

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BANACH F-MODÜLLERİNİN MERKEZİ
VE
F-ORTOMORFİZMALAR ÜZERİNDE GENİŞLETİLMİŞ SONUÇLAR**

ŞEBNEM YILDIZ PESTİL

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMER GÖK**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH F-MODÜLLERİNİN MERKEZİ
VE
F-ORTOMORFİZMALAR ÜZERİNDE GENİŞLETİLMİŞ SONUÇLAR

Şebnem YILDIZ PESTİL tarafından hazırlanan tez çalışması 05/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Abdullah YILDIZ
Beykent Üniversitesi

Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu alışma, 2008-2013 yılları arasında 2211 kodlu TÜBİTAK Yurt içi Doktora Bursu ve 2012-2013 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün 2012-01-03-DOP01 numaralı projeleri tarafından desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkmasında bana yardımcı olan her türlü durum ve problem karşısında yalnız olmadığımı hissettiren saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömer GÖK' e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde bulunan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah Yıldız, Sayın Prof. Dr. Yasemin Kahramaner hocalarıma teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca beni maddi açıdan destekleyerek beni onurlandıran TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim, çalışmalarım boyunca tüm anlayışı ve desteği ile yanımda olan aileme ve biricik kızım Eylül Naz Pestil' e sevgilerimi sunarım...

Temmuz, 2013

Şebnem YILDIZ PESTİL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2.....	4
RİESZ UZAYLARINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
2.1 Giriş	4
2.2 Vektör Uzayı	5
2.3 Sıralama	9
2.4 Sıralı Vektör Uzayı	10
2.5 Riesz Uzayı	11
2.5.1 Riesz Uzaylarında Vektör Alt örgüsü, İdeal, Band Kavramları.....	12
2.5.2 Riesz Uzaylarında Dedekind Tamlık Aksiyomu	15
2.6 Pozitif Lineer Operatörler	17
2.7 Riesz Homomorfizması ve Özellikleri.....	20
2.8 Lineer fonksiyoneller	22
2.9 Normlu Uzaylarda Lineer Operatörler	26
2.9.1 Normlu Uzaylarda Lineer Operatörünün Eşleniği.....	28
2.10 Riesz Cebirleri.....	32
2.10.1 F-Cebirlerinin Temel Özellikleri	33
2.11 Arens Çarpımı	34

2.12	Değişmez Alt Uzay Kavramı	34
2.13	Cebir Homomorfizması	35
BÖLÜM 3		36
BANACH ÖRGÜLERİNİN MERKEZİ		36
3.1	Banach Örgüleri	36
3.2	Ortomorfizmalar	38
3.3	Ortomorfizmaların Temel Özellikleri	39
3.3	Merkezi Operatörler	41
3.3.1	Dual Uzayın Merkezindeki Pozitif Operatörler	42
3.3.2	Banach Örgülerinde Merkezi Operatörler	44
BÖLÜM 4		48
BANACH F-MODÜLLERİNİN MERKEZİ		48
4.1	Modül Kavramı.....	48
4.2	Riesz Cebirlerinin İkinci Duali Üzerindeki Arens Çarpımı.....	49
4.3	Banach F-Modülleri.....	52
4.4	$m : A \rightarrow L(E)$ Sınırlı Birimli Cebir Homomorfizması.....	54
BÖLÜM 5		58
F-ORTOMORFİZMALAR ÜZERİNDE GENİŞLETİLMİŞ SONUÇLAR		58
5.1	Giriş	58
5.2	F-Modülleri.....	58
5.3	Bir Riesz Cebirinin İkinci Duali Üzerinde Topolojik Dolu Olması.....	63
5.4	F-Ortomorfizması	66
BÖLÜM 6		68
SONUÇ VE ÖNERİLER		68
KAYNAKLAR		69
ÖZGEÇMİŞ		72

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbf{K}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ Cismi
K	Kompakt Hausdorff uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\forall$	Her
$\exists$	Bazı
$\in$	Elemanıdır
$\preceq$	Küçük eşittir
$\ \cdot\ $	Norm
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
A°	A kümesinin kutbu
A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
$A \perp B$	A ve B ayrık kümeler
B_x	x vektörüyle üretilen band
$B(X)$	X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların kümesi
B_A	A kümesi ile üretilen band
$C(X)$	X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
ℓ_∞	Sınırlı dizi uzayı
c	Yakınsak dizi uzayı
c_0	Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
$D \uparrow$	Yukarı yönlenmiş küme
$D \downarrow$	Aşağı yönlenmiş küme
E_+	E nin pozitif konisi
E_x	x ile üretilen ideal
E_A	A kümesi ile üretilen ideal
$E^\sim$	E nin sıra duali
$E^{\sim\sim}$	E nin ikinci sıra duali
E'	E nin topolojik duali
$E \oplus F$	E ve F nin direk toplamı

$L(E, F)$	E den F ye tanımlı tüm sürekli lineer operatörler
$L_r(E, F)$	E den F ye tanımlı tüm regüler lineer operatörler
$L_b(E, F)$	E den F ye tanımlı tüm sıra sınırlı lineer operatörler
$L_n(E, F)$	E den F ye tanımlı tüm sıra sürekli lineer fonksiyoneller
N_T	T operatörünün sıfır ideali
$Orth(E)$	E üzerindeki ortomorfizmalar
P_x	B_x bandı üzerindeki projeksiyon (izdüşüm)
$S(E)$	E den E ye tanımlı tüm band koruyan operatörler
$\mathcal{A}$	$L(E)$ nin alt cebiri
s	Tüm reel dizilerin Riesz uzayı
T'	T operatörünün eşleniği (adjointi)
$\sigma(E, E')$	E üzerindeki zayıf topoloji
w^*	zayıf* topoloji
x^+	x vektörünün pozitif kısmı
x^-	x vektörünün negatif kısmı
$ x $	x vektörünün modülü veya mutlak değeri
$x_\alpha \uparrow x$	x_α artandır ve $\sup\{x_\alpha\} = x$
$x_\alpha \downarrow x$	x_α azalandır ve $\inf\{x_\alpha\} = x$
$x_\alpha \xrightarrow{\circ} x$	sıra yakınsak
$x_\alpha \xrightarrow{w} x$	zayıf yakınsak
$[x, y]$	sıralı aralık
$x \vee y$	x ile y nin supremumu
$x \wedge y$	x ile y nin infimumu
$x \perp y$	x ile y ayrık vektörlerdir
X^*	X in cebirsel duali
X'	X in topolojik duali
X''	X in ikinci duali
$Z(E)$	E nin merkezi
$Z(E')$	E nin dualinin merkezi

**BANACH F-MODÜLLERİNİN MERKEZİ
VE
F-ORTOMORFİZMALAR ÜZERİNDE GENİŞLETİLMİŞ SONUÇLAR**

Şebnem YILDIZ PESTİL

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

A bir birimli Arşimed f -cebiri iken $(A')_n$, A' de tüm sıra sürekli lineer fonksiyonellerin uzayı olduğunda $A'' = (A')_n$ eşitliğinin olduğunu (Pagter ve Huijsmans [12]) ispatlamıştır. Çalışmamız bu sonuca dayanır.

E bir Banach örgüsü, K Kompakt Hausdorff uzayı için $C(K)$ supremum normuna göre K üzerindeki sürekli fonksiyonların Banach cebiri ve $L(E)$, E üzerinde sınırlı lineer operatörlerin uzayı ise $m: C(K) \rightarrow L(E)$ sınırlı birimli cebir homomorfizmasıdır.

Bu fikir ile E nin merkeziyle ilgili bazı iddialar (Orhon, [17]) de gösterilmiştir.

Bu çalışmada, $C(K)$ yerine bir birimli Arşimed f -cebiri A alarak (Orhon [17]) nin çalışmasındaki bazı iddiaları genelleştirdik.

Burada, A bir birimli f -cebiri ve L, M A üzerinde iki f -modül olduğu kabul edildi, L nin ikinci sıra duali L'' nün A nın ikinci sıra duali A'' de bir Banach f -modül olduğu gösterildi. Dahası A'' üzerinde topolojik olarak dolu olma kavramı tanımlandı ve A'' nün A'' de topolojik olarak dolu olduğu ispatlanmıştır.

Ayrıca bu çalışmada, bir T operatörü bir A birimli f -cebiri üzerinde L den M ye f -ortomorfizma kabul edildi ve T operatörünün ikinci eşleniği olan T'' operatörünün A nin ikinci sıra duali A'' üzerinde L nin ikinci sıra duali L'' den M nin ikinci sıra duali M'' ne bir f -ortomorfizma olduğu gösterilmiştir. Burada elde edilen neticeler (Turan [14]) deki bazı neticeleri geneller.

Anahtar Kelimeler: Banach Örgüsü, Merkez, F -Cebiri, F -Modül, Dedekind Tam.

**THE CENTER OF BANACH F-MODULES
AND
EXTENDED RESULTS ON F-ORTHOMORPHISMS**

Şebnem YILDIZ PESTİL

Department of Mathematics
PhD Thesis

Advisor: Prof. Dr. Ömer GÖK

(Huijsmans and Pagter [12]) proved that when A is a unital Archimedean f -algebra, the equality $A'' = (A')_n'$ holds, where $(A')_n'$ is the collection of all order continuous linear functionals on A' . Our study bases on this conclusion.

If E is a Banach lattice, $C(K)$ is the Banach algebra of continuous functions on K with the sup norm where K is a compact Hausdorff space and $L(E)$ is the bounded linear operators on E , then a mapping $m: C(K) \rightarrow L(E)$ is a bounded unital algebra homomorphism. Some claims concerning on the center of E with this idea was shown in (Orhon [17]).

In this work, taking A as a unital Archimedean f -algebra instead of $C(K)$, we generalized some of the results of (Orhon [17]).

Here, it was assumed that A is an Archimedean f -algebra with unit element and L, M are two f -modules over A . Then it was shown that L'' , the second order dual of L , is an f -module over A'' where A'' is the second order dual of A . Moreover the

concept of topologically fullness over A'' was defined and proved that A'' is a topologically full over A'' .

In addition, in this work it was assumed that an operator T is an f -orthomorphism from L to M over A'' and it was shown that T'' is an f -orthomorphism, where T'' is the second adjoint of T from L'' to M'' .

These conclusions obtained from here generalize some of the results of (Turan [14]).

Keywords: Banach Lattice, Center, F -Algebra, F -Module, Dedekind Complete.

1.1 Literatür Özeti

Riesz uzaylarının teorisi 1930 ların ortasında (Freudenthal [1] ve Kantorovitch [2]-[7]) tarafından geliştirildi. Pozitif operatörler (Kantorovitch [2]-[7]) tarafından 1930 ların ortasında tanıtıldı ve çalışıldı. Pozitif operatörlerin sistematik çalışmasının başlangıcı 1930 larda (Riesz [8], Kantorovitch [2]-[7] ve Birkhoff [9]) tarafındandır. F-Cebiri kavramı 1981 yılında (Pagter [10]) tarafından geliştirilmiştir. Bu konu (Huijsmans ve Bernau [11]), (Pagter ve Huijsmans [12]) ve (Huijsmans [13]) tarafından birçok makalede incelenmiştir. 2000 yılında (Turan [14]) de f-ortomorfizma konusunu araştırmıştır. (Wickstead [15], [16]) da topolojik olarak dolu olma kavramını verdi ve merkez üzerine yaptığı önemli bir çalışmada merkezin topolojik olarak dolu olması kavramını inceledi. Bu çalışmayla beraber (Orhon [17]) de bir Banach örgüsünün merkezinde topolojik olarak dolu olma kavramını geliştirmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışma bir A birimli f-cebiri ve A nın ikinci sıra duali üzerine oluşturulmuştur. Bu çalışmada A bir birimli Banach f-cebiri ve E , A üzerinde bir Banach f-modül olduğunda E nin sıra dualinin merkezini incelemek ve A bir birimli f-cebiri iken A nın ikinci sıra duali A'' nün A'' de topolojik olarak dolu olduğunu gösterip bir f-ortomorfizmasının ikinci eşleniğinin de f-ortomorfizması olduğunu göstermek amaçlanmaktadır.

1.3 Hipotez

A birimli f -cebiri ve L bir Riesz uzayı olsun.

Her $x \in L$, $f \in L'$ ve $a \in A$ için L' Riesz uzayı

$$\begin{aligned} A \times L' &\rightarrow L' \\ (a, f) &\rightarrow a \cdot f : a \cdot f(x) = f(a \cdot x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

tanımı ile A üzerinde bir **f-modül** olduğu kabul edilmiştir.

L , A üzerinde bir f -modül ise aşağıdaki dönüşümleri kurabiliriz.

1. Her $x \in L$, $f \in L'$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned} L \times L' &\rightarrow A' \\ (x, f) &\rightarrow x \cdot f : \psi_{x,f}(a) = f(a \cdot x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Her $x \in L$, $f \in L'$, $F \in A''$ için

$$\begin{aligned} A'' \times L' &\rightarrow L' \\ (F, f) &\rightarrow F \cdot f : (F \cdot f)(x) = F(x \cdot f) \end{aligned} \quad (1.3)$$

3. Her $f \in L'$, $F \in A''$, $\hat{f} \in L''$

$$\begin{aligned} A'' \times L'' &\rightarrow L'' \\ (F, \hat{f}) &\rightarrow F \cdot \hat{f} : (F \cdot \hat{f})(f) = \hat{f}(F \cdot f) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Aynı zamanda,

4. Her $x \in L$, $f \in L'$ ve $a \in A$ için

$$A \times L' \rightarrow L'$$

$$(a, f) \rightarrow a \cdot f : a \cdot f(x) = f(a \cdot x) \quad (1.5)$$

5. Her $a \in A$, $f \in L'$, $\hat{f} \in L''$ için

$$L'' \times L' \rightarrow A'$$

$$(\hat{f}, f) \rightarrow \hat{f} \cdot f : \psi_{\hat{f}, f}(a) = \hat{f}(a \cdot x) \quad (1.6)$$

bu dönüşümlerden yararlanarak Banach f -modülünün merkeziyle bir A birimli Banach f -cebirinin ikinci sıra duali A'' , arasındaki ilişkiler incelenecektir.

RİESZ UZAYLARINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak Riesz uzayındaki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Giriş

Tanım 2.1 [18]

- i. Tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için

$$|x_n| \leq \alpha$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı varsa, $\{x_n\}$, dizisine **sınırlı dizi** denir.

Tüm sınırlı dizilerin kümesi ℓ_∞ ile gösterilmiştir.

$$\ell_\infty = \{x = \{x_n\} : \sup_n |x_n| < \infty\}.$$

- ii. Bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N$ için

$$|x_n - l| < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilirse, $\{x_n\}$ dizisine **yakınsak dizi** ve

limiti l dir denir. Bütün yakınsak dizilerin kümesi c ile gösterilmiştir.

$$C = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l, l \in \mathbb{R}\}.$$

iii. Bir $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ise, bu diziye **sıfır dizi** denir.

Bütün sıfır dizilerinin kümesi c_0 ile gösterilmiştir.

$$c_0 = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}.$$

Tüm dizilerin kümesi ise s ile gösterilmiştir.

2.2 Vektör Uzayı

Tanım 2.2 [18] K bir küme ve K üzerinde toplama (+) ve çarpma (·) işlemleri tanımlayalım. K kümesinin elemanlarını $x, y, z, \dots$ ile gösteriyoruz.

1. Her $x, y \in K$ için $x + y \in K$ ve $xy \in K$ dir. (K nın toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalılık özelliği)
2. Her $x, y \in K$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (Birleşme özelliği)
3. K içerisindeki bir tek sıfır elemanı bulunabilir ki her $x \in K$ için $x + \theta = \theta + x = x$ dir. (θ , K nın birimi)
4. Her $x, y \in K$ için bir tek $-x \in K$ bulunabilir ki $x + (-x) = \theta$ dir.
5. Her $x, y \in K$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme özelliği)
6. Her $x, y \in K$ için $xy = yx$ dir. (Değişme özelliği)
7. Her $x, y, z \in K$ için $x(yz) = (xy)z$ dir. (Birleşme özelliği)
8. Her $x \in K$ için $x \cdot 1 = x$ eşitliğini sağlayan K nın bir tek $0 \neq 1$ (bir) elemanı vardır.
9. Her $0 \neq x \in K$ ya karşılık $xx^{-1} = 1$ eşitliğini sağlayan K içinde bir tek x^{-1} elemanı vardır.

10. Her $x, y, z \in \mathbb{K}$ için $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$ dir. (Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

Bu aksiyomları sağlayan $\mathbb{K}$ kümesine bir **cisim** denir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi yukarıdaki aksiyomları sağladığından birer cisimdir.

Tanım 2.3 [18] E boş olmayan bir küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde $x, y \in E$ için

$$(x, y) \mapsto x + y$$

ve $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

(toplama ve çarpma) fonksiyonları varsa, E ye $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı** ya da **lineer uzay** denir. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alınırsa E ye bir **reel vektör uzayı** ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alınırsa

E ye **kompleks vektör uzayı** denir.

