

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

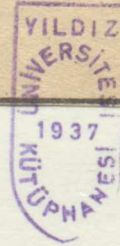
HİPERBOLİK KİSMİ TÜREVİLİ DENKLEMLERİ

Behiç Çagal

Doktora Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R 209
Alındığı Yer : Fen Bil. Ens. 50
Tarih : 26.5.1987
Fatura :
Fiatı : 1000 ₺
Ayniyat No : 1/6
Kayıt No : 44812
UDC : 511.4
Ek : 378.242



İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa

Ö Z E T.....	II
S U M M A R Y.....	IV
I. SPLINE FONKSİYONLARI.....	1
1.1. SPLINE FONKSİYONU NEDİR?.....	1
1.2. KÜBİK SPLINE FONKSİYONU.....	6
1.2.1. Kübik Spline Fonksiyonunun Momentler Yardımları ile Elde Edilişi.....	6
1.2.2. Kübik Spline Fonksiyonlarının Düşüm Noktalarındaki Birinci Mertebeden Türevlerin Kullanılmasıyla İfade Edi- lişi.....	11
1.2.3. Kübik Spline Fonksiyonları ile Inter- polasyonda Hata.....	15
2. HİPERBOLİK KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN KÜBİK SPLINE FONKSİYONLARI KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BİR YAKLAŞIM.....	20
2.1. GİRİŞ.....	20
2.2. SABİT KATSAYILI HAL.....	21
2.2.1. Sabit Katsayılı Hal İçin Nümerik İşlem Sırası.....	25
2.3. SONLU FARK YAKLAŞIMLARI KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜM.....	29
2.4. HATA ANALİZİ.....	30
2.5. DEĞİŞKEN KATSAYILI HAL.....	32
2.6. NÜMERİK UYGULAMA.....	34
2.7. PROGRAMLAR VE ÇIKTILARI.....	36
S O N U Ç	58
K A Y N A K L A R.....	59
Ö Z G E Ç M İ Ş.....	62

Ö Z E T

Bu çalışmada kübik spline fonksiyonları kullanılarak hiperbolik kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümü için bir algoritma uygulanmaya çalışılmıştır. Aynı denklemlerin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri ve kübik spline fonksiyonları kullanılarak yapılan nümerik çözümlerinde hata analizleri yapılmıştır.

Çalışma iki bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde spline fonksiyonları ve bilhassa kübik spline fonksiyonları özetlenmiştir.

İkinci bölümde, başlangıç ve sınır koşulları fonksiyonlar olarak verilmiş, genel hiperbolik kısmi türevli denklemlerde bir doğrultuda kübik spline fonksiyonları kullanılarak nümerik çözüm yolu oluşturulmaya çalışılmıştır. Bunun için,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$

denkleminde, eşitliğin sol tarafında t 'ye göre türev için sonlu fark gösterilimi, sağ tarafta ise kübik spline fonksiyonları kullanılmıştır.

Oluşturulan nümerik çözüm yolunda işlem sırası ve hata analizi ile, sonlu fark şemasının ve sonlu farklar için hata analizinin özetleri de bu bölüm kapsamındadır.

Aynı bölümde sabit katsayılı bir hiperbolik denklem için nümerik uygulama ve bilgisayar programı ile çeşitli adım uzunlukları için çıktılar verilmiştir.

Her iki yöntem karşılaştırıldığında,

- 1° E_{sp} ve E_{SF} ile gösterilen kesme hatalarının aynı olduğu,
- 2° Her iki yöntemde de çözümlerin elde edilmesi sırasında yapılan işlem sayısının hemen hemen aynı olduğu,
- 3° Her iki yöntemde de katsayı matrisi üçlü band matris olan denklem sistemlerinin çözülmesinin gerektiği,
- 4° Bilgisayar işlem zamanlarının büyük farklılık göstermediği,
- 5° Kübik spline fonksiyonlarının kullanılmasında sonlu farkların kullanılmasına göre ayrıca bir interpolasyon işlemine gerek kalmadan ara noktalarda fonksiyon değerlerinin bulunmasının mümkün olduğu ve bunun uygulamacıya kolaylık sağlayacağı,

saptanmıştır.
$$a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u$$

$$0 \leq x \leq 1, t > 0$$

finite difference representation for the derivative according to t on the left side of the equation and cubic spline functions on the right side have been used.

The order of procedures and error analysis in the method of numerical solution together with the summaries for the finite difference diagram and error analysis for finite differences have been included in this chapter.

S U M M A R Y

In this thesis an algorithm for the numerical solution of hyperbolic partial differential equations has been developed by using cubic spline functions. In the numerical solution of the same equations with finite difference methods and in those with cubic spline functions, error analysis have been carried out.

1. That, the truncation errors shown by E_{sp} and E_{sf}

The thesis consists of two parts. In the first part, spline functions, particularly cubic spline functions have been summarized. In both methods seen equally viable terms of obtaining solution,

In the second part, initial and boundary conditions have been given as functions, and a method of numerical solutions has been tried to form by using cubic spline functions on a certain direction in general hyperbolic partial derivative equations. In the equation for this,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u$$

That, in the use of cubic spline functions, it

is possible to find the function values in

intermediate points without resorting to an

interpolation process and that this will provide.

finite difference representation for the derivative according to t on the left side of the equation and cubic spline functions on the right side have been used.

The order of procedures and error analysis in the method of numerical solution together with the summaries for the finite difference diagram and error analysis for finite differences have been included in this chapter.

In the same chapter, numerical application for a hyperbolic equation with constant coefficient and a computer program have been given together with outputs for various step lengths.

When each method has been compared, it has been determined:

1. That, the truncation errors shown by E_{sp} and E_{SF} are the same order,
2. That, in both methods seem equally viable terms of obtaining solution,
3. That, in both methods, require the evaluation of a tridiagonal system of equations,
4. That, computer process times have not shown important difference,
5. That, in the use of cubic spline functions, it is possible to find the function values in intermediate points without resorting to an interpolation process and that this will provide.

1. $S(x)$ fonksiyonu ve bunun $(m-1)$ 'ci mertebeye kadar türevleri $[a,b]$ aralığında sürekli.

2. $S(x)$ fonksiyonu ve bunun $(m-1)$ 'ci mertebeye kadar türevleri $[a,b]$ aralığında sürekli.

I. SPLINE FONKSİYONLARI (SPLINE FUNCTIONS)

1.1. SPLINE FONKSİYONU (SPLINE FUNCTION) NEDİR?

Spline fonksiyonları, parça parça (piecewise) veya belli polinom tipli fonksiyonların bir sınıfıdır. Polinomlardan biraz daha az bağlayıcı olarak süreklilik şartını sağlarlar. Bu nedenle polinomların genel bir şekli olarak tanımlanabilirler. Spline fonksiyonlarının adı, mühendislikte kullanılan ve "spline" denilen bir mekanik aletten gelmektedir. Bu alet düzgün bir eğri çizebilmek için teknik ressamlar ve tarafından kullanılır. Aletin esası, çizilecek eğrinin işaretlenmiş belirli noktalardan geçmesini sağlamak için kullanılan çelik veya plastik bir şerittir.

$[a, b]$ aralığında x değişkeni ile gösterilen, $a=x_0$, $x_1, \dots, x_n = b$ dizisi ve bunlara karşılık gelen bağımlı değişken değerleri bir Y vektörü içinde $Y: y_0, y_1, \dots, y_n$ olarak verilsin. $S(x)$ ile gösterilen m 'ci dereceden bir Spline fonksiyonu (spline function), aşağıdaki iki şartı sağlayan ve reel $[a, b]$ aralığında belirlenmiş bir fonksiyondur.

1. Her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında $S(x)$ fonksiyonu m 'ci ya da daha az dereceden bir polinomdur. Burada $i=0(1)n$ değerlerini alır ve $x_0 = -\infty$, $x_n = \infty$ olabilir.

2. $S(x)$ fonksiyonu ve bunun $(m-1)$ 'ci mertebeye kadar türevleri $[a, b]$ aralığında süreklidir.

Açık olarak görüldüğü gibi ikinci koşul, seçilen Spline fonksiyonunun düğüm noktalarında sürekliliği sağlaması içindir.

Tek dereceden yani $k > 0 \wedge k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $(2k-1)$ 'ci dereceden bir Spline fonksiyonu, $[a,b]$ sonlu aralığı dışında, $(-\infty, a)$ ve $(b, +\infty)$ aralıklarında $(k-1)$ 'ci dereceden bir polinoma indirgenebilirse, böyle Spline fonksiyona "tabii Spline fonksiyonu" denir. Bu tür fonksiyonlar $S^N(x)$ şeklinde sembolize edilirler.

Spline polinomunun derecesi $m = 0$ ise ikinci koşul işlemez ve Spline fonksiyonu adım fonksiyonu (step function) halini alır. Şayet $m = 1$ ise, Spline fonksiyonu bir kırık çizgi ailesi olur. $S(x)$ Spline fonksiyonu genellikle $[x_{i-1}, x_i]$ ve $[x_i, x_{i+1}]$ gibi iki komşu aralıkta farklı polinomlar olarak verilmiştir. Çok özel durumlarda $S(x)$ Spline fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tamamında bir tek polinom olarak verilebilir. Başka bir deyimle Spline fonksiyonu, adım fonksiyonunun m 'inci mertebeden belirsiz integrali gibi tanımlanabilir.

