

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞEBEKE ANALİZLERİNE BULANIK YAKLAŞIMLAR**

**HALE GONCE KÖÇKEN**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. MEHMET AHLATCIOĞLU**

**İSTANBUL, 2011**

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞEBEKE ANALİZLERİNE BULANIK YAKLAŞIMLAR**

**HALE GONCE KÖÇKEN**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. MEHMET AHLATCIOĞLU**

**İSTANBUL, 2011**

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ŞEBEKE ANALİZLERİNE BULANIK YAKLAŞIMLAR**

Hale GONCE KÖÇKEN tarafından hazırlanan tez çalışması 16.12.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU  
Yıldız Teknik Üniversitesi

  
\_\_\_\_\_

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU  
Yıldız Teknik Üniversitesi

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Adnan MAZMANOĞLU  
Aydın Üniversitesi

  
\_\_\_\_\_


Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ  
Yıldız Teknik Üniversitesi

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM  
Yıldız Teknik Üniversitesi

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Emanullah HIZEL  
İstanbul Teknik Üniversitesi

  
\_\_\_\_\_

## ÖNSÖZ

*Şebeke analizleri*, noktalar ve bunlar arasındaki bağlantılardan oluşan şebekeler ile ifade edilebilen şebeke problemlerinin matematiksel yönden incelenmesidir. Günlük yaşantımızda birçok sistemin şebekeler aracılığıyla ifade edilebilmesi şebeke analizleri'nin gerçek hayata katkısını ve önemini açıkça göstermektedir. Biz bu çalışmamızda, en temel şebeke problemi olan *En Kısa Yol Problemi*'ne ve haberleşme ve ulaşım alanlarında yaygın şekilde kullanılan *Ücret Tarife Problemi*'ne, belirsizlik içeren kavramları üyelik dereceleriyle belirli hale getirerek gerçek yaşam problemlerinin daha iyi modellenmesine imkan sağlayan bulanık mantık çerçevesinde yaklaşımlar geliştirdik.

Tüm akademik hayatım boyunca engin bilgisiyle çalışmalarına ışık tutarak benden desteğini esirgemeyen, kendisinden çok şey öğrendiğim tez danışmanım ve değerli Hocam Prof. Dr. Mehmet Ahlatcıoğlu'na en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Çalışmalarımın her aşamasında öneri ve yardımlarıyla beni destekleyen ve akademik çalışma detaylarını bana öğreten değerli Hocam Prof. Dr. Fatma Tiryaki'ye emekleri için minnettarım.

Doktora tezimin yazım aşamasında, en uygun ortamda çalışmamı sağlayan değerli Hocam Prof. Dr. Mustafa Sivri'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Gerek akademik gerek insani yönüyle, varlığını hep yanımda hissettiğim, değerli çalışma arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Beyza Ahlatcıoğlu Özkök'e tezime olan katkıları ve desteği için teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim boyunca Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında destek aldığım TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Kendisiyle tanıştığımndan bu yana hiçbir zaman benden desteğini esirgemeyen, bana yürekten inanan ve elde ettiğim tüm başarılarda önemli bir pay sahibi olan sevgili eşim Koray Köçken'e gösterdiği sabır ve anlayış için en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca koşulsuz desteklerini hissettiğim, bana olan güvenleriyle başarıyı körükleyen merhum Babam Emin Gonce, Annem Şükran Gonce ve Abim Ersin Koray Gonce'ye minnettarım.

Bu çalışmanın *Şebeke Analizleri* ve *Bulanık Matematik* ile ilgilenen tüm araştırmacılara faydalı olmasını dilerim.

Kasım, 2011

Hale GONCE KÖÇKEN

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT .....	xii
BÖLÜM 1 .....	1
GİRİŞ.....	1
1.1    Literatür Özeti.....	1
1.2    Tezin Amacı.....	6
1.3    Orijinal Katkı.....	7
BÖLÜM 2.....	9
ŞEBEKE PROBLEMLERİ .....	9
2.1    Temel Tanım ve Kavramlar.....	11
2.2    En Kısa Yol Problemi .....	13
2.2.1    En Kısa Yol Probleminin Matematiksel Modeli.....	15
2.3    Ücret Tarife Problemi.....	15
2.3.1    ÜTP İçin Örnek Şebekeler.....	17
2.3.2    Ücret Tarife Probleminin Matematiksel Modeli.....	21
BÖLÜM 3.....	24
BULANIK MATEMATİK.....	24
3.1    Temel Tanım ve Kavramlar.....	25
3.2    Bulanık Sayılar.....	26
3.2.1    Üçgensel Bulanık Sayılar .....	27
3.2.1.1    Üçgensel Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler.....	27
3.2.2    Yamuksal Bulanık Sayılar .....	29

3.2.2.1	Yamuksal Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler.....	30
3.3	Bulanık Birleştirme Operatörleri .....	32
3.3.1	Dengeleyici operatörler .....	33
3.4	Sıralama Fonksiyonu.....	35
BÖLÜM 4	.....	36
EN KISA YOL PROBLEMİ (EKYP)'NE BULANIK YAKLAŞIMLAR	.....	36
4.1	Kesin Ark Ağırlıklarına Sahip Çok Amaçlı EKYP .....	36
4.1.1	Çok Amaçlı EKYP'ne Dengeleyici Bir Yaklaşım .....	38
4.1.2	Sayısal Örnek .....	43
4.2	Bulanık Ark Ağırlıklarına Sahip EKYP (BEKYP).....	47
4.2.1	Tek Amaçlı BEKYP'ne Dengeleyici Bir Yaklaşım.....	47
4.2.1.1	Sayısal Örnek.....	53
4.2.2	Çok Amaçlı BEKYP (ÇBEKYP)'ne Dengeleyici Bir Yaklaşım.....	56
BÖLÜM 5	.....	58
BULANIK ÜCRET TARİFE PROBLEMİ	.....	58
5.1	Ücret Tarife Problemi (ÜTP)'ne Lineer Programlama Yaklaşımı .....	58
5.1.1	$M_{ij}^k$ ve $N_{ij}$ Sabitlerinin Belirlenmesi .....	64
5.1.2	Sayısal Örnek .....	71
5.2	Talep Miktarları Bulanık Sayı Olan ÜTP'nin Analizi .....	73
5.2.1	Sayısal Örnek .....	77
BÖLÜM 6	.....	86
SONUÇ VE ÖNERİLER	.....	86
KAYNAKLAR	.....	89
ÖZGEÇMİŞ	.....	94

## SİMGE LİSTESİ

---

$\tilde{A}$	Bulanık küme veya Bulanık sayı
$\tilde{A}_\alpha$	Bulanık kümenin veya Bulanık sayının $\alpha$ - keseni
$c_a$	ÜTP’de tarifeli arklara ait sabit maliyet
$c_{ij}$	EKYP’de $(i, j)$ arkının ağırlığı
$c_{ij}^k$	EKYP’de $(i, j)$ arkının $k$ . amaçdaki ağırlığı
$\tilde{c}_{ij}^k$	EKYP’de $(i, j)$ arkının $k$ . amaçdaki bulanık ağırlığı
$d_a$	ÜTP’de tarifesiz arklara ait toplam maliyet
$E$	EKYP’ne ait şebekedeki arklar kümesi
$K$	ÜTP’de kullanıcı tipi kümesi
$L_k$	EKYP’de $k$ . amacın minimum (en iyi) değeri
$M_{ij}^k$	$t'_{ij}$ değişkeninin bir üst sınırı
$N$	ÜTP’de düğümler kümesi
$N_{ij}$	$t_{ij}$ değişkeninin bir üst sınırı
$n^k$	ÜTP’de $k$ kullanıcı tipinin talep miktarı (kullanıcı sayısı)
$\tilde{n}^k$	ÜTP’de $k$ kullanıcı tipinin bulanık talep miktarı (kullanıcı sayısı)
$(o_k \rightarrow d_k)$	ÜTP’de $k$ kullanıcı tipinin başlangıç ve bitiş düğümleri
$R$	Sıralama fonksiyonu
$SA$	ÜTP’de tarifesiz (sabit) arklar kümesi (toll-free arc set)
$TA$	ÜTP’de üst seviye liderin sahip olduğu tarifeli arklar kümesi (toll arc set)
$U_k$	$k$ . amacın maximum (en kötü) değeri
$V$	EKYP’de düğümler kümesi
$\mu$	Üyelik fonksiyonu
$\mu_{and}$	“Bulanık ve” operatörü
$\mu_{or}$	“Bulanık veya” operatörü
$\gamma$	Dengeleyici parametre

## KISALTMA LİSTESİ

---

BEKYP	Bulanık En Kısa Yol Problemi
BÜTP	Bulanık Ücret Tarife Problemi
ÇEKYP	Çok Amaçlı En Kısa Yol Problemi
ÇBEKYP	Çok Amaçlı Bulanık En Kısa Yol Problemi
EKYP	En Kısa Yol Problemi
KV	Karar Verici
ÜTP	Ücret Tarife Problemi

## ŞEKİL LİSTESİ

---

	Sayfa
Şekil 2. 1 $A_{ij}$ arki. ....	12
Şekil 2. 2 4 nokta ve 5 arka sahip bir şebeke. ....	12
Şekil 2. 3 Bağlantısız bir şebeke örneği.....	13
Şekil 2. 4 Karın üst sınırına erişilemeyen şebeke örneği.....	17
Şekil 2. 5 Negatif ücrete sahip şebeke örneği. ....	19
Şekil 2. 6 Liderin amaç fonksiyonunun formunun gösterileceği şebeke.....	20
Şekil 2. 7 Liderin amaç fonksiyonunun şekli.....	20
Şekil 3. 1 Üçgensel bulanık sayı. ....	27
Şekil 3. 2 Yamuksal bulanık sayı. ....	30
Şekil 4. 1 ÇEKYP örneğinin şebekesi. ....	43
Şekil 4. 2 Tek Amaçlı BEKYP örneğinin şebekesi.....	53
Şekil 5. 1 Örnek 5.1'in şebekesi.....	67
Şekil 5. 2 Örnek 5.2'in şebekesi.....	68
Şekil 5. 3 Örnek 5.3'in şebekesi.....	69
Şekil 5. 4 Örnek 5.4'in şebekesi.....	70
Şekil 5. 5 İki kullanıcı tipine sahip bir ÜTP şebekesi. ....	71
Şekil 5. 6 Bulanık kullanıcı sayılarının üyelik fonksiyonu.....	75
Şekil 5. 7 Bulanık modelin inceleneceği şebeke örneği. ....	78
Şekil 5. 8 Liderin karının üyelik fonksiyonu. ....	84

## ÇİZELGE LİSTESİ

---

	Sayfa
Çizelge 2. 1	Kullanıcının seçebileceği yol alternatifleri..... 18
Çizelge 4. 1	Amaçların sınır değerleri ve ilgili rotalar. .... 44
Çizelge 4. 2	Örnek probleme ait dengeleyici modelin sonuçları. .... 46
Çizelge 4. 3	Amaçların sınır değerleri ve ilgili rotalar. .... 54
Çizelge 4. 4	Örnek probleme ait dengeleyici modelin sonuçları. .... 56
Çizelge 5. 1	Örneğe ait $M_{ij}^k$ sabitleri..... 80
Çizelge 5. 2	Örneğe ait $N_{ij}$ sabitleri. .... 80
Çizelge 5. 3	Optimal ücretler ve optimal rotalar..... 84
Çizelge 5. 4	Maliyet ve kar analizi..... 85

### ŞEBEKE ANALİZLERİNE BULANIK YAKLAŞIMLAR

Hale GONCE KÖÇKEN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU

“Şebeke Analizlerine Bulanık Yaklaşımlar” adlı çalışmamızda, *şebekeler* aracılığıyla ifade edilen *şebeke problemlerinin* matematiksel açıdan incelenmesi olarak tanımlanan *şebeke analizleri*, belirsizlik içeren kavramları üyelik dereceleriyle belirli hale getirerek gerçek yaşam problemlerinin daha iyi modellenmesine imkan sağlayan bulanık mantık çerçevesinde ele alınmıştır.

Şebeke problemleri ve bulanık matematik hakkında altyapı oluşturulduktan sonra en temel şebeke problemi olan En Kısa Yol Problemi (EKYP)’ne ve son yıllarda oldukça dikkat çeken Ücret Tarife Problemi (ÜTP)’ne bulanık küme teorisi aracılığıyla yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Ark ağırlıklarının yol uzunluğu yanında zaman, yol güvenliği veya risk gibi nitelikleri de belirtmesi gerekliliği ile ortaya çıkan Çok Amaçlı EKYP (ÇEKYP), çok amaçlı lineer programlama problemi olarak ele alınmış, amaçların üyelik fonksiyonları oluşturularak Werners’in “bulanık ve” operatörü aracılığıyla *dengeleyici bulanık bir model* önerilmiştir. Bu modelle, ÇEKYP’ne hem dengeleyici hem de Pareto-optimal olan uzlaşık bir çözüm üretilmiştir.

Ark ağırlıklarının bulanık sayı olması ile ortaya çıkan BEKYP’nin çözümü için “minimum (basılamayan) çözüm” ve “uzlaşık çözüm” tanımları verildikten sonra, tek amaçlı BEKYP, bir sıralama bağıntısına dayanan çok amaçlı programlama yaklaşımıyla, kesin ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP’ne dönüştürülmüştür. Oluşan ÇEKYP, önerilen dengeleyici bulanık model ile çözülmüş ve böylece BEKYP için hem

dengeleyici nitelikte hem de Pareto-optimal olan uzlaşık çözümler elde edilmesi sağlanmıştır.

Tek amaçlı BEKYP için önerdiğimiz dengeleyici yaklaşım, problemi çok amaçlı yapıya dönüştürdüğünden, Çok Amaçlı BEKYP'ne de uygulanabilir.

Geliştirilen dengleyici modeller ile, ilgili problemlere Pareto-optimal çözümler üretildiği ifade edilmiş ve bu iddia ispatlanmıştır. İşleyişin anlaşılması için modellerden sonra sayısal örnek de sunulmuştur.

İki seviyeli programlama yapısına uyan ÜTP, gerçek hayat uygulamaları çok yaygın olan bir problemdir. ÜTP'nin başlıca parametreleri alt seviye talep miktarları (kullanıcı sayıları), sabit ve tarifeli arklara ait ark ağırlıklarıdır. Bu parametrelerin bulanık olması ile BÜTP oluşmaktadır. Tezimizde, talep miktarları özel bir üçgensel bulanık sayı formunda alınarak, bu belirsizlik karşısında lider olarak isimlendirilen üst seviyeye karar alternatifleri sunacak bir analiz sağlanmıştır. Bu analiz sayesinde karar verici konumundaki lidere, atayacağı ücretler hakkında talep miktarlarının kesin olarak alındığı duruma göre daha gerçekçi bir bilgi sunulmuştur. Ayrıca yapılan analiz, liderin risk davranışının da modele dahil edilmesine imkan sağlamaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Şebeke problemleri, bulanık matematik programlama, en kısa yol problemi, ücret tarife problemi

**FUZZY APPROACHES TO NETWORK ANALYSIS**

Hale GONCE KOCKEN

Department of Mathematical Engineering

PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOGLU

In this study entitled “*Fuzzy Approaches to Network Analysis*”, *network analysis* that can be defined as the mathematical perspective of *network problems* which are expressed through a network is discussed within the framework of fuzzy logic.

After giving the preliminaries about network problems and fuzzy mathematics, new approaches are proposed to *Shortest Path Problem* (SP) and *Toll Setting Problem* (TSP) through the fuzzy set theory. SP is the most basic network problem. And TSP attracts attention in recent years.

When the arc weights represent the path safety, path risk, etc. besides the path length, Multiobjective SP (MSP) arises. In this study, MSP is handled as a multiobjective linear programming problem. After constructing the membership functions of objectives, a compensatory fuzzy approach is proposed using Werners’ “fuzzy and” operator. Our model generates a compromise solution which is both compensatory and Pareto-optimal.

When the arc weights are fuzzy, Fuzzy SP (FSP) arises. After giving the definitions of “minimum (non-dominated) solution” and “compromise solution”, single objective FSP is converted to a MSP with a multiobjective programming approach based on an order relation. Obtained MSP that has crisp arc weights is solved with the first proposed compensatory fuzzy model.

The compensatory fuzzy model for FSP convert the problem a multiobjective form. So relevant model is valid for Multiobjective FSP either.

We proved that our compensatory models generate Pareto-optimal solutions. Also a numerical example is presented to explain our approaches.

The real life applications of TSP which fits a bilevel form is very common. The main parameters of TSP are demand quantities, arc weights of toll and toll-free arcs. When these parameters are fuzzy, Fuzzy TSP (FTSP) is arises. In this study, fuzzy demand quantities are assumed to be a special triangular fuzzy number and an analysis which provides alternative decisions to leader (upper level) is given. By means of this analysis, more realistic solutions are offered to decision maker as to the crisp case. Also, this analysis gives the oppurtunity reflecting the risk attitude of leader to the model.

**Key words:** Network problems, fuzzy mathematical programming, shortest path problem, toll setting problem

#### 1.1 Literatür Özeti

Günlük yaşamda birçok sistem *şebeke'ler* aracılığıyla ifade edilmektedir. Elektrik şebekeleri, telefon şebekeleri, ulaştırma sistemleri (karayolu, demiryolu, havayolu), üretim ve dağıtım şebekeleri, bilgisayar ağları, kan dolaşımı, sinir sistemi, doğal gaz ve petrol boru hatları şebekeler aracılığıyla ifade edilen sistemlerden bazılarıdır.

Temel olarak, ilgili girdilerin en verimli şekilde belirli noktalar arasında iletimini sağlayan ve şebekeler aracılığıyla modellenip çözülebilen gerçek hayat problemlerine şebeke problemleri adı verilir. Literatürde şebeke problemi olarak tanımlanabilecek pek çok problem vardır. Bu problemlerin en bilinenleri *En kısa yol problemi*, *Taşıma problemi*, *Atama problemi*, *Maksimal akış problemi* ve *Minimum maliyetli akış problemi*'dir. Ayrıca son yıllarda oldukça dikkat çeken, özellikle haberleşme ve ulaşım alanlarında yaygın şekilde kullanılan *Ücret tarife problemi* (*Toll Setting Problem*) de bir şebeke problemidir.

Tezimizde çalışılan ilk problem, en temel şebeke problemi olan EKYP'dir. Şebekede belirli iki düğüm arasında en kısa uzunluktaki yolu bulmayı amaçlayan EKYP'nin, ark ağırlıklarının pozitif/negatif olmasına, amaç sayısının bir veya daha çok olmasına, başlangıç ve bitiş düğümlerinin birden fazla olmasına göre çeşitli tipleri mevcuttur. Çalışmamızda, tek başlangıç ve tek bitiş düğümüne sahip EKYP ele alınmış ve ark ağırlıklarının pozitif olduğu kabul edilmiştir. Bu problem ile ilgili literatür özeti, Bulanık EKYP (BEKYP) ve Çok Amaçlı EKYP (ÇEKYP) ana başlıkları altında incelenmiştir.

BEKYP, ark ağırlıklarının kesin olarak belirlenememesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Literatürdeki çalışmalarda ark ağırlıklarının ya ayrık bulanık kümeler (discrete fuzzy sets) ya da bulanık sayılar olarak alındığı görülmektedir.

BEKYP ilk olarak Dubois ve Prade tarafından [1]'de tanıtılmıştır. Ark ağırlıklarının ayrık bulanık kümeler olarak alındığı BEKYP'ne en kısa yolun bulunması için Floyd Algoritması ve Ford Algoritması'na (Lawler [2]) dayanan bir algoritma önermişlerdir. Önerilen algoritmanın en büyük eksikliği elde edilen bulanık en kısa yol uzunluğuna karşılık gelen hakiki bir yolun şebekede mevcut olmayabileceğidir.

[1]'deki gibi ark ağırlıklarının ayrık bulanık kümeler olarak alındığı literatürdeki bazı çalışmalar [3], [4], [5] ve [6]'dır.

[3]'te, yinelemeli dinamik programlamaya dayanan ve karar verici tarafından belirlenen üyelik derecesi eşik değerine karşılık gelecek şekilde en kısa yolu bulan bir algoritma önerilmektedir. Bu algoritma, her bir ark uzunluğunun 1 ile verilen sabit bir tamsayı arasında olduğunu, verilen şebekenin döngü içermediğini (acyclic) ve şebekenin katmanlı (layered) olduğunu kabul etmektedir. Algoritmanın bu kabulleri, gerçek hayat problemlerine uyarlama zorluğu getirmesi nedeniyle eleştiri almaktadır (Moazeni [5], Okada [7]).

Chuang ve Kung, [6]'da bulanık en kısa yol uzunluğunun ve yolunun elde edilmesi için bulanık benzerlik ölçümüne dayanan bir algoritma, Mozaeni ise [6]'da etiketleme metoduna dayanan bir algoritma önermişlerdir.

Literatürde, ark ağırlıklarının bulanık sayılar (üçgensel, yamuksal, vb.) olarak alındığı birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan başlıcaları [7], [8], [9], [10], [11], [12] ve [13]'dür.

Lin ve Chen, [13]'de ark ağırlıklarının üçgensel bulanık sayı olarak alındığı bir şebekede, bulanık uzaklığı belirlemek için bir bulanık lineer programlama yaklaşımı geliştirmişlerdir. Ayrıca, şebekeden silindiğinde en kısa yol uzunluğunda en büyük artışı sağlayan arkı kritik (vital) ark olarak tanımlayarak, bu arkı belirleyen bir algoritma da önermişlerdir.

Okada ve Soper, [8]'de ark ağırlıklarını yamuksal bulanık sayılar olarak "bulanık min" tanımına dayanan Pareto-optimal yol kavramını vermişlerdir. Bulanık sayılar arasında bir sıralama bağıntısı tanımlayarak BEKYP'ne çok amaçlı programlama çerçevesinde

bir model önermişler ve etiketleme metodu aracılığıyla bir çözüm yaklaşımı geliştirmişlerdir. Çalışmamızda EKYP için geliştirilen modellerde [8] referansı, temel referans olarak kullanılmıştır.