(T1) Her $x, y \in E$ elemanları için

$$x + y = y + x. \quad (\text{Toplamada değişme özelliği})$$

(T2) Her $x, y, z \in E$ elemanları için

$$x + (y + z) = (x + y) + z. \quad (\text{Toplamada birleşme özelliği})$$

(T3) Her $x \in E$ elemanı için

$$x + \theta_E = x = \theta_E + x$$

olacak şekilde bir $\theta_E \in E$ elemanı vardır. (Burada (θ_E) lineer uzayın sıfır elemandır)

(T4) Her $x \in E$ elemanı için

$$x + (-x) = \theta_E = (-x) + x$$

olacak şekilde bir $-x \in E$ elemanı vardır. ($-x$ toplamada ters elemandır)

(Ç1) Her $x \in E$ elemanı için

$$xe = x = ex$$

olacak şekilde bir $e \in E$ elemanı vardır. (e çarpmada birim ya da etkisiz elemandır)

(Ç2) Her $x, y \in E$ elemanları ve $\alpha \in \mathbb{K}$ skaleri için

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

(Ç3) Her $x \in E$ elemanı ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ skalerleri için

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

(Ç4) Her $x \in E$ elemanı ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ skalerleri için

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Örnek 2.4 Reel sayılar kümesi ve kompleks sayılar kümesi bildiğimiz toplama ve çarpma işlemine göre **vektör uzaylarıdır**.

Örnek 2.5 [18] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cismi ve X boş olmayan bir küme olsun.

X kümesinden $\mathbb{K}$ kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi E olsun, yani,

$$E = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\} \text{ dir.}$$

(T) $f, g \in E$ fonksiyonları ve $x \in X$ elemanı için $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ toplamı,

(Ç) $\alpha \in \mathbb{K}$ skaleri ve $f \in E$ fonksiyonu için $(\alpha f)x = \alpha f(x)$ çarpımı tanımlansın.

Bu tanımlar ile E bir **vektör uzayıdır** çünkü:

1. Her $x \in X$ ve $f, g \in E$ için

$$[f + (g + h)](x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = [f(x) + g(x)] + h(x)$$

olduğundan $f + (g + h) = (f + g) + h$ olur.

2. Her $f, g \in E$ ve $x \in X$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x) \text{ den } f + g = g + f \text{ dir.}$$

3. Her $x \in X$ için $0(x) = 0$ olduğundan sıfır fonksiyonu (0) , E nin sıfırıdır.

4. Her $f \in E$ için $-f \in E$ fonksiyonu $(-f)(x) = -f(x)$ eşitliğini sağlar.

5. Her $f \in E$ için $(1 \cdot f)(x) = 1f(x) = f(x)$, $1f = f$ özelliği sağlanır.

6. $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f \in E$ ve $x \in X$ için

$$[(\alpha\beta)f](x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha(\beta f)(x) \text{ olduğundan} \\ (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f) \text{ dir.}$$

7. $f, g \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $x \in X$ için

$$[\alpha(f+g)](x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x) \\ \text{olduğundan } \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g \text{ dir.}$$

8. $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f \in E$ ve $x \in X$ için

$$[(\alpha+\beta)f](x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x) \\ (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f \text{ dir.}$$

Örnek 2.6 [18] X boş olmayan bir küme ve X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların kümesi $B(X)$ olsun.

(T) $f, g \in B(X)$ fonksiyonları ve her $x \in X$ elemanı için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(Ç) $\alpha \in \mathbb{K}$ skaleri ve $f \in B(X)$ fonksiyonu için

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

tanımları ile $B(X)$ bir **vektör uzayıdır**.

Örnek 2.7 [18] Bütün dizilerin s uzayı $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ skaleri için

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} \quad \text{ve} \quad \alpha\{x_n\} = \{\alpha x_n\}$$

işlemleri ile bir lineer uzaydır.

Tanım 2.8 [18] E bir vektör uzayı ve F , E nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

Eğer F kümesi

1. Her $x, y \in F$ için $x + y \in F$,
2. Her $x \in F, \alpha \in \mathbb{K}$ için $\alpha x \in F$

özelliklerini sağlıyorsa, F kümesi (aynı cisim üzerinde) bir vektör uzayıdır ve F ye E nin **vektör alt uzayı** ya da **lineer alt uzayı** adı verilir.

Örnek 2.9 $c_0 = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ ve $c = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l, l \in \mathbb{R}\}$ uzayları,

(örnek 2.7) de verilen cebirsel işlemlerle, bütün dizilerin uzayı s nin birer lineer alt uzaylarıdır.

2.3 Sıralama

Tanım 2.10 [19]

i. Bir E boştan farklı kümesi $\preceq$ sıralamasına göre, her $x, y, z \in E$ için

1. $x \preceq x$ (yansıma),
2. $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ iken $x = y$ (ters simetri),
3. $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ iken $x \preceq z$ (geçişme)

aksiyomlarını sağlıyorsa E ye **sıralı küme** denir.

ii. Herhangi $x, y \in E$ için ya $x \preceq y$ ya da $y \preceq x$ oluyorsa E ye **tam sıralı küme** denir.

Tanım 2.11 [19] A, E sıralı kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

- i. Her $x \in A$ için $x \preceq a$ olacak şekilde bir $a \in E$ varsa a ya A kümesinin bir **üst sınırı** denir. Eğer A kümesinin bir üst sınırı varsa A kümesine **üstten sınırlı küme** denir.
- ii. Eğer a, A kümesinin bir üst sınırı ve A kümesinin her z üst sınırı için $a \preceq z$ oluyorsa, a ya A kümesinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir.
 $\sup(A) = a$ şeklinde ifade edilir.

- iii. Her $x \in A$ için $b \preceq x$ olacak şekilde bir $b \in E$ varsa b ye A kümesinin bir **alt sınırı** denir. Eğer A kümesinin bir alt sınırı varsa A kümesine **alttan sınırlı küme** denir.
- iv. Eğer b , A kümesinin bir alt sınırı ve A kümesinin her u alt sınırı için $u \preceq b$ oluyorsa, b ye A kümesinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir. $\inf(A) = b$ şeklinde ifade edilir.
- v. A kümesi hem alttan hem de üstten sınırlı bir küme ise A kümesine **sınırlı küme** denir.
- vi. A bir sıralı küme ve $x \preceq y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. $[x, y] = \{z \in A : x \preceq z \preceq y\}$ kümesine x ve y arasında **sıralı aralık** denir.

Tanım 2.12 [19]

- i. Bir $(E, \preceq)$ sıralı kümesinde herhangi iki $x, y \in E$ için en küçük üst sınır $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve en büyük alt sınır $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ varsa $(E, \preceq)$ sıralı kümesine bir **örgü (latis)** denir.
- ii. Bir örgüde her sonlu alt kümenin supremumu ve infimumu vardır. Sonlu bir alt kümenin elemanları $x_1, x_2, \dots, x_n$ ise supremumu; $\sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ veya $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ veya $\bigvee_{i=1}^n x_i$, infimumu; $\inf\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ veya $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ veya $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ şeklinde gösterilir.

2.4 Sıralı Vektör Uzayı

Tanım 2.13 [19-21] Bir E reel vektör uzayı sıralama aksiyomları (yansıma, ters simetrik, geçişme) ile donatılıyor ve cebirsel yapısıyla uyumlu bir şekilde:

1. Her $x, y, z \in E$ için $x \preceq y \Rightarrow x + z \preceq y + z$,
2. Her $\alpha \geq 0$ ve $x, y \in E$ için $x \preceq y \Rightarrow \alpha x \preceq \alpha y$

aksiyomlarını sağlıyorsa E ye **sıralı vektör uzayı** denir.

2.5 Riesz Uzayı

Tanım 2.14 [21] Bir E sıralı vektör uzayında her $x, y \in E$ vektörleri için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu E de ise E sıralı vektör uzayına **Riesz uzayı** ya da **vektör örgüsü (vektör lattice)** denir.

Örnek 2.15 [20] R^n ($n \geq 1$) için $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ şeklindeki n -değerli reel sayıların toplama ve çarpma aksiyomlarıyla reel lineer uzay olsun.

Eğer $f \leq g$ ve $1 \leq k \leq n$ için $f_k \leq g_k$ şeklinde tanımlanırsa, R^n üzerinde tanımlanan kısmi sıralamaya göre bir Riesz uzayıdır.

Örnek 2.16 R^2 lineer sıralamaya göre bir Riesz uzayıdır.

$f = (f_1, f_2)$ ve $g = (g_1, g_2)$ için $f \leq g$ sıralaması:

$f_1 < g_1$ veya $f_1 = g_1$ için $f_2 \leq g_2$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.17 [19] Bir K Kompakt Hausdorff uzayı için $C(K)$, K üzerinde reel değerli sürekli tüm fonksiyonların reel lineer uzayı olsun.

Her $x \in K$ için $f \preceq g \Leftrightarrow f(x) \preceq g(x)$ sıralamasına göre $C(K)$ bir Riesz uzayıdır.

Tanım 2.18 [21]

i. Bir E Riesz uzayında x vektörü $x \succeq 0$ ı sağlıyorsa x vektörüne **pozitif vektör** denir.

ii. Tüm pozitif vektörlerin kümesi $E_+ = \{x \in E : x \succeq 0\}$ şeklinde gösterilir.

Pozitif vektörlerin E_+ kümesine E nin **pozitif konisi** denir.

iii. Bir E Riesz uzayında her $x \in E$ için

$x^+ = x \vee 0$ vektörüne x in **pozitif kısmı**

$x^- = (-x) \vee 0$ vektörüne x in **negatif kısmı** ve

$|x| = x \vee (-x)$ vektörüne x in **modülü** veya **mutlak değeri** denir.

iv. Bir E Riesz uzayında bir $x \in E$ vektörü

a) $x = x^+ - x^-$

b) $|x| = x^+ + x^-$

c) $x^+ \wedge x^- = 0$

özelliklerini sağlar.

2.5.1 Riesz Uzaylarında Vektör Alt örgüsü, İdeal, Band Kavramları

Tanım 2.19 [20] E bir Riesz uzayı ve V , E nin lineer alt uzayı olsun.

Her $x, y \in V$ için $x \vee y$ ve $x \wedge y$ V de kapsanıyorsa,

V ye **Riesz lineer alt uzay** ya da **Vektör alt latis (alt örgü)** denir.

Örnek 2.20 [22] $\ell_\infty = \{x = \{x_n\} : \sup_n |x_n| < \infty\}$ sınırlı dizi uzayının

$$c_0 = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\} \text{ ve } c = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l, l \in \mathbb{R}\}$$

uzayları noktasal sıralamaya göre **Riesz alt uzayları** ya da **vektör alt latisleri** dir.

Tanım 2.21 [19,21] Bir E Riesz uzayının S alt kümesi

$$y \in E, x \in S \text{ ve } |y| \preceq |x| \text{ olduğunda } y \in S$$

ise S ye **katı (solid)** denir.

Tanım 2.22 [19, 22, 23] Bir E vektör örgüsünün J lineer alt uzayı

$$y \in E, x \in J \text{ ve } |y| \preceq |x| \text{ olduğunda } y \in J$$

ise J lineer alt uzayına E nin **ideali** denir.

Her $x \in J$ için $|x|, x^+, x^-$ J idealinin elemanlarıdır.

Örnek 2.23 [22] $\ell_\infty = \{x = \{x_n\} : \sup_n |x_n| < \infty\}$ Riesz uzayında (Vektör örgüsü)

$c_0 = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ vektör uzayı bir idealdir.

Fakat $c = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l, l \in \mathbb{R}\}$ uzayı için

$|((-1)^n)| \leq (1) \in c$ iken $((-1)^n) \notin c$ olduğundan c, ℓ_∞ vektör örgüsünde ideal değildir.

Örnek 2.24 [20] s tüm dizilerin uzayında,

a) ℓ_∞ s de idealdir.

b) c, ℓ_∞ nun Riesz alt uzayıdır fakat ideali değildir.

c) c_0 uzayı c ve ℓ_∞ nun idealidir.

Tanım 2.25 [19,21] Bir E Riesz uzayında bir B idealinin her alt kümesinin E deki supremumu B nin elemanı ise B idealine **band** denir.

Yani, bir $D \subseteq B$ kümesi için $\sup D = f$ iken $f \in B$ ise B idealine **band** denir.

Önerme 2.26 [21] Bir A idealinin band olması için gerek ve yeter koşul bir $\{x_\alpha\}$ neti için $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $0 \preceq \{x_\alpha\} \uparrow x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

Örnek 2.27 [22] s tüm reel dizilerin Riesz uzayı olmak üzere s Riesz uzayının tüm $f = (f(1), f(2), \dots)$ içeren ve $f(1) = 0$ sağlayan bir alt kümesi s Riesz uzayında bir banddır.

Tanım 2.28 [21]

i. Bir E Riesz uzayında her $x, y \in E$ için

$$|x| \wedge |y| = 0$$

ise x ile y **ayrıktır** denir. $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

ii. A ve B bir E Riesz uzayının iki alt kümesi olmak üzere her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ oluyorsa A ve B **kümesi ayrıktır** denir. $A \perp B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.29 [21] Bir E Riesz uzayının boştan farklı bir A alt kümesi için

A nın **ayrık tümleyeni**, A^d ,

$$A^d = \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$$

şeklinde ifade edilir. $A \cap A^d = \{0\}$ ' dir.

Not 2.30 [21] Bir Riesz uzayının keyfi bir boştan farklı alt kümesinin ayrık tümleyeni idealdir.

Tanım 2.31 [21]

i. Bir E Riesz uzayında $\{x_\alpha\}$ ağı $\alpha \geq \beta$ iken $x_\alpha \preceq x_\beta$ eşitsizliğini sağlıyorsa

$\{x_\alpha\}$ neti **azalandır** denir. $x_\alpha \downarrow$ şeklinde gösterilir.

ii. Bir E Riesz uzayında $\{x_\alpha\}$ ağı $\alpha \leq \beta$ iken $x_\alpha \preceq x_\beta$ eşitsizliğini sağlıyorsa

$\{x_\alpha\}$ neti **artandır** denir. $x_\alpha \uparrow$ şeklinde gösterilir.

iii. $x_\alpha \uparrow$ ve $\sup\{x_\alpha\} = x$ olması $x_\alpha \uparrow x$ şeklinde gösterilir.

iv. Bir E Riesz uzayının bir A alt kümesinde her $x, y \in A$ için

$x \preceq z$ ve $y \preceq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A ya **yukarı yönlenmiş küme** denir. $A \uparrow$ şeklinde ifade edilir.

v. $A \uparrow x$ ifadesi A yukarı yönlenmiş bir küme ve $\sup A = x$ demektir.

vi. Bir E Riesz uzayının bir A alt kümesinde her $x, y \in A$ için

$x \succeq z$ ve $y \succeq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A ya **aşağı yönlenmiş küme** denir. $A \downarrow$ şeklinde ifade edilir.

vii. $A \downarrow x$ ifadesi A aşağı yönlenmiş bir küme ve $\inf A = x$ demektir.

Tanım 2.32 [21]

i. Bir E Riesz uzayının bir D Riesz alt uzayında

her $0 \prec x \in E$ ($0 \preceq x$ ve $x \neq 0$) için

$$0 \prec y \preceq x$$

olacak şekilde bir $y \in D$ varsa D Riesz alt uzayı E de **sıra yoğundur** denir.

ii. $\{x_\alpha\}$ Riesz uzayında bir net (ağ) olsun.

Aynı indekse sahip başka bir $\{y_\alpha\}$ neti (ağı)

$$|x_\alpha - x| \preceq y_\alpha \downarrow 0$$

sağlıyorsa $\{x_\alpha\}$ neti x e **sıra yakınsıyor** denir ve $x_\alpha \xrightarrow{\circ} x$ şeklinde gösterilir.

iii. Bir E Riesz uzayının bir A alt kümesinde

$$\{x_\alpha\} \subseteq A \text{ ve } x_\alpha \xrightarrow{\circ} x$$

olduğunda $x \in A$ ise A alt kümesine **sıra kapalı** denir.

Önerme 2.33 [21] Bir E Riesz uzayının bir A katı alt kümesinin **sıra kapalı** olması için gerek ve yeter koşul $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $0 \preceq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.34 [19] Bir E Riesz uzayında her $x \in E_+$ için

$$\frac{1}{n}x \downarrow 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

ise E ye **Arşimed Riesz uzayı** denir.

2.5.2 Riesz Uzaylarında Dedekind Tamlık Aksiyomu

Tanım 2.35 [20]

- i. Bir Riesz uzayının her boştan farklı üstten sınırlı alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa ya da her boştan farklı alttan sınırlı alt kümesinin en büyük alt sınırı varsa bu Riesz uzayına **Dedekind Tam Riesz Uzayı** denir.
- ii. Bir Riesz uzayının her boştan farklı üstten sınırlı sayılabilir alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa bu Riesz uzayına **Dedekind σ -Tam Riesz Uzayı** denir.

