

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LİNEER OLMAYAN KUANTUM MEKANİĞİNİN TEMEL İLKELERİ

DENİZ BARDIZ OKAT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. HASAN TATLIPINAR**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KUANTUM MEKANİĞİNİN TEMEL İLKELERİ

Deniz Bardız OKAT tarafından hazırlanan tez çalışması 24.05.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Bölümü Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. K.Gediz AKDENİZ

İstanbul Üniversitesi

Doç. Dr. Kutsal BOZKURT

Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi hazırladığım süre boyunca benden yardımlarını esirgemeyen, başta sayın Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR'a, Yıldız Teknik Üniversitesi Fizik Bölümüne ve bana sürekli destek olan aileme teşekkür ederim.

Mayıs , 2012

Deniz Bardız OKAT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
KISALTMA LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.1.1 Lineer Kuantum Mekaniğin Temel Varsayımları	1
1.2 Tezin Amacı	6
1.3 Hipotez	6
BÖLÜM 2	
LİNEER KUANTUM MEKANİĞİN BAŞARILARI VE AÇMAZLARI	7
2.1 Bohr ve Einstein Arasındaki Tartışma	10
BÖLÜM 3	
MAKROSKOPİK KUANTUM ETKİLER	13
3.1 Süperiletken Malzemelerde Makroskopik Kuantum Etkisi.....	13
3.2 Helyumda Makroskopik Kuantum Etkisi	14
3.3 Kuantum Hall Olayı	15
3.4 Eksitonların Bose-Einstein Yoğunlaşması	15
BÖLÜM 4	
LİNEER OLMAYAN KUANTUM MEKANİĞİN TEMEL TEORİ VE PRENSİPLERİ.....	17
4.1 Lineer Olmayan Kuantum Mekaniğin Temel Prensipleri	19
4.2 Lineer Olmayan Kuantum Mekaniği Problemine Genel Bir Bakış	24
4.2.1 Ters Saçılma Yöntemi	25

4.2.2	Backlund Dönüşümleri.....	27
4.2.3	Hirota Metodu	27
4.2.4	İlerleyen Dalga Çözümleri ve Doğrusal Olmayan Schrödinger Denklemleri	27
4.3	Lineer Olmayan Kuantum Mekaniğin Temel Prensipleri	29
4.3.1	Doğrudan Problem Kısmı.....	29
4.3.2	Saçılma Verilerinin Zaman İçindeki Evrimi	32
4.3.3	Ters Problem.....	33
BÖLÜM 5		
SONUÇ VE ÖNERİLER		34
KAYNAKLAR		37
ÖZGEÇMİŞ		39

KISALTMA LİSTESİ

EPR	Einstein, Podolski, Rosen
BCS	Bardeen, Cooper, Schrieffer
G-L	Ginzburg-Landau
KdV	Korteweg de Vries

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4. 1 Ters saçılma yönteminin işlem akış şeması	26
Şekil 4. 2 Kare kuyu potansiyel şeması.....	30

LİNEER OLMAYAN KUANTUM MEKANIĞININ TEMEL İLKELERİ

Deniz Bardız OKAT

Fizik Bölümü Anabilimdalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Hasan TATLIPINAR

Lineer Kuantum Mekaniği yaklaşık olarak yüzyıllık bir teoridir. Atomik ölçekte fizik yasalarını açıklamak için oluşturulan bu teori bir yüzyıl boyunca oldukça başarılı olmuştur. Bu teori kullanılarak yeni teknolojiler keşfedilmiş, günlük hayatın birçok alanında yaygın olarak kullanılmıştır. Lineer kuantum mekaniği teorisi kendisinden önce geçerli olan klasik fizik teorisi üzerine inşa edilmiş birçok kavramın değişmesine neden olmuştur, bu nedenle felsefede, sosyal bilimlerde yeni akımların oluşmasına neden olmuştur. Bunun yanında fizikte yapılan süperiletkenlik, süperakışkanlık, Bose-Einstein yoğunlaşması gibi bazı deneylerin lineer kuantum mekaniği kullanılarak anlaşılması zordur. Bu gibi deneyleri açıklamak için son yıllarda literatürde lineer olmayan kuantum mekaniği teorisi kullanılması gerektiğini savunan çalışmalar artmaktadır. Bu tezin amacı bu çalışmaları derleyerek lineer olmayan kuantum mekaniğinin temel ilkelerini ortaya koymaktır.

Anahtar Kelimeler:Lineer olmayan kuantum mekaniği, ters saçılma problemi, Lax operatörü, lineer olmayan süperpozisyon.

ELEMENTARY PRINCIPLE OF NONLINEAR QUANTUM MECHANICS

Deniz Bardız OKAT

Department of Physics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Linear quantum mechanics is a one century theory to explain physical laws in atomic world, it has great success in new technology and it has changed many philosophical explanation of classical point of view in natural and social sciences. But recently a lots of new physical macroscopic observations have no simple explanation in linear quantum mechanics such as superconductivity, superfluidity, BEC, quantum entanglement ect. On the other hand macroscopic world shows nonlinear behavior and there are many effort to do physical theory for nonlinear dynamical systems. In the literature recently there are many study about nonlinear quantum systems which is try to explain macroscopic quantum effects mentioned above. The main aim of this thesis is to review this studies and the principle of nonlinear quantum mechanics .

Key words: Nonlinear quantum mechanics, invers scattering problem, Lax operator, nonlinear superposition.

1.1 Literatür Özeti

1.1.1 Lineer Kuantum Mekaniğin Temel Varsayımları

1900'lu yılların başında atomik ölçekte yapılan bazı deneylerin (Siyah cisim ışıması, fotoelektrik olay, x-ışınları spektumu vb.) sonuçları ile klasik mekanik modellerin öngörülerinin birbirleri ile uyuşmadığı görüldü. Bu nedenle atomik ölçekteki olayları açıklayacak yeni bir fizik kavramları bütünlüğü oluşturuldu. Planck, Einstein, Bohr, Pauli, de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Born, Dirac ve dönemin daha birçok bilim insanı tarafından oluşturulan bu kavramlar bütünlüğü kuantum mekaniği adını aldı. Buna göre atomik ölçekteki mekanik ile klasik mekanik arasında bir çok kavramsal farklılık vardır. Klasik mekanikte bir büyüklük ölçüldüğünde, ölçülen (veya gözlenen) büyüklük ölçüm sisteminden bağımsızdır. Kuantum mekaniğinde ise ölçülen (veya gözlenen) büyüklük ile ölçüm sistemi birbirinden bağımsız değildir. Bu nedenle farklı ölçüm koşulları farklı sonuçlar verebilir. Klasik mekanikte bir cismin hareketini veren denklemlerin çözümleri cismin konumu kesin olarak belirler, kuantum mekaniğinde ise bir sistemi temsil eden büyüklük, kompleks olan bir fonksiyon ile temsil edilir ve bu fonksiyonun karesi (normu) o sistemin olasılık yoğunluğunu verir. Böylece klasik mekaniğe ve kuantum mekaniğine göre tanımlanan fiziksel kavramlar arasında önemli yorum farkları vardır. Günümüzde, kuantum mekaniğinin genel olarak kabul görmüş yorumu Copenhagen yorumu olarak adlandırılır[1]. Bu teorinin matematiksel yapısı bir lineer vektör uzayı olan Hilbert uzayı tarafından tanımlanır. Yüz yıllık teori olan lineer kuantum mekaniğinin temel varsayımlarını belirten çok sayıda kaynak kitap

verilebilir[2]. Bu tezde lineer olmayan kuantum mekaniğinin temel kavramlarını açıklamak için ana kaynak olarak Pang X-F ve Feng Y-P nin “Quantum Mechanics in Lineer olmayan System” isimli kitabı , R. H. Ens ve G.C. McQuire nin “Nonliner Physics” ve Maciej Dunajski nin “Solitons, Instantons and Twistor” adlı kitapları kullanılmıştır[3].

Lineer kuantum teorisinin temel kavramları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1) Mikroskopik parçacığın durumu Hilbert uzayında bir $|\psi\rangle$ vektör ile ya da koordinat uzayında bir $|\psi(r, t)\rangle$ dalga fonksiyonuyla ifade edilir. Dalga fonksiyonu yalnızca mikroskopik parçacığın hareketini ve dalga doğasını tanımlar. Ayrıca, eğer β bir sabitse o zaman hem $|\psi\rangle$ hem de $\beta|\psi\rangle$ aynı durumu tanımlar. Yani $\langle\psi|\psi\rangle=1$ normalize dalga fonksiyonu, parçacığın durumunu tanımlamak için sık sık kullanılır.

2) Hilbert uzayında fiziksel bir büyüklük, X koordinatı, P momentum ve E enerjisi gibi lineer bir operator ile temsil edilir ve operatörün özvektörleri Hilbert uzayının bir bazını oluşturur. Gözlenebilir mekanik büyüklükler özdeğerleri gerçek olan Hermitik operatörlerle temsil edilirler. Bu yüzden bir fiziksel büyüklüğün özdeğerleri hep lineer operatörlere karşılık gelir. Farklı özdeğerlere denk gelen özvektörler ortogonal yapıdadır. Hermitik operatorün tüm öz durumları ortogonaldır ve $\{\psi_L\}$ tam kümesinden oluşur. Herhangi bir durum vektörü $\psi(r, t)$, operatörün özvektörleri cinsinden,

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_L C_L \psi_L(\vec{r}, t) \text{ ya da } |\psi(\vec{r}, t)\rangle = \sum_L \langle\psi_L|\psi\rangle |\psi_L\rangle \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $C_L = \langle\psi_L|\psi\rangle$, L gösterimdeki dalga fonksiyonudur. Eğer L 'nin spektrumu sürekli ise (1.1) ifadesindeki toplam, bir integralle yer değiştirir. Eşitlik (1.1) mikroskopik parçacığın dalga fonksiyonu $\psi(r, t)$ ' nin kendi alt sistemi üzerindeki projeksiyonu gibi düşünülebilir, bu ise lineer kuantum mekaniğinde farklı gösterimler arasındaki geçişin temel yapısını verir. $\psi(r, t)$ ile verilen kuantum durumunda L büyüklüğünün L' de bulunma olasılığı kesikli spektrum durumunda $|C_{L'}|^2 = |\langle\psi_{L'}|\psi\rangle|^2$ şeklinde , sürekli spektrum durumunda ise $|\langle\psi_{L'}|\psi\rangle|^2 dL$ şeklinde ifade edilir.

Herhangi bir mekanik büyüklüğün tek ölçümünde, bu büyüklüğe karşılık gelen lineer operatörün özdeğerlerinin sadece biri elde edilebilir ve sistem için, bu özdeğere ait öz durumdadır denir. Bu lineer kuantum mekaniğin fiziksel büyüklüklerin ölçümüne ait temel bir yaklaşımıdır.

