

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA ASİMPTOTİK
YÖNTEMLE BOOTSTRAP ÖRNEKLEMESİ**

Endüstri Mühendisi Aslıhan ÖZDEMİR

**FBE İstatistik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Atıf EVREN (YTÜ)

İSTANBUL, 2011

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL ÖRNEKLEME PRENSİPLERİ VE ÇEŞİTLİ ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ	2
2.1 Örneklemenin Amacı, Aşamaları ve Avantajları.....	2
2.1.1 Basit Tesadüfî Örneklem	3
2.1.2 Kümelere Göre Örneklem Yöntemi.....	3
2.1.3 Zümrelere Göre Örneklem Yöntemi	5
2.1.4 Sistemik Örneklem Yöntemi.....	6
2.2 Tekrarlı Örneklemenin Önemi ve Diğer Örneklem Yöntemlerine Göre Avantajı	7
2.2.1 Permütasyon Tekniği	8
2.2.2 Çapraz Geçerlilik Yöntemi (Cross-Validation)	9
2.2.3 Çakı Tekniği (Jackknife)	9
2.2.4 Bootstrap (Ayakkabı Bağı) Yöntemi	11
3. BOOTSTRAP YÖNTEMİ VE TEMEL KAVRAMLAR	12
3.1 Tek Değişken için Standart Hata Tahmini.....	14
3.2 İki Örneği Veri Setinde Bootstrap Tekniği.....	15
3.3 Bootstrap Yönteminin Çeşitleri	16
3.3.1 Çift Bootstrap Yöntemi	16
3.3.2 Bayesian Bootstrap Yöntemi	17
3.3.3 Düzeltilmiş Bootstrap Yöntemi	18
3.3.4 Parametrik Bootstrap Yöntemi	19
3.3.5 Parametrik Olmayan Bootstrap Yöntemi.....	21
4. DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ	23
5. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON ANALİZİ	25
5.1 Regresyon Parametrelerinin Tahmini	27
5.1.1 Doğrusal Olmayan Regresyonda EKK Tahmini	27

5.1.1.1	Gauss - Newton Yöntemi	28
5.2	Doğrusal Olmayan Regresyonda Parametrelerin Sonuçları	31
5.2.1	Hata Terimlerinin Varyans Tahmini	32
5.2.2	Büyük Örnek Teorisi	32
5.2.2.1	Büyük Örnek Özellikleri	33
5.2.2.1.1	Asimptotik Sapmasızlık	33
5.2.2.1.2	Tutarlılık	33
5.2.2.1.3	Asimptotik Etkinlik	34
5.2.3	γ_k Parametresinin Güven Aralığı	34
5.2.4	Eşzamanlı Birçok γ_k Parametrelerinin Güven Aralığı	34
5.2.5	Tek γ_k Parametresinin Hipotez Testi	34
5.2.6	Birçok γ_k Parametrelerinin Hipotez Testi	35
6.	UYGULAMA	36
7.	SONUÇLAR	39
	KAYNAKLAR	40
	EKLER	42
Ek 1	Excel Makro Verileri	43
Ek 2	n=25 İçin Ortaya Çıkan Değerler	45
Ek 3	n=50 İçin Ortaya Çıkan Değerler	46
Ek 4	n=75 İçin Ortaya Çıkan Değerler	47
Ek 5	n=100 İçin Ortaya Çıkan Değerler	48
Ek 6	n=200 İçin Ortaya Çıkan Değerler	49
Ek 7	n=500 İçin Ortaya Çıkan Değerler	50
	ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGE LİSTESİ

b	Parametre tahminci vektörü
b_0	β_0 'in tahmincisi
b_1	β_1 'in tahmincisi
f	Doğrusal olmayan regresyonda beklenti fonksiyonu
$f(X_i, \gamma)$	Doğrusal olmayan fonksiyon
g	Doğrusal olmayan regresyonda EKK tahmincileri vektörü
I	Birim Matrisi
L	Olabilirlik fonksiyonu
p	Bağımsız değişken sayısı
P	Parametre sayısı
q	Doğrusal olmayan regresyonda bağımsız değişken sayısı
r^2	Belirlilik katsayısı
R^2	Çoklu belirlilik katsayısı
$s(b_0)$	b_0 'in standart hatası
$s(b_1)$	b_1 'in standart hatası
$S(\theta)$	Kalıntı kareleri toplamı
$Var(b_0)$	b_0 'in varyansı
$Var(b_1)$	b_1 'in varyansı
X	Bağımsız veya açıklayıcı değişken
X	Veri matrisi
Y	Bağımlı veya açıklanan değişken
$\hat{Y}$	Y 'nin tahmin değeri
β_0	Sabit terim parametresi
β_1	Eğim parametresi
β	Parametre vektörü
θ	Doğrusal olmayan modellerde parametre vektörü
ε	Hata terimleri
γ	Doğrusal olmayan regresyonda parametre vektör

KISALTMA LİSTESİ

ANOVA	Varyans Analizi (Analysis of Variance)
DORM	Doğrusal Olmayan Regresyon Modeli
EKK	En Küçük Kareler
MSE	Kalıntı Kareleri Ortalaması
MSR	Ortalama Açıklanan Kareler Toplamı
SSE	Kalıntı Kareleri Toplamı (Residual Sum of Squares)
SSR	Açıklanan Kareler Toplamı (Regression Sum of Squares)
CV	Çapraz Geçerlilik (Cross- Validation)

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 5.1 Doğrusal Olmayan EKK'nın Gözlem Uzayı	26
Şekil 5.2 $\hat{\theta}$ 'nın Örneklem Dağılımının. θ Etrafında Yoğunlaşması Halindeki Tutarlılık Grafığı.....	34

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 Bootstrap Yöntemi Aşamaları 1	12
Çizelge 3.2 Bootstrap Yöntemi Aşamaları 2	14
Çizelge 6.1 Uygulama Örnek Verileri	36
Çizelge 6.2 Excelde Ekran Görüntüleri b1 ve b2 için	37
Çizelge 6.3 Farklı Örnek Büyüklükleri İçin Oluşturulmuş b1 ve b2 Değerleri.....	38

ÖNSÖZ

Doğrusal olmayan regresyonda parametre tahminleri asimptotik normallik varsayımına dayandırılmaktadır. Asimptotik normallik ise büyük örneklem hacimlerini gerektirmektedir. Bununla birlikte doğrusal olmayan regresyon modelleri için uygun sayıda veri bulmak genellikle zor ve zahmetli bir iş olduğundan asimptotik normallik varsayımı gerçekçi olmamaktadır. Çünkü genellikle doğrusal olmayan veri laboratuvar koşullarında gerçekleştirilen belirli fizik ya da kimya deneylerinden elde edilmektedir. Sözgelimi, örnek büyüklüğünün birkaç birim arttırılması bile oldukça maliyetli sayılabilecek deneylerin tekrarlanmasını gündeme getirebilir. Bu çalışmada, doğrusal olmayan regresyonda parametrelerin aralık tahminleri bootstrap yöntemi ile oluşturulmuştur. Bootstrap yöntemi anakütle dağılımına ilişkin varsayımların yerine gelmemesi halinde, parametrelerin aralık tahminlerinin oluşturulmasında alternatif bir yöntem olarak değerlendirilebilir. Bu tezin hazırlanmasında yardımları için değerli hocam ve danışmanım Yard. Doç. Dr. Atıf EVREN'e teşekkürü borç bilirim.

Tüm bunların yanında, tez çalışmam sırasında, maddi ve manevi hiçbir yardımı esirgemeyen eşim Özhan ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Ocak 2011

ÖZET

Doğrusal olmayan regresyonda parametrelerin aralık tahminleri (ya da parametrelere yönelik hipotez testleri) asimptotik normalliğe dayanmaktadır. Asimptotik normallik büyük örnek hacmi gerektirdiğinden bu yaklaşım her zaman gerçekçi değildir. Bazen örnek büyüklüğünün artırılması son derece zahmetli ya da maliyetli olabildiğinden asimptotik normalliğe dayalı yöntem pratik olmamaktadır. Bu çalışmada eldeki veri doğrusal olmayan regresyon ile modellendikten sonra asimptotik normalliğe alması Bootstrap gibi parametrik olmayan bir yöntemle ile aralık tahminlerine gidilecektir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Olmayan Regresyon, Bootstrap Örnekleme

ABSTRACT

Parameter interval estimates (and hypothesis testing procedures on parameters) are based on the assumption of asymptotic normality in nonlinear regression. This approach, however, is not practical all the time since asymptotic normality requires bigger sample sizes considerably. Because nonlinear data are sometimes very hard to obtain, increasing sample sizes may result in some serious problems. In this study, after the data are fit by a nonlinear regression model, interval estimates for the parameters are going to be realized by Bootstrap which can be evaluated as a nonparametric technique.

Keywords: Nonlinear Regression, Bootstrap Sampling

1. GİRİŞ

Bu çalışmada doğrusal olmayan regresyonda parametrelerin aralık tahminleri bootstrap, jackknife gibi parametrik olmayan yöntemler ile gerçekleştirilecektir.

Bölüm 2 de temel örnekleme yöntemleri ve çeşitleri, Bölüm 3'te Bootstrap örnekleme yöntemi incelenmiştir. Bölüm 4'te, doğrusal regresyon analizi ve Bölüm 5'te doğrusal olmayan regresyon analizi ele alınmıştır. Bölüm 6 uygulamaları içermektedir. Bu uygulamalar sırasında, Excel 2003 paket programları kullanılmıştır.

Büyük örnekler üzerinde inceleme yapmak çoğu zaman büyük işlemlere, zaman ve maliyet kaybına yol açar. Büyük örnek alıp tahmin yapmaktansa, küçük örnekler ile yeniden örnekleme yöntemlerini uygulayarak benzer sonuca ulaşılabilir. Bootstrap yöntemi regresyon analizine göre, tahmin hatalarının daha az olması, standart sapmaların daha küçük olması nedeniyle tercih edilen bir yöntemdir. Örneklemenin amacı, tamsayım yapmak yerine anakütleden çekilen örnekten hareketle anakütle hakkında tahmin yapmak şeklinde açıklanabilir. Örnekleme yapmak her zaman avantajlı bir yöntem olmuştur.

Tekrarlı örnekleme yöntemleri, genel parametrik istatistiksel yöntemlerin uygulanmadığı durumlarda, test edilen hipotezdeki istatistiğin anlamlılığını ortaya koymak veya bir güven aralığının alt ve üst sınırlarını saptamak için kullanılır. Klasik istatistiksel yöntemlere dayanılarak yapılan istatistiksel analizler standart hataları ve güven aralıkları belirlemek için merkezi limit teoremine ve normal yaklaşımlarla oluşturulmuştur, tekrarlı örnekleme yöntemleri örnek değerlerinin dağılımı asimptotik normal dağıldığında geçerli olduğundan bilgisayara dayalı analizlerdir

2. TEMEL ÖRNEKLEME PRENSİPLERİ VE ÇEŞİTLİ ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ

2.1 Örneklemenin Amacı, Aşamaları ve Avantajları

İstatistik’te tamsayım çoğu durumlarda tercih edilmez çünkü maliyetli, zaman alıcı ve hatta olanaksız olabilir. Tamsayım, anakütle çok büyük olduğunda oldukça maliyetli bir iştir. Ancak anakütle fazla büyük değil ise örneklemeye başvurmak gerekmez ve tamsayım yapılabilir. Bazı durumlarda tamsayım mümkün olsa bile bulguları değerlendirecek yeterli sayıda kaliteli işgücü yok ise örneklemeye başvurmak yine kaçınılmaz olur. Yine de örnek hacmi ne kadar büyük olursa, elde edilen sonuçların güvenilirliği o ölçüde yüksek olacaktır. Başka bir ifade ile istatistiksel çalışmalarda çoğu zaman maliyetler ile ulaşılan istatistiksel sonuçların güvenilirliği arasında bir tür “trade-off” (değiş-tokuş) söz konusudur.

İstatistik literatüründe örnekleme ve istatistiksel tahmin konuları birlikte ele alınırlar. Örnekleme çalışmalarının bir amacı; anakütle dağılımını belirleyen sabitleri (parametreleri) tahmin etmektir. Tahmincilerin bazı özellikleri de hiç şüphesiz örnekleme planının belirlenmesinde önemli olmaktadır.

Örnekten hareketle hesaplanan parametre tahmini değeri ile anakütle parametresinin aynı çıkması elbette her zaman mümkün değildir. Zaten böyle bir beklenti de söz konusu değildir. Bununla birlikte, örnekleme planı bu iki değer arasındaki farkın olabildiğince düşük tutulmasını hedeflemelidir.

Anakütle parametresi; ilgili anakütleden çekilen örnekten hareketle bir sayı veya bu sayıyı da kapsayacak bir aralık şeklinde tahmin edilebilir. Bu yöntemler sırasıyla nokta tahmini ve aralık tahmini olarak da adlandırılırlar. Başka bir ifade ile söylenecek olursa, örnek değerlerinden hareketle anakütle parametresini tek bir değer olarak tahmin etme, nokta tahminidir. Anakütle parametresinin içine düşeceği aralığı (belirli bir olasılık ifadesi ile) belirlemek de aralık tahmini olarak adlandırılabilir.

İyi bir nokta tahmincisi yansız, tutarlı, etkin ve yeterli olmalıdır. Nokta tahmincisinin yansızlığı, tahmincinin örnekleme dağılımının beklenen değerinin, söz konusu parametre değerine eşit olması demektir. Parametre ile parametre tahmininin beklenen değeri arasındaki fark sistematik hata (bias) olarak adlandırılır.

Tutarlılık ise asimptotik bir özelliktir. Bir parametre tahmincisinin yanlı olduğu (başka bir deyişle parametre tahmincisinin beklenen değerinin söz konusu parametreye eşit olmadığı) varsayılın. Sistematik olarak örnek büyüklüğü arttırıldığında bu hata azalıyorsa, bu

tahminciye tutarlı istatistik denilir. İstatistik'te bu türden kullanılan yanlış tahminciler vardır. Çünkü her zaman yansız tahminci bulmak mümkün olmayabilir. Bununla birlikte örnek hacminin artırılması ile hata (bias) azaltılabilir.

Bir tahminci, örnekten örneğe büyük farklılık gösteren değerler üretmiyorsa güvenilir bir tahmincidir. Etkinlik bu durumla ilgili bir özelliktir. Sözgelimi, bir anakütle parametresinin, birden fazla yansız tahmincisi söz konusu olsun. Bunlardan hangisinin örnekleme dağılımının varyansı küçük ise o tahminci tercih edilir. Bu durumda varyansı küçük olan tahminci diğerine göre daha etkin tahminci olarak adlandırılacaktır.

Diğer taraftan tahminin yeterliliği örneklem bilgisinin ne kadarının kullanıldığı ile ilgilidir. Kabaca söylemek gerekirse yeterli bir tahminci, örnekteki bilgilerin tamamının kullanarak oluşturulan istatistiktir.

Literatürde nokta tahmin yöntemleri olarak en çok olabilirlik, en küçük kareler, Bayes ve momentler yöntemi gibi yöntemlerden yararlanılmaktadır.

Örneklemenin amacı, tamsayım yapmak yerine anakütleden çekilen örnekten hareketle anakütle hakkında tahmin yapmak şeklinde açıklanabilir. Örneklemeyle dayalı tahminlerin hatasız olacaklarını düşünmek doğru olmaz. Bu noktada gerçekleşecek olan hatalar iki başlık altında toplanabilir. Bunlar; örnekleme hatası ve örnekleme dışı hatalardır. Örnekleme hatası, örnek değeri ile anakütle parametresi arasındaki farktır. Bir de örnekleme dışı hatalar söz konusudur ki, bu hataların minimum olması istenir. Örnek seçimi sırasında başvuru yöntem hatası, anakütlenin iyi tanımlanmamış olması ve eksik çerçeve oluşturulması, örneğe dâhil olan birimler hakkında tam bilgi edinilmemesi, bunun yanı sıra anket formlarına cevap verilmemesi nedeniyle ulaşılamayan yanıtlar vb. örnekleme dışı hatalar mevcut olabilir.¹

Örnekleme amacının belirlenmesinden sonra, araştırmanın iyi bir şekilde planlanması gerekir. Planlamanın ardından işlemler belirlenen amaç doğrultusunda en kısa sürede tamamlanacak şekilde gerçekleştirilir. Her şeyden önce araştırma konusu olan hedef anakütlenin belirlenmesi gerekir. Bazı durumlarda örneklenen anakütle ile hakkında bilgi toplanmak istenen anakütle (hedef anakütle) birbirlerinden farklı olabilir. Bu iki anakütlenin aynı olmasına dikkat edilmelidir.

Bir sonraki adımda ise araştırmanın güvenilirlik düzeyi belirlenir. Araştırma ister tamsayım ister örnekleme ile yapılsın mutlaka bir hata payı içerir. Bu hata tamamen ortadan

¹ Taro Yamane, Temel Örnekleme Yöntemleri, Çevirenler: Alptekin Esin, M.Akif Bakır, Celal Aydın ve Esen Gürbüzsel, Literatür Yayınları, İstanbul, 2001, s.71.

kaldırılmaz. Örneklem yapılırken hata payı genellikle %1 veya %5 olarak alınır. Hata payı da belirlendikten sonra çerçeve oluşturularak örneklem planı yürütülür. Bu nokta örnek büyüklüğünün belirlenmesi önem kazanır.

Örnek büyüklüğü belirlenirken tahmini değerlerin istenilen hassaslık derecesinde elde edilmesinin en az masrafla sağlayan ve belirli bir bütçe ile en yüksek hassaslığı sağlayan örnek büyüklüğü ideal olandır. Örnek büyüklüğündeki artış, araştırmanın süresini ve maliyetini de arttıracaktır. Bu nedenle örnek büyüklüğünün, sonuçların güvenilirliği, araştırma maliyeti ve araştırmanın özellikleri göz önüne alınarak belirlenmesi gerekir.²

Örnek büyüklüğünün belirlenmesinin ardından uygulanacak örneklem yönteminin seçimine gidilir. Örneklem yönteminin, araştırmanın amacına, süreye ve maliyete uygun biçimde seçilmesi en önemli husustur. Bir ön test uygulaması yapılarak örneklem yönteminin diğer aşamalarına geçilir. Ön test uygulamasındaki amaç, ufak bir örnek üzerinden seçilen örneklem yöntemi uygulayarak, araştırmada karşılaşılabilecek güçlükler, araştırmanın tahmini süresi ve maliyeti hakkında bir ön bilgi elde etmektir.³

2.1.1 Basit Rassel (Tesadüfi) Örneklem

Ana prensibi her bir anakütle elemanının aynı olasılıkla örneğe girebilmesidir. N birimli bir anakütleden her biri n birim içeren C_n^N tane örneği, örneklerin her birine eşit seçilme şansı vererek seçme yöntemidir. Rassel örneklemede her birimin her bir çekiliş sırasında seçilme şansı eşittir. Birinci birimin çekilme olasılığı 1/N, ikinci birimin seçilme olasılığı 1/ (N-1) olur. Birim seçiminin yerine koymadan iadesiz gerçekleştirildiği kabul edilmektedir. İşlem yerine koyularak yapıldığında bu olasılık her bir çekiliş sırasında 1/ N olur. Örneğin seçimi sırasında yanlışlığı önlemek amacıyla uygulamalarda kura yöntemi ve ya tesadüfi sayılar tablosu kullanılır. Anakütle çok büyük olduğunda tesadüfi sayılar tablosu kullanılarak tesadüfi örneklemenin şartları sağlanmış olur ve böylece subjectif yanlışlık ortadan kalkmış olur.