Nayeem ve Pal, [9]'da bulanık sayılar arasında bir karşılaştırma kuralı tanımlayarak, Dijkstra algoritmasına dayanan bir yaklaşım önermişlerdir.

Ji vd., [11]'de ark ağırlıklarını yamuksal bulanık sayı olarak “beklenen en kısa yol” ve “alfa-en kısa yol” isimli modeller sunmuşlardır.

Hernandes vd., [14]'de karar vericinin belirleyeceği bir sıralama indeksine bağlı olarak, her tip bulanık sayı ve kesin sayı ile kullanılabilen bir algoritma önermişler, algoritmanın negatif ark ağırlıklı şebekeler için de geçerli olduğunu vurgulamışlardır.

Keshavarz ve Khorrarn, [15]'de ark ağırlıklarının bulanık aralık alındığı BEKYP'ni karma tamsayı non-lineer programlama problemi olarak ifade etmişler ve bu problemi çözülebilir iki seviyeli programlama problemine dönüştürmüşlerdir.

Tajdin vd., [16]'da çeşitli tipte bulanık sayıların toplamı için  $\alpha$  – kesenler aracılığıyla lineer en küçük kareler modeli önermişler ve bulanık sayıların karşılaştırılması için bir uzaklık fonksiyonu kullanarak, şebekedeki en kısa yolu bulan bir dinamik programlama metodu sunmuşlardır.

Literatürde BEKYP'nin çözümü için geliştirilen çeşitli sezgisel yaklaşımlar da mevcuttur. Örneğin Li vd., [17]'de yapay sinir ağlarını, Hassanzadeh vd. ise [18]'de genetik algoritmayı temel alan yaklaşımlar geliştirmişlerdir.

ÇEKYP, yaygın olan en kısa uzunluktaki yolun bulunması amacına ek olarak, yolculuk zamanı minimizasyonu, yol güvenliği maksimizasyonu gibi çeşitli amaçlar içermektedir. ÇEKYP üzerine yapılmış çok sayıda çalışma mevcuttur, bunlar Tarapata tarafından yapılmış [19]'daki literatür inceleme çalışmasında görülebilir.

ÇEKYP'nin çözümü için geliştirilen yaklaşımlar basılamaz çözümlerin üretildiği yaklaşımlar, fayda fonksiyonlarını temel alan yaklaşımlar ve etkileşimli yaklaşımlar olmak üzere üç ana başlık altında incelenebilir (Granat ve Guriero [20]).

Basılamaz çözümlerin üretildiği yaklaşımlar ya Pareto-optimal çözüm kümesinin tamamını üretirler ya da bu kümenin bir kısmına yaklaşabilirler.

Pareto-optimal çözüm kümesinin yaklaşık olarak bir kısmını üreten bir yaklaşım [21]'de verilmiştir. [22]'de de tüm uygun yolların elde edilebilmesi için ölçeklendirme prosedürleri önerilmiş ve bu prosedürlerin karmaşıklık analizi yapılmıştır.

Tüm Pareto-optimal çözümlerin üretildiği yaklaşımlarda etiketleme algoritmalarını kullanan çalışmalar [23], [24], [25], [26], [27]; sıralama metotlarını kullanan çalışmalar [28], [29]; parametrik yaklaşım geliştiren bir çalışma ise [30]'dur.

Karar vericinin tercihlerini gösteren fayda fonksiyonlarını kullanan yaklaşımlara [31] ve [32] örnek olarak verilebilir.

Tezimizde çalışılan ikinci problem Ücret Tarife Problemi (ÜTP), iki karar seviyesi içeren hiyerarşik yapıda bir problemdir. İki seviyeli programlama problemlerine yönetim (tesis yeri, çevresel düzenleme, kredi tahsisi, enerji politikası, tehlikeli madde, vb.), ekonomik planlama (sosyal ve tarımsal politikalar, elektrik fiyatlandırması, yakıt üretimi, vb.), mühendislik (optimal tasarım, yapı ve modeller, vb.), kimya, çevre bilimleri, optimal kontrol gibi alanlarda oldukça sık rastlanmaktadır. İki seviyeli programlama problemleri, iki oyuncuya sahip olması açısından yapısal olarak Stackelberg oyununa benzemektedir. Stackelberg oyunu, öncelikle üst seviye oyuncunun kendi stratejisini seçmesinden sonra, alt seviye oyuncunun, üst seviyenin kararına göre kendi amaç fonksiyonunu optimize eden stratejiyi seçerek cevap verdiği oyun olarak tanımlanabilir. Bu oyun, kararın iki seviyesinin çatıştığı hiyerarşik yapıda bir problemdir. ÜTP de Stackelberg oyunu yapısına sahip bir problemdir. ÜTP'nde lider olarak isimlendirilen üst seviye şebekedeki arkların belirli bir alt kümesine sahiptir. Lider sahip olduğu arklara bir ücret (tarife-toll) atadıktan sonra, kullanıcılar (takipçiler) olarak isimlendirilen alt seviye kendi başlangıç ve bitiş noktaları arasında en kısa yollarda seyahat etmeyi amaçlarlar. ÜTP'ne bir örnek, özel bir karayolunda geliri maksimize eden geçiş ücretlerinin atanması problemi olarak verilebilir. Burada lider geçiş ücretlerini atayacak olan otorite, alt seviye ise karayolunu kullanan araçlardır. Optimal geçiş ücreti politikası, lidere ait olan arklardan geçecek kullanıcıları ikna edecek derecede düşük ve aynı zamanda lidere en iyi geliri sağlayacak kadar da yüksek olan ücretleri belirlemektir.

İki seviyeli programlar ilk defa Bracken ve Mc Gill tarafından [33], [34] ve [35]'de ele alınmıştır. Bu çalışmalar, iki seviyeli programlamanın askeri, üretim ve pazarlama alanlarındaki uygulamalarını içermektedir. 1970'lerde iki seviyeli programlama

problemleri, “Kısıtlarında optimizasyon problemleri olan matematik programlama problemi” olarak adlandırılırdı. İki seviyeli ve çok seviyeli programlama isimlendirmesi ilk defa 1977 senesinde Chandler ve Norton tarafından [36]’da yapılmıştır. İki seviyeli programlama konusunda yapılan literatür inceleme çalışmalarından bazıları [37] ve [38]’dir. İki seviyeli programlama problemlerinin çözümü oldukça zordur. Hansen v.d. [39]’da, en basit durumda bile (tüm fonksiyonlarının lineer olduğu durum) iki seviyeli programlama problemlerinin NP-zor (non-deterministic polynomial time-hard) olduğunu göstermişlerdir. NP-zor ile kastedilen, çözüme ulaşmak için gerekli sürenin veya bilgisayar belleğinin problemin boyutuna (düğüm ve ark sayısına) bağlı olarak hızla (üstel olarak) artmasıdır. İki seviyeli programlama probleminin bu karmaşık yapısından dolayı, özellikle lineer amaçlı iki seviyeli programlama problemleri literatürde daha yoğun çalışılmıştır.

Her iki karar seviyesinin amaç fonksiyonu non-lineer olan ÜTP, *yol fiyatlandırma (road pricing)* probleminin özel bir halidir. Yol fiyatlandırma probleminde, her bir arka kapasite kısıtı mevcutken, ÜTP’nde arklarda meydana gelebilecek yoğunluklar dikkate alınmaz. ÜTP’nin benzer versiyonları *fiyatlandırma veya vergilendirme problemleri* adı altında da çalışılmıştır.

Tezimizde ele aldığımız, çok sayıda kullanıcı tipinin (alt seviye) var olduğu ve üst seviyenin, arkların bir alt kümesine sahip olduğu ÜTP modelinin temelleri Labbé vd. tarafından [40]’da ortaya atılmıştır. [40]’da iki seviyeli vergilendirme probleminin tek seviyeli lineer programlama problemine indirgenmesi ve bunun *optimal otoyol fiyatlandırması (optimal highway pricing)* problemine uygulaması verilmiştir.

Brotcorne vd., [41]’de ÜTP’ne primal-dual sezgisel bir prosedür önermişler ve bu sayede ark kapasite etkisinin de probleme yansıtılabileceğini belirtmişlerdir.

[42], ÜTP’nin karmaşıklık analizini içeren ve Hoesel vd. tarafından yapılan bir çalışmadır.

Dewez’in [43]’teki “Ücret tarife problemi üzerine” adlı doktora tezi ÜTP hakkında en detaylı çalışmalardan biridir. ÜTP’nin literatürdeki mevcut formülasyonları geliştirilerek ark ve yol tabanlı modeller oluşturulmuştur. Ayrıca en kısa yol graf modeli olarak isimlendirilen bir model de önerilmiştir.

[44] ve [45] çalışmaları, ÜTP’nin havayolu endüstrisine uygulamasını içermektedir.

Dewez vd., [46]'da ÜTP modeline eklenebilecek bazı eşitsizlikleri önerirken, Kalashnikov vd. ise [47]'de ÜTP'ne ceza fonksiyonlarına dayanan bir çözüm algoritması önermişlerdir.

Heilborn vd., [48]'de fiyatlandırma problemleri ile ekonomideki bazı problemler arasında ilişki kurarak ÜTP'ne farklı bir açıdan yaklaşmışlardır.

ÜTP literatürde incelenen yeni bir konu olmasına rağmen, problemin kesin (crisp) versiyonu üzerine çok sayıda çalışma olduğu görülmektedir.

Tezimizde ÜTP'nin bulanık bir versiyonu ele alınmıştır. Bildiğimiz kadarıyla, ÜTP ile bulanık mantığı birleştiren bir çalışma literatürde mevcut değildir. Sadece 2006 senesinde “Computational Intelligence, Theory and Applications” adlı kitabın bir bölümü olarak verilen [49]'da ÜTP'den farklı olarak her bir arktaki akışın üstten sınırlandırılması ile oluşan akış problemi ele alınmış, tarifersiz ark ağırlıklarının bulanık olması durumu incelenmiştir.

## 1.2 Tezin Amacı

“Şebeke Analizlerine Bulanık Yaklaşımlar” isimli tezimizin temel amacı, şebekeler aracılığıyla ifade edilen ve her alanda sıkça karşılaşılan şebeke problemlerinde; bilgi eksikliğinden, değişen ekonomik koşullardan veya problemlerin kendi doğasından kaynaklanan belirsizliklerin bulanık matematik aracılığıyla modellere yansıtılması ve bu modellere çözüm önerisi getirilmesidir.

Tezimizde en temel şebeke problemi olan EKYP ve son yıllarda gittikçe önem kazanan ÜTP bulanık çerçevede ele alınmıştır.

Tezimizin Giriş bölümünden sonra yer alan Bölüm 2'de şebeke problemleri tanıtılarak, şebekeler ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Bundan sonra ise tezimizde çalışılan EKYP ve ÜTP genel olarak anlatılmış ve matematiksel modelleri sunulmuştur.

Bulanık matematik başlıklı üçüncü bölümde, çalışmamızda önereceğimiz çözüm yaklaşımlarında kullanılmak üzere bulanık matematik konusunda gerekli altyapı verilmektedir.

Tezimizin ilk orijinal katkısını içeren “EKYP'ne bulanık yaklaşımlar” adlı Bölüm 4'de EKYP'nin üç tipi için geliştirilen dengeleyici yaklaşımlar verilmiş ve sayısal örnek sunulmuştur.

Tezimizin ikinci orijinal katkısını içeren “Bulanık ÜTP” isimli Bölüm 5’de öncelikle kesin parametrelere sahip iki seviyeli ÜTP’nin tek seviyeli lineer programlama problemine indirgenmesi teorik olarak ve ayrıca bir sayısal örnek aracılığıyla açıklanmıştır. BÜTP’nin matematiksel modeli oluşturulduktan sonra, talep miktarları bulanık sayı olan BÜTP’nin analizi verilmiş ve yapılan analiz, sayısal örnek ile desteklenmiştir.

### 1.3 Orijinal Katkı

Çalışmamızda kesin (crisp) ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP, tek amaçlı bulanık ark ağırlıklarına sahip EKYP ve çok amaçlı bulanık ark ağırlıklarına sahip EKYP olmak üzere üç tip problem için dengeleyici operatörler aracılığıyla bulanık yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bildiğimiz kadarıyla, tezimizden üretilen yayınlar hariç, literatürde EKYP ile dengeleyici operatörleri birleştiren hiç bir çalışma bulunmamaktadır.

Birinci bulanık yaklaşımda, kesin ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP, çok amaçlı lineer programlama problemi olarak ele alınmıştır. Amaçların üyelik fonksiyonları oluşturularak Werners’in “bulanık ve” operatörü aracılığıyla probleme dengeleyici bulanık bir model önerilmiştir. Bu operatör aracılığıyla kurulan modelde, ÇEKYP’ne hem dengeleyici hem de Pareto-optimal olan uzlaşık çözümler üretilmesi sağlanmıştır.

İkinci bulanık yaklaşım, ark ağırlıkları yamuksal bulanık sayı olarak alınan BEKYP’nin çözümü üzerine geliştirilmiştir. Kesin ark ağırlıklarına sahip EKYP’nde amaç fonksiyonu reel değerli olduğundan amacın minimizasyonu reel sayılar ekseninde tanımlı doğal sıralama ile tek şekilde belirlenmektedir. BEKYP’nde ise ark ağırlıkları bulanık sayı olduğundan amaç fonksiyonu bulanık değerli olmaktadır. Böylece BEKYP’nin çözümü için bulanık amaç değerleri arasından en iyi seçimi yapabilmek amacıyla bir sıralama kriteri belirlenmesi gerekmektedir. Önerdiğimiz yaklaşımda bulanık amaç değerlerinin karşılaştırılması için bir sıralama bağıntısı kullanılmıştır. Bu bağıntı aracılığıyla BEKYP için “minimum (basılamayan) çözüm” ve “uzlaşık çözüm” tanımları verildikten sonra, tek amaçlı BEKYP, verilen sıralama bağıntısına dayanan çok amaçlı programlama yaklaşımıyla (Okada ve Soper [8]), kesin ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP’ne dönüştürülmüştür. Oluşan ÇEKYP, tezimizde üretilen ilk bulanık yaklaşımla çözümlenerek, BEKYP için hem dengeleyici nitelikte hem de “minimum” tanımına uyan uzlaşık çözümler elde edilmiştir.

Tek amaçlı BEKYP için önerdiğimiz dengeleyici yaklaşım, problemi çok amaçlı yapıya dönüştürdüğünden, EKYP'nin üçüncü tipi olan Çok Amaçlı BEKYP için de geçerlidir.

Tezimizde geliştirilen dengeleyici modeller ile Pareto-optimal çözümler üretildiğine dair teorem verilmiş ve ispatlanmıştır. İşleyişin anlaşılması için her bir modelden sonra sayısal örnek sunulmuştur.

Çalışmamızda orijinal katkının yapıldığı ikinci problem ÜTP'dir. ÜTP'nin başlıca parametreleri alt seviyenin talep miktarları (kullanıcı sayıları), sabit ve tarifeli arklara ait ark ağırlıklarıdır. Bu parametrelerin bulanık olması ile BÜTP oluşmaktadır. Tezimizde alt seviyenin talep miktarlarındaki belirsizlik durumu incelenmiştir. Literatürde ÜTP'nde talep miktarlarındaki bulanıklığı ele alan hiçbir çalışma bulunmamaktadır. Talep miktarları özel bir üçgensel bulanık sayı formunda alınarak, bu belirsizlik karşısında lider olarak isimlendirilen üst seviyeye karar alternatifleri sunacak bir analiz verilmiş ve sayısal bir örnek sunulmuştur.

## BÖLÜM 2

---

### ŞEBEKE PROBLEMLERİ

Noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren bağlantıların bir dizilişi olarak tanımlanan şebeke (network)'ler, günlük yaşantımızda her yerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin elektrik şebekeleri, belirli bir kaynaktan iletim hatları aracılığıyla evlerimize elektriği ulaştırarak aydınlanmamızı sağlarken, telefon şebekeleri ulusal ve uluslararası sınırlarda neredeyse hiçbir çaba harcamadan diğer insanlarla iletişim kurmamıza imkan sağlar. Karayolları ağı (şebekesi), demiryolu ağı ve havayolu ağı istediğimiz yere ulaşmak için büyük-küçük coğrafi uzaklıkları katetmemizi sağlarken, üretim ve dağıtım şebekeleri her türlü yiyecek ve tüketim maddelerine ulaşmamızı sağlar. Bilgisayar şebekeleri, örneğin havayolu rezervasyon sistemleri gibi, bilgi paylaşım yolumuzu (şeklimizi) değiştirir ve iş-özel hayatlarımızı yürütmeye yardımcı olur.

Şebekeler aracılığıyla ifade edilebilen problemlerin hepsinde ilgili şebekede bazı girdilerin (elektrik, bir tüketim malı, bir insan, bir araç veya bir mesaj) bir noktadan başka bir noktaya olabilecek en etkin şekilde taşınması (iletilmesi) ve bu gerçekleştirilirken şebeke kullanıcılarına mümkün olan en iyi servisin verilmesi ve ilgili araç gerecin en etkin şekilde kullanılması amaçlanmaktadır.

Şebeke problemlerine yönelem araştırması, matematik, bilgisayar bilimleri, mühendislik, yönetim gibi alanları içeren birçok araştırma sahasında karşılaşılmaktadır. Bu problemler çok zengin ve uzun bir geçmişe sahiptir. Şebeke problemlerinin kökleri, elektrik devrelerini sistematik olarak ilk analiz eden Gustav Kirchhoff'un ve diğer öncü elektrik mühendislerinin çalışmalarına dayanmaktadır. Tanımlayıcı nitelikte olan bu ilk çalışmalar, genel anlamda sadece "verilen şebekeye bir voltaj uygulandığında, bunun sonucunda şebekedeki akışın miktarı ne olacaktır?" sorusuna yanıt aramaktaydı.

Günümüzde matematiksel olarak ifade edilen şebeke problemlerinin esas sorusu “Bir şebekeyi kullanmanın alternatif yolları var olduğunda, hangi alternatif daha az maliyetlidir, daha etkindir?” haline gelmiştir (Ahuja vd. [50]).

Bir problemin şebekeler ile gösterilmesi, daha iyi anlaşılmasına ve bileşenleri arasındaki ilişkilerin daha net bir şekilde gösterilmesine olanak sağlaması yanında kendine has hesaplama yöntemlerinin geliştirilmesine yardımcı olarak hesaplama avantajı sağlamaktadır. Şebeke problemlerinin en verimli sonuçlarının elde edilmesi için gerekli matematiksel teknikler olarak tanımlanan şebeke analizleri, birçok uygulamalı probleme sistematik bir analiz sağlaması açısından yararlı bir araçtır. Şebeke analizlerinin önemli uygulamaları bilgi teknolojileri, tesis yeri planlama, taşıma sistemleri planlama, akış problemleri, üretim çizelgeleme, proje planlama ve kontrol gibi birçok farklı alanda karşımıza çıkmaktadır.

Literatürde var olan, şebekeler aracılığıyla modellenip çözülebilen gerçek hayat problemlerine verilebilecek bazı örnekler şu şekildedir:

***En Kısa Yol Problemi (Shortest Path Problem):*** Var olan yol şebekesinde iki şehir arasındaki en kısa rotanın belirlenmesini amaçlar.

***Maksimal Akış Problemi (Maximum Flow Problem):*** Şebekede belirli düğümler arasındaki maksimum akış miktarının bulunmasını amaçlayan probleme, su, petrol ve doğal gaz boru hatlarının maksimum kapasitesinin belirlenmesi örnek olarak verilebilir.

***Minimum Maliyetli Akış Problemi (Minimum Cost Flow Problem):*** Şebekede belirli miktarda akışın minimum maliyet altında gerçekleştirilmesini amaçlayan probleme, petrol yataklarından rafinerilere boru hattıyla bağlanmış şebekenin minimum maliyet akış çizelgesinin belirlenmesi bir örnektir.

***Minimumu Kapsayan Ağaç Problemi (Minimum Spanning Tree Problem):*** Şebekedeki bağlantıların en kısa olanlarını kullanarak şebekenin düğümlerinin birbirleriyle ilişkilendirilmesini ele alan problemdir. Bir körfezdeki kuyuları iç kesimlerdeki teslim noktalarına bağlayan kıyıdaki doğalgaz boru hattı projesinin tasarımı bu probleme örnek olarak verilebilir. Modelin amacı boru hattının inşaat maliyetlerinin minimum kılınmasıdır.

***CPM&PERT (Critical Path Management&Program Evaluation and Review Technique):*** Her birinde zaman ve kaynak harcanan, birbirleriyle ilişkili faaliyetlerin

bir araya getirilmesiyle oluşan projelerin planlanması, çizelgelenmesi ve kontrolünü içeren bir tekniktir. Bir inşaat projesinin faaliyetleri için zaman çizelgesinin (faaliyetlerin başlangıç ve bitiş tarihlerinin) belirlenmesi bu problemlere örnek olarak verilebilir.

Literatürde en çok rastlanan şebeke problemleri arasında yer alan bu problemler, bir lineer programlama problemi olarak ifade edilerek çözülebildikleri gibi, her birinin kendilerine ait özel çözüm yöntemleri de bulunmaktadır.

Son zamanlarda oldukça dikkat çeken, özellikle ulaşım ve haberleşme sistemlerinde yaygın uygulama alanına sahip bir diğer şebeke problemi de “Ücret Tarife Problemi (Toll Setting Problem)”dir. İki seviyeli programlama yapısına uyan bu problem, fiyatlandırma probleminin (price-setting problem) özel bir halidir.

Tezimiz kapsamında En Kısa Yol Problemi ve Ücret Tarife Problemi çalışılmıştır. Buna paralel olarak çalışmamızın bu bölümünde şebeke problemlerine ait temel kavramlar verildikten sonra adı geçen problemler tanıtılmıştır.

## 2.1 Temel Tanım ve Kavramlar

Bu alt bölümde, şebeke problemlerine altyapı oluşturacak şekilde temel tanım ve kavramlar sunulacaktır (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki [51]).