3) A fiziksel büyüklüğünün ortalama değeri $\langle A \rangle$ keyfi bir $|\psi\rangle$ durumu için,

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (1.2)$$

şeklindedir. Aynı ifade, dalga fonksiyonu normalize ise

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \text{ şeklinde de gösterilir.}$$

Yukarıdaki ortalama hesabı sayesinde A' nın mümkün değerleri elde edilir. Bu mümkün değerlerini bulmak için, A' yı veren dalga fonksiyonunu kesin olarak bilmek gerekir. Yani, $(\overline{\Delta A})^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ olmak üzere $(\overline{\Delta A})^2 = 0$ olacak durumu veren dalga fonksiyonu bulunmalıdır. Bu da $\hat{A}$ operatörü için bir özdeğer problemine dönüşür,

$$\hat{A}\psi_L = A\psi_L \quad (1.3)$$

Bu yukarıdaki eşitlikten A operatörünün özdeğerleri spektrumunu ve ona karşılık gelen ψ_L özfonksiyonları hesaplanabilir. Burada, A' nın öz durumları, fiziksel büyüklüğün ölçümünde elde edilen değerlere karşılık gelecektir. İşte bu varsayım, lineer kuantum mekaniğindeki mikroskopik parçacıkların hareketinin istatistiksel doğasını tanımlar.

4) Lineer kuantum mekaniğinin tanımlandığı Hilbert uzayı lineer bir uzaydır. Bu uzayda mekanik büyüklükleri tanımlayan operatörler lineerdir. Bir lineer operatörün özvektörleri lineer süperpozisyon ilkesini sağlar. Bir lineer operatörün özvektörleri olan $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ durumlarının lineer kombinasyonu da o lineer operatörün öz durumudur. C_1 ve C_2 sabit katsayılar olmak üzere,

$$|\psi\rangle = C_1|\psi_1\rangle + C_2|\psi_2\rangle \quad (1.4)$$

'de bir öz durumdur. Kuantum durumlarının lineer süperpozisyon prensibi, operatörlerin lineer karakterinden kaynaklanır ve bu nedenle kuantum teorisi, lineer bir teori olarak adlandırılır.

5) Uygunluk ilkesi: Eğer iki klasik mekaniksel büyüklük, A ve B , aşağıdaki Poisson eşitliğini sağlarsa,

$$\{A, B\} = \sum_n \left(\frac{\partial A}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial B}{\partial q_n} \right)$$

kuralı geçerlidir. Burada q_n ve p_n klasik sistemdeki genelleştirilmiş koordinat ve momentumdur. Kuantum mekaniğinde ise bu $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ operatörleri için aşağıdaki gibi komutatör ilişkisi yazılabilir.

$$[\hat{A}, \hat{B}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = i\hbar\{\hat{A}, \hat{B}\} \quad (1.5)$$

$i=\sqrt{-1}$ ve $\hbar$ Planc sabitidir. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ sırasıyla q_n ve p_n olarak alınırsa

$$[\hat{p}_n, \hat{q}_m] = -i\hbar\delta_{nm} \text{ ve } [\hat{p}_n, \hat{p}_m] = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu ifadeye göre , fiziksel bir büyüklüğün elde edilen değerleri kesikli (kuantumlu) yapıda olabilirler. Bu durum, kesikli “quanta” fikrinin oluşmasının ve bu tür yeni mekaniğin kuantum mekaniği ismi almasının temel nedenidir.

Bu temel prensip kullanılarak Heisenberg belirsizlik bağıntısı

$$(\overline{\Delta A})^2 (\overline{\Delta B})^2 \geq \frac{|C|^2}{4} \quad (1.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$iC = [\hat{A}, \hat{B}] \text{ ve } \Delta A = \langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \rangle \text{ 'dır.}$$

Konum ve momentum operatörleri için Heisenberg belirsizlik bağıntısı, aşağıdaki genel forma dönüşür:

$$|\Delta x| |\Delta p| \geq \frac{\hbar}{2}$$

6) Mikroskopik bir parçacığın kuantum durumunun zamana bağımlılığı Shrödinger eşitliği ile hesaplanır.

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (1.7)$$

Bu, uzay zamanda mikroskopik parçacıklar için en temel hareket eşitliğidir. Bu eşitlikte H , sistemin Hamiltonien operatörüdür.

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{V}$$

$\hat{T}$ kinetik enerji, $\hat{V}$ potansiyel enerji operatörüdür. Bu yüzden, herhangi bir zamanda bir kuantum sistemin durumu sistemin Hamiltonienisiyle hesaplanır. Eşitlik (1.7), lineer kuantum mekaniğinin temelini oluşturan ψ dalga fonksiyonunun lineer eşitliğidir. Bu da sistemin neden lineer kuantum mekaniği teorisine dayandırıldığına başka bir sebebidir. Eğer sistemin kuantum durumu t_0 anında $|\psi(t_0)\rangle$ ise t anındaki dalga fonksiyonu ve t anındaki mekanik büyüklükler $\hat{U}(t, t_0)$ birim operatörü cinsinden

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (1.8)$$

şeklinde yazılır.

$\hat{U}(t, t_0) = 1$, $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = I$ ve $\hat{U}(t, 0) = \hat{U}(t)$ ifadeleri kullanıldığında hareket denklemi,

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H} \hat{U}(t) \quad (1.9)$$

şeklini alır. Eğer $\hat{H}$ zamana açıkça bağlı değilse

$$\hat{U}(t) = e^{-i\left(\frac{\hat{H}}{\hbar}\right)t}$$

şeklinde, zamana açık bir şekilde bağlıysa,

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 \hat{H}(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_1 \hat{H}(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_2) + \dots \quad (1.10)$$

şeklinde yazılır. Bilinmesi gereken önemli bir nokta da sistemin Hamiltonienisi sistemin durumuna ya da dalga fonksiyonuna bağlı değildir. Bu, lineer kuantum mekaniğinin en önemli varsayımlarından biridir.

7) Özdeş Parçacıklar: Bir sistemde özdeş parçacıklar yer değiştirdiğinde yeni bir fiziksel durum oluşur. Başka bir deyişle dalga fonksiyonu $\hat{P}_{kj}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ koşulunu sağlar. Burada $\hat{P}_{kj}$ değiş tokuş operatörüdür ve $\lambda = \pm 1$ olur. Bu nedenle parçacıkların dalga fonksiyonları simetrik (bozon, $\lambda = 1$), ya da antisimetrik (fermion, $\lambda = -1$)'tir.

1.2 Tezin Amacı

Lineer kuantum mekaniği mikroskopik ölçekteki fizik olaylarını açıklamakta oldukça başarılı olmuş bir teoridir. Bu teorinin sonucu birçok teknolojik ve bilimsel gelişme sağlanmıştır. Fakat makroskopik ölçekte gözlemlenen bazı kuantum olayların lineer kuantum mekaniği kullanılarak anlaşılması kolay değildir, bu nedenle literatürde bu tür olayların lineer olmayan kuantum mekaniği ile açıklanabileceğini belirten birçok çalışma vardır. Bu tezin amacı bu çalışmaların ortaya koyduğu lineer olmayan kuantum mekaniğinin temel ilkelerini incelemektir.

1.3 Hipotez

Makroskopik kuantum olayları lineer olmayan kuantum mekaniğine göre incelenebilir. Bu durumda lineer kuantum mekaniğindeki dalga fonksiyonları çözümleri yerine soliton çözümleri geçerli olur. Soliton çözümleri dalga parçacık gibi lineer kuantum mekaniğinin tartışılan kavramlarının ortadan kalkmasını sağlar ve makroskopik kuantum gözlemlerine açıklama getirir.

LİNEER KUANTUM MEKANİĞİN BAŞARILARI VE AÇMAZLARI

Heisenberg, Schrödinger, Bohn, Dirac ve diğerleri tarafından mikroskopik parçacıkların özelliklerini açıklayan lineer kuantum teorisi, temelde dış potansiyel alan varlığında, mikroskopik parçacıkların hareketlerinin, görelî olmayan lineer Schrodinger denklemi kullanarak hesaplanmasına dayanır. Aynı şekilde görelî hareketlerde ise Dirac ve Klein-Gordon eşitliği kullanılır. Kuantum mekanik teorisinin kullanıldığı yerler, atomlar, moleküller, atomaltı parçacıklar, elektronik, optik sistemler, katıhal durumda bant yapılar gibi alanlardır. Teori, dış manyetik alan varlığında mikroskopik parçacıkların özelliklerini, optik-akustik dalgaları ve ısı radyasyonu da tanımlar. Hatta makroskopik davranış gösteren optik, mekanik ve elektriksel sistemlerin incelenmesinde de kullanılır. Yani lineer kuantum mekaniği mikroskopik davranış gösteren parçacıkların hareket kanunlarını tanımlar.

Lineer kuantum mekaniği, elektron, foton, fonon eksiton, atom, molekül, çekirdek, temel parçacıklar gibi mikroskopik parçacıklar ve kuazi parçacıkların madde temelinde hareketlerinin tanımlanması gibi olaylarda da çok başarılıdır. Atom, molekül ve alaşım spektrumları, yoğun maddelerin elektriksel, optik ve manyetik özellikleri de yapılan deney sonuçlarıyla örtüşür.

Modern bilimin inşasında kuantum mekaniğin çok büyük etkisi olduğu gibi, bu teori diğer bilim dallarına da ilham kaynağı olmuştur. Kuantum istatistiği, kuantum alan teorisi, kuantum kimyası, kuantum biyolojisi gibi. Lineer teorisinin en önemli

başarılarından biri de hidrojen, helyum gibi atomların enerji spektrumlarını çok iyi açıklamasıdır. Öyle ki hesaplanan enerji değerleri deney sonuçlarıyla tamamen örtüşmektedir.

Lineer kuantum teorisinin bu büyük başarısına rağmen yetersiz olduğu, tartışmaya açık yanları da vardır. Bu durum, Bohr ve Einstein'ı uzun sürecek bir bilimsel tartışmanın içine çekmiştir. Bu tartışmalar hala günümüzde de devam etmektedir.

Lineer kuantum mekaniğin bu zorlukları iyi bilinmekte ve bilim insanları tarafından hala eleştirilmektedir. Lineer kuantum mekaniğinin kurucularından biri olan Dirac, 1975 de Avustralya'da New South Wales Üniversitesi'ni ziyareti sırasında konuşma yapmış ve kuantum mekaniğin büyük zorluklarından söz etmiştir. Dirac'a göre büyük zorluklardan biri yüklü parçacıklar ve elektrik alan arasındaki etkileşmenin çok hassas bir dengeye dayanmasıdır. Eğer parçacık yükünün bir noktada yoğunlaştığı düşünülürse noktasal yükün enerjisi sonsuzdur. Öyle ki bu problem fizikçileri 40 yıl uğraştırmıştır. Renormalizasyon teorisinin bulunmasından sonra bile tam bir ilerleme sağlanamamıştır. Yine benzer bir durum da Einstein'ın tüm hayatı boyunca uğraştığı birleşik alan teorisi olmuştur.

Peki neden lineer kuantum teorisi fizikçiler arasında böylesi bir tartışmanın kaynağı olmuştur? Fizik biliminin tarihine bakılırsa, hiçbir teoride lineer kuantum teorisindeki kadar çok varsayım kullanmamıştır. Öyle ki bu varsayımları üretme ihtiyacı teorisinin tamamlanmamış ve sınırlı uygulanır olmasından kaynaklanmaktadır. Genel olarak lineer kuantum mekaniğinin temeli Heisenberg matris mekaniği, Schrödinger dalga mekaniği, Born'un dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumu ve Heisenberg'in belirsizlik ilkesine dayanmaktadır. Muhtemel tartışmalar da dalga fonksiyonunun tanımı, ölçülen ve ölçen arasındaki kontrol edilemeyen etkileşme, Heisenberg belirsizlik ilkesi, Bohr'un uygunluk ilkesi, tek parçacığa karşılık çok parçacıklı sistemler, mikroskopik alanda nedensellik ve olasılık, kuantum durumlarının ölçümü gibi noktalarda olmuştur. Bütün bu tartışmalardan sonra genel kabul gören yorum daha sonraları "Copenhagen Ekolü" olarak adlandırılan ve Bohr'un temsil ettiği grubun fikirlerini benimseyen ve lineer kuantum mekaniğinin temel teorisini bu çerçevede kabul edenlerden oluşan yorumdur.