2.1.2 Kümelere Göre Örneklem Yöntemi

Bu şekilde örneklem genellikle örneklem zaman ve para maliyetlerini düşük tutmak için kullanılmaktadır. Anakütle çevresindeki elamanlarının birbirine yakın kümeler oluşturduğu hallerde ve her bir küme genel olarak diğer kümelere çok benzerlerse, bu tipi örneklem kullanılması uygun olabilir. Küme örnekleme iki aşamada yapılır.

² M.Kemal Yoğurtçugil, Örneklem, Sermet Matbaası, İstanbul, 1976, s.81.

³ Orhan İdil, Örneklem Teorisi ve İşletme Yönteminde Uygulanması, Fatih Yayınevi, İstanbul, 1980, s.21.

Birinci aşamada çok iyi belirlenmiş kümeler tespit edilir. Her iyi belirlenmiş kümeye bir kod numarası verilir. Bütün kod numaraları içinden basit rastgele örnekleme ile küçük sayıda 'kümeler örneği' seçilir. Örneğin, bir üniversite 35 tane bölümden oluşmuşsa ve her bölüme ait öğrenci üyeler iyice tespit edilmişlerse; her bir bölüm kodlanır ve diyelim 8 tane bölüm bu 35 bölümden basit rastgele örnek olarak (yani 35 bölüm de örneğe dahil olmak için aynı olasılığı taşıyarak) seçilirler.

İkinci aşamada her bir örneğe giren küme içinde bulunan bütün anakütle elemanları üzerinde gözlem yapılır. Yani her örnek küme için tam sayım yapılır. Örneğin, ilk aşamada seçilmiş olan 8 bölümdeki her öğrenci elemanlarının tümüne gözlem uygulanır.

Doğal olarak, tüm anakütle çerçevesi seçilmediği için zaman ve para maliyetleri tam sayımdan düşük olur. Dikkat edilirse bu çeşit örneklemede rastgele seçilme kümelerle ilgilidir. Bu seçim yapıldıktan sonra seçilen kümeler içinde bulunan birbirine yakın elemanlar gözlemlendiği için de maliyetler (özellikle basit rastgele örneklemeye kıyasla) daha düşük olması çok mümkündür. Basit rastgele örneklemeye kıyasla küme örneklemesinin bir diğer avantajı, tüm anakütle elemanlarının her birinin kodlanmasının gerekmediğidir; bu tüm kodlama büyük maliyet gerektirir ve bazen da imkânsızdır. Buna karşılık küme örneklemesinde sadece birinci aşamada seçilmiş olan kümeler elemanları tespit edilip kodlanır.

Ancak küme örnekleme, her bir kümenin diğer kümelere benzediğine ve sadece kendine has karakteri olan bir veya birkaç kümenin bulunmadığı varsayımına dayanır. Gerçekte bu varsayım her zaman ancak yaklaşık olarak doğru olacak ve bazı belirlenen kümeler kendine has karakter arz edecektir. Bu nedenle küme örneklemesinin yayılımı aynı anakütle için alınabilecek basit rastgele örneklemeden daha fazla olacaktır ve örneklemeden sonra elde edilecek kestirimler veya yapılan sınamalar daha az tutarlı olacak ve daha fazla yanlı olma olasılığı taşıyacaklardır.

2.1.3 Zümrelere Göre Örnekleme Yöntemi

Anakütle toplamına veya ortalamasına ait bir tahminin doğruluğunun sadece örnek büyüklüğü ve örnek oranına değil, aynı zamanda anakütle birimleri arasındaki değişkenliğine veya heterojenliğine de bağlı olduğu söylenebilir. Homojen birimler oluşturmak ancak anakütleyi zümrelere ayırmakla mümkündür. Zümrelere ayırma işlemi örnekten elde edilen tahminlerin varyanslarını küçültmektir.⁴ Zümrelere göre örnekleme, basit tesadüfî örneklemeye oranla

⁴ Leslie Kish, Survey Sampling, John Wiley and Sons, New York, 1965, s.76.

anakütleye hakkındaki mevcut bilgileri kullanarak, anakütleyi daha iyi temsil edecek tesadüfi örnekler oluşturmaya yarayan bir örnekleme türüdür. Anakütle ortalamasını çok yüksek bir doğrulukla tahmin etmenin bir yolu da, örnek büyüklüğünü artırmak yerine, anakütleyi anakütlenin tamamından daha homojen olan alt gruplara bölmek ve grupların her birinden büyüklükleri önceden belirlenmiş olan bir tesadüfi örnek çekmektir. Zümrelere göre örnekleme esas da; anakütleye birimler incelenecek özellikleri bakımından önemli farklılıklar gösterdiğinde; anakütleyi değerleri birbirine yakın olan birimleri bir araya toplayarak varyansları küçük ve zümre adı verilen homojen gruplar şeklinde yeniden oluşturmaktır. Zümrelere ayırma işleminin tamamlanmasının ardından, zümrelerin her biri örnekleme tabi tutularak her bir zümreden ayrı ayrı tesadüfi örnekler çekilir ve anakütle parametrelerine ilişkin tahminlerin belirlenmesine geçilir. Zümrelere göre örneklemede amaç, tahminlerin güvenilirliğini artırmaktır. Bu da ancak grupların kendi içinde homojen, aralarında heterojen olmasına bağlıdır. Homojenlik arttıkça, zümreden örneğe alınacak birimlerin sayısı da azalacaktır. Zümrelere göre örnekleme, örnek büyüklüğüne ilişkin bilginin var olduğu ve her bir zümreden bir örnek çekebilmek için gerekli olan çerçevenin mevcut olduğu araştırmalarda sıkça kullanılır.

2.1.4 Sistematik Örnekleme Yöntemi

Bu yöntemde anakütleye birimler 1'den N'ye kadar numaralanır. Numaralanan bu anakütleden n büyüklüğünde bir örnek oluşturabilmek için ilk $\frac{N}{n} = k$ tane birimden tesadüfi bir birim çekilir. Çekilen bu birim a olsun. Bu durumda örneğe girecek birimlerin sıra numarası a; a+k; a+2k;...+a(n-1)k olur. Bu özelliği ile sistematik örnekleme, basit tesadüfi örneklemenin örneğe girecek birimlerin belirlenmesini kolaylaştırıcı özel bir hali olarak bakılabilir. Genellikle her birimin tek tek incelenmesinin masraflı olduğu büyük anakütlelerde kullanılan sistematik örneklemede öne çıkan özellikler, sonuca kısa sürede ulaşılması ve sonucun elde edilebilmesi için fazla bir masraf yapılmasına gerek duyulmamasıdır. Bu yöntemde göre, örneğin düzenlenebilmesi için, anakütle tesadüfi olarak düzenlenmiş ve tesadüfi olarak ele alınan ana kütlenin elemanları önem derecelerine göre sıralanmış olmalıdır. Bir örneğin düzenlenebilmesi içinde, istenilen özelliklere sahip olan anakütleye ilişkin bir listenin mevcut olması gerekliliği unutulmamalıdır.

Anakütleye birimler belirli özellikleri bakımından periyodik değişimler gösteriyor ve örnekleme aralığı hep benzer birimlerin seçilmesine yol açıyor ise sistematik örneklemenin sonuçlarının güvenilirliği azalır. Varlığı önceden tahmin edilemeyen periyodik

dalgalanmaların güvenirliliği düşürmesi tehlikesi ve varyans tahmini için tamamen sağlıklı bir yöntemin geliştirilememiş olması yüzünden sistematik örneklemenin kullanımının, özellikle anakütlenin tam tesadüfi dağılması haliyle sınırlandırılması tavsiye edilir.

2.2 Tekrarlı Örneklemenin Önemi ve Diğer Örnekleme Yöntemlerine Göre Avantajı

Araştırmayı içeren birimlerin her birine örneğe girme açısından eşit şans tanındığında basit tesadüfi örnekleme yöntemine başvurulur. Ancak bu şans, anakütlede dahil her birimin kimliğinin belirlenmesi halinde sağlanabilir. Oysa kimlik belirlenmesi uygulamada zor karşılaşılan bir durumdur. Bu nedenle örnekleme yöntemi eşit şans yerine önceden belli şans prensibine döndüğünde sistematik örnekleme veya kümelere göre örnekleme yöntemlerinden yararlanmak gerekir. Sistematik örneklemenin tercih edileceği koşulları genellemek oldukça zordur. Etkin bir şekilde kullanabilmek için anakütlenin yapısı hakkında ayrıntılı bilgiye sahip olunmalıdır.

Tekrarlı örnekleme yöntemleri, genel parametrik istatistiksel yöntemlerin uygulanmadığı durumlarda, test edilen hipotezdeki istatistiğin anlamlılığını ortaya koymak veya bir güven aralığının alt ve üst sınırlarını saptamak için kullanılır.

Ana kütleyle ilişkin yapılan her türlü çıkarıma, örnek istatistiklerine yani örneklem bilgisinin fonksiyonlarına dayanır. Uygun istatistiğin seçimi ise ilgilenilen ana kütle parametresine bağlı olacaktır. Gerçek ana kütle parametresi bilinmeyecek ve örneklemenin amacı bu parametreyi tahmin etmek olacaktır.

Klasik istatistiksel yöntemlere dayanarak analiz yapan araştırmacılar, standart hataları ve güven aralıklarını belirlemek için daima merkezi limit teoremine ve normal yaklaşımlara başvurmuşlardır. Bu yöntemler, örnek değerleri dağılması asimptotik olarak normal dağıldığı zaman geçerlidir. Buna göre normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda bu yöntemler kullanılamaz.⁵

Tekrarlı örnekleme yöntemleri, gözlenen verilerin tekrarlı bir şekilde kullanıldığı ve bilgisayara dayalı analizler veren yöntemler olarak bilinirler. Tercih edilmesinin nedenleri,

Deneysellik; klasik yöntemler matematiksel gerçekliliği varsayan teorik dağılımlara dayanır. Bir örnekten hareketle anakütleyle ilişkin yorumlar yapılabilir fakat anakütle hakkında yeterli ve güvenilir bilgi elde edilemediği zaman sorunlar ortaya çıkabilir. Bu durumda deneysel dağılıma sahip örnekleme başvurmak uygun olur.

⁵ Efron B., and Tibshirani, R.J., An Introduction to the Bootstrap, Chapman and Hall, New York, 1993, s.208

Dağılım; geniş örnek büyüklükleri dağılıma ilişkin pek çok varsayım gerektirir. Örneğin yeterli büyüklükte olmaması ve parametrik varsayımların gerçekleşmediği durumlarda, tekrarlı örnekleme kullanılır. Tekrarlı örnekleme az varsayım gerektirir.

Rassal olmayan örnek; klasik örnekleme de anakütle hakkında yorum yapabilmek için kullanılan örneğin rassal seçimle belirlenmiş olması gerekir. Tekrarlı örneklemede her tür veri grubu için uygulanabilir.

Örnek büyüklüğü, küçük örneklerle çalışmak bu yaklaşım için en uygundur. Büyük örnek için, red edilmemesi gereken bir hipotezi red edebilir. Oysa büyük bir örneğin alt gruplara bölerek yapılan test sonucu hipotez kabul edilebilir.

Tekrarlar; klasik yöntemler sonuçların tekrar sayıları hakkında herhangi bir ön bilgi sağlamazlar. Bu yaklaşımda tekrarlı deneyimler içsel deneyimlerdir.

Bazı şüphe getiren yönleri ise;

Varsayım; daha az varsayım gerektirir.

Genelleştirme; tekrarlı örneklemenin tek bir örneğe dayandırılması, tek bir örnekten hareketle elde edilen sonuçların genelleme için yeterli olmadığı öne sürülür.

Yanlılık ve kötü veri, yanlılık örnek büyüklüğüne bağlı olarak azalsa bile Bootstrap yöntemi ile bulunan güven aralıkları daima yanlıdır. Örneğin normal dağılan bir ana kütlede çekilmesi durumunda, güven aralığının genişliğindeki yanlılık, n örnek büyüklüğü olmak üzere en az $n/n-1$ olmalıdır. Toplanan veriler yanlı ise, tekrarlı örnekleme bu yanlılığın tekrarlanmasına neden olacaktır. Fakat bu durum her iki yaklaşım içinde geçerlidir. Ancak tekrarlı örneklemede yapılan tekrarlar kısmen de olsa problemi çözmeye yardımcı olur.

Doğruluk; tekrarlı örnekleme tahminlerinin doğruluğu konusunda bazı şüpheler vardır. Araştırmacılar yeterli tecrübeye sahip değillerse tekrarlı örnekleme, uygun parametrik yöntemlerden daha az doğrulukla tahminler verecektir.

Yukarıdaki ifadelerle ilgili olarak $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ kadar bir gözlem seti ile bir θ test istatistiğine sahip olduğumuz hallerde tekrarlı örnekleme yöntemleri, θ 'nın tutarlılığının testinde ve θ 'nın farklı alt örneklerden hesaplanarak karşılaştırması yapılırken kullanılır.

2.2.1 Permütasyon Tekniği

Kısaca n elemanın farklı diziliş şekillerini ifade eder. Birbirinden farklı n elemandan k adeti $k \leq n$ olmak üzere bir defada alındığında, elemanların sıralarını da dikkate alarak oluşabilecek

farklı diziliş sayıları P_k^n sembolü ile ifade edilir ve n'in k'lı permütasyonu olarak adlandırılır. Burada k elemanın bir defa alınması, elemanların alma işleminin iadesiz olması ile aynı anlamı taşımaktadır. Elemanların sıralarının dikkate alınması ise aynı elemanlar bir araya gelse bile elemanların yerlerinin değişmesi ile farklı dizilişlerin elde edileceği ifade etmektedir.

2.2.2 Çapraz Geçerlilik (Cross-Validation) Yöntemi

Gözlenen değerleri K bölüme ayrılarak $k(i)$, i. Gözlemi içeren bir olasılık olarak ele alınsın. $\bar{Y}_i^{-k(i)}$, $k(i)$. Bölümünün göz ardı edilmesi ile hesaplanan tahmin değeri olsun. Buna göre tahmin hatası cross validation yöntemi ile,

$$CV = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \bar{Y}_i^{-k(i)} \right)^2 \text{ şeklinde tahmin edilir.} \quad (2.3)$$

Çapraz Geçerlilik yöntemi ile en iyi modelin seçilmesinde de bu değer minimum değeri dikkate alınır. Genellikle $k=n$ seçilerek, her biri gözlem ardı edilerek hesaplanan tahmin değeri Y_i^{-i} şeklinde ifade edilirse,

$$CV = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \bar{Y}_i^{-i} \right)^2 \quad (2.4)$$

Olarak elde edilebilir. Bu durumda, kalan n-1 gözlem training alt örnekleme, tek biri gözlemi ise validation alt örnekleme oluşturmaktadır.⁶

2.2.3 Çakı Tekniği (Jackknife)

Jackknife metodu ilk olarak Quenouille tarafından ortaya atıldı. Tukey tarafından tahmin ve aralıklar arası güvenilirliği hesaplamak için kullanılmıştır. Her deneme de bir gözlem değerinin göz ardı edilmesi mantığına dayanan Jackknife yönteminde, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ gözlem setinde her gözlem bir kez dışarıda bırakılarak, her defasında geri kalan gözlemlerde θ parametresi için örneklem istatistikleri hesaplanır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklem (F)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ gözlem değerleri olmak üzere, F dağılımından iadesiz olarak alınan,

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n \quad (2.5)$$

⁶ John Fox, Applied, Regression Analysis Linear Models and Related Methods, Sage Publications: USA, 1997, s.502.

Jackknife örneklemeleri olup,

$$X(i) = (X_1, X_2, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

$$x(i) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilebilir

i. Gözlem çıkarılarak elde edilen $\hat{\theta}(i) = s(X_{(i)}), \hat{\theta}$ 'nin i. Jackknife istatistiğidir. $\hat{\theta}(i)$ istatistiğinin aldığı değerler (2.8) biçiminde gösterilir.

$$\hat{\theta}(i) = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \quad (2.8)$$

Jackknife yöntemi gözlem sayısının az olduğu durumlarda hesaplanması kolay olduğundan standart hata takdiri için kullanılabilmektedir. Jackknife yönteminin Bootstrap yöntemine göre zayıf kalmasının nedenlerinden biri, takdir edilmeye çalışılan istatistik örneğin ortanca gibi değiştirilmesi zor bir istatistik ise jackknife yönteminde takdir edilen değerlerin değişmeden kalmasının söz konusu olmasıdır.

Bootstrap yöntemiyle oldukça benzerlik gösteren Jackknife yöntemini tanımlamak için $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ ile ifade edilen orijinal veri kümesini ele alırsak, bu örnekte yer alan tüm x_i değerlerinin F dağılımından alınmış bağımsız ve aynı şekilde dağılmış örnek değerleri olduğu varsayılırken $\hat{\theta} = s(x)$ 'nin yanlılığını ve standart hatasını tahmin etmektir. Her defasında bir gözlemin işlem dışı bırakıldığı Jackknife yöntemine göre x_i ile gösterilen i. Jackknife örneği şu şekilde ifade edilir.

$$x(i) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2.9)$$

Bu ifade $i=1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere Jackknife örnekleri olarak adlandırılır. Yani, i. Jackknife örneği orijinal veri kümesi olarak adlandırılan kümeden i. Gözlemin kaldırılmasıyla elde edilir. Orijinal veri kümesinin ortalaması $\bar{X}$ ve i. gözlem dışı bırakıldıktan sonra hesaplanan ortalama $\bar{X}_i$ biliniyor ise i. gözlem değerini hesaplamak mümkündür.