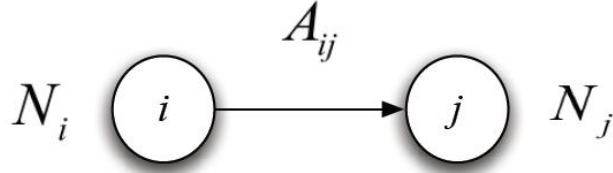
**Şebeke (Network):** Noktalar (Düğüm) kümesi ve bu noktaları birleştiren arkların bir dizilişidir.

**Düğüm (Nokta):** Şebekedeki arz, talep ya da aktarma merkezidir.  $i$ . nokta  $N_i$  ile gösterilecektir. Bir şebekede başlangıç noktası ( $N_s$ ), aktarma noktası, bitiş noktası ( $N_t$ ) olmak üzere üç ayrı nokta tipi vardır.

**Ark (Dal):** Şebekede herhangi iki nokta arasındaki yoldur. Gidiş yönü belirli olan arklara *yönlü ark*, belirsiz olan arklara *yönsüz ark* denir. Bir yönsüz ark, iki yönlü ark çifti gibi düşünülebilir. Yönlü arklar oklar ile, yönsüz arklar doğru parçalarıyla gösterilir.

$N_i$ ’den  $N_j$ ’ye giden ark  $A_{ij}$  olmak üzere, ark yönsüz ise  $A_{ij} = A_{ji}$  alınabilir.

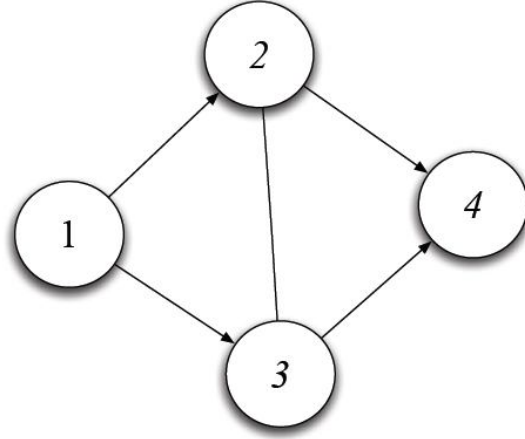
Ark ve nokta sayısı sonlu olan şebekeye *sonlu şebeke* denir. Bu çalışmamızda sonlu



Şekil 2. 1  $A_{ij}$  arki.

şebekeler incelenecektir. Yönlü bir  $A_{ij}$  arki,  $(i, j)$  ile de gösterilebilir. Burada  $i$  arkin başlangıç düğümünü gösterirken,  $j$  bitiş düğümünü göstermektedir. Ayrıca yönsüz bir  $A_{ij}$  arki,  $\{i, j\}$  veya  $(i, j)$  sıralı ikilisi ile de gösterilebilir.

Şekil 2.2'de 4 nokta ve 5 arka sahip bir şebeke görülmektedir.



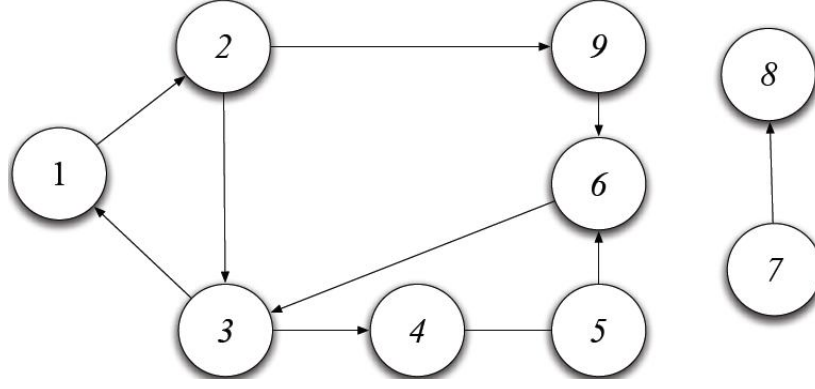
Şekil 2. 2 4 nokta ve 5 arka sahip bir şebeke.

Şekil 2.2'deki 4 ark yönlü olduğu halde  $A_{23} = A_{32}$  arki yönsüzdür.

Bir şebeke noktalarının herhangi bir alt kümesi  $X$  ve bunun şebekedeki noktalara göre tümleyeni  $\bar{X}$  olsun.  $N_i \in X$  ve  $N_j \in \bar{X}$  olacak şekilde en az bir  $A_{ij}$  veya  $A_{ji}$  arki varsa şebeke *bağlantılıdır* denir. Şekil 2.2 bağlantılı, Şekil 2.3 ise bağlantısız şebekeye birer örnektir.

**Zincir:** İki özel noktayı birleştiren nokta ve arkların dizilişi bir *zincir*'dir.

$N_1, A_{12}, N_2, A_{23}, \dots, N_{k-1}, A_{k-1,k}, N_k$  nokta ve arkların dizilişi,  $N_1$ 'i  $N_k$ 'ya birleştiren bir zincirdir. Örnek vermek gerekirse, Şekil 2.2'de  $N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4, A_{43}, N_3$ ; Şekil 2.3'de  $N_1, A_{12}, N_2, A_{23}, N_3, A_{34}, N_4, A_{45}, N_5, A_{54}, N_4$  birer zincirdir.



Şekil 2.3 Bağlantısız bir şebeke örneği.

**Devre:** Eğer zincirde  $N_1 = N_k$  ise zincir *devre (döngü)* adını alır. Şekil 2.3’de  $N_1, A_{12}, N_2, A_{23}, N_3, A_{31}, N_1$  bir devredir. Hiçbir devre içermeyen zincire *basit zincir* denir.

**Yol:** Üzerindeki bütün arkları yönlü olan zincirlere *yol* denir. Şekil 2.3’de  $N_1, A_{12}, N_2, A_{23}, N_3, A_{34}, N_4$  zinciri bir yoldur. Fakat  $N_1, A_{12}, N_2, A_{23}, N_3, A_{36}, N_6$  zinciri bir yol değildir. Görüldüğü gibi her yol bir zincir olduğu halde, bazı zincirler yol değildir.

**Ağaç:** Yönsüz, bağlantılı ve devre içermeyen bir şebekedir.  $n$  noktalı bir şebeke;

- Bağlantılıdır.
- Devre içermez.
- Toplam ark sayısı  $n-1$ ’dir.

şartlarından iki tanesini aynı anda gerçeklerse *ağaç*’tır.

**Geren Ağaç:** Bir şebekenin ağaç olan alt şebekesidir.

## 2.2 En Kısa Yol Problemi

EKYP en temel şebeke problemlerinden birisidir. Özellikle taşıma ve haberleşme şebekeleri alanlarında olmak üzere, birçok uygulama alanında çok önemli bir yere sahiptir. Klasik EKYP, şebekedeki belirli iki düğüm arasındaki en kısa uzunluktaki yolu bulmayı amaçlar. EKYP, kendisine has geliştirilen algoritmalar dışında, bir lineer programlama problemi olarak da çözülebilmektedir.

Literatürde, EKYP’nin çeşitli tipleri mevcuttur. Bunlar problemin sahip olduğu

- Ark ağırlıklarının (uzunluklarının) negatif veya pozitif olması,
- Problemin tek ya da çok amaçlı olması,
- Başlangıç (kaynak) ve bitiş düğümlerinin bir tane veya çok sayıda olması,
- İlgili şebekenin devre içerip içermemesi

özelliklerine bağlı olarak çeşitlilik göstermektedir.

Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, keyfi (negatif veya pozitif) ark ağırlıklarına sahip çalışmalara daha ender rastlanmaktadır. Bunun sebebi var olan yaklaşımların, problemin bir negatif döngü içermesi durumunda sınırsız çözüm üretmesidir.

Belirlenen tek bir düğümden (kaynak) bitiş düğümüne veya diğer tüm düğümlere olan en kısa yolu bulmayı amaçlayan problemler tek kaynaklı (single-source) EKYP, tüm düğümler arası en kısa yolu bulmayı amaçlayan problemler tüm çiftli (all-pairs) EKYP olarak isimlendirilir. Dikkat edilirse, tüm-çiftli EKYP'nin ilgili şebekedeki düğüm sayısı kadar tek kaynaklı EKYP çözümlenerek elde edilebileceği görülebilir.

EKYP'nin çözümü için geliştirilen algoritmik yaklaşımlar, genelde iki gruba ayrılmıştır. Bunlar *Etiket Atama (Label Setting)* ve *Etiket Düzeltme (Label Correcting)* algoritmalarıdır. Her iki yaklaşım da iteratiftir ve her bir adımda düğümlere kesin olmayan uzaklık etiketleri atanır. Yaklaşımlar, adımlar arasında uzaklık etiketlerinin güncelleştirilmesi yönüyle farklılaşırlar. Etiket atama algoritmaları, her bir iterasyonda bir etiketi kalıcı olarak atarken, etiket düzeltme algoritmaları ise, son adıma gelene kadar tüm etiketleri geçici olarak belirlerler ve son adımda tüm etiketler kalıcı hale gelirler. Bu yaklaşımları ayıran başka bir özellik ise, çözdükleri problem sınıfıdır. Etiket atama algoritmaları, keyfi ark ağırlıklarına sahip döngü içermeyen bir şebekede tanımlanan EKYP'nin ve nonnegatif ark ağırlıklarına sahip EKYP'nin çözümünde kullanılabilir. Etiket düzeltme algoritmaları ise daha geneldir ve negatif ark ağırlıkları içeren EKYP de dahil olmak üzere, her tür EKYP'ne uygulanabilir.

EKYP'e has geliştirilen algoritmaların en bilinenleri Dijkstra algoritması, Bellman ve Ford metodu ve Floyd-Warshall metodudur (Lawler [2])<sup>1</sup>. Dijkstra algoritması ark ağırlıklarının nonnegatif olduğu tek kaynaklı şebekeler için geliştirilen bir etiket

---

<sup>1</sup> Sayfa 70, 74 ve 86.

düzeltilme algoritmasıdır. Bellman ve Ford metodu, nonpozitif ark ağırlıklarına sahip şebekeler için çözüm üretebilmektedir. Floyd-Warshall metodu ise EKYP için geliştirilen en genel algoritmalarındandır. Tüm düğümler arasında en kısa yolları belirleyen bu algoritma negatif ağırlıklara sahip şebekelerde en kısa yolun hesabı için kullanılmaktadır (Ahuja vd. [50]).

### 2.2.1 En Kısa Yol Probleminin Matematiksel Modeli

Tezimiz kapsamında pozitif ark ağırlıklarına sahip, devre içermeyen tek kaynaklı EKYP ele alınmış, buna paralel olarak burada ilgili problemin matematiksel modeli verilmiştir.

$V = \{1, 2, \dots, N\}$  düğümler kümesi ve  $E$ , şebekedeki arklar kümesi olmak üzere  $G = (V, E)$ , yönlü, döngü içermeyen bağlantılı bir şebeke ve her bir  $(i, j) \in E$  arkının ağırlığı olan  $c_{ij}$  nonnegatif olsun. Bu durumda problemin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir:

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, N, \\ -1 & , i = N \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E. \quad (2.3)$$

Burada kaynak noktası birinci düğüm olarak, varış noktası ise  $N$ . düğüm olarak verilmiştir. (2.1) amaç fonksiyonunu, (2.2) girdi-çıkış kısıtlarını, (2.3) ise değişkenlerin tipini göstermektedir.  $x_{ij} = 0$  ya da 1 olması  $(i, j)$  arkının belirlenen en kısa yol rotasında olup olmaması demektir.

### 2.3 Ücret Tarife Problemi

Ücret Tarife Problemi (ÜTP), fiyatlandırma (price setting) probleminin özel bir halidir. İki seviyeli (bilevel) programlama yapısına uyan ÜTP'nde seviyeler, sıralı şekilde ortaksız davranmaktadırlar. ÜTP genel olarak üst seviyenin karını maksimize edecek ücretlerin atanması problemi olarak tanımlanabilir.

Problemde birinci seviye lider (otorite-leader), ikinci seviye ise kullanıcı (müşteri, takipçi-follower) olarak isimlendirilir. Problemin şebekesinde tarifeli (toll arcs) ve

tarifersiz (toll-free arcs) olmak üzere iki tür ark vardır. Tarifeli arkların ark ağırlıkları değişken, tarifersiz arkların ise sabittir. Tarifeli arkların sahibi başka bir ifadeyle tarifeli arklara ücret (maliyet) atayan karar seviyesi lider'dir.

Lider (devlet, şirket, vb.) bir taşıma şebekesinin arklarının belirli bir alt kümesine bir ücret atarken, şebekenin kullanıcıları, kendi başlangıç ve bitiş noktaları arasında en kısa yollarda seyahat ederler. ÜTP'ne bir örnek özel bir karayolunda geliri maksimize eden geçiş ücretlerinin atanması olarak verilebilir. Burada lider geçiş ücretlerini atayacak olan otorite, alt seviye ise karayolunu kullanan araçlardır. Optimal geçiş ücreti politikası, lidere ait olan arklardan geçecek kullanıcıları ikna edecek derecede düşük ve aynı zamanda lidere en iyi geliri sağlayacak kadar da yüksek olan ücretleri belirlemektir.

Problemde öncelikle üst seviye olan lider tarifeli arklara ücret atar, böylelikle şebeke tüm ark ağırlıkları sabit olan bir yapıya dönüşür. Bundan sonra alt seviye olan kullanıcılar kendileri için en ucuz maliyetli yolu seçerek şebekede kendi başlangıç ve bitiş düğümleri arasında dolaşırlar. Görüldüğü gibi karar seviyeleri sıralı şekilde ortaksız davranmaktadırlar.

Aynı başlangıç ve aynı bitiş noktalarına sahip kullanıcıların kümesi "kullanıcı tipi" (commodity) olarak isimlendirilmektedir. Örneğin Türkiye'deki illerin oluşturduğu şebekeyi göz önüne alalım. Bu şebekede İstanbul'dan Ankara'ya gitmek isteyen kullanıcılar ile İstanbul'dan Tekirdağ'a gitmek isteyen kullanıcılar farklı iki tip kullanıcıdır. Bu çalışmada verilecek modelde daha genel bir yaklaşım oluşturmak amacıyla birçok kullanıcı tipinin var olduğu durum ele alınacaktır. Her bir kullanıcı tipi için kullanıcı sayıları ile ifade edilen talepler mevcuttur.

$x_i (i=1,2,\dots,m)$  ve  $y_j (j=1,2,\dots,n)$  bilinmeyen değişkenler ve bunların katsayıları

$a_{ij}, b_i, c_j, d \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^m b_i x_i + \sum_{j=1}^n c_j y_j + d$  yapısındaki bir

fonksiyona bilineer fonksiyon denir. Bilineer bir fonksiyonun kuadratik fonksiyondan farkı,  $x_i^2$ 'li ve  $y_j^2$ 'li terimleri içermemesidir. ÜTP, her iki seviyenin amaç fonksiyonunun da bilineer olduğu iki seviyeli programlama problemi sınıfına aittir. İki seviyeli programlama problemi hiyerarşik bir optimizasyon problemidir. Problemin

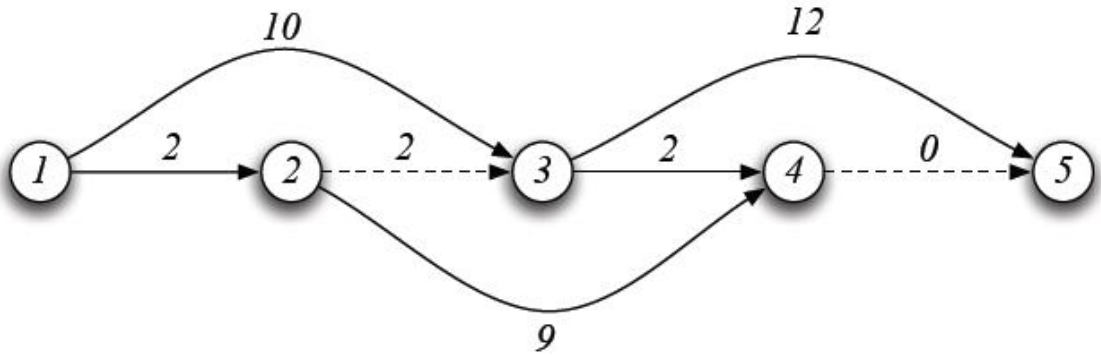
değişkenlerinin bir alt kümesi, geri kalan değişkenler ile parametrelendirilmiş optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde sınırlandırılır.

### 2.3.1 ÜTP İçin Örnek Şebekeler

Bu alt bölümde, problemin daha iyi kavranması için birkaç örnek sunulmuştur. Örnekler [43]'den alınmıştır. Şebekeleri gösteren şekillerde tarifeli arklar kesik çizgili veya koyu çizgi olarak, tarifesiz arklar ise düz çizgi olarak gösterilmiştir. Arkların bitişiğine yazılan değerler ilgili arkın ağırlığını (maliyetini) göstermektedir. Tarifeli bir arkın toplam maliyeti, sabit maliyet ile liderin atayacağı ücretin toplamına eşit olacaktır.

**Örnek 2.1** Şekil 2.4 ile verilen şebeke üzerinde, düğüm 1'den düğüm 5'e minimum maliyetle gitmek isteyen tek bir kullanıcının var olduğu kabul edilsin. Şekil 2.4'den görüldüğü gibi tarifeli (2,3) ve (4,5) arklarının sabit maliyetleri sırasıyla 2 ve 0'dır.

Kullanıcı, alternatif yollar arasından düğüm 1'den düğüm 5'e en ucuz maliyetle gidebileceği yolu seçmek istemektedir. Öncelikle lider (2,3) ve (4,5) tarifeli arklarına ücret atayacak, kullanıcı daha sonra kendisi için optimal olan yolu seçecektir.



Şekil 2. 4 Karın üst sınırına erişilemeyen şebeke örneği.

Burada düğüm 1'den düğüm 5'e tarifesiz arklardan oluşan  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$  sabit yolunun ağırlığı 22 olduğundan, kullanıcı 22'den daha fazla ödeme yapmayacaktır. Lider tüm ücretleri sıfır olarak atarsa, kullanıcı 6 maliyetli  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  yolunu seçecektir. Dolayısıyla liderin kendi arklarına atayabileceği toplam ücret başka bir ifadeyle bu şebekeden elde edebileceği maksimum kar  $22 - 6 = 16$  olacaktır. Bu üst sınıra her zaman ulaşılamaz. Verilen örnekte, optimal çözüm (2,3) arkına 5, (4,5) arkına 10 ücretinin atanmasıdır. Bu durumda liderin toplam kazancı 15 olacaktır.  $(i, j)$  tarifeli

arkının maliyeti  $t_{ij}$  olmak üzere, kullanıcının olası yol alternatifleri Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2. 1 Kullanıcının seçebileceği yol alternatifleri.

Yol	Maliyeti
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$	22
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$	$6 + t_{23} + t_{45}$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$	$16 + t_{23}$
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$	$12 + t_{45}$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$	$11 + t_{45}$

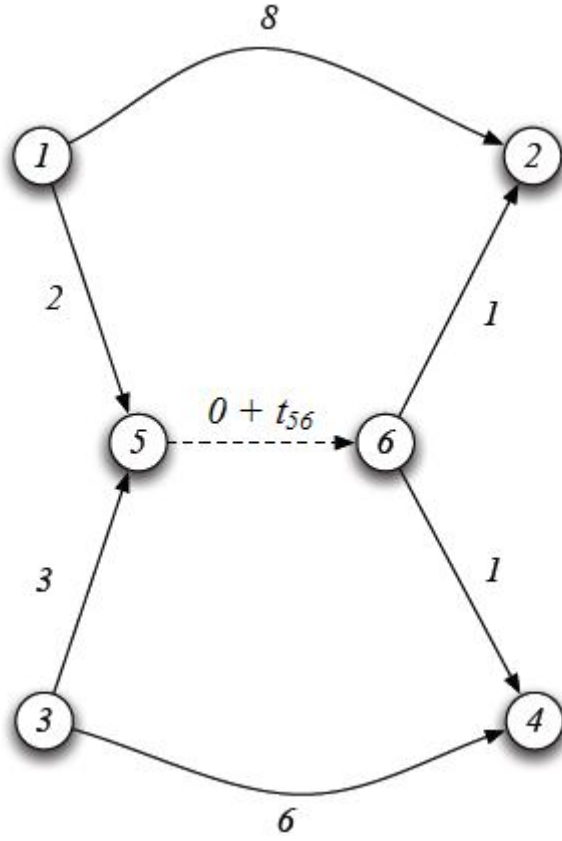
(2,3) tarifeli arkı, sadece  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  alt-yolunun maliyeti,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  ve  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  tarifesiz alt-yollarının maliyetlerinden daha küçük veya eşit olduğunda kullanılır. Bu yüzden  $t_{23}$  arkının maliyeti 5'e eşitlenir. Gerçekten  $t_{23} = 5 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) ataması yapılırsa,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  yolunun maliyeti  $11 + \varepsilon$ ,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  yolunun maliyeti 11'den büyük olduğu için kullanıcı sabit maliyetli yolu seçecek ve bu durumda da liderin karı beklenenin aksine 0 olacaktır. Diğer taraftan (4,5) tarifeli arkı sadece  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  alt-yolunun maliyeti,  $3 \rightarrow 5$  yolunun maliyetinden küçük veya eşit ise kullanılır ve böylece  $t_{45}$  arkının maliyeti 10'a eşitlenir.

Örnek 2.1, karın üst sınırına her zaman ulaşamayacağını göstermektedir.