1920'lerin erken dönemlerinde, Bohr grubu, Einstein, de Broglie , Schrödinger ve Lorentz 'in başını çektiği tartışmalarda öne çıkan noktalar, dalga fonksiyonun doğası ve istatistik tanımı ile ilgili olmuştur. Bu tartışma konuları kısaca;

a) Acaba lineer kuantum mekaniği doğru mu? Kendi kendisi ile uyumlu mu? Mikroskopik parçacıkların özelliklerini tamamen açıklayabilir mi? Temel hipotezleri birbirini çürütüyor mu?

b) Lineer kuantum mekanik dinamik mi yoksa istatistiksel bir teori mi? Tek paracığın mı yoksa çoklu sistemin hareketini mi açıklar? Çünkü dinamik eşitlik tek parçacıklı sistemler için yazılmış görünse de mekanik eşitlikler, olasılık ve istatistiksel eşitlikler kullanılarak hesaplanır. Bu da teorinin doğasıyla ilgili kafa karışıklığı yaratmaktadır.

c) Mikroskopik parçacıkların dalga-parçacık ikiliği nasıl tanımlanır? Lineer kuantum mekaniğin varsayımlarına göre bir parçacığın doğası nasıl tanımlanır? Öyle ki dalga-parçacık ikiliği, de Broglie ilişkisiyle tanımlanmıştır. Acaba dalga fonksiyonun istatistiksel tanımı, bu ilişkiyi tanımlayabilir mi? Dalga paketini kullanarak mikroskopik parçacıkları tanımlamanın bazı zorlukları olduğundan dalga-parçacık ikiliğinin tanımı da en önemli sorun olarak ortaya çıkmaktadır.

d) Belirsizlik ilkesi acaba mikroskopik parçacıkların bir iç özelliğinden mi yoksa ölçen ve ölçülen arasındaki kontrol edilemeyen ilişkiden mi kaynaklanmaktadır?

e) Parçacık, uzayda dalga formunda bulunur ve belli bir noktada bulunmasının yine belli bir olasılığı vardır. Peki bu durum nasıl açıklanacaktır? Acaba deney ölçümlerinde bu problemin açıklanması, “dalga paketinin daralması” olarak isimlendirilebilir mi?

Yukarıdaki bu sorular lineer kuantum mekaniğinin temel varsayımlarını içeren önemli konular olduğu için, birçok bilim insanı bu tartışmanın içinde olmuştur. Neredeyse bir yüzyıldır bu tartışma devam ediyorsa da, hala bu soruların çoğuna kesin bir yanıt bulunamamıştır.

1932 yılında Von Neumann, lineer kuantum mekaniğin tam bir teori olmadığını öne sürerek bu sorunla ilgili tartışma sürecini başlatmıştır. Buna göre von Neumann, Hilbert uzayında gözlenebilir büyüklükleri temsil eden bir kümeyi ele almıştır. Öyle ki A operatörü ile gösterilen bir durum, yine bu durumu temsil eden operatörün $\langle A \rangle$ ortalama değeri bulunarak hesaplanır. Eğer ortalama değer $\langle 1 \rangle = 1$ ise r 'nin herhangi

bir gerçek değeri için $\langle rA \rangle = r\langle A \rangle$ 'dır. Eğer $A, B, C \dots$ keyfi seçilen gözlenebilir büyüklüklerse, o zaman $A + B + C + \dots$ 'da gözlenebilir bir büyüklük olur. Bu durum, $\langle \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \dots \rangle = \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{B} \rangle + \langle \hat{C} \rangle + \dots$ şeklinde gösterilebilir. Von Neuman Q Hilbert uzayında böylesi bir self-adjoint $\hat{A}$ operatörünün bulunacağını ve bu operator için $\langle A^a \rangle \neq \langle A \rangle^a$ olacağını göstermiştir. Buna göre A tüm özellikleri kesin olarak tanımlanamaz veya bilinemez bir fiziksel sistem olabilir. Yani ortalama olarak elde edilen veya ölçülen fiziksel sistem, bir dağılıma sahiptir.

1957'de Gleason bu teorem üzerinde iki ayrı düzeltme yaptı . Buna göre kullanılan Hilbert uzayı iki boyuttan büyük olmalı ve bu uzayda kullanılan operatörler de komütasyon koşullarını sağlamalıydı. Bu yaklaşımlar altında operatörler Von Neumann eşitsizliğini de sağlamış olurlar. Bu durumda ele alınan büyüklükler gerçektir olduğundan artık sıra değiştirebilir ve lineer toplama özelliği de ortalama şeklinde bulunabilir. Ayrıca bu büyüklükler, yapılan ölçümlerin sırasından da bağımsız oldukları için ölçüm sırasında bir belirsizliğe rastlanmaz. Bu açıdan bu operatörler, von Neumann eşitliğini de sağlarlar.

1966 yılında Bell, Gleason'un teorisinin, deneysel ölçüm öncesi ve sonrası etkileşimleri içeren gizli değişkenleri ihmal ettiğini, bu şekilde, teorideki belirsizliklerin ortadan kalkacağını ve deneysel ölçüm sonuçlarının uyumlu olacağını öne sürmüştür. Böylelikle ölçüm öncesi ve sonrasını içeren, koşullara bağlı gizli değişkenler teorisi de ortaya atılmıştır. Ayrıca Bell, teoride, kuantum mekaniğinde olduğundan daha çok değişken olduğunu, deneylerle bu görüş desteklenirse kuantum mekaniğindeki belirsizliğin kalkacağını savunmuştur.

2.1 Bohr ve Einstein Arasındaki Tartışma

Lineer kuantum mekaniğin yorumunda, başını Bohr ve arkadaşlarının çektiği Copenagen Okulu'nun ve buna karşılık birçok fizikçinin otorite saydığı Einstein'ın fikirleri öne çıkar. Öyleki artık Bohr ve Einstein arasında uzun yıllar sürecektir bir tartışma başlayacaktır.

Bu süreç üç ana döneme ayrılırsa, birincisi kuantum mekaniğin ilk ortaya çıktığı 1924-1927 tarihleri arasındadır.

Einstein felsefik inancı ve bilimsel amaçları doğrultusunda ilerleyip fiziksel dünyayı kapsayan kesin bir tanımlama arayışındaydı ve lineer kuantum mekaniğin yorumu ile ilgili sürekli bir kaygı taşıyordu. 1926 yılında Einstein Born'a yazdığı mektupta," lineer kuantum mekaniği kesinlikle muhteşem ama içimden bir ses gerçeğin bu olmadığını söylüyor. Aslında teori çok şey söylüyor ama eski teori hakkında hiçbir şey söylemiyor. Kuantum mekaniğindeki dalga fonksiyonunun olasılıkçı yapısına dayanarak her ne olursa olsun tanrı zar atmaz." şeklindeki ünlü sözünü etmiştir.

1927-1930 yılları ikinci dönemi oluşturur, Bohr ünlü tamamlayıcılık ilkesini ortaya koyduktan sonra kendine ait yorumunu yayınladı. Öyle ki Bohr'un bu yaklaşımı ana akımlardan birini oluşturacaktı[3]. Einstein ise bu durumdan fazlasıyla mutsuzdu. Asıl dert ettiği nokta Bohr'un tamamlayıcılık ilkesi üzerine geliştirilen, belirsizlik bağıntısıydı. 1927-30 yılları arasında gerçekleşen fizik kongresinde Einstein iki tane deney önerdi. Bunlar belirsizlik ilkesinin ve kuantum formalizminin ortaya atılmasını sağlayan, çift yarıık deneyi ve foton kutusuydu. Amaç ise Bohr'un tamamlayıcılık ilkesini çürütmektir. Fakat Bohr'un yaratıcı cevapları Einstein'ın moralini bozuyordu. Bu yüzden Einstein lineer kuantum mekaniğini belli ölçüde kabul etmek zorunda kaldı.

Ölümüne kadarki son dönemde (1930), Einstein klasik teoriyle ilgilenmeye devam etse de Bohr' la yaşadığı zıtlasmaya atfen, Podolski ve Rosen'le EPR paradoksunu ortaya attılar. Buna göre paradoks mikroskopik nedensellik ve deterministik yerelleşme yaklaşımlarını desteklemek için ortaya atılmıştı ve lineer kuantum mekaniğinin bu konulardaki eksikliğini ortaya koymayı amaçlıyordu.

Bohr ile Einstein arasındaki bu tartışma üç ana maddede toplanabilir.

- 1) Einstein mikroskopik dünyanın makroskopik dünyadan farklı olmayacağını söylemiş ve deterministik yaklaşımın önemini vurgulamıştır.
- 2) Einstein lineer kuantum mekaniğin nihai ve tam bir teori olmadığını savunmuştur. Teoriyi klasik optiğe benzetmiştir. Çünkü ikisi de istatistik kurallarla çalışır. t anında r konumu bilinen bir parçacığın bulunma olasılığı $\psi(r, t)$ iken gözlenebilen büyüklüklerin değeri istatistik yöntemlerle hesaplanır ve deneysel verilerle doğrulanır. O yüzden $\psi(r, t)$ mikroskopik dünyayı bütünüyle açıklayamaz.

3) Son kısım lineer kuantum teorisinin fiziksel yorumuyla ilgilidir. Einstein tek bir parçacığın lineer kuantum teoriyle açıklanmasını yeterli bulmadığını açıkça söylemiştir. Makalelerinde de $\psi(r,t)$ 'nin sadece çok parçacıklı sistemleri açıkladığını çok defa yazmıştır. Burdan da lineer kuantum teorisinin eksikliği ortaya çıkar. Çünkü tam teoriler gözlenebilen büyüklüklerle ilgili kesin değerler vermelidir. Zaten Einstein serbest elektron fikrine de inanmıyordu. Yani Einstein teorisinin matematik –istatistik kısmıyla değil, sonuçların fiziksel yorumuna karşıydı. Diğer bir sebepte teorisinin görelilik teorisine örtüşmemesiydi. Alan teorisini kullanarak atomik yapıyı çözmeye çalışmış, bu iki teoriyi birleştirmek için çok çaba harcamıştı[4].

BÖLÜM 3

MAKROSKOPİK KUANTUM ETKİLER

Makroskopik ölçekteki kuantum davranışlar mikroskopik ölçekteki (atomik ölçekteki) kuantum olaylarından farklıdır. Makro ölçekteki davranışlar kuaziparçacıkların davranışı ile açıklanabilir, bunların ait oldukları denklemler lineer olmayan denklemlerdir ve bu denklemlerin çözümleri soliton çözümleridir. Makroskopik ölçekteki bazı kuantum olayları aşağıda kısaca belirtilmiştir. Çok kısaca neyi ifade ettiklerinin açıklandığı bu olayların herbiri son yıllarda fizikte yapılan çalışmaların yoğunlaştığı konulardır[5]. Bu nedenle bu olayların basit de olsa daha detaylı incelenmesi bu tezde mümkün olmayacaktır.