Takdir edilen istatistik değerlerin standart hatası aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$se = \left\{ \frac{n-1}{n} \sum (\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_{(.)})^2 \right\}^{1/2} \quad (2.10)$$

$$\bar{\theta}_{(.)} = \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i / n \quad (2.11)$$

2.2.4 Bootstrap (Ayakkabı Bağı) Yöntemi

Bootstrap ve Jackknife gibi tekrarlı örnekleme teknikleri, bir istatistiğin standart hatasının tahminini, güven aralıklarını ve dağılımlarını elde etmeye olanak sağlarlar. Bootstrap yönteminde, gözlenen veriler içinden, her biri gözlenen verilerle aynı büyüklükte olan B tane yeni örnek iadeli olarak çekilir. Yeni veri kümelerinin her biri için bir istatistik hesaplanır ve hesaplanan istatistikler bir bootstrap dağılımı oluştururlar. Burada istatistikle anlatılmak istenen, veri kümesi için hesaplanan ortalama, medyan, mod vb herhangi bir değerdir. Tahminlerin oluşturduğu sonuçlar, istatistik için bir deneysel dağılım olarak kullanılır.

Bootstrap yönteminde varsayım, gözlenen verilerin inceleme altındaki ana kütlenin temsilcisi olduğudur. Gözlenen verilerden elde edilen tekrarlı örnekleme gözlemleri, ana kütleden elde edilen tekrarlı örnekleme sürecinin kopyalanmasıdır.

İstatistiksel problemlerin bir çoğunda, ana kütleden çekilen bir tesadüfi örneğin değerlerinin oluşturduğu dağılım ile ilgilenilir. Çekilen bu değerlerin oluşturduğu dağılımın şekli biliniyor ise, örnek dağılımını oluşturmak için geliştirilmiş teorileri kullanmak mümkündür. İncelenen dağılım hakkında anlamlı herhangi bir bilgiye sahip olunmadığında, Bradley Efron tarafından geliştirilen Bootstrap yöntemi devreye girer. Bootstrap yönteminin temelindeki ana fikir oldukça basittir. Orijinal örnekten iadeli olarak yapılan yeniden örneklemeyle bir Bootstrap örneği oluşturulur. Örneğe gerçek ana kütle gibi davranılır ve elde edilen bu örnek birçok kez tekrarlanarak tahmin ediciye ilişkin deneysel dağılım oluşturulur.

3. BOOTSTRAP YÖNTEMİ VE TEMEL KAVRAMLAR

Bootstrap yöntemi 1979 yılında Efron tarafından bir tekrarlı örnekleme yöntemi olarak ileri sürülmüş ve bootstrap tahmin edicilerini kullanarak bir tahmin edicinin dağılımını tahmin etmek amacıyla geliştirilmiştir. Yöntemin önemi, gözlenen örnek verilerinden hareketle, tahminin standart hatasını minimuma indirerek anakütle parametrelerinin tahmin edildiği istatistiksel yöntemler aşamasında ortaya çıkmıştır.

Model seçim ölçütü olarak tahmin hatasının hesaplanmasında da kullanılan bootstrap yöntemi, regresyon modellerinde parametrelerin tahmin edilmesinde uygulanan hata terimlerinin tekrarlı örneklenmesi ve gözlem değerlerinin yeniden örneklenmesine bağlıdır. Burada hata terimlerinin tekrarlı örneklenmesine dayanan bootstrap konusu işlenecektir.

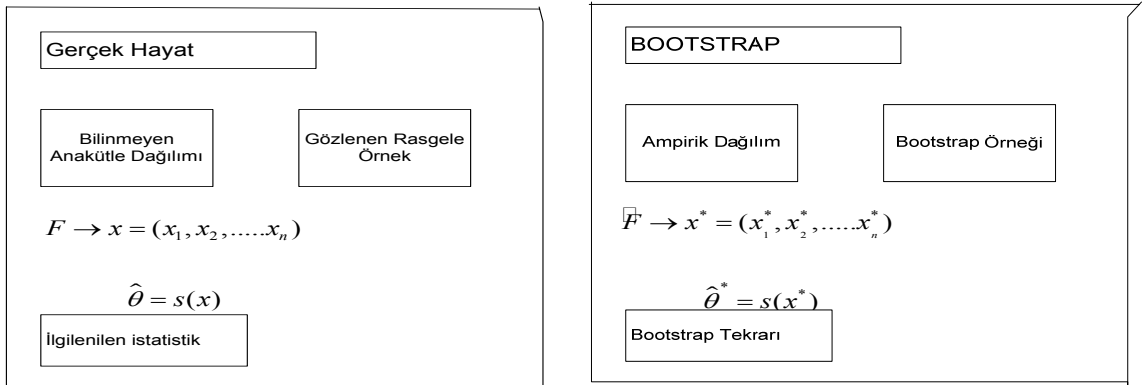
$$F \rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Olarak gösterilecek ve her bir gözlemin $1/n$ olasılığı ile seçilebileceği dağılıma ampirik dağılım denir ve $\hat{F}$ olarak gösterilir.

Bootstrap yöntemi bootstrap örneklerine bağlıdır. F seçilmiş bir deneye dayalı dağılım olduğu varsayılırsa bootstrap örneği gözlemlenmiş veri setinden iadeli olarak rasgele seçilmiş olan bir örnek olacak ve,

$X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ şeklinde gösterilecektir. Sol üst köşede olan yıldız işareti gözlemlenmiş gerçek değerlerin içerisinde iadeli seçim yapılarak oluşturulan örneği temsil etmektedir. Aşağıdaki Çizelge (3.1)'de bootstrap yönteminin mantığı gösterilmiştir.

Çizelge 3.1 Bootstrap yöntemi aşamaları 1



Gerçek hayatta tek bir veri seti ile karakteristik tahmin edilmeye çalışılırken, bootstrap tekniğinde iadeli rasgele seçim uygulanarak elde edilen istenilen sayıdaki veri setinden karakteristik tahmin edilmeye çalışılmaktadır.

Anakütle parametresinin tahmin edicisi olan $\hat{\theta}$ 'nın örnekleme dağılımının oluşturulmasının amacı, söz konusu anakütle parametresinin tahmin edilmesi ya da test edilmesidir. Ancak teorik olarak mümkün olan bu yöntemin uygulanabilirliği konusunda kuşkular bulunmaktadır. Tahmin edicinin örnekleme dağılımını oluşturmak imkansız olmasa da son derece güç ve zaman alıcı bir iştir. Tahmin edicinin deneysel örnekleme dağılımını oluşturmak amacıyla ortaya atılan bootstrap yöntemi bu sakıncayı ortadan kaldırır. Bu mantık doğrultusunda gerekli bootstrap algoritması, aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.⁷

- Anakütleden n hacimlik bir örneğin elde edilmesi
 - $anakütle \Rightarrow örnek$
 - Bu örnek kullanılarak anakütle parametresinin tahmin edicisinin hesaplanması,
 - Elde edilen bu örnek anakütle ile ilgili başka hiçbir bilgi olmadığından bu anakütlenin tek en iyi tahmin edicisi kabul edilir. Bu nedenle bu örnek anakütle gibi kabul edilerek her defasında iadeli seçimle her bir gözlemin örneğe girme olasılığını $1/n$ alarak n hacimlik bir örneğin yeniden elde edilmesi ve bu sürecin B kez tekrarlanması,
- $$\bullet \quad örnek \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \Rightarrow 1.Bootstrap \text{ örneği} \\ \Rightarrow 2.Bootstrap \text{ örneği} \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \Rightarrow B.Bootstrap \text{ örneği} \end{array} \right.$$
- Her bootstrap örneği için ilgilenilen tahmin edicinin hesaplanması
 - B sayıda örnekten hareketle bu tahmin edicilerin örnekleme dağılımının elde edilmesi
 - Elde edilen bu dağılımdan, dağılımla ilgili ortalama, standart sapma ve standart hata gibi önemli tahmin ediciler ile parametre tahmin değerlerinin elde edilmesi
 - Sonuçlar bu tahminler kullanılarak anakütle hakkında yorumların yapılması

⁷ John Fox, Applied, Regression Analysis Linear Models and Related Methods, London, 1997, s.501.

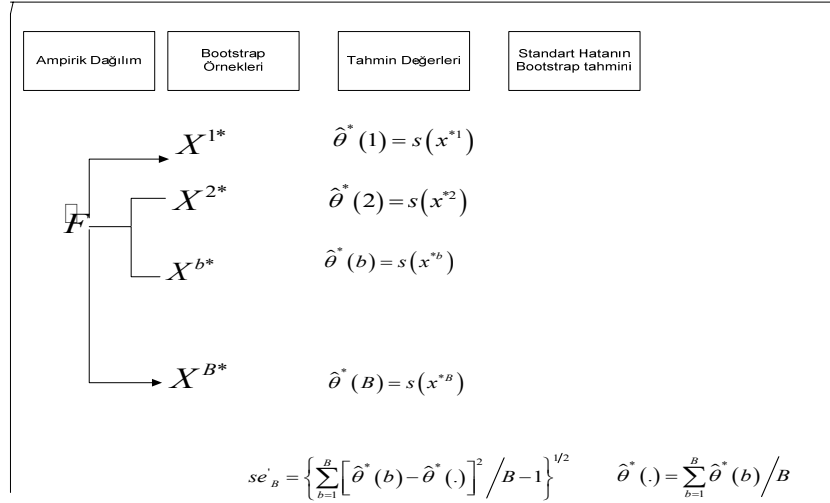
3.1 Tek Değişken İçin Standart Hata Tahmini

Elde dağılımı bilinmeyen rasgele bir örnek olduğu düşünülürse $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dağılımında bilinmeyen bu gözlemler için standart sapmanın hesaplanmasında bootstrap yöntemi kullanılırsa aşağıdaki algoritma takip edilir.

- B tane birbirinden bağımsız bootstrap örneği $x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}$ her bir örneklem n tane gözlem içermektedir.
- Her bir örnek için standart sapma kullanılmaktadır.
- $\hat{\theta}^*(b) = s(x^{*b}) \quad b = 1, 2, \dots, B$ s standart sapmadır.
- Standart hata ise her bir standart sapma kullanılarak hesaplanacaktır.

$$se'_B = \left\{ \sum_{b=1}^B \left[\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(.) \right]^2 / (B-1) \right\}^{1/2} \quad (3.1)$$

Çizelge 3.2 Bootstrap yöntemi aşamaları 1



Standart hatanın hesaplanmasında ilk olarak gözlemlenmiş değerlerden bootstrap örnekleri oluşturulmuştur. Her bir örnek için bir tahmin değeri hesaplanmıştır. Hesaplanan standart sapma değerlerinin ortalaması bulunarak standart sapmaların ortalaması hesaplanmıştır. Bu aşamadan sonra her bir tahmin değerinden hesaplanan ortalama standart sapma değerinin farklarının kareleri alınarak sapmalar bulunmuştur. Toplam sapmaların kareleri bootstrap örnek sayısının bir eksiğine bölünerek karekökü alındığında standart hata değeri elde edilir.

3.2. İki Örnekli Veri Setinde Bootstrap Tekniği

Tek değişken olduğu durumda bootstrap tekniğini kullanmak kolay iken, iki değişkenin olduğu veri setinde bootstrap tekniği kullanılırken daha dikkatli olunmalıdır. $P \rightarrow x$ gösteriminden bilinmeyen bir ihtimal modeli olan P 'nin gözlenen veri seti x anlaşılmalıdır. P 'nin F ve G gibi iki tane ihtimal dağılımından oluştuğu düşünülecek olursa $P(F,G)$ olarak ifade edilecek ve $P \rightarrow x$ ifadesindeki x veri setini (z,y) şeklinde düşünülmesi gerekecektir. Z veri seti F dağılımından y veri seti ise G dağılımından gelecektir. Bootstrap tekniğini bu tür bir veri setinde kullanmak için veri setleri (z,y) ayrı ayrı düşünülüp kendi bootstrap örnekleri oluşturularak daha sonradan birleştirilmesi sonucu x veri seti elde edilecektir.

$P: (F,G)$ olarak ifade edilecek ve

$$x^*: (z^*, y^*)$$

Böylece oluşturulacak her bir veri seti aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

Doğrusal regresyon denklemi elde edilerek $x = x_0$ olmak üzere Y 'nin tahmin değeri,

$\hat{Y}(x_0) = x_0 \hat{\beta}$ şeklinde ifade edilsin. Y değeri $\hat{Y}$ tahmin değeri arasındaki hata,

$$Q[Y, \hat{Y}] = (Y - \hat{Y})^2 \text{ ile hesaplanır.} \quad (3.2)$$

Eğer $(Y_i - \hat{Y})$ ise $Q[Y, \hat{Y}] = 0$, $Y_i = \hat{Y}_i$ ise $Q[Y_i, \hat{Y}_i] = 1$ olmaktadır.

Gerçek hata oranı,

$$\hat{Y}(Y_0) \text{ için } S(X, F) = E_f [Q(Y_0, \hat{Y}(x_0))] \quad (3.3)$$

gerçek hata oranı

$$S(X, F) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q(Y_i, \hat{Y}(x_i))} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}(x_i))^2}{n}} \quad (3.4)$$

şeklinde tahmin edilir.

Tahmin hatasının bootstrap yöntemi ile elde edilmesi hata terimlerinin tekrarlı örneklenmesine dayandığından, $X^* = \{(X_1, Y_1)^*, \dots, (X_n, Y_n)^*\}$ bir bootstrap örnekleme ile hata oranı,

$$S(X^*, F^*) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q[Y_i^*, \hat{Y}^*(x_i^*)]} \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\bar{Y}^*(x_i)$, $x = x_i$ değerine karşılık gelen tahmin değeridir. Bu yaklaşım, sadece tek bir bootstrap örnekleme ile ilgili olduğundan oldukça değişkendir. Bunun yerine ortalama tahmin hatası hesaplanabilir.

$$E_{\bar{F}} \left[S \left(X^*, \bar{F} \right) \right] = E_{\bar{F}} \sqrt{\sum_{i=1}^n Q \left(Y_i, \bar{Y}^*(x_i) \right) / n} \quad (3.6)$$

Bu ifade sonsuz sayıda bootstrap örnekleme ile ilişkin bir ideal bootstrap tahminidir. Sonlu sayıda B bootstrap örnekleme ile bu değer aşağıdaki ile hesaplanır.

$$E_{\bar{F}} \left[S \left(X^*, \bar{F} \right) \right] = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \sum_{i=1}^n Q \left(Y_i, \bar{Y}^*(x_i) \right)^2 / n} \quad (3.7)$$

3.3 Bootstrap Yönteminin Çeşitleri

3.3.1 Çift Bootstrap Yöntemi

Çift bootstrap yöntemi, güven aralıklarının hesabında uygulanan bir iterasyondur. Güven aralıkları hesaplanırken kullanılan yüzdeler yönteminde, bulunan bootstrap güven aralıklarına tekrar bootstrap uygulanarak daha doğru tahminlerin elde edildiği görülmüştür. B, orijinal örnekten yapılan bootstrap örneklerinin sayısını göstermek üzere; bootstrap iterasyonu toplam olarak β^2 kadar bootstrap örneğinin oluşturulmasını gerektirir.

Oluşturulan bu örnekler üzerinden bootstrap yöntemine göre güven aralıkları elde edilir. Güven aralıklarını elde etmede kullanılan bootstrap örneklerine, tekrar bootstrap yöntemi uygulanarak bir adım daha ileri gidildiğinde çift bootstrap yöntemine ulaşılır. Böylece daha doğru güven aralıkları elde edilir. Çift bootstrap yöntemini açıklamak için öncelikle iterasyon işlemi açıklanmalıdır. Bootstrap iterasyonu için öncelikle n tane gözleme sahip $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ orijinal örneğinden n büyüklüğünde ve $x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}$ ile gösterilen bir bootstrap örneği çektiğimizi düşünelim. Örneklenen ana kütlenin θ parametresi için elde edilen $1 - \alpha$ düzeyindeki güven aralığını I_0 ile gösterelim. Örneğin, I_0 Efron'un yüzdeler metoduna göre θ parametresi için elde edilen $1 - \alpha$ düzeyindeki güven aralığı olabilir.

I_0 'ın orijinal örnek x ve güven düzeyi $1 - \alpha$ 'ya bağımlı olduğu $I_0(\alpha/x)$ şeklindeki bir ifade ile gösterilebilir. $I_0(\alpha/x)$ aralığının gerçek ilişkisi $\pi_0(\alpha)$ ile ifade edilebilir.

$$\beta_\alpha; \pi_0(\beta_\alpha) = P \left\{ \theta \in I_0 \left(\beta_\alpha / x^* \right) \right\} = 1 - \alpha \quad (3.8)$$

İfadesinin çözümü ve $I_0(\beta_\alpha / x^*)$, orijinal örnek yerine bootstrap yeniden örneğini kullanarak hesaplanan I_0 'ın bir versiyonu olsun. Peter Hall'un yeniden örnekleme prensibine göre $I_0(\beta_\alpha / x^*)$ kullanılarak I_0 ile verilen ifadeden daha iyi güven aralıkları elde etmek mümkündür. Burada $\hat{\beta}_\alpha$, formüldeki β_α 'nın tahmincisidir ve θ yerine θ^* , x yerine x^* yazmak suretiyle elde edilir. İterasyonu tekrarlamak için I_0 'ın yerine elde edilen yeni aralık kullanılır ve aynı yöntem bu yeni aralığa uygulanır. Bootstrap itirasyonu tek bir adım içerdiğinde çift bootstrap adımı alır.

3.3.2 Bayeşçi Bootstrap Yöntemi

Deneysel dağılımı $\hat{F}$ olan ve F dağılımına sahip x tesadüfi değişkeninin n tane bağımsız ve aynı şekilde dağılmış $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değerlerinin gözlemlendiğini, ayrıca F deneysel dağılımından iadeli olarak bootstrap örneklerinin oluşturulduğunu varsayalım. F dağılımının bir parametresini de φ ile gösterelim. x_i tek boyutlu φ 'da tek bir parametre olarak ele alındığında ikisi birlikte çok boyutlu olacaktır. φ , φ 'nın $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'e dayalı bir tahminidir. Her bir x_i 'nin iadeli olarak $1/n$ olasılığı ile örnekleme tabi tutulması yerine, x_i için sonsal olasılık dağılımı, her bir x_i için $1/n$ 'de yoğunlaşır, fakat bir Bayesian bootstrap tekrarından diğerine değişiklik gösterir. Bayeşçi bootstrap tekrarları tanımlanırken izlenecek yol aşağıdaki gibidir.