Önerme 2.36 [20]

- i. Bir E Riesz uzayı için aşağıdaki tanımlamalar denktir:

1. E bir Dedekind Tam Riesz uzayıdır.
 2. E de $0 \preceq u_\tau \uparrow \preceq u$ sağlayan $(u_\tau : \tau \in \{I\}, I \text{ indeks kümesi})$ yukarı yönlenmiş kümesi için $u_\tau \uparrow u_0$ olacak şekilde $u_0 \in E$ elemanı vardır.
 3. E de $0 \preceq u_\tau \downarrow$ sağlayan $(u_\tau : \tau \in \{I\}, I \text{ indeks kümesi})$ aşağı yönlenmiş kümesi için $u_\tau \downarrow u_0$ olacak şekilde bir $u_0 \in E$ elemanı vardır.
- ii. Bir E Riesz uzayı için aşağıdaki tanımlamalar denktir:
1. E bir Dedekind σ -Tam Riesz uzayıdır.
 2. E de $0 \preceq u_n \uparrow \preceq u$ sağlayan $(u_n : n=1,2,3,\dots)$ artan dizisi için $u_n \uparrow u_0$ olacak şekilde $u_0 \in E$ elemanı vardır.
 3. E de $0 \preceq u_n \downarrow$ sağlayan $(u_n : n=1,2,3,\dots)$ azalan dizisi için $u_n \downarrow u_0$ olacak şekilde $u_0 \in E$ elemanı vardır.

Önerme 2.37 [21]

- i. Bir E Riesz uzayının Dedekind Tam olması için gerek ve yeter şart $0 \preceq x_\alpha \uparrow \preceq x$ iken $\sup\{x_\alpha\}$ nin var olmasıdır.
- ii. Bir E Riesz uzayının Dedekind σ -Tam olması için gerek ve yeter koşul $0 \preceq x_n \uparrow \preceq x$ iken $\sup\{x_n\}$ nin var olmasıdır.

Örnek 2.38 [20]

- i. $c_0 = \{x = \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ uzayı noktasal sıralamayla bir Dedekind Tam Riesz uzayıdır.
- ii. n -boyutlu reel sayıların uzayı R^n Dedekind Tam Riesz uzayıdır.

Tanım 2.39 [21]

- i. A bir E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun.
O halde A ile üretilen ideal, E_A ,

$$E_A = \{x \in E : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}_+, |x| \preceq \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|\}$$

şeklinde ifade edilir.

ii. Özel olarak, bir $x \in E$ ile üretilen ideal

$$E_x = \{y \in E : \exists \lambda > 0, |y| \preceq \lambda |x|\}$$

olarak tanımlanır.

E_x şeklinde bir ideal **temel ideal** olarak adlandırılır.

iii. Bir E Riesz uzayında bir A ideali ile üretilen band

$$B_A = \{x \in E : \exists \{x_\alpha\} \subseteq A, 0 \preceq x_\alpha \uparrow |x|\}$$

şeklinde bir vektör alt uzayıdır.

iv. Bir $x \in E$ vektörüyle üretilen band

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

olarak tanımlanır.

B_x şeklindeki her band **temel band** olarak adlandırılır.

2.6 Pozitif Lineer Operatörler

Tanım 2.40 [18]

i. E ve F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) aynı skaler cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olsun.

$$T : E \rightarrow F$$

dönüşümü her $x, y \in E$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalerleri için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa T dönüşümüne bir **lineer operatör** denir.

ii. Bir T operatörü her $0 \preceq x$ için $0 \preceq Tx$ oluyorsa T lineer operatörüne

pozitif operatör denir.

Not 2.41 Çalışmamızda kullandığımız operatörler lineer operatörlerdir.

Tanım 2.42 [20]

i. Bir V vektör uzayında $P:V \rightarrow V$ operatörü $P^2 = P$ özelliğini sağlıyorsa P operatörüne bir **projeksiyon (izdüşüm)** denir.

ii. Bir E Riesz uzayında $E = B \oplus B^d$ yi sağlayan bir B bandına **projeksiyon bandı (izdüşüm bandı)** denir.

iii. Bir E Riesz uzayında B bir projeksiyon band olduğunda

E Riesz uzayı, $E = B \oplus B^d$ şeklinde ifade edilir.

Her $x \in E$ vektörü $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ için

$$x = x_1 + x_2$$

şeklinde tek gösterime sahiptir.

iv. $P_B : E \rightarrow E$ projeksiyonu $P_B(x) = x_1$ formülüyle ifade edilir.

P_B şeklinde bir projeksiyona **sıra projeksiyonu** ya da **band projeksiyonu** denir.

v. Eğer bir Riesz uzayında her band bir projeksiyon bandı ise bu uzay **projeksiyon özelliğine sahiptir** denir.

vi. Eğer bir Riesz uzayında her temel band bir projeksiyon bandı ise bu uzay **temel projeksiyon özelliğine sahiptir** denir.

vii. Dedekind Tam Riesz uzayı temel projeksiyon özelliğine sahiptir.

viii. Dedekind σ -Tamlık özelliği ile projeksiyon özelliği birbirinden bağımsızdır ancak Dedekind σ -Tamlık, projeksiyon özelliği ile temel projeksiyon özelliğine sahiptir.

ix. Bir E Riesz uzayında $T : E \rightarrow E$ operatörü için

I, E üzerinde birim operatör olmak üzere $0 \preceq T \preceq I$ özelliğini sağlıyorsa

T operatörüne **sıra projeksiyon** denir.

x. Bir E Riesz uzayında x ile üretilen B_x temel bandı bir projeksiyon bandı ise

x e bir **projeksiyon vektörü (izdüşüm vektörü)** denir.

xi. Bir x projeksiyon vektörü için B_x bandı üzerindeki sıra projeksiyonu P_x ile ifade edilir.

Önerme 2.43 [21] Dedekind σ -Tam Riesz uzayında her temel band bir projeksiyon bandıdır.

Tanım 2.44 [21]

i. Bir E Riesz uzayında bir $e \succ 0$ vektörü için e ile üretilen band

$B_e = E$ yi sağlıyorsa veya her $x \in E_+$ için $x \wedge ne \uparrow x$ oluyorsa

$e \succ 0$ vektörüne **zayıf sıra birim** denir.

ii. Her $0 \prec x \in E$ vektörü onunla üretilen bandda zayıf sıra birimdir.

iii. Bir $e \succ 0$ vektörü Arşimed Riesz uzayında **zayıf sıra birim** olması için gerek ve yeter koşul $x \perp e$ iken $x = 0$ olmasıdır.

iv. Bir E Riesz uzayında $E_e = E$ olacak şekilde bir $e \in E$ varsa

e ye **güçlü sıra birim** ya da sadece **sıra birim** denir.

Örnek 2.45 [21] Bir K kompakt Hausdorff uzayı için 1_K , K üzerinde sabit bir fonksiyonu olsun. 1_K , reel değerli sürekli tüm fonksiyonların uzayı olan $C(K)$ uzayı için bir sıra birimdir.

Tanım 2.46 [21] E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ operatörü

E nin sıra sınırlı alt kümelerini F nin sıra sınırlı alt kümelerine yönlendiriyorsa

T ye **sıra sınırlı operatör** denir.

E den F ye tüm sıra sınırlı lineer operatörler $L_b(E, F)$ ve

E den E ye tüm sıra sınırlı lineer operatörler $L_b(E)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.47 [21] E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

- i. Eğer E de $x_\alpha \xrightarrow{\circ} 0$ iken F de $Tx_\alpha \xrightarrow{\circ} 0$ oluyorsa T ye **sıra sürekli operatör** denir.
- ii. Eğer E de $x_n \xrightarrow{\circ} 0$ iken F de $Tx_n \xrightarrow{\circ} 0$ oluyorsa T ye **σ -sıra sürekli operatör** denir.

Önerme 2.48 [21] E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere

$T : E \rightarrow F$ bir pozitif operatörün sıra sürekli olması için gerek ve yeter koşul

E de $x_\alpha \downarrow 0$ iken F de $Tx_\alpha \downarrow 0$ olmasıdır.

Ya da E de $0 \preceq x_\alpha \uparrow x$ iken F de $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olmasıdır.

Önerme 2.49 [21] Sıra sürekli bir lineer operatör sıra sınırlıdır.

Teorem 2.50 [21] F bir Dedekind Tam Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı bir operatör olsun. Aşağıdaki iddialar denktir:

1. T sıra sürekli bir operatördür.
2. Eğer E de $x_\alpha \downarrow 0$ ise F de $Tx_\alpha \xrightarrow{\circ} 0$ dır.
3. Eğer E de $x_\alpha \downarrow 0$ ise F de $\inf\{Tx_\alpha\} = 0$ dır.
4. T^+ ve T^- sıra sürekli operatörlerdir.
5. $|T|$ sıra sürekli operatördür.

2.7 Riesz Homomorfizması ve Özellikleri

Tanım 2.51 [21,24]

- i. E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ operatörü $x, y \in E$ için

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$

oluyorsa T ye bir **örgü homomorfizması** ya da **Riesz homomorfizması** denir.

ii. Her $T : E \rightarrow F$ Riesz homomorfizması pozitifdir.

Her $x \in E_+$ için F de $T(x) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = [T(x)]^+ \succeq 0$ dir.

Teorem 2.52 [21] E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. T bir örgü homomorfizmasıdır.
- ii. Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$ dir.
- iii. Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ dir.
- iv. E de $x \wedge y = 0$ ise F de $T(x) \wedge T(y) = 0$ dir.
- v. Her $x \in E$ için $T(|x|) = |T(x)|$ dir.

İspat : [21]

i $\Rightarrow$ ii: T bir örgü homomorfizması ise her $x \in E$ için

$$T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = T(x) \vee 0 = T(x^+) = (Tx)^+ \text{ dir.}$$

ii $\Rightarrow$ iii: $T(x \wedge y) = T(x - (x - y)^+) = T(x) - T(x - y)^+ = T(x) - (Tx - Ty)^+ = Tx \wedge Ty$.

iii $\Rightarrow$ iv: Eğer $x \wedge y = 0$ ise $T(x) \wedge T(y) = T(x \wedge y) = T(0) = 0$ dir.

iv $\Rightarrow$ v: $x^+ \wedge x^- = 0$ alınarak:

$$|T(x)| = |T(x^+) - T(x^-)| = T(x^+) \vee T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-)$$

$$|T(x)| = T(x^+) \vee T(x^-) = T(x^+) + T(x^-) = T(x^+ + x^-) = T(|x|) \text{ bulunur.}$$

$$\text{v} \Rightarrow \text{i: } T(x \vee y) = T\left(\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)\right) = \frac{1}{2}[T(x) + T(y) + T|x - y|]$$

$$= \frac{1}{2}[T(x) + T(y) + |T(x) - T(y)|] = T(x) \vee T(y) \text{ bulunur.}$$

Örnek 2.53 [21] Her sıra projeksiyonu sıra sürekli örgü homomorfizmasıdır.

Tanım 2.54 [21] Birebir olan örgü (latis) homomorfizmasına **Riesz** ya da **Örgü izomorfizması** denir. İki Riesz uzayı izomorfik ise Riesz uzayı bakımından aynı düşünülebilir.

2.8 Lineer fonksiyoneller

Tanım 2.55 [19]

i. E bir vektör uzayı ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların cismi olsun.

$f : E \rightarrow \mathbb{K}$ lineer operatörüne **lineer fonksiyonel** denir.

ii. E bir sıralı vektör uzayı olsun.

Bir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli her $x \in E_+$ için $f(x) \succeq 0$ oluyorsa

f ye **pozitif lineer fonksiyonel** denir.

iii. f lineer fonksiyoneli E nin sıra sınırlı alt kümelerini $\mathbb{R}$ nin sıra sınırlı alt kümelerine götürüyorsa f ye **sıra sınırlı lineer fonksiyonel** denir.

iv. E üzerindeki tüm sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayı $E^\sim$ ile gösterilir ve buna E nin **sıra duali** denir. $E^\sim = L_b(E, \mathbb{R})$ ile ifade edilir.

v. $\mathbb{R}$ bir Dedekind Tam Riesz uzayı olduğundan $E^\sim$ bir Dedekind Tam Riesz uzayıdır.

vi. $f, g \in E^\sim$ için $f \succeq g$ ise her $x \in E_+$ için $f(x) \succeq g(x)$ dir.

Özellik 2.56 [19] E bir Riesz uzayı ve $E^\sim, E$ nin sıra duali olmak üzere $f, g \in E^\sim$ olsun. Bir $x \in E_+$ için

$$1. \quad f^+(x) = \sup\{f(y) : 0 \preceq y \preceq x\}$$

$$2. \quad f^-(x) = \sup\{-f(y) : 0 \preceq y \preceq x\}$$

$$3. \quad |f|(x) = \sup\{|f(y)| : |y| \preceq x\}$$

$$4. \quad [f \vee g](x) = \sup\{f(y) + g(z) : y, z \in E_+, y + z = x\}$$

$$5. [f \wedge g](x) = \inf\{f(y) + g(z) : y, z \in E_+, y + z = x\}$$

ifadeleri sağlanır.

Tanım 2.57 [19,20] E bir Riesz uzayı (vektör örgüsü) olsun.

Her $x \neq 0$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in E^\sim$ varsa

$E^\sim$ ne E nin **noktalarını ayırıştırır** denir. $^\circ(E^\sim) = \{0\}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.58 [19] $E^\sim, E$ nin noktalarını ayırıştırması için gerek ve yeter koşul her $0 \prec x \in E$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $0 \prec f \in E^\sim$ bulunmasıdır.

Teorem 2.59 [19] Eğer $E^\sim, E$ nin noktalarını ayırıştırıyor ise her $x \in E$ vektörünün $x \succeq 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \preceq f \in E^\sim$ için $f(x) \succeq 0$ olmasıdır.

Önerme 2.60 [19]

- i. Bir E Riesz uzayı üzerindeki pozitif lineer fonksiyonelin sıra sürekli olması için gerek ve yeter koşul E de $x_\alpha \downarrow 0$ iken $f(x_\alpha) \downarrow 0$ olmasıdır.
- ii. Bir pozitif lineer fonksiyonelin σ -sıra sürekli olması için gerek ve yeter koşul $x_n \downarrow 0$ olacak şekilde her $\{x_n\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ de $f(x_n) \downarrow 0$ olmasıdır.

Tanım 2.61 [19] Tüm sıra sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı

$L_n(E, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilirken E üzerindeki tüm sıra sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı $E_n^\sim$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.62 [19,20] Eğer E bir Riesz uzayı ise $E^\sim$ de bir Riesz uzayıdır.

Bu teoremden $E^\sim$ tüm sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin Riesz uzayıdır.

E nin ikinci sıra duali $E^{\sim\sim}, E^\sim$ nin dualidir.

Yani, $(E^\sim)^\sim = E^{\sim\sim}$ dir.

Tanım 2.63 [19] Bir E Riesz uzayında her $x \in E$ için $E^\sim$ üzerinde $\hat{x}$ sıra sınırlı lineer fonksiyoneli $f \in E^\sim$ için

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.64 [19] $E^\sim$ de $f_\alpha \downarrow 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in E_+$ için $\hat{x}(f_\alpha) = f_\alpha(x) \downarrow 0$ olmasıdır.

Yani, her $x \in E$ için $E^\sim$ de sıra sürekli bir lineer fonksiyonel tanımlanabilir.

Tanım 2.65 [20] E bir Riesz uzayı olmak üzere

$$J : x \rightarrow \hat{x}$$

E den $E^{\sim\sim}$ e bir pozitif operatörü

$$J(x) = \hat{x}$$

olarak tanımlanabilir. Bu $x \rightarrow \hat{x}$ operatörüne E den $E^{\sim\sim}$ e bir **kanonik gömme** denir.

Teorem 2.66 [19] Eğer $E^\sim$ E nin noktalarını ayırıştırıyorsa $x \rightarrow \hat{x}$ kanonik gömmesi birebirdir. Bu nedenle E nin kanonik görüntüsü $E^{\sim\sim}$ içinde tanımlanabilir ve aynı zamanda $E^{\sim\sim}$ nin bir Riesz alt uzayı olarak düşünülebilir.

Önerme 2.67 [19] E bir Riesz uzayı olmak üzere $x \rightarrow \hat{x}$ kanonik gömmesi sonlu infimumu ve supremumu korur.

İspat: [19] $x \in E$ ve $0 \preceq f \in E^\sim$ olsun.

$$(\hat{x})^+(f) = \sup\{\hat{x}(g) : g \in E^\sim, 0 \preceq g \preceq f\}$$

$$= \sup\{g(x) : g \in E^\sim, 0 \preceq g \preceq f\} = f(x^+) = (\hat{x}^+)(f), \text{ yani,}$$

$$\hat{x}^+ = (\hat{x})^+ \text{ dır.}$$

Tanım 2.68 [21] E üzerindeki tüm lineer fonksiyonellerin vektör uzayı E^* , E nin cebirsel dualidir.

i. E, F iki vektör uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ operatörünün cebirsel eşleniği

veya transpozesi $T^* : F^\sim \rightarrow E^\sim$ her $f \in F^\sim$ ve $x \in E$ için

$$[T^* f](x) = f(Tx)$$

şeklinde tanımlanır. Dual gösterimi

$$\langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$$

olarak da yazılabilir.

ii. Eğer $S : F \rightarrow E$ bir diğer operatör ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$(S+T)^* = S^* + T^* \text{ ve } (\alpha T)^* = \alpha T^* \text{ dır.}$$

iii. $T : E \rightarrow F$ iki sıralı vektör uzayı arasında sıra sınırlı bir operatör ise

$$T^* : F^\sim \rightarrow E^\sim \text{ dir.}$$

iv. Eğer A, E nin bir sıra sınırlı alt kümesi ve $f \in F^\sim$ ise

$$[T^* f](A) = f(T(A)) \text{ olduğundan } [T^* f](A), \mathbb{R} \text{ nin sınırlı alt kümesidir.}$$

$$\text{Böylece } T^* f \in E^\sim \text{ dir.}$$

v. T^* ın $F^\sim$ e kısıtlamasına T nin **sıra eşleniği** denir ve T' şeklinde gösterilir.

