ve bu şartın tamamen çözülebilirlik ile ilişkisini inceleyeceğiz.

3.3 Self-Dualite Şartları

Self-Dual Yang-Mills (SDYM) denklemleri 4 boyutlu bir M Riemannian manifold üzerindeki baz G demeti ile bir hermityen E vektör demeti arasındaki self-dual ile ilişkisini veren denklemlerdir. $M = \mathbb{R}^4$ üzerindeki standart koordinatlar $x = (x^\mu)$, $\mu = 0,1,2,3$ olmak üzere A'_μ Yang-Mills potansiyeli için A 1-formu

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu(x) dx^\mu \quad (3.48)$$

ve, $F_{\mu\nu}$ Yang-Mills alan tensörü için F 2- formu

$$F = \sum_{\mu,\nu=0}^3 F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.49)$$

olarak yazılabilir. * Hodge star operatörü olmak üzere SDYM denklemleri

$$F = *F \quad (3.50)$$

olarak verilmektedir.

SDYM denklemleri ayar dönüşümleri altında değişmez. Yani (3.50) denklemi

$$A \rightarrow A^f = g A g^{-1} + (dg) g^{-1}, \quad g \in \text{Map}(M, G)$$

ayar dönüşümü altında korunur (Ablowitz vd. 1993). (3.50) self-dualite şartı $F_{\mu\nu}$ tensörünün duali abelian olmayan ayar teorisinde de

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

şeklinde olduğundan (3.50) SDYM denklemleri

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.51)$$

olarak yazılabilir. İndis indirme ve kaldırma işlemi Euclidian uzayın metrik tensörü

$$g_{\eta\tau} = g^{\eta\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

ile yapılır. Buna göre (3.51) self-dualite şartı kovaryant türevler cinsinden

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} [D_\sigma, D_\rho] = [D_\mu, D_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

şeklinde yazılabilir. $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ Levi-Civita tensörü için

$$\epsilon_{0123} = 1$$

seçimi yapılarak (3.53) denkleminde

$$[D_2, D_3] = [D_0, D_1] \quad (3.54)$$

$$[D_3, D_1] = [D_0, D_2] \quad (3.55)$$

$$[D_1, D_2] = [D_0, D_3] \quad (3.56)$$

denklemleri elde edilir.

3.4 Self-Dualite Denkleminin İki Lineer Denklemin Çözülebilirlik Şartı Olarak Elde Edilmesi

SDYM denklemleri tamamen çözülebilirlik şartı ile ilişkilendirilmektedir. İki lineer sistemin tamamen çözülebilirlik özelliğinden SDYM denkleminde elde edilebilir. Bu amaca dönük olarak SDYM denklemlerini aşağıdaki koordinat sisteminde yazalım, yeni koordinat sisteminde $x^a = (x, y, u, t)$ koordinatları

$$x = x^1$$

$$y = ix^2$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + ix^3)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - ix^3) \quad (3.57)$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü ile verilmektedir. Bu koordinat sisteminde metrik tensörü $ds^2 = dx^2 - dy^2 + 2du \cdot dt$ ifadesinden

$$G_{\theta\xi} = G^{\theta\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

şeklinde elde edilir (Mason ve Sparling, 1989).

Yeni koordinat sisteminde self-dualite denklemlerinin alacağı formu bulalım. Self-dualite şartı kovaryant türevler cinsinden $G^{\theta\xi}$ metrik tensörü ile

$$\frac{1}{2} \epsilon_{abcd} G^{cr} G^{ds} [D_r, D_s] = [D_a, D_b] \quad (3.59)$$

olur. Tek tek bileşen denklemlerini hesaplayalım. Daha önce yaptığımız gibi ilk olarak xy-bileşenini bulalım,

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_{xyt} G^{xt} G^{yu} [D_t, D_u] + \varepsilon_{xyu} G^{xu} G^{yt} [D_u, D_t]) = [D_x, D_y]$$

denkleminde $\varepsilon_{xyt} = 1$ alınarak

$$[D_x, D_y] - [D_u, D_t] = 0 \quad (3.60)$$

bulunur. Diğer denklemler aynı şekilde hesaplanarak

$$[D_x - D_y, D_u] = 0 \quad (3.61)$$

ve

$$[D_x - D_y, D_t] = 0 \quad (3.62)$$

olarak bulunur. Böylece yeni koordinat sisteminde self-dualite denklemlerin aldığı şekli bulmuş olduk.

