

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN SİMETRİ İNDİRGEMESİ VE Bİ-
HAMILTON YAPISI**

HAKAN SERT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI
FİZİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. DEVRİM YAZICI**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN SİMETRİ İNDİRGEMESİ VE Bİ-
HAMILTON YAPISI**

Hakan SERT tarafından hazırlanan tez çalışması 15.01.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Devrim YAZICI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Devrim YAZICI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Oya OĞUZ
Haliç Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşma aşamasında ve sonrasında her türlü desteği sağlayan, daima yanımda olan aileme, anneanneme ve tüm yakınlarıma; yoğun temposuna rağmen zamanını ve emeğini sabırla harcamaktan çekinmeyen tez danışmanım Doç. Dr. Devrim Yazıcı'ya sonsuz teşekkürler.

Kasım, 2013

Hakan SERT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	4
BÖLÜM 2	
HAMILTON SİSTEMLER VE DIRAC PARANTEZLERİ	5
2.1 Standart Hamilton Metod	5
2.2 Poisson Parantezleri ve Hamilton Denklemleri	7
2.3 Hıza Bağımlı Lagrange Fonksiyonları	9
2.4 Hamilton Fonksiyonunun Genelleştirilmesi	12
2.5 Dirac Parantezleri	15
2.6 Hıza Bağımlı Lagrange Fonksiyonlarında Dirac Bağ Koşulu Analizi	17
2.7 Bi-Hamilton Yapı	20
BÖLÜM 3	
ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN Bİ-HAMILTON YAPISI	25
3.1 Asimetrik Heavenly Denklemi	25
3.2 Asimetrik Heavenly Denkleminin bi-Hamilton Yapısı	26
3.3 Tekrarlama Operatörü ve Lax Çifti	28

3.4	İkinci Hamilton Yapı ve Hamilton Fonksiyonu	30
3.5	Asimetrik Heavenly Denkleminde Simetriler ve Korunum Yasaları.....	31
BÖLÜM 4		
ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN SİMETRİ İNDİRGEMESİ VE İNDİRGENMİŞ SİSTEMİN Bİ-HAMILTON YAPISI		35
4.1	Asimetrik Heavenly Denkleminin Simetri İndirgemesi	35
4.2	İndirgenmiş Sistemin Dirac Bağ Analizi, Simplektik ve Hamilton Yapısı ...	37
4.3	İndirgenmiş Sistemde Tekrarlama Operatörü ve Lax Çifti	41
4.4	Hamilton Fonksiyonu ve İkinci Hamilton Yapı	43
4.5	Jacobi Özdeşliği	44
4.6	Simetriler ve Hareket İntegralleri	49
BÖLÜM 5		
SONUÇLAR VE ÖNERİLER		51
KAYNAKLAR.....		54
ÖZGEÇMİŞ.....		56

SİMGE LİSTESİ

δ	Varyasyon
L	Lagrange fonksiyonu
ϕ_k	Bağ koşulu
J_0	Birinci Hamilton operatörü
J_1	İkinci Hamilton operatörü
H_0	İkinci Hamilton yoğunluğu
H_1	Birinci Hamilton yoğunluğu
K	Simplektik matris
$\frac{\delta}{\delta u}$	Euler türevi
R	Tekrarlama operatörü
$\hat{A}$	Frechet türevi
prV	Prolongation işlemi
Θ	bi-Vektör
$\wedge$	Dış çarpım

KISALTMA LİSTESİ

IST	Inverse scattering theory(ters saçılma teorisi)
KdV	Korte-de Vries denklemi

ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN SİMETRİ İNDİRGEMESİ VE Bİ-HAMİLTON YAPISI

Hakan Sert

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Devrim YAZICI

Bu çalışmada son günlerde gelişme gösteren 3+1-boyutlu integre edilebilir bi-Hamilton sistemler çalışılmıştır. Genel olarak bir bağımlı değişken ile x , y , z ve t şeklinde dört bağımsız değişkenden oluşan ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler ele alınacaktır. Ortak simetri içeren, lineer olmayan, ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasından elde edilen kanonik denklemlerden biri olan asimetrik heavenly denklemi, bu denklemlere bir örnektir. Bu denklemin bir simetri indirgemesinden elde edilen 2+1-boyutlu yeni denklemin çoklu-Hamilton yapıya sahip integre edilebilir bir sistem verdiği gösterilmiştir. İndirgenmiş yeni 2+1 boyutlu sistem iki bileşenli formda yazıldığında bi-Hamilton yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Birinci Hamilton fonksiyonu ve simplektik yapıyı elde etmek için Dirac'ın bağ teorisi iki-bilişenli sistem için tanımlanan yeni Lagrange fonksiyonuna uygulanarak elde edilmiştir. Sistemin Frechet türevini elde etmek için sadece bağımlı değişkenleri içeren Lie grup dönüşümüne integre edilebilirlik şartı (compatibility) uygulanmıştır. Tekrarlama operatörünün ve Frechet türevinin komutatörünün sistemi yeniden oluşturduğu için Olver-Ibragimov-Shabat tipi Lax çifti oluşturdukları gösterilmiştir. Daha sonra tekrarlama operatörü inşa edilmiş ve sistemin ikinci Hamilton yapısı tekrarlama operatörünün birinci Hamilton operatörüne uygulanmasıyla elde edilmiştir. Son olarak Hamilton operatörleri için Jacobi özdeşliği P. Olver'in yöntemi kullanılarak kanıtlanmıştır. Böylece Magri teoremine göre indirgenmiş 2+1-boyutlu yeni sistemin tamamen integre edilebilir olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İntegre edilebilirlik, asimetrik heavenly denklemi, Hamilton sistem, Dirac bağ analizi, bi-Hamilton yapı.

SYMMETRY REDUCTION OF ASYMMETRIC HEAVENLY EQUATION AND BI-HAMILTON STRUCTURE

Hakan Sert

Physics Department

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Devrim YAZICI

In this work we study 3+1-dimensional bi-Hamiltonian integrable systems which are developed considerably in recent years. In general we are interested in nonlinear second order differential equations with one dependent variable and four independent variables x , y , z and t . One of the examples of these equations is asymmetric heavenly equation, obtained as one of the canonical equations in the classification of nonlinear second order partial diferantial equations that possess partner symmetries. We show that one symmetry reduction of this equation yields a new 2+1-dimensional multi-Hamiltonian intagrable system. It is shown that reduced 2+1-dimensional system set in a two-component form admits a bi-Hamiltonian structure. For a two-component system a new Lagrangian is introduced and Dirac's constraint theory is applied to obtain the symplectic and first Hamiltonian structure. In order to get Frechet derivative of the system the compatibility condition is applied to the Lie group transformation which is only considered for a dependent variable. It is also shown that the commutator of the recursion operator and Frechet derivative reproduce the system and therefore form a Lax pair Olver-Ibragimov-Shabat type. Then the Recursion operator is constructed and the second Hamiltonian structure for this system is obtained by applying the recursion operator on the first Hamiltonian operator. Finally Jacobi identity for Hamiltonian structure is proven by using P. Olver's

method. Therefore we conclude that reduced new 2+1-dimensional system is completely integrable by Margi's theorem.

Keywords: Integrability, asymmetric heavenly equation, Hamiltonian system, Dirac constraint analysis, bi-Hamiltonian structure.

1.1 Literatür Özeti

İntegre edilebilir veya tam olarak çözülebilen denklemler matematiksel fizikte oldukça önemlidir. "İntegre edilebilir" teriminin geniş kapsamlı bir tanımını yapmak zordur. Daha doğrusu bu terim, integre edilebilir sistemlerin bazı alanlarda "tam olarak çözülebilen" ve tüm başlangıç durumları için düzenli çözümleri ortaya koyabildiğine dair inanışlara tekabül eden çeşitli sezgisel kavramlara çağrışım yapar. Karşıt olarak "integre edilemez" terimi genellikle sistem tamamen çözülemez veya çözümü düzensiz bir biçimde davranabilir demektir [1].

Doğadaki birçok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler içerir. Bu denklemler, gerçek amacı, klasik veya kuantum sistemleri tanımlayan teorik fiziğin matematiksel çekirdeğini oluşturur. Kinetik gaz teorisinde klasik olarak etkileşmeyen parçacık sistemleri, kolayca integre edilebilir sistemlere örnek olarak verilebilir. Kuantum elektrodinamiğin temel amacı, etkileşmeyen elektromanyetik ve elektron pozitron alanları gibi düzensiz kuantum durumları için integre edilebilir bir teori geliştirmektir. Diğer iyi bilinen bir örnek de katıhal fiziğinde birbirlerine lineer elastik kuvvetlerle bağlı atomların serbest salınımlarını tanımlayan lineer denklemlerdir. Öte yandan lineer olmayan kuvvetler bu sistem için lineer olmayan diferansiyel denklemler doğurur.

Lineer olmayan integre edilebilir sistemler 18. yüzyılın başlarında keşfedilmiştir. O zamanlar çok az problem bilinmekle birlikte çözümlerin karakteristiği tam olarak

anlaşılamamıştır. Fakat günümüzde bu denklemlerin bilimin bütün alanlarının gelişmesinde önemli katkıları olduğu bilinmektedir.

19. yüzyıl boyunca matematikçiler yeni lineer olmayan integre edilebilir sistemler bulmayı denemelerine rağmen uğraşların çoğu boşa gitmiştir. Jules Henri Poincaré (1854 –1912)’nin çalışmaları dinamik sistemler için integre edilebilir olanların istisna olduğunu göstererek bu çabayı sonlandırmıştır. Her zaman küçük düzensizlikler genellikle integre edilebilirliği engeller. Poincaré’nin 1880’lerde elde ettiği sonuçlardan sonra, yeni integre edilebilir sistem arayışları dramatik biçimde azalmış ve 20. yüzyılın ikinci yarısına kadar geçen uzun bir süre boyunca sessizliğini sürdürmüştür.

Bu durum 1967’de C.S.Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal ve R.M.Miura tarafından geliştirilen çok güçlü bir metod olan “Ters saçılma teorisi”(Inverse scattering theory veya IST) ile çarpıcı bir biçimde değişmiştir. Yayınladıkları makalede ters saçılma teorisi meşhur Korteweg-de Vries(KdV) denkleminde uygulanmıştır.

Teori daha önceleri iyi bilinen, lineer olmayan Schrödinger ve Sine-Gordon denklemleri gibi önemli denklemlere de uygulanmıştır. Bütün bu denklemler sonsuz sayıda korunan büyüklüğe sahip Hamilton sistemlerdir. Ters saçılma teorisinin gelişme aşamasında klasik anlamda tamamen integre edilebilir sistemlerin hızlı azalan veya periyodik durumları anlatan sistemlerde ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durum 1970’li yılların başlarında “soliton”un keşfine sebep olmuştur. Soliton, sabit hızla hareket eden atma şeklindeki bir dalgayı tanımlar. Soliton dalgalarının en önemli özelliği, çarpışan iki soliton dalgasının sadece çarpışma anında değişime uğraması ve sonrasında enerjisinde ve genliğinde herhangi bir değişiklik olmadan yoluna devam etmesidir. Bu nedenle bu tür çözümlere sahip denklemlere “soliton denklemler” de denir[2].

Yukarıda bahsedilen üç denklem, sonsuz sayıda serbestlik derecesi olan lineer olmayan teorik sürekli sistemlere ilk örnekleri oluşturur. Günümüzde bu tür denklemlerden onlarca denklem olup her geçen gün sayıları artmaktadır. Literatürde bu konuda yazılmış çok sayıda makale bulmak mümkündür. Söz konusu denklemler bir uzay ve bir zaman boyutunda olup 1+1-boyutlu, yani iki boyutlu denklemlere karşılık gelmektedir. Buna karşın 2+1 ve 3+1-boyutta integre edilebilir denklemler yok denecek kadar azdır.

Kadomtsev-Petviashvili, Davey-Stewartson ve Ishimori denklemleri 2+1, Young-Mills denklemleri de 3+1-boyutlu denklemlere örnek olarak gösterilebilir.

Geçtiğimiz on yılda Y.Nutku ve arkadaşlarının başlattığı çalışmalarda, 3+1-boyutta integre edilebilir sistemler elde edilmiştir[3]. “Heavenly” ailesi denilen bu denklemlerin integre edilebilirliği, denklemlerin bi-Hamilton yapıya sahip oldukları gösterilerek elde edilmiştir. Bu denklemlerin önemi, bağımlı değişkeni temsil eden skaler alanın, Einstein alan denklemlerini sağlayan, (anti)-self-dual Ricci-düz uzay metriğini oluşturmasıdır. Bu yöntem (anti)-self-dual kütle çekime farklı bir bakış açısı getirmesi açısından önemlidir.

Ayrıca Plebanski second heavenly denkleminin simetrilerinin kullanılmasıyla, 2+1-boyuta indirgenmiş ve bu suretle de tamamen integre edilebilir bir sistem olduğu gösterilmiştir [4].

Sheftel ve Malykh, ortak simetri içeren ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin, genel bir sınıflandırmasını elde etmişlerdir [5]. Genel durumdan yapılan kanonik dönüşümlerle, bilinen birinci ve ikinci Plebanski denklemleri ve bunlara ek olarak Mixed heavenly ve Asymmetric heavenly olarak adlandırdıkları 3+1-boyutlu denklemler türetilmiştir. Mixed heavenly denkleminin, Husain denklemiyle bağlantılı olduğu Legendre dönüşümleri ile görülmüştür. Her üç denklemin de Magri teoremine göre tamamen integre edilebilir bi-Hamilton sistemler olduğu gösterilmiştir [6].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen 3+1-boyutlu integre edilebilir asimmetrik heavenly denkleminin Magri teoremine göre integre edilebilirliği ve simetri indirgemesi incelenmiştir. Bölüm 1’de integre edilebilir sistemlerin tarihsel gelişimi kısaca özetlenmiştir. Bölüm 2’de Hamilton sistemler, Dirac bağ analizi ve Magri teoremine göre bi-Hamilton yapı ele alınmıştır. Bölüm 3’te asimmetrik heavenly denkleminin bi-Hamilton yapısı ayrıntılı olarak incelenmiş ve integre edilebilir bir sistem olduğu gösterilmiştir.

1.3 Hipotez

İntegre edilebilir bir sistem olduğu görülen asimetric heavenly sisteminden, Lie nokta simetrileri kullanarak 2+1-boyutlu yeni bi-Hamilton integre edilebilir bir sistem elde edilmiş ve indirgenmiş yeni sistemin de Magri teoremine göre integre edilebilir bir sistem olduğu 4. Bölüm’de gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

HAMILTON SİSTEMLER VE DIRAC PARANTEZLERİ

Hamilton mekaniği İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton(1805-1865) tarafından geliştirilmiştir. Hamilton mekaniği, kolay integre edilebilirlik yöntemlerinin geliştirilmesine açık olanaklar sunmasından ötürü integre edilebilir sistemler üzerine yapılan çalışmalarda çok önemli bir araçtır.