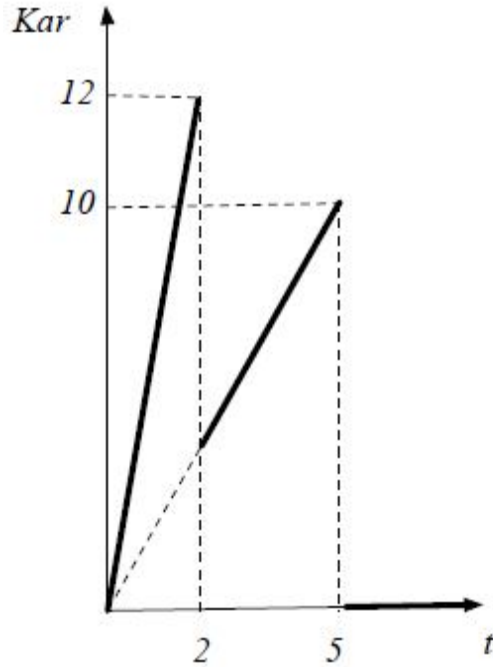
**Örnek 2.2** Şekil 2.5 ile verilen şebeke üzerinde, negatif ark ağırlıklarına izin verilsin ve her biri bir kullanıcıdan oluşmak üzere, iki tane kullanıcı tipi var olsun. Bunlardan biri düğüm 1'den düğüm 2'ye, diğeri ise düğüm 3'ten düğüm 4'e gitsin.

Birinci kullanıcı  $1 \rightarrow 2$  ve  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$  yolları arasında seçim yapacaktır. Eğer tarifeli (5,6) arkının ücreti 5 veya daha az bir sayıya atanırsa, birinci kullanıcı  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$  yolunu kullanacaktır. İkinci kullanıcı ise  $3 \rightarrow 4$  ve  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$  yolları arasında seçim yapacaktır.  $t_{56} + t_{64} \leq 3$  ise, tarifeli  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$  yolunu seçecektir. Dolayısıyla optimal çözüm,  $t_{56} = 5$  ve  $t_{64} = -2$  olmak üzere  $5 + (5 - 2) = 8$  karını verecektir. (5,6) arkının ücreti, (6,4) arkına negatif bir ücret atama yoluyla ikinci kullanıcı için dengelenmiştir.





Şekil 2. 6 Liderin amaç fonksiyonunun formunun gösterileceği şebeke.



Şekil 2. 7 Liderin amaç fonksiyonunun şekli.

### 2.3.2 Ücret Tarife Probleminin Matematiksel Modeli

ÜTP, liderin, maliyetlerini minimize etmek isteyen kullanıcıların tepkilerini dikkate alarak kendi kazancını maksimize edecek şekilde, sahip olduğu tarifeli arklara atayacağı ücretleri belirlemeyi amaçlar.

Çalışmamızda ele alınacak ÜTP ile ilgili kabuller aşağıdaki gibidir:

- Tarifesiz ark ağırlıkları bilinmektedir.
- Tarifeli ve tarifesiz ark ağırlıkları nonnegatiftir.
- Bir yolun toplam maliyeti tarifesiz ark ağırlıkları ve tarifeli ark ağırlıklarının toplamı olarak bulunur.
- Kullanıcılar, kendileri için aynı toplam maliyete sahip en kısa yol seçenekleri arasından lider için en yüksek karı verecek yolu seçeceklerdir.
- Her bir kullanıcı tipi için sadece tarifesiz (sabit) arklardan oluşan bir yol mevcuttur.
- Her bir kullanıcı tipi için kullanıcı sayısının bir üst sınırı vardır.
- Arklar üzerindeki yoğunluk ihmal edilmiştir.

Modelin parametreleri,

$N$ : Düğüm kümesi,

$TA$ : Liderin sahip olduğu tarifeli arklar kümesi (toll arc set),

$SA$ : Tarifesiz (sabit) arklar kümesi (toll-free arc set),

$K$ : Kullanıcı tipi kümesi,

$c_a$ : Tarifeli arkların sabit maliyeti,

$d_a$ : Tarifesiz arkların maliyeti,

modelin değişkenleri ise,

$t_a$ : Tarifeli arklara atanacak ücret (lider belirleyecek),

$\hat{x}_a^k$ : Tarifeli  $a$  arkını kullanacak  $k \in K$  kullanıcı tipindeki kullanıcı sayısı,

$\hat{y}_a^k$ : Tarifersiz  $a$  arkını kullanacak  $k \in K$  kullanıcı tipindeki kullanıcı sayısı

dır.

$TA$  kümesindeki her bir  $a$  arkının maliyeti iki kısımdan oluşmaktadır. Bu maliyet  $c_a$  sabit maliyet,  $t_a$  liderin belirleyeceği değişken maliyet (bilinmeyen) olmak üzere  $(c_a + t_a)$ 'dır.  $SA$  kümesindeki bir arkın maliyeti ise  $d_a$ 'dır.

$k \in K$  kullanıcı tipinin, başlangıç noktası  $o_k$ , varış noktası  $d_k$  olmak üzere bir  $k$  kullanıcı tipi kısaca  $(o_k \rightarrow d_k)$  şeklinde gösterilir.

Liderin kendi karını maksimize etmek, kullanıcıların ise kendi yol maliyetlerini minimize etmek istedikleri göz önüne alınırsa, ÜTP'nin ark tabanlı (arc based) matematiksel modeli aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$$\max_{x,y,t} \sum_{a \in TA} t_a \sum_{k \in K} \hat{x}_a^k \quad (2.4)$$

$$\min_{x,y} \sum_{k \in K} \left( \sum_{a \in TA} (c_a + t_a) \hat{x}_a^k + \sum_{a \in SA} d_a \hat{y}_a^k \right) \quad (2.5)$$

$$\sum_{a \in i^+} (\hat{x}_a^k + \hat{y}_a^k) - \sum_{a \in i^-} (\hat{x}_a^k + \hat{y}_a^k) = \hat{b}_i^k, \quad \forall k \in K, \forall i \in N \quad (2.6)$$

$$t_a \geq 0 \quad (\forall a \in TA) \quad (2.7)$$

$$\hat{x}_a^k \geq 0 \text{ ve tamsayı} (\forall a \in TA) \quad (2.8)$$

$$\hat{y}_a^k \geq 0 \text{ ve tamsayı} (\forall a \in SA) \quad (2.9)$$

Burada  $i^+$  ve  $i^-$  sırasıyla  $i$  düğümünden çıkan ve  $i$  düğümüne giren arkların kümesidir.

$\{n^k\}_{k \in K}$ , her bir düğümün talep miktarını (kullanıcı sayısı) göstermek üzere,

$$\hat{b}_i^k = \begin{cases} n^k & , i = o_k \\ -n^k & , i = d_k \\ 0 & , \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır. Burada (2.4) üst seviye olan liderin amacını, (2.5) ise alt seviye olan kullanıcıların amaçları toplamını göstermektedir. Görüldüğü gibi bu iki amaç da bilineer

yapıdadır. (2.6) Şebeke girdi-çıktı kısıtlarını, (2.7)-(2.9) ise değişkenlerin tipini göstermektedir. (2.4)-(2.9) ile verilen model, bilineer amaç fonksiyonlarına sahip bir iki seviyeli karma tamsayılı programlama problemidir.

### BULANIK MATEMATİK

Belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmek amacını taşıyan Bulanık Küme Teorisi, literatürde 1965 yılında L.A. Zadeh'in "Information and Control" dergisinde yayınlanan "Bulanık Kümeler" adlı makalesi ile duyulmuştur. O tarihten sonra önemi gittikçe artarak günümüze kadar gelen bulanık mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışılabilmesi için kurulmuş matematik düzen olarak tanımlanabilir.

Klasik matematiksel yöntemlerde, verilerin tam olması gereksiniminden dolayı bu yöntemlerle gerçek hayattaki sistemleri modellemek ve kontrol etmek oldukça zordur. Bulanık mantık, matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uyarılma alanı oluşturmak suretiyle bu zorluğu ortadan kaldırmış ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlamıştır. Örneğin bir kişi için "1.70 boyundadır" tanımlaması yerine, sadece "orta boyludur" tanımlamasının yapılması birçok uygulama için yeterli bir veridir. Böylece azımsanamayacak ölçüde bir bilgi indirgenmesi gerçekleştirilerek matematiksel bir tanımlama yerine, dilsel (linguistik) değişken adı verilen daha kolay anlaşılabilen bir değişken ile niteliksel bir tanımlama yapılabilir. "Kalabalık" veya "kalabalık değil" gibi kelimeler ve ifadelerle tanımlanabilen dilsel değişkenlerin değerleri bulanık kümeler ile ifade edilir. Örneğin; bir sınıftaki öğrenci sayısını belirtecek dilsel değişkenin alabileceği "kalabalık", "kalabalık değil" ve "çok kalabalık" değerlerinin her biri ayrı ayrı bulanık kümeler ile ifade edilir (Ülker ve Çomak [52]).

Bulanık mantık, mantık kurallarının esnek bir şekilde uygulanması olarak da tanımlanabilir. Klasik mantıkta sadece "doğru" ve "yanlış" ya da Boole cebirindeki karşılıklarıyla "1" ve "0" değerleri vardır. Bulanık mantıkta ise, ikisinin arasında değerler alabilen önermeler ve ifadelere izin verilir. Gerçek hayatta "kesinlikle doğru"

veya “kesinlikle yanlış” değerlendirmeleri yerine genelde “kısmen doğru” veya “belli bir olasılıkla” doğru şeklinde değerlendirmeler yapıldığı göz önüne alınırsa bulanık mantığın işlevi daha iyi fark edilmiş olacaktır.

Bulanık küme teorisinde ise elemanlar aldıkları üyelik dereceleriyle kümeye ait olurlar. Başka bir ifadeyle bir eleman için kesinlikle kümeye aittir ya da ait değildir ifadeleri yerine  $x_i$  elemanı  $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$  üyelik derecesiyle kümeye aittir ifadesi kullanılır.

Tezimizin bu bölümünde, sadece daha sonraki bölümlerde verilecek yaklaşımlarda kullanılacak olan bulanık matematik konusuna dair gerekli temel bilgi sunulacaktır.

### 3.1 Temel Tanım ve Kavramlar

**Tanım 3.1 (Bulanık Küme)**  $X$  bir evrensel küme olsun.  $X$  kümesinde bulanık bir  $\tilde{A}$  alt kümesi,

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.  $\mu_{\tilde{A}}$  üyelik fonksiyonu her bir  $x \in X$ ’i  $[0,1]$  aralığında bir  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  reel sayısına atayan fonksiyondur.  $x$  noktasındaki  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  değeri ise  $x$ ’in  $\tilde{A}$  kümesindeki üyelik derecesini belirtir.

Bulanık  $\tilde{A}$  kümesi  $x$  elemanı ve bunun üyelik derecesi  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ’ten oluşan sıralı ikililer ile

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X \}$$

şeklinde gösterilebilir.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$  üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini içeriyorsa,  $\tilde{A}$  kümesi bulanık bir küme değil, kesin bir kümedir.

**Tanım 3.2 (Destek Kümesi)** Bir bulanık  $\tilde{A}$  kümesinin desteği,  $S(\tilde{A})$ ;  $X$  kümesinde üyelik derecesi pozitif olan noktaların oluşturduğu kesin kümedir. Başka bir ifadeyle  $\tilde{A}$  kümesinin desteği,

$$S(\tilde{A}) = \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.3 (Alfa Kesen)** Bulanık  $\tilde{A}$  kümesinde üyelik derecesi bir  $\alpha \in [0,1]$  sayısına eşit veya daha büyük olan  $x \in X$  elemanlarının oluşturduğu kesin kümeye bulanık  $\tilde{A}$  kümesinin  $\alpha$  – keseni veya  $\alpha$  – seviyesi denir.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

**Tanım 3.4 (Konvekslik)**  $X$  kümesindeki bulanık bir  $\tilde{A}$  kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart onun bütün  $\alpha$  – kesenlerinin konveks olmasıdır. Konveks bulanık kümenin alternatif ve daha açık bir tanımı da şu şekilde verilebilir.

Bulanık bir  $\tilde{A}$  kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart  $\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$  için  $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$  eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

**Tanım 3.5 (Normallik)**  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$  eşitliğini sağlayan en az bir  $x \in X$  elemanı mevcutsa bulanık  $\tilde{A}$  kümesi normaldir denir. Herhangi bir  $\tilde{A}$  bulanık kümesi normal değilse, ilgili kümenin üyelik değeri  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ , kümenin yüksekliğine bölünerek normalize edilebilir.

### 3.2 Bulanık Sayılar

Üyelik fonksiyonu parçalı sürekli olan,  $R^1$  reel ekseninde tanımlanmış, konveks ve normalize edilmiş bulanık kümeye bulanık sayı denir.

Bir  $\tilde{M}$  bulanık sayısı, tüm negatif (pozitif)  $x$  değerleri için sıfır üyelik değerini alıyorsa bu bulanık sayı pozitif (negatiftir) denir.

$$\tilde{M} \text{ bulanık sayısı pozitif (negatiftir).} \Leftrightarrow \forall x < 0 (\forall x > 0) \text{ için } \mu_{\tilde{M}}(x) = 0.$$

Bulanık sayının, tanımı gereği konveks olduğu göz önüne alınırsa, bir  $\tilde{M}$  bulanık sayısının  $\alpha$  – keseni  $\tilde{M}_\alpha$ , kapalı bir aralık ile gösterilebilir. Bu aralık  $\alpha$  seviyesindeki güven aralığı olarak da isimlendirilir ve böylece bulanık  $\tilde{M}$  sayısının  $\alpha$  – keseni

$$\tilde{M}_\alpha = \{x \in R^1 \mid \mu_{\tilde{M}}(x) \geq \alpha\} = [a_1, a_3] \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $a_1$  ve  $a_3$  sırasıyla  $\tilde{M}_\alpha$   $\alpha$  – keseninin sol ve sağ uç noktalarıdır.

### 3.2.1 Üçgensel Bulanık Sayılar

$a_1, a_2, a_3 \in R$  ve  $a_1 < a_2 < a_3$  olmak üzere  $(a_1, a_2, a_3)$  sıralı üçlüsü ile verilen ve

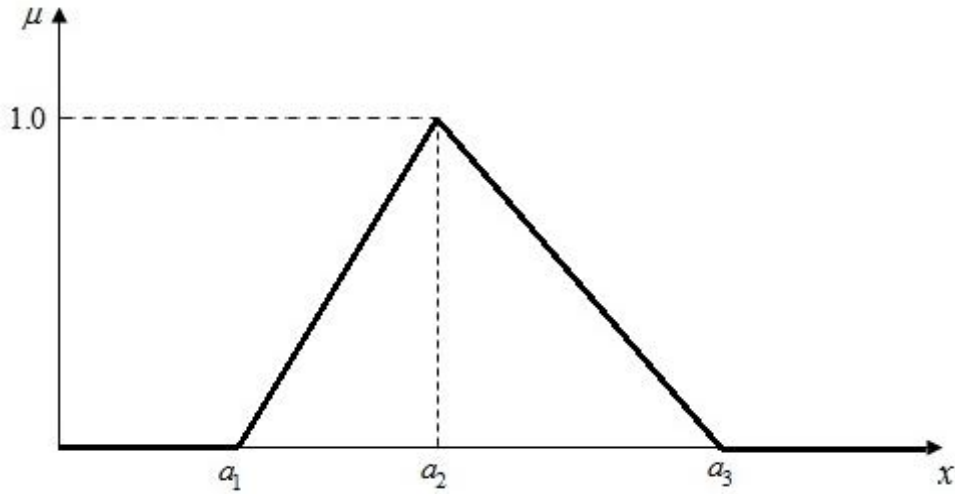
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & , a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & , x > a_3 \end{cases} \quad (3.2)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$  bulanık sayısına üçgensel bulanık sayı denir. Üçgensel bulanık sayının üyelik fonksiyonu Şekil 3.1 ile gösterilmiştir.

$\alpha$  – kesenleri yardımıyla bir üçgensel  $\tilde{A}$  bulanık sayısı,

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } \tilde{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3]$$

şeklinde de tanımlanabilir.



Şekil 3. 1 Üçgensel bulanık sayı.

#### 3.2.1.1 Üçgensel Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler

Üçgensel bulanık sayılarda cebirsel işlemlerin bazı önemli özellikleri şunlardır:

- İki üçgensel bulanık sayının toplanması veya çıkarılması sonucu yine bir üçgensel bulanık sayı elde edilir.

- Üçgensel bulanık sayılarla yapılan çarpma, ters alma ve bölme işlemleri, her zaman bir üçgensel bulanık sayı sonucunu vermeyebilir.

İki üçgensel bulanık sayı  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$  arasında tanımlanan cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Toplama:**

$$\begin{aligned}\tilde{A}(+) \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3)(+)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).\end{aligned}$$

**Çıkarma:**

$$\begin{aligned}\tilde{A}(-) \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3)(-)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1).\end{aligned}$$

**Simetri:**

$$-(\tilde{A}) = (-a_3, -a_2, -a_1).$$

**Çarpma:**

Sadece pozitif reel sayılar için tanımlı olan bu işlem, iki şekilde tanımlanır.  $A$  ve  $B$  pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı iki üçgensel bulanık sayı ve bunların  $\alpha$  – kesenleri

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \text{ ve } \tilde{B}_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}]$$

olsun. Bu iki bulanık sayının çarpımı,

$$A_\alpha(.)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}.b_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}.b_3^{(\alpha)}]$$

dır. Bu çarpımın açık şekli aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$\begin{aligned}A_\alpha(.)B_\alpha &= [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3][(b_2 - b_1)\alpha + b_1, -(b_3 - b_2)\alpha + b_3] \\ &= [((a_2 - a_1)\alpha + a_1).((b_2 - b_1)\alpha + b_1), (-(a_3 - a_2)\alpha + a_3)(-(b_3 - b_2)\alpha + b_3)] \\ &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \\ a_1^{(\alpha)} &= a_1 b_1 + \alpha(a_1 b_2 - 2a_1 b_1 + b_1 a_2) + \alpha^2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \\ a_3^{(\alpha)} &= a_3 b_3 + \alpha(a_3 b_2 - 2a_3 b_3 + b_3 a_2) + \alpha^2(a_3 - a_2)(b_3 - b_2).\end{aligned}$$

$A = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $B = (b_1, b_2, b_3)$  yapısındaki pozitif üçgensel sayıların doğrudan çarpımı

$$A.B = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$$

dir. İki çarpımın sonucunu karşılaştırmak amacıyla elde edilen doğrudan çarpım  $AB$ 'nin  $\alpha$ -keseni

$$(A.B)_\alpha = [(a_2b_2 - a_1b_1)\alpha + a_1b_1, -(a_3b_3 - a_2b_2)\alpha + a_3b_3]$$

ile verilir. Görüldüğü gibi doğrudan çarpım,  $\alpha$ -kesenlerle yapılan çarpımdan belli miktarda sapmaktadır. Bu sapma miktarı kabul edilebilir olduğunda işlemde kolaylık açısından doğrudan çarpım tercih edilmektedir.

**Bölme:** Bulanık sayılarda bölme işlemi pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olup  $b_1^\alpha > 0$  ve  $b_3^\alpha > 0$  olmak üzere her  $\alpha \in [0,1]$  için  $\alpha$ -kesenler cinsinden

$$A_\alpha (\cdot) B_\alpha = \left[ \frac{a_1^\alpha}{b_3^\alpha}, \frac{a_3^\alpha}{b_1^\alpha} \right] = \left[ \frac{a_1 + (a_2 - a_1)\alpha}{-(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{b_1 + (b_2 - b_1)\alpha} \right]$$

olarak tanımlanır (Aksoy vd. [53]).

$A = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $B = (b_1, b_2, b_3)$  yapısındaki pozitif üçgensel sayılar için doğrudan bölme işlemi

$$\frac{A}{B} = \left[ \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_1} \right]$$

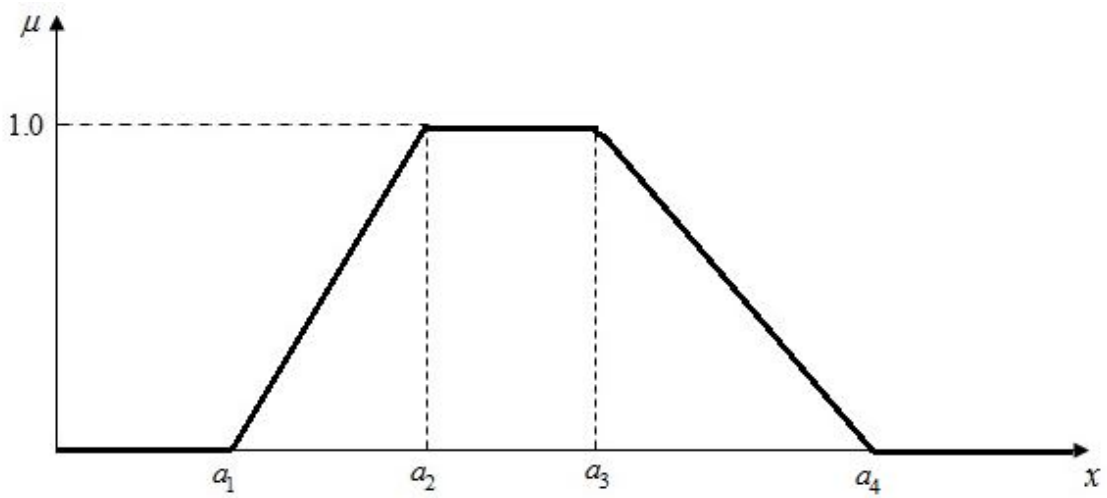
olarak tanımlanır. Çarpma işlemine benzer şekilde doğrudan ve  $\alpha$ -kesenler ile yapılan bölme işlemi sonuçları karşılaştırılabilir.

### 3.2.2 Yamuksal Bulanık Sayılar

$a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$  ve  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  olmak üzere  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  sıralı dördlüsü ile verilen ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & , a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & , a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & , x > a_4 \end{cases} \quad (3.3)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  bulanık sayısına yamuksal bulanık sayı denir. Yamuksal bulanık sayının üyelik fonksiyonu Şekil 3.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 3. 2 Yamuksal bulanık sayı.

$\alpha$  – kesen tanımı yardımıyla bir yamuksal  $A$  bulanık sayısı,

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4]$$

şeklinde de tanımlanabilir.