$S(x)$ Spline fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının uç noktalarında,

$$S^{(p)}(a) = S^{(p)}(b^-) \quad p = 0(1)(m-1) \quad (1.1)$$

bağıntısını sağlıyorsa bu tür Spline fonksiyonlarına periyodik Spline fonksiyonları denir. Spline fonksiyonları için, çeşitli kaynaklarda birbirinden biraz farklı sayılabilecek tanımlara rastlanmaktadır. Birincisi D.J. Fyfe (1964), Bickley, Schoenberg (1964) tarafından önerilen ve genel şekli

$$S(x) = p(x) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i (x-x_i)^m \quad (1.2)$$

olan Spline fonksiyonudur. Burada i her bir alt aralığın başlama noktasının indisidir. $x_0 = a$ ve $x_n = b$ alınmıştır. $P(x)$ $(m-1)$ 'ci ya da daha az dereceden polinomlar cümlesinin bir elemanıdır. Sonra komşu iki alt aralığın ortak düğüm nokta-

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{m-1}(x-x_0)^{m-1} \quad (1.3)$$

şeklindedir. $[x_0, x_1]$ aralığında m 'ci dereceden Spline fonksiyonu,

$$S(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{m-1}(x-x_0)^{m-1} + d_0(x-x_0)^m$$

ikinci tanıma bağlı olarak, F.B. Loscalzo ve (1.4)

olur. Daha sonraki her $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1(1)(n-1)$ alt aralığı için $d_i (x-x_i)^m$ terimi ilave edilerek $[a,b]$ aralığının tamamında geçerli olabilecek Spline fonksiyonu Denk. (1.2)'deki gibi yapılabilir. Bu tür uygulamada m tane a_i $i = 0(1)(m-1)$ ve n tane d_i $i = 0(1)(n-1)$ olmak üzere $m + n$ tane bilinmeyen mevcuttur. Bilinmeyen bu katsayılar, Spline fonksiyonunun varlığı tanımı ve sınır koşulları yardımıyla belirlenir.

Derecesi m olan $S(x)$ Spline fonksiyonu için bir başka tanım Gerald (1970) tarafından verilmiştir. Buna göre her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında farklı olan Spline fonksiyonları,

$$S(x) = a_{0i} + a_{1i}(x-x_i) + a_{2i}(x-x_i)^2 + \dots + a_{(m-1)i}(x-x_i)^{m-1} + a_{mi}(x-x_i)^m \quad (1.5)$$

gibi düşünülmüştür. Burada bilinmeyen a_{ji} $j = 0(1)m$ katsayıları aşağıdaki şekilde bulunurlar.

Önce her bir $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığının uç noktaları için $S(x_i)$ ve $S(x_{i+1})$ yazılır. Denk. 1.5 ile verilen $S(x)$ 'in $(m-1)$ 'ci mertebeye kadar türevleri alınarak x_i, x_{i+1} noktalarında bu türevler değerlendirilir. $S(x)$ fonksiyonunun $(m-1)$ 'ci mertebeden türevleri M_i $i = 0(1)n$ ile gösterilirler. Böylece a_{ji} [$j = 0(1)m, i = 0(1)n$] katsayıları, M_i 'ler cinsinden ifade edilirler. Sonra komşu iki alt aralığın ortak düğüm nokta-

larında $S(x)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden türevlerinin yani bu noktadaki teğetlerinin eğimlerinin aynı olması koşulu ile elde edilen ve katsayı matrisi üç köşegenli band matris olan denklem sistemi çözülerek M_i $i = 0(1)n$ değerleri ve bunlara bağlı olarak da a_{ji} katsayıları belirlenir.

şeklinde Spline fonksiyonu yazılır.

İkinci tanıma bağlı kalınarak, F.R. Loscalzo ve T.D. Talbot tarafından $y' = f(x,y)$ şeklindeki diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemi olarak sayısal çözümleri için önerilen Spline fonksiyonlar da Taylor Seri açılımına benzer. Diferansiyel denklem

olur. Ahlberg, Nilson, Walsh'ın önerdiği bir başka şekilde

belirlenir. Bu şekilde $M_i = S^{(m-1)}(x_{i+1})$ ve $h_i = x_{i+1} - x_i$ $i = 0(1)(n-1)$ olmak üzere

$$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq L |y - y^*| \quad a \leq x \leq b$$

Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, $y(a) = y_0$ başlangıç değeri ile, $y(x)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü vardır. $n, m \in \mathbb{N}^+$ ve $n > m$ olmak üzere, $h = (b-a)/n$ olacak şekilde, m 'ci dereceden $S(x)$ Spline fonksiyonları, $x = a + h, a + 2h, \dots, a + (n-1)h$ düğüm noktaları olduğunda ilk $[a, a + h]$ alt aralığı için

$$S(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} y^{(m-1)}(a)(x-a)^{m-1} + \frac{1}{m!} b_0 (x-a)^m \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada b_0 katsayısı bilinmeyendir. Ancak bu $x = a + h$ için, $y' = f(x,y)$ diferansiyel denkleminin Spline fonksiyonunca sağlanması koşulundan,

$$S'(a + h) = f(a + h, S(a + h)) \quad (1.7)$$

bağıntısı ile kolayca bulunur. İşleme devam edilerek k 'ci alt aralık için

$$S(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} S^{(j)}[a + (k-1)h] [x - (a + (k-1)h)]^j + \frac{1}{m!} [x - (a + (k-1)h)]^m b_{k-1} \quad (1.8)$$

şeklinde Spline fonksiyonu yazılır.

$$S'(a + kh) = f(a + kh, S(a + kh)) \quad (1.9)$$

bağıntısı ile b_{k-1} katsayıları daha sonra da her bir $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığı için Spline fonksiyonunun son şekli belirlenmiş olur. Ahlberg, Nilson, Walsh'ın önerdiği bir başka şekilde belirlenen Spline fonksiyonları da vardır. Buna göre, $M_i = S^{(m-1)}(x_{i+1})$ ve $h_i = x_{i+1} - x_i$ $i = 0(1)(n-1)$ olmak üzere her bir $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığı için

$$S^{(m-1)}(x) = M_i \left[\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right] + M_{i+1} \left[\frac{x - x_i}{h_i} \right] \quad (1.10)$$

olarak alınır. Denk. 1.10 m'ci dereceden bir Spline fonksiyonunun (m-1)'ci mertebeden türevinin lineer olması varsayımı ile yazılmıştır. Denk. 1.10'un m-1 kez belirsiz integralinin alınması ile her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında

$$S(x) = (-1)^{m-1} M_i \frac{(x_{i+1} - x)^m}{(m-1)! h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^m}{(m-1)! h_i} + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_{m-1} \quad (1.11)$$

bulunur. Buradaki $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ integrasyon sabitleri, $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralıklarının uçları olan x_i ve x_{i+1} düğümlerinde $S(x), S'(x), \dots, S^{(m-1)}(x)$ 'lerin, çözüm fonksiyonu $f(x)$ ve türevlerine eşit olması koşullarından elde edilen (m-1) tane bağıntı yardımı ile bulunur. Bu tür gösterilişle

M_i 'leri bilinmeyen olarak bulunduran bir denklem sistemi ile karşılaşılr. Katsayı matrisi üçlü band matris olan bu sistemin çözümü ile M_i 'ler bulunur. Böylece $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralıklarının her biri için $S(x)$ Spline fonksiyonları belirlenmiş olur.

Spline fonksiyonları çok eski bir geçmişe sahip olmalarına rağmen ancak 1960'lardan sonra birçok problemin sayısal çözümlerinin bulunmasında başarı ile kullanılmışlardır. Bu problemlerden biri de hiperbolik denklemlerin sayısal çözümleri olabilir.

1.2. KÜBİK SPLİNE FONKSİYONU

Spline fonksiyonlarının uygulamalarda kullanılmasında bazı güçlükler vardır. $S(x)$ Spline polinomunun derecesi arttıkça işlemler karmaşıklaşır, problemin boyutu büyür. Bu nedenlerle genelde $k = 2$ olmak üzere, üçüncü dereceden interpolasyon fonksiyonları, yani kübik spline fonksiyonlarının kullanılması düşünülür.

Kübik Spline fonksiyonlarının elde edilişleri için de çeşitli yöntemler kullanılır.

1.2.1. Momentler Yardımı ile Elde Edilişi

Kübik Spline fonksiyonlarının bu yöntemle elde edilğinde, genel olarak (a,b) aralığının her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında $S(x)$ ile gösterilen öyle bir fonksiyon aranır ki, bu fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci türevleri (a,b) aralığının tamamında sürekli olsun. Böyle bir Spline fonksiyon her alt aralıkta bir kubik ile çakışır ve $S(x_i) = y_i$ $i = 0(1)n$ sağlanır.

Kısım 1.1 de verilen üçüncü tanıma göre $S(x)$ 'in ikinci türevlerini yani $S''(x_i)$ $i = 0(1)n$ değerlerini M_i ile göstererek ve kübik polinomun ikinci türevinin lineer olması nedeniyle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ alt aralığı için $S(x)$ kubik spline fonksiyonunun ikinci türevi

$$S''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (1.12)$$

şeklinde yazılır. Burada $h_i = x_i - x_{i-1}$ alınmıştır. Bu denklemle verilen $S''(x)$ ifadesinin ardarda integrasyonu ile $S(x)$ Spline fonksiyonu elde edilir.