Şimdi bizi bulduğumuz denklemlere götüreceğ olan iki lineer denklemin çözülebilirlik şartını inceleyelim. Bu iki lineer denklemi λ kompleks bir sayı olmak üzere,

$$L_0 s = (D_x - D_y - \lambda D_u) s = 0 \quad (3.63)$$

$$L_1 s = [D_t + \lambda(D_x + D_y)] s = 0 \quad (3.64)$$

şeklinde yazalım (Mason ve Sparling, 1989). Bu lineer sistemin çözülebilirlik şartı

$$L_0 L_1 s = L_1 L_0 s$$

olarak verilebilir. Bu denklemin her iki tarafını ayrı ayrı hesaplayalım. Önce

$$L_0 L_1 = (D_x - D_y - \lambda D_u) [D_t + \lambda(D_x + D_y)]$$

ifadesini

$$L_0 L_1 = D_x D_t - D_y D_t + \lambda(D_x D_x + D_x D_y - D_y D_x - D_y D_y - D_u D_t) - \lambda^2(D_u D_x + D_u D_y)$$

şeklinde düzenleyerek ve daha sonrada

$$L_1 L_0 = [D_t + \lambda(D_x + D_y)](D_x - D_y - \lambda D_u)$$

ifadesini de

$$L_1 L_0 = D_t D_x - D_t D_y + \lambda (-D_t D_u + D_x D_x - D_x D_y + D_y D_x - D_y D_y) - \lambda^2 (D_x D_u + D_y D_u)$$

şeklinde düzenlenerek ve tamamen çözülebilirlik şartından

$$\begin{aligned} [D_x, D_t] + [D_t, D_y] + \lambda \{ [D_t, D_u] + [D_x, D_x] + [D_x, D_y] + [D_x, D_y] + [D_y, D_y] \} \\ + \lambda^2 \{ [D_x, D_u] + [D_y, D_u] \} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde λ 'nın katsayılarını sıfıra eşitlenerek,

$$[D_x + D_y, D_u] = 0 \quad (3.65)$$

$$[D_x - D_y, D_x + D_y] - [D_u, D_t] = 0 \quad (3.66)$$

$$[D_x - D_y, D_t] = 0 \quad (3.67)$$

bulunur. Bunlarda yeni koordinat sisteminde kovaryant türev cinsinden yazılmış (3.60-62) self-dualite denklemleridir.

3.5 AKNS Tipi Denklemler

SDYM denklemlerinde simetriler yardımı ile indirgemeler yapılarak klasik soliton denklemleri elde edilebilir. İndirgemelerden sonra elde edilen denklem takımı AKNS denklemine benzemektedir. Bir önceki bölümde olduğu gibi AKNS denklemine benzer denklemlerin yardımı ile KdV ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri elde edilebilir.

SDYM denklemlerini iki boyuta indirmek için yapılan koordinat dönüşümü biri eşzamanlı ve diğeri boş (null) olan ortagonal uzay zaman çiftini yansıtan iki komütasyon simetrisi vermektedir. Bu simetriler yeni koordinatlarda $\frac{\partial}{\partial y}$ ve $\frac{\partial}{\partial u}$ operatörleri ile temsil edilir.