2.1 Standart Hamilton Metod

Hamilton, 1834-1835'teki yayınlarıyla mekanik sistemlerin dinamik prensiplerini ortaya koymuştur. Bu prensibe göre verilen bir zaman aralığında dinamik bir sistemin, bir noktadan diğer bir noktaya hareket edeceği tüm olası yollardan gerçek yol, kinetik enerji T ve potansiyel enerji V 'nin farkının zamana göre integralinin(eylem integrali) ekstremumu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2.1)$$

ile elde edilir. Ekstremler minimum veya maksimum olabilir fakat dinamik problemlerde çoğunlukla minimum koşul oluşmaktadır. Burada $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ kinetik enerji ve $V(q_i, t)$ potansiyel enerjisi korunumlu kuvvetlerden türetilmekte ise Lagrange fonksiyonu

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t) \quad (2.2)$$

şeklinde hesaplanır. (2.1) eylem integralinden

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (2.3)$$

ile verilen Euler-Lagrange denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi Lagrange fonksiyonu konum ve hız uzayında, konfigürasyonel uzayda tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş konum ve momentumun faz uzayına dönüşümü sonucu elde edilen formalizme Hamilton formalizmi adı verilir. Hamilton fonksiyonu, n tane genelleştirilmiş koordinat q_j ve n tane genelleştirilmiş momentum p_j 'den oluşan $(j = 1, \dots, n)$ $2n$ boyutlu faz uzayında tanımlanır. Fiziksel sistemlerin fiziksel uzaydaki her durumu faz uzayında bir faz noktası ve her hareketi de faz uzayında bir faz eğrisi belirler.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.4)$$

eşlenik(konjüge) momentum olmak üzere Hamilton fonksiyonu

$$H(q_j, p_j, t) = \sum \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. (2.5) denkleminin sağ ve sol tarafının tam diferansiyeli alınarak

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (2.6a)$$

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (2.6b)$$

Hamilton kanonik denklemleri bulunur. (2.6) denklem setleri matris gösteriminde

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

sütun matris olmak üzere

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial q_i \\ \partial H / \partial p_i \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

veya

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

anti-simetrik matris olmak üzere (2.9) denklemi simplektik yapıyı temsil eder[7].

2.2 Poisson Parantezleri ve Hamilton Denklemleri

q ve p dinamik değişkenlere bağlı $f(q, p)$ ve $g(q, p)$ gibi iki fonksiyonun Poisson parantezleri

$$\{f(q, p), g(q, p)\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \quad (2.11)$$

ile tanımlanır. Poisson parantezlerinin başlıca özellikleri a,b,c,d sabitler olmak üzere

i) bi-lineerlik özelliği:

$$\{af_1 + bg_1, cf_2 + dg_2\} = ac\{f_1, f_2\} + ad\{f_1, g_2\} + bc\{g_1, f_2\} + bd\{g_1, g_2\} \quad (2.12a)$$

ii) anti-simetri özelliği:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (2.12b)$$

iii) çarpım kuralı:

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\} \quad (2.12c)$$

iv) Jacobi özdeşliği:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \quad (2.12d)$$

şeklinde verilir.

Bir denklem sisteminin Hamilton sistem olabilmesi için, denklemin dinamik değişkenlerinin Hamilton denklemleri şeklinde yazılabilmesi gerekir. Eğer dinamik değişkenlerin zamana göre değişimleri, dinamik değişkenler ile Hamilton fonksiyonunun Poisson parantezleri şeklinde yazılabilirse bu sistem Hamilton sistem olur.

$u = u(q_i, p_i, t)$ şeklinde q_i , p_i ve t 'nin bir fonksiyonu olarak tanımlansın. Burada q_i ve p_i terimleri fonksiyonun dinamik değişkenleri; t ise zamanı ifade eder. İfadenin zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial u}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.13)$$

olur. Hamilton hareket denklemleri olan (2.6) denklemleri $\dot{q}_i$ ve $\dot{p}_i$ terimlerinde yerlerine yazılırsa (2.13) denklemi

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.14)$$

şeklini alır. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim, Hamilton ile u fonksiyonunun Poisson parantezidir ve (2.14) denklemi

$$\dot{u} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. Mekanik bir sistem için verilmiş kanonik koordinat ve momentumlar olan q_i ve p_i terimlerinin zaman içindeki değişimleri Hamilton fonksiyonu ile,

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.16a)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.16b)$$

şeklinde gösterilir ve bu gösterimi sağlayan denklem sistemleri Hamilton sistem olarak adlandırılır. (2.9) ile verilen simplektik yapı; Poisson parantezleri ile

$$\dot{\eta} = \{\eta, H\} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (2.17)$$

şeklinde verilir. Eğer $u = u(q_i, p_i, t)$ fonksiyonu için

$$\dot{u} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

ise u fonksiyonu burada bir hareket sabiti olur. Eğer u fonksiyonu zamana açık olarak bağlı değil ise

$$\{u, H\} = 0 \quad (2.19)$$

olur ve u , fiziksel olarak korunan bir büyüklüğü temsil eder[7].

2.3 Hıza Bağımlı Lagrange Fonksiyonları

Lagrange formalizminden Hamilton formalizmine geçildiğinde, bağımsız değişkenler olan q_j ve $\dot{q}_j$ terimleri yerine q_j ve p_j terimleri gelir. Başka bir deyişle Hamilton fonksiyonu yazıldığında koordinat ve momentum değişkenleri kullanılmak zorundadır. Hamilton fonksiyonları hız terimlerini içermez.

En genel Lagrange fonksiyonlarını kullanmak gerektiğinde, Hamilton denklemleri, Lagrange denklemleri ile aynı sonuçları vermeyebilir. Bu durum dolayısıyla genelleştirilmiş Lagrange fonksiyonlarıyla işlemler yapabilmek için Hamilton ve Poisson parantezlerinde düzeltmelere gidilmesi gerekmektedir.

Klasik Hamilton formalizmindeki bu eksikliğin net şekilde anlaşılabilmesi için ortaya çıkan sorunu hıza bağımlı bir Lagrange fonksiyonu üzerinden göstermek mantıklı olacaktır. Bu durumu aşağıda verilen basit bir örnekle inceleyelim.

xy – düzleminde, z yönündeki B_0 manyetik alanında yüklü bir parçacık ele alınsın. Bu parçacığın Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} - V(x, y) \quad (2.20)$$

ile verilir. Burada $V(x, y)$ skaleri potansiyeli, $\vec{A}$ vektörü ise $\vec{A} = \frac{B_0}{2}\hat{z} \times \hat{r} = \frac{B_0}{2}(x\hat{y} - y\hat{x})$ ifadesine karşılık gelen vektör potansiyeli temsil eder. Böylece Lagrange fonksiyonu düzenlendiğinde

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB_0}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{qB_0}{2c}V(x, y) \quad (2.21)$$

halini alır. Burada potansiyel terimi ilerideki hesaplamalar için kolaylık sağlaması açısından bir sabit ile çarpılmıştır. Hareket denklemlerini değiştirmedeği sürece Lagrange fonksiyonuna herhangi bir sabit eklenebilir. $\alpha \equiv \frac{qB_0}{2mc}$ şeklinde kısaltılırsa yüklü parçacığın hareket denklemleri Euler-Lagrange denklemleri ile

$$\ddot{x} = 2\alpha\dot{y} - \alpha \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.22a)$$

$$\ddot{y} = -2\alpha y\dot{x} - \alpha \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.22b)$$

şeklinde elde edilir. Manyetik alanın veya yükün çok yüksek ve kütlenin çok düşük olduğu limit değeri göz önüne alındığında Lagrange fonksiyonundaki klasik kinetik enerjiyi temsil eden terim ihmal edilebilir. Bunun sonucunda da Lagrange hıza bağlı kalır:

$$L = \alpha(x\dot{y} - y\dot{x}) - \alpha V(x, y) \quad (2.23)$$

şeklinde hızın karesi(kuadratik) yerine hızın birinci kuvvetine bağlı olur. Ancak Euler-Lagrange denklemleri hala geçerliliğini koruduğundan limit durumunda parçacığın hareket denklemleri

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.24a)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.24b)$$

şeklini alır. Bu hareket denklemleri birinci dereceden diferansiyel denklemler olduklarından garip gibi gözüke de Lagrange formalizmi açısından kabul edilebilirdir. Fakat bu türdeki bir Lagrange için Hamilton formalizmine geçilip hareket denklemleri bulunduğu sonuçlar şaşırtıcı bir hal alacaktır.

Eşlenik momentumlar,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\alpha y \quad (2.25a)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \alpha x \quad (2.25b)$$

olarak bulunur. Hızın karesini içeren Lagrange fonksiyonları için aynı işlem yapıldığında eşlenik momentumlar, $\dot{q}$ 'nın fonksiyonları olarak ortaya çıkar fakat bu örnek için aynı durum söz konusu değildir.

Hamilton formalizmine geçilirse, (2.5) denklemine göre Hamilton fonksiyonu

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \alpha V(x, y) \quad (2.26)$$

bulunur ve elde edilen Hamilton fonksiyonu momentum terimi içermez. Bu koşulda (2.6) Hamilton hareket denklemlerinden

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = 0 \quad (2.27a)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = 0 \quad (2.27b)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.27c)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.27d)$$

sonuçları elde edilir. Eşlenik momentumun tanımı olan (2.4) denklemi, (2.25) denklem setlerinde yerlerine koyulduğunda,

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.28a)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.28b)$$

ifadeleri bulunur. Sonuç olarak (2.24) ve (2.28) denklem setlerindeki ilk iki denklem eşit olması gerekirken birbirinden farklıdır. Bu sonuçlar altında Hamilton formalizminde bir düzeltmeye gidilmedikçe problemin üstesinden gelinemeyeceği aşıkardır. Tutarsızlığı aşmak amacıyla hangi büyüklük hesaplanacağına bağlı olarak Hamilton fonksiyonunu bazen momentumun bir fonksiyonu; bazen de koordinatın bir fonksiyonu olarak düşünmek çözüm gibi görünebilir ancak bu geçerli ve istenilen çözüm metodu olamaz. Fakat çözüme ulaşmak için yol gösterici bir fikir olabilir.

Koordinat ve momentumlar birbirlerinden bağımsız değildirler. İkisinin arasında bir bağ koşulu (constraint) söz konusudur ve klasik Hamilton metod ile çözülmeye çalışılan örnek için bu durum hesaba katılmamıştır.

Bağ denklemleri (momentumun tanımı) probleme uygulandığında cevapların tutarsızlaşması aslında şaşırtıcı değildir. Bir bağ koşulu olan momentumun denklemlerde kullanılmasının çözümü tutarsız hale getirdiği görülür.

Bu durumda Hamilton formalizminde bağ koşullarının varlığı göz önüne alınıp buna uygun yeni bir formülasyon geliştirilerek klasik Hamilton yöntemde değişikliğe gidilemeli ve daha genel bir Hamilton fonksiyonu yazılmalıdır.

2.4 Hamilton Fonksiyonunun Genelleştirilmesi

Daha genel Lagrange fonksiyonları için Hamilton formalizminde değişikliğe gidilmesi gerektiği ortaya kondu. Bu kısımda Hamilton'un en genel problemlerde bile çözüm sağlaması için yapılması gereken değişiklikler tartışılacaktır.

Verilen bir Lagrange fonksiyonu için eşlenik momentumun $\dot{q}$ 'nin bir fonksiyonu olmayabileceği manyetik alandaki yüklü parçacık örneğinde görüldü. Bu durumda da koordinat ile momentum arasında $\phi(q, p) \approx 0$ şeklinde bir yapı oluşur. Buradaki " $\approx$ " yaklaşıklık sembolü zayıf eşitliği ifade etmektedir. Bunun anlamı, eşitlik sadece hareket denklemleri sağlandığında doğrudur fakat genelde doğru olmayabilir demektir. Dirac, koordinat ve momentumlar arasındaki ilişkinin bir bağ koşulu olarak ele alınması gerektiğini öne sürmüştür[8].

Konjüge momentumun tanımından elde edilen bağ koşullarına "*birincil bağ*" denir. Eğer sistemde hesaba katılan başka bağ koşulları varsa bunlar da birincil olur.

Standart Hamilton fonksiyonu $H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L$ şeklindedir. Ancak Hamilton'un sadece koordinatlar ve momentumlarla ifade edilmeyebileceği daha önce görüldü.

Bu durumda H' 'nin diferansiyeli yazılırsa,

$$dH = \sum_j d\dot{q}_j p_j + \dot{q}_j dp_j - dL = \sum_j \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \quad (2.29)$$

elde edilir. Hamilton fonksiyonu her zaman q ve p 'nin bir fonksiyonu olarak yazılmalıdır ki Hamilton denklemleri elde edilsin. Lagrange denklemleri ifadenin son teriminde yerine koyulursa

$$dH = \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j \quad (2.30)$$

elde edilir. dH aynı zamanda

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \quad (2.31)$$

ifadesine eşittir ve bu iki denklemden (2.27)' de verilen Hamilton kanonik denklemleri elde edilir. Dirac, bağ koşullarını sıfır yapacak hareket denklemlerini bulmak için ilk olarak klasik Hamilton fonksiyonu H 'yi genelleştirmiş ve yeni toplam Hamilton H_T 'yi tanımlamıştır. Yeni Hamilton fonksiyonu,

$$H_T = H + c_j \phi_j \quad (2.32)$$

ile tanımlanır. Buradaki c_j terimleri Lagrange çarpanlarına ve $\phi_j = \phi_j(q, p)$ ise bağ denklemlerine karşılık gelir. Yeni Hamilton fonksiyonunu olarak tanımlanmış (2.32) denkleminin diferansiyeli alınarak

$$dH_T = \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j + \phi_j dc_j + c_m \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \phi_m}{\partial p_j} dp_j \right) \quad (2.33)$$

veya

$$dH_T = \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} + c_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_j} \right) dq_j + \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} + c_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_j} \right) dp_j + \phi_j dc_j \quad (2.34)$$

elde edilir ve bu durumda hareket denklemleri

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} - c_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_j} \quad (2.35a)$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} + c_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_j} \quad (2.35b)$$

$$\phi_j = \phi_j \quad (2.35c)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen sonuçlar, tam olarak Lagrange yöntemi ile elde edilmiş denklemlerle aynı değildir. Bu çözümde, bağ denklemleri hareket denklemleri olarak kendisini verir. Böylece Dirac tarafından genelleştirilmiş kanonik denklemler

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} - u_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \quad (2.36a)$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} + u_k \frac{\partial \phi_k}{\partial p_j} \quad (2.36b)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada u_k terimleri, q ve p 'ye bağlı fonksiyonlar olma zorunluluğu olmayan ve belirlenmesi gereken bilinmeyenlerdir. Hareket denklemleri Poisson parantezleri cinsinden

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\} + u_k \{p_j, \phi_k\} \quad (2.37a)$$

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\} + u_k \{q_j, \phi_k\} \quad (2.37b)$$

şeklinde veya daha genel olarak

$$\dot{f} \approx \{f, H\} + u_k \{f, \phi_k\} \quad (2.38)$$

şeklinde yazılır. Daha önce belirtildiği gibi u_k fonksiyonları q ve p değişkenlerinin bir fonksiyonu olmayabileceğinden diğer büyüklüklerle Poisson parantezlerine girdiğinde düzgün bir sonuç elde edilemeyebilir. Ancak Poisson parantezleri tanımı, q ve p değişkenlerinin fonksiyonu olmayan büyüklükler için de genelleştirilerek Poisson parantezlerinin özellikleri sağlatılabilir. Hareket denklemleri belirlenirken keyfi fonksiyonlar olan u_k ifadelerinin bulunması problem çıkaracak gibi gözükebilir ancak u_k 'lerin belirlenmesinde yardımcı olacak tutarlılık koşulları da mevcuttur. Toplam Hamilton fonksiyonu

$$H_T = H + u_k \phi_k \quad (2.39)$$

olarak tanımlanırsa, daha önce de belirtildiği üzere bağ koşullarının, $\dot{\phi}_k \approx 0$ olduğu hareket denklemleri çözüm olmalıdır. Bu durumda

$$\{\phi_k, H\} + u_k \{\phi_j, \phi_k\} \approx 0 \quad (2.40)$$

olmalıdır. Bu ifadenin sağlanması sonucunda u_k 'lerin bulunacağı tutarlılık koşulları veya koordinat ve momentumlarda yeni bir bağ koşulu oluşabilir. Oluşabilecek bu bağ

koşuluna da “ikincil bağ” adı verilir. Birincil ve ikincil bağlar arasındaki ayrım, Lagrange seçimine bağlı olarak değişen yapay bir ayrımdır ve formalizmi etkilemez.