Denk. 1.12 bir kez integre edilerek

$$S'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})}{2h_i} + C_1 \quad (1.13)$$

bulunur. Burada C_1 integrasyon sabitidir. Bu yeni denklem tekrar integre edilirse

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_1 x + C_2 \quad (1.14)$$

elde edilir. $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığına karşılık gelen y_{i-1} ve y_i değerlerinin $y_{i-1} = S(x_{i-1})$ ve $y_i = S(x_i)$ koşulunun sağlaması varsayımından

$$y_{i-1} = M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + C_1 x_{i-1} + C_2 \quad i = 1(1)n \quad (1.15)$$

$$y_i = M_i \frac{h_i^2}{6} + C_1 x_i + C_2 \quad i = 1(1)n \quad (1.16)$$

gibi iki denklem elde edilir. Denk. 1.15 ve Denk. 1.16'nın ortak çözümünden integrasyon sabitleri C_1 ve C_2

$$C_1 = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (M_i - M_{i-1}) \frac{h_i}{6} \quad (1.17)$$

yazılır. Burada $h_i = x_i - x_{i-1}$ ve $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ olarak kullanılır. Buradan $C_2 = \frac{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}{h_i} - (x_i M_{i-1} - x_{i-1} M_i) \frac{h_i}{6}$ (1.18)

olarak bulunur. İntegrasyon sabitlerinin bu değerleri Denk. 1.12 ve Denk. 1.13'de yerine konarak

$$S'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i \quad (1.19)$$

türev bağıntısı ile her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığı için,

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (y_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6}) (\frac{x_i - x}{h_i}) + (y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) (\frac{x - x_{i-1}}{h_i}) \quad (1.20)$$

kübik spline fonksiyonu elde edilir. Denk. 1.20'de bilinmeyen olarak M_i $i=0(1)n$ kalmıştır. Bu M_i 'lerin bulunması için $[x_{i-1}, x_i]$ ve $[x_i, x_{i+1}]$ komşu aralıklarının ortak düğüm noktalarındaki türev ifadeleri

$$S'(x_{i-}) = \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad (1.21)$$

$$S'(x_{i+}) = \frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \quad (1.22)$$

yazılır. Burada $h_i = x_i - x_{i-1}$ ve $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ olarak kullanılmıştır.

$$S'(x_i-) = S'(x_i+) \quad (1.23)$$

olarak yazılır. Her $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığı için yazılan bu şekildeki denklemler M_i değerlerine bağlıdır. Denk. 1.22'nin varsayımından Denk. 1.21 ve Denk. 1.22 yardımıyla

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = \quad (1.23)$$

$$= - \frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \quad (1.24)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenecek

$$\frac{h_i}{6} M_{i+1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \quad (1.25)$$

şeklinde veya

$$\alpha_i = \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i \quad (1.26)$$

tanımı ile yeniden

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \alpha_i M_{i+1} =$$

$$d_i = \frac{[(y_{i+1} - y_i) / h_{i+1}] - [(y_i - y_{i-1}) / h_i]}{h_i + h_{i+1}} \quad (1.27)$$

olarak yazılır. Her $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığı için yazılan bu şekildeki denklemler M_i değerlerine bağlıdır. Denk. 1.27'nin sağ tarafını $i=1(1)(n-1)$ için

$$d_i = \frac{[(y_{i+1} - y_i) / h_{i+1}] - [(y_i - y_{i-1}) / h_i]}{h_i + h_{i+1}} \quad (1.28)$$

olarak ifade edilip aynı denklem $i=1(1)(n-1)$ için

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \alpha_i M_{i+1} = d_i \quad (1.29)$$

Bu denklem sisteminin çözümü ile M_i 'ler bulunur. şeklinde yazılır. $i=0$ ve $i=n$ durumları için uç koşullarının verilişine göre farklı d_0 ve d_n değerleri elde edilir.

Tabii spline fonksiyonlarında $m=3$ olması durumunda her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında kübik spline fonksiyonları aşağıda açıklandığı gibi bulunur.

$S(x)$ fonksiyonunun $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ aralığında lineer olması varsayımından

$$S''(a) = S''(b) = 0 \quad (1.30)$$

$$S''(x_i) = y_i \quad i=0(1)n \quad (1.31)$$

$$M_0 = M_n = 0 \quad (1.31)$$

olurki, bu durumda kübik spline fonksiyonu tabii spline fonksiyon olur. O zaman Denk. 1.27 ile M_i bilinmeyenleri için aşağıdaki gibi bir denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 2 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \alpha_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-2} & 2 & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-3} \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Bu denklem sisteminin çözümü ile M_i 'ler bulunur. Bulunan M_i değerleri Denk. 1.20'de yerine konarak her $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığı için (a, b) aralığı boyunca kübik spline fonksiyonları bulunmuş olur.

1.2.2. Kübik Spline Fonksiyonlarının Düğüm Noktalarındaki Birinci Mertebeden Türevlerin Kullanılmasıyla İfade Edilişi

Teorem 1.1. $x_i, i=0(1)n, n \geq 2$ düğüm noktaları bu noktalara karşılık gelen y_i değerleri verilsin. O zaman öyle bir $S^N(x)$ kübik spline fonksiyonu vardır ki,

$$S^N(x_i) = y_i \quad i=0(1)n \quad (1.33)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: $S^N(x)$ 'in polinom parçaları aşağıdaki gibi yazılır.

$$P_{3,0}(x) = C_{1,0} + C_{2,0} (x-x_0), \quad -\infty < x \leq x_0 \quad (1.40)$$

$$P_{3,i}(x) = C_{1,i} + C_{2,i} (x-x_i) + C_{3,i} (x-x_i)^2 +$$

$$+ C_{4,i} (x-x_i)^3, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad i=0(1)n-1 \quad (1.34)$$

$$P_{3,n}(x) = C_{1,n} + C_{2,n} (x-x_n) \quad x_n \leq x < +\infty \quad (1.42)$$

ve

$$P_{3,i-1}(x_i) = P_{3,i}(x_i) = y_i \quad i=0(1)n \quad (1.35)$$

olması istenir. Eğer,

$$m_i = P'_{3,i-1}(x_i) = P'_{3,i}(x_i) \quad i=0(1)n \quad (1.36)$$

olarak bilinirse o zaman $P_{3,i}$ polinomlarının katsayıları kolayca bulunabilir.

$$C_{1,0} = y_0 \quad C_{1,i} = y_i \quad i=0(1)n \quad (1.37)$$

$$C_{2,0} = m_0 \quad C_{2,i} = m_i \quad i=0(1)n \quad (1.38)$$

$C_{3,i}$ ve $C_{4,i}$ katsayıları da,

$$P_{3,i}(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad P'_{3,i}(x_{i+1}) = m_{i+1} \quad (1.39)$$

denklem 1 ile verilen bağıntılara denktir. Denk. 1.40 ile şartları ile belirlenir. $\Delta x_i = h_i = x_i - x_{i-1}$ $i=1(1)n$ için, verilen denklem sisteminde, $C_{3,i}$ ve $C_{4,i}$ için Denk. 1.42 ve

$$C_{1,i} + C_{2,i} h_i + C_{3,i} h_i^2 + C_{4,i} h_i^3 = y_{i+1} \quad (1.40)$$

$$C_{2,i} + 2C_{3,i} h_i + 3C_{4,i} h_i^2 = m_{i+1} \quad (1.41)$$

bağıntılarına denktir. Denk. 1.40 ve Denk. 1.41 $C_{3,i}$ ve $C_{4,i}$ için $y_i, y_{i+1}, m_i, m_{i+1}$ 'e göre çözülürse,

$$h_i C_{3,i} = 3f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i - m_{i+1} \quad i=1(1)(n-1) \quad (1.42)$$

$$h_i^2 C_{4,i} = -2f[x_i, x_{i+1}] + m_i + m_{i+1} \quad (1.43)$$

bulunur. Burada,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \quad (1.44)$$

dır.

Henüz bilinmeyen olarak bulunan m_i 'ler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P''_{3,i}(x_{i+1}) = P''_{3,i+1}(x_{i+1}) \quad i=0(1)(n-1) \quad (1.45)$$

koşulları,

$$\begin{aligned} i=0 & \quad \text{için} & 0 &= C_{3,1} \\ i=1 & \quad \text{için} & C_{3,1} + 3h_1 C_{4,1} &= C_{3,2} \\ i=2 & \quad \text{için} & C_{3,2} + 3h_2 C_{4,2} &= C_{3,3} \\ & \dots & & \\ & \dots & & \\ i=n-2 & \quad \text{için} & C_{3,n-2} + 3h_{n-2} C_{4,n-2} &= C_{3,n-1} \\ i=n-1 & \quad \text{için} & C_{3,n-1} + 3h_{n-1} C_{4,n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

denklemleri ile verilen bağıntılara denktir. Denk. 1.46 ile verilen denklem sisteminde, $C_{3,i}$ ve $C_{4,i}$ için Denk. 1.42 ve Denk. 1.43 ile verilmiş değerler yerine konursa,

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= 3f[x_0, x_1] \\ h_i m_{i-1} + 2[x_{i+1} - x_{i-1}] m_i + h_{i-1} m_{i+1} \\ &= 3f[x_{i-1}, x_i] h_i + 3f[x_i, x_{i+1}] h_{i+1} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$i=1(1)(n-1)$

$$m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n]$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem, m_i $i=0(1)n$ 'lere göre katsayı matrisi üç köşegenli band matris olan lineer bir sistemdir. Denk. 1.47 ile verilen bu sistemin her zaman bir tek çözümü vardır. Böylece m_i $i=0(1)n$ bilinirken $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$, $C_{4,i}$ $i=0(1)n$ Denk. 1.37, Denk. 1.38, Denk. 1.40 ve Denk. 1.41 ile belirlenmiş olur. Böylece teoremden ispat edilmiş olur.

Genelde yapılan işlemlerde $h_i = x_{i+1} - x_i$ ile verilen alt aralık uzunlukları $h_i = h$ olarak alınır. Böyle olunca Denk. 1.44,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (1.48)$$

şeklini alır. Denk. 1.47'den

$$2m_0 + m_1 = \frac{3}{h} [y_1 - y_0] \quad (1.51)$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h} [y_{i+1} - y_{i-1}] \quad i=1(1)n-1 \quad (1.49)$$

$$m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h} [y_n - y_{n-1}]$$

şeklinde bir sisteme dönüşür. $C_{k,i}$, $k=1(1)4$, $i=1(1)n$ katsayılarının bulunuşu farklı uzunluklu alt aralıkların kullanılması halinde olduğu gibidir.

1.2.3. Kübik Spline Fonksiyonları ile Interpolasyonda Hata

Kübik spline fonksiyonları ile yapılan interpolasyonda hata, diğer interpolasyon yöntemlerindeki hataların araştırılmasından farklı değildir.

$\alpha, x_0, x_1, \dots, x_n$, $n \geq 1$ verilmiş ise genel interpolasyon formülü

$$f(\alpha) = B_0 f(x_0) + B_1 f(x_1) + \dots + B_n f(x_n) + E[f;\alpha] \quad (1.50)$$

olsun. Bu formül n . ci ya da daha az dereceden polinomlar için tam olarak doğrudur. Spline fonksiyonları ile interpolasyonda $E[f;\alpha]$ ile gösterilen hata aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenebilir.