Kovaryant türev operatörleri

$$\begin{aligned} D_x &= \partial_x - A, & D_u &= \partial_u - B \\ D_t &= \partial_t - C, & D_y &= \partial_y - D \end{aligned} \quad (3.68)$$

olarak yazılabilir ve buradaki A_μ vektör potansiyelinin bileşenleri A , B , C ve D fonksiyonları u ve y den bağımsızdır. Aynı zamanda ayar şartı $A + D = 0$ şeklinde alınmaktadır. Burada ayar dönüşümleri t değişkeninin fonksiyonu olan $SL(2,C)$ değerli fonksiyonlar tarafından temsil edilmektedir. İki boyuta indirgenmiş SDYM denklemlerini bulmak için, önce,

$$[D_x + D_y, D_u]s = 0$$

denkleminde kovaryant türev operatörlerini açık olarak

$$[\partial_x - A + \partial_y + A, \partial_u - B]s = [\partial_x, \partial_u]s + [\partial_y, \partial_u]s - [\partial_x, B]s - [\partial_y, B]s = 0$$

şeklinde yazıp, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\partial_x B = 0 \quad (3.69a)$$

sonucu elde edilir. Aynı şekilde diğer denklemler için benzer işlemler yapılarak

$$2\partial_x A - [B, C] = \partial_t B \quad (3.69b)$$

ve

$$2\partial_t A - \partial_x C + 2[A, C] = 0 \quad (3.69c)$$

sonucu elde edilir. Lineer denklem çiftini de iki boyuta indirgenmesi gerekmektedir. Yine benzer işlemlerle lineer denklem çifti

$$L_0 s = (\partial_x - 2A - \lambda B)s = 0 \quad (3.70)$$

ve

$$L_1 s = \left(\partial_t - C + \frac{\lambda}{2} \partial_x \right) s = 0 \quad (3.71)$$

olarak yazılabilir. (3.69a) denklemi dikkatli incelendiğinde, B 'nin sadece t değişkenine bağlı olduğu görülür. $SL(2,C)$ ayar grubu değerli B fonksiyonu için bu grubun özellikleri göz önüne alındığında B fonksiyonu normal formlarla ifade edilebilir. Normal formları görebilmek için $SL(2,C)$ ayar grubunun özelliklerini inceleyelim.

$SL(2,C)$ ayar grubu kompleks matris olarak

$$g(x, u, v, y) = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

ile temsil edilir. $\det(g) = 1$ özelliğine sahiptir. $SL(2, \mathbb{C})$ ayar grubu içinde bulunan matrisler için birleşme özelliği, birim elemanı ve grup içindeki matrislerin tersi vardır. Ayrıca abelian olmayan bir gruptur. $SL(2, \mathbb{C})$ ayar grubu elemanları içinde $\det(g) = 1$ şartından dolayı $g(x, u, v, y) \in SL(2, \mathbb{C})$ üç bağımsız kompleks parametreye bağlıdır ve bunlar

$$\eta_+(\xi) = g(1, \xi, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73a)$$

$$\eta_-(\xi) = g(1, 0, \xi, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73b)$$

$$k(\xi) = g(e^\xi, 0, 0, e^{-\xi}) = \begin{pmatrix} e^\xi & 0 \\ 0 & e^{-\xi} \end{pmatrix} \quad (3.73c)$$

matrisleridir. Buradaki $\eta_+(\xi)$, $\eta_-(\xi)$ ve $k(\xi)$ matrisleri $SL(2, \mathbb{C})$ 'nin elemanlarıdır. Bu elemanlara karşılık gelen alt uzayları N_+ , N_- ve K Lie grup özellikleri göstermektedir. Ayrıca $SL(2, \mathbb{C})$ de bir Lie grubudur. $SL(2, \mathbb{C})$ 'nin alt grupları $SU(2)$, $SU(1,1)$ ve $SL(2, \mathbb{R})$ gruplarıdır. Bu alt grupların, grup elemanlarının (3.72) ifadesinde olduğu gibi matris gösterimleri vardır. Matris elemanları $SU(2)$, $SU(1,1)$ ve $SL(2, \mathbb{R})$ alt grupları için sırasıyla