- $[0,1]$ aralığından $n-1$ tane uniform tesadüfi değişken çekilir.
- Bu değişkenlerin değerleri artan bir sıra içinde $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ ile gösterilir.
- $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ olsun. Bu durumda $i=1,2,\dots,n$ için $g_i = u_i - u_{i-1}$ şeklinde uniform sıralı istatistikleri arasındaki farkı gösteren bir değişken tanımlanır.

Bayeşçi bootstrap örneğine olasılıkları atamada kullanılan g vektörü aşağıda gösterilmiştir.

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ örneğinden iadeli seçimle n gözlemden oluşan örnek oluşturulur. Bir çekim işleminde $1/n$ olması gereken bu olasılık bu kez x_1 için g_1 , x_2 için g_2 olarak belirlenir. Bu işlem bu şekilde sürdürülür. İkinci bir Bayesçi Bootstrap tekrarı aynı şekilde oluşturulur fakat bu kez hem $n-1$ tane yeni bir uniform tesadüfi değişken kümesi hem de yeni bir g_i kümesi kullanılır. φ 'nin tahmin edilmiş sonsal dağılımına dayalı φ parametresi hakkında genel Bayesian türünde bilgiler elde etmek için kullanılabiliyor olması Bayesçi bootstrap yönteminin avantajıdır. g_i 'nin ilk Bayesçi Bootstrap tekrarıdaki değeri g_i^1 , ikinci tekrardaki değeri g_i^2 ile gösterildiğinde uniform sıradaki istatistikler için aşağıdaki sonuçlara ulaşmak mümkündür.

$$E(g_i^1) = E(g_i^2) = 1/n \quad (3.10)$$

$$Var(g_i^1) = Var(g_i^2) = (n-1)/n^3 \quad (3.11)$$

$$C(g_i^1, g_j^2) = C(g_i^2, g_j^1) = -1/n - 1 \quad (3.12)$$

Burada $E(\cdot)$, $Var(\cdot)$, ve $C(\cdot)$ sırasıyla beklenen değer, varyans ve korelasyonu gösterir.

3.3.3 Düzeltilmiş Bootstrap Yöntemi

F dağılımı hakkında hiçbir varsayım yapılmadığı zaman, $\hat{F}$ 'nin F 'in Maksimum Olabilirlik tahmin edicisi olduğunu vurgulamak gerekir. Yani, F 'nin parametrelerinin bootstrap tahminleri, o parametrelerin parametrik olmayan Maksimum olabilirlik tahminleri olarak düşünülebilir. Birçok uygulama da, F yerine $\hat{F}$ Gaussian Kernel yoğunluk tahminine dayalı düzeltilmiş dağılıma ilişkin değerler konularak işlem yapılır.

Daha düzgün tahminler elde etmek için Gaussian Kernel Yoğunluk tahmininin kullanılması uygun olur. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Orijinal veri kümesini göstermek üzere, Gaussian Kernel Yoğunluk tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{f}(t, h) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{t - x_i}{h}\right) \quad (3.13)$$

Burada $\varphi(t)$ standart normal yoğunluğu göstermekte olup h parametresi, pencere büyüklüğü olarak adlandırılır ve verilere uygulanan düzeltme sayısı olarak tanımlanır. h değerleri arttıkça, daha düzgün bir yoğunluk tahmini elde etmek mümkündür. Yukarıdaki formülasyonu, her bir x_i noktası etrafında odaklanan Gaussian yoğunluk fonksiyonu olarak

düşünülebilir. Belirlenen pencere büyüklüğüne göre ortaya çıkan yoğunluk fonksiyonu grafiklerine bakılarak, verilerin modu belirlenir. Verilere ilişkin yapılacak yorum ise tamamen seçilen h değerine bağlı olacaktır.

Hipotez testi yaparken h değeri belirlemede oldukça sık kullanılan bir yaklaşım söz konusudur. h değeri artarken, Gaussian kernel yoğunluk tahminine göre elde edilen modların sayısı artmaz. h artarken, modların sayısı azalacağı için, h değerine ilişkin bir tek minimum vardır. Bu durumda $\hat{f}(t;h)$ 'ın tek modlu olduğu söylenir ve $\hat{h}_1$ ile gösterilir. Uygulamalarda $\hat{h}_1$ 'nın yaklaşık değerinin 0,0068 olduğu kabul edilmektedir. Yukarıdaki formülde küçük bir düzenleme yapıldığında h 'ın minimum değerine ilişkin gösterim $\hat{f}(.;\hat{h}_1)$ şeklinde olacaktır.

Yukarıdaki formül yeniden ölçeklendirildiğinde, ölçeklendirilmiş tahmin $\hat{g}(.;\hat{h}_1)$ ile gösterilebilir. Bu nokta da bir test istatistiğine ihtiyaç duyulur. Bir moda sahip yoğunluk tahmininden ortaya çıkan en küçük pencere büyüklüğünün $\hat{h}_1$ olduğu hatırlanabilir. $\hat{h}_1$ 'in aldığı büyük değer ise, düzeltmenin bir tek moda sahip tahminini elde etmek için yapılması gerektiğini gösterir. H_0 : Modların sayısı=1 bootstrap hipotez testi, elde edilen anlamlılık düzeyine dayalı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$ASL_{BOOT} = \Pr_{\hat{g}(.;\hat{h}_1)} \left(\hat{h}_1^*, \hat{h}_1 \right) \quad (3.14)$$

Burada $\hat{h}_1$ 'nın değeri 0.0068'de sabitlenmiştir. Bootstrap örneği olan $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, $\hat{g}(.,\hat{h}_1)$ 'dan çekilir ve $\hat{h}_1$, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ bootstrap örneğinin bir tek moda sahip yoğunluk tahmininden ortaya çıkan h 'nın en küçük değeridir. ASL_{BOOT} değerini hesaplayabilmek için yeniden ölçeklenmiş yoğunluk tahmini $\hat{g}(.,\hat{h}_1)$ 'den bootstrap örnekleri çekmek gereklidir. Yani, verilerden iadeli örnekleme yapmak yerine, ana kütlenin düzgün bir tahmininden örnekleme yapılmalıdır. Yapılan bu işleme düzeltilmiş bootstrap denir. Gaussian Kernel tahminine uygunluğundan dolayı $\hat{g}(.,\hat{h}_1)$ 'den örnek çekmek oldukça kolaydır.

3.3.4 Parametrik Bootstrap Yöntemi

F dağılımına sahip bir ana kütleden alınan X tesadüfi değişkeninin birbirinden bağımsız ve aynı şekilde dağılmış değerlerinin oluşturduğu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ örneğine sahip olduğumuzu varsayalım.

X 'in değerleri gerçek sayılar ve ya sayıların oluşturduğu vektörler olabilir. Ana kütleyi tanımlamanın en genel yolu, onun kümülatif dağılım fonksiyonunu yazmaktır.

$$F(x) = \text{Pr ob}(X \leq x) \quad (3.15)$$

Bu fonksiyonun x 'e göre türevi olasılık yoğunluk fonksiyonunu $F'((x))$ verir ve $f(x)$ aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.16)$$

Gözlemlerimiz için tanımladığımız olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$X : f_{\theta}(x)$$

Bu ifade de θ , daha öncede ifade edildiği gibi X dağılımından elde edilen bir veya birden fazla bilinmeyen parametreyi gösterir. Bu ifade ayrıca, X için parametrik model olarak adlandırılır. θ 'nın elemanlarının sayısını ρ ile gösterirsek; örneğin x , μ ortalama ve σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip ise bu durumda, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ olacak ve $\rho = 2$ elde edilecektir.

Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ şeklindedir.} \quad (3.17)$$

Maksimum olabilirlik, olabilirlik fonksiyonuna dayandırılır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$L(\theta; x) = \prod f_{\theta}(x_i) \quad (3.18)$$

$L(\theta; x)$, θ 'nın bir fonksiyonu olarak düşünölebilir. Veri kesikli olduğundan $L(\theta; x)$, gözlemlenen örneğin olasılığıdır. Süreklilik durumunda $L(\theta; x)\Delta, [x..x + \Delta]$ gibi küçük bir aralıkta yer alan örneğin olasılığı şeklinde açıklanabilir. $l(\theta; x)$ 'in algoritması,

$$l(\theta; x) = \sum_{i=1}^n l(\theta, x_i) \quad (3.19)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu $l(\theta)$ şeklinde özetlenebilir. Bu ifade logaritmik olabilirlik olarak anılır ve her bir değer $l(\theta, x_i) = \log f_{\theta}(x_i)$ bir logaritmik olabilirlik bileşeni olarak adlandırılır. Ayrıca maksimum olabilirlik yönteminde $l(\theta; x)$ 'i maksimize etmek için $\theta = \hat{\theta}$ olduğu düşünölür. $\hat{\theta}$ 'nın örnekleme dağılımını ve varyansını tahmin etmenin en doğru

şekli olarak tanımlanan parametrik yönteme göre, öncelikle $f_{\theta}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre n büyüklüğünde B tane örnek çekilir ve her bir örnek varyansı, $\hat{\theta}$ 'nın varyansını tahmin etmeye yarar. Bu süreç ise parametrik bootstrap olarak adlandırılır. Standart hatanın parametrik bootstrap tahmini şöyledir;

$$se_{\hat{F}_{par}}(\hat{\theta}^*) \quad (3.20)$$

Burada $\hat{F}_{par}$ veriler için elde edilen parametrik modelden türetilen F 'nin tahminidir.

F dağılımının sürekli olduğu varsayıldığında, düzeltilmiş bootstrap dönüşümü yapılmaktadır. Bu aşamada bir adım daha ilerletildiğinde, örneğin F dağılımının Gaussian dağılım gibi parametrik bir formda olduğu varsayıldığında, bu durumda F 'in yaklaşık tahmincisi de μ ve σ 'nın maksimum olabilirlik tahminlerine sahip Gaussian dağılım gösterecektir.

3.3.5 Parametrik Olmayan Bootstrap Yöntemi

Parametrik ve parametrik olmayan bootstrap arasındaki en önemli fark, parametrik bootstrap için bir parametrik modelin var olması, parametrik olmayan bootstrap için doğal olarak böyle olmamasıdır. Bilinmeyen bir F dağılımından alınan bağımsız ve aynı şekilde dağılmış $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değerlerine sahip olduğumuzu ve herhangi bir parametrik modelin var olmadığını düşünelim. Bilinmeyen F dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonunu elde etmek için $\hat{F}$ deneysel dağılımı kullanılır. Ancak daha önceki açıklamalara dayanarak, F 'yi sadece parametrik bir model var olduğunda kullanmanın mümkün olduğu söylenebilir. Aksi durumda, verilerin simülasyonu ve gerekli özelliklerin deneysel hesaplamaları yapılmalıdır. Parametrik olmayan bootstrap yöntemi ile ilgili bir örnek açıklamaları anlaşılır kılacaktır. Ortalama hesaplarken deneysel dağılım fonksiyonundan yapılan örnekleme yardımıyla momentler kolayca bulunabilir. Örneğin,

$$E^*(\bar{X}) = E^*(X^*) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_j = \bar{X} \quad (3.21)$$

$$\text{var}^*(\bar{X}) = \frac{1}{n} \text{var}^*(X^*) = \frac{1}{n} E^*\{X^* - E^*(X^*)\}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n(n-1)} \sum (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.22)$$

Yazılır. Bu ifade de ilk çarpan hariç X 'nin tahmin edilmiş varyans sonucudur. Bu nokta da, deneysel dağılım fonksiyonuna sahip simülasyon uygulaması yapılır. Deneysel dağılım fonksiyonu orijinal veri grubu olan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kümesindeki değerlerin her birine eşit

olasılık verdiğinden; her bir X^* , orijinal örnekten tesadüfi olarak örneklenmiş bağımsız değerler olacaktır. Bu nedenle, simülasyon örneği olan $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ orijinal verilerden iadeli olarak alınan tesadüfi bir örnek olacaktır. Burada kolaylık sağlayan, verilerin homojen olmasıdır. Bu tekrarlı örnekleme yöntemi, parametrik olmayan bootstrap olarak bilinir.

4. DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

İki değişken arasındaki ilişki çeşitli şekillerde ortaya çıkar, değişkenler arasında doğrusal ilişkinin olduğu yalın doğrusal regresyondur. Regresyonda bir bağımlı değişken ve bir ya da daha fazla sayıda bağımsız değişken vardır.

Y ile X_i değişkenleri arasındaki sebep sonuç ilişkisini matematiksel olarak ortaya koyan yöntem regresyon adı verilir.

$$Y: B_0 + B_1X_{1i} + \dots + B_kX_{ki} + E_i \quad (k; \text{parametre sayısı})$$

Eğer tek bir değişken kullanılarak analiz yapılıyorsa buna tek değişkenli regresyon, birden çok değişken kullanılıyorsa çok değişkenli regresyon analizi olarak isimlendirilir.

Örneğin, bir ziraatçı buğday verimi ve gübre miktarı arasındaki ilişkiyi, bir mühendis, basınç ve sıcaklık, bir ekonomist gelir düzeyi ve tüketim harcamaları, bir eğitimci öğrencilerin devamsızlık gösterdiği gün sayıları ve başarı dereceleri arasındaki ilişkiyi bilmek isteyebilir. Regresyon, iki (ya da daha çok) değişken arasındaki doğrusal ilişkinin fonksiyonel şeklini, biri bağımlı diğeri bağımsız değişken olarak bir doğru denklemi olarak, göstermekle kalmaz, değişkenlerden birinin değeri bilindiğinde diğeri hakkında kestirim yapılmasını sağlar.

Regresyonda, değişkenlerden biri bağımlı diğerleri bağımsız değişken olmalıdır. Buradaki mantık eşitliğin solunda yer alan değişkenin sağında yer alan değişkenlerden etkilenmesidir. Sağda yer alan değişkenlerse diğer değişkenlerden etkilenmemektedir. Burada etkilenmemek matematiksel anlamda bu değişkenleri bir doğrusal denkleme koyduğumuzda etki yapması anlamındadır.

Varsayımları şunlardır,

- Çıkarımsal yöntem olduğu için kullanılan iki değişkenli örneklemin ya istatistiksel rastgele örneklem olduğu ya da anakütleyi çok iyi temsil ettiği bilinmektedir.
- Bağımlı değişken içinde hata bulunmaktadır. Bu hatanın bir rassal değişken olduğu ve ortalama hatanın sıfır olduğudur. Sistematik hata da bulunması mümkündür ama bu hatanın incelemeye alınması regresyon analizi kapsamı dışındadır.
- Bağımsız değişken hatasızdır. Eğer bağımsız değişkende hata bulunduğu varsayılırsa özel bir yöntem şekli olan değişkenler-içinde-hata modeli teknikler kullanılarak model kurulmalıdır.

- Hataların varyansları eşit kabul edilir. Bu durum homoskedastisite varsayımı adı ile anılır. Eğer bu varsayım uygun değilse ağırlıklı en küçük kareler yöntemi uygulanabilir ya da özellikle bağımlı değişkende bazı dönüşümler denenebilir.
- Hata terimlerinin birbirleriyle korelasyonlu olmadığı varsayılır. Eğer hata terimlerinin korelasyonu zamana bağlı ise zaman serisi modelleri denenebilir. Bununla birlikte hata terimlerinin birbirleri ile korelasyonlu olması ciddi bir sorundur.
- Hataların varyans-kovaryans matrisinin köşegeninde yer alan elamanlar sabit hata varyansına eşittir. $(\sigma_i^2 = \sigma^2)$ Matrisin diğer elemanları da 0 olur. Başka bir deyişle $\sigma^2(\mathcal{E}_i) = \sigma^2 I$. Burada I nxn'lik birim matristir.
- Eğer çoklu regresyon analizi yapılıyor ve üç veya daha çok parametre için kestirim isteniyorsa, bağımsız değişkenlerin birbirleri ile bağlantısının olmaması gereklidir. Buna çoklu doğrusallık (multicollinearity) olmaması varsayımı adı verilir. Başka bir deyişle açıklayıcı değişkenlerin açıklanan değişken ile korelasyonu yüksek, ama açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon çok yüksek olmamalıdır.
- Hatalar normal dağılım gösterir. Eğer bu hataların normalliği varsayımı uygun değilse, parametrelerin en küçük kareler tahmincileri aynı şekilde bulunur. Bununla birlikte, parametrelerin aralık tahminleri ya da parametrelere yönelik hipotez testleri normal dağılım ve normal dağılımdan türetilen student-t, Ki-Kare, F dağılımı gibi dağılımlara dayandırıldıklarından, elde edilen aralık tahminlerinin ya da hipotez testi sonuçlarının hükmü kalmaz. Başka yöntemlerle aralık tahminine gitmek gerekir.

5. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON ANALİZİ

Doğrusal olmayan regresyon modellerinin formu genelde doğrusal regresyon modelleri gibidir.

$$Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i \quad (5.1)$$

(5.1) denklemi doğrusal olmayan regresyon modelinin genel formunu gösterir. Burada Y_i gözlemi, doğrusal olmayan $f(X_i, \gamma)$ fonksiyonu ve ε_i hata terimlerinin toplamıdır. Hata terimlerinin doğrusal regresyon modelindeki gibi, beklenen değerlerinin sıfır, sabit varyanslı ve korelasyonsuz olduğu varsayılır. $f(X_i, \gamma)$ fonksiyonu ise, Y bağımlı değişkeninin, X bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olduğunu gösterir.⁸

$f(X_i, \gamma)$ fonksiyonunda, parametreler vektörü (fonksiyonun doğrusal olmadığını vurgulamak için) β yerine γ ile gösterilir.

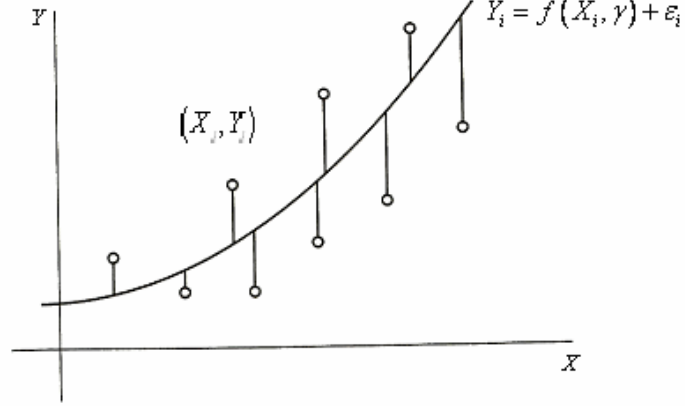
Doğrusal olmayan regresyon modelinin, doğrusal regresyon modelinden en büyük farkı; regresyon parametre sayılarının modeldeki bağımsız X değişkenlerinin sayılarıyla ilişkili olmamasıdır. Doğrusal regresyon modellerinde, $p-1$ tane bağımsız X değişken dolayısıyla “ p ” tane parametre bulunur. Fakat doğrusal olmayan regresyon modellerinde bu durum geçerli değildir.