Teorem 1.2. n alt aralık sayısı, m 'de interpolasyon polinomunun derecesi olmak üzere, $1 \leq m \leq n$ eşitsizliği sağlandığında, sadece m , α, x_i $i=0(1)n$ 'e bağlı öyle bir $K_m(t)$ fonksiyonu vardır ki; $f(x)$, $W_m^m[M_m; a, b]$ fonksiyon sınıflarına ait olduğunda,

$$E[f;\alpha] = \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt \quad (1.51)$$

olur. Ayrıca $K_m(t)$, $0 \leq t \leq 1$ ve $k \leq m$ olsun. 0 zaman,

$$(x-t)_+^i = \begin{cases} (x-t)^i & x \geq t \\ 0 & x < t \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: Bir M_m sabiti için, $f(x) \in W^m [M_m; a, b]$ olduğu düşünölsün. 0 zaman $f(x)$ fonksiyonu,

$$Q_{m-1}(x) = f(a) + (x-a) f^{(1)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) \quad (1.53a)$$

$$R_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b (x-t)_+^{m-1} f^{(m)}(t) dt \quad (1.53b)$$

olmak üzere

$$f(x) = Q_{m-1}(x) + R_m(x)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir. $E[f;a]$ bir lineer fonksiyonel olduğundan,

$$\begin{aligned} E[f;a] &= E[Q_{m-1} + R_m; \alpha] \\ &= E[Q_{m-1}; \alpha] + E[R_m; \alpha] \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $f(x)$ $(m-1)$ 'ci veya daha az dereceden bir polinom olduğunda, interpolasyon tam olacağından,

$$E[Q_{m-1}; \alpha] = 0$$

dir. Bu da,

$$E[f; \alpha] = E[R_m; \alpha] \quad (1.54)$$

olmasını gerektirir. 0 zaman, f fonksiyonları sınıfının bir

$$E[R_m; \alpha] = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b (\alpha-t)_+^{m-1} f^{(m)}(t) dt -$$

$$- \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=1}^n P_{(m+1),i}(\alpha) \int_a^b (x_i-t)_+^{m-1} f^{(m)}(t) dt$$

(1.57a)

olur. Yukarıdaki bağıntıdaki integraller birleştirilirse

$$E[R_m; \alpha] = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b \{(\alpha-t)_+^{m-1} -$$

$$- \sum_{i=1}^n P_{m-1,i}(\alpha)(x_i-t)_+^{m-1}\} f^{(m)}(t) dt$$

(1.55)

elde edilir. Burada $P_{m-1}(\alpha)$, dereceden tabii spline polinomudur. Bundan sonra,

$$K_m(t) \cong \frac{1}{(m-1)!} \{(\alpha-t)_+^{m-1} - \sum_{i=1}^n P_{m-1,i}(\alpha)(x_i-t)_+^{m-1}\} \quad (1.56)$$

yapılabilir. Denk. 1.54, Denk. 1.55 ve Denk. 1.56 bileştirildiğinde Denk. 1.51 bulunur.

Denk 1.50 ye göre tabii kübik ara interpolasyon fonksiyonları için, Teorem 1.2 ile $f(x)$, $W^2[M_2; a, b]$ fonksiyonları sınıfına ait olmak üzere,

$$E[f; \alpha] = \int_a^b K_2(t) f^{(2)}(t) dt$$

olacak şekilde bir $K_2(t)$ Peano fonksiyonu bulunabilir. Burada $[a, b]$, α , $x_1, x_2 \dots x_n$ 'leri içeren küçük bir aralıktır.

$1 \leq m \leq n$, $f(x)$, $W_m^m [M_m; a, b]$ fonksiyonları sınıfının bir fonksiyonu,

$$e_m = \int_a^b |K_m(t)| dt$$

ve $[a, b]$ de x için $|f^{(m)}(x)| \leq M_m$ olduğunda

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.57a)$$

eşitsizliğinin bir uygulaması olarak,

$$\begin{aligned} |E[f; \alpha]| &= \left| \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |K_m(t)| |f^{(m)}(t)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^b |K_m(t)| M_m dt \\ &= M_m \int_a^b |K_m(t)| dt \end{aligned}$$

$$= M_m e_m$$

yani

$$|E[f; \alpha]| \leq e_m M_m$$

ile spline fonksiyonlarında hata üst sınırı bulunabilir.

2. HİPERBOLİK KİSMİ TÜREVİLİ DENKLEMLERİN KÜBİK SPLİNE FONKSİYONLARI KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR YAKLAŞIM

2.1. G İ R İ Ş

Kısmi türevli denklemler uygulamalı bilimlerde çokça karşılaşılan ve genelde analitik çözümlerinin bulunması güç olan ya da analitik çözüme imkân vermeyen güçlü problemlerdir. Çoğu kez analitik çözümün mevcut olması da uygulayıcı için bir anlam ifade etmeyebilir.

Uygulamacı için nümerik çözüm önceliklidir. Nümerik çözümlerde de en az hata ve en kısa işlem zamanı gözönünde bulundurulmaktadır. İşte bu iki unsurun olabilmesi için bilgisayarların gelişmesine paralel olarak çeşitli nümerik çözüm yöntemleri geliştirilmektedir.

Bu bölümde hiperbolik kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümlerinde spline fonksiyonlarının bir kullanılış şekli tanımlanacak ve hata analizi yapılacaktır.

Çalışmada, başlangıç ve sınır koşulları tanımlanan hiperbolik kısmi türevli denklemin sabit katsayılı ya da değişken katsayılı olması hallerinde spline fonksiyonları ikinci taraftaki x 'e göre türevler için kullanılmıştır. Zamana göre türevler için sonlu fark yaklaşımı uygulanması düşünülmüştür.

$U(x, t)$ fonksiyonunun,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u$$

$$0 \leq x < 1, \quad t > 0$$

hiperbolik kısmi türevli denkleminin sabit katsayılı hali için çalışma yapılacaktır. Daha sonra değişken katsayılı hal için bir genelleme yapılabilir.

2.2. SABİT KATSAYILI HAL

$$a=a(x,t)=St, \quad b=b(x,t)=St, \quad c=c(x,t)=St$$

durumunu ele alalım. $U(x,t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu \quad 0 \leq x < l, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

hiperbolik kısmi türevli denklemini,

$$u(0,t) = f_1(t), \quad u(l,t) = f_2(t) \quad (2.2)$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0) = g_1(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g_2(x) \quad (2.3)$$

başlangıç koşulları sağlasın.

Yukarıdaki sınır koşullarını daha genel olarak

$$\alpha_1(t) u(0,t) + \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f_1(t)$$

$$\alpha_2(t) u(l,t) + \alpha_4(t) \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = f_2(t)$$

gibi yazmak da mümkündür. Burada $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ bilinen fonksiyonlardır.

kübik spline fonksiyonunu gösterirler.

Denk. 2.1'de zamana göre türev için sonlu fark yaklaşimleri, x 'e göre türevler için de kübik spline fonksiyonları kullanılırsa (i, j) ağ noktasında

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} \cong a M_{ij} + b m_{ij} + c u_{ij}$$

yazılır.

$0 \leq \theta < 1$ ve sifıra yakın bir sabit olmak koşuluyla ve

$$\theta(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) \cong 0$$

$$\theta(M_{i,j-1} - 2M_{i,j} + M_{i,j+1}) \cong 0$$

$$\theta(m_{i,j-1} - 2m_{i,j} + m_{i,j+1}) \cong 0$$

olabileceği varsayımı da kullanılarak bu terimler yukarıdaki denklemin ikinci yanına eklenirse

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} = a\{\theta M_{i,j-1} + (1-2\theta)M_{i,j} + \theta M_{i,j+1}\} +$$

$$+ b\{\theta m_{i,j-1} + (1-2\theta)m_{i,j} + \theta m_{i,j+1}\} +$$

$$+ c\{\theta u_{i,j-1} + (1-2\theta)u_{i,j} + \theta u_{i,j+1}\} \quad (2.4)$$

$$i=0(1)N, \quad j=1, 2, \dots, N_h=\ell$$

olur. Burada $m_{i,j} = S_j'(x_i)$, $M_{i,j} = S_j''(x_i)$ ve $u_{i,j}$ 'ler de j . zaman çizgisinde $S_j(x)$ 'ler tarafından enterpole edilen kübik spline fonksiyonunu gösterirler.

Ahlberg, Nilson ve Walsh [1] den j . zaman için $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında

$$S_j(x) = M_{i-1,j} \frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_{i,j} \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + (u_{i-1,j} - \frac{h^2}{6} M_{i-1,j}) \frac{(x_i - x)}{h} + (u_{i,j} - \frac{h^2}{6} M_{i,j})$$

$$+ \frac{(x - x_{i-1})}{h} \quad i=1(1)N \quad (2.5)$$

yazılır. Buradan,

$$m_{i,j} = S'_j(x_{i+1}) = -\frac{h}{3} M_{i,j} - \frac{h}{6} M_{i+1,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (2.6)$$

$$i=0(1)(N-1)$$

$$m_{i,j} = S'_j(x_{i-1}) = \frac{h}{3} M_{i,j} + \frac{h}{6} M_{i-1,j} + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \quad (2.7)$$

$$i=1(1)N$$

şeklinde yazılabilen birinci türevlerin düğüm noktalarında sürekli olması koşulu $M_{i,j}$ 'ler için aşağıdaki bağıntıyı çıkarır.

$$\frac{1}{6} M_{i-1,j} + \frac{2}{3} M_{i,j} + \frac{1}{6} M_{i+1,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad i=1(1)N-1 \quad (2.8)$$

Benzer yaklaşımlar $(j-1)$ ci ve $(j+1)$ ci zamanlarda da elde edilebilir. Denk. 2.6 ve Denk. 2.7'nin uygun biçimde kullanılması ile $m_{i,j}$ 'ler arasında da aşağıdaki bağıntıyı bulabiliriz.

$$\frac{1}{6} m_{i-1,j} + \frac{2}{3} m_{i,j} + \frac{1}{6} m_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (2.9)$$

$$i=1(1)(N-1)$$

Aynı bağıntılar (j-1) ve (j+1), zamanlar içinde benzer şekilde yazılır.