### 3.2.2.1 Yamuksal Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler

Yamuksal bulanık sayılarda cebirsel işlemlerin bazı önemli özellikleri şunlardır:

- İki yamuksal bulanık sayının toplanması veya çıkarılması sonucu yine bir yamuksal bulanık sayı elde edilir.
- Yamuksal bulanık sayılarla yapılan çarpma, ters alma ve bölme işlemleri, her zaman bir yamuksal bulanık sayı sonucunu vermeyebilir.

İki yamuksal bulanık sayı  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  ve  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  arasında tanımlanan cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Toplama:**

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)(+)(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4). \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Çıkarma:**

$$\begin{aligned} A(-)B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)(-)(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4). \end{aligned}$$

**Simetri:**

$$-(A) = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1).$$

**Çarpma:**

Sadece pozitif reel sayılar için tanımlı olan çarpma işlemi, iki şekilde tanımlanır.  $A$  ve  $B$  pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı iki yamuksal bulanık sayı ve bunların  $\alpha$  – kesenleri

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}] \text{ ve } B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_4^{(\alpha)}]$$

olsun. Bu iki bulanık sayının çarpımı,

$$A_\alpha(.)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}.b_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}.b_4^{(\alpha)}]$$

dır.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  ve  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  yapısındaki pozitif yamuksal bulanık sayıların doğrudan çarpımı ise

$$A.B = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4)$$

dür.

**Bölme:** Yamuksal bulanık sayılarda bölme işlemi pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olup  $b_1^\alpha > 0$  ve  $b_3^\alpha > 0$  olmak üzere her  $\alpha \in [0,1]$  için  $\alpha$  – kesenler cinsinden

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = \left[ \frac{a_1^\alpha}{b_4^\alpha}, \frac{a_4^\alpha}{b_1^\alpha} \right]$$

olarak tanımlanır.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  ve  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  yapısındaki pozitif üçgensel bulanık sayılar için doğrudan bölme işlemi

$$\frac{A}{B} = \left[ \frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right]$$

olarak tanımlanır.

**Ters Alma:** Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olan  $A$  yamuksal bulanık sayısının  $\alpha$  – keseni  $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}]$  olmak üzere  $A$ 'nın tersi

$$A_\alpha^{-1} = \left[ \frac{1}{a_4^{(\alpha)}}, \frac{1}{a_1^{(\alpha)}} \right]$$

ile verilir.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  yapısındaki pozitif yamuksal bulanık sayının doğrudan tersi ise

$$A^{-1} = \left( \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right)$$

dir.

### 3.3 Bulanık Birleştirme Operatörleri

Birleştirme operatörü, bir sayı kümesini tek bir sayıya indirgeyen bir fonksiyondur. Birleştirme operatörü, elemanları belli bir kümeden alınan  $n$  bileşenli bir vektörü, bu kümeden bir elemana götürür. Elde edilen bu değer bir tür ortalama değerdir.

Çok kriterli karar verme tekniklerinin çoğunda bir birleştirme adımı vardır. Ancak birleştirilecek değerler (örneğin skorlar, tatmin dereceleri veya tercihler) yöntemden yönteme farklılık gösterebilir.

Çok kriterli karar problemlerinde, en iyi alternatifin seçilmesinde amaçlar (kriterler) birbiriyle çelişebildiğinden, alınan karar tüm amaçlar için optimal olmayabilir. Karar vericiler, bazı amaçlarda kazanmak için bazı amaçlardan belli ölçülerde ödün vermek durumundadırlar. Tüm kriterlerin sağlanmasını isteyen bir karar verici, kötümser

(riskten kaçınan) bir davranış sergileyerek, minimum operatörü ile birleştirme yapar. Bunun aksine, sadece bir kriterin sağlanmasını yeterli gören bir karar verici, iyimser (risk üstlenen) bir davranış sergiler ve maksimum operatörü ile birleştirme yapar. Çoğu durumda, ne tam iyimser bir davranış ne de tam bir kötümser davranış sergilenmelidir. Bu nedenle, dengeleyici olmayan bu operatörler yerine, birleştirilen değerlerin minimumu ve maksimumu arasında sonuçlar veren (dengeleyici) operatörler kullanılmalıdır (Günay [54]).

### 3.3.1 Dengeleyici operatörler

Bulanık kümelerin birleştirilmesi için kullanılan operatörlere bulanık birleştirme operatörleri denir. Literatürde çeşitli bulanık birleştirme operatörleri vardır. Bunlardaki çeşitlilik özel durum ve modeller için hangi operatörün seçilmesi gerektiği kararını verirken kafa karıştırıcı olabilir. Zimmerman bulanık karar problemlerinde uygun birleştirme operatörü seçebilmek için sırasıyla şu 8 kuralı önermiştir: Aksiyomatik kuvvet (axiomatic strength), deneysel uygunluk (empirical fit), adapte olma (adaptability), sayısal etkinlik (numerical efficiency), dengeleme (compensation), dengeleme genişliği (range of compensation), davranışları birleştirmek (aggregating behavior), üyelik fonksiyonlarının seviyelerini belirlemek için gereken ölçek (Zimmermann [55]).

Bulanık yaklaşımların en önemli yönü, kullanılan birleştirme operatörünün dengeleyici özellikte olup olmamasıdır. Birçok araştırmacı operatörlerin bu özelliği üzerine çalışmalar yapmıştır (Zimmermann [55], Lai ve Hwang [56], Luhandjula [57], Shih ve Lee [58]).

Zimmermann [59]'da lineer üyelik fonksiyonlarını kullanarak çok amaçlı lineer programlama problemi için “min” operatör modelini önermiştir. Bu model genellikle kolay hesaplanabilir olmasından dolayı tercih edilir. “min” operatörünün çeşitli faydalı özelliklerinin olduğu gösterilmesine (Zimmermann [55]) rağmen, min operatör ile üretilen çözüm, dengeleyici değildir ve Pareto-optimalliği garanti etmez (Guu ve Wu [60], Lee ve Li [61], Wu ve Guu [62]). “min” operatörün en büyük dezavantajı, dengeleyici olmamasıdır. Başka bir ifadeyle, “min” operatör ile elde edilen sonuçlar en kötü durumu temsil etmekte ve daha iyi olabilecek diğer elemanların sonucu daha iyiye götürmesini (dengelemesini) engellemektedir.

Zimmermann ve Zysno [63]'de gerçek hayatta alınan kararların çoğunun, dengeleyici olmayan (minimum operatör) veya tam dengeleyici (ortalama operatör) olarak nitelendirilemeyeceğini göstermişler ve bu güçlüğü aşmak için dengeleyici operatör adıyla  $\gamma$  dengeleyici parametreye dayanan bir karma (hybrid) operatörler sınıfı önermişlerdir. Ayrıca bu önerilen operatörün kullanımının gerçek hayat kararlarında “min”, “çarpım”, “max”, “geometrik ortalama” operatörlerine göre daha uygun olduğunu göstermişlerdir. Fakat bu operatör non-lineer bir yapıya sahiptir, bu nedenle de hesaplamada güçlükler doğurur.

Luhandjula [57]'de çok amaçlı lineer programlama problemlerini çözmek için hesaplama açısından oldukça etkin olan dengeleyici minimum-sınırlı toplam operatörü

$$\mu_D = \gamma \min_i \mu_i + (1 - \gamma) \min \left[ 1, \sum_i \mu_i \right]$$

önerilmiştir. Bu operatör hesaplama etkinliği açısından oldukça kullanışlı olmasına rağmen, dengeleyici parametre  $\gamma$ 'nın belirlenmesinin zor olması ve bu operatörle elde edilen çözümlerin yeterince etkin olmaması sebebiyle çok fazla tercih edilmez.

Lee ve Li [61]'de “min” operatörün dezavantajlarını aşabilmek için iki fazlı bir yaklaşım önermişlerdir. İlk fazda, Zimmermann'ın yaklaşımı kullanılır. İlk fazda olası çözüm tek ise bu çözüm Pareto-optimaldir. Eğer tek değilse, ikinci fazda orijinal kısıtlar ve faz 1'den gelen kısıtlar altında, bütün üyeliklerin aritmetik ortalama değerini maksimize eden yeni bir program oluşturulur. Daha açık bir şekilde faz 2, ortalama operatörün tam dengeleyici özelliği ile çözüm üretilen fazdır.

Chen ve Chou [64]'de minimum operatörü, ortalama operatörü ve iki fazlı metodu birleştirmek için bulanık bir yaklaşım önermiştir. Guu and Wu [65]'de minimum operatörüyle elde edilen baskın çözümleri geliştirmek amacıyla bulanık lineer programlama problemi için benzer iki fazlı bir model önermişlerdir. Ayrıca Tiryaki [66]'da çok seviyeli lineer programlama problemlerine dengeleyici uzlaşık Pareto-optimal çözümler elde etmek için etkileşimli dengeleyici bulanık programlama yaklaşımını önermiştir.

Werners [67]'de  $\gamma$ -operatörüne dayanan “bulanık ve” ve “bulanık veya” operatörlerini önermiştir. Bu operatörler sırasıyla minimum ve aritmetik ortalama ile maksimum ve aritmetik ortalama operatörlerinin konveks kombinezonlarıdır. “Bulanık ve” operatörü

$$\mu_{and} = \gamma \min_i(\mu_i) + (1-\gamma) \left( \sum_i \mu_i \right) / m \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada  $0 \leq \mu_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ve  $\gamma \in [0,1]$  dengelemenin derecesini ifade etmektedir. “Bulanık veya” operatörü ise

$$\mu_{or} = \gamma \max_i(\mu_i) + \frac{(1-\gamma)}{m} \left( \sum_i \mu_i \right)$$

ile tanımlanır.

### 3.4 Sıralama Fonksiyonu

$F(\mathbb{R})$  belirli bir tipte (üçgensel, yamuksal, vb. ) tanımlanmış bütün bulanık sayıların kümesi olsun. Her bir bulanık sayıyı reel ekseninde bir sayıya atayan  $R: F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna bir sıralama fonksiyonu denir.

$\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$  olmak üzere,  $F(\mathbb{R})$  üzerinde tanımlanan sıralama bağıntıları

$$\tilde{a} \geq_R \tilde{b} \Leftrightarrow R(\tilde{a}) \geq R(\tilde{b}),$$

$$\tilde{a} \leq_R \tilde{b} \Leftrightarrow R(\tilde{a}) \leq R(\tilde{b}),$$

$$\tilde{a} = \tilde{b} \Leftrightarrow R(\tilde{a}) = R(\tilde{b})$$

dir. Ayrıca  $\tilde{a} \leq_R \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{b} \geq_R \tilde{a}$ ’dır.

Bir sıralama fonksiyonunun lineer olması için gerek ve yeter şart

$$R(k\tilde{a} + \tilde{b}) = kR(\tilde{a}) + R(\tilde{b})$$

eşitliğini sağlamasıdır.

Yager tarafından [68]’de önerilen lineer bir üyelik fonksiyonu

$$R(\tilde{a}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\inf \tilde{a}_\lambda + \sup \tilde{a}_\lambda) d\lambda \quad (3.6)$$

dır. (3.6) fonksiyonu

$$R(\tilde{a}) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

fonksiyonuna indirgenebilir.

### EN KISA YOL PROBLEMİ (EKYP)'NE BULANIK YAKLAŞIMLAR

Tezin özgün kısımlarından birini oluşturan bu bölümde, kesin (crisp) ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP, tek amaçlı bulanık ark ağırlıklarına sahip EKYP ve çok amaçlı bulanık ark ağırlıklarına sahip EKYP olmak üzere üç tip problem için dengeleyici operatörler aracılığıyla bulanık yaklaşımlar geliştirilmiştir. Dengeleyici modeller ile Pareto-optimal çözümler üretildiğine dair teorem verilmiş ve ispatlanmıştır. İşleyişin anlaşılması için her bir modelden sonra sayısal örnek sunulmuştur.

#### 4.1 Kesin Ark Ağırlıklarına Sahip Çok Amaçlı EKYP

Çağımızda bilgi ve teknolojiye hızlı ilerleme, hayatımızı çok boyutlu bir hale getirmiş, bireysel veya örgütsel alınabilecek en küçük kararlarda dahi birden fazla amacın var olması sonucunu doğurmuştur. Buna paralel olarak problemleri daha gerçekçi ele alabilmek için çoğunlukla tek bir amacın değil birden fazla amacın dikkate alınması gereklidir. Birbirleriyle çelişebilen bu amaçların dengelendiği (uzlaştığı) bir çözümün bulunması literatürde *Çok Amaçlı Karar Verme* adlı çok önemli bir araştırma sahası yaratmış ve bunun üzerine sayısız denecek kadar çok çalışma yapılmıştır.

EKYP'nde ark ağırlıkları çoğunlukla yol uzunluğunu temsil etmektedir. Fakat bunun yanında zaman, yol güvenliği veya risk gibi başka niteliklerin de dikkate alınması gerektiğinde ÇEKYP ortaya çıkmaktadır.

ÇEKYP'nin, NP-zor (non-deterministic polynomial time-hard) problem sınıfına ait bir problem olduğu gösterilmiştir (Hansen [25]). Np-zor problem sınıfı, çözüme ulaşmak için gerekli sürenin veya bilgisayar belleğinin, problemin boyutuna (düğüm ve ark

sayısına) bağı olarak hızla arttığı problemlerden oluşur. Bu sebeple, NP-zor problemlerin büyük boyutlu olanlarının çözümünde sezgisel yöntemlerden de yararlanılabilir.

Literatürde ÇEKYP üzerine yapılan birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların bir özeti tezimizin ilk bölümünde sunulmuştur. Yapılan çalışmalardan farklı olarak, tezin özgün kısımlarından biri olan bu alt bölümde ÇEKYP için Werners'in dengeleyici "bulanık ve" operatörü kullanılarak bulanık bir yaklaşım sunulmaktadır. ÇEKYP, çok amaçlı lineer programlama problemi olarak ele alınmış, amaçların üyelik fonksiyonları oluşturularak Werners'in "bulanık ve" operatörü aracılığıyla bulanık bir model önerilmiştir. Literatürde ÇEKYP ile dengeleyici operatörü birleştiren bir çalışma bulunmamaktadır. Bu operatör aracılığıyla kurulan model, hem dengeleyici hem de Pareto-optimal olan uzlaşık bir çözüm üretmektedir.

Bu alt bölümde ele alınan problem, (2.1)-(2.3) ile verilen EKYP modelinin çok amaçlı halidir. Problem ile ilgili kabuller aşağıdaki gibidir:

- Sonlu sayıda düğüme sahip, bağlantılı ve yönlü bir şebekede tanımlanan EKYP ele alınmaktadır.
- Şebekedeki tüm ark ağırlıkları nonnegatiftir.

$V = \{1, 2, \dots, N\}$  düğümler kümesi ve  $E$ , şebekedeki arklar kümesi olmak üzere  $G = (V, E)$ , yönlü, döngü içermeyen bağlantılı bir şebeke ve her bir  $(i, j) \in E$  arkının ağırlığı olan  $c_{ij}$  nonnegatif olsun. Bu durumda ÇEKYP'nin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir:

$$\min f^k(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^k x_{ij}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.1)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, N, \\ -1 & , i = N \end{cases} \quad (4.2)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E. \quad (4.3)$$

Burada kaynak noktası 1. düğüm olarak, varış noktası ise  $N$ . düğüm olarak gösterilmiştir. (4.3)'den görüldüğü gibi  $(i, j)$  arkının seçilecek olan en kısa yol rotasında olup olmadığını gösteren karar değişkenleri  $x_{ij}$  ikili (binary)'dir. (4.1)-(4.3)

problemi çok amaçlı 0-1 programlama problemidir. (4.2) ve (4.3) kısıtlarının oluşturduğu problemin uygun çözümler bölgesi  $S$  ile gösterilecektir.

Şimdi, çok amaçlı programlama çerçevesinde (4.1)-(4.3) problemi için Pareto-optimallik tanımını verelim. Literatürde *Kuvvetli etkin* veya *Basılamaz* çözüm olarak da anılan Pareto-optimal çözüm, tek amaçlı programlamadaki optimal çözüme karşılık gelmektedir.

**Tanım 4.1 (ÇEKYP için Pareto-optimal çözüm)**  $\mathbf{x}^* \in S$  noktasının (4.1)-(4.3) probleminin bir Pareto-optimal çözümü olması için gerek ve yeter şart  $\forall k$  için  $f^k(\mathbf{x}) \leq f^k(\mathbf{x}^*)$  ve  $\exists k$  için  $f^k(\mathbf{x}) \neq f^k(\mathbf{x}^*)$  olacak şekilde bir başka  $\mathbf{x} \in S$  noktasının mevcut olmamasıdır.

**Tanım 4.2 (ÇEKYP için Uzlaşık Çözüm)**  $P$  problemin Pareto-optimal çözümlerinin kümesi,  $\wedge$  “minimum” operatörü göstermek üzere,  $\mathbf{x}^* \in S$  noktasının (4.1)-(4.3) probleminin bir uzlaşık çözümü olması için gerek ve yeter şart  $\mathbf{x}^* \in P$  ve  $f^k(\mathbf{x}^*) \leq \wedge_{\mathbf{x} \in S} f^k(\mathbf{x})$  olmasıdır. Burada  $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}), \dots, f^K(\mathbf{x}))$ 'dir.

#### 4.1.1 Çok Amaçlı EKYP'ne Dengeleyici Bir Yaklaşım

Kesin ark ağırlıklarına sahip (4.1)-(4.3) problemini çözmek üzere öncelikle amaçların üyelik fonksiyonları belirlenecektir. Üyelik fonksiyonları oluşturmak için amaç fonksiyonlarının en iyi ve en kötü tatmin düzeylerine karşılık gelen alt ( $L_k$ ) ve üst ( $U_k$ ) sınır değerleri belirlenmelidir. Literatürde bu değerleri elde etmek için en yaygın şekilde kullanılan iki yaklaşım bulunmaktadır.

İlk yaklaşım ödemeler matrisi (pay-off matrix) olarak isimlendirilir. Bu yaklaşımda öncelikle her bir amaç, problemin orijinal kısıtları altında, tek amaçlı bir EKYP olarak çözümlenerek tüm amaçların bireysel minimum değerleri ( $L_k$ ) elde edilir. Daha sonra ise elde edilen bireysel minimumu veren noktalar, diğer tüm amaçlarda yerine konulur. Elde edilen değerlerin maksimumu ilgili amacın üst sınır değerini ( $U_k$ ) verir. Amaçların bireysel optimal noktaları sırasıyla  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^K$  olmak üzere, oluşturulan ödemeler matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} f^1(\mathbf{x}^{1*}) & f^1(\mathbf{x}^{2*}) & \dots & f^1(\mathbf{x}^{K*}) \\ f^2(\mathbf{x}^{1*}) & f^2(\mathbf{x}^{2*}) & \dots & f^2(\mathbf{x}^{K*}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^K(\mathbf{x}^{1*}) & f^K(\mathbf{x}^{2*}) & \dots & f^K(\mathbf{x}^{K*}) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

(4.4) matrisinin köşegen elemanları sırasıyla her bir amacın bireysel minimum değeri  $L_k$ 'yi, her bir satırının maksimum değeri ise  $U_k$ 'yi belirler.

Alt ve üst sınır değerlerini belirleyen ikinci yaklaşımda ise her bir amaç, problemin orijinal kısıtları altında minimize ve maksimize edilir. Başka bir ifadeyle amaçların bireysel minimum ve maksimum değerleri hesaplanır. Buna göre elde edilen sınır değerleri şu şekildedir:

$$L_k = \min_{\mathbf{x} \in S} f^k(\mathbf{x}) \quad , \quad U_k = \max_{\mathbf{x} \in S} f^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.5)$$

Sınır değerleri elde edildikten sonra üyelik fonksiyonları tanımlanmalıdır. Literatürde çeşitli tiplerde üyelik fonksiyonları mevcuttur. Bunlardan bazıları lineer, üstel, hiperbolik, ters hiperbolik, parçalı lineer üyelik fonksiyonlarıdır (Sakawa [69]). Çalışmamızda işlem kolaylığı açısından lineer üyelik fonksiyonlarını kullanılmıştır. Ayrıca Chen ve Lee tarafından [70]'de belirtildiğine göre, daha komplike non-lineer üyelik fonksiyonları yerine lineer üyelik fonksiyonları kullanımı benzer kalitede çözüm üretilmesini sağlamaktadır. Buna göre, ÇEKYP'nin  $k$ . ( $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ ) amaç fonksiyonuna karşılık gelen lineer yapıya sahip  $\mu_k(f^k(\mathbf{x}))$  üyelik fonksiyonu

$$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & , f^k(\mathbf{x}) < L_k, \\ \frac{U_k - f^k(\mathbf{x})}{U_k - L_k} & , L_k \leq f^k(\mathbf{x}) \leq U_k, \\ 0 & , f^k(\mathbf{x}) > U_k \end{cases} \quad (4.6)$$

olarak tanımlanır. Burada tüm amaçlar için alt ve üst sınır değerlerin birbirinden farklı olduğu kabul edilmiştir. ( $L_k \neq U_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ) Eğer sınır değerler birbirine eşit ise ilgili amacın üyelik fonksiyonu 1 olarak alınacaktır ( $L_k = U_k \Rightarrow \mu_k(f^k(\mathbf{x})) = 1$ ). Görüldüğü gibi  $\mu_k(f^k(\mathbf{x}))$  üyelik fonksiyonları  $[L_k, U_k]$  aralığında lineer ve monoton azalandır.

Zimmermann'ın minimum operatörü (Zimmermann [59]) kullanılarak, ÇEKYP'nin son hali

$$\max_{\mathbf{x}} \min_k \mu_k(f^k(\mathbf{x})) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x} \in S$$

olarak elde edilir. Yardımcı bir  $\lambda$  değişkeni kullanılırsa,

$$\min_k \mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda \Rightarrow \mu_k(f^k(\mathbf{x})) \geq \lambda$$

olacaktır. Böylece (4.7) problemine eşdeğer olarak aşağıdaki klasik lineer programlama problemi oluşturulabilir:

$$\max \lambda \quad (4.8)$$

$$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) \geq \lambda, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\mathbf{x} \in S$$

$$\lambda \in [0, 1].$$

Burada (4.8) problemi, ÇEKYP'nin minimum operatör modelidir. Bu problemin optimal değeri  $\lambda^*$ , problemin bütün amaçlarının en düşük tatmin seviyesinin maksimize edildiği değere karşılık gelir ve ÇEKYP'deki amaçların en temel tatmin düzeyi olarak yorumlanabilir.