Doğrusal olmayan regresyon modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i \quad (5.2)$$

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{iq} \end{bmatrix}_{q \times 1} \quad \text{ve} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (5.3)$$

⁸ S.Huet, A.Bouvier, M-APoursat and E.Jouliet, Statistical Tools for Nonlinear Regression, France, 2003, chapter 13-17



Şekil 5.1 Doğrusal olmayan EKK'nın gözlem uzayı

Doğrusal olmayan modellerden bazıları dönüşüm yapılarak doğrusal hale getirilebilirler. Böyle modellere “gerçekte doğrusal” (intrinsically linear) modeller denir. Örneğin; üstel bağımlı fonksiyon $f(X, \gamma) = \gamma_0 [\exp(\gamma_1 X)]$, logaritmik dönüşüm yapılarak aşağıdaki şekilde doğrusal regresyon modeli şekline getirilebilir:

$$\log_e f(X, \gamma) = \log_e \gamma_0 + \gamma_1 X \quad (5.4)$$

$$g(X, \gamma) = \log_e f(X, \gamma) \quad (5.5)$$

$$\beta_0 = \log_e \gamma_0 \quad (5.6)$$

$$\beta_1 = \gamma_1 \quad (5.7)$$

Yukarıdaki kısaltmalar yapıldığında doğrusal olmayan regresyon modeli (5.8)'deki gibi doğrusal regresyon modeli haline getirilir:

$$g(X, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 X \quad (5.8)$$

Bununla birlikte doğrusal olmayan fonksiyonun doğrusal hale getirilebilmesi, doğrusal regresyon modelinin veriye uygun olduğu anlamına gelmez. Çünkü fonksiyonu doğrusal hale getirmek için yapılan dönüşüm, modeldeki hata terimlerini etkileyebilir. Örneğin; aşağıdaki üssel regresyon modelinin normal ve sabit hata terimlerine sahip olduğu düşünüldüğünde:

$$Y_i = \gamma_0 \exp(\gamma_1 X_i) + \epsilon_i \quad (5.9)$$

Y fonksiyonu doğrusallaştırmak için Y 'de yapılacak logaritmik bir dönüşüm ϵ_i hata terimlerini etkileyecek ve hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı geçerliliğini

yitirecektir. Dolayısıyla doğrusal olmayan regresyon modellerinin doğrusallaştırılması her zaman uygun değildir, hatalı ve yanıltıcı sonuçlar verebilir.

5.1 Regresyon Parametrelerinin Tahmini

Doğrusal regresyon modellerinde olduğu gibi, doğrusal olmayan regresyon modellerinde de parametre tahmini EKK ya da En çok benzerlik (EÇB) yöntemi kullanılarak bulunur. Doğrusal regresyonun tersine, doğrusal olmayan regresyon’da EKK ve EÇB tahminlerini bulmak kolay değildir, bu modellerin analizi genellikle nümerik yöntemlerle çözülür.

5.1.1 Doğrusal Olmayan Regresyonda EKK Tahmini

Doğrusal regresyonda EKK metodu aşağıdaki “Q” ölçüsünün minimizasyonuna dayanır:

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 - \beta_1 X_i)]^2 \quad (5.10)$$

Burada β_0 ve β_1 ’in Q ’yu minimize eden değerleri b_0 ve b_1 ile ifade edilir ve bu değerler EKK tahminçileri olarak adlandırılır.

Doğrusal olmayan regresyon modeli için Q ölçüsü şu şekildedir:

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f(X_i, \gamma)]^2 \quad (5.11)$$

Burada EKK ölçüsü Q ’yu minimize eden, doğrusal olmayan regresyon parametreleri $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ ’in tahmini değerleri EKK (ya da EÇB) yöntemi ile bulunur. Bu yöntemin Doğrusal regresyondan farkı çözümün iteratif yöntemleri” gerektirmesidir.

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ değerlerine göre Q kriterinin γ_k ’ya göre kısmi türevleri alındığında:

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^n -2[Y_i - f(X_i, \gamma)] \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right] \quad (5.12)$$

(5.12) elde edilir. Bu kısmi türevler sıfıra eşitlenip, γ_k regresyon parametreleri yerine en küçük kareler tahminçileri olan g_k ’lar yerleştirildiğinde, p tane normal denklem bulunur:

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma_k} = -2 \sum_{i=1}^n Y_i \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} + 2 \sum_{i=1}^n f(X_i, \gamma) \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} = 0 \quad (5.13)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} - \sum_{i=1}^n f(X_i, \gamma) \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} = 0 \quad k=0,1,\dots,p-1 \quad (5.14)$$

(5.5)'de g ifadesi, en küçük kareler tahmincileri olan g_k 'ların vektörüdür:

$$g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{p-1} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Birçok doğrusal olmayan regresyon modelinde, EKK tahminlerini “Gauss – Newton Yöntemi” ile bulmak hesaplama kolaylığı nedeniyle tercih edilmektedir. Bununla birlikte doğrusal olmayan regresyon modellerinde parametre tahminlerinin bulunmasının genellikle karmaşık hesaplara ve (bu hesapları kolaylaştırmak üzere yapılan bir takım) varsayımlara dayandığını da vurgulamak gerekmektedir. Buna ek olarak bu tür yöntemlerle bulunan bir minimum noktasının parametre başlangıç değerlerine bağlı olarak bulunduğunu, yakınsama ölçülerinin sağlanmasının ise çoğu zaman (global bir minimumdan ziyade) yerel bir minimum noktasında bulunulduğunu garanti altına aldığını belirtmek gerekir.

5.1.1.1 Gauss - Newton Yöntemi

Bu yöntem “doğrusallaştırma yöntemi” olarak da bilinir. Yöntem, Taylor serisini kullanarak doğrusal olmayan regresyon modelini doğrusal terimlere yaklaştırır ve EKK yöntemini kullanarak parametre tahmini yapar. İterasyonlar yardımı ile elde edilen ardışık parametre tahminlerinin belirli değerlere yakınsayacağı umuduyla işlemlere devam edilir.

Gauss – Newton Yöntemi, regresyon parametreleri $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ için “ilk ya da başlangıç değerleri (initial or starting values)” kullanarak çözüme başlar. Bu değerler $g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_{p-1}^{(0)}$ ile gösterilir, parantez içindeki sayılar ise iterasyon sayısını gösterir. $g_k^{(0)}$ başlangıç değeri, daha önce yapılmış ya da ilgili çalışmalardan, teorik beklentilerden ya da Q kriterini minimum yapan parametrelerden seçilebilir.

Parametreler için başlangıç değerleri elde edildikten sonra, $g_k^{(0)}$ başlangıç değeri çevresinde Taylor serisinin doğrusal terimlerinin açılımı $f(X_i, \gamma)$ 'nin n.durumu için yazılır. i.durum için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f(X_i, \gamma) \approx f(X_i, g^{(0)}) + \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g^{(0)}} (\gamma_k - g_k^{(0)}) \quad (5.16)$$

Burada $g^{(0)}$ parametre başlangıç değerleri vektörüdür:

$$g_{p \times 1}^{(0)} = \begin{bmatrix} g_0^{(0)} \\ g_1^{(0)} \\ \vdots \\ g_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

(5.16)'daki parantez içindeki ifadeler regresyon fonksiyonunun kısmi türevleridir sadece ($k = 0, 1, \dots, p-1$) için $\gamma_k = g_k^{(0)}$ şeklinde değerlendirilir.

$$f_i^{(0)} = f(X_i, g^{(0)}) \quad (5.18)$$

$$\beta_k^{(0)} = \gamma_k - g_k^{(0)} \quad (5.19)$$

$$D_{ik}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g^{(0)}} \quad (5.20)$$

$$f(X_i, \gamma) \approx f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} \quad (5.21)$$

Bu ifade (5.1)'deki regresyon modeline yaklaştırıldığında $Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i$ ifadesi yerine aşağıdaki ifade yazılır:

$$Y_i \approx f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} \quad (5.22)$$

Sağ taraftaki $f_i^{(0)}$ terimi sol tarafa geçirildiğinde $Y_i - f_i^{(0)}$ ifadesi elde edilir. Bu ifade $Y_i^{(0)}$ ile gösterildiğinde aşağıdaki doğrusal regresyon modeli yaklaşımı elde edilir:

$$Y_i^{(0)} \approx \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n \quad (5.23)$$

$$Y_i^{(0)} = Y_i - f_i^{(0)} \quad (5.24)$$

$Y_i^{(0)}$ değeri “kalıntılar” olarak adlandırılır. $D_{ik}^{(0)}$ Değerleri, doğrusal regresyondaki X değerlerine karşılık gelmektedir. Parametreler yerine başlangıç tahminleri yerleştirildiğindeki kısmi türevlerdir. $\beta_k^{(0)}$ değeri, gerçek regresyon parametresi ile parametre başlangıç tahmini

arasındaki farkı verir. (5.23) modeline uyum sağlamaktaki amaç; $\beta_k^{(0)}$ regresyon katsayılarını tahmin etmek ve bunları kullanarak regresyon katsayılarının “düzeltilmiş başlangıç tahminlerini” tahmin etmektir. Uygun doğrusal regresyon tahmininde “sabit terimin” bulunmadığına dikkat etmek gerekir.

(5.23)’deki doğrusal regresyon modeli matris formuyla yazılabilir:

$$Y^{(0)} \approx D^{(0)} \beta^{(0)} + \varepsilon \quad (5.25)$$

(5.25) modeli doğrusal regresyon modelindedir ve (5.25)’deki ifadelerin açılımları aşağıda verilmiştir.

$$\underset{n \times 1}{Y} = \underset{n \times p}{X} \underset{p \times 1}{\beta} + \underset{n \times 1}{\varepsilon} \quad (5.26)$$

$$\underset{n \times 1}{Y^{(0)}} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ \vdots \\ Y_n - f_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\underset{n \times p}{D^{(0)}} = \begin{bmatrix} D_{10}^{(0)} & \cdots & D_{1,p-1}^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n0}^{(0)} & \cdots & D_{n,p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\underset{p \times 1}{\beta^{(0)}} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(0)} \\ \vdots \\ \beta_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\underset{n \times 1}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

(5.28)’deki D matrisi X matrisinin rolünü oynar fakat 1’lerden oluşan sabit terim sütunu yoktur. Buradan hareketle EKK tahminlerini kullanarak $\beta^{(0)}$ parametre tahmini bulunur.

$$b^{(0)} = \left(D^{(0)'} D^{(0)} \right)^{-1} D^{(0)'} Y^{(0)} \quad (5.31)$$

$b^{(0)}$; EKK ile tahmin edilen regresyon katsayıları vektörüdür. Herhangi bir çoklu regresyon modülü içeren bir bilgisayar programı kullanarak $b_k^{(0)}$ regresyon katsayıları tahminleri elde

edilebilir. Daha sonra EKK tahminleri kullanılarak “düzeltilmiş regresyon katsayıları tahminleri” elde edilir. Bunlar $g_k^{(1)}$ ile gösterilir.

$$g_k^{(1)} = g_k^{(0)} + b_k^{(0)} \quad (5.32)$$

$g_k^{(1)}$; 1. iterasyon sonunda γ_k ’nın düzeltilmiş tahminidir. Bu ifade matris formunda yazılabilir.

$$g^{(1)} = g^{(0)} + b^{(0)} \quad (5.33)$$

Bu noktada, düzeltilmiş regresyon katsayılarının doğru yönde uyum sağlayıp sağlamadığı araştırılabilir.

$$SSE^{(0)} = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - f(X_i, g^{(0)}) \right]^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - f_i^{(0)})^2 \quad (5.34)$$

1.iterasyonun sonunda, düzeltilmiş regresyon katsayıları tahmini $g^{(1)}$ olur. Bu seviyede hesaplanan EKK kriteri ölçümü $SSE^{(1)}$ ile gösterilir:

$$SSE^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - f(X_i, g^{(1)}) \right]^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - f_i^{(1)})^2 \quad (5.35)$$

Eğer Gauss – Newton yöntemi ilk iterasyon sonucu doğru bir şekilde çalışıyorsa (uygun sonuçlar veriyorsa) $SSE^{(1)}$, $SSE^{(0)}$ ’dan küçük olmalıdır. Böylelikle düzeltilmiş regresyon katsayıları tahmincisi olan $g^{(1)}$ iyi bir tahminci olur. Eğer $g^{(1)}$ iyi bir tahminci değil ise, $g^{(1)}$ kullanılarak $g^{(2)}$ bulunur ve aynı karşılaştırma $SSE^{(2)}$ ile $SSE^{(1)}$ için yapılır.

Bu iterasyon olayı $g^{(s+1)} - g^{(s)}$ ya da $SSE^{(s+1)} - SSE^{(s)}$ arasındaki fark ihmal edilebilir derecede azalana kadar devam eder. İterasyon sonucunda son olarak elde edilen regresyon katsayıları tahminleri “g” ile gösterilir ve en son EKK ölçüsü de “SSE” (Sum of Squares due to Error) ile gösterilir ki bu hata kareleri toplamıdır.

5.2 Doğrusal Olmayan Regresyonda Parametrelerin Sonuçları

Doğrusal olmayan regresyonda, regresyon parametrelerinin sonuçları “büyük örnek teorisine” dayanır. Bu teori, örnek boyutu büyük olduğunda, normal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modelinde, EKK ya da EÇB kullanılarak elde edilen tahmincilerin, yaklaşık olarak normal dağıldığını, neredeyse yansız olduklarını ve hemen hemen en az varyansa sahip olduklarını belirtir.

5.2.1 Hata Terimlerinin Varyans Tahmini

Doğrusal olmayan regresyon parametrelerinin sonuçları hata terimleri varyansı σ^2 'nin tahminini gerektirir. Bu tahmin doğrusal regresyondaki gibidir.

$$MSE = \frac{SSE}{n-p} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p} = \frac{\sum [Y_i - f(X_i, g)]^2}{n-p} \quad (5.36)$$

Burada “g” ifadesi, en son parametre tahmin vektörüdür. Dolayısıyla kalıntılar, en son parametre tahmin vektörü g kullanılarak tahmin edilen doğrusal olmayan regresyon fonksiyonunun etrafındaki sapmalardır. Doğrusal olmayan regresyon için MSE, σ^2 'nin yansız bir tahmin edicisi değildir, fakat örnek boyutu büyük olduğunda eğilim azalır.

5.2.2 Büyük Örnek Teorisi

Doğrusal olmayan regresyon modelleri için, hata terimleri bağımsız olduğunda, normal dağıldıklarında ve örnek boyutu yeterince büyük olduğunda aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem:

Örnek boyutu “n” yeterince büyük olduğunda ve hata terimleri ε_i 'ler bağımsız olup $N(0, \sigma^2)$ ile dağıldıklarında, g'nin örnekleme dağılımı yaklaşık olarak normaldir.

Ortalama vektörün beklenen değeri yaklaşık olarak (5.37)'deki gibidir.

$$E\{g\} \approx \gamma \quad (5.37)$$

Regresyon katsayılarının, varyans – kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde tahmin edilir:

$$s^2\{g\} = MSE(D'D)^{-1} \quad (5.38)$$

Burada D, elde edilen son “g” en küçük kareler tahmincisinin kullanıldığı kısmi türevler matrisidir. Örnek boyutu büyük olduğunda, bağımsız, sabit varyanslı ve normal dağıldıklarında, doğrusal olmayan regresyon için en küçük kareler tahmincisi “g” yaklaşık olarak normal dağılır ve yansızdır. Yukarıdaki teoreme göre, örnek boyutu yeterince büyük olduğunda aynı doğrusal regresyondaki gibi, doğrusal olmayan regresyonda da tahminler yapılarak elde edilen sonuçlar aynı şekilde yorumlanır. Bazı doğrusal olmayan regresyon modellerinde örnek boyutu küçük olduğundan büyük örnek yaklaşımını doğru sonuçlar vermeyebilir.

5.2.2.1 Büyük Örnek Özellikleri

Örnek birim sayısı arttığında tahmincilerde aranan özelliklere asimptotik özellikler denir. Bu özellikler büyük örneklem özellikleri olarak da adlandırılmaktadır. Örnek birim sayısının artması, bazı istatistiklerin örnekleme dağılımlarını normal dağılıma yaklaştıracaktır. Sözelimi bir anakütleden n birimlik bağımsız örnekler çekilse, ve örnek ortalamaları hesaplanırsa büyük n değeri ($n \geq 30$ için) için bu ortalamaların olasılık dağılımları normal dağılıma yakınsayacaktır. Bu durum Merkezi Limit Teoremi olarak da bilinir. (Burada bir istisna olarak Cauchy dağılımından söz edilebilir. Cauchy dağılımı Merkezi Limit Teoremi açısından bir istisna teşkil eder)

Öte yandan bir tahmincinin dağılımı, örnek birim sayısının artması ile belirli bir dağılıma yaklaşıyorsa, bu dağılım tahmincin asimptotik dağılımı olarak adlandırılır.

5.2.2.1.1 Asimptotik Sapmasızlık

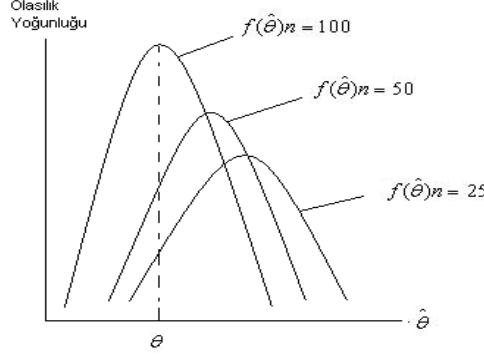
Bir tahmincinin sapmasız olabilmesi için $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$ şartını sağlaması gerekir. Burada $\hat{\theta}_n$, tahmin edicinin n gözlemlili bir örnekleme dayandığı anlamına gelir. Örneklem büyüklüğü gittikçe artarken, $\hat{\theta}$ 'nin beklenen ya da ortalama değeri gerçek değere doğru yakınsarsa, $\hat{\theta}$, θ 'nin büyük örneklem için sapmasız bir tahmin edicisidir.