3.1 Süperiletken Malzemelerde Makroskopik Kuantum Etkisi

Süperiletken malzemeler , kendine ait kritik sıcaklığın altına inildiğinde elektrik akımına direnç göstermeyen malzemelerdir. Doğada 30'a yakın element, yüzden fazla bileşik ve alaşım süperiletken özellik gösterirler. Eğer bu malzemelerin sıcaklığını, kendine özel kritik değerin altına düşürürsek malzeme süperiletkenlik gösterir. Yani üzerinden geçen elektrik akımını mükemmel bir iletkenlikle sürekli olarak iletir. Yapılan deneylere göre malzeme süperiletken durumunda iken , malzemenin içindeki manyetik alan malzemenin dışına çıkar, ayrıca uygulanan manyetik alandan kaynaklanan manyetik akı da malzemenin içine girmez. Bu tür malzemelere gerçek antimanyetik malzemeler denir. Gözlenen bu olay antimanyetizma ya da Meissner etkisi olarak bilinir.

1957 yılında Bardeen, Cooper ve Schreiffier, süperiletkenliğin mikroskopik teorisini (BCS teorisi) yayınladılar. Bu teoriye göre elektron ve fonon etkileşmesi sonucu oluşan etkiyle, zıt yönlü spin ve momentumlu elektronlar arasında bir bağ oluşur. Cooper çifti olarak bilinen bu bağ elektronlar arasındaki Coulomb kuvvetini yenecek kadar kuvvetlidir. Gözlenen bu olay, minimum enerji durumunda bu Cooper çiftlerinden oluşan taneciklerin yoğunlaşmasıdır. Çiftler arasında çarpışma yada enerji alışverişi olmadığı gibi çiftler malzeme örgüsüyle de bu tür bir etkileşime girmezler. Dolayısıyla elektron çiftleri malzemede kolaylıkla akar. Herhangi bir dirençle karşılaşmaz. Bu olay süperiletkenlik olarak adlandırılır.

Aslında normalde elektronlar çekirdek çevresindeki yörüngelere Pauli dışlama ilkesine uyarak yerleşir. Bu durumda, elektronlar Fermi–Dirac istatistiği ile uyum içindedirler. Ama süperiletkendeki çiftlerin dizilimi Bose-Einstein istatistiğiyle açıklanır. Bu durum parçacıkların çiftler halinde, enerji alışverişi olmaksızın temel enerji seviyelerinde yoğunlaşmasından kaynaklanmaktadır.

3.2 Helyumda Makroskopik Kuantum Etkisi

Helyum (He) durgun ve sıradan bir gazdır. Ayrıca sıvılaştırılması çok zordur. İki tür izotopu vardır. Bunlar, He-3 ve He-4'tür. Sırayla kaynama noktaları 3.19 ve 4.2 Kelvin(K)'dir. He-4 için kritik basınç değeri 1,15 atmosfer(atm)'dir. Küçük kütlelerinden dolayı da sıfır nokta enerjileri oldukça yüksektir. Oda sıcaklığındaki He, mutlak sıfır dereceye düşürülüp dış basınç yeterince şiddetli uygulandığında atomlar arasındaki mesafe anlamlı bir şekilde azalır ve sistem katı forma geçer. Örneğin He-3 için kritik basınç değeri 25-34 atm aralığındadır. He-4 için kristalleşme derecesi 4K'dir. Bu sıcaklıkta maddede ısı alımı ya da yayımı yoktur. Yani iki fazın entropisi eşittir. Sadece hacimleri farklıdır. Fakat He-3 basınç altında, sıcaklık, $T < 0.319 \text{ K}$ 'de kristal yapıya sahip olup ısı alır. Başka bir deyişle, He-3 ün yüksek basınç altında kristalleşirken, sıcaklığı artar. Bu endotermik olaya Pomeranchuk etkisi denir. O halde sıvı He-3' ün entropisi kristal haldekinden daha düşüktür. Bu ilginç özellikleri He-3 ve He-4' ün iç yapısıyla ilgilidir.

He-4 için faz geçişi 1atm basınç altında 2.17 K'dedir. Bu kritik sıcaklık değerinin üstündeki bölgede He-4 normal sıvı fazdadır. Buna He-I densin. 2.17 K'in altında ise gaz

tamamen farklı özellikler gösterir. Süperakışkan özelliğindeki bu faza da He-II diyelim. Bu bölgede He-II, 10^{-6} cm'den küçük çaplı kılcal yapılarda bile bir dirençle karşılaşmadan akabilir. Eğer bir test tüpü He-II sıvısı bulunan konteynıra daldırılırsa, tüpün içindeki He-II seviyesi konteynırla aynı kalır. Eğer test tüpü yukarı doğru çekilirse içindeki He-II de onunla birlikte yükselir ve tüpün ağzına ulaşır dışarı doğru konteynıra akmaya başlar. Bu akış, sıvı seviyeleri eşit olana kadar devam eder. Eğer tüp bu kez konteynırın içine daldırılırsa, içindeki tüm süper akışkan sıvı tamamen tükenene kadar konteynırın içine sızar. Bu özellik He-4'ün süperakışkan özelliği olarak anılır.

3.3 Kuantum Hall Olayı

Eğer bir metale dikey yönde elektrik, yatay yönde manyetik alan uygulanırsa, yükler , düzleme paralel olarak malzeme yüzeyine birikir. Bu birikim, bir elektrik alan ve dış alana dik olacak şekilde bir elektrik akımı doğurur. Bu durum metallerde Hall olayı olarak bilinir. Hall olayı kendine özgü olarak süperiletken malzemelerin içinde de gözlenir. Buna kuantum Hall olayı denir.

Çok düşük sıcaklık ve güçlü manyetik alan varlığında malzemede Hall potansiyeli ve Hall direnci denilen büyüklükler ölçülmüştür. Bu ölçümlere göre elde edilen değerler bir tamsayının katları şeklinde olmaktadır. Bu olay da bir makroskopik kuantum durumudur.

3.4 Eksitonların Bose-Einstein Yoğunlaşması

Silikon, germanyum, silisyum, kadmiyum sülfid gibi malzemelerinde atomik düzeyde gerçekleşen elektron boşluk birleşmesi, bilindiği gibi Coulomb etkileşmesinden doğar. Oluşan parçacıklara da eksiton denir. Eksitonların kendine ait kütlesi, momentumu ve enerjisi vardır. Parçacıklar kendi kütle merkezleri çevresinde döndüğü gibi, malzemedeki kristal örgü içinde rahatlıkla hareket ederler. Yüksek eksiton yoğunluğunda ise zıt spinli olanlar birleşerek bozon özelliği gösteren bir tür molekül oluştururlar.

Sıvı helyumda belirli bir sıcaklığın altında çok sayıda eksiton, temel enerji seviyesinde yoğunlaşarak, maddeyi süper akışkan hale getirir. Bu adı geçen yoğunlaşma olayına

Bose-Einstein yoğunlaşması denir. Aynı kuantum durumunda olan bu eksitonlar çizgileri oldukça belirgin olan emisyon spektrumuna sahiptir.

1974 yılında biliminsanları AgBr malzemenin düşük enerji seviyesine ait, oldukça belirgin, keskin bir ışık spektrumu gözlemlediler. Bu olay, malzemede, temel enerji seviyesinde yoğunlaşan eksitonların ışık spektrumuydu. Bu söz konusu olay da makroskopik kuantum olayı olup son on yılın en popüler konularından biri olmuştur[6]. Yukarıda çok kısa özet olarak verilen bu makroskopik kuantum olayları dışında, ferromagnetiklerde ve nötron yıldızlarında da makroskopik kuantum olayları oluşmaktadır[7].

LİNEER OLMAYAN KUANTUM MEKANİĞİN TEMEL TEORİ VE PRENSİPLERİ

Önceki bölümde makroskopik kuantum etkisinin deneysel olarak gözlemlendiği süperakışkan He ve süperiletkenlik olaylarından bahsedilmişti. Sözü geçen bu makroskopik kuantum etkiler kuaziparçacıkların davranışından kaynaklanmaktadır. Bu tür doğrusal olmayan davranışları anlamak için de solitonların davranışını incelemek ve öne sürülen ilgili kavramları kullanarak bu tür sistemlerin Hamilton ve Lagrangien denklemlerini uygun dinamik yapıları ile ifade etmek gerekir. Buna göre makroskopik kuantum etkiler mikroskopik kuantum etkilerden tamamen farklıdır. Mikroskopik ölçekte geçerli olan lineer kuantum mekaniği makroskopik ölçekte bu geçerliliğini kaybeder. Lineer kuantum mekaniğinin makroskopik ölçekte geçerli olmamasının nedeni tamamen lineer kuantum mekaniğinin varsayımları ile ilgilidir.

Süperiletkenliğin BCS teorisi ve modern süperakışkan teorisi gibi makroskopik kuantum olaylarını açıklamak için lineer olmayan teoriler gereklidir. Lineer olmayan kuantum mekaniğin doğasından dolayı bu kuantum olaylarına ait Lagrange, Hamilton ve serbest enerji gibi denklemler de dalga fonksiyonunun lineer olmayan fonksiyonu olurlar. Bu denklemlerin temsil ettiği kuaziparçacıkların davranışları Bose-Einstein yoğunlaşmasında olduğu gibi koherent (eşyumlu) olurlar.

Hamilton ve Lagrange fonksiyonları ve sistemin serbest enerjisi ϕ , dalga fonksiyonuna bağımlı, lineer olmayan fonksiyonlardır. Süperakışkan ve süperiletkenlerin lineer olmayan teorisi, bu malzemelerin davranışını doğru bir şekilde açıklamaktadır. Diğer teorilerin başarısızlığı da lineer olmayan bir yaklaşım sunamamalarından kaynaklanmıştır. Örneğin Frohlich'in süperiletken teorisi malzemedeki fonon-elektron

çifti oluşumunu açıklayabildiği halde eksiksiz bir teori önerememiştir. Çünkü teorisi lineer pertürbasyon teorisi üzerine olduğundan lineer olmayan karakter taşımamaktadır.

Lineer kuantum mekaniğin temel eşitlikleri olan Schrödinger ve Klein Gordon denklemleri parçacıkların dalga fonksiyonlarının lineer özellik taşıyan denklemleridir. Sonuç olarak bu denklemlerin çözümleri dalga-parçacık ikilemine çözüm getirememektedir. Öte yandan, kuazi parçacıklar için yazılan GPA, GP ve Ginzburg-Landau eşitlikleri, buna ek olarak süperakışkan ve süperiletkenler için yazılan ϕ^4 ve Sine-Gordon eşitlikleri lineer olmayan denklemlerdir. Bu lineer olmayan denklemlerle deneysel olarak gözlenen makroskopik kuantum etkisi rahatlıkla tanımlanabilir. Buna göre makroskopik kuantum etkilerini açıklamak için lineer denklemler yerine lineer olmayan denklemler kullanılmalıdır. Bu durumda lineer süperpozisyon ilkesi artık geçerli olmayacaktır. Bu ilkenin nasıl tanımlanacağı daha sonra tartışılacaktır.