İkincil bağlar $\phi'_i \approx 0$ olarak gösterilebilir. Bu bağ koşulları da bazı keyfi katsayılarla birlikte birincil bağların eklenmiş olduğu toplam Hamilton fonksiyonuna eklenir. Benzer şekilde $\dot{\phi}'_i \approx 0$ durumları da bazı tutarlılık koşulları veya yeni bağ koşulları doğurabilir. Doğabilecek yeni bağ koşullarına da aynı tutarlılık koşulları uygulanır ve yeni bağ koşulu elde edilemeyene dek bu işleme devam edilir. Bundan sonraki gösterimlerde tüm bağ koşulları için ϕ_j ifadesi kullanılacaktır. Tek bir ϕ_j bağının olduğu durum göz önüne alınıp u_k terimlerinin bulunmasına geri dönülürse, u_k 'ler

$$\{\phi_k, H\} + u_k \{\phi_j, \phi_k\} \approx 0 \quad (2.41)$$

koşulunu sağlamalıdır. Eğer Lagrange tutarlıysa bu ifadenin bir çözümü olmalıdır. Ancak sahip olunan koşullara bağlı olarak bir veya birden fazla çözümler söz konusu olabilir. Birçok çözümün olduğu genel bir durum düşünülürse, ilk olarak özel çözüm olacak olan $u_c = u_c(q, p)$ bulunmalıdır. Bundan sonra da homojen olmayan denklemdeki tüm olası çözümler olan $u_m \{\phi_j, \phi_m\} = 0$ çözümlerine bakılıp genel çözüm de

$$u = u_c + v_a u_m \quad (2.42)$$

şeklinde bu çözümlerin lineer kombinasyonları olarak yazılmalıdır. Buradaki v_a terimleri, zamana bağlı olup tutarlılık koşulları bulunmayan keyfi fonksiyonlardır.

2.5 Dirac Parantezleri

Dirac parantezleri kuantum mekaniğinde Poisson parantezlerinin kanonik kuantizasyonu neticesinde ortaya çıkan tutarsızlıkların giderilmesi amacıyla Dirac tarafından ortaya atılmıştır[8]. Ancak Dirac parantezleri sadece kuantum mekaniğinde değil bağ koşullarının bulunduğu klasik mekanik problemlerin Hamilton çözümlerinde tutarlılık elde etmek amacıyla kullanılan çok önemli bir araçtır.

Dirac parantezlerinin tanıtılmasından önce birinci ve ikinci sınıf bağ koşullarından bahsetmek problemin ortaya çıkışı ve çözümü açısından faydalı olacaktır.

Koordinat ve momentumların fonksiyonu olan bir $f(q, p)$ fonksiyonunun tüm bağ koşullarıyla Poisson parantezleri yaklaşık sıfır oluyorsa $f(q, p)$ fonksiyonu “birinci sınıf bağ koşulu” olarak adlandırılır ve

$$\{f, \phi_j\} \approx 0 \quad (2.43)$$

şeklinde gösterilir. Burada yaklaşık sıfır olabilecek büyüklükler sadece ϕ_j bağ koşullarıdır. Bu durumda yaklaşık sıfır olan tüm büyüklükler bağ koşulları veya onların lineer kombinasyonları olmalıdırlar. Bunun sonucunda da birinci sınıf iki bağ koşulunun Poisson parantezlerinin de birinci sınıf olması gerektiği görülür.

Birinci sınıf bağ koşullarından ziyade ikinci sınıf bağ koşulları problem ile daha yakından ilintilidir. Çünkü ikinci sınıf bir bağ koşulunun tüm bağ koşullarıyla Poisson parantezleri yaklaşık sıfır vermez. En az bir bağ koşulu ile bile Poisson parantezi sıfır vermeyen bağ koşulu “ikinci sınıf bağ koşulu” olarak adlandırılır. Örnek olarak ϕ_1 ve ϕ_2 bağ koşulları için Poisson parantezi

$$\{\phi_1, \phi_2\} = c \quad (2.44)$$

şeklinde c gibi bir sabite eşitse bağ koşullarının ikinci sınıf olduğu anlamına gelir. Kuantum mekaniğine geçilerek yukarıdaki ϕ_1 ve ϕ_2 bağ koşullarına kanonik kuantizasyon yapılırsa faz uzayındaki koordinat ve momentumlarının yerlerini operatörler alır. Kuantum düzeltmeler sonucu klasik Poisson parantezlerinin sonucu $i\hbar$ ile çarpılır. $\hbar$ burada Plank sabitinin 2π ‘ye bölünmesi sonucu elde edilmiş başka bir sabittir. Böylece ϕ_1 ve ϕ_2 bağ koşullarının kuantum mekaniğindeki Poisson parantezi karşılığı

$$[\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2] = ci\hbar \quad (2.45)$$

şeklinde olur. Bağ koşullarının üzerindeki şapka sembolü bağ koşullarının operatör olduklarını göstermektedir.

Kanonik kuantizasyon sonucunda (2.45) eşitliğinin ortaya çıktığı gösterildi ancak diğer taraftan $\hat{\phi}_1$ ve $\hat{\phi}_2$ bağlarının fiziksel durumlarda da sıfır olması gerekir. Fakat sonuç görüldüğü gibi sıfır değildir.

Bu sonuçlar, sistemin bağ koşullarına karşılık gelen Poisson parantezlerinde bir genelleştirilmeye gidilmesi gerektiğini ve tutarlı kuantizasyon prosedürleri ortaya koyulması gerekliliğini ortaya koyar. Poisson parantezlerinin genelleştirilmiş ifadesi (2.12) denklem setlerinde gösterilen Poisson parantezlerinin tüm özelliklerini sağlamalıdır.

Eğer $\tilde{\phi}_a$, ikinci sınıf bir bağ koşulu

$$M_{ab} = \{\tilde{\phi}_a, \tilde{\phi}_b\}_{PP} \quad (2.46)$$

şeklinde simplektik matris tanımlanırsa faz uzayında f ve g fonksiyonları için Dirac tarafından tanımlanan

$$\{f, g\}_{DP} = \{f, g\}_{PP} - \sum \{f, \tilde{\phi}_a\}_{PP} M_{ab}^{-1} \{\tilde{\phi}_b, g\}_{PP} \quad (2.47)$$

Dirac parantezleri ile verilir. Burada DP alt indisleri Dirac parantezlerini; PP ise Poisson parantezini temsil eder. M_{ab}^{-1} , M matrisinin tersidir ve Dirac M matrisinin her zaman tersinin olabileceği kanıtlamıştır[8].

Artık manyetik alandaki parçacık örneğine yeni bilgiler ışığında geri dönülerek Lagrange ve Hamilton yöntemlerinde oluşan tutarsızlığa tekrardan göz atılabilir.

2.6 Hıza Bağımlı Lagrange fonksiyonlarında Dirac Bağ Koşulları Analizi

Dirac parantezlerinin tanımlanmasıyla birlikte hıza bağlı Lagrange fonksiyonlarında ortaya çıkan problemin üstesinden gelinip gelinmediğinin anlaşılması için manyetik alandaki yüklü parçacık örneğine geri dönülüp Dirac parantezleri yönteminin sınanması yerinde olacaktır.

xy – düzlemindeki yüklü parçacığa z – ekseni yönündeki manyetik alanın etkisi sonucunda elde edilen Hamilton

$$H = \alpha V(x, y) \quad (2.48)$$

şeklinde idi ve konjüge momentumlar da

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\alpha y \quad (2.49)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \alpha x \quad (2.50)$$

olarak bulunmuştu. Bu durumda konjüge momentumlar

$$\phi_1 = \alpha y + p_x = 0 \quad (2.51a)$$

$$\phi_2 = \alpha x - p_y = 0 \quad (2.51b)$$

ile verilen iki tane bağ koşulu oluşturur. Bu durumda (2.38) denkemine göre toplam Hamilton fonksiyonu H_T ,

$$H_T = \alpha V(x, y) + u_1(\alpha y + p_x) + u_2(\alpha x - p_y) \quad (2.52)$$

şeklini alır. Tutarlılık koşulları olan $\{\phi_j, H_T\} \approx 0$ ifadesi birinci bağ koşulu için

$$\{\phi_1, H_T\} = \alpha \{p_x, V(x, y)\} + u_2(\alpha \{p_x, x\} - \alpha \{y, p_y\}) = -\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial x} + 2u_2 \right) \approx 0 \quad (2.53a)$$

ve

$$u_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.53b)$$

olur. Bu ifade ikincil bir bağ koşulu olmayıp u_2 için bir tutarlılık koşuludur. Benzer şekilde ϕ_2 için de

$$\{\phi_2, H_T\} = \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial y} + 2u_1 \right) \approx 0 \quad (2.54a)$$

ve

$$u_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.54b)$$

şeklinde bulunur. Bu da bir başka tutarlılık koşuludur ve bağ koşulu değildir. Bu durumda toplamda iki adet birincil bağ koşulu mevcuttur ve Hamilton' a yeni eklemeler yapmaya gerek kalmaz.

Böylece Dirac parantezleri belirlenip hareket denklemlerine ulaşılabilir. Bunun için öncelikle simplektik matrisin belirlenmesi gerekir. Simplektik matris (2.46) denkleminde

$$M = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

ve buradan da

$$M = 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

şeklinde hesaplanır. Matrisin tersi

$$M^{-1} = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

şeklindedir ve cebirsel tensörel formda $M_{ij}^{-1} = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon_{ij}$ şeklinde yazılabilir. Buradaki ε_{ij} terimi iki boyutlu Levi-Civita tensörüdür. Poisson parantezlerinin genelleştirilmiş hali olan Dirac parantezleri

$$\{f, g\}_{DP} = \{f, g\}_{PP} - \sum \{f, \phi_i\}_{PP} M_{ij}^{-1} \{\phi_j, g\}_{PP} \quad (2.58)$$

ile verilen tanımında, $f = x$ ve $g = H_T$ olmak üzere hareket denklemleri

$$\dot{x} = \{x, H_T\}_{DP} = u_1 \{x, \phi_1\}_{PP} - \frac{1}{2\alpha} \{x, \phi_1\}_{PP} \{\phi_2, H_T\}_{PP} \quad (2.59)$$

olur. (2.54) eşitliği ifadede yerine koyulursa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \{x, \phi_1\}_{PP} - \frac{1}{2\alpha} \{x, \phi_1\}_{PP} \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial y} + 2u_1 \right) \\ &= u_1 \{x, \phi_1\}_{PP} - \frac{1}{2} \{x, \phi_1\}_{PP} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{2} 2u_1 \{x, \phi_1\}_{PP} \\ &= -\frac{1}{2} \{x, \phi_1\}_{PP} \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.60)$$

olarak elde edilir. (2.50) eşitliği ifadede yerine koyulur ve (2.12) denklem setindeki Poisson parantezlerinin bi-lineerlik ve çarpım kuralı özelliklerinden faydalanılırsa

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\{x, \alpha y + p_x\}_{PP} \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{2}[\{x, y\}_{PP} \alpha + \{x, p_x\}_{PP}] \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.61)$$

halini alır ve buradan da hareket denklemi

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.62)$$

elde edilir. Benzer şekilde $f = y$ ve $g = H_T$ için de

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \{y, H_T\}_{DP} = u_2 \{y, \phi_1\}_{PP} - \frac{1}{2\alpha} \{y, \phi_1\}_{PP} \{\phi_2, H_T\}_{PP} \\ &= -u_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + 2u_2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.63)$$

elde edilir. Bu sonuç Lagrange denklemlerinden elde edilen sonuçlarla birebir örtüşür ve herhangi bir tutarsızlık söz konusu değildir. Dirac parantezi momentumlar için uygulanırsa

$$\dot{p}_x = \{p_x, H_T\}_{DP} = -\alpha \frac{\partial V}{\partial x} - \alpha u_2 + \frac{1}{2\alpha} \{p_x, \phi_2\}_{PP} \{\phi_1, H_T\}_{PP} = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.64a)$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_T\}_{DP} = -\alpha \frac{\partial V}{\partial y} - \alpha u_1 + \frac{1}{2} \alpha \{p_y, \phi_2\}_{PP} \{\phi_1, H_T\}_{PP} = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.64b)$$

sonuçları elde edilir. Görüldüğü gibi Dirac parantezleriyle yapılan çözümde, klasik Poisson parantezlerinin kullanıldığı Hamilton çözümün getirdiği tutarsızlıklar ortadan kalkmıştır. Tüm hareket denklemleri Lagrange denklemleriyle elde edilen hareket denklemleriyle aynıdır.

Bu sonuç Dirac'ın bağ koşullarının varlığını çözüme katarak yapmış olduğu analizin ne kadar yerinde ve gerçekçi olduğunu göstermektedir[8],[9].

2.7 Bi-Hamilton Yapı

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin integre edilebilirliğini test etmek için birkaç yöntem vardır. Bu yöntemler ters saçılma teorisi Lax çifti, AKNS metodu, düz uzay şartı, bi-Hamilton yapı ve Painleve testi şeklinde sıralanabilir[10].