Denk. 2.4, $M_{i,j}$ ve $m_{i,j}$ 'leri Denk. 2.6, Denk. 2.7, Denk. 2.8 ve Denk 2.9 bağıntılarını (j-1) ci ve (j+1) ci zamanlar için kullanıp, sonuç bağıntısında

$$r = k/h$$

$$\beta_1 = 6ar^2 - 3brk + ck^2$$

$$\beta_2 = 3ar^2 - ck^2$$

ve

$$\beta_3 = 6ar^2 + 3brk^2 + ck^2$$

kullanarak yok ettiğimizde,

$$(1-\beta_1\theta)u_{i-1,j+1} + 4(1+\beta_2\theta)u_{i,j+1} + (1-\beta_3\theta)u_{i+1,j+1} = \{2+\beta_1(1-2\theta)\} u_{i-1,j} + 4\{2-\beta_2(1-2\theta)\} u_{i,j} + \{2+\beta_3(1-2\theta)\} u_{i+1,j} - (1-\beta_1\theta)u_{i-1,j-1} - 4(1+\beta_2\theta)u_{i,j-1} - (1-\beta_3\theta)u_{i+1,j-1} \quad (2.10)$$

$$- (1-\beta_3\theta)u_{i+1,j-1} \quad i=1(1)(N-1) \quad (2.11)$$

şeklindeki bir bağıntıya dönüştürülür.

F.G. Ragget, P.D. Wilson [19] da kübik spline fonksiyonları ile hiperbolik kısmı türevli denklemin nümerik çözümü için yukarıdakine benzer bir algoritma tanımlanmaktadır. (2.14)

lar. Ancak Denk. 2.4 deki $m_{i,j}$ 'lerin hesaplanması daha karmaşık birtakım işlemleri gerektirmektedir.

Yukarıda formülasyonu verilen yöntem için ilk iki adımda x bileşeni doğrultusundaki çözümler için de sonlu fark yaklaşımlarının kullanılmasına gerek duyulacaktır. Buna göre nümerik işlem sırasını aşağıda verebiliriz. (2.15)

2.2.1. Sabit Katsayılı Hal İçin Nümerik İşlem Sırası

Denk. 2.15 $M_{i,0}$ ve $m_{i,0}$ 'da dahil olmak üzere $M_{i,0}$, $i=0(1)N$ ile bilinen sistem oluşur. Bu denklemleri çözüldüğünde yukarıda belirtilen bilinmeyenler $M_{i,j}$ ve $m_{i,j}$ 'lerin hesabı için Denk. 2.6 ve 2.7 kullanılır.

Denk. 2.3 de verilen başlangıç koşulu Denk. 2.8 de $j=0$ için kullanılırsa

$$\frac{1}{6}M_{i-1,0} + \frac{2}{3}M_{i,0} + \frac{1}{6}M_{i+1,0} = \frac{g_1(x_{i-1}) - 2g_1(x_i) + g_1(x_{i+1}))}{h^2} \quad (2.11)$$

$i=1(1)(N-1)$

olur. Böylece $N+1$ bilinmeyen içeren $N-1$ tane denklemden oluşmuş ve katsayı matrisi üçlü band matris olan bir denklem sistemi bulunur. Ayrıca Denk. 2.4'de $\theta=0$ ve $j=0$ koyup Denk. 2.3 de türev için verilen koşulda merkez fark formülü kullanılırsa

$$k^2(aM_{0,0} + bm_{0,0}) = 2 [f_1(k) - f_1(0) - kg_2(p)] - ck^2 f_1(0) \quad (2.12)$$

ve

$$k^2(aM_{N,0} + bm_{N,0}) = 2 [f_2(k) - f_2(0) - kg_2(l)] - ck^2 f_2(0) \quad (2.13)$$

bulunur. Denk. 2.6 ile Denk. 2.10'da $j=0$ koyup, Denk. 2.3

$$m_{0,0} = -\frac{h}{3}M_{0,0} - \frac{h}{6}M_{1,0} + \frac{g_1(h)-g_1(0)}{h} \quad (2.14)$$

ve Denk. (2.7) ile de

$$m_{N,0} = \frac{h}{3}M_{N,0} + \frac{h}{6}M_{N-1,0} + \frac{g_1(l)-g_1(x_{N-1})}{h} \quad (2.15)$$

bulunur.

Denk. 2.11, Denk. 2.12, Denk. 2.13, Denk. 2.14 ve Denk. 2.15 $m_{0,0}$ ve $m_{N,0}$ 'da dahil olmak üzere $M_{i,0}$, $i=0(1)N$ ile birlikte $N+3$ bilinmeyenlerden oluşan bir lineer sistem oluşturur. Bu denklem sistemi çözüldüğünde yukarıda belirtilen bilinmeyenler elde edilir.

$m_{1,0}$ $i=1(1)(N-1)$ 'lerin hesabı için Denk. 2.6 ve Denk. 2.7'nin ortalaması alınarak bulunan

$$m_{i,j} = \frac{h}{12} (M_{i-1,j} - M_{i+1,j}) + \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (2.16)$$

$$i=1(1)(N-1)$$

$m_{1,0}$ ve $m_{i,0}$ $i=0(1)N$ 'lerin hesabı $M_{i,0}$ ve bağıntısı $j=0$ için kullanılır. bir yine Denk. 2.3 deki bağıntısı Denk. 2.4 da bu kez $j=1$ için kullanılır. $N+1$

Böylece belirlenen $M_{i,0}$ $i=0(1)N$ 'ler yardımı ile $t=0$ yani $j=0$ 'da herhangi noktada kübik spline fonksiyonları ile çözüm Denk. 2.5 bağıntısı kullanılarak herhangi noktalarda bulunabilir.

2.Adım: $t=k$ anında ($j=1$) ki nümerik çözümlerin bulunması;

Bunun için önce Denk. 2.10'da $j=0$ koyup, Denk. 2.3'deki türev için başlangıç koşulları da bir merkezi fark yaklaşımı olarak kullanılır. Buradan N-1 denklemden oluşan aşağıdaki denklem sistemi çıkar.

$$2(1-\beta_1\theta)u_{i-1,1} + 8(1+\beta_2\theta)u_{i,1} + 2(1-\beta_3\theta)u_{i+1,1} = \quad (2.19)$$

$$\{2+\beta_1(1-2\theta)\} g_1(x_{i-1}) + 4\{2-\beta_2(1-2\theta)\} g_1(x_i) + \quad (2.20)$$

$$+ \{2+\beta_3(1-2\theta)\} g_1(x_{i+1}) + 2k(1-\beta_1\theta) g_2(x_{i-1}) +$$

$$+ 8k(1+\beta_2\theta) g_2(x_i) + 2k(1-\beta_3\theta) g_2(x_{i+1}) \quad (2.17)$$

$$i=1(1)(N-1)$$

$u_{0,1}=f_1(k)$ ve $u_{N,1}=f_2(k)$ alınır. Denk. 2.17 ile verilen sistem katsayı matrisi üçlü band matris olan bir lineer denklem sistemi olarak kolayca çözülür ve $t=k$ yani $j=1$ 'de $u_{i,1}$ $i=1(1)N-1$ 'ler bulunur.

3.Adım: $M_{i,1}$ ve $m_{i,1}$ $i=0(1)N$ 'lerin hesabı $M_{i,0}$ ve $m_{i,0}$ 'ların hesabında olduğu gibi yine Denk. 2.3'deki başlangıç koşulu Denk. 2.8'de bu kez $j=1$ için kullanılır. N+1 bilinmeyen içeren N-1 denklemden oluşmuş

$$\frac{1}{6}M_{i-1,1} + \frac{2}{3}M_{i,1} + \frac{1}{6}M_{i+1,1} = \frac{u_{i-1,1} - 2u_{i,1} + u_{i+1,1}}{h^2} \quad (2.18)$$

$$i=1(1)N-1$$

sistemi bulunur.

band matris olan Lineer denklem sistemi oluşur. Bu sistem çözülerek $u_{i,j+1}$ 'ler bulunur.

5.Adım: $m_{i,j-1}$, $m_{i,j}$, $M_{i,j-1}$, $M_{i,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i,j}$ ve $u_{i,j+1}$ bilinen değerleri kullanılarak Denk. 2.4 ile $m_{i,j+1}$ ve $M_{i,j+1}$ bilinmeyenlerini içeren $i=0(1)N$ $N+1$ denklemden oluşan bir sistem bulunur. Bu sistemde $2(N+1)$ bilinmeyen mevcuttur. Denk. 2.6'da $i=0$ ve Denk. 2.7'de $i=N$ alınarak iki denklem daha elde edilir. Geriye kalan $N-1$ tane denklem de Denk. 2.16'da ($j=1$). zaman içinde bulunur. Böylece tamamlanan sistem çözülür. $M_{i,j+1}$ 'ler Denk. 2.5'de kullanılarak $S_{j+1}(x_i) \cong u_{i,j+1}$, $i=0(1)N$ 'ler bulunur. Ve dördüncü adıma dönülerek işlem sürdürülür.

2.3. SONLU FARK YAKLAŞIMLARI KULLANILARAK NÜMERİK ÇÖZÜM

Denk. 2.1 ile verilen ve Denk. 2.2 sınır, Denk. 2.3 başlangıç koşullarını içeren kısmi türevli hiperbolik denklemin sonlu farklar kullanılarak yaklaşık çözüm için genel ifade, $Nh=l$, $\alpha \geq 0$ olmak koşulu ile

$$\begin{aligned}
 & u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} = ar^2 \{ \alpha(u_{i-1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}) \\
 & + (1-2\alpha)(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \alpha(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \\
 & + \frac{bhr^2}{2} \{ \alpha(u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}) + (1-2\alpha)(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\
 & + \alpha(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}) \} + ck^2 \{ \alpha u_{i,j-1} + (1-2\alpha)u_{i,j} \\
 & + (1-2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i,j+1} \} \quad i=0(1)N, j=1,2,\dots \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

gibidir. Burada $r = \frac{k}{h}$ 'dır.

$\alpha=0$ olması halinde en yakın sonlu fark ifadesi bulunur.