Süperiletkenlik ve süperakışkanlık özelliklerini tanımlayan lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin durağan solitonları verdiği bilinmektedir. Bu nedenle lineer olmayan sistemlerde parçacıkları tanımlamak için solitonları kullanmak uygundur. Buna göre mikroskopik parçacıkların lineer olmayan etkileşmeler sonucu oluşturdukları ortak davranış soliton durumunu alır. Soliton, lineer teoriyle açıklanamayan ve modern soliton teorisine göre mikroskopik parçacıklardan tamamen farklı, dalga-parçacık özelliğini aynı anda taşıyabilen bir büyüklüktür. Solitonlar ilerleyen dalga karakterine sahiptirler bu nedenle bir dalganın frekans, peryot, grup hızı , faz hızı, yansıma, kırılma, gibi bütün özelliklerini içerirler. Aynı zamanda belli enerjiye sahip kararlı şekillerini zaman içinde ve çeşitli etkileşmelerde bulunsada korudukları için klasik parçacık olarak ele alınabilirler. Bu iki özelliği aynı anda gösterdikleri için lineer kuantum mekaniğinde dalga-parçacık ikilemi lineer olmayan kuantum mekaniğinde ortadan kalkar.

Solitonlar, dalga özelliğiyle ele alındığında, tek başına ilerleyen ve dalga hareketinin tüm özelliklerini taşıyan bir yapıya sahip olduğu söylenebilir . Bunlar frekans, peryot, genlik, grup ve faz hızı, girişim, kırınım ve yansımadır. Tanecik özelliği ise, klasik parçacıklara benzeyen, belirli bir şekli olan, başka bir parçacıkla çarpışsa bile belirli bir enerji, momentum ve kütlesi olan, serbest uzayda, sabit dış alan varlığında yine sabit

ivmeyle hareket eden, v.b. bir büyüklük olarak tanımlanabilir. Buna göre modern soliton teorisinin yeni lineer olmayan teorisinin ayrılmaz bir parçası olduğu sonucu çıkar. Kısa bir ifadeyle artık, yeni oluşturulan kuantum teorisi, lineer olmayan kuantum teorisi şeklinde tanımlanacaktır.

4.1 Lineer Olmayan Kuantum Mekaniğin Temel Prensipleri

Önceki bölümlerde tartışılan bilgilere göre lineer olmayan kuantum mekaniği şu şekilde özetlenebilir;

1) Lineer olmayan kuantum sistemlerde mikroskopik parçacıklar aşağıdaki dalga fonksiyonuyla ifade edilir.

$$\phi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) e^{i\theta(\vec{r}, t)} \quad (4.1)$$

Burada hem $\varphi(\vec{r}, t)$ genlik hem de $e^{i\theta(\vec{r}, t)}$ fazı uzay ve zamanın fonksiyonlarıdır.

2) Göreli olmayan durumda dalga fonksiyonu $\phi(\vec{r}, t)$, genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger eşitliğiyle tanımlanır.

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi \pm b|\phi|^2 \phi + V(\vec{r}, t) \phi + A \quad (4.2)$$

ya da

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi \pm b|\phi|^2 \phi + V(\vec{r}, t) \phi + A(\phi) \quad (4.3)$$

şeklindedir. Burada μ kompleks sayı, V dış potansiyel alan, A, ϕ' nin fonksiyonu ve b lineer olmayan etkileşimin uzaklığını belirten katsayıdır.

Görelilikte ise, dalga fonksiyonu $\phi(\vec{r}, t)$ Sine-Gordon eşitliği (SGE) ve ϕ^4 alan denklemini içeren genelleştirilmiş lineer olmayan Klein-Gordon eşitliğiyle (NLKGE) verilir. Buna göre,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = \beta \sin \phi + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + A(\phi) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} \pm \alpha \phi \mp \beta |\phi|^2 \phi = A(\phi) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada γ , ıraksama (dissipation) ya da sürtünme etkisidir, β lineer olmayan etkileşmenin uzaklığı gösteren katsayı ve A , ϕ 'nin fonksiyonudur.

Yukarıda, iki madde altında özetlenen bilgiler, lineer olmayan kuantum mekaniğin iki temel varsayımıdır ve lineer kuantum mekaniğin giriş bölümünde verilen temel varsayımlarından oldukça farklıdır. Fakat, lineer olmayan kuantum eşitlikleri, lineer Schrödinger ve lineer Klein-Gordon eşitliklerinin genelleştirilmesinden doğmuştur. Eşitlik (4.2) ve (4.5) lineer olmayan kuantum sistemlerdeki mikroskopik parçacıkların özelliklerini sağladığı ve bu parçacıklar için hareket denklemleri olduğu gösterilebilir. Bunlar lineer olmayan kuantum mekaniğin temel iki prensibidir. Kesin olarak, lineer olmayan kuantum mekaniği; süperakışkanlık, süperiletkenlik, modern soliton teorisi ve bunların deneysel gerçekleri üzerine kurulan bir teoridir. Bu iki hipotez kullanılarak aşağıdaki kavramlar şu şekilde özetlenebilir,

1) Dalga fonksiyonu $\phi(\vec{r}, t)$ 'nin karesi $|\phi(\vec{r}, t)|^2 = |\varphi(\vec{r}, t)|^2 = \rho(\vec{r}, t)$, artık mikroskopik parçacığın lineer kuantum mekaniğinde tanımlandığı gibi verilen uzay zaman bölgesinde bulunma olasılığı değildir. Verilen noktadaki mikroskopik parçacıkların kütsel yoğunluğudur. Bu tanıma göre artık dalga fonksiyonunun olasılığı ve istatistiksel yorumu lineer olmayan etkileşme için uygun değildir. (4.1)' de verilen dalga fonksiyonu lineer kuantum mekanikteki benzer olsa da artık anlamı tamamen farklıdır. Burada $\varphi(\vec{r}, t)$ mikroskopik parçacığın zarfıdır ve parçacık, soliton özelliği gösterir. Lineer kuantum mekanikten farklı olması, $\varphi(\vec{r}, t)$ 'nin fiziksel anlamından ve lineer olmayan bir eşitlik olmasından kaynaklanır. $e^{i\theta(\vec{r}, t)}$ ise $\phi(\vec{r}, t)$ 'nin taşıyıcı dalga fonksiyonudur.

2) Dalga fonksiyonu $\phi(\vec{r}, t)$, bir solitonu ya da tek dalgayı ifade eder. Eşitlik (4.2) ve (4.5) soliton çözümüne sahip lineer olmayan dinamik eşitliklerdir. Bu yüzden lineer olmayan kuantum mekaniğindeki mikroskopik parçacıkların doğası lineer kuantum mekanikten tamamen farklıdır.

3) Lineer kuantum mekanikteki operator kavramı lineer olmayan kuantum mekanikte hala kullanılmaktadır Fakat lineer operatörlerden farklı özelliklere sahiptirler. Örneğin özellikleri kesinlikle bilinen konjuge hermitik operatörler olan momentum ve konum

gibi operatörlere artık gerek yoktur. Onun yerine lineer olmayan operatörler kurulur ve kullanılır. Örneğin, eşitlik (4.2)'de olduğu gibi sistemin Hamiltonien'i,

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{H}(\phi)\phi \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Hamilton operatörü $\hat{H}(\phi)$ 'nin ϕ 'ye, $A = 0$ için lineer olmayan bağımlılığı

$$\hat{H}(\phi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - b|\phi|^2 + V(\vec{r}, t) \quad (4.7)$$

şeklindedir. Eşitlik (4.2) ve (4.5), Lax'a göre

$$\phi = \phi(\vec{r}, t), \quad \phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} K(\phi) \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilir. $K(\phi)$, lineer olmayan ya da intikal eden (hereditary) operatördür. Tek boyutlu durumda, dönüşüm takımının üreticisinden elde edilen $Q(\phi)$ kullanılarak, vektörel alan $K(\phi)$ elde edilebilir.

$$K(\phi) = Q(\phi)\phi_x \quad (4.9)$$

$Q(\phi)$ lineer olmayan yenileme operatörü olarak adlandırılabilir. Lineer olmayan Schrödinger eşitliği (4.2);

$$Q(\phi) = -iD + 4i\phi D^{-1}\Re(\bar{\phi}) \quad (4.10)$$

şeklinde genelleştirilebilir. D , x 'e göre türetilebilen operatör,

$$D^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$$

şeklindedir. $K(\phi)$ 'nin intikal eden özelliğinden vektörel alan eşitliği

$$K_n(\phi) = Q(\phi)^n \phi_x \quad n = 0, 1 \dots \quad (4.11)$$

elde edilebilir. $Q(\phi)$ tekrarlama (özyineleme) operatörünün özdeğeri olan λ 'nın hareket denklemi

$$\lambda'_t = K'(\phi)[\lambda'] \quad (4.12)$$

şeklindedir. Burada ϕ 'ye göre varyasyonal türetimi $K'(\phi)$,

$$K'(\phi)[\lambda'] = \left. \frac{\partial K'(\phi + \varepsilon \lambda')}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir.

Tekrarlama (recursion) operatörünün zamana göre türevini tanımlayan eşitlik yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(\phi) = K'(\phi)Q(\phi) - Q(\phi)K'(\phi) = [K'(\phi), Q(\phi)] \quad (4.14)$$

şeklinde olup, bu eşitlik, lineer kuantum mekanikteki Heisenberg matrisine benzer.

Fakat, burada $K'(\phi)$ ve $Q(\phi)$ lineer olmayan operatörlerdir.

4) Lineer olmayan kuantum mekanikteki operatörler de lineer olmayan olduğu için lineer süperpozisyon için yazılan özvektör ve öz durum $\phi(\vec{r}, t)$ ifadelerine artık gerek yoktur. Örneğin $\phi = \sum_n C_n \phi_n$ yazılımı gibi. Herhangi iki durumun süperpozisyona sahip olması bu sistem için gerekli değildir. Aslında bu, iki tekli dalganın süperpozisyonu, iki, üç ya da daha fazla tekli dalga üretebilir, demektir. Bu yüzden, lineer kuantum mekanikteki dalgaların süperpozisyon prensibi lineer olmayan teoriye göre uyarlanmak durumundadır.

5) Lineer olmayan kuantum mekaniği, zamandan bağımsız durumları ve özdeğer problemlerini de içerir. Lineer olmayan Schrödinger denklemindeki özdeğerin tanımlanması ve hesaplanması oldukça ilginçtir. Buna göre lineer olmayan kuantum mekanik, lineer kuantum mekanikten farklı olduğu için özdeğer hesabı da farklıdır. Eşitlik (4.2)'nin zamandan bağımsız formu

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{iEt/\hbar} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Eşitlik (4.15), (4.2) ye indirgenir ve $A(\phi) = 0$ seçilirse,

$$E\phi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) - b|\phi(\vec{r})|^2 \phi(\vec{r}) \quad (4.16)$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\hat{H}(\phi)\phi(r) = E\phi \quad (4.17)$$

olduğundan,

$$\hat{H}(\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) - b|\varphi|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) - b\rho(\vec{r}) \quad (4.18)$$

olarak yazılabilir. Burada E enerjisi, $\hat{H}(\varphi)$ Hamilton operatörünün özdeğeridir. Eşitlik (4.17) lineer kuantum mekanikteki Schrödinger eşitliğine benzese de Hamilton operatörü $\hat{H}(\varphi)$, φ dalga fonksiyonunun lineer olmayan operatörüdür.