5.2.2.1.2 Tutarlılık

Örnek birim sayısı gittikçe büyürken $\hat{\theta}$ tahmin edicisi gerçek θ değerine yakınsarsa $\hat{\theta}$ 'nin tutarlı bir tahmin edici olduğu söylenir. Diğer bir ifadeyle n 'in sonsuza yaklaşması ile $\hat{\theta}$ 'nin θ 'ya eşit olması olasılığı 1'e yaklaşacaktır. ε 'nin küçük bir sayı olduğu varsayılırsa, n 'in artarak sonsuza yaklaşması ile, $P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1$ olması durumunda $\hat{\theta}$, θ 'nin tutarlı tahmincisidir. Bu durumda n sonsuza giderken limit alındığında, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$ olacaktır.

Örnek birim sayısının artması ile ortalama hata karelerinin küçülmesi beklenmektedir. n 'in artarak sonsuza gitmesi durumunda ortalama hata karesinin de sıfıra yaklaşması gerekir. n sonsuza yaklaşırken, $OHK(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ ise $\hat{\theta}$, θ 'nin tutarlı bir tahmincisidir. Bu durumda limit alınır, $\lim_{n \rightarrow \infty} OHK(\hat{\theta}) = 0$ olacaktır. Bu sonuç tahmincinin tutarlı olup olmadığını anlamak için kullanılabilir. Şekil 5.2'de örneklem büyüklüğü 25, 50, 100 olduğu durumlarda $\hat{\theta}$ 'nin dağılımı gösterilmiştir. Görüldüğü gibi $n = 25$ için $\hat{\theta}$, sistematik hatalıdır, çünkü örnekleme

dağılımı gerçek θ değerinde ortalanmamıştır. Fakat n büyüdükçe dağılımın ortalaması θ değerine yaklaşmaktadır. $\hat{\theta}$ dağılımının varyansı sıfır olursa, θ 'nın tutarlı tahmincisi olur.



Şekil 5.2 $\hat{\theta}$ 'nin örneklem dağılımının θ etrafında yoğunlaşması halindeki tutarlılık grafiği

5.2.2.1.3 Asimptotik Etkinlik

Asimptotik etkinlik sadece sonlu ortalama ve sonlu varyansı olan tahminciler için aranabilecek bir özelliktir. Burada üç şart aranacaktır:

- $\hat{\theta}$ 'nin sonlu ortalama ve sonlu varyanslı bir asimptotik dağılımı var ise,
- $\hat{\theta}$ tutarlı ise,
- θ 'nın tutarlı tahmincilerinden asimptotik varyansı en küçük olan tahmincisi $\hat{\theta}$ ise,

$\hat{\theta}$, θ 'nın asimptotik etkin tahmincisidir. Bir tahminci etkin ise asimptotik olarak da etkin olacaktır.

5.2.3 γ_k parametresinin Güven Aralığı

Büyük örneklem teorisine dayanarak, örnek sayısı yeterince büyük olduğunda ve hata terimleri normal dağıldığında γ_k parametresi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{g_k - \gamma_k}{s\{g_k\}} \approx t(n-p) \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (5.39)$$

Burada $t(n-p)$; $(n-p)$ serbestlik dereceli t dağılımıdır. Herhangi bir γ_k parametresi için $1-\alpha$ 'lık güven aralığı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$g_k \pm t(1-\alpha/2; n-p) s\{g_k\} \quad (5.40)$$

$t(1-\alpha/2; n-p)$; $(n-p)$ serbestlik dereceli t dağılımının $(1-\alpha/2)100$ 'lük kısmıdır.

5.2.4 Eşzamanlı Birçok γ_k Parametrelerinin Güven Aralığı

Doğrusal olmayan regresyonda, birçok regresyon parametresi için birleşik güven aralıkları, Bonferroni yöntemi ile bulunur. $1-\alpha$ güven aralığında m parametrenin Bonferroni birleşik güven aralığı (5.41)'deki gibidir.

$$g_k \pm Bs\{g_k\} \quad (5.41)$$

Bu aralıkta “B” ifadesinin açılımı aşağıda verilmiştir:

$$B = t(1-\alpha/2m; n-p) \quad (5.42)$$

5.2.5 Tek γ_k Parametresinin Hipotez Testi

Tek γ_k parametrelili büyük örneklem testinin hipotezi aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$H_0 : \gamma_k = \gamma_{k0}$$

$$H_a : \gamma_k \neq \gamma_{k0}$$

Burada γ_{k0} , γ_k 'nın belirtilen bir değeridir. n yeterince büyük olduğunda H_0 hipotezi t^* ile test edilir:

$$t^* = \frac{g_k - \gamma_{k0}}{s\{g_k\}} \quad (5.43)$$

Karar kuralı ise şu şekilde oluşur:

Eğer $|t^*| \leq t(1-\alpha/2; n-p)$ ise H_0 kabul edilir.

Eğer $|t^*| > t(1-\alpha/2; n-p)$ ise H_a kabul edilir.

5.2.6 Birçok γ_k Parametrelerinin Hipotez Testi

Eğer büyük örnek testine bağlı birçok, eşzamanlı γ_k test edilmek isteniyorsa, genel doğrusal test için uygulanan için uygulanan yöntem burada da geçerli olur. İlk önce uygun (tam model oluşturulur, $SSE(F)$ elde edilir ve uygun indirgenmiş model oluşturulur, $SSE(R)$ bulunur. Daha sonra doğrusal regresyonda olduğu gibi test istatistiği kullanılır:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} \div MSE(F) \quad (5.44)$$

Yeterince büyük n değerleri için H_0 kabul edilir ve test istatistiği $F(df_R - df_F, df_F)$ dağılır.

6. UYGULAMA

NIST enstitüsünün dış üzerindeki monomoleküler emilimle ilgili çalışmasının bir sonucu olan veriler kullanılmıştır. Tahmin edici değişken basınç, yanıt fonksiyonu hacimdir.

Uygulamanın ilk aşaması kalıntıları sabitleyerek örnekleme yapılmıştır.

y yanıt fonksiyonu hacim, x tahmin edici değişken basınç ve denklem aşağıdadır.

$$y = b_1 \cdot (1 - \exp[-b_2 \cdot x]) + e$$

	Start 1	Start 2	Parameter	Standard Deviation
b1 =	500	250	2.3894212918E+02	2.7070075241E+00
b2 =	0.0001	0.0005	5.5015643181E-04	7.2668688436E-06

Çizelge 6.1 : Uygulama örnek verileri

y	x
10,07	77,60
14,73	114,90
17,94	141,10
23,93	190,80
29,61	239,90
35,18	289,00
40,02	332,80
44,82	378,40
50,76	434,80
55,05	477,30
61,01	536,80
66,40	593,10
75,47	689,10
81,78	760,00

- Anakütleden şansa bağlı olarak n sayıda bir örnek seçilir.
- Seçilen bu örneğe ait EKK regresyon doğrusu alınır.
- Bu modelden ϵ_i değerleri hesaplanır. Elde edilen ϵ_i değerlerine $1/n$ olasılığı verilerek her biri n hacminde B tane bootstrap hata alt örnekleri oluşturulur.
- Oluşan bu deneysel dağılım fonksiyonundan bootstrap hata değerlerinin ortalama, standart sapma değerlerine ulaşılır.

Bu örneğe bağlı b_1 ve b_2 değerlerini bulabilmek için MS Office programı olan Excel'in makro bağlantılarından yararlanılmıştır. Aşağıdaki şekilde bir format hazırlanmıştır. Burada bulunan

n örnek büyüklüğünü istediğimiz kadar deneyerek bu değerlere ulaşabiliriz. Çalışmada 25, 50, 75, 100 ve 200 örnek büyüklüğü alınarak ortalama, standart sapma ve varyans hesaplanmıştır. Aşağıdaki çizelgelerde oluşturulmuş 100 örnekten ilk 3 örneğin verileri bulunmaktadır. Makro detayı ekte verilmiştir.

Çizelge 6.2. Excel’de b1 ve b2 için Örnek Ekran Görüntüsü

START1							N = ?		
y orijinal	Y Sim	x	Y tahmin (Denklemler)	Hata Kare (Y-Ytahmin)	Kalıntı	olasılık	Baslat		
10,07		77,60	9,95	0,013	-0,12	0,07			
14,73		114,90	14,59	0,019	-0,14	0,07			
17,94		141,10	17,80	0,020	-0,14	0,07			
23,93		190,80	23,75	0,032	-0,18	0,07			
29,61		239,90	29,48	0,016	-0,13	0,07			
35,18		289,00	35,06	0,014	-0,12	0,07			
40,02		332,80	39,92	0,010	-0,10	0,07			
44,82		378,40	44,86	0,001	0,04	0,07			
50,76		434,80	50,80	0,001	0,04	0,07			
55,05		477,30	55,16	0,012	0,11	0,07			
61,01		536,80	61,10	0,008	0,09	0,07			
66,40		593,10	66,55	0,022	0,15	0,07			
75,47		689,10	75,47	0,000	0,00	0,07			
81,78		760,00	81,77	0,000	-0,01	0,07			
			Toplam	0,168					
START2									
y orijinal	Y Sim	x	Y tahmin (Denklemler)	Hata Kare (Y-Ytahmin)	Kalıntı	olasılık			
10,07	-0,0022	77,60	-0,02	0,000	-0,01	0,07			
14,73	0,0367	114,90	-0,02	0,004	-0,06	0,07			
17,94	-0,1277	141,10	-0,03	0,010	0,10	0,07			
23,93	-0,1368	190,80	-0,04	0,009	0,10	0,07			
29,61	0,0881	239,90	-0,05	0,019	-0,14	0,07			
35,18	-0,1277	289,00	-0,06	0,004	0,07	0,07			
40,02	-0,1777	332,80	-0,07	0,012	0,11	0,07			
44,82	-0,012	378,40	-0,08	0,005	-0,07	0,07			
50,76	0,0367	434,80	-0,09	0,016	-0,13	0,07			
55,05	-0,1777	477,30	-0,10	0,006	0,08	0,07			
61,01	-0,1777	536,80	-0,11	0,004	0,06	0,07			
66,40	-0,0022	593,10	-0,12	0,015	-0,12	0,07			
75,47	-0,1777	689,10	-0,14	0,001	0,03	0,07			
81,78	-0,1777	760,00	-0,16	0,000	0,02	0,07			
			Toplam	0,106					

Çizelge 6.2. Farklı örnek büyüklükleri için oluşan istatistiksel değerler.

		b1	b2	Tahmini Varyans Kovaryans Matr	
n=25	Ortalama	505,7453	-3,30E-08		
	Std Sapma	0,015128	1,28E-07	0,0002288	-1,86E-09
	Varyans	0,000229	1,63E-14		
	Cov (b1,b2)	-1,86E-09		-1,86E-09	1,63E-14
		b1	b2	Tahmini Varyans Kovaryans Matr	
n=50	Ortalama	505,7432	-1,60E-08		
	Std Sapma	0,014908	1,26E-07	0,0002222	-1,84E-09
	Varyans	0,000222	1,59E-14		
	Cov (b1,b2)	-1,84E-09		-1,84E-09	1,59E-14
		b1	b2	Tahmini Varyans Kovaryans Matr	
n=75	Ortalama	505,7376	3,16E-08		
	Std Sapma	0,014692	1,24E-07	0,0002158	-1,80E-09
	Varyans	0,000216	1,54E-14		
	Cov (b1,b2)	-1,80E-09		-1,80E-09	1,54E-14
		b1	b2	Tahmini Varyans Kovaryans Matr	
n=100	Ortalama	505,7408	5,03E-09		
	Std Sapma	0,014401	1,22E-07	0,0002074	-1,74E-09
	Varyans	0,000207	1,48E-14		
	Cov (b1,b2)	-1,70E-09		-1,74E-09	1,48E-14
		b1	b2	Tahmini Varyans Kovaryans Matrisi	
n=200	Ortalama	505,7394	1,65E-08		
	Std Sapma	0,013628	1,15E-07	0,0001857	-1,56E-09
	Varyans	0,000186	1,33E-14		
	Cov (b1,b2)	-1,60E-09		-1,56E-09	1,33E-14
		b1	b2	Tahmini Varyans Kovaryans Matrisi	
n=500	Ortalama	505,7403	8,91E-09		
	Std Sapma	1,09E-07	1,09E-07	0,000166	-1,40E-09
	Varyans	0,000166	1,19E-14		
	Cov (b1,b2)	-1,40E-09		-1,40E-09	1,19E-14

Örnek büyüklüğü arttıkça ortaya çıkan ortalama, standart sapma gibi değerler yukarıdaki tabloda verilmiştir.. Böylece deneysel bir dağılım elde edilmiştir. Aynı zamanda standart sapma değerinin azaldığının da altını çizmek gerekiyor.

7. SONUÇLAR

Bootstrap yönteminde varsayım, gözlenen verilerin inceleme altındaki ana kütlenin temsilcisi olduğudur. Orijinal örnekten iadeli olarak yapılan tekrarlı örneklemeyle bir Bootstrap örneği oluşturulur. Örnek gerçek ana kütle gibi kabul edilerek ve elde edilen bu örnekten iadeli yöntemle pek çok örnek çekilerek tahmin ediciye ilişkin deneysel dağılım oluşturulur.

Bootstrap örnekleme, bir tahmin edicinin dağılımını belirleyebilmek amacıyla geliştirilmiştir. Yöntemin önemi özellikle anakütle dağılımına ilişkin bilginin az ya da kısıtlı olduğu durumlarda ortaya çıkmaktadır. Gözlenen örnek verilerinden hareketle, iadeli örnekleme yöntemine göre bir dizi alt-örnekler türetilmekte (bir yerde suni bir değişkenlik yaratılmakta) ve bu değişkenlikten hareketle parametrelerin standart hataları tahmin edilmektedir. Daha sonra bu standart hatalardan yola çıkılarak parametre aralık tahminleri gerçekleştirilmektedir.

Bootstrap yöntemi tahmin hatalarının daha az olması, standart sapmaların daha küçük olması nedeniyle kullanışlı bir yöntemdir. Daha güçlü ve daha güvenilir sonuçlar elde etmek için örnek hacmini arttırmak yerine, bootstrap tekrarları sayesinde daha güvenilir sonuçlara ulaşılabilir. Örneklemenin maliyetli olduğu yerlerde bootstrap yöntemlerini tercih etmek maliyetlerin azalmasını sağlar.

Doğrusal olmayan regresyonda parametrelerin aralık tahminleri asimptotik normalliğe dayalı olarak gerçekleşmektedir. Oysa pratikte bu varsayım çoğunlukla gerçekçi gözükmemektedir. Bu gibi durumlarda bootstrap yöntemi gibi nonparametrik sayabileceğimiz yöntemleri denemek daha gerçekçi olacaktır.

KAYNAKLAR

Chernick, M.R. (2008), Bootstrap Methods A Guide for Practitioners and Researchers Second Edition, A.John Wiley, New Jersey.

Diciccio, J.T. ve Efron, B. (1996), "Bootstrap Confidence Intervals", Statistical Science, 11(3):189-228.

Efron, B. ve Tibshirani, R.J. (1993), An Introduction to the Bootstrap, Chapman and Hall, New York.

Efron, B. ve Gang, G. (1983), "A Leisurely Look at the Bootstrap, The Jackknife and Cross Validation", The American Statistician, 37(1):36-48.

Fox, J. (2002), An R and S Plus Companion to Applied Regression, Sage Publications, CA.

Fox, J. (1997), Applied Regression Analysis Linear Models and Related Methods, Sage Publications, London.

Genceli, M. (2001), Ekonometri ve İstatistik İlkeleri, Filiz Kitabevi, İstanbul.

Ginevan E.M. ve Splitstone E.D. (2004), Statistical Tools for Environmental Quality Measurement, Chapman and Hall, Florida.

Good, P. (1997), "Resampling Methods", Springer and Verlag, 1:48-49.

Habshah M. (2000), "Bootstrap Methods in a Class of Nonlinear Regression Model", Pertanika J. Sci. & Techno. 8(2): 175-189.

Huet, S. ve Bouvier, A. ve Poursat, M.A. ve Jouliet, E. (2003), Statistical Tools for Nonlinear Regression, Springer, France.

İdil, O. (1980), Örneklem Teorisi ve İşletme Yönteminde Uygulanması, Fatih Yayınevi, İstanbul.

Sprent, P. ve Smeeton, N.C. (2001), Applied Nonparametric Statistical Methods Third Edition, Chapman and Hall/CRC, Florida.

Wood M. (2004), "Bootstrapped Confidence Intervals as an Approach to Statistical Inference", University Of Portsmouth Business School :1-26.

Seber, G.A.F ve Wild, C.J. (2003), Nonlinear Regression, A.John Wiley, New Zeland.

Ucal M.Ş. (2006), "Ekonometrik Model Seçim Kriterleri Üzerine Kısa Bir İnceleme", C.Ü. İktisadei ve İdari Bilimler Dergisi, 7(2):41-57.

Walsh B. (2000), "Randomization Tests Jackknife and Bootstrap Estimators", Leecture Notes for EBB, :1-14.

Yamane, T. (2001), Temel Örneklem Yönergeleri, Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Yoğurtçugil, M.K. (1976), Örneklem/Yöntemler ve Uygulama, Sermet Matbaası, İstanbul.