Kortevag de-Vries(KdV) denklemi, bu yöntemlerin hepsini sağlaması açısından 1+1-boyutta en iyi bilinen denklemlerden biridir. Bu çalışmada 3+1-boyutta verilen asimetric heavenly denkleminin integre edilebilirliği, bi-Hamilton yapısı incelenerek test edilecektir. Bir sonraki bölüme alt yapı sağlaması açısından KdV denklemi göz önüne alalım. Bu denklem, 1+1-boyutta basit lineer olmayan bir dispersif dalga denklemdir ve modern versiyonu

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \quad (2.65)$$

şeklindedir[11]. Bu denklemin Hamilton fonksiyonları

$$H_0 = \frac{1}{2}u^2 \quad (2.66a)$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{6}u^3 \quad (2.66b)$$

ve bunlara karşılık gelen Hamilton operatörleri sırasıyla

$$J_0 = D_x \quad (2.67a)$$

$$J_1 = D_x^3 + \frac{2}{3}uD_x + \frac{1}{3}u_x \quad (2.67b)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Anti-simetrik notasyonda

$$J_1 = D_x^3 + \frac{2}{3}D_x u - \frac{1}{3}u_x \quad (2.68)$$

şeklini alır. Burada $D_x = \partial / \partial_x$ şeklinde verilir ve $D_x u = u_x + uD_x$ ile verilir. Böylece Magri teoremine göre,

$$u_t = J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_0}{\delta u} = u_{xxx} + uu_x \quad (2.69)$$

şeklinde iki ayrı Hamilton'dan ve Hamilton operatöründen elde edilir[12]. Burada $\frac{\delta}{\delta u}$

ifadesi Euler türevi olup

$$\frac{\delta}{\delta u} = \sum_j -(D_\alpha)^j \frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \quad j = 0, 1, 2, \dots ; \quad \alpha = 1, x, xx, xxx, \dots \quad (2.70)$$

ve daha açık olarak

$$\frac{\delta}{\delta u} = \sum_{j=0} - (D_x)^j \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}^\alpha} - \dots \quad (2.71)$$

şeklinde tanımlanır [13].

(2.69)'deki J_0 ve J_1 Hamilton operatörleri, anti-simetrik olmalı ve Jacobi özdeşliğini sağlamalıdır. Magri teoremine göre sistem iki tane Hamilton'dan elde edilebiliyorsa, tekrarlama operatörü bulunarak sonsuz sayıda korunan büyüklük elde edilebilir. Tekrarlama operatörü R

$$R = J_1 J_0^{-1} \quad (2.72)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$J_n = R^n J_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.73)$$

genel durumuna geçilip üçüncü ve daha sonraki Hamilton operatörleri hesaplanarak hiyerarşideki bütün denklemlere (akışlara) geçilebilir. Bunun anlamı da hiyerarşideki her denklem yeni bir korunan büyüklüğe sahip olacak demektir. K_n hiyerarşideki n . denklem olmak üzere

$$K_n = J_0 \frac{\delta H_n}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.74)$$

ile tanımlanan tekrarlama bağıntısı ile verilir. Buradan hiyerarşinin diğer elemanlarına

$$K_{n+1} = R K_n \quad (2.75)$$

ile geçilir. Son olarak H_n Hamilton fonksiyonları veya korunan büyüklükler

$$\{H_n, H_m\}_{J_0} = \{H_n, H_m\}_{J_1} = 0, \quad n, m \geq 0 \quad (2.76)$$

ile verilen "involution" özelliğini sağlayarak bi-Hamilton sistemin sonsuz sayıda korunan büyüklüğe sahip olduğunu gösterir. Böylece Magri teoremine göre bi-Hamilton yapıya sahip sistemlerin integre edilebilir sistemler olduğu anlaşılır.

İkinci örnek olarak Boussinesq denklemini göz önüne alalım [13]. Sığ sularda tek yönlü dalgaların yayılımını anlatan bu denklem

$$v_{tt} = \frac{1}{3}u_{xxxx} + \frac{4}{3}(u^2)_{xx} \quad (2.77)$$

şeklindedir ve iki bileşen formda

$$u_t = v_x, \quad v_t = \frac{1}{3}u_{xxx} + \frac{8}{3}uu_x \quad (2.78)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem için birinci Hamilton operatörü matris formunda

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

ve Hamilton fonksiyonu

$$H_1 = -\frac{1}{6}u_x^2 + \frac{4}{9}u^3 + \frac{1}{2}u^2 \quad (2.80)$$

ile verilir. İkinci Hamilton operatörü

$$J_1 = \begin{pmatrix} D_x^3 + 2uD_x + u_x & 3vD_x + 2v_x \\ 3vD_x + v_x & \frac{1}{3}D_x^5 + \frac{5}{3}(uD_x^3 + D_x^3u) - (u_{xx}D_x + D_xu_{xx}) + \frac{16}{3}uD_xu \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

ve Hamilton operatörüne karşılık gelen Hamilton fonksiyonu H_0

$$H_0 = \frac{1}{2}v \quad (2.82)$$

olur. Burada J_0 ve J_1 ifadelerinin anti-simetrik olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca J_0, J_1 ve $J_0 + J_1$ lineer bileşiminin Jacobi özdeşliğini de sağladığı gösterilebilir. Jacobi özdeşliği ile ilgili ayrıntılı bilgi 4. Bölüm'de verilecektir. J_0 ve J_1 kullanılarak tekrarlama operatörü (2.72) eşitliğinden

$$R = \begin{pmatrix} 3v + v_x D_x^{-1} + u_x & D_x^2 + 2u + u_x D_x^{-1} \\ \frac{1}{3}D_x^4 + \frac{10}{3}uD_x^2 + 5u_x D_x + 3u_{xx} & 3v + v_x D_x^{-1} \\ + \frac{16}{3}u^2 + (\frac{2}{3}u_{xxx} + \frac{16}{3}uu_x)D_x^{-1} & \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

olarak bulunur. Burada D_x^{-1} ifadesi

$$D_x^{-1} f = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x - \int_x^{\infty} \right) f(\xi) d\xi \quad (2.84)$$

ile tanımlanır ve buradaki ξ terimi, f fonksiyonunun bir değişkenidir[14]. Böylece bi-Hamilton yapı (2.74) denkleminde $n = 1$ için,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_0}{\delta u} = \begin{pmatrix} v_x \\ \frac{1}{3} u_{xxx} + \frac{8}{3} u u_x \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

şeklinde (2.78) sistemi elde edilir. $n = 2$ için

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \frac{\delta H_2}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_1}{\delta u} \quad (2.86)$$

olur ve $J_1 = R J_0$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \frac{\delta H_2}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_0}{\delta u} \quad (2.87)$$

ve

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} u_{xxxxx} + \frac{10}{3} u u_{xxx} + \frac{25}{3} u_x u_{xx} + \frac{20}{3} u^2 u_x + 5 v v_x \\ \frac{1}{3} v_{xxxxx} + \frac{10}{3} u v_{xxx} + \frac{10}{3} u_{xx} v_x + \frac{5}{3} u_{xxx} v + \frac{20}{3} u^2 v_x + \frac{40}{3} u u_x v \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

şeklinde hiyerarşideki ilk denklem elde edilir. Bu denkleme karşılık gelen korunan büyüklük H_2 ise,

$$H_2 = \frac{1}{3} u_{xx} v_{xx} + \frac{10}{3} u u_{xx} v + \frac{5}{2} u_x^2 v + \frac{20}{9} u^3 v + \frac{5}{6} v^3 \quad (2.89)$$

şeklinde bulunur. Burada R bir simetridir ve her uygulandığında yeni bir simetri doğurur. $n = 3, 4, \dots$ şeklinde devam edilerek hiyerarşideki bütün korunan büyüklükler elde edilmiş olur. Magri teoremi sistem bi-Hamilton yapıya sahipse sonsuz sayıda korunan büyüklüğe sahip olduğunu belirtir.

ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN Bİ-HAMILTON YAPISI

Bir önceki bölümde bi-Hamilton yapıya sahip sistemlerin Magri teoremine göre integre edilebilir olduğunu ve literatürde çok iyi bilinen 1+1-boyuttaki KdV ve Boussinesq denklemleri örnek olarak verilmişti. Bu bölümde ise 3+1-boyuttaki asimetric heavenly denkleminin bi-Hamilton yapısı Dirac bağ koşulu analizi kullanılarak ele alınacaktır.

3.1 Asimetrik Heavenly Denklemi

Asimetrik heavenly denklemi, ortak simetri içeren, lineer olmayan, ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiye denklemlerin sınıflandırılmasından elde edilen kanonik 3+1-boyutlu denklemlerden biridir ve

$$u_{tx}u_{ty} - u_{tt}u_{xy} + au_{tz} + bu_{xz} + cu_{xx} = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde verilir [15]. Burada u, x, y, z, t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen fonksiyon ve u fonksiyonunun indisleri ilgili koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. Örneğin $u_{tx} = \partial^2 u / \partial t \partial x$ ve $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$ vs. a, b, c terimleri ise keyfi sabitlerdir. $u_t = v$ şeklinde ikinci bir bilinmeyen seçilerek asimetric heavenly denklemi iki bileşenli formda

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = \frac{1}{u_{xy}} (v_x v_y + av_z + bu_{xz} + cu_{xx}) \equiv Q \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Q , v_t nin sağ tarafını temsil eden kısa gösterimidir.

3.2 Asimetrik Heavenly Denkleminin bi-Hamilton Yapısı

Asimetrik heavenly denkleminin Hamilton formalizminde yazılabilmesi için öncelikle uygun bir Lagrange fonksiyonu yazılması gerekir. (3.2) sistemi için Lagrange yoğunluğu

$$L = \left(\frac{1}{2} v^2 - v u_t \right) u_{xy} + \frac{1}{2} (a u_t u_z + b u_x u_z + c u_x^2) \quad (3.3)$$

şeklinde seçilebilir. Görüldüğü gibi Lagrange yoğunluğu hıza karşılık gelen u_t^2 yerine sadece u_t terimini içerir. Bu tür Lagrange yoğunluklarına “dejenere” Lagrange yoğunluğu denir[3]. Bir önceki bölümde bahsedildiği üzere, Hamilton formalizmine doğru şekilde geçebilmek için Dirac bağ koşulu analizinin kullanılması gerekmektedir.

Böylece kanonik momentumlar

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial u_t^i} \quad (3.4)$$

ile tanımlanır ve

$$\{\Pi_i(\xi), u^k \eta\} = \delta_i^k \delta(\xi - \eta) \quad (3.5)$$

şeklinde kanonik Poisson parantezlerini sağlarlar. Buradaki ξ ve η terimleri bağımsız değişkenleri temsil etmektedir ve orjinal bağımsız değişkenler olan x, y, z setlerini karşılamaktadır. Yani, $\xi = \{x, y, z\}$ ve $\eta = \{x', y', z'\}$ olmak üzere Dirac-delta fonksiyonu $\delta(\xi - \eta) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ ile verilir.

(3.4) denklemi kullanılarak π_u ve π_v momentumları sırasıyla

$$\pi_u = \frac{\partial L}{\partial u_t} = -v u_{xy} + \frac{a}{2} u_z \quad (3.6a)$$

$$\pi_v = \frac{\partial L}{\partial v_t} = 0 \quad (3.6b)$$

şeklinde elde edilir. (3.6) denklemlerindeki momentumlar ikinci sınıf bağ koşulları olarak ele alınırsa bağ denklemleri

$$\phi_u = \pi_u + v u_{xy} - \frac{a}{2} u_z, \quad \phi_v = \pi_v = 0 \quad (3.7)$$

olur. (3.7)'de ki, ikinci sınıf bağ denklemleri kullanılarak (3.2) sistemi için birinci Hamilton operatörü elde edilebilir. Bunun için öncelikle,

$$K_{ij} = \{\phi_i(x, y), \phi_j(x', y')\}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.8)$$

simplektik matrisi hesaplanır. İki adet bağ koşulu olduğundan 2x2 matrisin elemanları sırası ile

$$\begin{aligned} K_{11} &= \{\phi_1(x, y), \phi_1(x', y')\} = -(v_y D_x + v_x D_y + a D_z + v_{xy}) \\ K_{12} &= \{\phi_1(x, y), \phi_2(x', y')\} = u_{xy} \\ K_{21} &= \{\phi_2(x, y), \phi_1(x', y')\} = -u_{xy} \\ K_{22} &= \{\phi_2(x, y), \phi_2(x', y')\} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak bulunur ve matris formunda yazılırsa, simplektik K matrisi

$$K = \begin{pmatrix} -(v_y D_x + v_x D_y + a D_z + v_{xy}) & u_{xy} \\ -u_{xy} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki D_x, D_y, D_z ve D_t operatörleri sırasıyla x, y, z, t değişkenlerine göre kısmi türev işlemini temsil etmektedir. Hamilton formalizmindeki ilk Hamilton operatörü J_0 , K simplektik matrisinin tersine eşit olmalıdır. Yani

$$J_0 = K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/u_{xy} \\ 1/u_{xy} & J_0^{22} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Burada J_0^{22} anti-simetrik formda

$$J_0^{22} = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_y}{u_{xy}^2} D_x + D_x \frac{v_y}{u_{xy}^2} + \frac{v_x}{u_{xy}^2} D_y + D_y \frac{v_x}{u_{xy}^2} \right) - \frac{a}{u_{xy}} D_z \frac{1}{u_{xy}} \quad (3.12)$$

şeklindedir. J_0 Hamilton operatörüne karşılık gelen Hamilton yoğunluğu H_1 , standart Hamilton formalizmi kullanılarak (3.3) Lagrange yoğunluğundan elde edilir. Yani

$$H = \pi_u u_t + \pi_v v_t - L \quad (3.13)$$

ve π_u , π_v ve L yerine yazılıp hesaplanırsa

$$H_1 = -\frac{1}{2}(v^2 u_{xy} + b u_x u_z + c u_x^2) \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. (3.2) sistemindeki akış, J_0 Hamilton operatörünün Hamilton yoğunluğunun varyasyonel türevlerine uygulanmasıyla

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{u_{xy}}(v_x v_y + a v_z + b u_{xz} + c u_{xx}) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

bulunur. Buradaki $\delta_u = \delta / \delta u$ ve $\delta_v = \delta / \delta v$ operatörleri (2.71) denkleminde tanımlanan u ve v değişkenlerine göre Euler-Lagrange operatörleridir [13].