Her $f \in F^\sim$ ve $x \in E$ için $T' : F^\sim \rightarrow E^\sim$ operatörü

$$\langle T' f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle \text{ sağlar.}$$

vi. T pozitif ise T' de pozitiftir ve $|T'| \preceq |T|$ dir.

$$T \preceq |T|, -T \preceq |T| \text{ den } T' \preceq |T'|, -T' \preceq |T'| \text{ böylece } |T'| = (T') \vee (-T') \preceq |T| \text{ dir.}$$

vii. Eğer T operatörü sıra sınırlı $T \in L_b(E, F)$ ise $T', T' \in L_b(F^\sim, E^\sim)$ sıra sınırlıdır.

viii. Eğer T operatörü sıra sınırlı $T \in L_b(E, F)$ ise $T', T' \in L_n(F^\sim, E^\sim)$ sıra süreklidir.

$D, F^\sim$ nin $D \downarrow 0$ olacak şekilde aşağı yönlenmiş bir alt kümesi olduğunda

E' de keyfi bir $x \in E_+$ için

$$\{(T' f)(x) : f \in D\} = \{f(Tx) : f \in D\} \downarrow 0 \text{ dir.}$$

2.9 Normlu Uzaylarda Lineer Operatörler

Tanım 2.69[16]

i. E bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$$

tanımlı dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa

E üzerinde bir **norm** adı verilir.

1. Her $x \in E$ için $\|x\| \geq 0$,
2. $x \in E$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. Her $x \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$, için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. Her $x, y \in E$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

Bu durumda $(E, \|\cdot\|)$ çiftine bir **normlu vektör uzayı** denir.

ii. Üzerinde norm tanımlanmış bir uzaya **normlu bir uzay** adı verilir.

Örnek 2.70 $E = \mathbb{R}$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $\|x\| = |x|$ tanımını ile $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm belirtir.

Örnek 2.71 [16] Yakınsak dizilerin uzayı c ve sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı c_0 aşağıdaki tanımlanan norma göre birer normlu uzaylardır. $x = (x_n) \in c$ (veya c_0) için

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

Tanım 2.72 [16] $(E, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ tanımlı fonksiyonuna E içinde bir **dizi** adı verilir. $(f(n)) = (x_n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.73 [16] $(E, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) , E içinde bir dizi olsun.

$\lim x_n = x \in E \Leftrightarrow$ Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ sağlanır. Bunu sağlayan bir diziye **yakınsak bir dizi** denir.

Tanım 2.74 [16]

- i. $(E, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) , E içinde bir dizi olsun.

Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunduğunda her $n, m \geq n_0$ için

$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine E içinde bir **Cauchy dizisi** denir.

- ii. Eğer E içinde her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak ise

E uzayına bir **Banach uzayı** veya **Tam uzay** denir.

Önerme 2.75 [16] Bir normlu E uzayının Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul $x_n \in E$ ve verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ki her $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır

Örnek 2.76 [16] $[0,1]$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli tüm fonksiyonların uzayı $C[0,1]$ uzayı $f \in C[0,1]$ için

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Örnek 2.77 [16] Sınırlı dizilerin uzayı ℓ_∞ üzerindeki supremum normuna göre bir Banach uzayıdır, yani, $x = (x_n) \in \ell_\infty$ için

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

Örnek 2.78 [16] Yakınsak dizilerin uzayı c ve sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı c_0 aşağıdaki tanımlanan norma göre birer Banach uzaylarıdır. $x = (x_n) \in c$ (veya c_0) için

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

Tanım 2.79 [16,25]

- i. E, F normlu uzaylar, $T : E \rightarrow F$ lineer bir operatör ve $x_0 \in E$ olsun.

Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda

$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ sayısı var ise T lineer operatörüne x_0 da

süreklidir denir.

ii. E, F normlu uzaylar ve $T : E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun.

Her $x \in E$ için $\|Tx\| \leq M \|x\|$ eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı varsa

T operatörüne **sınırlı operatör** denir.

Tanım 2.80 [16] E, F normlu uzaylar ve $T : E \rightarrow F$ sınırlı bir lineer bir operatör olsun. O zaman T nin operatör normu $\|T\|$ aşağıdaki birbirine denk eşitliklerle verilir.

i. $\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \}$

ii. $\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| = 1 \}$

iii. $\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0, x \in E \right\}$

iv. $\|T\| = \inf \{ M > 0 : \|Tx\| \leq M \|x\| \}$

Tanımından her $x \in E$ için $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.81 [16] E, F normlu uzaylar ve $T : E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun.

Aşağıdakiler denktir.

i. T, x_0 da süreklidir.

ii. T , her yerde süreklidir.

iii. T , sınırlıdır.

Tanım 2.82 [16] $(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayında tanımlı tüm sürekli lineer fonksiyonellerin uzayına E nin **topolojik duali** denir ve E' ile gösterilir.

2.9.1 Normlu Uzaylarda Lineer Operatörün Eşleniği

Tanım 2.83 [16] E, F normlu uzaylar ve $T : E \rightarrow F$ lineer sınırlı bir operatör olsun.

O zaman T **operatörünün eşleniği** T' , $g \in F'$ için

$$T' : F' \rightarrow E'$$

$$T'g = gT$$

şeklinde tanımlanır.

Özellik 2.84 [16]

- i. E, F normlu uzaylar ve $T: E \rightarrow F$ lineer sınırlı bir operatör olsun.

$g, h \in F'$ ve $x \in E$ için

$$T'(g+h)(x) = (g+h)(Tx) = g(Tx) + h(Tx) = (T'g + T'h)(x) \quad (2.1)$$

olduğundan T' toplamayı korur.

$\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in F'$ ve $x \in E$ için

$$T'(\alpha f)(x) = (\alpha f)(Tx) = \alpha f(Tx) = \alpha T'f(x) \quad (2.2)$$

olması T' nün çarpmayı koruduğunu gösterir.

Böylece (2.1) ve (2.2)' den T' lineer bir operatördür.

- ii. E, F normlu uzaylar ve $T: E \rightarrow F$ lineer sınırlı bir operatör olsun.

$g \in F'$ ve $x \in E$ için $|g(Tx)| \leq \|g\| \|Tx\|$ eşitsizliğinden $T'g \in E'$ olduğu görülür.

- iii. E, F, G normlu uzaylar ve $T \in L(E, F)$ ve $S \in L(F, G)$ olduğunda aşağıdaki

özellikler doğrudur.

1. $(ST)' = T'S'$,

2. $(T+S)' = T' + S'$,

3. $\alpha \in \mathbb{K}$ için $(\alpha T)' = \alpha T'$

- iv. T nin tersi var ve E, F Banach uzayları olsun.

O zaman $(T^{-1})^{-1} = T$ ve $(T^{-1})' = (T')^{-1}$ dır.

Önerme 2.85 [19] E bir normlu uzay ve E nin norm topolojiye göre duali

$E' = L(E, \mathbb{R})$ bir Banach uzayıdır.

$f, g \in E'$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $x \in E$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \text{ dır.}$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Tanım 2.86 E' Banach uzayının norm topolojiye göre ikinci duali olan $E'' = (E')'$ uzayına E uzayının **ikinci duali** denir.

Önerme 2.87 [19] E' Banach uzayının norm topolojiye göre ikinci duali olan E'' uzayı bir Banach uzayıdır.

Özellik 2.88 [16]

i. E bir normlu uzay olmak üzere $x \in E$ olsun. $f \in E'$ için

$$\hat{x}: E' \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

tanımını yapalım. $f, g \in E'$ için

$$\hat{x}(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g) \quad (2.3)$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ ve $f \in E'$ için

$$\hat{x}(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha \hat{x}(f) \text{ dır.} \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4) den $\hat{x}$ bir lineer fonksiyoneldir.

ii. $f \in E'$ için $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ olduğundan $\hat{x}$ bir sürekli lineer fonksiyoneldir. Yani $\hat{x} \in E'$ dir.

$\|f\| \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$ bulunur.

iii. $J: E \rightarrow E'', x \rightarrow J(x) = \hat{x}$ ile tanımlı dönüşüm lineerdir.

Bunu görelim: $x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$J(x + y) = (\widehat{x + y}) = \hat{x} + \hat{y} = J(x) + J(y)$$

$$J(\alpha x) = \widehat{\alpha x} = \alpha \hat{x} = \alpha J(x)$$

$$(\hat{x} + \hat{y})(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \hat{x}(f) + \hat{y}(f) = (\hat{x} + \hat{y})(f)$$

$$\hat{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \hat{x}(f) \text{ bulunur.}$$

Teorem 2.89 [16] Her normlu E uzayı E'' ikinci dualinin bir alt uzayına izometrik olarak izomorftur.

Tanım 2.90 [24]

i. A bir vektör uzayı olmak üzere $(x, y) \mapsto xy$ çarpımı ile

her $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$1. (xy)z = x(yz) \quad \text{ve} \quad (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

$$2. x(y + z) = xy + xz \quad \text{ve} \quad (x + y)z = xz + yz$$

özelliklerini sağlıyorsa A vektör uzayına **cebiri** denir.

ii. Her $x \in A$ için $xe = ex = x$ olacak şekilde A nın bir e birim elemanı mevcut

ise A vektör uzayına bir **birimli cebir** denir.

iii. Bir A cebiri $x, y \in A$ için

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\| \text{ eşitsizliğini sağlayan norm altında bir Banach uzayı ise}$$

A ya **Banach cebiri** denir.

Örnek 2.91 K Kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C(K)$ bir Banach cebiridir.

Tanım 2.92 [21]

i. E bir Banach uzayı olsun. $\{x_\alpha\}$, E Banach uzayında bir net olsun.

Eğer her $x' \in E'$ için $x'(x_\alpha) \rightarrow x'(x)$ ise $\{x_\alpha\}$ dizisi x vektörüne **zayıf yakınsar** denir.

ii. E üzerindeki zayıf topoloji $\sigma(E, E')$, w ile gösterilir. $w := \sigma(E, E')$ dır.

iii. E üzerindeki zayıf yakınsama $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ veya $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E, E')} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.93 [21]

- i. E Banach uzayının E' dualinde $\{f_\alpha\}$ bir net olsun.

Eğer her $x \in E$ için $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ ise $\{f_\alpha\}$ dizisi bir $f \in E'$ vektörüne

zayıf* yakınsıyor denir.

- ii. E' üzerindeki zayıf* topoloji $\sigma(E', E)$ w^* ile gösterilir. $w^* := \sigma(E', E)'$ dır.

- iii. E' üzerindeki zayıf* yakınsama ise

$$f_\alpha \xrightarrow{w^*} f \text{ veya } f_\alpha \xrightarrow{\sigma(E', E)} f \text{ şeklinde gösterilir.}$$

- iv. E' de $f_\alpha \xrightarrow{w} f$ olması her $F \in E''$ için $F(f_\alpha) \rightarrow F(f)$ demektir.

Teorem 2.94 [Goldstein, 21] Eğer E bir normlu uzay ise, E nin kapalı birim yuvarı

U, U'' de $\sigma(E'', E')$ –yoğun dur. Bu nedenle E, E'' de $\sigma(E'', E')$ –yoğundur.

Tanım 2.95 [26] E bir vektör uzayı ve E^* , E nin cebirsel duali olsun. E', E^* in lineer alt uzayı olsun. E nin boş olmayan bir A alt kümesi için A nın annihilatörü $A^\circ = (\phi \in E' : \phi(f) = 0, f \in A)$ şeklinde tanımlanır.

2.10 Riesz Cebirleri

Tanım 2.96 [21,26]

- i. A bir Riesz uzayı ve birleşme özelliğine sahip cebir olsun.

$$0 \preceq x, y \in A \text{ için } xy \succeq 0, (|x \cdot y| \preceq |x| |y|) \text{ oluyorsa}$$

A ya bir **Riesz cebiri (Örgü cebiri)** denir.

- ii. Bir A Riesz cebiri her $0 \preceq x, y \in A$ için $xy = yx$ ise A ya **değişmelidir** denir.

- iii. A bir Riesz cebiri olmak üzere her $0 \preceq z \in A$ için

$$x \wedge y = 0 \text{ iken } xz \wedge y = zx \wedge y = 0 \text{ oluyorsa}$$

A ya bir **f-cebiri** denir.

2.10.1 F-Cebirlerinin Temel Özellikleri

Özellik 2.97 [26] Bir A f-cebirinin bazı temel özellikleri şunlardır:

1. Bir pozitif eleman ile çarpımı Riesz homomorfizmasıdır.

Bir $u \in A_+$ ve her $x, y \in A$ için

$$u(x \wedge y) = (ux) \wedge (uy) \text{ ve } (x \wedge y)u = (xu) \wedge (yu),$$

$$u(x \vee y) = (ux) \vee (uy) \text{ ve } (x \vee y)u = (xu) \vee (yu) \text{ dir.}$$

2. Bir $u \in A_+$ ve $x \in A$ için $ux^+ = (ux)^+$ ve $x^+u = (xu)^+$ dir.

3. Her $x, y \in A$ için $|xy| = |x| \cdot |y|$ dir.

4. Eğer $x, y, z \in A$ ve $x \perp y$ ise $zx \perp y$ ve $xz \perp y$ dir.

5. Eğer $x, y \in A$ için $x \perp y$ ise $xy = 0$ dir.

6. Her $x \in A$ için $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ dir.

Tanım 2.98 [26]

- i. Bir A f-cebiri her $x, y \in A$ için

$x \wedge y = 0$ olduğunda $xy = 0$ oluyorsa A ya **hemen hemen f-cebiri** denir.

- ii. Bir A Riesz cebirinde $x^2 = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa

A ya **yarı-asal f-cebiri** denir.

Önerme 2.99 [29] Her birimli f-cebiri yarı asal f-cebiridir.

Önerme 2.100 [21,26] A bir yarı-asal f-cebiri ise

her $x, y \in A$ için $x \perp y$ olması için gerek ve yeter koşul $xy = 0$ olmasıdır.

Önerme 2.101 [26] Herhangi bir f-cebiri hemen hemen f-cebiridir.

İspat: A bir f-cebiri olsun. $x, y \in A$ için $x \wedge y = 0$ ise $(xy) \wedge y = 0$ dir.

$(xy) \wedge (xy) = xy = 0$ dan A bir hemen hemen f-cebiridir.

Örnek 2.102 [21] Tüm E den E ye sıra sınırlı lineer operatörlerin uzayı $L_b(E)$ bir Arşimed Riesz uzayıdır fakat değişmeli değildir. $L_b(E)$ bir Riesz cebiridir fakat f-cebiri değildir.

2.11 Arens Çarpımı [12,27]

Tanım 2.103 [12,27] A bir normlu cebir, A' , A nın dual Banach uzayı (A üzerindeki bütün sürekli fonksiyonların uzayı) ve A'' , A nın ikinci dual uzayı olsun.

Bir $\sigma : A \rightarrow A''$ kanonik izometrik lineer fonksiyonu her $a \in A$ ve $f \in A'$ için

$\sigma(a)(f) = f(a)$ şeklinde tanımlansın.

A'' üzerindeki **Arens çarpımını** üç adımda şöyle tanımlanır.

1. Bir $a \in A$ ve $f \in A'$ için A' nün elemanları f_a ve f şeklinde tanımlanır.

$f \in A'$ ve her $b \in A$ için,

$$f_a(b) = f(ab) \text{ ve } af(b) = f(ba) \quad (2.5)$$

2. $f \in A'$ ve $F \in A''$ için A' nün elemanları f ve f_F olarak tanımlanır.

$$f(a) = F(f_a) \text{ ve } f_F(a) = F(f) \quad (2.6)$$

3. Bir $F, G \in A''$ için A'' nin elemanları FG ve $F \cdot G$ olarak tanımlanır.

$$FG(f) = F(f) \text{ ve } FG(f) = G(f_F) \quad (2.7)$$

2.12 Değişmez Alt Uzay Kavramı

Tanım 2.104 [24]

- i. Bir E Banach uzayı üzerinde $T : E \rightarrow E$ sınırlı bir lineer operatör ve

V de E nin bir alt uzayı olsun.

Eğer $T(V) \subseteq V$ ise V ye T -**değişmez** ya da V ye T **altında değişmez** denir.

- ii. $L(E)$, E den E e sürekli lineer operatörlerin uzayı olsun.

Eğer $\mathcal{A} \subseteq L(E)$ nin bir alt cebiri iken V , $\mathcal{A}$ daki her operatör altında değişmez kalıyorsa E nin V alt uzayına $\mathcal{A}$ -değişmez denir.

Her $A \in \mathcal{A}$ için $A(V) \subseteq V$ dir.

2.13 Cebir Homomorfizması

Tanım 2.105 [28]

i. A ve B bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki cebir olmak üzere

her $k \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in A$ için $\phi: A \rightarrow B$ fonksiyonu

1. $\phi(kx) = k\phi(x)$

2. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$

3. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

özelliklerini sağlıyorsa ϕ ya **cebir homomorfizması** denir.

ii. ϕ birebir örten bir homomorfizma ise izomorfizmadır.

iii. Eğer A ve B bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki birimli cebir iken

$\phi: A \rightarrow B$ fonksiyonu A nın birimini B nin birimine götürüyorsa ϕ ya **birimli cebir homomorfizması** denir.