İnternet Kaynakları

- [1] http://tr.wikipedia.org/wiki/Ana_Sayfa
- [2] <http://www.jstor.org/action/showAdvancedSearch>
- [3] <http://www.crcnetbase.com/>
- [4] <http://proquest.umi.com/pqdweb?RQT>
- [5] <http://www.ams.org/mathscinet/index.html>

EKLER

Ek 1	Excel Makro Verileri	43
Ek 2	n=25 İçin Ortaya Çıkan Değerler	45
Ek 3	n=50 İçin Ortaya Çıkan Değerler	46
Ek 4	n=75 İçin Ortaya Çıkan Değerler	47
Ek 5	n=100 İçin Ortaya Çıkan Değerler	48
Ek 6	n=200 İçin Ortaya Çıkan Değerler	49
Ek 7	n=500 İçin Ortaya Çıkan Değerler	50

Ek 1 Excel Makro Verileri

```

Sub Makro2()
Dim sim As Integer
Dim kalol As Integer
Dim start As Integer
Dim sol As Integer
Dim satir As Integer
Dim say As Integer
Dim n As Integer
Dim i As Integer
    sim = 41
    kalol = 22
    start = 43
    sol = 56
    satir = 39
    say = 31
    n = Range("O2").Value
        Rows("39:65536").Select
        Selection.Delete Shift:=xlUp
        For i = 1 To n
            Range("A20:K37").Select
            Selection.Copy
            Range("A" & satir).Select
        satir = satir + 19
        ActiveSheet.Paste
        ActiveCell.Value = "START" & i + 2
        Application.CutCopyMode = False
        Range("B" & sim & ":" & "B" & sim + 13).Select
        Selection.ClearContents
        'Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Random", ActiveSheet.Range("B" & sim & ":"
& "B" & sim + 13), 1 _
        ', 14, 7, , ActiveSheet.Range("F" & kalol & ":" & "G" & kalol + 13)

```

```

Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Random", ActiveSheet.Range("B" & sim & ":" &
"B" & sim + 13), 1 _
, 14, 7, , ActiveSheet.Range("f22: g35")
sim = sim + 19
kalol = kalol + 19
Range("K" & start).Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "500"
Range("K" & start + 2).Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "0.0001"
SolverOk SetCell:="E" & sol, MaxMinVal:=2, ValueOf:="0", ByChange:="K" & start &
"," & "K" & start + 2
SolverSolve userFinish:=True
start = start + 19
sol = sol + 19
Next i
Sheets("sum").Rows("2:65536").Delete
For j = 1 To i
Sheets("sum").Range("a" & j + 1).Value = j
Sheets("sum").Range("b" & j + 1).Value = Range("I" & say).Value
Sheets("sum").Range("c" & j + 1).Value = Range("j" & say).Value
say = say + 19
Next j
'Sheets("SUM").Select
End Sub

```

Ek 2 n=25 İçin Ortaya Çıkan Değerler

	b1	b2
1	505,790598	-0,0000004157
2	505,731066	0,0000000871
3	505,75775	-0,0000001387
4	505,723077	0,0000001548
5	505,744492	-0,0000000263
6	505,750861	-0,0000000801
7	505,750622	-0,0000000785
8	505,754771	-0,0000001132
9	505,748383	-0,0000000595
10	505,733073	0,0000000700
11	505,741707	-0,0000000031
12	505,73827	0,0000000264
13	505,735587	0,0000000487
14	505,739821	0,0000000130
15	505,757404	-0,0000001358
16	505,751432	-0,0000000849
17	505,718306	0,0000001949
18	505,752717	-0,0000000959
19	505,730005	0,0000000960
20	505,757935	-0,0000001399
21	505,752468	-0,0000000939
22	505,764164	-0,0000001925
23	505,729228	0,0000001026
24	505,739312	0,0000000172
25	505,739745	0,0000000134

Ek 3 n=50 İçin Ortaya Çıkan Değerler

	b1	b2
1	505,7906	-0,0000004157
2	505,7207	0,0000001746
3	505,7465	-0,0000000437
4	505,7271	0,0000001202
5	505,7488	-0,0000000624
6	505,7473	-0,0000000502
7	505,7437	-0,0000000200
8	505,7401	0,0000000107
9	505,7326	0,0000000742
10	505,724	0,0000001468
11	505,7328	0,0000000725
12	505,7191	0,0000001885
13	505,7463	-0,0000000421
14	505,7613	-0,0000001684
15	505,7488	-0,0000000630
16	505,7501	-0,0000000738
17	505,733	0,0000000707
18	505,7646	-0,0000001967
19	505,7241	0,0000001460
20	505,7274	0,0000001178
21	505,7311	0,0000000870
22	505,7412	0,0000000015
23	505,7557	-0,0000001217
24	505,7543	-0,0000001098
25	505,7327	0,0000000729
26	505,7327	0,0000000735
27	505,7502	-0,0000000752
28	505,7805	-0,0000003310
29	505,7298	0,0000000979
30	505,7296	0,0000000996

	b1	b2
31	505,7362	0,0000000434
32	505,7348	0,0000000555
33	505,7532	-0,0000000999
34	505,7756	-0,0000002893
35	505,7349	0,0000000541
36	505,7211	0,0000001716
37	505,7542	-0,0000001087
38	505,7348	0,0000000559
39	505,743	-0,0000000134
40	505,7391	0,0000000189
41	505,7502	-0,0000000749
42	505,7551	-0,0000001161
43	505,7388	0,0000000212
44	505,7457	-0,0000000368
45	505,7399	0,0000000122
46	505,7599	-0,0000001568
47	505,7406	0,0000000063
48	505,7433	-0,0000000162
49	505,7455	-0,0000000351
50	505,7483	-0,0000000582

Ek 4 n=75 İçin Ortaya Çıkan Değerler

	b1	b2
1	505,7906	-0,0000004157
2	505,7408	0,0000000045
3	505,7246	0,0000001416
4	505,7584	-0,0000001436
5	505,7318	0,0000000812
6	505,736	0,0000000459
7	505,7456	-0,0000000355
8	505,735	0,0000000540
9	505,7469	-0,0000000466
10	505,7458	-0,0000000370
11	505,7363	0,0000000430
12	505,7323	0,0000000769
13	505,7124	0,0000002449
14	505,7378	0,0000000296
15	505,7442	-0,0000000238
16	505,7562	-0,0000001254
17	505,7665	-0,0000002124
18	505,7414	-0,0000000005
19	505,741	0,0000000030
20	505,7134	0,0000002364
21	505,7434	-0,0000000174
22	505,7142	0,0000002295
23	505,7466	-0,0000000443
24	505,7307	0,0000000896
25	505,7272	0,0000001201
26	505,7374	0,0000000337
27	505,7345	0,0000000581
28	505,7606	-0,0000001624
29	505,725	0,0000001381
30	505,7715	-0,0000002544
31	505,7411	0,0000000022
32	505,7189	0,0000001904
33	505,7465	-0,0000000437
34	505,7431	-0,0000000148
35	505,7274	0,0000001182
36	505,724	0,0000001471
37	505,721	0,0000001722
38	505,7275	0,0000001174
39	505,7204	0,0000001769
40	505,7522	-0,0000000920

	b1	b2
41	505,7373	0,0000000339
42	505,7277	0,0000001160
43	505,7354	0,0000000503
44	505,7267	0,0000001240
45	505,7477	-0,0000000535
46	505,7296	0,0000000992
47	505,7551	-0,0000001163
48	505,735	0,0000000539
49	505,7216	0,0000001673
50	505,7269	0,0000001226
51	505,7338	0,0000000633
52	505,7505	-0,0000000774
53	505,722	0,0000001640
54	505,7608	-0,0000001646
55	505,7226	0,0000001582
56	505,7257	0,0000001322
57	505,7476	-0,0000000529
58	505,7545	-0,0000001113
59	505,7268	0,0000001228
60	505,7429	-0,0000000131
61	505,7314	0,0000000839
62	505,7354	0,0000000501
63	505,7269	0,0000001225
64	505,7322	0,0000000773
65	505,7449	-0,0000000300
66	505,7743	-0,0000002778
67	505,7213	0,0000001696
68	505,733	0,0000000706
69	505,7449	-0,0000000300
70	505,7336	0,0000000655
71	505,7339	0,0000000635
72	505,7367	0,0000000391
73	505,7237	0,0000001494
74	505,7209	0,0000001730
75	505,7485	-0,0000000599

Ek 5 n=100 İçin Ortaya Çıkan Değerler

	b1	b2
1	505,7906	-0,0000004157
2	505,7432	-0,0000000159
3	505,7181	0,0000001967
4	505,7489	-0,0000000633
5	505,7433	-0,0000000165
6	505,7278	0,0000001145
7	505,7453	-0,0000000330
8	505,7541	-0,0000001074
9	505,7429	-0,0000000129
10	505,7452	-0,0000000327
11	505,7317	0,0000000818
12	505,7243	0,0000001445
13	505,7468	-0,0000000465
14	505,7319	0,0000000798
15	505,75	-0,0000000734
16	505,7411	0,0000000022
17	505,7535	-0,0000001029
18	505,7351	0,0000000524
19	505,7549	-0,0000001145
20	505,741	0,0000000037
21	505,7364	0,0000000420
22	505,7282	0,0000001116
23	505,7432	-0,0000000156
24	505,7407	0,0000000056
25	505,702	0,0000003333
26	505,7319	0,0000000796
27	505,7687	-0,0000002307
28	505,7654	-0,0000002031
29	505,7509	-0,0000000810
30	505,7414	-0,0000000008
31	505,7323	0,0000000763
32	505,7385	0,0000000239
33	505,7481	-0,0000000574
34	505,7329	0,0000000715
35	505,7269	0,0000001219
36	505,7332	0,0000000688
37	505,7188	0,0000001906
38	505,7527	-0,0000000961
39	505,7401	0,0000000109
40	505,7306	0,0000000904

	b1	b2
41	505,7471	-0,0000000481
42	505,73	0,0000000959
43	505,7175	0,0000002020
44	505,7418	-0,0000000034
45	505,7296	0,0000000987
46	505,7656	-0,0000002049
47	505,7368	0,0000000385
48	505,7587	-0,0000001469
49	505,7413	0,0000000007
50	505,7461	-0,0000000399
51	505,7336	0,0000000655
52	505,738	0,0000000284
53	505,7589	-0,0000001483
54	505,7529	-0,0000000973
55	505,7394	0,0000000161
56	505,7476	-0,0000000526
57	505,7412	0,0000000011
58	505,7344	0,0000000591
59	505,7299	0,0000000968
60	505,7184	0,0000001944
61	505,7489	-0,0000000642
62	505,7563	-0,0000001261
63	505,7251	0,0000001377
64	505,7228	0,0000001572
65	505,7338	0,0000000635
66	505,7336	0,0000000651
67	505,7418	-0,0000000044
68	505,7291	0,0000001037
69	505,7418	-0,0000000041
70	505,754	-0,0000001070
71	505,7253	0,0000001359
72	505,7666	-0,0000002129
73	505,7321	0,0000000787
74	505,7473	-0,0000000497
75	505,7241	0,0000001462
76	505,7492	-0,0000000657
77	505,764	-0,0000001915
78	505,7558	-0,0000001222
79	505,7482	-0,0000000579
80	505,7403	0,0000000085

	b1	b2
81	505,7574728	-0,0000001361
82	505,7389177	0,0000000208
83	505,7453279	-0,0000000337
84	505,7601562	-0,0000001590
85	505,7633909	-0,0000001860
86	505,7245831	0,0000001419
87	505,7062891	0,0000002965
88	505,7293087	0,0000001016
89	505,7424779	-0,0000000094
90	505,7480303	-0,0000000564
91	505,7502507	-0,0000000750
92	505,7661735	-0,0000002095
93	505,7297283	0,0000000983
94	505,7216749	0,0000001665
95	505,742347	-0,0000000081
96	505,7237314	0,0000001492
97	505,7379617	0,0000000288
98	505,7149124	0,0000002237
99	505,7522014	-0,0000000912
100	505,7400987	0,0000000109

Ek 6 n=200 İçin Ortaya Çıkan Değerler

	b1	b2
1	505,790598	-0,0000004157
2	505,758118	-0,0000001416
3	505,758749	-0,0000001471
4	505,71702	0,0000002059
5	505,729306	0,0000001015
6	505,744949	-0,0000000303
7	505,755538	-0,0000001200
8	505,741949	-0,0000000049
9	505,72522	0,0000001367
10	505,751926	-0,0000000895
11	505,753105	-0,0000000991
12	505,72661	0,0000001247
13	505,757971	-0,0000001406
14	505,732192	0,0000000776
15	505,745758	-0,0000000374
16	505,734595	0,0000000574
17	505,730684	0,0000000903
18	505,734755	0,0000000558
19	505,737495	0,0000000325
20	505,74038	0,0000000083
21	505,722525	0,0000001593
22	505,716056	0,0000002139
23	505,733311	0,0000000682
24	505,742931	-0,0000000133
25	505,732613	0,0000000739
26	505,731602	0,0000000825
27	505,743819	-0,0000000207
28	505,747121	-0,0000000486
29	505,740264	0,0000000094
30	505,751396	-0,0000000848
31	505,740628	0,0000000063
32	505,722391	0,0000001601
33	505,732026	0,0000000790
34	505,730578	0,0000000909
35	505,759365	-0,0000001520
36	505,747748	-0,0000000540
37	505,726502	0,0000001258
38	505,733252	0,0000000684
39	505,760726	-0,0000001635
40	505,749532	-0,0000000692
41	505,730628	0,0000000908
42	505,738399	0,0000000254
43	505,757209	-0,0000001338
44	505,764184	-0,0000001928
45	505,733636	0,0000000655
46	505,741636	-0,0000000022
47	505,737989	0,0000000283
48	505,742576	-0,0000000103
49	505,741072	0,0000000022
50	505,731902	0,0000000803

	b1	b2
51	505,7375	0,0000000329
52	505,7252	0,0000001366
53	505,7504	-0,0000000767
54	505,7282	0,0000001115
55	505,7478	-0,0000000543
56	505,7491	-0,0000000658
57	505,7389	0,0000000209
58	505,7471	-0,0000000487
59	505,7586	-0,0000001459
60	505,7871	-0,0000003861
61	505,7697	-0,0000002388
62	505,7317	0,0000000816
63	505,7469	-0,0000000468
64	505,7362	0,0000000436
65	505,7455	-0,0000000350
66	505,7334	0,0000000672
67	505,7396	0,0000000148
68	505,7292	0,0000001033
69	505,7236	0,0000001499
70	505,7307	0,0000000898
71	505,7446	-0,0000000275
72	505,724	0,0000001470
73	505,7414	-0,0000000001
74	505,7358	0,0000000468
75	505,7181	0,0000001966
76	505,759	-0,0000001490
77	505,7372	0,0000000351
78	505,736	0,0000000446
79	505,749	-0,0000000646
80	505,7195	0,0000001848
81	505,7373	0,0000000342
82	505,7327	0,0000000730
83	505,7237	0,0000001496
84	505,7265	0,0000001255
85	505,735	0,0000000534
86	505,712	0,0000002482
87	505,7281	0,0000001123
88	505,7269	0,0000001228
89	505,7341	0,0000000612
90	505,742	-0,0000000055
91	505,7246	0,0000001415
92	505,7434	-0,0000000170
93	505,7283	0,0000001100
94	505,7436	-0,0000000195
95	505,745	-0,0000000309
96	505,7231	0,0000001547
97	505,7589	-0,0000001480
98	505,743	-0,0000000143
99	505,735	0,0000000540
100	505,7356	0,0000000491

	b1	b2
101	505,71469	0,0000002256
102	505,75587	-0,0000001229
103	505,73007	0,0000000957
104	505,72235	0,0000001609
105	505,75956	-0,0000001538
106	505,75047	-0,0000000769
107	505,75149	-0,0000000859
108	505,73701	0,0000000364
109	505,74711	-0,0000000486
110	505,73786	0,0000000293
111	505,73668	0,0000000393
112	505,73468	0,0000000563
113	505,73947	0,0000000158
114	505,75999	-0,0000001577
115	505,73283	0,0000000723
116	505,76215	-0,0000001759
117	505,75203	-0,0000000901
118	505,72864	0,0000001076
119	505,75832	-0,0000001436
120	505,73579	0,0000000468
121	505,74762	-0,0000000529
122	505,76066	-0,0000001630
123	505,73307	0,0000000700
124	505,75095	-0,0000000809
125	505,72035	0,0000001777
126	505,7597	-0,0000001552
127	505,76928	-0,0000002359
128	505,74096	0,0000000031
129	505,73401	0,0000000621
130	505,75846	-0,0000001442
131	505,73832	0,0000000255
132	505,7116	0,0000002517
133	505,7316	0,0000000826
134	505,74343	-0,0000000177
135	505,74481	-0,0000000292
136	505,75064	-0,0000000782
137	505,71956	0,0000001843
138	505,72932	0,0000001016
139	505,74292	-0,0000000131
140	505,72916	0,0000001033
141	505,72923	0,0000001025
142	505,74296	-0,0000000136
143	505,74889	-0,0000000638
144	505,73496	0,0000000540
145	505,746	-0,0000000390
146	505,72916	0,0000001032
147	505,75184	-0,0000000884
148	505,75754	-0,0000001367
149	505,74955	-0,0000000694
150	505,73217	0,0000000776

	b1	b2
151	505,737	0,0000000364
152	505,737	0,0000000384
153	505,723	0,0000001574
154	505,749	-0,0000000669
155	505,752	-0,0000000919
156	505,744	-0,0000000207
157	505,745	-0,0000000291
158	505,72	0,0000001817
159	505,723	0,0000001578
160	505,755	-0,0000001189
161	505,736	0,0000000415
162	505,737	0,0000000335
163	505,713	0,0000002371
164	505,739	0,0000000219
165	505,742	-0,0000000057
166	505,74	0,0000000078
167	505,765	-0,0000001960
168	505,743	-0,0000000131
169	505,747	-0,0000000467
170	505,718	0,0000001966
171	505,728	0,0000001153
172	505,749	-0,0000000651
173	505,729	0,0000001067
174	505,748	-0,0000000550
175	505,731	0,0000000916
176	505,718	0,0000001964
177	505,719	0,0000001923
178	505,726	0,0000001312
179	505,743	-0,0000000115
180	505,709	0,0000002744
181	505,75	-0,0000000757
182	505,729	0,0000001046
183	505,716	0,0000002110
184	505,754	-0,0000001088
185	505,75	-0,0000000754
186	505,736	0,0000000423
187	505,747	-0,0000000459
188	505,744	-0,0000000239
189	505,74	0,0000000132
190	505,749	-0,0000000604
191	505,72	0,0000001799
192	505,738	0,0000000315
193	505,728	0,0000001132
194	505,767	-0,0000002139
195	505,719	0,0000001868
196	505,744	-0,0000000203
197	505,724	0,0000001448
198	505,736	0,0000000431
199	505,736	0,0000000459
200	505,753	-0,0000001024