3.3 Tekrarlama operatörü ve Lax çifti

(3.2) denklem sistemi için kanonik formdaki Lie simetri dönüşümleri, sadece bağımlı değişkenler dönüştürülerek

$$u_\tau = \varphi(x, y, x, t, u, v, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z) \quad (3.16a)$$

$$v_\tau = \psi(x, y, x, t, u, v, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z) \quad (3.16b)$$

şeklinde Lie denklemleri ile belirlenir. Burada τ terimi Lie grup parametresidir. Lie denklemleri arasındaki integre edilebilirlik koşulu (compatibility condition)

$$\begin{cases} u_{t\tau} - u_{\tau t} = 0 \\ v_{t\tau} - v_{\tau t} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

şeklindedir. $u_\tau = \varphi$ ve $v_\tau = \psi$ değişimleri (3.17) simetri şartlarında yerine konularak ilk simetri şartından ve $u_t = v$ olduğunu hatırlayarak,

$$u_{t\tau} - u_{\tau t} = v_\tau - u_{\tau t} = \psi - \varphi_t = 0 \quad (3.18)$$

ve ikinci simetri şartından da

$$\begin{aligned}
 v_{t\tau} - v_{\tau t} &= v_{t\tau} - \psi_t = Q_\tau - \psi_t \\
 &= -\frac{u_{xy\tau}}{u_{xy}^2} (v_x v_y + a v_z + b u_{xz} + c u_{xx}) \\
 &\quad + \frac{1}{u_{xy}} (v_{x\tau} v_y + v_x v_{y\tau} + a v_{z\tau} + b u_{xz\tau} + c u_{xx\tau}) - \psi_t
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. $u_\tau = \varphi$ ve $v_\tau = \psi$ dönüşümleri bu ifadede de yerine koyulur ve düzenlenirse (3.18) ve (3.19) denklemleri

$$\begin{cases} \varphi_t - \psi = 0 \\ \frac{\varphi_{xy}}{u_{xy}} Q - \frac{1}{u_{xy}} (\psi_x v_y + v_x \psi_y + a \psi_z + b \varphi_{xz} + c \varphi_{xx}) + \psi_t = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

olur. Denklem sistemi asimetric heavenly sisteminin simetri karakteristiği olan

$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sütun matrisinin çarpımı şeklinde yazılırsa

$$\begin{pmatrix} D_t & -1 \\ -\frac{c}{u_{xy}} D_x^2 + \frac{Q}{u_{xy}} D_x D_y - \frac{b}{u_{xy}} D_x D_z & D_t - \frac{v_y}{u_{xy}} D_x - \frac{v_x}{u_{xy}} D_y - \frac{a}{u_{xy}} D_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki matris, asimetric heavenly sisteminin Frechet türevi $\hat{A}$, olarak tanımlanır ve (3.21) eşitliği

$$\hat{A}(\Phi) = 0 \tag{3.22}$$

şeklinde yazılır. $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}$ notasyonu kullanılarak tekrarlama operatörü R , $\tilde{\Phi} = R(\Phi)$

şeklinde, bir simetriyi diğer bir simetriye dönüştürür. Bu nedenle Φ ve $\tilde{\Phi}$ ortak simetri adını alır. Asimetric heavenly denklemleri için R tekrarlama operatörü [14]'ün (6.32) eşitliğinde $\omega_0 = 0$ seçildiğinde 2x2 matris formunda

$$R = \begin{pmatrix} D_x^{-1} (v_x D_y + a D_z) & -D_x^{-1} u_{xy} \\ -c D_x + Q D_y - b D_z & -v_y \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

ile verilmektedir.

Tekrarlama operatörü R ve $\hat{A}$ matrislerinin komütasyonu

$$[R, \hat{A}] = \begin{pmatrix} D_x^{-1}(v_t - Q)_x D_y & D_x^{-1}(u_t - v)_{xy} \\ \frac{1}{u_{xy}} [-c(u_t - v)_{xx} + Q(u_t - v)_{xy} & \\ -b(u_t - v)_{xz} - v_y(v_t - Q)_x & (v_t - Q)_y \\ -v_x(v_t - Q)_y + a(v_t - Q)_z] D_y & \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak $\hat{A}$ ile R operatörleri, asimetrik heavenly sistemi için Olver-Ibragimov-Shabat tipinde Lax çifti oluşturur ve sistemin çözümleri için komüt ederler[16].

3.4 İkinci Hamilton Yapı ve Hamilton Fonksiyonu

(2.73) bağıntısından ikinci Hamilton operatörü

$$J_1 = RJ_0 = \begin{pmatrix} -D_x^{-1} & \frac{v_y}{u_{xy}} \\ -\frac{v_y}{u_{xy}} & J_1^{22} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

ile verilir. Burada J_1^{22} anti-simetrik formda

$$\begin{aligned} J_1^{22} = & \frac{1}{2} \left(\frac{c}{u_{xy}} D_x + D_x \frac{c}{u_{xy}} \right) + \frac{1}{2} \left(v_y^2 D_x \frac{1}{u_{xy}^2} + \frac{1}{u_{xy}^2} D_x v_y^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{v_x}{u_{xy}} D_y \frac{v_y}{u_{xy}} + \frac{v_y}{u_{xy}} D_y \frac{v_x}{u_{xy}} \right) - \frac{1}{2} \left(Q D_y \frac{1}{u_{xy}} + \frac{1}{u_{xy}} D_y Q \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{u_{xy}} D_z + D_z \frac{b}{u_{xy}} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{v_y}{u_{xy}} D_z \frac{1}{u_{xy}} + \frac{1}{u_{xy}} D_z \frac{v_y}{u_{xy}} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

ile verilir. J_1 'e karşılık gelen H_0 Hamilton yoğunluğu, klasik Hamilton formalizminden elde edilemez. H_0 Hamilton yoğunluğu öyle seçilmeli ki J_1 operatörü H_0 'ın varyasyonel türevlerine uygulandığında (3.2) sistemini vermelidir. Bu durumda c_0 bir sabit olmak üzere H_0

$$H_0 = (c_0 - y) v u_{xy} \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlanırsa ikinci Hamilton yapı

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{u_{xy}} (v_x v_y + a v_z + b u_{xz} + c u_{xx}) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

veya bi-Hamilton formda (3.2)'deki akış

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

şeklinde iki ayrı Hamilton'dan ve Hamilton operatöründen elde edilir. Burada J_0 ve J_1 Hamilton operatörleri, anti-simetriktir ve Jacobi özdeşliğini sağlar. Jacobi özdeşliğinin ayrıntılı hesaplaması bir sonraki bölümde indirgenmiş sistem için yapılacaktır. Böylece asimetric heavenly sistemi Magri teoremine göre bi-Hamilton yapıya sahip olduğundan integre edilebilir bir sistemdir.

3.5 Asimetrik Heavenly Denkleminde Simetriler ve Korunum Yasaları

Hareket denklemlerini şeklen değişmez(invaryant) bırakan sürekli dönüşümlere simetri dönüşümleri denir.

$$\begin{aligned} t' &= t'(t) \\ q'_i &= q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde bir dönüşüm ve bunun ters dönüşümü olan

$$\begin{aligned} t &= t(t') \\ q_i &= q_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t') \end{aligned} \quad (3.31)$$

dönüşümleri verildiğinde sistemin $L' = (q'_1, \dots, \dot{q}'_1, \dots; t')$ şeklindeki yeni Lagrange fonksiyonunu, sistemin dönüştürülmüş yeni değişkenler cinsinden yazılmış $L = (q'_1, \dots, \dot{q}'_1, \dots; t')$ eski Lagrange fonksiyonuyla aynı yapan veya $\Omega = \Omega(q'_1, \dots, q'_n, t')$ şeklinde keyfi ve sürekli bir fonksiyonunun zamana göre türevi kadar fark ettiren

$$L' = (q'_1, \dots, \dot{q}'_1, \dots; t') - L(q'_1, \dots, \dot{q}'_1, \dots; t') = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (3.32)$$

şeklindeki dönüşümlere simetri dönüşümleri adı verilir. Noether teoremine göre fiziksel sisteme uygulanan bir simetri, o simetriye özel bir korunum yasasına karşılık gelir [7].

Asimetrik heavenly sistemi için LIEPDE ve CRACK yazılımları REDUCE 3.8 altında çalıştırılarak (3.2) sistemin tüm nokta simetrileri

$$X_1 = y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v, \quad (3.33a)$$

$$X_2 = \left(\frac{akx}{b^2} - kt + aF'(s) \right) \partial_t + bF'(s)\partial_x + ky\partial_y, \quad (3.33b)$$

$$\begin{aligned} X_d = & ((bt - ax)d_{yz} - vd_{yy})\partial_t + cd_y\partial_x - bd_z\partial_y + bd_y\partial_z \\ & + \left(-\frac{1}{2}d_{yy}v^2 + \left(\frac{1}{2}a^2x^2 - abtx + \frac{1}{2}b^2t^2 \right)d_{zz} - actd_z \right) \partial_u \\ & + \left[-bd_{yz}v + (b^2t - abx)d_{zz} - acd_z \right] \partial_v, \end{aligned} \quad (3.33c)$$

$$X_f = f_y\partial_t + (bt - ax)f_z\partial_u + bf_z\partial_v, \quad (3.33d)$$

$$X_g = g(y, z)\partial_u. \quad (3.33e)$$

şeklinde elde edilir [15], [17]. Genel olarak

$$X = \xi^x\partial_x + \xi^y\partial_y + \xi^z\partial_z + \xi^t\partial_t + \eta^u\partial_u + \eta^v\partial_v \quad (3.34)$$

simetrisi için simetri karakteristikleri $\hat{\phi}^u$ ve $\hat{\phi}^v$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^u = & \eta^u - u_x\xi^x - u_y\xi^y - u_z\xi^z - u_t\xi^t, \\ \hat{\phi}^v = & \eta^v - v_x\xi^x - v_y\xi^y - v_z\xi^z - v_t\xi^t \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıda verilen simetriler için iki bileşenli simetri karakteristikler (3.34) yardımıyla;

$$\hat{\phi}_1^u = u - yu_y, \quad \hat{\phi}_1^v = v - yv_y, \quad (3.36a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2^u = & \frac{1}{b}(acq(s) + a^2cyF(s) + 2ackty - bku) \\ & - \left(\frac{akx}{b^2} - kt + aF'(s) \right) v - bF'(s)u_x - ky u_y, \end{aligned} \quad (3.36b)$$

$$\hat{\phi}_2^v = \frac{2acky}{b} - \left(\frac{akx}{b^2} - kt + aF'(s) \right) Q - bF'(s)v_x - kyv_y, \quad (3.36c)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_d^u = & \left(\frac{1}{2} d_{yy} v^2 + \left(\frac{1}{2} a^2 x^2 - abtx + \frac{1}{2} b^2 t^2 \right) d_{zz} - actd_z \right) \\ & - v(bt - ax)d_{yz} - cd_y u_x - bd_z u_y + bd_y u_z \end{aligned} \quad (3.36d)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_d^v = & \left[-bd_{yz}v + (b^2t - abx)d_{zz} - acd_z \right] - \left[(bt - ax)d_{yz} - vd_{yy} \right] Q \\ & - cd_y v_x + bd_z v_y - bd_y v_z, \end{aligned} \quad (3.36e)$$

$$\hat{\phi}_f^u = (bt - ax)f_z - vf_y, \quad \hat{\phi}_f^v = bf_z - f_y Q, \quad (3.36f)$$

$$\hat{\phi}_g^u = g(y, z), \quad \hat{\phi}_g^v = 0 \quad (3.36h)$$

şeklinde hesaplanır. Burada a, b, c, k terimleri keyfi sabitler; $d(y, z), f(y, z), g(y, z), q(s), F(s)$ terimleri keyfi fonksiyonlar ve $s = bx - cz$ ifadesine karşılık gelir. F' işlemleri de s' 'ye göre türevi temsil eder.

Hamilton operatörleri, komüt eden simetriler ile birbiriyle Poisson parantezleri sıfır olan (involution özelliği) korunan büyüklükler arasında doğal bir bağ sağlar. Lie denklemleri $\hat{\phi}^u$ ve $\hat{\phi}^v$, iki bileşenli karakteristikleri olan simetriler için Hamilton formda

$$\begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^u \\ \hat{\phi}^v \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H \\ \delta_v H \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

şeklinde yazılır. Burada simetri grup parametresi τ , (3.36)'daki simetri akışında zamanı temsil eder ve H ise (3.2) sistemindeki akışı temsil eden hareket sabitidir. (3.37) eşitliğindeki ikinci kısım, simetriler ve integraller arasındaki ilişkiyi veren Noether teoreminin Hamilton formudur. Simetri karakteristikleri olan $\hat{\phi}^u, \hat{\phi}^v$ terimlerine karşılık gelen korunan Hamilton yoğunlukları (3.37)'nin tersi alınarak ters Noether teoremi formunda

$$\begin{pmatrix} \delta_u H^i \\ \delta_v H^i \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \hat{\phi}_i^u \\ \hat{\phi}_i^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v_y D_x + v_x D_y + a D_z + v_{xy}) & u_{xy} \\ -u_{xy} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_i^u \\ \hat{\phi}_i^v \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

şeklinde yazılarak bulunur. Burada $K = J_0^{-1}$ şeklindeki daha önce elde edilen simplektik matristir. Böylece (3.38) denkleminde

$$\begin{aligned}\delta_u H^i &= -(v_y \hat{\phi}_{ix}^u + v_x \hat{\phi}_{iy}^u + a \hat{\phi}_{iz}^u + v_{xy} \hat{\phi}_i^u) + u_{xy} \hat{\phi}_i^v \\ \delta_v H^i &= -u_{xy} \hat{\phi}_i^u\end{aligned}\quad (3.39)$$

genel durumu elde edilir. Yukarıda verilen simetri listesinden (3.37) denklemlerinden sadece X_f ve X_g simetrileri için Hamilton fonksiyonları bulunur. Bu simetrilere karşılık gelen Hamilton yoğunlukları sırasıyla

$$H^f = v u_{xy} \left(\frac{v f_y}{2} - (bt - ax) f_z \right) + \frac{u_x}{2} (b f_y u_z - b f_z u_y + c f_y u_x) - a u (bt - ax) f_{zz} \quad (3.40a)$$

$$H_g = (u_z - v u_{xy}) g(y, z) \quad (3.40b)$$

şeklinde dir. Böylece X_f ve X_g , Hamilton simetrileri ancak X_1 , X_2 ve X_d simetrileri (3.2) akışı için Hamilton simetrisi oluşturmazlar.

ASİMETRİK HEAVENLY DENKLEMİNİN SİMETRİ İNDİRGEMESİ VE İNDİRGENMİŞ SİSTEMİN Bİ-HAMILTON YAPISI

Bir önceki bölümde asimetric heavenly sisteminin bi-Hamilton yapıda ve Magri teoremine göre integre edilebilir 3+1-boyutlu bir sistem olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde ise asimetric heavenly denklem sistemine ait bir simetri indirgemesi yapılarak indirgenmiş 2+1-boyutlu yeni sistemin bi-Hamilton yapıda olup olmadığı tartışılacaktır.

Denklemler sistemi simetri dönüşümleri altında genellikle Hamilton yapıda kalmazlar. Ancak asimetric heavenly sisteminin belirli bir simetri dönüşümü altında elde edilen 2+1- boyutlu indirgenmiş yeni sistemin integre edilebilir bi-Hamilton bir sistem olduğu gösterilmiştir. Bu tezin ana konusu indirgenmiş sistemin de bi-Hamilton yapıda olup integre edilebileceğini kanıtlamaktır.