Literatürde, Zimmermann'ın minimum operatör modelinin dengeleyici olmayan bir model olduğu ve bu operatör kullanılarak elde edilen çözümün Pareto-optimalliği garantilemediği gösterilmiştir (Guu ve Wu [60], Lee ve Li [61], Wu ve Guu [62]). Bu sebeple yaklaşımımızda amaçların üyelik fonksiyonlarını birleştirmek için (3.5) ile verilen Werners'in  $\mu_{and}$  operatörü kullanılmıştır.

Her bir amaç için en temel tatmin seviyesinin sağlanmasının ötesinde, amaçların tatmin seviyelerini olabildiğince arttırmak amacıyla  $\min_k \mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda$  olmak üzere

$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda + \lambda_k$  düzenlemesi yapılabilir. Bu düzenleme, probleme

$$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda + \lambda_k \quad (4.9)$$

$$\lambda + \lambda_k \leq 1 \quad (4.10)$$

kısıtlarının eklenmesi ile yansıtılır. “Bulanık ve” operatörü aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenirse, operatörün son hali

$$\mu_{and} = \gamma \min_k(\mu_k) + \frac{(1-\gamma)}{K}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_K) \quad (4.11)$$

$$\mu_{and} = \gamma\lambda + \frac{(1-\gamma)}{K}((\lambda + \lambda_1) + (\lambda + \lambda_2) + \dots + (\lambda + \lambda_K)) \quad (4.12)$$

$$\mu_{and} = \lambda + \frac{(1-\gamma)}{K}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K) \quad (4.13)$$

olarak elde edilir. Burada  $\gamma \in [0,1]$  büyüklüğü denge parametresi olarak adlandırılır ve dengelenmenin derecesini göstermektedir. Açıktır ki,  $\gamma = 1$  olduğunda  $\mu_{and}$  operatörü minimum operatöre,  $\gamma = 0$  olduğunda ise ortalama operatöre eşit olacaktır. Böylece, (4.9), (4.10) ve (4.13) kullanılarak, (4.8) problemi denge parametresi  $\gamma$  'ya bağlı olarak aşağıdaki eşdeğer dengeleyici modele çevrilir:

$$\max \mu_{and} = \lambda + \frac{(1-\gamma)}{K}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{x} \in S$$

$$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) \geq \lambda + \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\lambda + \lambda_k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\lambda, \lambda_k, \gamma \in [0,1], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Burada, çözüm aşamasında olası hesaplama hatalarından korunmak için (4.9) kısıtının (4.14) modeline eşitsizlik olarak eklendiğine dikkat edilmelidir.

Böylece (4.14) modeli, denge parametresi  $\gamma$  'nın  $[0,1]$  aralığındaki değerlerine karşılık ÇEKYP için dengeleyici, uzlaşık, Pareto-optimal çözümler üretecektir. Bu iddiamız aşağıdaki teoremden ispatlanmıştır.

**Teorem 4.1**  $\lambda^x = (\lambda^x, \lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_K^x)$  olmak üzere (4.14) modelinin optimal çözümü  $(\mathbf{x}, \lambda^x)$  ise,  $\mathbf{x}$  ÇEKYP'nin bir Pareto-optimal çözümüdür.

**İspat 4.1** (4.14) probleminin optimal çözümü olan  $\mathbf{x}$ 'in ÇEKYP'nin bir Pareto-optimal çözümü olmadığını kabul edelim. O halde tüm  $k=1,\dots,K$ , değerleri için  $f^k(\mathbf{y}) \leq f^k(\mathbf{x})$ , ve en azından bir  $k$  değeri için  $f^k(\mathbf{y}) < f^k(\mathbf{x})$  olacak şekilde, bir uygun  $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}^y)$  çözümü mevcuttur. Amaç fonksiyon değeri daha iyi olan  $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}^y)$  çözümü daha iyi bir tatmin seviyesi vereceğinden, çözümlerin üyelik fonksiyon değerleri arasında

$$\mu_k(f^k(\mathbf{y})) \geq \mu_k(f^k(\mathbf{x})), \forall k = 1, 2, \dots, K \text{ ve } \mu_k(f^k(\mathbf{y})) > \mu_k(f^k(\mathbf{x})), \exists k \quad (4.15)$$

eşitsizlikleri geçerli olacaktır. (4.9) kullanılarak üyelik fonksiyon değerleri (4.15)'de yerine yazıldığında,

$$\mu_k(f^k(\mathbf{y})) = \lambda^* + \lambda_k^y \geq \mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda^* + \lambda_k^x, \forall k = 1, 2, \dots, K$$

ve

$$\mu_k(f^k(\mathbf{y})) = \lambda^* + \lambda_k^y > \mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda^* + \lambda_k^x, \exists k$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde  $\lambda_k^x$  ve  $\lambda_k^y$  değerlerinin var olduğu görülür.

Buradan

$$\lambda_k^y \geq \lambda_k^x, \forall k = 1, \dots, K \text{ ve } \lambda_k^y > \lambda_k^x, \exists k$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k^y > \sum_{k=1}^K \lambda_k^x \quad (4.16)$$

elde edilir. Böylece (4.16) ile,

$$\mu_{and}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}^y) = \lambda^* + \frac{(1-\gamma)}{K} \sum_{k=1}^K \lambda_k^y > \lambda^* + \frac{(1-\gamma)}{K} \sum_{k=1}^K \lambda_k^x = \mu_{and}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^x),$$

$$\Rightarrow \mu_{and}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}^y) > \mu_{and}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^x)$$

yazılabilir. Bu da  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^x)$  çözümünün (4.14) modeline bir optimal çözüm olması ile çelişir.  $\square$ .

Eğer gerekirse, (4.14)'ün çözümlerine Pareto-optimallik (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki [71]) testi uygulanarak, ilgili çözümlerin ÇEKYP için Pareto-optimal oldukları görülebilir.

Yaklaşımımızda bütün amaçların ağırlıkları eşit olarak alınmıştır. (4.14) modelinin sonuçları Karar Verici (KV)'ye sunulur. Eğer KV önerilen sonuçlardan tatmin olmazsa, amaçlara  $w_k > 0$ ,  $\sum_{k=1}^K w_k = 1$  olmak üzere  $w_k$  ağırlıklarını atayabilir. Bu durumun (4.14) modeline yansıtılması, modeldeki

$$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) \geq \lambda + \lambda_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K.$$

$$\lambda + \lambda_k \leq 1$$

kısıtlarının yerine

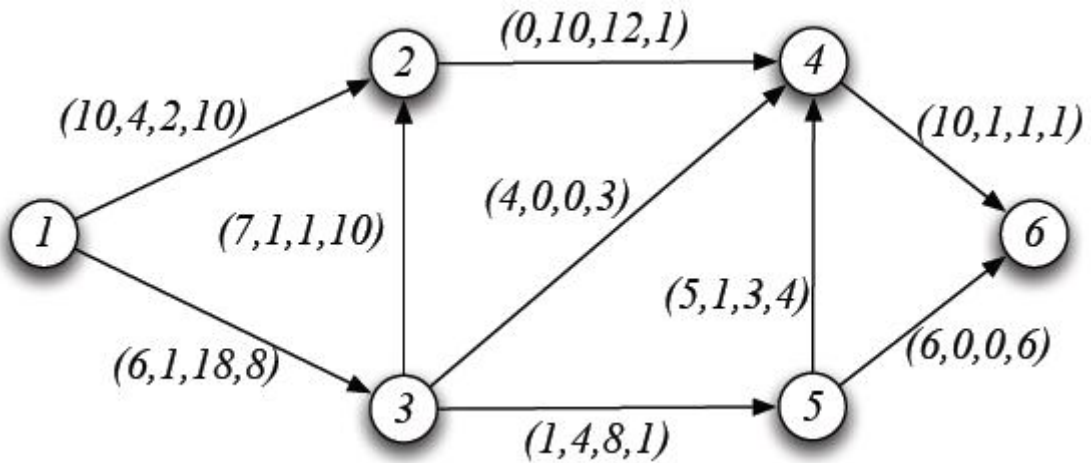
$$\frac{\mu_k(f^k)}{w_k} \geq \lambda + \lambda_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$w_k(\lambda + \lambda_k) \leq 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K.$$

kısıtlarının eklenmesiyle sağlanacaktır.

#### 4.1.2 Sayısal Örnek

Verilen yaklaşımımızın işleyişini anlatmak için verilecek sayısal örnek, karşılaştırma da yapmak amacıyla literatürden alınmıştır. [20]'den alınan örneğe ait şebeke Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4. 1 ÇEKYP örneğinin şebekesi.

Görüldüğü gibi örnek problem, 6 düğümlü, bağlantılı, döngü içermeyen nonnegatif ark ağırlıklarına sahip bir şebeke üzerinde tanımlanmıştır. Şebekenin düğüm kümesi

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ve şebekedeki arkların kümesi

$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

'dir. Problem, 1 düğümünden 6 düğümüne gerçekleşen akışın minimum olmasını sağlamaya çalışan 4 tane amaca sahiptir. Her bir amaca ait  $c_{ij}^k$  ( $(i, j) \in E, k = 1, 2, 3, 4$ ) ark ağırlıkları, sıralı dördü (1. amaçtan 4. amaca doğru) şeklinde ilgili arkın bitişiğine yazılmıştır. Örneğin  $(c_{35}^1, c_{35}^2, c_{35}^3, c_{35}^4) = (1, 4, 8, 1)$  'dir.

Dengeleyici modelimizin kurulması için öncelikle amaçların üyelik fonksiyonları oluşturulmalıdır. Teoride üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi için iki yaklaşım sunulmuştur. Sayısal örnekte (4.5) ile verilen yaklaşım uygulanacaktır. Buna göre amaçların alt ve üst sınır değerleri ve ilgili değerlere karşılık gelen optimal rotalar Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4. 1 Amaçların sınır değerleri ve ilgili rotalar.

			Optimal Rota				Optimal Rota
$f^1$	$L_1$	13	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$	$f^3$	$L_3$	15	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
	$U_1$	23	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$		$U_3$	32	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$f^2$	$L_2$	2	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$	$f^4$	$L_4$	12	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
	$U_2$	15	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$		$U_4$	20	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Amaçların, Çizelge 4.1'deki sınır değerleriyle oluşturulan üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\mu_1(f^1(\mathbf{x})) = \frac{23 - f^1(\mathbf{x})}{10}, \quad \mu_2(f^2(\mathbf{x})) = \frac{15 - f^2(\mathbf{x})}{13}, \quad \mu_3(f^3(\mathbf{x})) = \frac{32 - f^3(\mathbf{x})}{17},$$

$$\mu_4(f^4(\mathbf{x})) = \frac{20 - f^4(\mathbf{x})}{8}.$$

(4.6)'da 3 parçalı olarak tanımlanan üyelik fonksiyonlarının burada tek parça şeklinde yazıldığına dikkat edilmelidir. Bunun sebebi, üyelik fonksiyonlarının, tek bir şekilde tanımlanan uygun çözümler bölgesinde amaçların en iyi ve en kötü (min ve max)

değerleri kullanılarak oluşturulması, başka bir ifadeyle  $k.(k=1,2,3,4)$  amacın  $[L_k, U_k]$  kapalı aralığı içerisinde değer almasıdır. Buna göre ele alınan sayısal örnek için (4.14)'e karşılık gelen dengeleyici model aşağıdaki gibidir:

$$\max \mu_{and} = \lambda + \frac{(1-\gamma)}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \quad (4.17)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, 6 \\ -1 & , i = 6 \end{cases}$$

$$f^1(\mathbf{x}) + 10(\lambda + \lambda_1) \leq 23 ,$$

$$f^2(\mathbf{x}) + 13(\lambda + \lambda_2) \leq 15 ,$$

$$f^3(\mathbf{x}) + 17(\lambda + \lambda_3) \leq 32 ,$$

$$f^4(\mathbf{x}) + 8(\lambda + \lambda_4) \leq 20 ,$$

$$\lambda + \lambda_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4 ,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E.$$

$$\lambda, \lambda_k, \gamma \in [0, 1] , k = 1, 2, 3, 4$$

Karma ikili lineer programlama problemi tipinde olan (4.17)'nin denge parametresi  $\gamma$ 'nın 0 ile 1 arasındaki 0.1 artımıyla elde edilen değerlerine karşılık gelen sonuçlar Çizelge 4.2'de verilmiştir. Burada  $\mu_{and}$  dengelenen tatmin seviyesini,  $\lambda$  en temel tatmin düzeyini,  $f^k (k=1,2,3,4)$  amaç fonksiyon değerlerini,  $\mu_k (k=1,2,3,4)$  ise amaçların tatmin düzeylerini göstermektedir.

Sonuçlardan görüldüğü gibi dengeleyici modelimiz  $\gamma=0—\gamma=0.6$  için  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  rotasını üretmiştir. İkinci ve dördüncü amaç, ilgili rotaya karşılık tam tatmin düzeyindeyken, birinci ve üçüncü amaçların tatmin düzeyleri sırasıyla 0.3 ve 0.7647 seviyesinde kalmıştır. Dengeleyici modelimiz  $\gamma=0.7—\gamma=1.0$  için  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  rotasını üretmiştir. Bu rota için sadece birinci amaç tam tatmin düzeyindedir.

Çizelge 4. 2 Örnek probleme ait dengeleyici modelin sonuçları.

	$\mu_{and}$	$\lambda$	$f^1$	$\mu_1$	$f^2$	$\mu_2$	$f^3$	$\mu_3$	$f^4$	$\mu_4$	İlgili Rota
$\gamma = 0$	0.7662	0.3	20	0.3	2	1.0	19	0.7647	12	1.0	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.1$	0.7196	0.3	20	0.3	2	1.0	19	0.7647	12	1.0	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.2$	0.6729	0.3	20	0.3	2	1.0	19	0.7647	12	1.0	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.3$	0.6263	0.3	20	0.3	2	1.0	19	0.7647	12	1.0	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.4$	0.5797	0.3	20	0.3	2	1.0	19	0.7647	12	1.0	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.5$	0.5331	0.3	20	0.3	2	1.0	19	0.7647	12	1.0	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.6$	0.4865	0.3529	13	1.0	5	0.7692	26	0.3529	15	0.625	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.7$	0.4531	0.3529	13	1.0	5	0.7692	26	0.3529	15	0.625	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.8$	0.4197	0.3529	13	1.0	5	0.7692	26	0.3529	15	0.625	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$
$\gamma = 0.9$	0.3863	0.3529	13	1.0	5	0.7692	26	0.3529	15	0.625	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$
$\gamma = 1.0$	0.3529	0.3529	13	1.0	5	0.7692	26	0.3529	15	0.625	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

$\gamma = 1$  için  $\mu_{and}$  min (dengeleyici olmayan) operatöre eşittir. Başka bir ifadeyle karar, amaçların garantilenen en temel tatmin düzeyi seviyesindedir:

$$\mu_{and} = \min_k \mu_{f^k} = \min \{ 1.0; 0.7692; 0.3529; 0.625 \} = 0.3529$$

$\gamma = 0$  için  $\mu_{and}$  ortalama operatöre (tam dengeleyici) eşit olmuş, karar amaçların tatmin seviyelerinin ortalamasına karşılık gelmiştir:

$$\mu_{and} = \min \frac{1}{4} \sum_k \mu_{f^k} = \frac{0.3 + 1.0 + 0.7647 + 1.0}{4} = 0.7662.$$

[20]'de etiketleme algoritmasına dayanan yaklaşım ile elde edilen ilk rota  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ 'dır. Daha sonra KV ile etkileşimli olarak birinci ve ikinci amacın referans noktaları (KV tarafından atanan hedef değerleri) 14 ve 6 olarak değiştirilmiş ve bunun sonucunda  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  rotası elde edilmiştir. Ayrıca çalışmanın sonucunda KV sonuçlardan tatmin olmazsa amaçlara yeni referans noktaları atayarak yeni çözümler elde edilebileceği belirtilmiştir.

Dengeleyici modelimizde tüm amaçların ağırlıkları eşit olarak alınmış, buna göre  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  ve  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  rotaları elde edilmiştir. Örneğin alındığı [20]'de olduğu gibi KV sonuçlardan tatmin olmazsa amaçlara yeni ağırlıklar atayarak yeni çözümler elde edilebilir. Böylece teoride de anlatıldığı gibi amaçlara ağırlık atanabilmesi, önerilen dengeleyici modelimizi etkileşimli hale getirilebilmektedir.

## 4.2 Bulanık Ark Ağırlıklarına Sahip EKYP (BEKYP)

EKYP'nin amaç fonksiyonunda yer alan ark ağırlıkları iki düğüm arası coğrafik uzaklığın yanında arktan geçiş süresini, geçiş maliyetini, yol güvenliğini veya riskini belirten bir değeri gösterebilir. Uygulamada ele alınan örneklerde, bilgi eksikliğinden, değişen ekonomik koşullardan veya ilgili niteliğin doğasından kaynaklanan bazı belirsizlikler söz konusu olabilir. Örneğin bir karayolu şebekesinde tanımlanan EKYP için ark ağırlıklarının arktan geçiş süresini gösterdiği bir amaç dikkate alınsın. Trafik yoğunluğu, yolda meydana gelebilecek trafik kazaları, hava durumu gibi dış etkenler sebebiyle kesin sayısal bir büyüklükle ifade edilen ark ağırlıkları gerçekleri yansıtmayabilir. Dolayısıyla ark ağırlıklarının kesin sayısal değerler yerine belirsizlik bilgisini de içinde barındırabilecek bir şekilde ifade edilmesine ihtiyaç duyulur. 1965 yılında L. A. Zadeh'in geliştirdiği bulanık küme teorisi ile tanımlanan bulanık sayılar belirsizliğin ifadesinde kullanılan çok önemli bir araçtır. Bulanık sayıların kullanımı, model parametrelerinin daha gerçekçi bir şekilde ele alınmasına imkan sağlar. Buna paralel olarak, çalışmamızın bu alt bölümünde, EKYP'nin ark ağırlıkları bulanık sayılar olarak alınmış ve oluşan BEKYP için çok amaçlı programlama çerçevesinde dengeleyici bir model önerilmiştir.

### 4.2.1 Tek Amaçlı BEKYP'ne Dengeleyici Bir Yaklaşım

(2.1)-(2.3) ile verilen EKYP'nde ark ağırlıklarının bulanık sayı olarak alınması ile oluşan problem BEKYP olarak adlandırılır. Literatürde çeşitli bulanık sayı tipleri mevcuttur. Bunlardan en yaygın kullanılanları üçgensel ve yamuksal bulanık sayılardır. Bunlarla ilgili detaylı bilgi Bölüm 3.2'de verilmiştir.

$V = \{1, 2, \dots, N\}$  düğümler kümesi ve  $E$ , şebekedeki arklar kümesi olmak üzere  $G = (V, E)$ , yönlü, döngü içermeyen bağlantılı bir şebeke olsun. Bu durumda BEKYP'nin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir:

$$\min \tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} x_{ij}, \quad (4.18)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, N, \\ -1 & , i = N \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E.$$

Burada amaç fonksiyonunda yer alan toplam işareti ( $\Sigma$ ), bulanık sayılar arasındaki toplama işlemine karşılık gelmektedir. Ayrıca amaç fonksiyonunun reel değerli olmamasına dikkat edilmelidir. Klasik EKYP’de minimum amaç fonksiyon değerini veren rotanın hesaplanması amaçlanır. BEKYP’nde ise amaç fonksiyon değeri,  $\tilde{c}_{ij}$  bulanık ark ağırlıklarının tipinde bulanık bir sayı olacaktır. Dolayısıyla BEKYP’nde toplam yol uzunluğunu gösteren bulanık amaç değerleri arasından en iyi seçimi yapabilmek için bir sıralama kriteri belirlenmelidir.

Bulanık sayıların sıralaması ile ilgili geliştirilmiş birçok yöntem vardır. Bu yöntemler genelde sıralama fonksiyonu (ranking function) veya sıralama bağıntıları (order relations) kullanan yaklaşımları temel alırlar.

Sıralama fonksiyonu kullanan yöntemler her bir bulanık sayıyı tam sıralamanın var olduğu reel ekseninde bir değere karşılık getirerek kesin verilere geçiş yaparlar. Matematik programlamada bunun yorumu her bulanık sayının kesin hale getirilmesi ile elde edilen programın çözülmesidir.

KV’nin öncelik ve fikirlerini sıralama ile bütünleştirmesine imkan sağlayan sıralama bağıntılarının sıralama fonksiyonlarına göre daha esnek bir yapıda oldukları söylenebilir. Buna paralel olarak ele alınan BEKYP’nin çözümü için “bulanık max” ve “bulanık min” tanımlarına dayanan bir sıralama bağıntısı kullanılacaktır (Okada ve Soper [8]).

**Tanım 4.3**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  iki bulanık sayı olmak üzere “bulanık max” operatörü

$$\mu_{\widetilde{\max\{\tilde{a}, \tilde{b}\}}} (r) = \sup_{r = \max\{s, t\}} \min \{ \mu_{\tilde{a}}(s), \mu_{\tilde{b}}(t) \}$$

üyeligi ile tanımlanır. Burada  $\mu_{\widetilde{\max\{\tilde{a}, \tilde{b}\}}}$ ,  $\widetilde{\max\{\tilde{a}, \tilde{b}\}}$ ’nin üyelik fonksiyonudur.

$\widetilde{\max}\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n\}$  ile gösterilen  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$  bulanık sayılarının maksimumu da bir bulanık sayıdır, fakat  $\widetilde{\max}\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n\}$  bu bulanık sayılardan birine eşit olmak zorunda değildir.

“Bulanık min” operatörü de benzer şekilde tanımlanabilir.