$$x^* = y, \quad v^* = -u$$

$$x^* = y, \quad v^* = u$$

$$x^* = x, \quad v^* = v, \quad u^* = u, \quad y^* = y$$

ifadelerini sağlarlar. $SU(2)$, $SU(1,1)$ ve $SL(2, \mathbb{R})$ ya reel gruplardır yada $SL(2, \mathbb{C})$ kompleks grubunun reel formlarıdır. $SL(2, \mathbb{C})$ grubu için tanjant uzayını oluşturalım. Bunun için e ' den geçen üç tane doğru seçelim ve bu doğruların tanjant vektörleri

$$\varepsilon_+ = \frac{d\eta_+(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.74a)$$

$$\varepsilon_- = \frac{d\eta_-(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.74b)$$

$$H = \frac{dk(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.74c)$$

olarak bulunur ve bu vektörler tanjant uzayının normal formları olarak adlandırılır (Akhmedow, 1998).

(3.74) denklemlerinden B fonksiyonunun

$$(i) B = 0$$

$$(ii) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$(iii) B = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

değerlerinden birini alabileceği görülmektedir. (iii) durumunda κ , t bir değişken olmak üzere, t nin bir fonksiyonudur. B fonksiyonu SU(2), SU(1,1) yada SL(2,R) 'nin Lie cebri değerli olduğunda κ sıfırdan farklıdır ve ya reel yada kompleks bir sayıdır. B'nin (ii) durumunda KdV denklemi, (iii) durumunda lineer olmayan Schrödinger denklemi elde edilir. Şimdi B'nin üç formu için elde edilecek denklemleri inceleyelim.

(i) durumu : Self-Dual Yang-Mills denklemlerini (ii) durumunda çözmek için A ve C potansiyelleri matris formda

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

olarak tanımlanır. SL(2,C) Lie grubun özelliğinden $\dot{I}zA = \dot{I}zB = \dot{I}zC = 0$ olduğundan A ve C matrislerinin elemanları için $d = -a$, $h = -e$ elde edilir. A, B ve C matrislerinin (3.69b) denkleminde yerine yazılarak

$$\partial_x A = 0$$

bulunur ve A matrisinin elemanları x'ten bağımsızdır. A, B ve C matrisleri (3.69c) denkleminde yerine yazılarak

$$2\partial_t A - \partial_x C + 2[A, C] = 0$$

bulunur. Bu ifadeden elde edilen denklemler

$$e_x - 2a_t - 2(bg - fc) = 0$$

$$f_x - 2b_t - 4(af - be) = 0$$

$$g_x - 2c_t - 4(ce - ag) = 0$$

olarak yazılabilir.

(ii) durumu : Self-Dual Yang-Mills denklemlerini (ii) durumunda çözmek için A ve C potansiyelleri matris formda

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & -e \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

olarak alınır. A, B ve C matrislerinin (3.69b) denkleminde yerine yazılarak

$$2 \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & -a_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & 0 \\ -2e & -f \end{pmatrix} = 0$$

bulunur. Bu ifadeden elde edilen denklemler

$$2a_x + f = 0 \quad (3.78a)$$

$$b_x = 0 \quad (3.78b)$$

$$c_x - e = 0 \quad (3.78c)$$

olarak yazılır. Yine aynı şekilde A, B ve C matrisleri (3.69c) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{pmatrix} e_x & f_x \\ g_x & -e_x \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & -a_t \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} bg - fc & 2(af - be) \\ 2(ce - ag) & cf - gb \end{pmatrix} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten

$$e_x - 2a_t - 2(bg - fc) = 0 \quad (3.79a)$$

$$f_x - 2b_t - 4(af - be) = 0 \quad (3.79b)$$

$$g_x - 2c_t - 4(ce - ag) = 0 \quad (3.79c)$$

denklemleri bulunur. Elde edilen denklem takımlarının çözümünü bulmak için bazı kabuller yapmamız gerekmektedir. (3.69a) denklemi x 'ten bağımsızdır ve değeri bir sabit olarak $b = \frac{1}{2}$ alınabilir, bu durumda (3.79b) denkleminde yerine yazılarak $c = a_x - 2a^2$ ifadesi elde

edilir. $a = \frac{q}{2}$ seçildiği takdirde $c = \frac{q_x - q^2}{2}$, $e = \left(\frac{q_x - q^2}{2} \right)_x$ ve $f = -q_x$ olarak bulunur.