Bu tür yaklaşımda, $u_{0,j}$, $u_{N,j}$ $j=0, 1, 2, \dots$ çözümleri Denk. 2.2 sınır koşulları kullanılarak, $u_{i,0}$ ve $u_{i,1}$ çözümleri de Denk. 2.3 ile seçilen sınır koşulları kullanılarak belirlenir. Daha sonraki zamanlar için $u_{i,j+1}$ çözümleri $u_{i,j-1}$ ve $u_{i,j}$ 'ler bilindiğine göre Denk. 2.23 ile oluşturulacak ve katsayı matrisi üçlü band matris olan Lineer denklem sisteminin çözümü ile bulunurlar. Tanımlanan bölgede aynı tür işlemler tekrarlanır.

2.4. HATA ANALİZİ

Denk. 2.10 ile verilmiş ve $(j-1)$, j , $(j+1)$. ci zamanları içeren üç seviyeli şema için kesme hatası, Denk. 2.10'un her bir terimi için (ih, jk) ağ noktası civarında Taylor seri açılımı kullanılmak suretiyle bulunabilir.

Kısmi türevler $t(\text{zaman})$ 'ye göre alındıklarından bulunacak hata çift mertebededir. 0 zaman Denk. 2.1 x 'e göre kısmi türevler alınmak suretiyle bu amaç için kullanılabilir. Böylece sabit katsayılı hal için, spline fonksiyonları ile nümerik çözümde kesme hatası

$$E_{sp} = k^2 h^2 [c^2 r^2 f(\theta) u + 2bcr^2 f(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \{r^2(2ac+b^2)f(\theta) - c^2 k^2 \theta/6\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + \{2abr^2 f(\theta) - bck^2 \theta/6\} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\ + \{a^2 r^2 f(\theta) + a/12 - ch^2/72 - ack^2 \theta\} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots] \quad ((2.24))$$

olur. Burada $f(\theta) = \frac{1}{12} (1 - ck^2\theta) - \theta^3$ alınmıştır. $f(u)$

Herhangi zamandaki ağ noktalarında u değerleri bilinmektedir. Bu değerler türevler için sonlu fark yaklaşımları kullanılmak suretiyle herhangi bir ağ noktasında kesme hatasının hesabında kullanılır. Bölgenin sınırlara yakın noktalarında ileri ya da geriye fark formülleri iç noktalarında ise merkezi fark formülleri kullanılır. Örneğin, (2.27)

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \cong \frac{1}{h^4} (u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}) \quad (2.25)$$

gibi, Denk. 2.24 ile kübik spline fonksiyonları için merkezi kesme hatası, Denk. 2.27 ile verilen ve a parantezleri seçildiğinde ve aynı sayıda terim

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \cong \frac{1}{2h^3} (u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j}) \quad (2.26)$$

Denk. 2.24 ile verilen kesme hatası ifadesinin $f(\theta)=0$ seçilmek suretiyle basitleştirilmesi düşünülebilir. Bunun için de θ 'nın

$$f(\theta) = \frac{1}{12} (1 - ck^2\theta) - \theta^3$$

dan $\theta = \frac{1}{(12+ck^2)}$ gibi seçilmesi gerekir. (2.28)

Genellikle, daha yüksek mertebeden türevler de, u' nin x' e göre türevleri ihmal edilebilir. O zaman kesme hatası $O(k^2h^2)$ mertebesinden $O(k^4h^2)$ mertebesine indirgenir.

Aynı sabit katsayılı kısmi türevli denklemin sonlu farklar kullanılarak nümerik çözümünde E_{SF} ile göstereceğimiz kesme hatası

$$E_{SF} = k^2 h^2 [c^2 r^2 f(\alpha) u + 2bcr^2 f(\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} + r^2 (2ac + b^2 f(\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \{2abr^2 f(\alpha) - \frac{b}{6}\} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \{ \alpha^2 r^2 f(\alpha) -$$

$$\frac{a}{12} \} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots] \quad (2.27)$$

şeklinde verilir. Buradaki $f(\alpha)$ Denk. 2.19'daki $f(\alpha)$ 'dır.

Görüldüğü gibi, Denk. 2.24 ile kübik spline fonksiyonları için verilenle kesme hatası, Denk. 2.27 ile verilen θ ve α parametreleri eşit seçildiğinde ve aynı sayıda terim alındığında aynıdır.

Genelde E_{sp} ve E_{SF} kesme hataları aynı mertebededir.

2.5. DEĞİŞKEN KATSAYILI HAL

Bu halde çözüm bölgesinin bütün noktalarında $a(x,t) \geq 0$ olmak koşulu ile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial x} [a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}] + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u \quad (2.28)$$

gibi bir diferansiyel denklemin nümerik çözümünü yapmak gerekir. Formülasyon ve sonuçların analizi sabit katsayılı hale göre çok daha karmaşıktır.

Ancak Kısım 2.2'de tanımlanan teknikler kullanılmak suretiyle Denk. 2.10 da verilene benzer bağıntılar değişken katsayılı hal içinde bulunabilir. Bu bağıntı (ih, jk) noktasında,

$$\phi_{i,j} = 1 - k^2 \theta c_{i,j}, \quad \gamma_{i,j} = r^2 a_{i,j}$$

$$\psi_{i,j} = 6\gamma_{i,j} - \beta_{i,j}, \quad \chi_{i,j} = 6\gamma_{i,j} + \beta_{i,j} \quad (2.29)$$

$$\beta_{i,j} = 3rk \left(\frac{da_{i,j}}{dx} + b_{i,j} \right) \quad (2.31)$$

olmak üzere,

$$(\phi_{i-1,j+1} - \theta \psi_{i,j+1}) u_{i-1,j+1} + 4(\phi_{i,j+1} + 3\theta \gamma_{i,j+1}) u_{i,j+1} +$$

$$+ (\phi_{i+1,j+1} - \theta \chi_{i,j+1}) u_{i+1,j+1} = \{ 2\phi_{i-1,j} + k^2 c_{i-1,j} (1 - 2\theta) \psi_{i,j} \}$$

$$u_{i-1,j} + 4\{ 2\phi_{i,j} + k^2 \ell_{i,j} - 3(1 - 2\theta) \gamma_{i,j} \} u_{i,j} +$$

$$+ \{ 2\phi_{i+1,j} + k^2 \ell_{i+1,j} + (1 - 2\theta) \chi_{i,j} \} u_{i+1,j} -$$

$$- (\phi_{i-1,j-1} - \theta \psi_{i,j-1}) u_{i-1,j-1} + 4(\phi_{i,j-1} + 3\theta \gamma_{i,j-1}) u_{i,j-1} \quad (2.34)$$

$$- (\phi_{i+1,j-1} - \theta \chi_{i,j-1}) u_{i+1,j-1} \quad i=1(1)(N-1) \quad (2.30)$$

yapılabilir. Değişken katsayılı hal için nümerik çözümde işlem sırası, sabit katsayılı hal için Kısım 2.3'de verilene benzer şekildedir. Ancak kesme hatası ile ilgili bağıntıların oluşturulabilmesi sabit katsayılı hal için verilenlerden çok daha karmaşıktır. Çünkü değişken katsayılı halde katsayı fonksiyonlarının da herhangi mertebeden türevlerinin alınmasını gerektirmektedir.

2.6. NÜMERİK UYGULAMA

Bu kısımda matematiksel fiziğin çeşitli alanlarında oluşan, örneğin; kuantum mekaniğinde C_1 ışık hızı,

$$\mu = MC_1/h \quad (2.31)$$

h : Plank sabiti/ 2π , M partikülün kütlesi $u(x,t)$ dalga fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 u = 0 \quad (2.32)$$

gibi oluşan ya da titreşen tel için elasite sabiti, T gerilme, ρ : Telin bir uzunluğunun kütlesi, V_0 ilk hız olduğunda hareket denklemi olarak,

$$\frac{1}{\sqrt{T/\rho}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\ell}{T} u \quad (2.33)$$

şeklinde

$$u(0,t)=0, \quad u(\ell,t)=0 \quad (2.34)$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = V_0 \quad (2.35)$$

başlangıç koşulları ile oluşan hiperbolik denkleminin

$$\bar{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \bar{t} = C_1 \bar{t}/\ell, \quad \bar{u} = C_1 u/(V_0 \ell) \quad (2.36)$$

dönüşümleri yapılmak suretiyle elde edilen Denk. 2.39 boyutsuz halinin nümerik çözümleri $\theta = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{12} \right) \frac{1}{2}$ ve $k = 0.0125$

(0.0125)0.1 için bir kez spline fonksiyonları kullanılarak bir kezde sonlu fark şemaları ile yapılmış, bunun için bilgisayar çıktıları verilmiştir.

Boyutsuz denklem;

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \quad (2.37)$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 \quad (2.38)$$

başlangıç koşulları ile $\lambda^2 = L/\rho$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda^2 u \quad (2.39)$$

gibidir.