**Tanım 4.4**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  bulanık sayıları arasında “ $\preceq$ ” bağıntısı

$$\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow \widetilde{\min}\{\tilde{a}, \tilde{b}\} = \tilde{a}$$

ile tanımlanır. Bu tanıma eşdeğer bir tanım bulanık sayıların  $\alpha$  – kesenleri aracılığıyla verilebilir.

**Tanım 4.5**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  bulanık sayılarının  $\alpha$  – kesenleri sırasıyla  $[\tilde{a}]_\alpha$  ve  $[\tilde{b}]_\alpha$  olmak üzere “ $\preceq$ ” bağıntısı

$$\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow \sup[\tilde{a}]_\alpha \leq \sup[\tilde{b}]_\alpha \text{ ve } \inf[\tilde{a}]_\alpha \leq \inf[\tilde{b}]_\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$$

ile tanımlanır.

**Tanım 4.6**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  bulanık sayıları için  $\tilde{a} < \tilde{b}$  olması için gerek ve yeter şart  $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$  olması ve  $\sup[\tilde{a}]_\alpha < \sup[\tilde{b}]_\alpha$  veya  $\inf[\tilde{a}]_\alpha < \inf[\tilde{b}]_\alpha$  eşitsizliklerini sağlayacak bir  $\alpha \in [0,1]$  bulunmasıdır.

“ $\preceq$ ” sıralama bağıntısı yansıma, antisimetrik ve geçişme özellikleri olan bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu bağıntı ile karşılaştırılmayacak bulanık sayı çiftleri mevcut olduğu için bir tam sıralama bağıntısı değildir. Başka bir ifadeyle  $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$  yada  $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$  gerçekleşmek zorunda değildir. Bu belirsiz içeren durumu geliştirmek için Tanaka vd. tarafından [72]’de, KV’nin iyimserlik derecesini “ $\preceq$ ” bağıntısı ile birleştiren “ $\preceq_h$ ” bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 4.7**  $h \in [0,1]$  bir reel sayı olmak üzere  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  bulanık sayıları için “ $\preceq_h$ ” bağıntısı

$$\tilde{a} \preceq_h \tilde{b} \Leftrightarrow \sup[\tilde{a}]_\alpha \leq \sup[\tilde{b}]_\alpha \text{ ve } \inf[\tilde{a}]_\alpha \leq \inf[\tilde{b}]_\alpha, \forall \alpha \in [h,1]$$

ile tanımlanır. Görüldüğü gibi “ $\lesssim_h$ ” bağıntısı,  $h \in [0,1]$ ’den daha küçük olan tatmin düzeylerini dikkate almaz. Bu bağıntı sayesinde problemdeki bulanık sayıların, KV’nin risk davranışını temsil etmek üzere belirli bir tatmin düzeyinin yukarısının dikkate alınması sağlanabilir.

Tanım 4.7’ye benzer olarak  $\tilde{a} \prec_h \tilde{b}$  bağıntısı da tanımlanabilir.

**Özellik 4.1**  $\tilde{a} \lesssim_h \tilde{b}$  ve  $0 \leq h \leq h' \leq 1$  ise  $\tilde{a} \lesssim_{h'} \tilde{b}$ ’dir.

Bu tanımın bir matematik programlama problemine uygulanması zor olduğu için Ramik ve Rimanek [73]’de sıralama bağıntısını yamuksal bulanık sayılarda kullanmak üzere modifiye etmişlerdir. Buna göre yamuksal bulanık sayılar arasında “ $\lesssim$ ” sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Tanım 4.8**  $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  ve  $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  yamuksal bulanık sayılar olmak üzere  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  olması için gerek ve yeter şart  $a_i \leq b_i (i=1,2,3,4)$  eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Benzer şekilde  $\tilde{a} \lesssim_h \tilde{b}$  olması için de gerek ve yeter şartlar oluşturulabilir.

Bu alt bölümde ele alınacak olan BEKYP’nin ark ağırlıkları da yamuksal bulanık sayı olarak alınmıştır:

$$\tilde{c}_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ij}^3, c_{ij}^4), \forall (i, j) \in E.$$

Bu yapı,  $c_{ij}^2 = c_{ij}^3$  olması durumunda üçgensel bulanık sayı yapısını da içinde bulundurmaktadır.  $\tilde{c}_{ij}$  yamuksal bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (4.19) ile verilmiştir. Üyelik fonksiyonun şekli ise Şekil 3.2’ye benzer şekilde oluşturulabilir.

$$\mu_{\tilde{c}_{ij}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < c_{ij}^1 \\ \frac{x - c_{ij}^1}{c_{ij}^2 - c_{ij}^1} & , c_{ij}^1 \leq x < c_{ij}^2 \\ 1 & , c_{ij}^2 \leq x \leq c_{ij}^3 \\ \frac{c_{ij}^4 - x}{c_{ij}^4 - c_{ij}^3} & , c_{ij}^3 < x \leq c_{ij}^4 \\ 0 & , x > c_{ij}^4 \end{cases} \quad (4.19)$$

Buna göre (4.18) probleminin amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ij}^3, c_{ij}^4) x_{ij} \\
&= \left( \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^1 x_{ij}, \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^2 x_{ij}, \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^3 x_{ij}, \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^4 x_{ij} \right) \\
&= (f^1(x_{ij}), f^2(x_{ij}), f^3(x_{ij}), f^4(x_{ij})) \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Burada  $x_{ij}$  karar değişkenleri 0 ve 1 değerlerini alan ikili tipte değişkenlerdir. (4.20) gösteriminde yamuksal bulanık sayının tanımında belirtilen karakteristik noktalar arası büyüklük ilişkisinin bozulduğu düşünülmemelidir.

Verilen herhangi bir uygun çözüm  $\mathbf{x} \in S$  'e karşılık  $\tilde{f}(\mathbf{x})$ , bir yamuksal bulanık sayı olduğundan problemin çözümü için bulanık değerli amaç fonksiyonunun minimumu tanımlanmalıdır.

(4.18) probleminin uygun çözümler bölgesi  $S$  ile gösterilsin.

**Tanım 4.9 (BEKYP için minimum (basılamayan, non-dominated) çözüm)**  $\mathbf{x}^* \in S$  noktasının (4.18) probleminin bir “minimum” çözümü olması için gerek ve yeter şart  $\tilde{f}(\mathbf{x}) \prec \tilde{f}(\mathbf{x}^*)$  olacak şekilde bir başka  $\mathbf{x} \in S$  noktasının mevcut olmamasıdır.

**Tanım 4.10 (BEKYP için Uzlaşık Çözüm)**  $P$  problemin minimum çözümlerinin kümesi,  $\wedge$  ”minimum” operatörü göstermek üzere,  $\mathbf{x}^* \in S$  noktasının (4.18) probleminin bir uzlaşık çözümü olması için gerek ve yeter şart  $\mathbf{x}^* \in P$  ve  $\tilde{f}(\mathbf{x}^*) \prec \bigwedge_{\mathbf{x} \in S} \tilde{f}(\mathbf{x})$  olmasıdır.

Tanım 4.9 ve Tanım 4.10'da “ $\prec$ ” yerine “ $\prec_h$ ” bağıntısı alınırsa  $h$ -minimum çözüm tanımları elde edilebilir. Burada minimum çözüm ifadesi 0–minimum çözüm ifadesiyle çakışmaktadır.

**Özellik 4.2**  $P_h$ , problemin  $h$ -minimum çözümlerinin bir kümesi olmak üzere,  $0 \leq h \leq h' \leq 1$  ise  $P_h \supseteq P_{h'}$  'dür.

Bu alt bölümde ele alınan BEKYP’de, sıralama bağıntısı aracılığıyla tüm “minimum” uzlaşık çözümlerin bulunması amaçlanmaktadır. Buna göre (4.18) problemi çok amaçlı programlama çerçevesinde aşağıdaki ÇEKYP’ne dönüştürülebilir (Okada ve Soper [8]):

$$\min f^1(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^1 x_{ij} \quad (4.21)$$

$$\min f^2(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^2 x_{ij}$$

$$\min f^3(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^3 x_{ij}$$

$$\min f^4(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^4 x_{ij}$$

$$\mathbf{x} \in S$$

Böylece sıralama bağıntısı aracılığıyla bulanık değerli tek bir amaç yerine reel değerli 4 amaca sahip bir ÇEKYP oluşturularak amaçtaki bulanıklık giderilmiştir. Bundan sonra hedeflenen, çok amaçlı lineer programlama problemlerinde olduğu gibi (4.21) probleminin Pareto-optimal çözümlerinin araştırılması olacaktır. Burada (4.21) probleminin uygun bir çözümü için  $c_{ij}^1 \leq c_{ij}^2 \leq c_{ij}^3 \leq c_{ij}^4$  ve  $x_{ij} = 0$  ya da 1 olduğundan oluşturulan reel değerli  $f^1$ ,  $f^2$ ,  $f^3$  ve  $f^4$  amaçları arasında da aynı sıralamanın geçerli olacağına, dolayısıyla bir yamuksal bulanık sayı olan amaç fonksiyon değerinin yapısında bir bozulma olmayacağına dikkat edilmelidir.

Yaklaşımımız kapsamında, (4.21) ile verilen kesin ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP’ne, Bölüm 4.1.1’de anlatılan dengeleyici yaklaşım uygulanacaktır. Burada (4.21) problemi, ilgili bölümdeki (4.1)-(4.3) problemine karşılık gelmektedir ( $K = 4$ ) ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Buna göre (4.21) problemine önerilen dengeleyici modelimiz aşağıdaki gibidir:

$$\max \mu_{and} = \lambda + \frac{(1-\gamma)}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{x} \in S$$

$$\mu_k(f^k(\mathbf{x})) \geq \lambda + \lambda_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$\lambda + \lambda_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$\lambda, \lambda_k, \gamma \in [0, 1], \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Böylece (4.22) modeli, denge parametresi  $\gamma$ 'nın  $[0,1]$  aralığındaki değerlerine karşılık BEKYP için dengeleyici, uzlaşık, Pareto-optimal çözümler üretecektir. Bu iddiamız Teorem 4.2 ile verilmiştir.

**Teorem 4.2**  $\lambda^x = (\lambda^x, \lambda_1^x, \lambda_2^x, \lambda_3^x, \lambda_4^x)$  olmak üzere (4.22) modelinin optimal çözümü  $(\mathbf{x}, \lambda^x)$  ise,  $\mathbf{x}$  (4.21) ile verilen ÇEKYP'nin bir Pareto-optimal çözümüdür.

İspat, Teorem 4.1'dekine benzer olarak yapılabilir.

KV'nin risk davranışının modele dahil edilmesi başka bir ifadeyle belirlenen  $h$  tatmin düzeyinin yukarısının dikkate alınması amacıyla Tanım 4.7'de " $\prec_h$ " bağıntısı tanımlanmıştır.  $\mu_k(f^k(\mathbf{x})) = \lambda + \lambda_k$  olduğu hatırlanırsa, bu bağıntının (4.22) dengeleyici modelimize uyarlanması

$$\lambda + \lambda_k \geq h, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

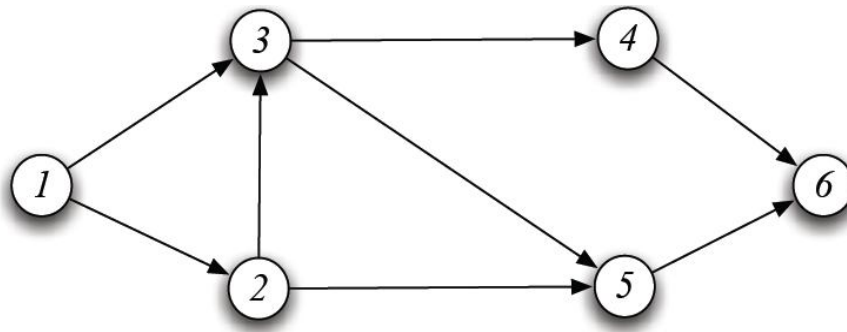
kısıtlarının modele eklenmesi ile sağlanabilir.

#### 4.2.1.1 Sayısal Örnek

Verilen yaklaşımımızın işleyişini anlatmak için verilecek sayısal örnek [8]'den alınmıştır. Örneğe ait şebeke Şekil 4.2'de verilmiştir.

$$\tilde{a}_{12} = (10, 20, 20, 30), \quad \tilde{a}_{13} = (52, 62, 65, 70), \quad \tilde{a}_{23} = (35, 38, 40, 45), \quad \tilde{a}_{25} = (52, 55, 60, 65),$$

$$\tilde{a}_{34} = (10, 13, 17, 20), \quad \tilde{a}_{35} = (8, 9, 9, 10), \quad \tilde{a}_{46} = (70, 75, 85, 97), \quad \tilde{a}_{56} = (50, 70, 80, 100)$$



Şekil 4. 2 Tek Amaçlı BEKYP örneğinin şebekesi.

Görüldüğü gibi örnek problemin şebekesi 6 düğümlü, bağlantılı, döngü içermeyen yamuksal bulanık sayı şeklinde ark ağırlıklarına sahip bir şebekedir. Şebekedeki arkların kümesi aşağıda belirtilmiştir:

$$E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,6), (5,6)\}$$

Her bir arkın ağırlığı  $\tilde{c}_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ij}^3, c_{ij}^4)$  yapısındaki yamuksal bulanık sayı olarak ilgili arkın bitişiğine yazılmıştır. Problem, 1 düğümünden 6 düğümüne gerçekleşen akışın minimum olmasını sağlamaya çalışan bulanık değerli bir amaca sahiptir. Buna göre örnek problem için (4.21)'e karşılık gelen çok amaçlı problem aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\min f^1(\mathbf{x}) = 10x_{12} + 52x_{13} + 35x_{23} + 52x_{25} + 10x_{34} + 8x_{35} + 70x_{46} + 50x_{56} \quad (4.23)$$

$$\min f^2(\mathbf{x}) = 20x_{12} + 62x_{13} + 38x_{23} + 55x_{25} + 13x_{34} + 9x_{35} + 75x_{46} + 70x_{56}$$

$$\min f^3(\mathbf{x}) = 20x_{12} + 65x_{13} + 40x_{23} + 60x_{25} + 17x_{34} + 9x_{35} + 85x_{46} + 80x_{56}$$

$$\min f^4(\mathbf{x}) = 30x_{12} + 70x_{13} + 45x_{23} + 65x_{25} + 20x_{34} + 10x_{35} + 97x_{46} + 100x_{56}$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, 6 \\ -1 & , i = 6 \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E.$$

(4.23) ile verilen ÇEKYP'nin çözümü için öncelikle amaçların üyelik fonksiyonları oluşturulmalıdır. (4.5) ile elde edilen amaçların alt ve üst sınır değerleri ve ilgili değerlere karşılık gelen optimal rotalar Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Çizelge 4.3 Amaçların sınır değerleri ve ilgili rotalar.

			Optimal Rota				Optimal Rota
$f^1$	$L_1$	103	1 → 2 → 3 → 5 → 6	$f^3$	$L_3$	149	1 → 2 → 3 → 5 → 6
	$U_1$	132	1 → 3 → 4 → 6		$U_3$	167	1 → 3 → 4 → 6
$f^2$	$L_2$	137	1 → 2 → 3 → 5 → 6	$f^4$	$L_4$	180	1 → 3 → 5 → 6
	$U_2$	150	1 → 3 → 4 → 6		$U_4$	195	1 → 2 → 5 → 6

Amaçların, Çizelge 4.3'deki sınır değerlerle oluşturulan üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\mu_1(f^1(\mathbf{x})) = \frac{132 - f^1(\mathbf{x})}{29}, \quad \mu_2(f^2(\mathbf{x})) = \frac{150 - f^2(\mathbf{x})}{13}, \quad \mu_3(f^3(\mathbf{x})) = \frac{167 - f^3(\mathbf{x})}{18},$$

$$\mu_4(f^4(\mathbf{x})) = \frac{195 - f^4(\mathbf{x})}{15}.$$

Buna göre ele alınan sayısal örnek için (4.22) kullanılarak oluşturulan dengeleyici modelin son hali

$$\max \mu_{and} = \lambda + \frac{(1-\gamma)}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \quad (4.24)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, 6 \\ -1 & , i = 6 \end{cases}$$

$$f^1(\mathbf{x}) + 29(\lambda + \lambda_1) \leq 132,$$

$$f^2(\mathbf{x}) + 13(\lambda + \lambda_2) \leq 150,$$

$$f^3(\mathbf{x}) + 18(\lambda + \lambda_3) \leq 167,$$

$$f^4(\mathbf{x}) + 15(\lambda + \lambda_4) \leq 195,$$

$$\lambda + \lambda_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E.$$

$$\lambda, \lambda_k, \gamma \in [0, 1], \quad k = 1, 2, 3, 4$$

şeklinde dir. Bir karma ikili lineer programlama problemi olan (4.24) modeli denge parametresi  $\gamma$ 'nın 11 tane farklı değeri için bir paket program kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4'de verilmiştir.

Sonuçlardan görüldüğü gibi dengeleyici modelimiz örnek problem için [8]'de olduğu gibi iki adet dengeleyici, uzlaşık, Pareto-optimal olan  $\mathbf{x}^{1*} = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  ve  $\mathbf{x}^{2*} = 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  rotalarını üretmiştir. Bu çözümlere karşılık gelen bulanık amaç fonksiyon değerleri  $f(\mathbf{x}^{1*}) = (103, 137, 149, 185)$  ve  $f(\mathbf{x}^{2*}) = (110, 141, 154, 180)$ 'dir.

$\mathbf{x}^{1*}$  çözümü için ilk üç amaç ilgili rotaya karşılık tam tatmin düzeyindeyken, dördüncü amacın tatmin düzeyi en temel tatmin düzeyi olan 0.6667 seviyesinde kalmıştır.

$\mathbf{x}^{2*}$  çözümünü için ise ilk üç amacın tatmin seviyelerindeki düşmeye karşılık, dördüncü amaç tam tatmin olmuştur.

$$\gamma = 1 \Rightarrow \mu_{and} = \min_k \mu_{f^k} = \min \{0.6923; 0.7586; 0.6923; 0.7222\} = 0.6923,$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \mu_{and} = \min \frac{1}{4} \sum_k \mu_{f^k} = \frac{1.0+1.0+1.0+0.6667}{4} = 0.9167.$$

Çizelge 4. 4 Örnek probleme ait dengeleyici modelin sonuçları.

	$\mu_{and}$	$\lambda$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	İlgili Rota
$\gamma = 0$	0.9167	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.1$	0.8917	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.2$	0.8667	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.3$	0.8417	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.4$	0.8167	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.5$	0.7917	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.6$	0.7667	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.7$	0.7417	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.8$	0.7167	0.6667	1.0	1.0	1.0	0.6667	1 → 2 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 0.9$	0.7024	0.6923	0.7586	0.6923	0.7222	1.0	1 → 3 → 5 → 6
$\gamma = 1.0$	0.6923	0.6923	0.7586	0.6923	0.7222	1.0	1 → 3 → 5 → 6

#### 4.2.2 Çok Amaçlı BEKYP (ÇBEKYP)'ne Dengeleyici Bir Yaklaşım

$K$  amaç sayısını ve  $\tilde{c}_{ij}^k = (c_{ij}^{k1}, c_{ij}^{k2}, c_{ij}^{k3}, c_{ij}^{k4})$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) bulanık ark ağırlıklarını göstermek üzere, ÇBEKYP'nin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir:

$$\min \tilde{f}^k(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij}^k x_{ij}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.25)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, N, \\ -1 & , i = N \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E.$$

Bu problem, Bölüm 4.2.1'de verilen (4.18) probleminin çok amaçlı halidir. (4.18) probleminin çözümü için önerdiğimiz amaç sayısını 4 katına çıkaran çok amaçlı programlama tabanlı dengeleyici yaklaşımımız ÇBEKYP'ne de uyarlanabilir. Tek farklılık (4.21) yapısına uygun olarak,  $K$  tane amaçtan  $4K$  tane amaç elde edilerek dengeleyici modelin oluşturulmasıdır.

Buna göre ÇBEKYP için oluşturulan dengeleyici modelimiz:

$$\max \mu_{and} = \lambda + \frac{(1-\gamma)}{4K} \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^4 \lambda_{kp} \right] \quad (4.26)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1, N, \\ -1 & , i = N \end{cases}$$

$$\mu_{kp} (f^{kp}(\mathbf{x})) \geq \lambda + \lambda_{kp}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K ; \forall p = 1, 2, 3, 4$$

$$\lambda + \lambda_{kp} \leq 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, K ; \forall p = 1, 2, 3, 4$$

$$\gamma, \lambda, \lambda_{kp} \in [0, 1]$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ya da } 1 \quad \forall (i, j) \in E.$$

yapısındadır. Burada  $f^{kp} (k = 1, 2, \dots, K ; p = 1, 2, 3, 4)$  her bir  $k$  amacına karşılık oluşturulan reel değerli amaçları göstermektedir. Elde edilen problem tek amaçlı karma ikili programlama problemidir.

ÇBEKYP'ne önerilen modelin işleyişi, Bölüm 4.2.1'de verilen modelle paralel olduğundan bu alt bölümde sayısal örnek verilmeyecektir.

### BULANIK ÜCRET TARİFE PROBLEMİ

Tezin ikinci özgün kısmı olan bu bölümde, son yıllarda özellikle haberleşme ve ulaşım alanlarında oldukça yaygın şekilde kullanılan ÜTP'nin talep miktarlarının bulanık sayı olması durumunda oluşan Bulanık ÜTP (BÜTP) incelenmiştir. Bunun için öncelikle iki seviyeli ÜTP'nin, tek seviyeli karma tamsayılı bir program yapısına indirgenmesi teorik olarak ve ayrıca bir sayısal örnek aracılığıyla açıklanmıştır. Daha sonra BÜTP'nin modeli oluşturulmuş ve çözümü analiz edilmiştir. Ayrıca sayısal bir örnek de sunulmuştur.