Yine (3.79a) denkleminde bilinenler yerine yazılarak

$$\left(\frac{q_x - q^2}{2} \right)_{xx} - q_t - g - q_x^2 + q^2 q_x = 0$$

olduğu görülür ve denklemde düzenleme yapılarak g için

$$g = \frac{1}{2}(q_{xxx} - 4q_x^2 - 2qq_{xx} + 2q^2 q_x - 2q_t) \quad (3.80)$$

elde edilir. Bulunan g ifadesi zamana bağlı bir türev içermemelidir, çünkü potansiyel ifadesinde zamana bağlı türev bulunmamalıdır. Zamana bağlı türevden kurtulmak için (3.79c) denkleminde bilinenler yerine yazılarak

$$(q_{xxx} - 6q_x^2 - 4q_t)_x = 0 \quad (3.81)$$

bulunur ve parantez içi sıfıra eşitlenerek q için

$$4q_t = q_{xxx} - 6q_x^2 \quad (3.81a)$$

elde edilir. (3.81a) denklemi (3.80) denkleminde yerine yazılarak

$$g = \frac{1}{4}(q_{xxx} - 2q_x^2 - 4qq_{xx} + 4q^2 q_x) \quad (3.82)$$

bulunur. Bu işlemlerden sonra A ve C matrisleri

$$2A = \begin{pmatrix} q & 1 \\ q_x - q^2 & -q \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

$$2C = \begin{pmatrix} (q_x - q^2)_x & -2q_x \\ 2g & -(q_x - q^2)_x \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

olarak elde edilir. (3.81) denklemi açık olarak yazıldığında

$$4q_{tx} = q_{xxxx} - 12q_x q_{xx}$$

halini alır ve $u = -q_x = \dot{I}z(BC)$ tanımından yararlanarak (Mason ve Sparling. 1989)

$$4u_t = u_{xxx} + 12uu_x \quad (3.85)$$

KdV denklemi elde edilir.

(iii) durumu : Self-Dual Yang-Mills denklemlerinin (iii) durumu çözümlerini bulmak için A ve C matrislerini

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & -e \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

olarak alınır. A, B ve C matrisleri (3.69b) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & -a_x \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{pmatrix} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bulunan eşitlikten elde edilen denklemler

$$a_x = 0 \quad (3.86a)$$

$$b_x - \kappa f = 0 \quad (3.86b)$$

$$c_x + \kappa g = 0 \quad (3.86c)$$

olarak yazılabilir. (3.69c) denkleminde elde edilen sonuçlar (iii) durumu için de (3.79)

denklemleriyle aynıdır. (3.86) denklemlerinde $a = 0$, $b = \frac{\psi}{2}$ ve $c = \frac{\bar{\psi}}{2}$ seçilirse, (3.86b)

denkleminde $f = \frac{\psi_x}{2\kappa}$ ve (3.86c) denkleminde $g = \frac{\bar{\psi}_x}{2\kappa}$ olarak bulunur. (3.79a)

denkleminde bilinenler yerine yazılarak

$$\left(e + \frac{2}{\kappa} bc \right)_x = 0$$

bulunur ve parantez içi sıfıra eşitlenerek

$$e + \frac{2}{\kappa} bc = 0 \quad (3.87)$$

elde edilir. (3.87) denkleminde b ve c değerleri yerine yazılarak $e = \frac{\bar{\psi}\psi}{2\kappa}$ olarak bulunur. Bu işlemlerden sonra A ve C matrisleri