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

olmak üzere

$$\hat{H}(\varphi) = \hat{H}_0 + b\hat{\rho}(\vec{r}) \quad (4.19)$$

eşitliği, eğer bu Hamilton operatörü bir mikroskopik parçacığın bir kuantum durumundaki dalga vektörünün üzerine etkirse, zamandan ve konumdan bağımsız özdeğerlerin her zaman bulunamayacağını söyler. O zaman geleneksel yöntemler kullanarak Hamiltonun özdeğeri hesaplanamaz. Öyleyse, lineer olmayan Schrödinger eşitliğinin özdeğeri yeniden tanımlanmalıdır.

Genellikle lineer olmayan sistemlerin özdeğerleri ve öz durumları Lax'ın önerdiği ters saçılma yöntemi ile hesaplanabilir. Buna göre eşitlik (4.8)' de verilen genel bir lineer olmayan eşitlik için $K(\varphi)$ 'nin lineer olmayan bir operator olduğu bilinmektedir. O zaman, ϕ' 'ye bağımlı iki lineer operator olan $\hat{L}$ ve $\hat{B}$, Lax operatörü için yazılabilir;

$$iL_{t'} = \hat{B}\hat{L} - \hat{L}\hat{B} = [\hat{B}, \hat{L}] \quad (4.20)$$

$t' = t/\hbar$ ve $\hat{B}$ öz-eklenir(self-adjoint) operatör olduğunda $\hat{L}$ operatörünün özdeğeri E ve özfonksiyonu ψ , eşitlik (4.20) denkleminde aşağıdaki gibi türetilir.

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi; \quad i\psi_{t'} = \hat{B}\psi \quad (4.21)$$

Böylelikle yukarıdaki iki lineer operatörün özdeğerleri ve özvektörleri kullanılarak lineer olmayan sistemin özdeğer ve özvektörleri hesaplanabilir. Burada λ 'nın zamandan bağımsız olduğu görülebilir. Hatta, eşitlik (4.21)'in diferansiyeli alınıp, değer i ile çarpılırsa,

$$i\left(\psi \frac{d\lambda}{dt'} + \lambda \frac{d\psi}{dt'}\right) = i\left(\hat{L}\psi_{t'} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial t'}\psi\right) = i\hat{L}\psi_{t'} + [\hat{B}\hat{L} - \hat{L}\hat{B}]\psi$$

$$= \hat{L}(i\psi_{t'} - \hat{B}\psi) + \lambda\hat{B}\psi$$

elde edilir. Burada, $i\psi(d\lambda/dt') = 0$ olur. Böylelikle zamandan bağımsız λ özdeğeri ve lineer (4.21) özeşitliği, (4.8)'e karşılık gelir. O zaman herhangi bir lineer olmayan eşitlik için, her zaman buna karşılık gelen, zamandan bağımsız bir özdeğer ve bir lineer özeşitlik bulunabilir. Hatta lineer olmayan problemler ters saçılma yöntemi ile lineer yapıya çevrilerek, soliton çözümü de elde edilebilir.

Eğer, (4.2)'deki lineer olmayan Schrödinger eşitliğindeki $V(\vec{r}, t)$ ve $A(\phi)$ sıfır olursa, $\hat{L}$ ve $\hat{B}$ operatörleri için,

$$\hat{L} = i \begin{pmatrix} 1+s & 0 \\ 0 & 1-s \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} + \begin{pmatrix} 0 & \phi^* \\ \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$\hat{B} = -s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \begin{bmatrix} |\phi|^2/(1+s) & i\phi_{x'} \\ -i\phi_{x'} & -|\phi|^2/(1-s) \end{bmatrix},$$

yazılabilir ve $s^2 = 1 - 2/b$ ve $x' = x\sqrt{2m/\hbar^2}$ 'dir. Lineer olmayan Schrödinger eşitliği (soliton özdeğerleri),

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

ile hesaplanabilir

6) Lineer kuantum mekaniği ile kıyaslandığında, lineer olmayan kuantum mekaniği iki büyük düşünceyle ortaya çıkmıştır. Bunlar, mikroskopik parçacıkların dalga fonksiyonuna etkiyen Hamilton operatörün dalga fonksiyonundan bağımsız olmaması ve sistemi temsil eden denklemin lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olmasıdır. Bu iki temel farklılık kuantum mekaniğine tamamen yeni bir bakış getirmiştir.

4.2 Doğrusal Olmayan Kuantum Mekaniği Problemine Genel Bir Bakış

Daha önce de belirtildiği gibi doğrusal olmayan kuantum mekaniğinde problemler lineer kuantum mekaniğine göre daha karmaşıktır. Bu karmaşıklık doğrusal olmayan etkileşmelerden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle doğrusal olmayan etkileşmeleri içeren mekanizmaları anlamak için bunları iyi ifade edecek, uygun denklemler yazılmalıdır.

Makroskopik parçacıkların dinamik denklemleri, sisteme ait Hamiltonien' den yola çıkarak, Schrödinger ya da Heisenberg gösterimi kullanılarak elde edilebilir. Bu lineer olmayan denklemlerin çözümleri soliton tipi çözümler olacaktır. Doğrusal olmayan dinamik denklemlerin soliton tipi çözümlerini veren yöntemler aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

4.2.1 Ters Saçılma Yöntemi

Lineer Schrödinger denkleminde etkileşme potansiyel biliniyor ise dalga fonksiyonunu ve bu duruma karşılık gelen enerji bulunur. Fakat makroskopik kuantum durumları için genellikle saçılma deneyleri yapılır ve bu saçılma deneylerine bakarak incelenen sistemin iç yapısı anlaşılmasına çalışılır, bu iç yapı parçacıklar arası etkileşme potansiyeline bağlıdır. Ters saçılma yöntemi saçılma değerlerinden iç yapının belirlenmesi ilkesine dayanır. Ters saçılma yöntemi aynı zamanda geniş bir lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin başlangıç değer probleminin lineerleştirilerek çözülmesini sağlar.

Bu yöntem ilk kez 1967'de, Gardner, Green, Kruskal ve Miura (GGKM) lineer Schrödinger dalga denklemiyle bağlantılı olan, doğrusal olmayan KdV denklemini çözmek için ortaya atıldı. Buna göre,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\lambda - \phi)\psi = 0$$

denklemini GGKM dönüşümüne göre;

$$\phi = \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda(t)$$

şekline dönüştürüldüğünde, ϕ doğrusal olmayan dinamik denklemleri sağlar. 1968'de Lax, ters saçılma yöntemi için daha genel bir ifade önerdi. Lax'a göre verilen bir lineer olmayan denklem

$$\phi_t = K(\phi), \quad \phi = \phi(x, t) \quad (4.23)$$

şeklinde ise, ters saçılma yöntemiyle bu denklemi çözmek için aşağıdaki üç adıma uymak gereklidir.

1) Denklem (4.20) ve (4.21)'de verildiği gibi $iL_t = BL - LB$ olacak, ϕ 'nin çözümüne bağlı olan L ve B operatörlerinin bulunması,

2) Saçılma operatörü L ,

$$L\phi = \lambda\phi \quad (4.24)$$

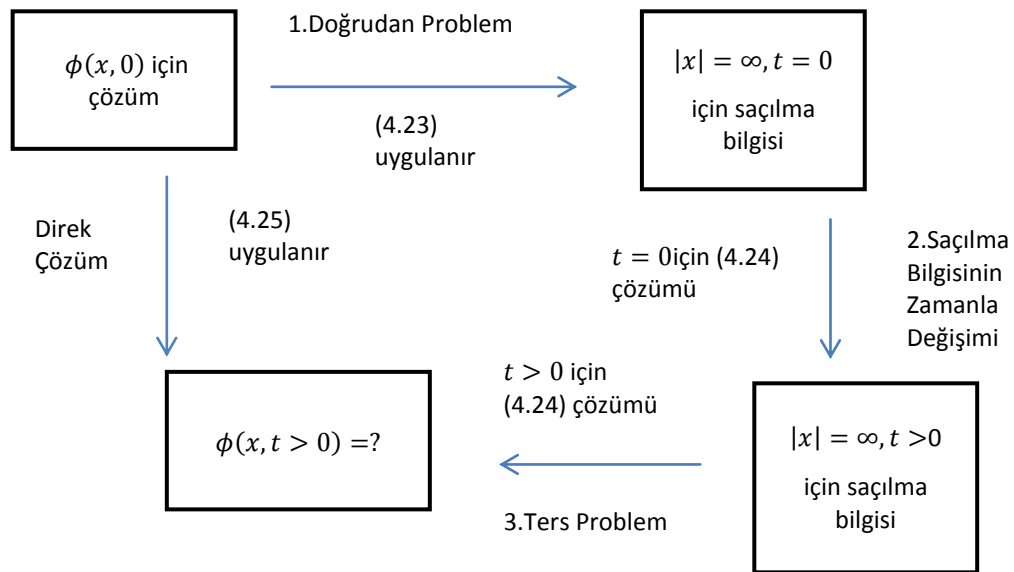
özdeğer denklemini sağlaması,

3) Saçılan dalgaya ait zaman bağımlılığı

$$i\phi_t = B\phi \quad (4.25)$$

eşitliğinin verilmesi gerekir.

Bu üç aşama doğrudan problem, saçılma datalarının zamanla evrimi ve ters problem olarak adlandırılabilir. Ters saçılma problemindeki bu üç aşama tablo (4.1)' de gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Ters saçılma yönteminin işlem akış şeması

Verilen $\phi(x, 0)$ başlangıç koşullarına sahip, doğrusal olmayan denklemin $\phi(x, t)$ doğrudan çözümlerini elde etmek yerine, ters saçılma yöntemi, yukarıdaki üç adıma uyulduğunda, lineer integral denklemin çözümlerini bulma yöntemine dönüşür. Ters saçılma yöntemindeki esas zorluk, var olmalarına rağmen L ve B operatörlerinin elde edilmesidir.

4.2.2 Backlund Dönüşümleri

Çözümü bilinen doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemden yola çıkarak, başka bir doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümlerini elde etmek mümkündür, bu yöntem Backlund dönüşümleri olarak bilinir, buna göre;

$d\phi = P \cdot dx + Q \cdot dt$ ifadesinde birinci mertebe diferansiyel denklemi integre edilebilme koşulu

$\phi_x = P$, $\phi_t = Q$ ise, $P_t = Q_x$ olmasıyla mümkündür. Backlund dönüşümleri aşağıdaki üç adımı içerir.

- 1) P ve Q , ϕ 'nin fonksiyonları şeklinde yazılmalı,
- 2) ϕ_0 deneme fonksiyonu seçilmeli,
- 3) $\phi_{1x} = P(\phi_1, \phi_0)$ ve $\phi_{1t} = Q(\phi_1, \phi_0)$ olarak seçilmeli ve ϕ_1 için çözümü bulunmalıdır.

Backlund dönüşümleri, verilen bir çözüm için yeni bir soliton bulunmasını sağlar. Backlund dönüşümlerinin zor tarafı P ve Q fonksiyonlarını bulmaktır. Bu konuda Daniel Zwilling'in kitabı Faydalı olabilir[15].

4.2.3 Hirota Metodu

Hirota metodu bağımsız değişkenin değişmesini ve orjinal denklemin

$F(D_x^m D_t^n) = 0$ şeklinde yazılmasını sağlar. Burada D bir operatördür. Denklemin analitik çözümü pertürbasyon yöntemi kullanılarak elde edilebilir. Yukarıdaki eşitlik,

$$D_x^m D_t^n(f, g) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^n f(x, t) g(\tilde{x}, \tilde{t}) \right]_{x=\tilde{x}, t=\tilde{t}}$$

değerine eşittir. Hirota metodu yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir.