Teorem 2.106 [29] A bir birimli-Arşimed f-cebiri ve B bir Arşimed yarı asal f-cebiri olsun. $T: A \rightarrow B$ her sıra sınırlı cebir homomorfizması Riesz homomorfizmasıdır.

BANACH ÖRGÜLERİNİN MERKEZİ

Bu bölümde ortomorfizma kavramı verilecek ve ortomorfizmaların özel bir alt kümesi olan merkez üzerindeki pozitif operatörler Banach örgüsünde incelenecektir.

3.1 Banach Örgüleri

Tanım 3.1 [21]

- i. E bir normlu Riesz uzayı olsun. Eğer $x, y \in E$ için

$$|x| \preceq |y| \text{ iken } \|x\| \preceq \|y\| \text{ ise}$$

E deki norma bir **Riesz norm** veya **Lattice norm** denir.

- ii. Riesz normla donatılmış herhangi bir Riesz uzayına **normlu Riesz uzayı** denir.

- iii. Tam normlu Riesz uzayına **Banach örgüsü (Banach lattice)** denir

Örnek 3.2 [19] K bir Kompakt Hausdorff uzayı olsun. K üzerindeki sürekli reel

değerli tüm fonksiyonların Banach uzayı, $C(K)$, her $t \in K$ için

$f \preceq g \Leftrightarrow f(t) \preceq g(t)$ sıralamasına göre $(C(K), \preceq)$ bir Banach örgüsüdür.

Örnek 3.3 [19] c_0 dizi uzayı bir Dedekind Tam Banach örgüsüdür.

Önerme 3.4 [19] Bir E normlu Riesz uzayında aşağıdakiler iddialar sağlanır.

- i. Lattice (örgü) işlemleri süreklidir.
- ii. E_+ pozitif konisi kapalıdır.

iii. Her artan yakınsak $(x_{n=1})^\infty \subset E$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dir.

İspat: [19]

i. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n \wedge y_n - x \wedge y| \leq |x_n \wedge y_n - x_n \wedge y| + |x_n \wedge y - x \wedge y| \leq |y_n - y| + |x_n - x|$$

$$\|\cdot\| \text{ lattice norm olduğundan } \|x_n \wedge y_n - x \wedge y\| \leq \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \text{ ve}$$

$$\|x_n \wedge y_n - x \wedge y\| \rightarrow 0 \text{ dir.}$$

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in E_+$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x \in E$ olsun.

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n = x_n \vee 0 \rightarrow x \vee 0 \text{ ve } x = x \vee 0 \in E_+ \text{ dir.}$$

iii. $(x_{n=1})^\infty \subset E$ artan yakınsak bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için ve her $m \geq n$ için $x_m - x_n \in E_+$ olduğundan $x - x_n \succeq 0$ dir.

$x_n \preceq u \preceq x$ olacak şekilde $u \in E$ olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n = x_n \wedge u \rightarrow x \wedge u = u$ olduğundan $u = x$ dir..

Önerme 3.5 [19]

1. Her Dedekind σ -Tam Riesz uzayı ve normlu Riesz uzayı Arşimeddir.

2. Her Dedekind Tam Riesz uzayı Dedekind σ -Tam dır.

Önerme 3.6 [19] Eğer E bir Banach örgüsü ise $E' = E^\sim$ dir.

Tanım 3.7 [25] Bir E Riesz uzayının bir D alt kümesi için

$$f_n \in D (n=1,2,...) \text{ ve } f_n \xrightarrow{\circ} f \text{ iken}$$

$f \in D$ ise D alt kümesine **sıra kapalı** denir.

Tanım 3.8 [25] Bir E normlu Riesz uzayının bir D alt kümesi için

$$f_n \in D (n=1,2,...) \text{ ve } \|f - f_n\| \rightarrow 0 \text{ iken}$$

$f \in D$ ise D alt kümesine **norm kapalı** denir.

Teorem 3.9 [26] Bir Banach örgüsünde her sıra kapalı küme norm kapalıdır.

3.2 Ortomorfizmalar

Tanım 3.10 [21] Bir E Arşimed Riesz uzayında $(T : E \rightarrow E)$ operatörü için her B bandı $T(B) \subseteq B$ i sağlıyorsa T operatörüne **band koruyan operatör** denir. E den E ye tüm band koruyan operatörleri $S(E)$ ile ifade edebiliriz.

Teorem 3.11 [21] Bir E Arşimed Riesz uzayında $T : E \rightarrow E$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. T bir band koruyan operatördür.
- ii. $x \perp y$ için $Tx \perp y$ dir.
- iii. $B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ x ile üretilen temel band olsun.

Her $x \in E$ için $Tx \in B_x$ dir.

Tanım 3.12 [19] E, F iki Riesz uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için

$$x \perp y \Rightarrow Tx \perp Ty$$

ise T ye **ayrıklığı koruyan operatör** denir.

Not 3.13 [19] Tüm band koruyan operatörler ayrıklığı koruyan operatörlerdir.

Tanım 3.14 [21]

- i. Sıra sınırlı band koruyan operatöre **ortomorfizma** denir.
- ii. Bir E Riesz uzayında tüm ortomorfizmaların kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir.
- iii. Tüm E den E ye sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E)$ olmak üzere

$Orth(E)$, $L_b(E)$ nin bir vektör alt uzayıdır.

$Orth(E) = \{T \in L_b(E) : x \perp y \Rightarrow Tx \perp Ty\}$ dir.

- iv. Tüm E den E ye sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E)$,

E den E ye band koruyan operatörler $S(E)$ olsun. $Orth(E)$ kümesi,

$$Orth(E) = S(E) \cap L_b(E)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Önerme 3.15 [21]

- i. Bir E Arşimed Riesz uzayında bir T pozitif operatörünün ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul E de $x \wedge y = 0$ iken $Tx \wedge y = 0$ olmasıdır.
- ii. Bir E Arşimed Riesz uzayında bir T sıra sınırlı operatörün ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır.

3.3 Ortomorfizmaların Temel Özellikleri

- 1. E bir Arşimed Riesz uzayı olmak üzere ortomorfizmalar üzerindeki sıralamayı E den E ye sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E)$ den almıştır.

Yani her $x \in E_+$ için $T_1x \preceq T_2x$ olduğunda $T_1 \preceq T_2$ dir.

- 2. $Orth(E)$ sıralı bir vektör uzayıdır.

Eğer $L_b(E)$ de $0 \preceq T_1 \preceq T_2$ ve $T_2 \in Orth(E)$ ise $T_1 \in Orth(E)$ dir.

- 3. E bir Dedekind Tam Riesz uzayı ise $L_b(E)$ de Dedekind Tam Riesz uzayıdır.

- 4. Bir E Arşimed Riesz uzayında $x \in E_+$ için $T^+x = \sup\{Ty : 0 \preceq y \preceq x\}$ dir.

- 5. Bir T operatörünün ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $|T|$ operatörünün ortomorfizma olmasıdır.

- 6. E bir Arşimed Riesz uzayı olsun. $Orth(E)$ çarpım yapısını $L_b(E)$ den alır,

yani, her $x \in E$ ve $T_1, T_2 \in Orth(E)$ için $(T_1T_2)x = T_1(T_2x)$ dir.

Teorem 3.16 [21] E bir Arşimed Riesz uzayı ise sıralı vektör uzayı $Orth(E)$ bir Arşimed Riesz uzayıdır.

Her $x \in E_+$ ve $T_1, T_2 \in Orth(E)$ için

$$(T_1 \vee T_2)x = (T_1x) \vee (T_2x),$$

$$(T_1 \wedge T_2)x = (T_1x) \wedge (T_2x).$$

Özellikle her $x \in E_+$ ve $T \in Orth(E)$ için

$$(T^+)x = (Tx)^+, (T^-)x = (Tx)^- \text{ ve } |T|x = |Tx|.$$

Teorem 3.17 [21] E bir Arşimed Riesz uzayı olsun. $Orth(E)$ deki çarpım yapısından $Orth(E)$ uzayı birim operatörü birim elemanı olan bir Arşimed f-cebiridir.

İspat:[21] $Orth(E)$ birim operatörü birim elemanı olan bir Riesz cebiridir. $Orth(E)$ nin bir f-cebiri olduğunu göstermek için $T_1 \wedge T_2 = 0$ olacak şekilde $T, T_1, T_2 \in Orth(E)_+$ alalım. $TT_1 \wedge T_2 = 0$ ve $T_1T \wedge T_2 = 0$ olduğunu göstermek için bir $x \in E_+$ alındığında $T_1x \wedge T_2x = (T_1 \wedge T_2)x = 0$ dan $(TT_1 \wedge T_2)x = 0$ dır.

İkincisi için $0 \leq T_1Tx \wedge T_2x \leq \{T_1(Tx \vee x)\} \wedge \{T_2(Tx \vee x)\} = (T_1 \wedge T_2)(Tx \vee x) = 0$ dır.

Her $x \in E_+$ için $(T_1T)x \wedge T_2x = 0$ dır. $x \in E_+$ için $(T_1T \wedge T_2)x = 0$ olduğundan

$$T_1T \wedge T_2 = 0 \text{ dır.}$$

Özellik 3.18 [21]

- i. Bir E Riesz uzayında $I : E \rightarrow E$ birim operatörü ortomorfizmadır.
- ii. E Riesz uzayı üzerine her ortomorfizma iki pozitif ortomorfizmanın farkı olarak yazılabilir.
- iii. I birim operatörü $Orth(E)$ için zayıf sıra birimdir.

Yani, $T \in Orth(E)$ için $T \wedge I = 0$ ise, $x \in E_+$ için $T(x) \wedge x = (T \wedge I)(x) = 0$ dır.

Böylece her $x \in E_+$ için $T(x) \in B_x \cap B_x^d = \{0\}$ dır. $T = 0$ bulunur.

Teorem 3.19 [19] Bir E Riesz uzayında $T : E \rightarrow E$ bir ortomorfizma ise T operatörünün eşleniği T' operatörü $T' : E' \rightarrow E'$ ye bir ortomorfizmadır.

$Orth(E)$ den $Orth(E')$ ne $T \rightarrow T'$ operatörü bir lattice homomorfizmasıdır.

Her $T \in Orth(E)$ için $|T'| = |T|'$ dir.

Teorem 3.20 (Wickstead, [19]) E' , E Riesz uzayının noktalarını ayırıştırırken

$T : E \rightarrow E$ sıra sınırlı operatörünün ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün eşleniği T' operatörünün $T' : E' \rightarrow E'$ ne bir ortomorfizma olmasıdır.

Tanım 3.21 [19] E bir Arşimed f-cebiri olsun.

Her $x \in E$ ve $(u \in E)$ için $u \rightarrow T_u$ fonksiyonu E den $Orth(E)$ e

$$T_u(x) = u \cdot x$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.22 (Zaanen, [19]) E bir birimli Arşimed f-cebiri olsun.

$$u \rightarrow T_u \text{ fonksiyonu } (T_u(x) = u \cdot x)$$

E den $Orth(E)$ e bir örten f-izomorfizmasıdır. $Orth(E) = E$ dir.

Özellikle her Arşimed Riesz uzayı E için $Orth(Orth(E)) = Orth(E)$ dir.

3.3 Merkezil Operatörler

Tanım 3.23 [15,16]

i. Bir E Riesz uzayında her $x \in E$ için

$$|Tx| \preceq \lambda |x| \text{ olacak şekilde bir } \lambda > 0 \text{ skaleri bulunabiliyorsa}$$

$T : E \rightarrow E$ operatörüne **merkezil operatör** denir.

ii. Tüm merkezil operatörlerin kümesi $Z(E)$ ile gösterilir.

iii. $Z(E) \subset Orth(E) \subset L_b(E)$ dir.

iv. $Z(E)$ regüler operatörler uzayı $L_r(E)$ de idealdir.

Teorem 3.24 [25,30] E bir Riesz uzayı ise $Z(E)$ de Riesz uzayıdır.

Her $x \in E_+$ ve $S, T \in Z(E)$ için

$$(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x) \text{ ve } (S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x).$$

Her $x \in E$ için $|T|(|x|) = |T(|x|)| = |T(x)|$ dir.

Önerme 3.25 [26] Bir E Riesz uzayında $Z(E)$ hemen hemen f -cebiridir.

İspat: $S, T \in Z(E)$ olsun. $S, T \succeq 0$ ve her $x \in E_+$ için

$Tx \preceq \lambda_1 x$ olacak şekilde $\lambda_1 > 0$,

$Sx \preceq \lambda_2 x$ olacak şekilde $\lambda_2 > 0$ vardır.

$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda$ ve $S \wedge T = 0$ olsun.

$0 \preceq (ST)x = S(Tx) \preceq S(\lambda_1 x) = \lambda_1 Sx,$

$0 \preceq (ST)x = S(Tx) \preceq \lambda_2 Tx$

$0 \preceq (ST)x \preceq \lambda_1 Sx \wedge \lambda_2 Tx \preceq \lambda(Sx \wedge Tx) = \lambda(S \wedge T)x = 0$ olur.

$ST = 0$ dır.

Önerme 3.26 [12] E ve L Riesz uzayları olmak üzere

$\psi(T) = T'$ olarak tanımlanan

$$\psi : L_b(E, L) \rightarrow L_n(L'_n, E')$$

pozitif operatörü sıra süreklidir.

3.3.1 Dual Uzayın Merkezindeki Pozitif Operatörler

Teorem 3.27 [25] Bir E Riesz uzayında $Z(E')$ E nin dualinin merkezi olmak üzere

$Z(E')$ deki örgü operatörleri her $S', T' \in Z(E')$ ve her $f \in E'_+$ için

$$(S' \vee T')f = S'f \vee T'f \text{ ve } (S' \wedge T')f = S'f \wedge T'f \text{ dır.}$$

İspat: Eğer $S', T' \in Z(E')$ için $|T'|, S' \vee T', S' \wedge T'$ merkezil operatörler olduğu gösterilmelidir.

Her $f \in E'$ için $|T'f| \preceq \lambda |f|$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır.

Bir $h \in E'_+$ için $|T'|h = \sup_{|f| \leq h} |T'f| \preceq \sup_{|f| \leq h} \lambda |f| = \lambda h, |T'| \in Z(E')$ dir.

$S' \vee T', S' \wedge T'$ nin $Z(E')$ e ait olduğu göstermek için

$$S' \vee T' = \frac{1}{2}(S' + T' + |T' - S'|) \quad (3.1)$$

$$S' \wedge T' = \frac{1}{2}(S' + T' - |T' - S'|) \quad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2) latis işlemleri kullanılır.

$S', T' \in Z(E')$ olsun.

Eğer $g \wedge h = 0$ ise $g \wedge T'h = 0$ ve $S'g \wedge T'h = 0$ dır.

Bu durumda $S'g + T'h = S'g \vee T'h$ dır.

Her $f \in E'_+$ için

$$\begin{aligned} (S' \vee T')f &= \sup \{ S'g + T'h : g \wedge h = 0 \text{ ve } g + h = f \} \\ &= \sup \{ S'g \vee T'h : g \wedge h = 0 \text{ ve } g + h = f \} \\ &\preceq S'f \vee T'f. \end{aligned}$$

$$(S' \vee T')f \succeq S'f \vee T'f$$

olduğundan $(S' \vee T')f = S'f \vee T'f$ dır.

Her $f \in E'_+$ için

$$\begin{aligned} (S' \wedge T')f &= \frac{1}{2}(S' + T' - S' \vee T')f \\ &= \frac{1}{2}(S'f + T'f - S'f \vee T'f) = S'f \wedge T'f \end{aligned}$$

$$0 \preceq S' - S' \wedge T' \in Z(E') \text{ ve } 0 \preceq T' - S' \wedge T' \in Z(E')$$

olduğundan $(S' - S' \wedge T') \wedge (T' - S' \wedge T') = 0'$ dır.

Her $f \in E'_+$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [(S' - S' \wedge T') \wedge (T' - S' \wedge T')]f \\ &= [S'f - (S' \wedge T')f] \wedge [T'f - (S' \wedge T')f] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (S' - S' \wedge T') f \wedge (T' - S' \wedge T') f \\
&= S' f \wedge T' f - (S' \wedge T') f
\end{aligned}$$

veya $(S' \wedge T')(f) = S' f \wedge T' f$ dir.

Teorem 3.28 [26] E bir Arşimed Riesz uzayı olsun.

- i. Eğer $\pi \in Z(E)$ ise $\pi' \in Z(E')$ dir. (π' , π nin eşleniğidir)
- ii. Eğer E' , E nin noktalarını ayırıştırıyorsa $\pi' \in Z(E')$ ise $\pi \in Z(E)$ dir.
- iii. Eğer $\pi \in Orth(E)$ ise $\pi' \in Orth(E')$ dir.
- iv. Eğer E' , E nin noktalarını ayırıştırıyorsa $\pi' \in Orth(E')$ ise $\pi \in Orth(E)$ dir.

3.3.2 Banach Örgülerinde Merkezil Operatörler

Önerme 3.29 [30] Bir E Banach örgüsünde $Z(E)$ bir Banach cebiridir.