KUBİK SPLİNE FONKSİYONUNDAN YARARLANILARAK
ELDE EDİLEN SONUÇLAR

I= 1 Q= 0.083334 K= 0.013 N= 10 İÇİN

FONKSİYON HATA

0.0000000000	0.0000000005
0.0316098347	-0.0000000001
0.0232524327	0.0000000000
0.0254639967	0.0000000000
0.0248696596	0.0000000000
0.0250635229	0.0000000000
0.0248732478	0.0000000000
0.0254494741	0.0000000000
0.0233076208	0.0000000000
0.0313999977	-0.0000000001
0.0000000000	0.0000000005

I= 3 Q= 0.083334 K= 0.013 N= 10 İÇİN

FONKSİYON HATA

0.0000000000	-0.0000000000
0.0905996303	0.0000000007
0.0719231284	-0.0000000003
0.0755222385	0.0000000001
0.0749132955	-0.0000000000
0.0749891780	0.0000000000
0.0749169454	-0.0000000000
0.0755001606	0.0000000001
0.0720395740	-0.0000000003
0.0900285732	0.0000000007
0.0000000000	0.0000034723

I= 5 Q= 0.083334 K= 0.013 N= 10 İÇİN

FONKSİYON HATA

0.0000000000	-0.0000000001
0.1382199031	0.0000000002
0.1257145408	-0.0000000001
0.1237870466	0.0000000000
0.1254518353	0.0000000000
0.1246004550	-0.0000000000
0.1254415194	0.0000000000
0.1238049924	0.0000000000
0.1257700509	-0.0000000001
0.1374322037	0.0000000002
0.0000000000	0.0222225116

I= 7 Q= 0.083334 K= 0.013 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000002
0.1707159886	0.0000000003
0.1841689602	-0.0000000001
0.1712015380	-0.0000000000
0.1758142303	0.0000000000
0.1743382624	-0.0000000000
0.1757855617	0.0000000000
0.1712923597	-0.0000000000
0.1840308854	-0.0000000001
0.1698942141	0.0000000008
0.0000000000	-0.0000000002

I= 9 Q= 0.083334 K= 0.013 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000001
0.1884414942	0.0000000001
0.2431459974	0.0000000003
0.2202605149	-0.0000000002
0.2248910408	0.0000000001
0.2247923337	-0.0000000000
0.2248622550	0.0000000001
0.2204065490	-0.0000000002
0.2427396728	0.0000000003
0.1877428880	0.0000000001
0.0000000000	-0.0000000001

I= 11 Q= 0.083334 K= 0.013 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000001
0.1950289465	0.0000000005
0.2964248326	0.0000000003
0.2734315463	-0.0000000001
0.2721928883	0.0000000000
0.2758897535	0.0000000000
0.2722022389	0.0000000000
0.2735524196	-0.0000000001
0.2957734810	0.0000000003
0.1945399195	0.0000000005
0.0000000000	-0.0000000001

I= 1 Q= 0.083333 K= 0.025 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000043
0.0626914242	-0.0000000004
0.0467778986	-0.0000000001
0.0508206139	0.0000000001
0.0497808174	-0.0000000000
0.0502935388	0.0000000000
0.0498059553	-0.0000000000
0.0507151969	0.0000000001
0.0471948317	-0.0000000000
0.0610484119	-0.0000000003
0.0000000000	0.0000000043
0.0000000000	-0.0000000012

I= 3 Q= 0.083333 K= 0.025 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000003
0.1574532054	0.0000000149
0.1543242659	-0.0000000059
0.1474610888	0.0000000016
0.1507780774	-0.0000000004
0.1494015915	0.0000000001
0.1506958235	-0.0000000004
0.1475697787	0.0000000014
0.1542471841	-0.0000000054
0.1540963890	0.0000000142
0.0000000000	0.0000006948

I= 5 Q= 0.083333 K= 0.025 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000003
0.1933495369	-0.0000000012
0.2715129106	0.0000000082
0.2458889634	-0.0000000051
0.2488846301	0.0000000020
0.2532724011	-0.0000000012
0.2488116758	0.0000000018
0.2465030679	-0.0000000046
0.2693332631	0.0000000078
0.1909432397	-0.0000000010
0.0000000000	0.0111116898
0.0000000000	-0.0000000012

I= 7 Q= 0.003333 R= 0.025 N= 10 ICIM

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000012
0.1949194759	0.0000000047
0.3548941005	0.0000000055
0.3612685649	0.0000000025
0.3422511371	-0.0000000026
0.3529689946	0.0000000024
0.3427659042	-0.0000000023
0.3607356458	0.0000000006
0.3516911312	0.0000000053
0.1941853524	0.0000000046
0.0000000000	-0.0000000012

I= 9 Q= 0.003333 R= 0.025 N= 10 ICIM

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000012
0.1945141099	-0.0000000064
0.3838703936	0.0000000064
0.4751773334	0.0000000049
0.4468490933	-0.0000000031
0.4402223163	0.0000000009
0.4475859099	-0.0000000020
0.4725619972	0.0000000047
0.3818509095	0.0000000062
0.1944013965	-0.0000000061
0.0000000000	0.0000000012

I= 11 Q= 0.003333 R= 0.025 N= 10 ICIM

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000012
0.1973733013	0.0000000065
0.3846501001	-0.0000000043
0.5482522361	0.0000000006
0.5659933108	0.0000000017
0.5270065253	-0.0000000054
0.5651711617	0.0000000019
0.5452531750	0.0000000001
0.3840306646	-0.0000000041
0.1971954455	0.0000000062
0.0000000000	-0.0000000012

I= 1 Q= 0.083343 K= 0.038 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000147
0.0327368339	0.0000000015
0.0707810389	-0.0000000017
0.0760000000	0.0000000000
0.0747534594	-0.0000000003
0.0752354514	0.0000000002
0.0748214208	-0.0000000002
0.0756999713	0.0000000005
0.0720613717	-0.0000000011
0.0972981071	0.0000000009
0.0000000000	0.0000000147

I= 3 Q= 0.083343 K= 0.038 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000146
0.1902942502	0.0000000009
0.2443296489	-0.0000000163
0.2193341713	-0.0000000025
0.2253875625	0.0000000034
0.2246196095	-0.0000000032
0.2250470529	0.0000000031
0.2228124452	-0.0000000029
0.2400050177	-0.0000000113
0.1838732358	0.0000000729
0.0000000000	0.0000104173

I= 5 Q= 0.083343 K= 0.038 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000107
0.1941321764	-0.0000000636
0.3682723289	0.0000000864
0.3919533736	-0.0000000209
0.3659793654	-0.0000000060
0.3750044310	0.0000000092
0.3675642125	-0.0000000070
0.3893726322	-0.0000000148
0.3612321830	0.0000000744
0.1931779147	-0.0000000539
0.0000000000	0.0074082756

I= 7 Q= 0.083343 K= 0.238 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000103
0.1970327758	0.0000000573
0.3849713892	-0.0000000523
0.5366530434	0.0000000762
0.5363954337	-0.0000000206
0.5034943832	-0.0000000065
0.5359139801	-0.0000000137
0.5293813623	0.0000000644
0.3832006214	-0.0000000408
0.1966517703	0.0000000497
0.0000000000	-0.0000000103

I= 9 Q= 0.083343 K= 0.038 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000089
0.1946365244	-0.0000000578
0.3882689432	0.0000000413
0.5724352729	-0.0000000274
0.6871657550	0.0000000679
0.6831724983	-0.0000000539
0.6787015869	0.0000000594
0.5705045272	-0.0000000182
0.3875732260	0.0000000325
0.1945591339	-0.0000000439
0.0000000000	0.0000000089

I= 11 Q= 0.083343 K= 0.038 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000076
0.1905554387	0.0000000433
0.3888272414	-0.0000000310
0.5653667713	0.0000000272
0.7519368029	-0.0000000412
0.8794930292	0.0000001103
0.7471426847	-0.0000000421
0.5633950103	0.0000000240
0.3894164646	-0.0000000230
0.1904444731	0.0000000371
0.0000000000	-0.0000000076

I= 1 Q= 0.083351 K= 0.050 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000347
0.1215438495	0.0000000128
0.0953584455	-0.0000000081
0.1010008440	0.0000000032
0.0997803120	-0.0000000011
0.1000662117	0.1200000005
0.0998980882	-0.0000000006
0.1004287885	0.0000000015
0.0980192246	-0.0000000042
0.1031921204	0.0000000080
0.0000000000	0.0000000347

I= 3 Q= 0.083351 K= 0.050 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000345
0.1961579357	0.0000000072
0.3244522188	0.0000000484
0.2999562676	-0.0000000621
0.2955728843	0.0000000314
0.3016394071	-0.0000000193
0.2960339446	0.0000000020
0.3017825919	-0.0000000456
0.3116315558	0.0000000515
0.1904963742	0.0000001783
0.0000000000	0.0000138918

I= 5 Q= 0.083351 K= 0.050 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000401
0.1966398837	-0.0000002342
0.3851248173	0.0000001372
0.5227971553	0.0000001570
0.5055116262	-0.0000001209
0.4814228360	0.0000000717
0.5069846127	-0.0000000968
0.5032421530	0.0000001322
0.3809652314	0.0000001095
0.1959675418	-0.0000001857
0.0000000000	0.0055567132

I= 1 Q= 0.003350 K= 0.053 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

I= 7 Q= 0.003351 K= 0.050 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000426
0.1931562233	0.0000002528
0.3902130530	-0.0000001673
0.5717655164	-0.0000000102
0.7051741717	0.0000002845
0.7213507569	-0.0000002607
0.6884328917	0.0000002421
0.5702928173	0.0000000024
0.3886722475	-0.0000001258
0.1932927104	0.0000000014
0.0000000000	-0.0000000426

I= 1 Q= 0.003350 K= 0.053 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

I= 9 Q= 0.003351 K= 0.050 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000469
0.1925425524	-0.0000002763
0.3797551258	0.0000002030
0.5652532552	-0.0000000071
0.7755003393	-0.0000002656
0.9077905680	0.0000005980
0.7771356079	-0.0000002560
0.5502070708	-0.0000000155
0.3818235403	0.0000001656
0.1924939244	-0.0000002279
0.0000000000	0.0000000469

I= 3 Q= 0.003350 K= 0.053 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

I= 11 Q= 0.003351 K= 0.050 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000536
0.1830869768	0.0000003141
0.3623847320	-0.0000000561
0.5908437143	-0.0000000456
0.7613949824	0.0000004519
0.7993201653	-0.0000004809
0.7636209464	0.0000004786
0.5981590831	-0.0000000717
0.3558595273	-0.0000000334
0.1848025369	0.0000002772
0.0000000000	-0.0000000536

I= 1 Q= 0.083360 K= 0.063 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.00000000678
0.1487352507	0.0000000454
0.1204930979	-0.0000000242
0.1258558073	0.0000000088
0.1248373514	-0.0000000028
0.1250316541	0.0000000010
0.1249899341	-0.0000000008
0.1250232685	0.0000000020
0.1248831056	-0.0000000070
0.1256145435	0.0000000250
0.0000000000	0.00000000678

I= 3 Q= 0.083360 K= 0.063 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000327
0.1934733398	0.0000002629
0.3723049395	0.0000004396
0.3955228549	-0.0000002842
0.3612580853	0.0000001099
0.3785257988	-0.0000000489
0.3668016191	0.0000000472
0.3883483387	-0.0000001398
0.3518871917	0.0000003188
0.1915814189	0.0000002568
0.0000000000	0.0000173668