4.2.4 İlerleyen-Dalga çözümleri ve Doğrusal Olmayan Schrödinger Denklemi

$V(x, t) = A(\phi) = 0$ olan (3.2) denklemindeki lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümleri

$$\phi(x, t) = \phi(\xi) e^{i(kx' - \omega t')}$$

şeklinde varsayılabilir. Burada,

$$x' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} x, \quad t' = \frac{t}{\hbar}$$

ve $\mathcal{E} = x' - \omega t$ şeklinde olmalıdır. Bu yeni değişkenler cinsinden (4.2) denklemi

$$\frac{d^2\phi(\xi)}{d\xi^2} + (w - k^2)\phi(\xi) - b\phi^3 = 0 \quad (4.26)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin soliton çözümleri $b > 0$ ve $\gamma = w - k^2 > 0$ için kolayca

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2\gamma}{b}} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\gamma}(\xi - \xi_0)e^{i(kx' - \omega t')}\right] \quad (4.27)$$

olduğu; $b < 0, \gamma < 0$ içinde

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{|\gamma|}{|b|}} \tanh \frac{\sqrt{|\gamma|}}{2} (\xi - \xi_0) e^{i(kx' - \omega t')} \quad (4.28)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Eğer ilerleyen dalga çözümleri,

$$\phi(x', t') = \tilde{\phi}(\xi) e^{i\Omega t' + iQx'} \quad (4.29)$$

şeklinde olduğunu varsayılırsa, (4.2) denklemi, $b = 2, V = A, (\phi) = 0$ koşullarıyla

$$\tilde{\phi}_{\xi\xi}(\xi) + i(2Q - v)\tilde{\phi}_\xi - \tilde{\phi}(\xi)(\Omega + Q^2) + 2\tilde{\phi}^3(\xi) = 0 \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{\phi}^3(\xi)$ teriminin kompleks katsayısı sıfır alınırsa $Q = v/2$ olur. Bundan başka $A = Q^2 + \Omega$ alınırsa, $\Omega = -v^2/4 + A$ bulunur. Sonuç olarak (4.31) denklemi,

$$\phi_{\xi\xi} - A\phi + 2\phi^3 = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklem integre edilebilir. Sonuç olarak

$$(\phi_\xi)^2 = D + A\phi^2 + \phi^4$$

elde edilir. D integral sabitidir. ϕ ise eliptik çözüm kullanılarak bulunur.

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{D + A\phi^2 - \phi^4}} = \pm \xi$$

$$P(\phi) = (\beta_1 - \phi^2)(\phi^2 - \beta_2)$$

olsun.

$$\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \{K(k) - F(\phi, k)\} = \pm \xi$$

Burada, $F(\phi, k)$ tamamlanmamış eliptik integral

$$k = \sqrt{\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1}} \beta_{1,2} = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{A^2}{2} + D}$$

olmak üzere $\beta_{1,2} = \phi_{1,2}^2$ denecek olursa

$$\phi(\xi) = \phi_1 \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2} \right) \text{sn}^2(\xi, k) \right] \right\}^{1/2}$$

bulunur. Eğer $D \rightarrow 0$, $\phi_1 \rightarrow \phi_0$, $k \rightarrow 1$ ve $\phi \rightarrow \phi_0 \text{sech} \phi_0 \xi$ ise burada $\phi_0 = \sqrt{A}$ halinde lineer olmayan Schrödinger denkleminin soliton çözümleri,

$$\phi_s(x, t) = \sqrt{A} \text{sech}[\sqrt{A}(x' - vt')] \exp \left[i \left(-\frac{1}{4} v^2 t' + \frac{1}{2} v x' + A' \right) \right] \quad (4.32)$$

şeklinde elde edilebilir.

4.3 Ters Saçılma Yöntemine Örnek Olarak, KdV Denkleminin İncelenmesi

Ters saçılma problemi şekil 4.1 de bir akış şeması ile özetlenmişti. Bu şemaya örnek olarak KdV denkleminin kare kuyu çözümleri incelenebilir.

4.3.1 Doğrudan Problem Kısmı

$t = 0$ 'da $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$ aşağıda şekli verilen kare kuyu potansiyeli olacak bir başlangıç koşulu alınsın. Buna göre Lax operatörü için

$$L(0)\psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \phi(x, 0)\psi = \lambda\psi$$

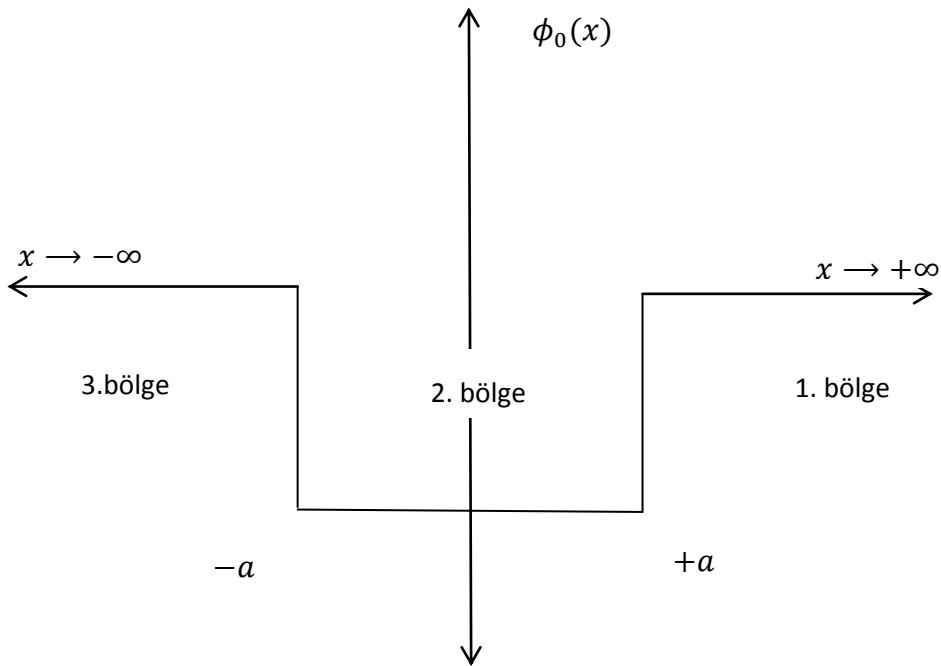
ve

$$L(0)\psi(x, 0) = \lambda\psi(x, 0)$$

veya

$$\psi_{xx}(x, 0) + [\lambda - \phi_0(x)]\psi(x, 0) = 0$$

olmak üzere, λ enerjili, $\phi_0(x)$ potansiyeline sahip Schrödinger dalga denklemi ele alınsın. Potansiyelin şekli (4.2)' de verilmiştir, üç ayrı bölge için yapılan çözümler ise aşağıdaki şekildedir.



Şekil 4.2 Kare kuyu potansiyel şeması

1.bölgede çözüm:

$$\psi_1 = Ae^{-ikx} + Be^{-ikx}$$

şeklindedir. $A = 1$, $B \equiv R$ alınacak olursa,

Buna göre, $\psi_1 = Ae^{-ikx} + Re^{-ikx}$ olur.

3.bölgede çözüm:

$$\psi_3 = Te^{-ikx} \text{ ve } T \text{ geçme katsayısıdır.}$$

2.bölgede çözüm:

$\phi_0 = -U_0$ alınırsa,

$$\psi_2 = \alpha e^{-i\sqrt{U_0+k^2}x} + \beta e^{+i\sqrt{U_0+k^2}x}$$

'dir. Sınır değer koşulları da $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $[\psi_1(a)]_x = [\psi_2(a)]_x$, $\psi_3(-a) = \psi_2(-a)$ ve $[\psi_3(-a)]_x = [\psi_2(-a)]'_x$ dir. Burada dört tane sınır değer koşulu olan R, T, α ve β 'nin bulunması yeterlidir.

Ters saçılma yönteminde R ve T, k değerine bağlıdır. k ve x için herhangi bir sınırlama yoktur, sürekli değerler alabilirler. Böylece $\lambda > 0$ için sürekli spektrum elde edilir.

Şimdi de $\lambda < 0$ durumuna bakılsın.

$$\lambda^2 = -\kappa^2 \quad (\kappa \text{ gerçel sayı}) \text{ olmak üzere,}$$

1.bölgede çözüm:

$$\psi_{xx} - \kappa^2 \psi = 0 \text{ olur. Çözümleri}$$

$\psi \sim e^{\pm \kappa x}$, $x \rightarrow \infty$ için ψ sonlu olması gerektiğinden $e^{\pm \kappa x}$ çözüm olamaz.

$$\psi_1 = e^{-\kappa x} \text{ genel çözümdür.}$$

3.bölgede çözüm:

$$\psi_3 = C e^{\kappa x} (x \rightarrow -\infty \Rightarrow \psi \rightarrow 0),$$

2.bölgede çözüm:

$$\psi_{xx} + (U_0 - \kappa^2)\psi = 0 \text{ 'dır. Bu denklemin çözümü ise}$$

$$\psi_2 = \alpha e^{-i\sqrt{U_0-\kappa^2}x} + \beta e^{i\sqrt{U_0-\kappa^2}x}$$

şeklindedir. Burada dört sınır koşuluna karşılık C, α ve β gibi üç tane sabit vardır. Bu durum κ' yı içeren transandantal denklemin kesikli olmasına neden olduğundan elde edilen spektrum kesiklidir. Bu kesikli durumlar, bağlı durumlar olarak adlandırılır.

$\lambda > 0$ çözümleri saçılan çözümler olarak adlandırılır. Verilen örnekte potansiyel, kare kuyu şeklinde olmayabilir. Bu durumda saçılma parametreleri $R(k, t=0)$, $T(k, 0)$, C_n, κ_n ifadeleri ve bağlı durumların sayısı N 'nin bulunması gerekir. Bütün bu değerler bulunduğunda direk yöntem de tamamlanmış olur.

4.3.2 Saçılma Verilerinin Zaman İçindeki Evrimi

Bir sonraki aşama saçılma değerlerinin nasıl değiştiğini anlamaktır. Lax bağıntısındaki B operatörü zaman içindeki evrimi tanımlak için burada anahtar rol oynar. Buna göre,

$$iU_t = BU \quad (4.33)$$

'dur. $U(0) = I$ olmak üzere (I birim operatördür),

B self-adjoint olduğu için $B^+ = B$ olduğundan $U(t)$ birimsel operatördür. Yani, $U^+U = U^+U = I$ 'dir. Bu birimsel dönüşümler, bağlı durum enerjilerini içeren özdeğerlerin zamandan bağımsız olduğu gösterilebilir. Buna göre,

$$L(t) = U(t)L(0)U^+(t)$$

alınabilir. Şimdi, $t = 0$ ve $t > 0$ için sırasıyla,

$L(0)\psi(0) = \lambda(0)\psi(0)$ ve $L(t)\psi(t) = \lambda(t)\psi(t)$ özdeğer problemine bakılsın. Burada $\lambda(t) = \lambda(0)$ olduğu gösterilebilir. Bu ise özdeğerin zamandan bağımsız olduğunu gösterir. Aynı zamanda $i\psi_t = B\psi'$ 'dir.