İspat: E bir Banach örgüsü olsun. Her $S, T \in Z(E)$ için

$$\|ST\| \preceq \|S\| \|T\| \text{ dir.}$$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T\| \|x\| = \|T\| \text{ den}$$

$$\|T\| \preceq \|T\| \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.30 [21] E bir Banach örgüsü olmak üzere $T: E \rightarrow E$ operatörü için aşağıdaki iddialar denktir.

- 1. T bir merkezil operatördür.
- 2. T bir ortomorfizmadır.
- 3. T bir band koruyan operatördür.

Bu teoremden dolayı E bir Banach örgüsü olduğundan

$$Z(E) = Orth(E) = S(E)$$

yazılır.

Önerme 3.31 [30] Bir E Banach örgüsünde $Z(E)$, E den E ye sınırlı lineer operatörlerin uzayı $L_b(E)$ nin kapalı bir alt kümesidir.

İspat: [30] E bir Banach örgüsü olsun. $Z(E)$, $L_b(E)$ nin bir alt kümesidir.

$L_b(E)$ de $T_n \rightarrow T$ olacak şekilde $T_n \in Z(E)$ alalım. E de $|x| \wedge |y| = 0$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için T_n band koruyan olduğundan $|x| \wedge |T_n y| = 0$ olur ve örgü

operasyonlarının sürekliliğinden $n \rightarrow \infty$ iken $|x| \wedge |Ty| = 0$ dir. Sonuç olarak

T bir band koruyan operatör ve $T \in Z(E)$ dir

Önerme 3.32 [12] E bir Banach örgüsü olsun. E' , E uzayının noktalarını ayırtırsın.

Her $\pi \in Z(E)$ için $\gamma: Z(E) \rightarrow Z(E')$ fonksiyonu $\gamma(\pi) = \pi'$ olarak tanımlansın.

Böylece γ bir birebir cebir homomorfizması ve Riesz homomorfizmasıdır.

Önerme 3.33 [17] E bir Banach örgüsü, $Z(E)$, E nin ideal merkezi ve $Z(E')$, E nin dualinin merkezi olmak üzere, $T \in Z(E)$ iken $T' \in Z(E')$ dir.

İspat: $T \in Z(E)$ ve $x \in E_+$ için $-\lambda x \preceq Tx \preceq \lambda x$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır.

Her $x \in E_+$ ve $f \in E'_+$ için

$$-\lambda f(x) \preceq f(Tx) = (T'f)(x) \preceq \lambda f(x) \text{ dan}$$

$$-\lambda f \preceq T'f \preceq \lambda f, T' \in Z(E')$$

$0 \preceq T \in Z(E)$ olsun.

$T_n = T \wedge nI$, ($n=1, 2, \dots$) olacak şekilde bir $\{T_n\}$ dizisi alınsın.

$T \wedge nI \uparrow T$ ve E de $T_n \uparrow T$ olduğundan E' de $T'_n \uparrow T'$ olur. $T' \in Z(E')$ dir.

Teorem 3.34 [30] Bir E Banach örgüsünde $T: E \rightarrow E$ her merkezli operatör temel ideal koruyandır. Yani her $x \in E_+$ için $T(E_x) \subseteq E_x$ dir.

İspat: [30] Bir E Banach örgüsünde $T: E \rightarrow E$ bir operatör olsun.

Her $x \in E$ için $|Tx| \preceq \lambda |x|$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır.

Bir $u \in E_+$ alalım ve $y \in E_u$ olsun.

Tanımından $|y| \preceq \alpha u$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ skaleri seçelim.

$|Ty| \preceq \lambda |y| \preceq \alpha \lambda u$ olduğundan $Ty \in E_u$ ve $T(E_u) \subseteq E_u$ dır.

Yani T , tüm temel ideali değişmez bırakır.

Teorem 3.35 [24] E bir Dedekind Tam Banach örgüsü ise $B(I)$, I ile üretilen band olmak üzere $Z(E) = B_I$ dır.

Önerme 3.36 [21] Bir E Banach örgüsünde her merkezil operatör tüm band projeksiyonlarla değişmelidir.

İspat: [21] Bir E Banach örgüsünde $T : E \rightarrow E$ bir merkezil operatör ve

$P : E \rightarrow E$ bir band projeksiyon olsun.

$P(E) = B$ bir projeksiyon band olduğundan $B \oplus B^d = E$ dir.

T bir band koruyan operatör olduğundan $T(B) \subseteq B$ ve $T(B^d) \subseteq B^d$ dir.

Bir $x \in E$ için $x = y \oplus z$, $y \in B$, $z \in B^d$ yazabiliriz.

$Ty \in B$ ve $Tz \in B^d$ olur.

Her $x \in E$ için

$(TP)x = T(Px) = Ty = P(Ty) = P(Ty) + P(Tz) = P(Ty + Tz) = P(Tx) = (PT)x$ dır.

Sonuç olarak $TP = PT$ dir.

Önerme 3.37 [17,32] Bir E Banach örgüsündeki T operatörünün $Z(E)$ de olması için gerek ve yeter koşul T nin E deki her kapalı ideali değişmez bırakmasıdır.

Önerme 3.38 [17,32] Bir E Dedekind Tam Banach örgüsündeki T operatörünün $Z(E)$ de olması için gerek ve yeter koşul T nin E deki her bandı değişmez bırakmasıdır.

Bu önermeden E bir Dedekind Tam Banach örgüsü iken E üzerindeki T operatörünün $Z(E)$ de olması için gerek ve yeter koşul T nin E üzerindeki her band projeksiyonu ile değişmeli olmasıdır.

Sonuç 3.39 [16,17] Tüm band projeksiyonları $Z(E)$ nin elemanıdır.

Önerme 3.40 [21] E bir Dedekind Tam Banach örgüsü ise T operatörünün $Z(E)$ de olması için gerek ve yeter koşul T nin $Z(E)$ deki tüm operatörlerle değişmeli olmasıdır.

Sonuç 3.41 [17] E bir Banach örgüsü iken E' Dedekind Tam Banach örgüsü olduğundan E' deki bir T operatörünü $Z(E')$ de olması için gerek ve yeter koşul T nin E' deki her bandı değişmez bırakmasıdır.

Önerme 3.42 [17] E bir Banach örgüsü iken E üzerindeki T operatörünün $Z(E)$ de olması için gerek ve yeter koşul T operatörünü eşleniği olan T' operatörünün $Z(E')$ de olmasıdır.

BANACH F-MODÜLLERİNİN MERKEZİ

Bu bölümde modül kavramı verilmiştir. Banach örgüler üzerinde f-modül yapısı kullanılarak Banach örgüsünün merkezi üzerinde çalışılmıştır. Çalışmamızda bir A Arşimed f-cebiri için E , A üzerinde bir Banach f-modül temsil etmektedir. $L(E)$, E den E ye sürekli lineer operatörleri ve E' , E nin sıra dualini göstermektedir.

4.1 Modül Kavramı

Tanım 4.1 [28]

- i. Bir boştan farklı H kümesi üzerinde toplama ve çarpma tanımlanarak aşağıdaki özellikler sağlanırsa H ye bir **halka** denir.
 1. $(H, +)$ bir değişmeli gruptur.
 2. Her $a, b, c \in H$ için $(ab)c = a(bc)$ dır.
 3. Her $a, b, c \in H$ için $a(b+c) = ab+ac$ ve $(a+b)c = ac+bc$ dır.
- ii. Her $a, b \in H$ için $ab = ba$ sağlanıyorsa H halkasına **değişmeli halka** denir.
- iii. Eğer H halkasında her $a \in H$ için $a \cdot 1_H = 1_H \cdot a$ olacak şekilde $1_H \in H$ varsa H halkasına **birimli halka** denir.

Tanım 4.2 [28]

- i. A bir değişmeli grup ve H bir birimli halka olsun.

$$\text{Eğer} \quad \theta_1 : H \times A \rightarrow A, (a, x) \mapsto a \cdot x$$

$$\theta_2 : A \times H \rightarrow A, (x, a) \mapsto x \cdot a$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonları her $a, b \in H$ ve $x, y \in A$ için

$$1. \quad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad (x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a,$$

$$2. \quad (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x \quad x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b,$$

$$3. \quad (a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \quad x \cdot (a \cdot b) = (x \cdot a) \cdot b$$

özelliklerini sağlıyorsa A ya bir **sağ (sol) H -modül** denir.

- ii. Eğer H bir 1_H birim elemanına sahip ve her $x \in A$ için

$$1_H \cdot x = x \quad (x \cdot 1_H = x) \text{ ise } A \text{ ya } \mathbf{birimli } H \text{ modül} \text{ denir.}$$

Not 4.3 Eğer H değişmeli ise her sol H -modül A , $a \in H$ ve $x \in A$ için $x \cdot a = a \cdot x$ şeklinde tanımlanarak sağ H -modül yapısıyla verilebilir.

Aksi belirtilmedikçe bir H değişmeli halka üzerinde her H -modül A , hem sağ modül hem de sol modül varsayılabilir.

4.2 Riesz Cebirinin İkinci Duali Üzerindeki Arens Çarpımı

Teorem 4.4 [12,13] A bir Riesz cebiri olsun.

$$F, G \in A'' \text{ için } F \cdot G \in A'' \text{ ve } |F \cdot G| \preceq |F| \cdot |G|' \text{ dir.}$$

Yani, A'' Arens çarpımına göre **Riesz cebiridir**.

$$1. \quad \text{Her } a \in A, f \in A' \text{ için } f \cdot a \in A' \text{ olacak şekilde } |f \cdot a| \preceq |f| \cdot |a| \quad (4.1)$$

$$2. \quad \text{Her } F \in A'', f \in A' \text{ için } F \cdot f \in A' \text{ olacak şekilde } |F \cdot f| \preceq |F| \cdot |f| \quad (4.2)$$

$$3. \quad \text{Her } F, G \in A'' \text{ için } F \cdot G \in A'' \text{ olacak şekilde } |F \cdot G| \preceq |F| \cdot |G| \quad (4.3)$$

$0 \preceq F, G \in A''$ olduğunda $F \cdot G \in A''$ olduğundan A'' bir Riesz cebiridir.

Özellik 4.5 [12,13] A bir Riesz cebiri iken A' de $D_\tau \downarrow 0$ azalan bir net olsun.

Her $a \in A_+$ için $D_\tau \cdot a \downarrow 0$ dır.

(4.3)' den G sıra sürekli olduğundan her $0 \leq a \in A$ için

$$G(D_\tau \cdot a) \downarrow 0 = (G \cdot D_\tau)(a) \text{ olduğundan } A' \text{ de } G \cdot D_\tau \downarrow 0 \text{ dır.}$$

(4.3) den F nin sıra sürekli olmasını kullanarak

$$(F \cdot G)(D_\tau) = F(G \cdot D_\tau) \downarrow 0 \text{ dır.}$$

Tanım 4.6 [10-13]

i. A bir Arşimed f-cebiri olsun ve A' A nin noktalarını ayrıştırırsın.

$T \in Orth(A)$ iken eşleniği T' her $a \in A$ ve $f \in A'$ için

$$(T'f)(a) = f(Ta)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $T' \in Orth(A')$ dır.

ii. Bir $a \in A$ için $\pi_a : A \rightarrow A$ fonksiyonu her $b \in A$ için

$$(f \cdot a)(b) = f(a \cdot b) = f(\pi_a(b)) = (\pi_a' f)(b)$$

oldüğundan $\pi_a' \in Orth(A')$ dir.

iii. Eğer A bir birimli Arşimed f-cebiri ise bir $F \in A''$ ve her $f \in A'$ için

$$v_F : A' \rightarrow A'$$

fonsiyonu (4.2) den $v_F(f) = F \cdot f$ şeklinde tanımlanır.

Buradan $v_F \in Orth(A')$ dır.

iv. Banach örgüsünde $A'' = A^{**}$ olduğundan $Orth(A'') = Z(A'')$ dır.

$\pi_F \in Z(A'')$ için $0 \preceq \pi_F \preceq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır.

v. $a, b \in A$, $f \in A'$ ve $F, G \in A''$ için $f \cdot a \in A'$, $G \cdot f \in A'$, $F \cdot G \in A''$ olmak üzere

- $(f \cdot a)(b) = f(ab)$ (4.4)

- $(F \cdot f)(a) = F(f \cdot a)$ (4.5)

- $(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f)$ (4.6)

tanımlansın.

- $f \cdot (ab) = (f \cdot a) \cdot b$ (4.7)

- $(F \cdot f) \cdot a = F \cdot (f \cdot a)$ (4.8)

- $(F \cdot G) \cdot f = F \cdot (G \cdot f)$ (4.9)

Her $F, G, H \in A''$ için $(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H)$ olduğundan A'' Arens çarpımına göre bir birleşmeli cebirdir.

vi. Bir A Arşimed f-cebiri A'' içine gömülebilir.

vii. Her $a \in A$ için $F_a \in A''$ elemanı her $f \in A'$ için

$$F_a(f) = f(a) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

viii. Her $a \in A$ için $\sigma: A \rightarrow A''$ fonksiyonu

$$\sigma(a) = F \text{ şeklinde birebir örten cebir homomorfizmasıdır.}$$

ix. $a, b \in A$ için $a'' \cdot b'' = (ab)''$

x. e , A nın birim elemanı ise $\sigma(e) = e''$ olacak şekilde e'' de A'' nün birim elemanıdır.

xi. e'' , A'' nin birimsel elemanı ise her $f \in A'$ için $e'' \cdot f = f$ dir.

xii. Eğer A değişmeli ise her $a \in A$ ve $f \in A'$ için $F \cdot f = f \cdot a$ dır.

xiii. Her $b \in A$ için

$$(F \cdot f)(b) = F(f \cdot b) = (f \cdot b)(a) = f(ba) = f(ab) = (f \cdot a)(b) \text{ dır.}$$

Tanım 4.7 [26] A' A nın noktalarını ayırıştırıyorsa

$$^{\circ}(A') = \{a \in A : f(a) = 0 \text{ her } f \in A'\} = \{0\} \text{ dir.}$$

A birimli Arşimed f -cebiri ve A' , A nın noktalarını ayırıştırıyorsa,

$\sigma : A \rightarrow A''$ fonksiyonu $\sigma(a) = F$ tanımı ile birebir Riesz homomorfizmasıdır.

$\sigma(A)$, A'' de sıra yoğundur. Yani A'' de $\sigma(A)^d = \{0\}$ ' dir.

Önerme 4.8 [12,13] A bir birimli Arşimed f -cebiri olsun. $(A')'_n$, A' de tüm sıra sürekli lineer fonksiyonların koleksiyonunu göstermek üzere

$$A'' = (A')'_n \text{ dir.}$$

4.3 Banach F-Modül

Tanım 4.9 [33-35]

i. A bir birimli Arşimed f -cebiri ve E de Banach örgüsü olsun.

$$A \times E \rightarrow E$$

$(a, f) \rightarrow a \cdot f$ sürekli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa

1. Her $a, b \in A, f \in E, a \cdot (bf) = (a \cdot b) f$
2. Eğer $0 \preceq a \in A, 0 \preceq f \in E$ ise $a \cdot f \succeq 0$
3. Eğer $f, g \in E$ için E de $f \perp g$ iken her $a \in A$ için $af \perp g$

E ye A üzerinde bir **f-modül** denir.

ii. A yı bir Banach Arşimed f -cebiri aldığımızda E , A üzerinde bir **Banach f-modül** olarak adlandırılır. Aksi söylenmedikçe A Banach Arşimed f -cebiri alınacaktır.

Tanım 4.10 [17,36] E , A üzerinde bir Banach f -modül olsun.

$$m : A \rightarrow L(E)$$

sınırlı birimli cebir homomorfizması tanımlayalım.

Bu homomorfizmanın Arens genişlemesi $f \in E'$ ve $a \in A''$ için $a \cdot f$ olarak

$$m^* : A'' \rightarrow L(E') \text{ dir.}$$

Önerme 4.11 [17,36] E, A üzerinde bir Banach f -modül olsun.

f -modül özelliğinden $a \in A$ ve $f \in E$ için

$$m(a)(f) = a \cdot f \text{ ise } m(a) \in Z(E) \text{ olur.}$$

İspat: Yani E bir Banach örgüsü olduğundan E de $f, g \in E$ için

$$f \perp g \text{ iken } E \text{ de } m(a)f = a \cdot f \perp g \text{ olur.}$$

$m(a)$ band koruyan olduğundan $m(a) \in Z(E)$ dir.

Tanım 4.12 [17] E, A üzerinde bir Banach f -modül olsun.

$$A \times E \rightarrow E$$

$$(a, f) \rightarrow a \cdot f$$

bu durumda aşağıdaki dönüşümleri tanımlayabiliriz.

1. $E \times E' \rightarrow A'$ dönüşümü $f \in E, f' \in E', a \in A$ için

$$(f, f') \rightarrow (f \cdot f')a : (f \cdot f')a = f'(af)$$

2. $A'' \times E' \rightarrow E'$ dönüşümü $f \in E, f' \in E', F \in A''$ için

$$(F, f') \rightarrow (Ff')f : (Ff')f = F(ff')$$

Tanım 4.13 [17,36] A'' bir Arşimed f -cebiri ve E' Banach örgüsü olduğundan

E' Arens çarpımı yardımıyla A'' üzerinde bir f -modüldür.

$$A'' \times E' \rightarrow E' \text{ dönüşümü } f \in E, f' \in E', F \in A'' \text{ için}$$

$$(F, f') \rightarrow (Ff')f : (Ff')f = F(ff')$$

1. Her $F, G \in A''$ ve $f' \in E'$ için $F(Gf') = (FG)f'$

2. $0 \preceq F \in A''$ ve $0 \preceq f' \in E'$ iken $0 \preceq F \cdot f'$

3. $f' \perp g' \in E'$ iken her $F \in A''$ için $F \cdot f' \perp g' \in E'$ dir.