I= 5 Q= 0.083360 K= 0.063 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000358
0.1962007269	-0.0000002153
0.3877242357	-0.0000004063
0.5682034632	0.0000008438
0.6557343123	-0.0000001670
0.6097916388	-0.0000001620
0.6356394625	0.0000000363
0.5595293875	0.0000005030
0.3843875495	-0.0000001971
0.1963011617	-0.0000002394
0.0000000000	0.0044458917

I= 7 Q= 0.003360 K= 0.063 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	-0.0000000266
0.1920341054	0.0000001894
0.3020472645	0.0000004633
0.5662009136	-0.0000008120
0.7692618393	0.0000003220
0.9000322913	0.0000007216
0.7686585689	-0.0000000709
0.5535052322	-0.0000003436
0.3089248344	0.0000002265
0.1925091227	0.0000003004
0.0000000000	-0.0000000266

I= 9 Q= 0.003360 K= 0.063 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000136
0.1791695812	-0.0000001071
0.3655752401	-0.0000005051
0.5942634724	0.0000006941
0.7373718013	0.0000001355
0.7051655255	-0.0000004817
0.7481644454	0.0000006583
0.6100636873	0.0000001690
0.3552548136	-0.0000004067
0.1803083300	-0.0000000471
0.0000000000	0.0000000136

I= 11 Q= 0.003360 K= 0.063 N= 10 ICIN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000	0.0000000343
0.1884552879	-0.0000001701
0.3916667149	0.0000007737
0.4957118424	-0.0000004189
0.5335526571	-0.0000000622
0.5348774553	0.0000005301
0.5369261614	-0.0000005703
0.5065340407	0.0000000992
0.4076788811	0.0000007186
0.1838825780	-0.0000003961
0.0000000000	0.0000000343

SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ELDE EDİLEN SONUÇLAR

I= 7 Q= 0.083372 K= 0.075 N= 10 İÇİN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000
0.2142477625
0.3142082673
0.6526304182
0.6924688795
0.9228527165
0.7045949219
0.6726835457
0.2852765891
0.2303501845
0.0000000000

0.0000000750
-0.0000004501
0.00000022913
-0.00000025918
0.0000010112
0.0000007447
0.0000015442
-0.00000027727
0.0000021031
-0.0000003357
0.6587450007

I= 9 Q= 0.083372 K= 0.075 N= 10 İÇİN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000
0.2398238911
0.2852105541
0.6551372255
0.3823788597
0.7488484411
0.3787495269
0.6866101838
0.2948389328
0.2365843518
0.0000000000

0.0000002409
-0.0000014131
0.0000006361
-0.0000007291
0.0000038331
-0.0000053785
0.0000036075
-0.0000009012
0.0000014268
-0.0000000947
0.0000002409

I= 11 Q= 0.083372 K= 0.075 N= 10 İÇİN

FONKSIYON

HATA

0.0000000000
0.2950001662
0.0391631085
0.5504009376
-0.1175141163
0.6320421529
-0.1060223499
0.5329418779
0.0671206779
0.3130933447
0.0000000000

0.0000001865
-0.0000008491
0.00000053614
-0.00000071772
0.00000059878
-0.00000051295
0.00000062803
-0.00000070281
0.00000043993
0.0000002037
0.0000001865

[illegible][illegible][illegible]
$$\{1\} = 1$$
$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$$
[illegible][illegible][illegible] $\mu = .1125$

FOMBIYOM

FOMPSIYOM

[illegible][illegible]

[illegible][illegible]

KAYNAKLAR

S O N U Ç

1. Ahlberg J.H., E.N. Nilson, J.L. Walsh; THE THEORY OF

Hiperbolik kısmi türevli denklemlerin sınır ve başlangıç değer fonksiyonlarının verilmesi halinde bir doğrultuda kübik spline fonksiyonları diğer doğrultuda sonlu fark gösterilimi uygulanarak yapılacak nümerik çözümlerinin, sonlu fark yöntemleri ile yapılacak nümerik çözümlerinden hata mertebesi, işlem zamanı ve karşılaşılan denklem sistemleri yönünden farklılık göstermediği ancak kübik spline fonksiyonlarının kullanılması halinde ağ (ızgara) noktaları dışındaki herhangi noktalarda da çözümlerin bir interpolasyon işlemine gerek kalmadan kolayca bulunabileceği sonucuna varılmıştır. G. and Grabedian; LOCAL SPLINE APPROXIMATION BY

MOMENTS, J. Mat. Mech., 16, 1967, ss. 987-990.

Bu çalışmanın devamı olarak aynı kısmi türevli denkleme her iki doğrultuda da kübik spline fonksiyonları uygulanabilir mi? Uygulanırsa nasıl bir sonuca varılır? Sorularının cevapları araştırılabilir.

2. Cox M.G., CURVE FITTING WITH PIECEWISE POLYNOMIALS J. Inst. Maths. Appl., 1971, Cilt 6, ss. 38-52.

3. Fyfe D.J., THE USE OF CUBIC SPLINE IN THE SOLUTION ON TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS, The Computer Journal, Cilt 2, ss. 188-192.

4. Fox L., NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Oxford, 1962.

5. Fawzy T., SPLINE FUNCTIONS AND THE CAUCHY PROBLEMS II, (Approximate solution of the differential equation $y''=f(x,y,y')$ with spline functions).

6. Froberg C.E., INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, Addison Wesley Pub. Company, 1974.

KAYNAKLAR

1. Ahlberg J.H., E.N. Nilson, J.L. Walsh; THE THEORY OF SPLINES AND THEIR APPLICATIONS, Academic Press, 1967, Cilt 38, 284 Sa.
2. Albasing E.L., Haskins W.D.; CUBIC SPLINE SOLUTIONS TO TWO-POINT BAUNDARY VALUE PROBLEMS, Computer Journal, 1969, Cilt 12, ss. 151-153.
3. Bickley W.G., PIECEWISE CUBIC INTERPOLATION AND TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS, Computer Journal, 1968, ss. 206-209.
4. Birkof G. and Grabedian; LOCAL SPLINE APPROXIMATION BY MOMENTS, J. Mat. Mech., 16, 1967, ss. 987-990.
5. Blue J.L., SPLINE FUNCTIONS METHODS FOR NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS, Comm. ACM, Haziran 1966 Cilt 12, No. 6. ss. 327-330.
6. Cox M.G., CURVE FITTING WITH PIECEWISE POLIYNOMIALS J. Inst. Maths. Appl., 1971, Cilt 8, ss. 36-52.
7. Fyfe D.J., THE USE OF CUBIC SPLINE IN THE SOLUTION ON TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS, The Computer Journal, Cilt 2, ss. 188-192.
8. Fox L., NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Oxford, 1962.
9. Fawzy T., SPLINE FUNCTIONS AND THE CAUCHY PROBLEMS II, (Approximate solution of the differantial equation $y''=f(x,y,y^1)$ with spline functions).
10. Froberg C.E., INTROCUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS , Addison Wesley Pub. Company, 1974.

11. Greville T.N.E., THEORY AND APPLICATIONS OF SPLINE FUNCTIONS, Academic Press, 1969, 222 Sa.
12. Greville T.N.E., SPLINE FUNCTIONS, INTERPOLATION AND NUMERICAL QUADRATURE, Math. Meth. for Digital Comp. Vol. 2, 1968, ss. 156-167.
13. Guenther R.E., NUMERICAL SOLUTION OF A FREE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS, App. Analysis, 1974, Vol. 4, ss. 39-62.
14. Gunter H.M., INITIAL VALUE METHODS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS, Academic Press, 1973.
15. Hairer E., UNCONDITIONALLY STABLE EXPLICIT METHODS FOR PARABOLIC EQUATIONS, Num. Math. 1980, ss. 1-12.
16. Jerome J.W. and Varga R.S., GENERALIZATIONS OF SPLINE FUNCTIONS AND APPLICATIONS TO NONLINEAR BOUNDARY VALUE AND EIGENVALUE PROBLEMS,
17. Mitchel A.R., COMPUTATIONAL METHODS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Wiley, Aberden, 1969.
18. Meis T., Marcowitz U., NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Springer-Verlag New-York 1981, 541 Sa.
19. Ragget G.F. and Wilson P.D., A FULLY IMPLICIT FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION TO THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION USING CUBIC SPLINE TECHNIQUE, J. Inst. Math. App., 1974, ss. 75-77.
20. Richtmyer R.D., TAYLOR STABILITY IN COMPRESSIBLE FLOW, Comm. Pure. Appl. Math. 13, 1960, ss. 297-319.

21. Rice J.R., NUMERICAL METHODS, SOFTWARE AND ANALYSIS,
Mc.Graw-Hill, 1983, 483 Sa.

22. Rubin S.G., Khosla P.K., HIGHER-ORDER NUMERICAL SOLUTIONS
USING CUBIC SPLINES, Aja Journal, Vol. 14, 1976,
ss. 851-858.

Hasan Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik Anabilim dalında çalışmaktadır. Evli ve bir çocukludur.

Ö Z G E Ç M İ Ş

1943 yılında Hasköy'de doğan Behiç ÇAGAL, ilk ve orta öğrenimini Bursa'da tamamladı. 1962 yılında İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik-Fizik Bölümüne ve İstanbul Yüksek Öğretmen Okuluna kaydoldu. 1968 Şubat döneminde her iki yüksek öğretim kurumunuda bitirdi. 1 Nisan 1968 - 7 Ağustos 1968 tarihleri arasında Savaştepe Öğretmen Okulunda Matematik Öğretmenliği yaptı. 17 Ağustos 1968'de Elazığ D.M.M. Akademisine Matematik asistanlığına naklen atandı. 1973 yılında Yeterlikli Asistan oldu. Kasım 1975'de I.D.M.M. Akademisi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümü asistanlığına naklen atandı. 1978'de Doçent oldu.

Halen Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik Anabilim dalında çalışmaktadır. Evli ve bir çocukludur.