Ek 7 n=500 İçin Ortaya Çıkan Değerler

	b1	b2		b1	b2		b1	b2		b1	b2
1	505,7905979	-0,0000004157	51	505,726646	0,0000001242	101	505,7648711	-0,0000001987	151	505,7483586	-0,0000000589
2	505,72413	0,0000001458	52	505,7628732	-0,0000001816	102	505,7500837	-0,0000000738	152	505,7503723	-0,0000000763
3	505,7640641	-0,0000001920	53	505,7589696	-0,0000001491	103	505,7492958	-0,0000000675	153	505,7232114	0,0000001535
4	505,7394647	0,0000000161	54	505,7467856	-0,0000000460	104	505,757453	-0,0000001362	154	505,7543968	-0,0000001101
5	505,7571216	-0,0000001330	55	505,7393286	0,0000000169	105	505,7386094	0,0000000235	155	505,7531832	-0,0000000999
6	505,7631873	-0,0000001843	56	505,7295138	0,0000001000	106	505,7872878	-0,0000003877	156	505,7580544	-0,0000001408
7	505,7362079	0,0000000435	57	505,7621876	-0,0000001762	107	505,7268903	0,0000001224	157	505,7297972	0,0000000978
8	505,7311603	0,0000000863	58	505,7499447	-0,0000000724	108	505,7348488	0,0000000551	158	505,7421874	-0,0000000068
9	505,7365049	0,0000000410	59	505,7499379	-0,0000000724	109	505,727699	0,0000001156	159	505,7325328	0,0000000745
10	505,7272618	0,0000001192	60	505,7285479	0,0000001081	110	505,730769	0,0000000894	160	505,757922	-0,0000001401
11	505,725624	0,0000001331	61	505,7546979	-0,0000001128	111	505,7617366	-0,0000001721	161	505,7514478	-0,0000000856
12	505,7314607	0,0000000834	62	505,7382193	0,0000000267	112	505,7374711	0,0000000329	162	505,7353378	0,0000000510
13	505,7403608	0,0000000080	63	505,7486438	-0,0000000614	113	505,7209015	0,0000001730	163	505,7392935	0,0000000175
14	505,7514709	-0,0000000857	64	505,7617194	-0,0000001722	114	505,7689142	-0,0000002329	164	505,7400001	0,0000000113
15	505,7489817	-0,0000000647	65	505,7212479	0,0000001701	115	505,7318481	0,0000000805	165	505,7294411	0,0000001009
16	505,7457779	-0,0000000375	66	505,7281158	0,0000001119	116	505,7344233	0,0000000584	166	505,7495444	-0,0000000692
17	505,764192	-0,0000001929	67	505,771662	-0,0000002561	117	505,7236042	0,0000001500	167	505,7354139	0,0000000501
18	505,754284	-0,0000001094	68	505,7292249	0,0000001027	118	505,7426325	-0,0000000110	168	505,7464119	-0,0000000428
19	505,7549556	-0,0000001148	69	505,7441671	-0,0000000236	119	505,7565731	-0,0000001285	169	505,7377002	0,0000000309
20	505,7360165	0,0000000453	70	505,7271505	0,0000001200	120	505,757893	-0,0000001398	170	505,7497977	-0,0000000712
21	505,7382468	0,0000000261	71	505,7429671	-0,0000000135	121	505,7624884	-0,0000001785	171	505,7481932	-0,0000000578
22	505,7620941	-0,0000001750	72	505,7283255	0,0000001102	122	505,7561391	-0,0000001252	172	505,7435359	-0,0000000183
23	505,7336732	0,0000000649	73	505,7563194	-0,0000001264	123	505,7338643	0,0000000632	173	505,7339934	0,0000000622
24	505,7467277	-0,0000000454	74	505,7310872	0,0000000867	124	505,7351464	0,0000000524	174	505,7436334	-0,0000000192
25	505,7441905	-0,0000000236	75	505,7281559	0,0000001118	125	505,7405897	0,0000000063	175	505,7192727	0,0000001868
26	505,7545596	-0,0000001116	76	505,727666	0,0000001156	126	505,7443656	-0,0000000256	176	505,721881	0,0000001647
27	505,7336493	0,0000000652	77	505,7438388	-0,0000000207	127	505,7472151	-0,0000000495	177	505,7384927	0,0000000240
28	505,7324964	0,0000000749	78	505,7328686	0,0000000718	128	505,7233586	0,0000001519	178	505,726131	0,0000001289
29	505,7407766	0,0000000050	79	505,7381203	0,0000000274	129	505,7628762	-0,0000001817	179	505,7224826	0,0000001594
30	505,7429954	-0,0000000139	80	505,7294856	0,0000001005	130	505,7612523	-0,0000001681	180	505,7423936	-0,0000000088
31	505,7290086	0,0000001045	81	505,7183506	0,0000001946	131	505,732399	0,0000000758	181	505,7442224	-0,0000000242
32	505,7422831	-0,0000000079	82	505,728473	0,0000001090	132	505,7535108	-0,0000001028	182	505,7259037	0,0000001302
33	505,7377064	0,0000000311	83	505,7404711	0,0000000072	133	505,7435963	-0,0000000186	183	505,734435	0,0000000586
34	505,721525	0,0000001677	84	505,7483078	-0,0000000584	134	505,7480569	-0,0000000570	184	505,7312792	0,0000000853
35	505,734844	0,0000000551	85	505,7389096	0,0000000205	135	505,758753	-0,0000001470	185	505,7449176	-0,0000000299
36	505,7412807	0,0000000006	86	505,7570216	-0,0000001322	136	505,715799	0,0000002162	186	505,7242723	0,0000001445
37	505,7277542	0,0000001149	87	505,7292874	0,0000001023	137	505,7472835	-0,0000000500	187	505,7267219	0,0000001236
38	505,7406889	0,0000000056	88	505,7490651	-0,0000000650	138	505,7378736	0,0000000293	188	505,7579935	-0,0000001409
39	505,7591838	-0,0000001506	89	505,7482907	-0,0000000586	139	505,7412852	0,0000000007	189	505,7413997	-0,0000000005
40	505,732481	0,0000000751	90	505,722026	0,0000001633	140	505,7172616	0,0000002038	190	505,7329914	0,0000000709
41	505,7579763	-0,0000001406	91	505,7227823	0,0000001570	141	505,7346866	0,0000000564	191	505,7393866	0,0000000165
42	505,7459835	-0,0000000391	92	505,7496306	-0,0000000700	142	505,7330988	0,0000000696	192	505,7402152	0,0000000096
43	505,7436564	-0,0000000199	93	505,7384899	0,0000000239	143	505,7244346	0,0000001432	193	505,7621159	-0,0000001753
44	505,7314654	0,0000000833	94	505,7434415	-0,0000000177	144	505,7310701	0,0000000870	194	505,7421785	-0,0000000068
45	505,7389106	0,0000000207	95	505,7288515	0,0000001056	145	505,7475634	-0,0000000527	195	505,7322117	0,0000000775
46	505,7451319	-0,0000000317	96	505,7456551	-0,0000000363	146	505,7610363	-0,0000001663	196	505,7294417	0,0000001009
47	505,746486	-0,0000000436	97	505,7527307	-0,0000000962	147	505,7236939	0,0000001490	197	505,74393	-0,0000000217
48	505,7515166	-0,0000000859	98	505,7227723	0,0000001572	148	505,7470965	-0,0000000485	198	505,7337489	0,0000000642
49	505,733915	0,0000000630	99	505,7428648	-0,0000000132	149	505,7343444	0,0000000596	199	505,7371254	0,0000000357
50	505,7296592	0,0000000987	100	505,7282069	0,0000001110	150	505,7281496	0,0000001117	200	505,741169	0,0000000015

	b1	b2
201	505,7396126	0,0000000147
202	505,7428436	-0,0000000125
203	505,7458271	-0,0000000378
204	505,7432626	-0,0000000159
205	505,7478213	-0,0000000545
206	505,7544729	-0,0000001105
207	505,7500014	-0,0000000729
208	505,7418293	-0,0000000040
209	505,7457211	-0,0000000368
210	505,7388117	0,0000000215
211	505,7248278	0,0000001399
212	505,7635236	-0,0000001872
213	505,741154	0,0000000015
214	505,7376815	0,0000000307
215	505,7443914	-0,0000000257
216	505,7626849	-0,0000001799
217	505,7319092	0,0000000799
218	505,7376294	0,0000000317
219	505,7387059	0,0000000225
220	505,7450944	-0,0000000318
221	505,741914	-0,0000000048
222	505,7382932	0,0000000259
223	505,7411264	0,0000000021
224	505,7457491	-0,0000000375
225	505,7515239	-0,0000000862
226	505,717855	0,0000001986
227	505,7194397	0,0000001854
228	505,7494843	-0,0000000687
229	505,732344	0,0000000764
230	505,7463552	-0,0000000422
231	505,7454059	-0,0000000345
232	505,7409404	0,0000000037
233	505,7397088	0,0000000135
234	505,7422078	-0,0000000069
235	505,7479571	-0,0000000559
236	505,7322147	0,0000000772
237	505,7390513	0,0000000195
238	505,7548045	-0,0000001139
239	505,7373549	0,0000000335
240	505,7439482	-0,0000000218
241	505,7425984	-0,0000000105
242	505,7227944	0,0000001569
243	505,7392246	0,0000000181
244	505,7575721	-0,0000001369
245	505,7365878	0,0000000404
246	505,7504863	-0,0000000775
247	505,7371932	0,0000000350
248	505,7514596	-0,0000000857
249	505,7504646	-0,0000000768
250	505,7399931	0,0000000114

	b1	b2
251	505,7173898	0,00000002028
252	505,7365398	0,0000000408
253	505,7242529	0,0000001446
254	505,7513729	-0,0000000847
255	505,7464346	-0,0000000429
256	505,7221256	0,0000001624
257	505,7430374	-0,0000000142
258	505,7300115	0,0000000960
259	505,7266789	0,0000001238
260	505,7209687	0,0000001725
261	505,7500186	-0,0000000734
262	505,7372171	0,0000000350
263	505,7488561	-0,0000000634
264	505,7391992	0,0000000183
265	505,7462445	-0,0000000415
266	505,7571446	-0,0000001338
267	505,7320701	0,0000000787
268	505,7415508	-0,0000000018
269	505,7436576	-0,0000000194
270	505,726972	0,0000001218
271	505,7304709	0,0000000920
272	505,7549268	-0,0000001146
273	505,7515905	-0,0000000867
274	505,7283338	0,0000001101
275	505,7272594	0,0000001191
276	505,7576564	-0,0000001379
277	505,7551721	-0,0000001166
278	505,7210083	0,0000001721
279	505,7557182	-0,0000001214
280	505,7633461	-0,0000001860
281	505,7322992	0,0000000767
282	505,7447597	-0,0000000291
283	505,737091	0,0000000361
284	505,7367313	0,0000000392
285	505,7414039	-0,0000000007
286	505,7405106	0,0000000074
287	505,7455898	-0,0000000358
288	505,7430289	-0,0000000140
289	505,7219633	0,0000001638
290	505,7175452	0,0000002013
291	505,7446743	-0,0000000279
292	505,7437099	-0,0000000199
293	505,7165687	0,0000002096
294	505,72975	0,0000000979
295	505,7295875	0,0000000996
296	505,7362345	0,0000000434
297	505,7348081	0,0000000555
298	505,7531789	-0,0000000999
299	505,7756094	-0,0000002893
300	505,734933	0,0000000541

	b1	b2
301	505,7210555	0,0000001716
302	505,7542224	-0,0000001087
303	505,7347602	0,0000000559
304	505,742967	-0,0000000134
305	505,7391258	0,0000000189
306	505,7502151	-0,0000000749
307	505,7550878	-0,0000001161
308	505,7388052	0,0000000212
309	505,7457098	-0,0000000368
310	505,7398802	0,0000000122
311	505,7598795	-0,0000001568
312	505,7406179	0,0000000063
313	505,7432502	-0,0000000162
314	505,7455152	-0,0000000351
315	505,7482704	-0,0000000582
316	505,7362676	0,0000000428
317	505,7407989	0,0000000045
318	505,7245838	0,0000001416
319	505,7583761	-0,0000001436
320	505,7317538	0,0000000812
321	505,7359604	0,0000000459
322	505,7455692	-0,0000000355
323	505,7349762	0,0000000540
324	505,7469037	-0,0000000466
325	505,7457542	-0,0000000370
326	505,7362642	0,0000000430
327	505,7322841	0,0000000769
328	505,7124045	0,0000002449
329	505,7378479	0,0000000296
330	505,7441926	-0,0000000238
331	505,7562124	-0,0000001254
332	505,7664803	-0,0000002124
333	505,7414184	-0,0000000005
334	505,7410052	0,0000000030
335	505,713384	0,0000002364
336	505,7433711	-0,0000000174
337	505,7142218	0,0000002295
338	505,7465999	-0,0000000443
339	505,7307326	0,0000000896
340	505,7271675	0,0000001201
341	505,7373694	0,0000000337
342	505,7344982	0,0000000581
343	505,7605593	-0,0000001624
344	505,7250159	0,0000001381
345	505,7714869	-0,0000002544
346	505,7410753	0,0000000022
347	505,7188516	0,0000001904
348	505,7465006	-0,0000000437
349	505,7430951	-0,0000000148
350	505,7273897	0,0000001182

	b1	b2
351	505,7239507	0,0000001471
352	505,7209778	0,0000001722
353	505,7275038	0,0000001174
354	505,7204445	0,0000001769
355	505,7522353	-0,0000000920
356	505,7373405	0,0000000339
357	505,7276615	0,0000001160
358	505,7354272	0,0000000503
359	505,7267177	0,0000001240
360	505,7476968	-0,0000000535
361	505,7296252	0,0000000992
362	505,7551061	-0,0000001163
363	505,7349587	0,0000000539
364	505,7215625	0,0000001673
365	505,7268561	0,0000001226
366	505,7338328	0,0000000633
367	505,7505063	-0,0000000774
368	505,721967	0,0000001640
369	505,7608283	-0,0000001646
370	505,72263	0,0000001582
371	505,7257416	0,0000001322
372	505,7476148	-0,0000000529
373	505,7544905	-0,0000001113
374	505,7268394	0,0000001228
375	505,7429007	-0,0000000131
376	505,7314158	0,0000000839
377	505,7354198	0,0000000501
378	505,726869	0,0000001225
379	505,7322382	0,0000000773
380	505,7449143	-0,0000000300
381	505,77428	-0,0000002778
382	505,7212946	0,0000001696
383	505,732998	0,0000000706
384	505,7448735	-0,0000000300
385	505,733616	0,0000000655
386	505,7338552	0,0000000635
387	505,7367062	0,0000000391
388	505,7236889	0,0000001494
389	505,7209002	0,0000001730
390	505,7484975	-0,0000000599
391	505,7276633	0,0000001157
392	505,7432154	-0,0000000159
393	505,7180748	0,0000001967
394	505,7488711	-0,0000000633
395	505,7432823	-0,0000000165
396	505,7278047	0,0000001145
397	505,7452954	-0,0000000330
398	505,7540841	-0,0000001074
399	505,7429061	-0,0000000129
400	505,7452166	-0,0000000327

	b1	b2		b1	b2
401	505,7316837	0,0000000818	451	505,7489374	-0,0000000642
402	505,7242543	0,0000001445	452	505,7563247	-0,0000001261
403	505,7468445	-0,0000000465	453	505,7250835	0,0000001377
404	505,7319082	0,0000000798	454	505,7227552	0,0000001572
405	505,7500341	-0,0000000734	455	505,7338476	0,0000000635
406	505,7410671	0,0000000022	456	505,7336464	0,0000000651
407	505,7535208	-0,0000001029	457	505,7418444	-0,0000000044
408	505,7351436	0,0000000524	458	505,7290881	0,0000001037
409	505,7548599	-0,0000001145	459	505,7418222	-0,0000000041
410	505,7409538	0,0000000037	460	505,7540306	-0,0000001070
411	505,7363905	0,0000000420	461	505,7252864	0,0000001359
412	505,7281733	0,0000001116	462	505,7665829	-0,0000002129
413	505,7431736	-0,0000000156	463	505,7320717	0,0000000787
414	505,7406844	0,0000000056	464	505,7472599	-0,0000000497
415	505,7019507	0,0000003333	465	505,7240707	0,0000001462
416	505,7319261	0,0000000796	466	505,7491525	-0,0000000657
417	505,7686669	-0,0000002307	467	505,7640305	-0,0000001915
418	505,7654072	-0,0000002031	468	505,7558214	-0,0000001222
419	505,7509358	-0,0000000810	469	505,7481895	-0,0000000579
420	505,741425	-0,0000000008	470	505,7403407	0,0000000085
421	505,7323255	0,0000000763	471	505,7574728	-0,0000001361
422	505,7385446	0,0000000239	472	505,7389177	0,0000000208
423	505,7481323	-0,0000000574	473	505,7453279	-0,0000000337
424	505,7328634	0,0000000715	474	505,7601562	-0,0000001590
425	505,7269492	0,0000001219	475	505,7633909	-0,0000001860
426	505,7332496	0,0000000688	476	505,7245831	0,0000001419
427	505,718835	0,0000001906	477	505,7062891	0,0000002965
428	505,7527228	-0,0000000961	478	505,7293087	0,0000001016
429	505,740101	0,0000000109	479	505,7424779	-0,0000000094
430	505,7306377	0,0000000904	480	505,7480303	-0,0000000564
431	505,7470752	-0,0000000481	481	505,7502507	-0,0000000750
432	505,7300403	0,0000000959	482	505,7661735	-0,0000002095
433	505,7174719	0,0000002020	483	505,7297283	0,0000000983
434	505,7417906	-0,0000000034	484	505,7216749	0,0000001665
435	505,7296347	0,0000000987	485	505,742347	-0,0000000081
436	505,7656167	-0,0000002049	486	505,7237314	0,0000001492
437	505,7368258	0,0000000385	487	505,7379617	0,0000000288
438	505,7587379	-0,0000001469	488	505,7149124	0,0000002237
439	505,7412542	0,0000000007	489	505,7522014	-0,0000000912
440	505,7461227	-0,0000000399	490	505,7400987	0,0000000109
441	505,7335955	0,0000000655	491	505,7278264	0,0000001144
442	505,7379759	0,0000000284	492	505,7581178	-0,0000001416
443	505,7589294	-0,0000001483	493	505,7587494	-0,0000001471
444	505,7528752	-0,0000000973	494	505,7170195	0,0000002059
445	505,7394063	0,0000000161	495	505,7293058	0,0000001015
446	505,7475835	-0,0000000526	496	505,7449486	-0,0000000303
447	505,7412229	0,0000000011	497	505,7555376	-0,0000001200
448	505,7343513	0,0000000591	498	505,7419494	-0,0000000049
449	505,729901	0,0000000968	499	505,72522	0,0000001367
450	505,7183722	0,0000001944	500	505,751926	-0,0000000895

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 14.04.1984

Doğum yeri Ordu

Lise 1999-2001 Özel Üsküdar Fen Lisesi

Lisans 2001-2006 Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik Fak.
Endüstri Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2007-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
İstatistik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2007-2008 An-El Anahtar ve Elektrikli Ev Aletleri San. A.Ş.

2008-Devam ediyor Türk Demir Döküm Fabrikaları A.Ş.