4.1 Asimetric Heavenly Denkleminin Simetri İndirgemesi

Asimetric heavenly sistemine yapılacak olan simetri indirgemesi 3. Bölüm'de (3.33) denklemlerinde verilen simetrilere bir olan

$$\begin{aligned} X_d = & ((bt - ax)d_{yz} - vd_{yy})\partial_t + cd_y\partial_x - bd_z\partial_y + bd_y\partial_z \\ & + \left(-\frac{1}{2}d_{yy}v^2 + \left(\frac{1}{2}a^2x^2 - abtx + \frac{1}{2}b^2t^2 \right)d_{zz} - actd_z \right)\partial_u \\ & + \left[-bd_{yz}v + (b^2t - abx)d_{zz} - acd_z \right]\partial_v, \end{aligned} \quad (4.1)$$

simetrisi ile yapılacaktır. Herhangi bir simetri

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \lambda(x)\partial_t \quad (4.2)$$

şeklinde verildiğinde karakteristik sistem

$$\frac{dx}{\xi(x)} = \frac{dy}{\eta(y)} = \frac{dt}{\lambda(x)} \quad (4.3)$$

ile verilir ve karakteristik sistemin çözümü de bir I değişmezini doğurur. Özel olarak (4.1) simetrisi için $d = y$ seçilirse

$$X_y = c\partial_x + b\partial_z \quad (4.4)$$

ile verilen simetriye indirgenir. Bu durumda karakteristik sistem (4.3) denkleminde

$$\frac{dx}{c} = \frac{dz}{b} \quad (4.5)$$

olur ve denklem sistemi çözüldüğünde X_y 'nin değişmezleri

$$X = bx - cz, \quad Y = y, \quad T = t, \quad U = u, \quad V = v \quad (4.6)$$

şeklinde bulunur. (4.6)'daki ilk denklemden x ile z koordinatının birbirine bağlı olduğu ve simetri dönüşümü sonucu z koordinatının düşeceği görülmektedir. Böylece iki bileşenli formda ve 3+1-boyuttaki (3.2) sisteminin yerini yine iki bileşenli formda fakat 2+1-boyutlu bir sistem alacaktır. $u = U(X, Y, T)$, $v = V(X, Y, T)$ olmak üzere yeni kısmi türev bağıntıları da (4.6) dönüşümleri altında

$$D_x = bD_X, \quad D_y = D_Y, \quad D_z = -cD_X, \quad D_t = D_T \quad (4.7)$$

halini alır. Dönüşüm bağıntıları (3.2) denklem sistemine uygulanıp yeni değişkenler $U \rightarrow u$, $V \rightarrow v$ ve $T \rightarrow t$ olacak şekilde yeniden isimlendirilirse, yeni 2+1-boyutlu, iki bileşenli indirgenmiş sistem

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = \frac{v_x}{u_{xy}}(v_y - \frac{ac}{b}) \equiv Q \quad b \neq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir.

4.2 İndirgenmiş Sistemin Dirac Bağ Analizi, Simplektik ve Hamilton Yapısı

2+1-boyuttaki indirgenmiş (4.8) sisteminin de bi-Hamilton yapıda ve integre edilebilir olduğunun kanıtlanması için bir önceki bölümde asimetrik heavenly sisteme yapılan incelemedeki yolun aynısı izlenecektir.

İndirgenmiş sistemin Lagrange yoğunluğunun bulunması için (4.7)'deki türev dönüşümlerinin (3.3) ifadesindeki Lagrange yoğunluğuna uygulanması gerekir. Böylece indirgenmiş sistemin Lagrange yoğunluğu

$$L = b \left(\frac{v^2}{2} - v u_t \right) u_{xy} - \frac{ac}{2} u_t u_x \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Elde edilen Lagrange dejenere olduğundan, Hamilton formalizmine geçebilmek için Dirac bağ koşulları analizinin kullanılması gerekir. Öncelikle kanonik momentumlar

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial u_t^i} \quad (4.10)$$

ile tanımlanır ve

$$\{\Pi_i(\xi), u^k \eta\} = \delta_i^k \delta(\xi - \eta) \quad (4.11)$$

şeklinde Poisson parantezlerini sağlar. Buradaki ξ ve η terimleri bağımsız değişkenlerini temsil etmektedir. Yani, $\xi = \{x, y\}$ ve $\eta = \{x', y'\}$ terimleri için Dirac-delta fonksiyonu $\delta(\xi - \eta) = \delta(x - x')\delta(y - y')$ ile verilir. (4.10) denkleminde π_u ve π_v momentumları

$$\pi_u = \frac{\partial L}{\partial u_t} = -b v u_{xy} - \frac{ac}{2} u_x, \quad \pi_v = \frac{\partial L}{\partial v_t} = 0 \quad (4.12)$$

olarak bulunur ancak momentumlar u_t ve v_t hızları cinsinden yazılamaz. Ayrıca (4.9)'da verilen Lagrange yoğunluğu dejenere olduğundan problemin üstesinden gelebilmek için yukarıda da bahsedildiği üzere Dirac bağ analizine göre. (4.12) momentumları

$$\phi_u = \pi_u + b v u_{xy} + \frac{ac}{2} u_x, \quad \phi_v = \pi_v = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde ikinci sınıf bağ koşulları olarak yazılır. Böylece bağ koşulları kullanılarak

$$K_{ij} = \{\phi_i(x, y), \phi_j(x', y')\}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.14)$$

ile verilen simplektik matris hesaplanır. Matrisin ilk elemanı K_{11} ;

$$\begin{aligned} K_{11} &= \{\phi_1(x, y), \phi_1(x', y')\} \\ &= \{\pi_u, \pi_{u'}\} + b\{\pi_u, v'u_{x'y'}\} + \frac{ac}{2}\{\pi_u, u_{x'}\} - \{\pi_{u'}, \pi_u\} \\ &\quad - b\{\pi_{u'}, vu_{xy}\} - \frac{ac}{2}\{\pi_{u'}, u_x\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklinde olur ve ifade düzenlenirse

$$K_{11} = bv'\{\pi_u, u_{x'y'}\} + \frac{ac}{2}\{\pi_u, u_{x'}\} - bv\{\pi_{u'}, u_{xy}\} - \frac{ac}{2}\{\pi_{u'}, u_x\} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.11) denkleminde

$$\begin{aligned} K_{11} &= bv'\delta_{x'}(x - x')\delta_{y'}(y - y') + \frac{ac}{2}\delta_{x'}(x - x')\delta_y(y - y') \\ &\quad - bv\delta_x(x' - x)\delta_y(y' - y) - \frac{ac}{2}\delta_x(x' - x)\delta(y' - y) \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklini alır. Son olarak K_{11} 'i elde etmek için (4.17) denklemi

$$\begin{aligned} K_{11} &= b \iint v'(x', y') f(x', y') \delta_{x'}(x - x') \delta_{y'}(y - y') dx' dy' \\ &\quad + \frac{ac}{2} \iint f(x', y') \delta_{x'}(x - x') \delta_y(y - y') dx dy' \\ &\quad - bv \iint f(x', y') \delta_x(x' - x) \delta_y(y' - y) dx' dy' \\ &\quad - \frac{ac}{2} \iint f(x', y') \delta_x(x' - x) \delta(y' - y) dx' dy' \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinde integre edilir. Burada $f(x', y')$ fonksiyonu integrali almak için kullanılan yardımcı bir fonksiyondur. İfadenin üçüncü ve dördüncü terimlerindeki Dirac-Delta fonksiyonları kurallara uygun olarak sırasıyla

$$\begin{aligned} i) \quad &\delta_x(x' - x) \delta_y(y' - y) = \delta_{x'}(x - x') \delta_{y'}(y - y') \\ ii) \quad &\delta_x(x' - x) \delta(y' - y) = -\delta_{x'}(x - x') \delta(y - y') \end{aligned} \quad (4.19)$$

olacak şekilde düzenlenirse (4.18) eşitliği

$$\begin{aligned}
K_{11} = & b \iint v'(x', y') f(x', y') \delta_{x'}(x - x') \delta_{y'}(y - y') dx' dy' \\
& + \frac{ac}{2} \iint f(x', y') \delta_{x'}(x - x') \delta_{y'}(y' - y) dx' dy' \\
& - bv \iint f(x', y') \delta_{x'}(x - x') \delta_{y'}(y - y') dx' dy' \\
& + \frac{ac}{2} \iint f(x') \delta_{x'}(x' - x) dx'
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde olur ve integral alınarak

$$K_{11} = bD_x D_y (vf) + \frac{ac}{2} D_x (f) - bv D_x D_y (f) + \frac{ac}{2} D_x (f) \tag{4.21}$$

veya

$$K_{11} = (-bD_x D_y v + bv D_x D_y - acD_x)(-f) \tag{4.22}$$

Şeklinde elde edilir. $(-f)$ dışındaki terim birinci matris elemanı olarak

$$K_{11} = bv_{xy} + bv_y D_x + bv_x D_y + acD_x \tag{4.23}$$

şeklinde bulunur. Matrisin diğer elemanları da (4.14) eşitliğiyle benzer şekilde hesaplanarak K_{ij}

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} -[(bv_y - ac)D_x + bv_x D_y + bv_{xy}] & bu_{xy} \\ -bu_{xy} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

şeklinde bulunur. K matrisine anti-simetrik simplektik matris adı verilir. Böylece

karşılık gelen simplektik 2-form $\Omega = \int_V \omega dx dy dz$ hacim integralinin yoğunluğu olan

$$\omega = \frac{1}{2} du_i \wedge K_{ij} du^j, \tag{4.25}$$

ve daha açık olarak

$$\omega = bu_{xy} du \wedge dv - \frac{b}{2} v_x du \wedge du_y - \left(\frac{b}{2} - \frac{ac}{2}\right) v_y \wedge du_x \tag{4.26}$$

ile verilir. Kolay bir hesapla Ω 'nin kapalı 2-form $d\Omega=0$ olduğu görülebilir. Böylece Ω 'nin simplektik formda olduğu ve (4.24) eşitliğiyle belirlenmiş K 'nın da simplektik operatör olduğu kesinlik kazanır. Böylece K operatörünün tersi de Hamilton operatörü olur ve

$$J_0 = K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/bu_{xy} \\ 1/bu_{xy} & J_0^{22} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

şeklinde hesaplanır. Burada J_0^{22} anti-simetrik formda

$$J_0^{22} = \frac{ac}{b^2u_{xy}} D_x \frac{1}{u_{xy}} - \frac{1}{2b} \left(\frac{v_y}{u_{xy}^2} D_x + D_x \frac{v_y}{u_{xy}^2} + \frac{v_x}{u_{xy}^2} D_y + D_y \frac{v_x}{u_{xy}^2} \right) \quad (4.28)$$

ile verilir ve D_x, D_y, D_t operatörleri sırasıyla x, y, t değişkenlerine göre kısmi türevleri ifade eder. (4.26)'da verilen simplektik 2-formun kapalı olması, aynı zamanda J_0 operatörünün Jacobi özdeşliğini sağladığı anlamına gelir. Jacobi özdeşliğinin sağlanmasıyla ilgili bilgiler bölüm sonunda ayrıntılı şekilde ele alınmıştır. Böylece Hamilton formalizminden J_0 'a karşılık gelen Hamilton yoğunluğu,

$$H_1 = \pi_u u_t + \pi_v v_t - L \quad (4.29)$$

şeklinde yazılarak

$$H_1 = -\frac{b}{2} v^2 u_{xy} \quad (4.30)$$

şeklinde elde edilir. (4.8) sistemindeki akış, J_0 Hamilton operatörünün Hamilton yoğunluğunun Euler türevlerine uygulanmasıyla yani

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

veya daha açık olarak

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/bu_{xy} \\ 1/bu_{xy} & J_0^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -bv_x v_y - bv_{xy} v \\ -bv u_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

ve buradan da

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{v_x}{u_{xy}}(v_y - \frac{ac}{b}) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi (4.33) denklemi (4.8) sistemini vermektedir. Böylece birinci Hamilton yapı elde edilmiş olur.

4.3 İndirgenmiş Sistemde Tekrarlama Operatörü ve Lax Çifti

3. Bölüm'de asimetrik heavenly sistemi için hesaplanmış olan (3.23) tekrarlama operatörü ve (3.21)'deki Frechet türevleri (4.7)'de verilen indirgeme bağıntıları yardımıyla indirgenmiş sistem için doğrudan bulunabilir. Buna göre indirgenmiş sistemin Frechet türevi

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} D_t & -1 \\ \frac{Q}{u_{xy}} D_x D_y & D_t - \frac{1}{u_{xy}}(v_y + \frac{ac}{b}) D_x - \frac{v_x}{u_{xy}} D_y \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

ve tekrarlama operatörü

$$R = \begin{pmatrix} D_x^{-1}(v_x D_y - \frac{ac}{b} D_x) & -D_x^{-1} u_{xy} \\ Q D_y & -v_y \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

şeklinde indirgenir. Lax çiftinin hesaplanması için R ile $\hat{A}$ operatörünün komütatörü hesaplanır. Operatörler arasındaki komütasyon bağıntısı

$$[R, \hat{A}] = \begin{pmatrix} [R, \hat{A}]_{11} & [R, \hat{A}]_{12} \\ [R, \hat{A}]_{21} & [R, \hat{A}]_{22} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

ise matris elamanları sırasıyla,

$$[R, \hat{A}]_{11} = (R_{11} \hat{A}_{11} + R_{12} \hat{A}_{21}) - (\hat{A}_{11} R_{11} + \hat{A}_{12} R_{21}) \quad (4.37a)$$

$$[R, \hat{A}]_{12} = (R_{11} \hat{A}_{12} + R_{12} \hat{A}_{22}) - (\hat{A}_{11} R_{12} + \hat{A}_{12} R_{22}) \quad (4.37b)$$

$$[R, \hat{A}]_{21} = (R_{12} \hat{A}_{11} + R_{22} \hat{A}_{21}) - (\hat{A}_{12} R_{11} + \hat{A}_{22} R_{21}) \quad (4.37c)$$

$$[R, \hat{A}]_{22} = (R_{12}\hat{A}_{12} + R_{22}\hat{A}_{22}) - (\hat{A}_{12}R_{12} + \hat{A}_{22}R_{22}) \quad (4.37d)$$

şeklinde hesaplanır. (4.37a) eşitliğinde $\hat{A}$ ile R operatörlerin ilgili terimleri yerlerine yazılırsa

$$[R, \hat{A}]_{11} = \left[D_x^{-1}(v_x D_y - \frac{ac}{b} D_x) D_t - D_x^{-1} u_{xy} \frac{Q}{u_{xy}} D_x D_y \right] - \left[D_t D_x^{-1}(v_x D_y - \frac{ac}{b} D_x) - Q D_y \right] \quad (4.38)$$

elde edilir. İfadedeki ikinci terimdeki türevi D_t , $D_t f = f_t + f D_t$ kuralına göre paranteze uygulanırsa komütasyon

$$[R, \hat{A}]_{11} = \left[D_x^{-1}(v_x D_y - \frac{ac}{b} D_x) D_t - D_x^{-1} u_{xy} \frac{Q}{u_{xy}} D_x D_y \right] - \left[D_x^{-1}(v_{xt} D_y + v_x D_t D_y - \frac{ac}{b} D_t D_x) - Q D_y \right] \quad (4.39)$$

şeklini alır. İfade düzenlenip tüm ifade D_x^{-1} ortak parantezine alınır ve D_x türevi indis notasyonunda yazılırsa $[R, \hat{A}]_{11}$ komütasyonu,

$$[R, \hat{A}]_{11} = D_x^{-1}(v_t - Q)_x D_y \quad (4.40)$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde (4.37)'deki diğer komütasyon bağıntıları da benzer şekilde sırasıyla,

$$[R, \hat{A}]_{12} = D_x^{-1}(u_t - v)_{xy}, \quad (4.41a)$$

$$[R, \hat{A}]_{21} = \frac{1}{u_{xy}} [-cb^2(u_t - v)_{xx} + bQ(u_t - v)_{xy} - b^2c(u_t - v)_{xx} - bv_y(v_t - Q)_x - bv_x(v_t - Q)_y + ac(v_t - Q)_x] D_y \quad (4.41b)$$

$$[R, \hat{A}]_{22} = (v_t - Q)_y \quad (4.41c)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (4.36) matrisinde yerine koyulursa

$$[R, \hat{A}] = \begin{pmatrix} D_x^{-1}(v_t - Q)_x D_y & D_x^{-1}(u_t - v)_{xy} \\ \frac{1}{u_{xy}}[-cb^2(u_t - v)_{xx} + bQ(u_t - v)_{xy} & \\ -b^2c(u_t - v)_{xx} - bv_y(v_t - Q)_x & (v_t - Q)_y \\ -bv_x(v_t - Q)_y + ac(v_t - Q)_x]D_y & \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

bulunur. Sonuç olarak $\hat{A}$ ile R operatörleri, indirgenmiş asimetrik heavenly sistemi için Olver-Ibragimov-Shabat tipinde Lax çifti oluşturur ve sistemin çözümleri için komüt ederler[16].