$$2\kappa A = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

$$2\kappa C = \begin{pmatrix} \bar{\psi}\bar{\psi} & \psi_x \\ \bar{\psi}_x & -\bar{\psi}\psi \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

olarak elde edilir. (3.79b) denkleminde bilinenler yerine yazılarak

$$\frac{\psi_{xx}}{2\kappa} - \psi_t + \psi \frac{\bar{\psi}\bar{\psi}}{\kappa} = 0$$

olur ve denklemde düzenleme yapılarak ψ için

$$2\kappa\psi_t = \psi_{xx} + 2\psi^2\bar{\psi} \quad (3.90a)$$

elde edilir. (3.79c) denkleminde bilinenler yerine yazılarak

$$\frac{\bar{\psi}_{xx}}{2\kappa} + \bar{\psi}_t + \bar{\psi} \frac{\bar{\psi}\psi}{\kappa} = 0$$

olur ve denklemde düzenleme yapılarak $\bar{\psi}$ için

$$2\kappa\bar{\psi}_t = -\bar{\psi}_{xx} - 2\bar{\psi}^2\psi \quad (3.90b)$$

elde edilir. Burada $2\kappa = 1$ ve $-i$ değerlerini alabileceği görülmektedir.

A , B ve C fonksiyonları $SL(2, \mathbb{R})$ 'nin Lie değerli olduğunda bütün değerler reel alınır. $2\kappa = 1$ ve (3.90) denkleminde $p = \psi$ ve $r = -\bar{\psi}$ reel değerleri için

$$p_t = p_{xx} - 2p^2r \quad (3.91a)$$

ve

$$r_t = -r_{xx} + 2r^2p \quad (3.91b)$$

şeklinde bir denklem çifti halini alır. A, B ve C SU(2) Lie değerli olduğunda $2\kappa = -i$ alınabilir ve $\bar{\psi}$ ifadesi ψ 'nin negatif kompleks eşleniğidir. (3.90) denkleminde

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi \quad (3.92)$$

elde edilir ve denklem (3.92) bilinmeyen bir ψ için lineer olmayan Schrödinger denklemdir. SU(1,1) durumu için $2\kappa = -i$ değerini alır ve $\bar{\psi}$ ifadesi ψ 'nin kompleks eşleniğidir. (3.90) denkleminde

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi \quad (3.93)$$

elde edilir ve denklem (3.93) bilinmeyen bir ψ için lineer olmayan Schrödinger denklemdir.



4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada $(1+1)$ boyutta lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözülebilirliği Fourier dönüşümünün lineer olmayan denklemlere genellemesi olan ters saçılma teorisine temel olan yöntemlerin incelenmesi ile başlamıştır. Bu yöntemlerin başlangıç noktası olan lineer denklem sisteminin matris denklemlerine veya grup değerli fonksiyonların yer aldığı denklemlere genelleştirilmektedir. Bu çalışmada özellikle Lax metodu ile bu denklemin matris denklemlerine genellemesi olan AKNS denklemleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu yöntemler çerçevesinde KdV, mKdV ve lineer olmayan Schrödinger denklemlerinin çözülebilir sistemler olduğu gösterilmiştir.

Son yıllarda çözülebilirlik kriterlerinden birisinin de SDYM denklemlerinden elde edilebileceği gösterilmiştir. SDYM denklemlerinin incelenmesinden önce abelian ayar teorisi göz önüne alınmıştır. Fizikteki rolü ve özellikleri incelenerek abelian ayar teorisinin elektromagnetik teorisinin kovaryant formülasyonu olduğu gösterilmiştir. Daha sonra da bu teorisinin abelian olmayan hale genelleşmesi yapılarak elde edilen Yang-Mills teorisi olarak da adlandırılan abelian olmayan ayar teorisine bir giriş yapılmıştır. Nasıl abelian teorisinin vektör alanları elektromagnetik etkileşmelerin ara bozonu olan fotonları temsil ediyorsa abelian olmayan teorisinin vektör alanları kuvvetli çekirdek etkileşmelerinin ara bozonları gluonlar temsil etmektedir. Abelian teoride dual dönüşümler elektrik alanları magnetik alana, magnetik alanların elektrik alana dönüşmesini sağlamaktadır. Benzer şekilde abelian olmayan teoride elektrik ve magnetik alana şeklen tekabül eden büyüklükler arasında bir dönüşüm self-dualite dönüşümleri ile elde edilmektedir.