$\psi_t = U(t)\psi(0)$ alınacak olursa bu eşitlik kolayca gösterilebilir. κ_n bağlı durum özdeğerleri zamandan bağımsız oldukları için doğrudan problemdeki $t = 0$ anındaki bağlı durum sayıları toplamı N herhangi bir t anındaki durum sayıları ile aynıdır. Bağlı durum sayıları ϕ_0 'a bağlıdır.

$R(k, 0), T(k, 0)$ ve $C_n(0)$ değerlerinin zamana göre değişimi olan $R(k, t)$ ve $C_n(t)$ 'ye nasıl bağlı olacağını bulmak için B 'nin açık formülünün yazılabilmesi gerekir. Burada,

$$B = -4i \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3i \left(\phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \phi \right)$$

şeklinde KdV denklemi alınacak olursa,

$$C_n(t) = C_n(0)e^{-4\kappa_n^3 t}$$

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8\kappa_n^3 t} \text{ olarak bulunur,}$$

$$T(k, t) \text{ ise } |R(k, t)|^2 + |T(k, t)|^2 = 1$$

bağıntısına göre bulunabilir

4.3.3 Ters Problem

t anındaki saçılma datalarını bulduktan sonra bu değerler potansiyelin zaman içindeki evrimi olan $\phi(x, t)'$ yi bulmak için kullanılacaktır. Bu ters problem Gelfand Le Vita (G-L) veya Marchenko lineer integral denklemi olarak da bilinir.

(G-L) integral denkleminde $g_1(x, y, t)$ fonksiyonu bulunursa,

$$\phi(x, t) = -2 \frac{d}{dx} g_1(x, y, t)$$

elde edilir. Bundan sonraki aşama soliton çözümlerini bulmaktır. Bunun için $R(k, t)$ saçılma dataları için elde edilen bağıntıda $N=1$ tekli soliton çözümlerini , N nin diğer değerleri için çoklu soliton çözümlerini elde etmek mümkündür[16]. Potansiyel çukuru yerine potansiyel engeli problemi de benzer şekilde incelenebilir[13].

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Lineer kuantum mekaniği ilk ortaya çıktığı yıllarda birçok bilim insanı tarafından büyük eleştirilere sebep olmuştu, bu tezin giriş kısmında bu tartışmalara kısaca değinildi. Klasik mekaniğin deterministik ve komütatif yapısı birçok açıdan sağlam ve tartışmasız matematiksel bir alt yapı oluşturuyordu. Bu nedenle, lineer vektör uzayları üzerine kurulmuş olmasına rağmen dalga fonksiyonunun olasılıkçı yapısından dolayı , lineer kuantum mekaniğinin kabulü başlangıçta zor oldu. Fakat zamanla atomik ölçekte yapılan deneyleri açıklaması ve özellikle yarıiletken teknolojisi gibi endüstriyel alanda birçok yeniliklere çığır açması, tartışmaların genel olarak felsefi boyuta ve bazı paradokslar üzerine kaymasına neden oldu. Bir süre sonra da birkaç farklı görüş genel olarak iki kümede toplandı ve bu ana kümeler günümüzde Kopenhagen ekolü ve Paris ekolü olarak adlandırılır [1,19]. Lineer kuantum mekaniğinin ortaya çıkması siyah cisim ışıması, alfa saçılması, fotoelektrik olay gibi atomik ölçekte deney yapma teknolojisinin gelişmesi sonucu olmuştur. Klasik mekaniğin yasaları genellikle düzenli yapılara ve yüksek simetriye sahip sistemlere karşılık gelen lineer denklemlerle ifade edilir. Bu Fizik yasalarının tarihsel gelişmesine bağlı bir sonuçtur. Her ne kadar doğada lineer olmayan olaylar(yada daha doğrusu bütün doğa olayları) biliniyor idiye de bu olayların ifade edileceği denklemler lineer olmayan diferansiyel denklemler gibi analitik çözümleri genellikle mümkün olmayan veya zor olan denklemler olduğu için doğanın temel yasalarının aslında basit ve yüksek simetriye sahip olduğu hakkında genel bir görüş egemen olmuştur. Bu nedenle klasik fiziğe göre incelenen doğadaki karmaşık fizik olayları genellikle birtakım yöntemlerle basitleştirilmiş veya doğrusal harmonik

salınıcı gibi basit bir modele dayandırılarak incelenmiştir. Fakat Yirminci yüzyılın ortalarında bilgisayarların gelişmesi sonucu doğrusal olmayan doğa olaylarının (hava tahmini vb.) modellenmesi mümkün olmuş ve doğadaki birçok olayın belli yaklaşım ve basitleştirme yapılmadan da simülasyon ve nümerik çözümleri elde edilmiştir. Bu ise fraktal yapılar, kaotik dinamik gibi birtakım yeni fizik ve matematik disiplinlerinin gelişmesine neden olmuştur. Lineer kuantum mekaniği yirminci yüzyılın en başarılı teorilerinden biridir. Atomik yapının anlaşılması, kimyasal bağların açıklanması gibi atomik ölçeğin temel sorularına deneylerle büyük uyum gösterecek şekilde cevaplar vermiştir. Lineer kuantum mekaniği ile klasik mekanik arasındaki geçiş uygunluk ilkesine göre açıklanır. Buna göre kuantum sayılarının değeri sonsuza yaklaştığında veya Plank sabitinin sıfır alınması yaklaşımı altında lineer kuantum mekaniği ile klasik mekaniğin sonuçları birbirine uyum sağlar. Bu uygunluk ilkesi özellikle günümüzün başlıca teknoloji alanı olan mezoskopik ve nano ölçekte oldukça önemlidir. Makroskopik ölçekte kuantum olayları ile ilgili yapılan süperakışkanlık, süperiletkenlik, Bose-Einstein yoğunlaşması gibi bazı deneyleri lineer kuantum mekaniği ile açıklamak kolay değildir. Bu deneylerde incelen sistemdeki parçacıklar ortak davranırlar, bu nedenle bu sistemlerin davranışına parçacık yaklaşımına uygun olması için kuasiparçacık davranışı olarak adlandırılır. Bu olayların açıklanması için nasıl ki fizik makro ve mikro ölçekte farklı olarak inceleniyor ise, benzer şekilde fiziksel sistemlerinde parçacıkların ayrı ayrı davrandığı (incoherent) ve parçacıkların ortak davrandığı (coherent) şeklinde incelenmesi gerektiği gibi görüşlerle açıklanmaktadır. Bu tezde incelen lineer olmayan sistemlerin kuantum mekaniği genellikle bu ortak davranan sistemlerin dinamiğini açıklamaktadır. Fakat bazı bilim adamları da lineer olmayan kuantum mekaniğinin daha genel bir mekanik olduğunu, lineer olan kuantum mekaniğinin bu mekaniğin özel bir durumu olduğunu belirtmektedir. Bu teoriyi savunanlara göre lineer kuantum mekaniği hidrojen atomu, helyum atomu gibi birkaç parçacıktan oluşmuş basit olarak ta nitelendirilebilecek sistemler için çok iyi sonuçlar vermektedir. Fakat parçacık sayısı arttığında lineer kuantum mekaniğinin problemleri açığa çıkmaktadır. Bu nedenle bu tür sistemler için lineer olmayan kuantum mekaniği kullanılmalıdır. Bu görüş günümüzde tartışılan bir görüştür ve bu görüşe şiddetli karşı çıkışlar mevcuttur[20]. Lineer olmayan kuantum mekaniği moden soliton teorisine dayanmaktadır. Bu teoriye göre kuaziparçacıkların davranışları solitonlarla açıklanır.

Soliton teorisi ise anlaşılması zor olan ve uygulamaları ancak KdV denklemi gibi birkaç problem için yeteri kadar çalışılmış bir teoridir[13]. Bu nedenle bu teorinin pratikte ne kadar kabul göreceği bu konuda yapılacak çalışmalarla [21,22,23] zamanla anlaşılacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Copenhagen Interperation of Quantum Mechanics, (2002),
<http://stanford.library.usyd.edu.au/archives/win2008/entries/qm-copenhagen/>, 10.04.2012
- [2] Schiff, L.I., (1968), Quantum Mechanics, Third Edition, Mc Grow and Hill Co., Illinois.
- [3] Merzbaher, E., (1997), Quantum Mechanics, Third Edition, Hamilton Printing Co.,New York.
- [4] Gasirovitz, S., (2003), Quantum Physics, Third Edition, John Walley and Sons Co., New Jersey.
- [5] Einstein A., (Fall, 2003), Deadalus, 132(4): 22-25.
- [6] Kittel,C.,(1987), Quantum Theory of Solids, Second Editon, John Wiley and Sons Co., New Jersey
- [7] Pines, D. and Nozieres, P., (1999),The Theory of Quantum Liquids, First Edition, Perseus Books Publising, USA.
- [8] Pines, D. and Nozieres, P., (1999),The Theory of Quantum Liquids, First Edition, Perseus Books Publising, USA.
- [9] Pang, Xiao-Feng (1994). Theory of Nonlinear Quantum Mechanics, Chongqing Press, Chongqing.
- [10] Barenghi,Carlo F. and Sergeev Yuri A.,(2010), Vortices and Turbulance At Very Low Temperatures, CISM Courses and Lectures, 501, CISM, Udine
- [11] Barenghi, C. F., Donnerlly, R. J. and Vinen, W. F. (2010). Quantized Vortex Dynamic And Superfluid Turbulence, Second Edition, Springer, Berlin.
- [12] Barenghi,Carlo F. and Sergeev Yuri A.,(2010), Vortices and Turbulance At Very Low Temperatures, CISM Courses and Lectures, 501, CISM, Udine
- [13] Maciej Dunajski, (2010), Solitons, Instantons, and Twistors, OXFORD Univ. Press.

- [14] Bohr, N., From Wave-Particle Duality To Complementarity, First published (2001), <http://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/#WavParDuaCom>, 01.03.2012.
- [15] D. Zwillinger, (1989), Handbook of Differential Equations, Academic Press, New York.
- [16] A.C. Scott, F.Y.F. Chu, and McLaughlin, (1973) The Soliton: A new concept in applied physics. Proceedings of the IEEE, (61)143.
- [17] R.H. Enns, G.C. McGuire, (1997), Nonlinear Physics, Birkhauser.
- [18] C. Casto (2010), On nonlinear quantum mechanics, noncommutative phase space, fractal-scale calculus and vacuum energy. Fond. Physics, 1712-1730.
- [19] D. Bohm, (1951), Quantum Theory, P-Hall, New Jersey.
- [20] T.F. Jordan, (2010), Why Quantum Dynamic is Linear, Journal of Physics: Conference series, 196(2009), 012010.
- [21] T.K. Jana, and P. Roy (2009), Non-Hermitian quantum mechanics with minimal length uncertainty. SIGMA, 5, 083, 7,
- [22] R. Tsekov (2009), Towards nonlinear Fock-Planck Equation, Int. J. Theor. Phys.
- [23] F. Correa, G.V. Dunea, M.S. Plyushchay, (2009), The Bogoliubov-de Gennes systems, the AKNS hierarchy and nonlinear quantum mechanical supersymmetry. Annals of Physics, 2522.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Deniz Bardız OKAT
Doğum Tarihi ve Yeri : 08.04.1978
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : denizbardiz@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Fizik	Yıldız T. Üniversitesi	2003
Lise	Fen	Özel Samsun Fen Lisesi	1995