4.4 Hamilton Fonksiyonu ve İkinci Hamilton Yapı

Magri teoremine göre bir sistemin integre edilebilir bir sistem olabilmesi için bi-Hamilton yapıda olması yeter bir şarttır. Buna göre indirgenmiş 2+1-boyutlu yeni sistemin integre edilebilir olduğunu göstermek için ikinci Hamilton operatörü bulunmalı ve (2.73)'te verilen formatta yazılabileceği ispatlanmalıdır. İkinci Hamilton yapı, (4.35)'te elde edilen tekrarlama operatörü R 'nin (4.27)'deki birinci Hamilton operatörü J_0 'a uygulanmasıyla bulunabilir. Bu durumda ikinci Hamilton operatörü J_1

$$J_1 = RJ_0 = \begin{pmatrix} R_{11}J_0^{11} + R_{12}J_0^{21} & R_{11}J_0^{12} + R_{12}J_0^{22} \\ R_{21}J_0^{11} + R_{22}J_0^{21} & R_{21}J_0^{12} + R_{22}J_0^{22} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

şeklindedir ve buradan da

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b}D_x^{-1} & \frac{v_y}{bu_{xy}} \\ -\frac{v_y}{bu_{xy}} & J_1^{22} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

olarak bulunur ve J_1^{22} anti-simetrik formda

$$J_1^{22} = \frac{1}{2b} \left(v_y^2 D_x \frac{1}{u_{xy}^2} + \frac{1}{u_{xy}^2} D_x v_y^2 \right) - \frac{ac}{2b^2} \left(\frac{v_y}{u_{xy}} D_x \frac{1}{u_{xy}} + \frac{1}{u_{xy}} D_x \frac{v_y}{u_{xy}} \right) \\ + \frac{1}{2b} \left(\frac{v_x}{u_{xy}} D_y \frac{v_y}{u_{xy}} + \frac{v_y}{u_{xy}} D_y \frac{v_x}{u_{xy}} \right) - \frac{1}{2b} \left(Q D_y \frac{1}{u_{xy}} + \frac{1}{u_{xy}} D_y Q \right) \quad (4.45)$$

ile verilir. Bu ifade aynı zamanda (3.25)'teki ikinci Hamilton operatörüne direkt olarak simetri dönüşüm bağıntılarının uygulanmasıyla da bulunabilir. Böylece (4.8) sistemi için ikinci Hamilton yapı da

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{v_x}{u_{xy}} (v_y - \frac{ac}{b}) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

şeklinde yazılabilir. Burada H_0 ikinci Hamilton fonksiyonuna karşılık gelen Hamilton yoğunluğudur ve yine 3+1-boyutlu sistemde olduğu gibi burada da H_0, H_1 gibi Lagrange fonksiyonundan elde edilemez ve tahmin yoluyla denklemini verecek şekilde bulunmalıdır. Bu durumda c_0 bir sabit olmak üzere

$$H_0 = b(c_0 - y)vu_{xy} \quad (4.47)$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde, (3.27)'de elde edilmiş ikinci Hamilton yoğunluğuna simetri indirgemesi yapılarak da H_0 elde edilebilir. Böylece (4.8)'de verilen 2+1-boyutlu sistem bi-Hamilton sistemdir. Yani,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

şeklinde iki Hamilton formunda yazılabilmektedir. Tekrarlama operatörünün, birinci Hamilton operatörü J_0 'a peş peşe uygulanması Magri teoremine göre

$$J_n = R^n J_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.49)$$

şeklinde sonsuz sayıda Hamilton operatörü elde edilebilir. Bu da iki bileşenli indirgenmiş sistemin çoklu(multi)-Hamilton yapıya sahip olduğu ve korunan büyüklüklerinin birbirleriyle Poisson parantezlerinin sıfır olduğu(involution özelliği) anlaşılır.

4.5 Jacobi Özdeşliği

Bu kısımda daha önce bahsedilen J_0 ve J_1 Hamilton operatörleri için Jacobi özdeşliğinin sağlandığı gösterilecektir.

Tanım: $J : A^q \rightarrow A^q$ lineer operatörünün Hamilton operatörü olabilmesi için $\{P, Q\} = \int \delta P . J \delta Q dx dy dz$, ile verilen Poisson parantezinin,

$$\{P, Q\} = -\{Q, P\} \quad (4.50)$$

anti-simetrik

$$\{\{P, Q\}, R\} + \{\{R, P\}, Q\} + \{\{Q, R\}, P\} = 0 \quad (4.51)$$

ve Jacobi özdeşliğini, tüm Q, P ve R fonksiyonları için sağlaması gerekir.

Fakat Jacobi özdeşliğinin (4.51)'de verilen klasik haliyle hesaplanması, simplektik anti-simetrik operatörler için bile oldukça zor ve karmaşık bir hal alabilir. Bu nedenle Jacobi özdeşliğinin hesaplanması P. Olver'in kitabında yer alan Teorem 7.8 kullanarak basitleştirilebilir [13]. Buna göre, Γ_{ij} anti-simetrik ve qxq diferansiyel matris formunda bir operatör ve

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \{\Gamma_{ij} \omega^j \wedge \omega^i\} dx dy dz \quad (4.52)$$

ifadesi de buna karşılık gelen fonksiyonel bi-vektör ise, Γ_{ij} operatörünün Hamilton olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$prV_{\Gamma\omega}(\Theta) = 0 \quad (4.53)$$

ifadesinin sağlanmasıdır. Burada $prV_{\Gamma\omega}$, "prolongation" işlemi olarak adlandırılır ve

$$prV_{\Gamma\theta} = \sum_{i,J} D_J \left(\sum_j \Gamma_{ij} \omega^j \right) \frac{\partial}{\partial \phi_j^i}, \quad J = 1, x, y, z, xx, xy, xz, \dots \quad (4.54)$$

şeklinde tanımlanır [13]. Burada $\phi^1 = u$, $\phi^2 = v$ ye karşılık gelir. (4.27) ve (4.44) denklemlerindeki J_0 ve J_1 operatörlerinin Hamilton olabilmeleri için her iki operatörün ayrı ayrı ve lineer kombinasyonları olan $\alpha J_0 + \beta J_1$ in de Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekir (α ve β sabit katsayılarıdır). Böylece direkt olarak $\alpha J_0 + \beta J_1$ hesaplanırsa J_0 ve J_1 'in Jacobi özdeşliğini sağladığı garanti edilmiş olur. Çünkü $\alpha = 1, \beta = 0$ seçilirse J_0 'ın ve $\alpha = 0, \beta = 1$ seçildiğinde ise J_1 'in Jacobi özdeşliği elde edilmiş olur. Bu nedenle sadece

$$\Gamma = \alpha J_0 + \beta J_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1/bu_{xy} \\ 1/bu_{xy} & J_0^{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{b}D_x^{-1} & \frac{v_y}{bu_{xy}} \\ -\frac{v_y}{bu_{xy}} & J_1^{22} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

ile verilen lineer kombinasyonunun Jacobi özdeşliğini sağladığını kanıtlamamız yeterli olacaktır. Kolaylık açısından $\alpha = \beta = 1$ seçilirse

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b}D_x^{-1} & \lambda \\ -\lambda & AD_x + BD_y + C \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

bulunur ve burada λ, A, B, C sırasıyla

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{bu_{xy}}(v_y - 1), \\ A &= \frac{1}{u_{xy}}\lambda(v_y - \frac{ac}{b}), \\ B &= \frac{v_x}{bu_{xy}^2}(\frac{ac}{b} - 1), \\ C &= -\frac{1}{u_{xy}}(Au_{xxy} + Bu_{xyy} - \lambda v_{xy}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

şeklinde. η ve θ bi-vektörün bileşenleri olmak üzere $\omega^1 = \eta$ ve $\omega^2 = \theta$ seçildiğinde (4.56)'daki Γ ifadesi için (4.52) bi-vektörü

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \{2\lambda(\theta \wedge \eta) + A\theta_x \wedge \theta + B\theta_y \wedge \theta\} dx dy \quad (4.58)$$

haline gelir. Görüldüğü gibi Γ_{ij}, D_x^{-1} terimi(integral) içermesine rağmen bi-vektör Θ içermez. Γ_{11} teriminden gelen tek integral içeren $-D_x^{-1}\eta \wedge \eta$ terimi, $\eta \wedge \eta = 0$ olduğundan sıfır olur. (4.58), (4.53)'te yerine koyularak,

$$prV_{\Gamma\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int \{2prV_{\Gamma\omega}(\lambda)\theta \wedge \eta + prV_{\Gamma\omega}(A)\theta_x \wedge \theta + prV_{\Gamma\omega}(B)\theta_y \wedge \theta\} dx dy \quad (4.59)$$

ve daha açık olarak,

$$\begin{aligned}
prV_{\Gamma\omega}(\Theta) = & \frac{1}{2} \int \left\{ \left[\frac{2}{b} prV_{\Gamma\omega} \left(\frac{v_y}{u_{xy}} \right) - \frac{2}{b} prV_{\Gamma\omega} \left(\frac{1}{u_{xy}} \right) \right] \theta \wedge \eta \right. \\
& + \left[\frac{1}{b} prV_{\Gamma\omega} \left(\frac{v_y^2}{u_{xy}^2} \right) - \left(\frac{ac}{b^2} + \frac{ac}{b} \right) prV_{\Gamma\omega} \left(\frac{v_y}{u_{xy}} \right) + \frac{ac}{b^2} prV_{\Gamma\omega} \left(\frac{1}{u_{xy}} \right) \right] \theta_x \wedge \theta \quad (4.60) \\
& \left. + \left[\left(\frac{ac}{b^2} - \frac{ac}{b} \right) prV_{\Gamma\omega} \left(\frac{v_x}{u_{xy}} \right) \right] \theta_y \wedge \theta \right\} dx dy
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. (4.54) denklemleri kullanılarak yukarıdaki prolongation işlemleri,

$$prV_{\Gamma\omega}(v_x) = D_x(-\lambda\eta + A\theta_x + B\theta_y + C\theta) \quad (4.61a)$$

$$prV_{\Gamma\omega}(v_y) = D_y(-\lambda\eta + A\theta_x + B\theta_y + F\theta) \quad (4.61b)$$

$$prV_{\Gamma\omega}(v_y^2) = 2v_y prV_{\Gamma\omega}(v_y) \quad (4.61c)$$

$$prV_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{u_{xy}}\right) = -\frac{1}{u_{xy}^2} D_y \left(-\frac{1}{b} \eta + \lambda_x \theta + \lambda \theta_x \right) \quad (4.61d)$$

$$prV_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{u_{xy}^2}\right) = -\frac{2}{u_{xy}^3} D_y \left(-\frac{1}{b} \eta + \lambda_x \theta + \lambda \theta_x \right) \quad (4.61e)$$

şeklinde hesaplanarak, (4.60) ifadesinde yerine konulur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
prV_{\Gamma\omega}(\Theta) = & \frac{1}{2} \int \left\{ \left[\frac{2}{bu_{xy}} (-\lambda_y \eta - \lambda \eta_y + A_y \theta_x + A \theta_{xy} + B_y \theta_y + B \theta_{yy} + C_y \theta + C \theta_y) \right. \right. \\
& - \frac{2\lambda}{u_{xy}} \left(-\frac{1}{b} \eta_y + \lambda_{xy} \theta + \lambda_x \theta_y + \lambda_y \theta_x + \lambda \theta_{xy} \right) \theta \wedge \eta \\
& + \left[\frac{2v_y}{bu_{xy}^2} (-\lambda_y \eta - \lambda \eta_y + A_y \theta_x + A \theta_{xy} + B_y \theta_y + B \theta_{yy} + C_y \theta + C \theta_y) \right. \\
& - \frac{2A}{u_{xy}} \left(-\frac{1}{b} \eta_y + \lambda_{xy} \theta + \lambda_x \theta_y + \lambda_y \theta_x + \lambda \theta_{xy} \right) \theta_x \wedge \theta \\
& + \left[\frac{B}{v_x} (-\lambda_x \eta - \lambda \eta_x + A_x \theta_x + A \theta_{xx} + B_x \theta_y + B \theta_{xy} + C_x \theta + C \theta_x) \right. \\
& \left. \left. - \frac{2B}{u_{xy}} \left(-\frac{1}{b} \eta_y + \lambda_{xy} \theta + \lambda_x \theta_y + \lambda_y \theta_x + \lambda \theta_{xy} \right) \theta_y \wedge \theta \right] \right\} dx dy \quad (4.62)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamadan sonra A , B ve C yerlerine yazılır ve ortak terimler bir araya getirilir. Burada amaç integral içinin sıfır veya tam diferansiyel şeklinde olduğunu

göstererek (4.53) denklemini sağlamaktır. Bu nedenle uygun terimler dikkatlice seçilip kısmi integrasyon yardımıyla (4.62)'deki η içeren terimler kendi içlerinde toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2A_y}{bu_{xy}} - \frac{2\lambda\lambda_y}{u_{xy}} - \frac{2v_y\lambda_y}{bu_{xy}^2} - \lambda_y \left(-\frac{ac}{b^2} \frac{1}{u_{xy}^2} - \frac{1}{bu_{xy}^2} \right) \right] \theta_x \wedge \theta \wedge \eta \\
& + \left[\frac{2B_y}{bu_{xy}} + \frac{2C}{bu_{xy}} - \frac{2\lambda\lambda_x}{u_{xy}} - \frac{B\lambda_x}{v_x} \right] \theta_y \wedge \theta \wedge \eta \\
& + \left[\frac{2A}{bu_{xy}} - \frac{2\lambda^2}{u_{xy}} \right] \theta_{xy} \wedge \theta \wedge \eta \\
& + \left[\frac{2B}{bu_{xy}} \right] \theta_{yy} \wedge \theta \wedge \eta
\end{aligned} \tag{4.63}$$

olur. Kısmi integrasyon yapılırken integral dışına çıkan terimler sınır değerlerinde sıfır olur. İfadedeki üçüncü ve dördüncü terimlere yeniden kısmi integrasyon uygulanırsa (4.63)'teki terimlerin kendi içinde

$$\left[\frac{2A_y}{bu_{xy}} - \frac{2\lambda\lambda_y}{u_{xy}} - \frac{2v_y\lambda_y}{bu_{xy}^2} + \frac{\lambda_y}{bu_{xy}^2} \left(\frac{ac}{b} + 1 \right) + \left(\frac{\lambda B}{v_x} \right)_y \right] \theta_x \wedge \theta \wedge \eta = 0 \tag{4.64a}$$

$$\left[\frac{2B_y}{bu_{xy}} + \frac{2C}{bu_{xy}} - \frac{2\lambda\lambda_x}{u_{xy}} - \frac{B\lambda_x}{v_x} + \left(\frac{B\lambda}{v_x} \right)_x - \left(\frac{2B}{bu_{xy}} \right)_y \right] \theta_y \wedge \theta \wedge \eta = 0 \tag{4.64b}$$

$$\left[\frac{2A}{bu_{xy}} - \frac{2\lambda^2}{u_{xy}} + \frac{2\lambda B}{v_x} \right] \theta_{xy} \wedge \theta \wedge \eta = 0 \tag{4.64c}$$

$$\left[\frac{\lambda B}{v_x} - \frac{\lambda B}{v_x} \right] \theta_x \wedge \theta_y \wedge \eta = 0 \tag{4.64d}$$