3.bölümde self-dualite şartı yazılarak bileşenler cinsinden self-dualite denklemleri yazılmıştır. Bu denklemlerin tamamen çözülebilirlik kriteri ile ilişkili olabileceği gösterilmiştir. Bu amaçla verilen iki lineer denklemin tamamen çözülebilirlik şartı olarak SDYM denklemleri elde edilmiştir. İki boyuta, boyut indirgemesi yapılarak bilinen çözülebilir sistemlerin çözülebilirliği bu yöntem aracılığıyla elde edilmiştir. Yeni yöntemin zengin yapısı kullanılarak bilinen lineer olmayan denklemlerin çözülebilirliğini göstermek mümkün olacaktır. Ayrıca bu yöntemle yeni çözülebilir sistemler elde edebiliriz. Özellikle bozonik sistemlerin süper ve süper simetrik çözülebilir genelleştirmeleri self-dualite şartından elde edebiliriz. Bir başka kullanım alanı da $(2+1)$ -boyut veya $(3+1)$ -boyutta tamamen çözülebilirliğin elde edilmesidir. Daha soyut olarak kompleks uzaylar üzerinde çalışarak

$$F = -*F$$

şeklindeki anti-self dualite denkleminin incelenmesi ilginç araştırma problemleri ortaya koymaktadır. Bu çalışmada bu tür çalışmalara hazırlık olabilecek bir inceleme yapılmıştır.



KAYNAKLAR

Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A. C. ve Segur H., (1973) , “Nonlinear evolution Equations of Physical Significance”, Phys. Rev. Lett., 31, 125-127.

Ablowitz M.J. ve Clarkson P.A., (1991), Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Invers Scattering, Cambridge university press, Cambridge.

Ablowitz M.J., Chakravarty S., Takhtajan L.A., (1993), “A Self-Dual Yang-Mills Hierarchy and its Reductions to Integrable Systems in 1+1 and 2+1 Dimention”, Commun. Math. Phys. 158: 289-314.

Akhmedow G., (1998), Representations of Quantum Groups and Their Aplications: Spatial Case of $SU_q(2)$ and $E_q(2)$, Boğaziçi University.

Das A., (1989), Integrable Models, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol.30, New York.

Itzykson C. ve Zuber J.B. , (1980), Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York.

Lax P.D., (1968), “Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves”, Commun. Pure Appl. Math., 21:467-490.

Mason L.J. ve Sparling G.A.J., (1989), “Nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries are Reductions of Self-dual Yang-Mills” , Physisc Letters A , Vol. 137, 29-33.

Mason L.J. ve Woodhouse J., (1996), Integrability, Self-Duality and Twistor Theory, Oxford Clarendon press, Oxford.

Olver P.J., (1986), Aplications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York.

Ryder L.H., (1985), Quantum Field Theory, Cambridge university press, Cambridge.

Ward R.S., (1985), “İntegrable and Slvable System and Relations Among Them”, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A315: 351-457.

Yang C. N. ve Mills R.L., (1954) , “Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance”, Phys. Rev., Vol. 96, 191-195.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 29.07.1977

Doğum yeri Kayseri

Lise 1991-1994 Kayseri Sümer Lisesi

Lisans 1994-1998 Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Fizik BölümüYüksek Lisans 1999-2000 Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı2000-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı,**Görev Aldığı Kurumlar:**1999-2000 Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Araştırma Görevlisi2000-... Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Araştırma Görevlisi, (Görevlendirme)