4.4 $m: A \rightarrow L(E)$ Sınırlı Birimli Cebir Homomorfizması

$$m: A \rightarrow L(E)$$

sınırlı birimli cebir homomorfizmasının Arens genişlemesi

$$m^*: A'' \rightarrow L(E')$$

olsun.

1. $A \times E \rightarrow E$ dönüşümü her $a \in A, f \in E$ için

$$(a, f) \rightarrow a \cdot f: af = m(a)f,$$

2. $E \times E' \rightarrow A'$ dönüşümü her $f \in E, f' \in E', a \in A$ için

$$(f, f') \rightarrow (f \cdot f')a: (f \cdot f')a = f'(af),$$

3. $A'' \times E' \rightarrow E'$ dönüşümü her $f \in E, f' \in E', F \in A''$ için

$$(F, f') \rightarrow (Ff')f: (Ff')f = F(ff'),$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.14 [17,36] E, A üzerinde bir Banach f - modül olduğunda

$$m^*: A'' \rightarrow L(E') \text{ fonksiyonu}$$

$$m^*(F)(f') = F \cdot f'$$

şeklinde tanımlanan bir cebir ve Riesz homomorfizmasıdır.

Bunu görmek için $F \wedge G = 0$ olsun. Her $f' \in E'$ için

$$m^*(F \cdot G)f' = (F \cdot G)f' = F \cdot (G \cdot f') = m^*(F) \cdot Gf' = m^*(F) \cdot m^*(G) \cdot f'$$

olduğundan m^* bir cebir homomorfizmasıdır.

Buradan her $f' \in E'$ için

$$m^*(F)f' \wedge m^*(G)f' = Ff' \wedge Gf' = (F \wedge G)f' = 0 \text{ olur.}$$

m^* bir Riesz homomorfizmasıdır.

Her $a \in A$ için $m(a) \in L(E)$ olması için gerek ve yeter koşul $m^*(a) \in L(E')$ olmasıdır.

Teorem 4.15 [17,36] E, A üzerinde bir Banach f -modül ise $m^*: A'' \rightarrow L(E')$ birimli sınırlı cebir homomorfizması için $m^*(A'') \subseteq Z(E')$ dir.

İspat: Bir $a \in A''$ için 1 güçlü birim olmak üzere $1 \in A \subset A''$ için

$$|a| \leq \lambda 1 \text{ olacak şekilde bir } \lambda > 0 \text{ vardır. } |m^*(a)| \leq m^*(|a|) \leq \lambda I'$$

olduğundan $m^*(A'') \subseteq Z(E')$ dir.

Sonuç 4.16 [36] $m^*: A'' \rightarrow L(E')$ birimli sınırlı cebir homomorfizması

$$m^*(F)(f') = F \cdot f'$$

şeklinde tanımlandığından $m^*(F) \in Z(E')$ dir.

Teorem 4.17 [17,36] E, A üzerinde bir Banach f -modül ve $m: A \rightarrow L(E)$ sınırlı birimli cebir homomorfizması olsun. Aşağıdaki durumlar var olsun:

1. E nin her kapalı A -değişmez alt uzayı ideal olsun.
2. $Z(E') = m^*(A'')$
3. $Z(E) \subseteq \overline{m(A)}^w$ (w zayıf operatör topolojidir)

$1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3$ gerektirmeleri sağlanır.

İspat:

$1 \Rightarrow 2$: Bir $F \in A'' = \overline{A}$ için $m^*(F) = T$ olacak şekilde $T \in m^*(A'')$ olsun.

$\{a_\alpha\} \rightarrow F$ olacak şekilde $\{a_\alpha\}$, A da bir ağ olsun. $f' \in E'$ ve $F \in A''$ için

$$A'' \times E' \rightarrow E'$$

$$a_\alpha \cdot f' \rightarrow F \cdot f'$$

$$m^*(a_\alpha)f' \rightarrow m^*(F)f' = Tf'$$

$m^*(a_\alpha) \in m^*(A) \subset Z(E')$ olduğundan $T \in Z(E')$ ve $m^*(A'') \subset Z(E')$ dir.

I, E nin kapalı A -değişmez alt uzayı ideal olduğunda B de E' nün w^* –kapalı

A -değişmez alt uzayı olsun.

$Z(E')$ deki herhangi bir T operatörü E' deki her bandı değişmez bırakır.

Yani her $B \subseteq E'$ için $T(B) \subseteq B$ dir.

A A'' üzerinde sıra yoğun olduğundan (2.94) den ve m^* in sürekliliğinden B, E' nin A'' -değişmez alt uzayıdır. Arens çarpımının A ya genişlemesinden E' de bir T operatörünün $m^*(A'')$ de olması için gerek ve yeter koşul T nin E' nin her bir w^* -kapalı A -değişmez alt uzayı değişmez bırakmasıdır.

Böylece $Z(E') = m^*(A'')$ dir.

$2 \Rightarrow 1$: $Z(E') = m^*(A'')$ kabul edelim.

F, E nin kapalı A -değişmez alt uzayı ve F° E' nin annihilatörü olsun.

F°, E' nin w^* –kapalı A -değişmez alt uzayı olur.

Bir $\hat{a} \in A''$ için $a_\alpha \rightarrow \hat{a}$ olacak şekilde $a_\alpha \in A$ vardır.

$m^*(a_\alpha)f \in F^\circ \Rightarrow \hat{a}f \in F^\circ$ buradan $m^*(A'')(F^\circ) \subseteq F^\circ$ olur.

Hipotezi kullanırsak,

$Z(E')(F^\circ) \subseteq F^\circ$ olur.

$A \subseteq A''$ ve $F^\circ \subset E'$ için F°, E' nin w^* -kapalı A -değişmez alt uzayı olur.

E' Dedekind Tam olduğundan E' nin $Z(E')$ -değişmez alt uzayı idealdir.

F°, E' de ideal olduğundan dualitiden F, E de ideal olur.

$2 \Rightarrow 3$:

$T \in Z(E)$ ise $-\lambda x \preceq Tx \preceq \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır.

$x \in E'$ için

$$-\lambda f(x) \preceq f(Tx) = (T' f)x \preceq \lambda f(x) \text{ olur.}$$

$$T \in Z(E) \Rightarrow T' \in Z(E') = m^*(A'') = m^*(\bar{A}) \text{ dır.}$$

$$a_\alpha \in A \text{ için } m^*(a_\alpha) \rightarrow T' \text{ iken}$$

$$(m(a_\alpha))' \rightarrow T'$$

$$m(a_\alpha) \rightarrow T$$

$$m(a_\alpha) \in m(A) \text{ böylece } T \in \overline{m(A)}^w, \quad Z(E) \subset \overline{m(A)}^w \text{ dır.}$$

F-ORTOMORFİZMALAR ÜZERİNDE GENİŞLETİLMİŞ SONUÇLAR

5.1 Giriş

Bu bölümde A bir birimli f -cebiri L, M Riesz uzayları ve L, M A üzerinde iki f -modül olmak üzere L nin ikinci sıra duali L'' nün A nin ikinci sıra duali A'' üzerinde bir f -modül olduğu gösterilmiştir. Ayrıca topolojik olarak dolu olma kavramı ikinci sıra dualde tanımlanmıştır.

Aynı zamanda T, L den M ye bir f -ortomorfizması olduğunda T nin ikinci eşleniği T'' nün L'' den M'' ne bir f -ortomorfizması olduğu gösterilmiştir.

Bu bölümde her Riesz uzayını sıra dualinin ayrıştırdığı kabul edilmiştir.

5.2 F-Modülleri

Tanım 5.2 [14] A bir birimli f -cebiri ve L bir Riesz uzayı olsun.

Her $a \in A$ ve $x \in L$ için

$$A \times L \rightarrow L$$

$$(a, x) \rightarrow a \cdot x$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L Riesz uzayına A birimli f -cebiri üzerinde

f-modül denir.

1. Her $x \in L$ için $e \cdot x = x$ ve L, A üzerinde modüldür. (e A nın birim elemanıdır)
2. Her $a \in A_+$ ve $x \in L_+$ için $a \cdot x \in L_+$ dır.
3. Her $x, y \in L$ için $x \perp y$ olduğunda her $a \in A$ için $a \cdot x \perp y$ dir.

Tanım 5.3 [14,37] A bir birimli f-cebiri ve L bir Riesz uzayı olsun.

Her $x \in L, f \in L', a \in A$ için

$$A \times L' \rightarrow L'$$

$$(a, f) \rightarrow a \cdot f : a \cdot f(x) = f(a \cdot x)$$

fonksiyonu ile L' Riesz uzayı A **birimli f-cebiri üzerinde f-modüldür.**

Önerme 5.4 [14,37] Eğer L' Riesz uzayı A birimli bir f-cebiri üzerinde f-modül ise

her $f \in L'$ ve $a \in A$ için

$$p : A \rightarrow \text{Orth}(L')$$

fonksiyonu

$$p(a) = \pi_a' , \quad \pi_a'(f) = a \cdot f \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

p bir birimli cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. Aksine;

$$p : A \rightarrow \text{Orth}(L')$$

fonksiyonu her $f \in L'$ ve $a \in A$ için

$$A \times L' \rightarrow L'$$

$$(a, f) \rightarrow a \cdot f = p(a)(f)$$

tanımı ile L' Riesz uzayı A birimli f-cebiri üzerinde f-modüldür.

Tanım 5.5 [14,38] L bir Riesz uzayı ve A bir birimli f-cebiri üzerinde f-modül olsun.

1. Her $x \in L, f \in L', a \in A$ için

$$L \times L' \rightarrow A'$$

$$(x, f) \rightarrow x \cdot f, \quad xf(a) = f(a \cdot x)$$

2. Her $x \in L, f \in L', F \in A''$

$$A'' \times L' \rightarrow L'$$

$$(F, f) \rightarrow F \cdot f, \quad F \cdot f(x) = F(x \cdot f)$$

3. Her $f \in L', F \in A'', \hat{f} \in L''$

$$A'' \times L'' \rightarrow L''$$

$$(F, \hat{f}) \rightarrow (F \cdot \hat{f})(f) = \hat{f}(F \cdot f)$$

dönüşümleri ile birlikte

4. Her $x \in L, f \in L', a \in A$ için

$$A \times L' \rightarrow L'$$

$$(a, f) \rightarrow a \cdot f, \quad af(x) = f(a \cdot x)$$

5. Her $a \in A, f' \in L', \hat{f} \in L''$

$$L'' \times L' \rightarrow A'$$

$$(\hat{f}, f) \rightarrow \psi_{f, \hat{f}}, \quad \psi_{f, \hat{f}}(a) = \hat{f}(a \cdot f)$$

dönüşümlerini tanımlayabiliriz.

Teorem 5.6 [14,37] L bir Riesz uzayı, A bir birimli f -cebiri üzerinde f -modül olsun.

Her $\hat{f} \in L''$ için $u: A \rightarrow \text{Orth}(L'')$, $u(a)\hat{f} = a \cdot \hat{f}$.

Her $\hat{f} \in L''$ için $v: A'' \rightarrow \text{Orth}(L'')$, $v_F(\hat{f}) = F \cdot \hat{f}$ olduğunda

u ve v , $u(A) \subseteq \text{Orth}(L'')$ ve $v(A'') \subseteq \text{Orth}(L'')$ olacak şekilde pozitif operatörlerdir.

Aynı zamanda birimli cebir ve Riesz homomorfizmasıdır.

İspat: [14,37] u ve v pozitif operatörlerdir.

$$p: A \rightarrow Orth(L')$$

$$a \rightarrow p(a) = \pi'_\alpha$$

her $f \in L'$ için $\pi'_\alpha(f) = a \cdot f$ ve

$$k: Orth(L') \rightarrow Orth(L'')$$

$$\pi' \rightarrow k\pi' = \pi''$$

her $\pi' \in Orth(L')$ için $\pi'' \in Orth(L'')$ olarak tanımlayalım.

p bir birimli cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. (Pagter ve Huijsmans [29]).

k fonksiyonu L'' de birimsel fonksiyon olmak üzere $k(I') = I''$ dir.

$Orth(L'')$ değişmeli olduğundan her $\pi'_1, \pi'_2 \in Orth(L')$ için

$$k(\pi'_1 \pi'_2) = (\pi'_1 \pi'_2)' = \pi''_2 \pi''_1 = \pi''_1 \pi''_2 = k(\pi'_1) k(\pi'_2)$$

k bir cebir homomorfizmasıdır ve Riesz homomorfizmasıdır.

$a \in A$, $\hat{f} \in L''$ ve $f \in L'$ için,

$$u(a)(\hat{f})(f) = a \cdot \hat{f}(f) = \hat{f}(a \cdot f) = \hat{f}(\pi'_\alpha(f)) = \pi''_\alpha(\hat{f})(f) = (k \circ p)(a)(\hat{f})(f)$$

elde ederiz.

k ve p cebir homomorfizması olduğundan,

$$u(a \cdot b) = (k \circ p)(a \cdot b) = k(p(a \cdot b)) = k(p(a) \cdot p(b)) = k(p(a)) \cdot k(p(b))$$

$$= (k \circ p)(a) \cdot (k \circ p)(b) = u(a) \cdot u(b),$$

u bir cebir homomorfizmasıdır.

Bir $a \in A$ için $\hat{a}$, A'' de a nın bir görüntü olsun. $\hat{f} \in L''$ ve $f \in L'$ için

$$\nu_{\hat{a}}(\hat{f}) = \hat{a} \circ \hat{f}(f) = \hat{a}(\psi_{f, \hat{f}}) = (\psi_{f, \hat{f}})(a) = \hat{f}(a \cdot f) = a \cdot \hat{f}(f) = u(a) \hat{f}(f)$$

buradan $\nu_{\hat{a}} \in Orth(L'')$ 'dür.

$I(A)$, A'' de A ile üretilen ideal ve $0 \preceq F \in I(A)$ olsun. Bu nedenle $0 \preceq F \preceq \hat{a}$ olacak

şekilde bir $a \in A$ vardır.

$\nu: A'' \rightarrow Orth(L'')$ pozitif iken $0 \preceq \nu_F \preceq \nu_a$ ise $\nu_F \in Orth(L'')$ dir.

$I(A)$ da $G_\alpha \uparrow F$ olacak şekilde bir G_α alalım. $0 \preceq \psi_{f, \hat{f}} \in A'$ iken

her $f \in L'_+$ ve $\hat{f}' \in L''$ için

$$G_\alpha(\psi_{f, \hat{f}}) \uparrow F(\psi_{f, \hat{f}}),$$

$$G_\alpha \circ \hat{f}(f) \uparrow F \circ \hat{f}(f),$$

$$G_\alpha \circ \hat{f} \uparrow F \circ \hat{f},$$

$$\nu_{G_\alpha} \uparrow \nu_F \text{ dir.}$$

$\nu_{G_\alpha} \in Orth(L'')$ ve $Orth(L'')$ band olduğundan $\nu_F \in Orth(L'')$ dir.

Her $F \in A''$ için

$$\nu: A'' \rightarrow Orth(L'')$$

fonksiyonu

$$\nu(F) = \nu_F$$

şeklinde tanımlansın.

Her $\hat{f} \in L''$ ve $f \in L'$ için,

$$((F \cdot G) \cdot \hat{f})(f) = (F \cdot G)(\hat{f} \cdot f) = F((G \cdot \hat{f}) \cdot f) = (F \cdot (G \cdot \hat{f}))(f)$$

Buradan her $F, G \in A''$ için $\nu_{F \cdot G} = \nu_F \cdot \nu_G$ olduğundan ν bir cebir homomorfizmasıdır.

A'' de $F \wedge G = 0$ olsun. O zaman $F \cdot G = 0$ iken $Orth(A'')$ de

$$\nu(F \cdot G) = \nu_F \cdot \nu_G = 0 \text{ dir.}$$

Diğer yandan $Orth(A'')$ birimli bu nedenle yarı asal f-cebiri olduğundan

$\nu(F) \wedge \nu(G) = 0$ dir. ν bir ayrıklığı koruyandır ve (Pagter ve Huijsmans [29]) dan bir

Riesz homomorfizmasıdır.

Sonuç 5.7 [14,37]

(Teorem 5.6)'nın bir sonucu olarak L'' , A'' f-cebiri üzerinde bir f-modüldür.

Teorem 5.8 [14,37] A bir f-cebiri olmak üzere L , A üzerinde bir f-modül olsun.

A'' Arens çarpımına göre f-cebir olduğundan L'' Riesz uzayı A'' üzerinde bir f-modüldür.

Her $f \in L$, $\hat{f} \in L'$, $F \in A''$ için

$$A'' \times L'' \rightarrow L''$$

$$(F, \hat{f}) \rightarrow (F \cdot \hat{f})(f) = \hat{f}(F \cdot f)$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar.