şeklinde sıfır olduğu hesaplanır. Benzer şekilde (4.62)'deki sadece θ bulunan terimler kendi içlerinde toplanıp kısmi integrasyon işlemi yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2v_y}{bu_{xy}^2} (B_y + C) - \frac{2A}{u_{xy}} \lambda_x + \left(-\frac{ac}{b^2} \frac{1}{u_{xy}^2} \right) (B_y + C) \right] \theta_y \wedge \theta_x \wedge \theta \\
& + \left[\frac{2v_y}{bu_{xy}^2} A - \frac{2A}{u_{xy}} \lambda + \left(-\frac{ac}{b^2} \frac{1}{u_{xy}^2} \right) A \right] \theta_{xy} \wedge \theta_x \wedge \theta \\
& + \left[\frac{2v_y}{bu_{xy}^2} B + \left(-\frac{ac}{b^2} \frac{1}{u_{xy}^2} - \frac{1}{bu_{xy}^2} \right) B \right] \theta_{yy} \wedge \theta_x \wedge \theta \\
& + \left[\frac{B}{v_x} (A_x + C) - \frac{2B}{u_{xy}} \lambda_y \right] \theta_x \wedge \theta_y \wedge \theta \\
& + \left[\frac{AB}{v_x} \right] \theta_{xx} \wedge \theta_y \wedge \theta \\
& + \left[\frac{B^2}{v_x} - \frac{2B\lambda}{u_{xy}} \right] \theta_{xy} \wedge \theta_y \wedge \theta
\end{aligned} \tag{4.65}$$

ifadesi elde edilir. İfadedeki ikinci, üçüncü ve beşinci terimlere yeniden kısmi integrasyon uygulanıp benzer ifadelerin kendi içlerinde yine sıfır yaptığı görülür. Böylece Jacobi özdeşliği J_0 , J_1 ve $\alpha J_0 + \beta J_1$ lineer kombinasyonu için sağlandığını gösterir. Sonuç olarak J_0 ve J_1 Hamilton operatörleri ve 2+1-boyutlu yeni sistem için Hamilton çifti oluştururlar(Poisson pencil). Yani (4.10) sisteminin bi-Hamilton ve Magri teoremine göre integre edilebilir bir sistem olduğu kanıtlanmış olur.

4.6 Simetriler ve Hareket İntegralleri

Hamilton operatörleri, komüt eden simetriler ile birbiriyle Poisson parantezleri sıfır olan(involution özelliği) korunan büyüklükler arasında doğal bir bağ sağlarlar[12]. İki bileşenli indirgenmiş (4.8) sistemi de sonsuz hiyerarşi simetrilerine sahiptir ve sistemin nokta simetri üreteçleri,

$$\begin{aligned}
X_1 &= f(x) \partial_x, \\
X_2 &= (-tg_v - tvh_v - uh_v - w_v + th) \partial_t + e(y) \partial_y \\
&\quad + (-tv g_v + tv^2 h_v - uv h_v - vw_v + tg + uh + w) \partial_u + g \partial_v,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

şeklinde bulunur. Burada $f(x)$, $g(y, v)$, $h(y, v)$, $w(x, y, v)$ ve $e(y)$ fonksiyonları keyfi fonksiyonlardır. Bu nokta simetrileri hareket integralleri adı verilen Hamiltonlarla üretilebilirler. Hareket integrallerini bulmak için daha önce (3.37)'de tanımlanan

$$\begin{pmatrix} \delta_u H \\ \delta_v H \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \hat{\phi}^u \\ \hat{\phi}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[(bv_y - ac)D_x + bv_x D_y + bv_{xy}] & bu_{xy} \\ -bu_{xy} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}^u \\ \hat{\phi}^v \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

şeklinde verilen Noether teoreminin Hamilton formunu kullanabiliriz. Hareket integrali H , varyasyonel simetri için simetri karakteristikleri $\hat{\phi}^u$ ve $\hat{\phi}^v$ terimlerine karşılık gelmektedir. İlk simetrisi X_1 için, $\hat{\phi}^u = -u_x f(x)$ ve $\hat{\phi}^v = -v_x f(x)$ simetri karakteristikleri olmak üzere,

$$H^1 = (bv u_x u_{xy} + \frac{ac}{2} u_x^2) f(x) \quad (4.68)$$

X_1 nokta simetrisine karşılık gelen korunan Hamilton yoğunluğu bulunur. X_2 simetrisi için hareket integrali mevcut değildir. Ancak keyfi fonksiyonların özel bir seçimiyle ikinci hareket integralleri bulunabilir. Örnek olarak $h=0$, $w=0$, $g=b$ ve $e=1$ seçildiğinde

$$X_2 = \partial_y + bt \partial_u + b \partial_v, \quad (4.69)$$

ve karakteristikler

$$\hat{\phi}^u = bt - u_y, \quad \hat{\phi}^v = b - v_y$$

şeklinde olur. (4.69) ifadeleri (4.67)'de yerine koyulursa

$$H^2 = bv u_{xy} (u_y - bt) + \frac{1}{2} (b^2 - ac) u u_{xy} \quad (4.70)$$

olarak X_2 nokta simetrisinin özel bir hali için karşılık gelen korunan ikinci Hamilton yoğunluğu bulunur. Keyfi fonksiyonların değişik seçimleri değişik hareket integrallerini ortaya çıkarabilir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada 3+1-boyutta integre edilebilir asimetric heavenly denkleminin özel bir simetri indirgemesi yapılarak, 2+1-boyutlu yeni bir denklem elde edilmiştir. Bu denklemin integre edilebilirliği bi-Hamilton yapısı incelenerek Magri teoremine göre integre edilebilir bir sistem olduğu sonucuna varılmıştır. Asimetric heavenly denklemi, ortak simetri içeren, lineer olmayan, ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasından elde edilen kanonik denklemlerden biridir. Ortak simetri içeren denklemlerin önemi, simetrilerin özel bir durumu için tekrarlama bağıntısına sahip olmalarıdır. Bu durum söz konusu denklemin simetri yöntemiyle çözmeye olanak sağlar.

Giriş bölümünde integre edilebilir sistemlerin tarihsel gelişimi kısaca ele alınmıştır. Özellikle literatürde örneği az olan ve son yıllarda gelişme kaydeden 3+1-boyutlu ve simetri indirme metodu kullanılarak 2+1-boyutlu denklemlerin önemi vurgulanmıştır. Bu denklemlerin önemi, bağımlı değişkeni temsil eden skaler alanın, Einstein alan denklemlerini sağlayan, (anti)-self-dual Ricci-düz uzay metriğini oluşturmasıdır. Bu nedenle denklemlerin integre edilebilirliği araştırmak (anti)-self-dual kütle çekime farklı bir bakış açısı getirmesi açısından önemlidir.

İkinci bölümde Magri teoremini ispatlamak için izlenecek yol ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Öncelikle klasik Hamilton formalizminin Dirac tarafından nasıl genelleştirildiği anlatılmıştır. Bu yöntem Dirac bağ denklemleri teorisi adı verilir. Klasik Poisson parantezlerinin daha genel hali olan Dirac parantezleri elde edilerek, her Lagrange fonksiyonu için Hamilton formalizminin geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu

durum basit bir örnekle anlatılarak teoremin önemi vurgulanmıştır. Son olarak 1+1-boyutta Korteweg de-Vries (KdV) ve Boussinesq denklemlerinin Magri teoremine göre integre edilebilir sistemler olduğu örnek olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde asimetric heavenly denkleminin bi-Hamilton yapısı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Önce denklem iki bileşenli formda yazılarak, bu denklem sistemini veren uygun Lagrange yoğunluğu elde edilmiştir. Burada önemli nokta Lagrange yoğunluğunun hızın karesi (kuadratik) terimlerini içermeyen, sadece hızın birinci kuvvetlerini içerecek şekilde seçilmesidir. Bu durum Dirac'ın bağ denklemleri teorisini kullanmamız açısından oldukça önemlidir. Buradan asimetric heavenly denkleminin simplektik yapısı elde edilerek birinci Hamilton operatörü bulunmuştur. Simetrilere elde edilen tekrarlama operatörü birinci Hamilton operatörüne uygulanmasıyla ikinci Hamilton operatörü elde edilmiştir. Hamilton operatörlerine uygun Hamilton yoğunlukları bulunarak sistemin bi-Hamilton yapıya sahip olduğu Magri teoremine göre ispatlanmıştır. Ayrıca bu denklem daha geleneksel bir yöntem olan, Lax çiftine de sahip olduğundan integre edilebilir bir sistemdir. Bu denklem için elde edilen tekrarlama operatörü ve simetri durumundan elde edilen operatör (Frechet türevi) ile Olver-Ibragimov-Shabat tipinde Lax çifti oluşturmaktadır. Asimetric heavenly denkleminin bütün nokta simetrisi hesaplanarak, bazı simetrislere karşılık gelen korunan büyüklükler(simetri Hamiltonları), Noether teoreminin Hamilton formu kullanılarak elde edilmiştir.

Son bölümde asimetric heavenly denkleminin simetrislerinden özel bir seçim yapılarak 3+1-boyutlu denklem 2+1-boyutlu yeni bir denklem sistemine indirgenmiştir. Elde edilen yeni 2+1-boyutlu sistemin integre edilebilir olup olmadığı, asimetric heavenly denkleminde uygulanan yöntem ile bulunmuştur. Yeni sistem için dejenere Lagrange yoğunluğundan başlayarak, iki Hamilton operatörü ve simetrisler için tekrarlama operatörü elde edilerek sistemin bi-Hamilton yapıya ve Magri teoremine göre integre edilebilir olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca sistemin bütün Lie nokta simetrisi elde edilerek, bunlara karşılık gelen simetri Hamiltonları elde edilmiştir. Simetri indirgemesinde önemli diğer bir nokta ise, bütün temel denklemlerin $J_0, J_1, K, \hat{A}, R, H_0, H_1$ ve L 'nin simetri indirgemesi yapılarak elde edilebilir

olmasıdır. Yani indirgenmiş sistem için yapılan hesaplamalardan elde edilen bütün ana denklemler aynı zamanda orijinal dört boyutlu denklemden yapılacak simetri indirgemesi ile aynı olmalıdır. İlk bakışta yapılan simetri dönüşümü ile dört boyutlu sistemden üç boyutlu sisteme geçişin oldukça kolay olduğu anlaşılabilir. Ancak seçilen simetri dönüşümünde yapılacak çok küçük değişiklikler bile indirgenmiş sistemin bi-Hamilton yapısını ve yukarıda bahsedilen denklemler arasındaki uyumluluğu bozmaktadır. Eğer daha genel simetrileri seçip indirgeme yapılırsa, çoklu Hamilton yapıyı elde etmek neredeyse imkansız hale gelmektedir. Simetri indirgemeleri altında çoklu Hamilton yapının korunması oldukça önemli ve gelecek araştırmalar için ilginç problem sunmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Zakharov V.E. ve Schulman E.I., (1991). What is Integrability, First Edition, Springer-Verlag.
- [2] Dickey L.A., (2003). Soliton Equations and Hamiltonian Systems, Second Edition, World Scientific, London.
- [3] Neyzi F., Nutku Y ve Sheftel MB., (2005). "Multi-Hamiltonian structure of Plebanski's second heavenly equation", J.Phys. A:Math. Gen., 38, 8473-85.
- [4] Neyzi F., Sheftel M:B. ve Yazıcı D., (2007). "Symmetries, Integrals and Three Dimensional Reductions of Plebanski's Second Heavenly Equation", Physics of Atomic Nuclei Yeshiva University Press, 70(3): 584-592
- [5] Sheftel M. B. ve Malykh A. A., (2009). "On classification of second-order PDEs possessing partner symmetries", J. Phys. A: Math Theor., 42 395202.
- [6] Sheftel M.B. ve Yazıcı D., (2010). "Bi-Hamiltonian representation, symmetries and integral of Mixed heavenly and Husain systems". Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 17(4): 453-484.
- [7] Goldstein H.,(2001). Classical Mechanics, Third Edition, Addison-Wesley, London.
- [8] Dirac P., (1964). Lectures on Quantum Mechanics, Yeshiva University Press, New York.
- [9] Wikipedia, Dirac Bracket, http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_bracket, (20.04.2013).
- [10] Yazıcı D., (2000). Çok Bileşenli Süper Çözülebilir Sistemlerin Hamilton Yapıları, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [11] Das, A.,(1989). Integrable Models, First Edition, World Scientific Publishing, New York.
- [12] Magri F., (1978). "A simple model of the integrable Hamiltonian equation", J. Math. Phys., 19: 1156-1162.
Magri F., (1980). Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (Lecture Notes in Physics vol 120) ed. M. Boiti, F. Pempinelli and G. Soliani, Springer, New York.

- [13] Olver P.J., (1986). Applications of Lie Groups to Differential Equations, First Edition, Springer, New York.
- [14] P.M. Santini ve A.S. Fokas, (1988). "Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions", Commun. Math. Physics., 115(3): 375-419.
- [15] Yazici D., (2011). "Bi-Hamiltonian Structure of An Asymmetric Heavenly Equation", J. Phys. A: Math. Theor, 44 505203
- [16] Ibragimov N.H. ve Shabat A.B. , (1980). "Evolutionary equations with nontrivial Lie-Backlund group" Funct. Anal. Appl.,14: 25-36
- [17] Wolf T., (1985). "An analytic algorithm for decoupling and integrating systems of nonlinear partial differantial equations", J. Comp. Phys. 60(3): 437-46

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hakan SERT
Doğum Tarihi ve Yeri : 13.06.1989 Eminönü
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : hakansert13@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Fizik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Beyoğlu Anadolu Lisesi	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011	Yıldız Teknik Üniversitesi	Öğrenci Asistanı
2012	Yıldız Teknik Üniversitesi	Öğrenci Asistanı
2013	Yıldız Teknik Üniversitesi	Öğrenci Asistanı

YAYINLARI

Bildiri

1. Yazıcı D., Sert H., (2013). "Symmetry Reduction of Asymmetric Heavenly equation and 2+1-dimensional Bi-Hamiltonian Integrable System", Fifteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, 8 Haziran 2013, Varna.