1. Her $F, G \in A''$, $\hat{f}, \hat{g} \in L''$ için,

$$F \cdot (G \cdot \hat{f}) = (F \cdot G) \hat{f}$$

2. $0 \preceq F \in A''$, $0 \preceq \hat{f} \in L''$, $F \cdot \hat{f} \succeq 0$

3. Eğer L'' de $\hat{f} \perp \hat{g}$ ise L'' de $F \cdot \hat{f} \perp \hat{g}$ dir.

Önceki teoremden E , A'' de birim eleman ve $\hat{f} \in L''$ iken $E \cdot \hat{f} = \hat{f}$ sağlayan bir

L'' Riesz uzayı A'' üzerinde bir f-modüldür.

5.3 Bir Riesz Cebirinin İkinci Duali Üzerinde Topolojik Dolu Olması

Tanım 5.9 [14,37] L'' , A'' üzerinde birimli f-modül iken $0 \preceq \hat{g} \preceq \hat{f}$ sağlayan L'' de keyfi $\hat{f}$ ve $\hat{g}$ vektörleri için $\sigma(L'', L')$ de $a_\alpha \cdot \hat{f} \rightarrow \hat{g}$ olacak şekilde A'' de $0 \preceq a_\alpha \preceq E$ sağlayan bir $\{a_\alpha\}$ neti varsa L'' f-modülü A'' üzerinde **topolojik olarak doludur** denir.

Teorem 5.10 [14,37] Eğer L , A üzerinde bir f-modül ise A'' f-modülü A'' ne göre topolojik olarak doludur.

İspat:[14,37] $0 \preceq \hat{g} \preceq \hat{f}$ olacak şekilde $\hat{f}, \hat{g} \in A''$ olsun. p fonksiyonu ile $\pi \in Orth(A'')$ alırsak,

$0 \preceq F \preceq E$ iken $p(F) = \pi$ olacak şekilde $F \in A''$ vardır. Yani, $p(F)(\hat{f}) = F \cdot \hat{f} = \hat{g}$.

A, A'' de $|\sigma|(A'', A')$ yoğun olduğundan [21], A de $0 \preceq a_\alpha \preceq e$ iken $a_\alpha \rightarrow F$ olacak şekilde bir $\{a_\alpha\}$ ağı vardır.

Böylece $a_\alpha \cdot \hat{f} \rightarrow F \cdot \hat{f}$ ve $\sigma(A'', A')$ de $a_\alpha \cdot \hat{f} \rightarrow \hat{g}$ dir.

Örnek 5.11 [14,37] L bir Riesz uzayı olsun. Her $\hat{\pi} \in Z(L)''$, $\hat{f} \in L''$, $f \in L$ için,

$$Z(L)'' \times L'' \rightarrow L''$$

$$(\hat{\pi}, \hat{f}) \rightarrow (\hat{\pi} \cdot \hat{f})(f) = \hat{f}(\hat{\pi} \cdot f)$$

fonksiyonu L'' nün $Z(L)''$ üzerinde f-modül olduğunu gösterir.

Böylece $Orth(L'') \subseteq L_b(L'', L''; Z(L)'') \subset L_b(L'')$ dır.

Örnek 5.12 [14,37] L bir Riesz uzayı olsun. Her $\hat{\pi} \in Z(L)''$, $x \in L$, $f \in L$ için,

$$Z(L)'' \times L' \rightarrow L'$$

$$(\hat{\pi}, f) \rightarrow (\hat{\pi} \cdot f)(x) = f(\hat{\pi} \cdot x)$$

fonksiyonu L' nün $Z(L)''$ üzerinde f-modül olduğunu gösterir.

Böylece $Orth(L') \subseteq L_b(L', L'; Z(L)'') \subset L_b(L')$ dır.

Teorem 5.13 [14,37] L, A üzerinde bir f-modül olsun. Keyfi bir $f \in L'$ için

$$S(f) = \{\psi_{f, \hat{f}} : \hat{f} \in L''\}$$

kümesi A' de sıra idealdir.

İspat: [14,37] $S(f)$, A' nin alt uzayı olduğu aşikar olduğundan $S(f)$ in Riesz alt uzayı olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $\psi \in S(f)$ için $\psi^+ \in A'_+$ olduğunu göstermeliyiz.

B_{ψ^+} , A' de ψ^+ ile üretilen band ve

$$P_\psi : A' \rightarrow B_{\psi^+}$$

B_{ψ^+} üzerinde bir band projeksiyonu olsun.

$P_\psi \in Z(A')$ ve $A'' = Orth(A')$ (Pagter, Huijsmans [12]) olduğundan her $h \in A'$ için

$P_\psi(h) = v_F(h) = F \cdot h$ sağlayan $F \in A''$ vardır.

Yani, $F \cdot \psi = P_\psi(\psi) = \psi^+$ dır.

Bu nedenle $F \cdot \psi \in S(f)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir $f \in L'$ için $\psi \in S(f)$ ise $\psi = \psi_{f, \hat{f}}$ dır.

Keyfi $a, b \in A$ için

$$\psi_{f, \hat{f}} \cdot a(b) = \psi_{f, \hat{f}}(a \cdot b) = \psi_{f, \hat{f}}(b \cdot a) = \hat{f}((b \cdot a) \cdot f) = \hat{f}(b \cdot (a \cdot f)) = \psi_{a \cdot f, \hat{f}}(b) \text{ dır.}$$

Bir $F \in A''$ için

$$F \cdot \psi_{f, \hat{f}}(a) = F(\psi_{f, \hat{f}} \cdot a) = F(\psi_{a \cdot f, \hat{f}}) = F \circ \hat{f}(a \cdot f) = \psi_{f, F \circ \hat{f}}(a) \text{ dır.}$$

Buradan $F \cdot \psi_{f, \hat{f}} \in S(f)$ dir.

$S(f)$ in sıra ideal olduğunu göstermek için $\mu \in A'$ ve bir $\hat{f} \in L''$ için

$0 \preceq \mu \preceq \psi_{f, \hat{f}}$ olsun. A' Dedekind Tam olduğu için $\pi(\psi_{f, \hat{f}}) = \mu$ sağlayan

$\pi \in Orth(A') = A''$ vardır.

Yani, bir $G \in A''$ için $v_G = \pi$ dir. Bu nedenle

$$\pi(\psi_{f, \hat{f}}) = \mu = v_G(\psi_{f, \hat{f}}) = G \cdot \psi_{f, \hat{f}} = \psi_{f, G \circ \hat{f}} \text{ elde edilir.}$$

Tanım 5.14 [14,37] L, A üzerinde bir f-modül olsun. Bir $f \in L'$ için

$$S(f) = \{\psi_{f, \hat{f}} : \hat{f} \in L''\}$$

kümesinin $\sigma(A'', A')$ topolojisine göre kapanışına f nin **destek kümesi** denir ve $\text{supp}(f)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.15 [14,38] L, A üzerinde bir f -modül olsun. $f, g \in L'$ için

$$\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \{0\}$$

olması için gerek ve yeter koşul $f \perp g$ olmasıdır.

İspat: [14,38] $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \{0\}$ olsun.

A' Dedekind Tam olduğundan $\text{supp}(f)$ ve $\text{supp}(g)$ birer projeksiyon bandıdır.

Bu nedenle $\text{supp}(f) \perp \text{supp}(g)$ dir.

$\hat{f} \in L_+''$ olsun.

$$\psi_{f, \hat{f}} \perp \psi_{g, \hat{f}} \Rightarrow \left| \psi_{f, \hat{f}} \right| \wedge \left| \psi_{g, \hat{f}} \right| = 0, \psi_{|f| \wedge |g|, \hat{f}} = 0 \text{ dan}$$

$$\hat{f}(|f| \wedge |g|) = 0 \text{ ve } |f| \wedge |g| = 0 \text{ bulunur.}$$

$f \perp g$ olsun.

$L' \times L'' \rightarrow A'$ fonksiyonunu

$(f, \hat{f}) \rightarrow \psi_{f, \hat{f}}$ pozitif olarak tanımlayalım.

$$\psi_{f, \hat{f}} \preceq \psi_{|f|, \hat{f}} \preceq \psi_{|f|, \hat{f} \vee |g|},$$

$$\psi_{g, \hat{g}} \preceq \psi_{|g|, \hat{g}} \preceq \psi_{|g|, \hat{f} \vee |g|},$$

$$\left| \psi_{f, \hat{f}} \right| \wedge \left| \psi_{g, \hat{g}} \right| \preceq \psi_{|f|, \hat{f} \vee |g|} \wedge \psi_{|g|, \hat{f} \vee |g|} = \psi_{|f| \wedge |g|, \hat{f} \vee |g|} = 0 \text{ dir.}$$

Bu nedenle her $\hat{f}, \hat{g} \in L''$ için $\psi_{f, \hat{f}} \perp \psi_{g, \hat{g}}$ dir.

O halde $S(f) \perp S(g)$ ve $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \{0\}$ bulunur.

5.4 F-Ortomorfizması

Tanım 5.16 [14,37,38] L ve M, A üzerinde f -modül ve $T \in L_b(L, M)$ olsun.

Her $x \in L$ için $S(Tx) \subset S(x)$ ise T ye bir **f-ortomorfizması** denir.

Tüm f-ortomorfizmaların koleksiyonunu $Orth(L, M; A)$ ile gösteririz.

Teorem 5.17 [14,38] L ve M A üzerinde topolojik dolu olan f-modül olsun.

1. Eğer $T \in Orth(L, M; A)$ ise $T' \in Orth(M', L'; A'')$ olur.
2. Eğer $T' \in Orth(M', L'; A'')$ ise $T'' \in Orth(L'', M''; A'')$ dır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bir f -cebiri alınarak ikinci sıra duali üzerinde tanımlı modüller üzerinde çalışılmıştır. Bu konu f -cebiri yerine d -cebiri, hemen hemen f -cebiri alınarak da incelenebilir. Buradan elde edilen neticeler araştırılabilir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Freudenthal, H., (1936). "Teilweise Geordnete Moduln", Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. , 39: 641-651.
 - [2] Kantorovitch, L.V., (1935). "On Partially Ordered Linear Spaces and Their Applications in The Theory of Linear Operators", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 4: 13-16, Russian: 168.
 - [3] Kantorovitch, L.V., (1936). " Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires", C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 202:813-816
 - [4] Kantorovitch, L.V., (1936). "Les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques das un espace semi-ordonné linéaire arbitraire", C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 202: 1251-1253, 309.
 - [5] Kantorovitch, L.V., (1936). "Concerning the general theory of operations in partially ordered spaces", Dokl. Akad. Nauk SSSR 1: 283-286, Russian, 67.
 - [6] Kantorovitch, L.V., (1937). "Lineare halbgeordnete raume" , Math. Sbornik, 44: 121-168, 405.
 - [7] Kantorovitch, L.V., (1937). "On the moment problem for a finite interval", Dokl. Akad. Nauk SSSR 14: 531-537 (Russian), 353.
 - [8] Riesz, F., (1930). "Sur la decomposition des operations lineaires", Atti. Congr. Internaz. Mat. Bologna 3: 143-148.
 - [9] Birkhoff, (1967). Lattice Theory, 3rd Edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. ,25,Providence, RI.
 - [10] de Pagter, B., (1981). F-Algebras and Orthomorphisms, Thesis, Leiden.
 - [11] Huijsmans, C.B., Bernau, S.J., (1995). "The Order Bidual of Almost F-Algebras and D-Algebras", Transactions of the American Mathematical Society, 347.
 - [12] Huijsmans, C.B. ve de Pagter B., (1984). "The Order Bial of Lattice Ordered Algebras", Journal of Functional Analysis, 59: 41-64.
 - [13] Huijsmans, C.B., (1989). "The order bial of lattice ordered algebras II", J. Operator Theory, 22: 277 -290.
 - [14] Turan, B., (2000). " On f-Linearity and f-Orthomorphisms", Positivity 4: 293-301.

- [15] Wickstead, A.W., (1981). "Extremal structure of cones of operators", Quart. J. Math. Oxford (2)32: 239-253.
- [16] Wickstead, A.W., (2009). "Banach lattices with topologically full center", Vladikavkaz Mathematical Journal, 11 (2): 50-60.
- [17] Orhon, M., (2010). "The Ideal Center of Dual of a Banach Lattice", Positivity, 14: 10. 4: 841-847.
- [18] Gök, Ö., (1997). Fonksiyonel Analize Giriş, YTÜ yayını, FE. MAT-97.002.
- [19] Meyer, P. ve Nieberg, (1991). Banach Lattices, Universitext, Springer, Berlin, xvi+395.
- [20] Luxemburg, W.A.J. ve Zaanen, A.C., (1971). Riesz Spaces I, North Holland, Amsterdam.
- [21] Alibrantis, C. D. ve Burkinshaw, O. , (1985). Positive operators, Academic Press, Orlando.
- [22] Wickstead, A.W. , (2002). "Vector and Banach lattices" Pure Mathematics Research Centre, Queen's University Belfast.
- [23] Schaefer, H.H., (1974). Banach lattices and positive operators', Springer, Berlin.
- [24] Abramovich, Y.A. ve Aliprantis, C.D., (2002). An Invitation to Operator Theory, Amer. Math. Soc. , 51.
- [25] Zaanen, A.C., (1997). Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer, Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [26] Zaanen, A.C., (1983). Riesz Spaces II, North Holland, Amsterdam.
- [27] Arens, R., (1951). "The adjoint of a bilinear operation", Proc. Amer. Math. Soc. 2: 839-848.
- [28] Hungerford, T.W., (1980) . Algebra, Springer.
- [29] Huijsmans, C.B. ve de Pagter, B., (1984). "Subalgebras and Riesz Subspaces of an f-Algebra", Proc. London Math. Soc. (3), 48: 161-174.
- [30] Abramovich, Y.A. ve Aliprantis, C.D. ,(2002). Problems in Operator Theory .
- [31] Wickstead, A.W., (1988). "Banach Lattice with a Trivial Center", Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 88: 71-83.
- [32] Wickstead, A.W., (1977). "The Structure Space of a Banach Lattice", J. Math Pures Appl. (9)56: 33-45.
- [33] Gök, Ö., (2002). "On Maharam Extensions of Positive Operators on Banach F-modules", Int. J. Appl. Math, 11: 309-321.
- [34] Abramovich, Y.A., Arenson, E.L. ve Kitover, A.K., (1992). Banach $C(K)$ Modules and Operators Preserving Disjointness, Pitman Lecture Note Series, U.S.A. New York.

- [35] Scheffold, E., (1991). "Der Bidual von F-Banachverbandsalgebren", Acta Sci. Math. 55: 167-179.
- [36] Gök, Ö. ve Pestil Yıldız, Ş., (2013). "On The Center of Banach f-Modules", Pure Mathematical Science, no 1: 49-54.
- [37] Gök, Ö. ve Pestil Yıldız, Ş., (2013). "Extended Results On f-Orthomorphisms Over The Second Order Dual of an f-algebra", Pure Mathematical Science, no 3: 109-114.
- [38] Feng, Y., Chen, X.J. ve Chen, Z.L., (2012). "f-Orthomorphisms and f-Linear Operators On The Order Dual Of an f-Algebra", Abstract and Applied Analysis, 1-7.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Şebnem YILDIZ PESTİL

Doğum Tarihi ve Yeri :26.04.1982- Samsun

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :sebnempestil@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2007
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2005
Lise	Fen	Milli Piyango Anadolu Lisesi	2000

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Kurum	Görev
2010	Ahi Evran Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLAR

Makale

- 1.. **Pestil Yıldız, Ş.**, (2011). "Some Observations on Banach Lattices", Acta Universitatis Apulensis, ICTAMI, Alba Iulia, Romania.
- 2.. **Pestil Yıldız, Ş.**, (2012). "Families of Positive Operators with Reverse Order", Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, Cluj Napoca, Romania.
- 3.. Gök, Ö., **Pestil Yıldız, Ş.**, (2013). "On the Center of Banach f-Modules", Pure Mathematical Sciences, Vol. 2, no 1: 49-54.
- 4.. Gök, Ö., **Pestil Yıldız, Ş.**, (2013). "Extended Results on f-Orthomorphisms over the second Order Dual of an f-algebra", Pure Mathematical Sciences, Vol 2, no 3: 109-114.

Bildiri

1. **Pestil Yıldız, Ş.**, (2011). "Some Observations on Banach Lattices", Acta Universitatis Apulensis, ICTAMI, Alba Iulia, Romania.
2. **Pestil Yıldız, Ş.**, (2011). "Families of Positive operators with reverse order", Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, Cluj Napoca, Romania.
3. **Pestil Yıldız, Ş.**, (2011). "Central operators on Banach lattices with topologically full center", International conference on Applied Analysis and Algebra", Yıldız Technical University, İstanbul.
4. **Pestil Yıldız, Ş.**, (2012). "The Space of Weak Orthomorphisms", International conference on Applied Analysis and Algebra", Yıldız Technical University, İstanbul.

5. Gök, Ö., **Pestil Yıldız, Ş.**, (2013).” On the Center of Banach f -Modules”, International conference on Applied Analysis and Algebra”, Yildiz Technical University, İstanbul.

Proje

1. YTÜ DOP projesi. Proje Yönetici: Prof. Dr. Ömer GÖK, (2011-2012). “Banach f -Modüllerinin Merkezi ve f -Ortomorfizmalar Üzerinde Genişletilmiş Sonuçlar”,Proje No: 2012-01-03-DOP01.

Ödül

1. Tübitak 2008-2013 Yurt içi doktora bursu