#### 5.1 Ücret Tarife Problemi (ÜTP)'ne Lineer Programlama Yaklaşımı

(2.4)-(2.9) ile verilen iki seviyeli bilineer model, tek seviyeli bir karma tamsayılı lineer programlama problemi yapısına dönüştürülebilir (Labbé vd. [40], Dewez [43]). Bu alt bölümde öncelikle bu dönüşüm detaylı şekilde anlatılacak, daha sonra problemin bazı değişkenleri için üst sınırlar tanımlanacaktır.

ÜTP'nin (2.4)-(2.9) ile verilen modelinde kısıtların sağ taraf sabitlerinde yer alan talep miktarları amaç fonksiyonuna dahil edilmek istenirse, (2.10) ile tanımlı  $\hat{b}^k$  vektörleri

$$b_j^k = \begin{cases} 1 & , j = o_k \\ -1 & , j = d_k \\ 0 & , \text{aksi taktirde} \end{cases} .$$

yapısına dönecektir. Buna bağlı olarak  $\hat{x}_a^k$  ve  $\hat{y}_a^k$  değişkenleri de ikili değişken yapısında olacaktır.

Modelde  $a$  indisi ile gösterilen arklar başlangıç ve bitiş düğüm numaraları ile  $(i, j)$  olarak ifade edilirse, yapılan düzenlemeler sonucunda, (2.4)-(2.9) probleminin son hali:

$$\begin{aligned} \max_t F &= \sum_{k \in K} n^k \sum_{(i,j) \in TA} t_{ij} x_{ij}^k \\ \min_{x,y} G &= \sum_{k \in K} \left[ \sum_{(i,j) \in TA} (c_{ij} + t_{ij}) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in SA} d_{ij} y_{ij}^k \right] \\ \sum_{i:(i,j) \in TA} x_{ij}^k + \sum_{i:(i,j) \in SA} y_{ij}^k - \sum_{l:(j,l) \in TA} x_{jl}^k - \sum_{l:(j,l) \in SA} y_{jl}^k &= b_j^k, \forall k \in K, j \in N, \\ t_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i, j) \in TA, \\ x_{ij}^k &\in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA, \\ y_{ij}^k &\in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in SA, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Problem vektörel formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\max_t F = \sum_{k \in K} n^k t x^k, \quad (5.1)$$

$$\min_{x,y} G = \sum_{k \in K} [(c + t) x^k + d y^k]$$

$$A x^k + B y^k = b^k, \forall k \in K,$$

$$x^k, y^k \in \{0, 1\}, \forall k \in K,$$

$$t \geq 0.$$

Burada  $t = [t_{ij} | (i, j) \in TA]$ ,  $c = [c_{ij} | (i, j) \in TA]$  ve  $d = [d_{ij} | (i, j) \in SA]$  satır vektörleri,  $x^k = [x_{ij}^k | (i, j) \in TA, k \in K]$ ,  $y = [y_{ij}^k | (i, j) \in SA, k \in K]$ ,  $b^k = [b_j^k | j \in N, k \in K]$  sütun vektörleri,  $n^k$  ise talep miktarlarını gösteren sabittir.  $A$  ve  $B$  sırasıyla tarifeli ve tarifersiz (sabit) arklara ait bağlantı (incident) matrisleridir.

Problemin kabullerinde her bir kullanıcı tipi için sadece tarifersiz arklardan oluşan sabit ağırlıklı bir yol olduğu belirtilmişti. Bu, her bir  $k \in K$  kullanıcı tipi için  $\{y^k \geq 0 : B y^k = b^k\}$  çözüm kümesinin boş kümeden farklı olması ve ikinci seviye problemin uygun bir çözümünün var olması demektir.

Ayrıca,  $\{x^k, y^k \geq 0 : Ax^k + By^k = b^k\}$  kısıtları ile tanımlanmış çok yüzlünün, sınırlı ve boş kümeden farklı olduğu kabul edilmiştir. (5.1) problemi,  $tx^k$  terimlerini içermesi sebebiyle bilinear iki seviyeli programlama yapısındadır.

Burada sabit bir  $t$  tarife vektörüne karşılık, ikinci seviye problem bir lineer programlama problemine dönüşmektedir:

$$\min_{x,y} G = \sum_{k \in K} [(c+t)x^k + dy^k] \quad (5.2)$$

$$Ax^k + By^k = b^k, \forall k \in K$$

$$x^k, y^k \in \{0, 1\}, \forall k \in K.$$

(5.2) probleminin amaç fonksiyonu, her bir  $k$  kullanıcı tipi için şebeke üzerinde tanımlanmış en kısa yol problemlerinin amaç fonksiyonları toplamıdır. Kısıtlar ise her bir  $k$  değerine karşılık ilgili alt problemin girdi-çıkış kısıtlarından meydana gelmektedir. Her bir alt problemin (en kısa yol problemi) bir optimal çözümünün varlığı, bu alt problemlere ait değişkenlerin ayrık olması ve bu ayrık değişkenleri içeren ortak kısıt bulunmadığı göz önüne alınırsa, (5.2) probleminin optimal çözümünün alt problemlerin optimal çözümlerinden oluştuğu görülecektir.

(5.2)'nin bir optimal çözümü var olduğundan, problem kendi primal-dual optimallik koşulları ile yer değiştirilebilir. İkinci seviye problemin duali

$$\max_{\lambda} \sum_{k \in K} \lambda^k b^k,$$

$$\lambda^k A \leq c+t, \quad \forall k \in K,$$

$$\lambda^k B \leq d, \quad \forall k \in K$$

dır. Burada dual değişken  $\lambda^k = [\lambda_j^k \mid j \in N, k \in K]$  satır vektörünün bileşenleri işaretten bağımsızdır. Dual probleme ait tamamlayıcı (complementary) kısıtlar ise

$$(c+t - \lambda^k A)x^k = 0, \quad \forall k \in K, \quad (5.3)$$

$$(d - \lambda^k B)y^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (5.4)$$

dır. Böylece ÜTP'nin son hali

$$\max_{x,y,\lambda,t} F = t \sum_{k \in K} n^k x^k, \quad (5.5)$$

$$Ax^k + By^k = b^k, \quad \forall k \in K,$$

$$\lambda^k A \leq c + t, \quad \forall k \in K,$$

$$\lambda^k B \leq d, \quad \forall k \in K,$$

$$(c + t - \lambda^k A)x^k = 0, \quad \forall k \in K,$$

$$(d - \lambda^k B)y^k = 0, \quad \forall k \in K,$$

$$t \geq 0,$$

$$x^k, y^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K$$

olarak elde edilir. (5.5) probleminin tamamlayıcı kısıtları  $\lambda^k x^k$  ve  $\lambda^k y^k$  terimlerini içermeleri sebebiyle lineer değildirler. İkinci seviye problemin bir optimal çözümünün mevcut olduğu göz önüne alınırsa, Kuvvetli Dualite (Strong Duality) Teoremi<sup>1</sup> aracılığıyla bu problemin dualinin de bir optimal çözüme sahip olduğu görülür. Dual problemin optimal çözümünün mevcut olması da Bütünleyici Esneklik (Complementary Slackness) Teoremi<sup>2</sup> gereği, (5.3) ve (5.4) eşitliklerinin her ikisinin de sağlanması demektir.  $\lambda^k A \leq c + t, \forall k \in K$  ve  $\lambda^k B \leq d, \forall k \in K$  dual kısıtlarının kısıt kümesinde olduğu göz önüne alınırsa  $\forall k \in K$  için  $(c + t - \lambda^k A) \geq 0$  ve  $(d - \lambda^k B) \geq 0$  olacaktır. Böylece (5.3) ve (5.4) kısıtlarının toplamı ile elde edilen

$$(c + t - \lambda^k A)x^k + (d - \lambda^k B)y^k = 0, \quad (\forall k \in K),$$

kısıtı (5.3) ve (5.4)'e eşdeğer olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa bu toplam

$$(c + t)x^k + dy^k = \lambda^k b^k, \quad (\forall k \in K) \quad (5.6)$$

şeklinde düzenlenebilir. Buna göre (5.5) probleminin son hali açık formda

---

<sup>1</sup> Kuvvetli Dualite Teoremi: Primal (dual) problemin sonlu bir optimal çözümü mevcutsa, dual (primal) problemin de sonlu bir optimal çözümü vardır ve iki problem de aynı amaç fonksiyon değerine sahiptir (Bakınız: Ahuja vd. [50], Sayfa 818).

<sup>2</sup> Bütünleyici Esneklik Teoremi: Bir primal-dual problem çiftinin uygun çözümlerinin optimal olması için gerek ve yeter şart bu uygun çözümleri içeren bütünleyici kısıtların (eşitliklerin) sağlanmasıdır (Bakınız: Ahuja vd. [50], Sayfa 819).

$$\max_{x,y,\lambda,t} F = \sum_{k \in K} n^k \sum_{(i,j) \in TA} t_{ij} x_{ij}^k, \quad (5.7)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in TA} x_{ij}^k + \sum_{i:(i,j) \in SA} y_{ij}^k - \sum_{l:(j,l) \in TA} x_{jl}^k - \sum_{l:(j,l) \in SA} y_{jl}^k = \begin{cases} 1 & , j = o_k \\ -1 & , j = d_k \\ 0 & , \text{aksi takdirde} \end{cases}, \forall k \in K, j \in N,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq c_{ij} + t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq d_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in SA,$$

$$\sum_{(i,j) \in TA} (c_{ij} + t_{ij}) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in SA} d_{ij} y_{ij}^k = \lambda_{d_k}^k - \lambda_{o_k}^k, \quad \forall k \in K,$$

$$t_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in TA,$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, (i,j) \in SA,$$

olarak elde edilir. (5.7) modeli, amaç fonksiyonu ve bazı kısıt denklemlerinin  $t_{ij} x_{ij}^k$  bilineer terimini içermesi sebebiyle hala non-lineerdir. Bu iki bilineer terim, her bir  $k \in K$  kullanıcı tipi ve her bir  $(i,j)$  tarifeli arkı için  $t_{ij}'^k = t_{ij} x_{ij}^k$  dönüşümleri ile lineerleştirilebilir. Yeni  $t_{ij}'^k$  değişkeni, liderin  $(i,j)$  arkından ve  $k$  kullanıcı tipinden elde edeceği gerçek (net) gelirdir. Gerçekten,  $(i,j)$  arkına atanan ücret  $t_{ij}$  pozitif olsa bile,  $k$  kullanıcı tipi için  $(i,j)$  arkı üzerindeki akış sıfır ise  $t_{ij}'^k = 0$  olacaktır. Eğer akış 1'e eşitse, bu durumda kar ücret seviyesine eşit olacaktır. Bu nedenle, iki durum da dikkate alınmalıdır.

İlk durumda, yani  $k$  kullanıcı tipi için  $(i,j)$  arkı üzerindeki akış sıfıra eşit olduğunda,  $t_{ij}'^k$  değişkeninin sıfıra eşit olması istenir ve bu amaçla

$$t_{ij}'^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k$$

kısıtı yazılabilir. Burada  $M_{ij}^k$ ,  $k$  kullanıcı tipi ve  $(i,j)$  arkına bağlı olarak değişen bir sabittir. Bu sabit,  $x_{ij}^k = 1$  olduğunda,  $t_{ij}'^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k$  eşitsizliğinin bozulmamasını sağlayacak derecede yeterince büyük olarak seçilmelidir. Böylece  $x_{ij}^k = 1$  olduğunda  $M_{ij}^k$  sabiti,  $t_{ij}'^k \leq M_{ij}^k$  eşitsizliğini sağlar.

İkinci durumda,  $k$  kullanıcı tipi için  $(i, j)$  arki üzerindeki akış 1'e eşit olduğunda,  $t'_{ij}{}^k$  değişkeninin  $t_{ij}$ 'e eşit olması istenir ve

$$t_{ij} - t'_{ij}{}^k \leq N_{ij} (1 - x_{ij}^k)$$

kısıtı yazılabilir. Burada  $N_{ij}$ ,  $(i, j)$  arkına bağlı olarak değişen bir sabittir. Yine bir önceki durumda olduğu gibi bu  $N_{ij}$  sabiti,  $t_{ij} \leq N_{ij}$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde yeterince büyük olmalıdır.

$t'_{ij}{}^k$  değişkeninin bir üst sınırı olan  $M_{ij}^k$  ve  $t_{ij}$  değişkeninin bir üst sınırı olan  $N_{ij}$  sabitlerinin problemin yapısına uygun olarak nasıl belirleneceği bir sonraki alt bölümde verilecektir.

$t'_{ij}{}^k$ 'nin nonnegatif olması ve  $t_{ij}$ 'den küçük veya eşit olması gerektiği açıktır.

Böylece, (5.1) probleminin bir lineer programlama problemi olarak ifade edildiği model aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\max_{x, y, \lambda, t'} F = \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in TA} n^k t'_{ij}{}^k \quad (5.8)$$

$$\sum_{i: (i, j) \in TA} x_{ij}^k + \sum_{i: (i, j) \in SA} y_{ij}^k - \sum_{l: (j, l) \in TA} x_{jl}^k - \sum_{l: (j, l) \in SA} y_{jl}^k = \begin{cases} 1 & , j = o_k \\ -1 & , j = d_k \\ 0 & , \text{aksi takdirde} \end{cases}, \forall k \in K, j \in N,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq c_{ij} + t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq d_{ij}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in SA,$$

$$\sum_{(i, j) \in TA} (c_{ij} x_{ij}^k + t'_{ij}{}^k) + \sum_{(i, j) \in SA} d_{ij} y_{ij}^k = \lambda_{d_k}^k - \lambda_{o_k}^k, \quad \forall k \in K,$$

$$t'_{ij}{}^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$t_{ij} - t'_{ij}{}^k \leq N_{ij} (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$t'_{ij}{}^k \leq t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$t'_{ij}{}^k, t_{ij} \geq 0, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, (i, j) \in SA.$$

Burada,  $y_{ij}^k$  değişkenlerinin 0-1 olma koşulunun kısıt kümesine dahil edilmediğine dikkat edilmelidir. Çünkü kullanıcılar tarafından hangi tarifeli arkların kullanıldığı bilindiğinde ( $x_{ij}^k \in \{0, 1\}$  değişkenleri belirlendiğinde), tarifersiz (sabit) arklar

$$\sum_{(i,j) \in TA} (c_{ij} x_{ij}^k + t'_{ij}{}^k) + \sum_{(i,j) \in SA} d_{ij} y_{ij}^k = \lambda_{d_k}^k - \lambda_{o_k}^k \quad \forall k \in K \quad (5.9)$$

kısıtı ve şebeke girdi-çıkıktı kısıtları sayesinde  $\{0$  ya da  $1\}$  olarak zaten belirlenecektir.

### 5.1.1 $M_{ij}^k$ ve $N_{ij}$ Sabitlerinin Belirlenmesi

Bu alt bölümde  $M_{ij}^k$  ve  $N_{ij}$  sabitlerinin belirlenmesi konusu anlatılacaktır. Bu sabitler ÜTP'ne  $t_{ij} x_{ij}^k$  çarpımının lineerleştirilmesi amacıyla tamsayıli modelleme tekniği ile katılmıştır.

$$t'_{ij}{}^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

$$t_{ij} - t'_{ij}{}^k \leq N_{ij} (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

kısıtlarından da görüldüğü gibi  $M_{ij}^k$  ve  $N_{ij}$  sırasıyla  $t'_{ij}{}^k$  ve  $t_{ij}$  değişkenlerine bir üst sınırdır. Bu şekilde tanımlanan kısıt yapılarına sahip lineer programlama problemlerinde bu sabitler “yeteri kadar büyük” ifadesi ile tanımlanmakta ve uygulamada bu sabitler “99999” gibi büyük sayılar olarak seçilmektedir. Bu sabitlerin amaç fonksiyonunda değil, kısıtlarda yer alması uygun çözümler bölgesini genişletmektedir. Problemden tamsayıli değişkenlerin varlığının, optimal çözüme ulaşmak için gerekli iterasyon sayısını arttırması ve yerel optimumlara takılıp global optimum noktalara ulaşılmasını engelleyebilmesi sebebiyle, bu sabitler kısıtlarda yer aldığı anda eğer mümkünse kurulan modelleme yapısını bozmayacak kadar büyük olmanın yanında, olabildiğince küçük şekilde hesaplanmaya çalışılmalıdır. Buna paralel olarak,  $M_{ij}^k$  ve  $N_{ij}$  sabitleri için problemin yapısından kaynaklanan belirli sınırlamalar getirilebilir (Dewez [43]).

Bu sabitlerin belirlenmesi amacıyla kullanılacak ifadeler şu şekildedir:

$p_{ij}$  :  $i$  düğümünden  $j$  düğümüne sadece tarifersiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğu.

$\bar{\lambda}_j^k$  :  $k$  kullanıcı tipinin  $o_k$  başlangıç düğümünden  $j$  düğümüne sadece tarifersiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğu.

$\underline{\lambda}_j^k$  :  $k$  kullanıcı tipinin  $o_k$  başlangıç düğümünden  $j$  düğümüne tüm tarifeli arkların ücretleri sıfır atanarak elde edilen şebekedeki en kısa yol uzunluğu.

$\bar{s}_j^k$  :  $j$  düğümünden  $k$  kullanıcı tipinin  $d_k$  varış düğümüne sadece tarifersiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğu.

$\underline{s}_j^k$  :  $j$  düğümünden  $k$  kullanıcı tipinin  $d_k$  varış düğümüne tüm tarifeli arkların ücretleri sıfır atanarak elde edilen şebekedeki en kısa yol uzunluğu.

Yukarıdaki ifadeler hesaplanırken, başlangıç ve bitiş düğümleri arasında herhangi bir yol mevcut değilse ilgili uzunluk  $\infty$  olarak kabul edilmiştir. Ayrıca hesaplamalar sırasında oluşabilecek  $\infty - \infty$ , *sabit*  $-\infty$  gibi ifadeler de bir yol mevcut olmadığı anlamına geldiğinden yine  $\infty$  olarak alınacaktır.

**Özellik 5.1:** (5.8) ile verilen ücret tarife probleminde, her bir tarifeli  $(i, j)$  arkı ve  $k$  kullanıcı tipi için

$$M_{ij}^k = \max \left\{ 0, \min \left\{ p_{ij} - c_{ij}, \bar{\lambda}_j^k - \underline{\lambda}_i^k - c_{ij}, \bar{\lambda}_{d_k}^k - (\underline{\lambda}_i^k + c_{ij} + \underline{s}_j^k), \bar{s}_i^k - \underline{s}_j^k - c_{ij} \right\} \right\} \quad (5.10)$$

geçerli bir sabittir.

**İspat:** (5.8) probleminin

$$t'_{ij}{}^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA,$$

kısıtından,  $x_{ij}^k = 1$  olduğunda  $t'_{ij}{}^k \leq M_{ij}^k$  eşitsizliği geçerli olacaktır. Bu eşitsizlikten  $M_{ij}^k$  sabitinin  $t'_{ij}{}^k$  değişkenine bir üst sınır olması gerektiği çıkar. Burada (5.10) eşitliği içerisinde verilen dört üst sınırdan da  $t'_{ij}{}^k$  değişkeni için geçerli olduğu sırayla ispatlanacaktır.

**1.** Lider sahip olduğu tarifeli arklara ücretler atadığında,  $(i, j)$  arkının ikinci seviye kullanıcıları tarafından kullanılabilmesi için,  $(i, j)$  arkının toplam maliyetinin  $i$  düğümünden  $j$  düğümüne sadece tarifersiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğundan küçük veya eşit olması gerekir. Bu yüzden,  $(i, j)$  arkı ancak

$$c_{ij} + t_{ij}'^k \leq p_{ij}$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda  $k$  kullanıcı tipi tarafından kullanılabilir. Böylece  $t_{ij}'^k$  değişkeni üzerindeki ilk üst sınır

$$M_{ij}^k = p_{ij} - c_{ij}$$

olarak elde edilir.

2.  $(i, j)$  tarifeli arkının  $k$  kullanıcı tipi tarafından kullanılabilmesi için, bu kullanıcı tipinin başlangıç düğümü  $o_k$ 'dan  $j$  düğümüne  $(i, j)$  tarifeli arkının kullanıldığı en kısa yolun uzunluğunun, yine başlangıç düğümünden  $j$  düğümüne sadece tarifesiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğundan küçük veya eşit olması gerekir. Bu ifadenin matematiksel gösterimi

$$\underline{\lambda}_i^k + c_{ij} + t_{ij}'^k \leq \bar{\lambda}_j^k$$

şeklindedir. Böylece  $t_{ij}'^k$  değişkeni üzerindeki ikinci üst sınır

$$M_{ij}^k = \bar{\lambda}_j^k - \underline{\lambda}_i^k - c_{ij}$$

olarak elde edilir.

3. Benzer şekilde başlangıç düğümü  $o_k$ 'dan varış düğümü  $d_k$ 'ya tarifesiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğunun,  $o_k$ 'dan  $d_k$ 'ya  $(i, j)$  tarifeli arkının kullanıldığı en kısa yol uzunluğundan büyük veya eşit olması gerekir. Başka bir ifadeyle

$$\underline{\lambda}_i^k + c_{ij} + t_{ij}'^k + \underline{s}_j^k \leq \bar{\lambda}_{d_k}^k$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Buna göre,  $t_{ij}'^k$  değişkeni üzerindeki üçüncü üst sınır

$$M_{ij}^k = \bar{\lambda}_{d_k}^k - (\underline{\lambda}_i^k + c_{ij} + \underline{s}_j^k)$$

dır.

4.  $(i, j)$  tarifeli arkı  $k$  kullanıcı tipi tarafından,  $i$  düğümünden  $k$  kullanıcı tipinin  $d_k$  varış düğümüne sadece tarifesiz arklarla ulaşılan en kısa yol uzunluğu,  $i$  düğümünden  $d_k$ 'ya  $(i, j)$  tarifeli arkının kullanıldığı en kısa yol uzunluğundan büyük veya eşitse kullanılabilir. İfadenin matematiksel gösterimi

$$\underline{s}_j + c_{ij} + t'_{ij} \leq \underline{s}_i$$

ve  $t'_{ij}$  değişkeni üzerindeki dördüncü üst sınır

$$M_{ij}^k = \underline{s}_i - \underline{s}_j - c_{ij}$$

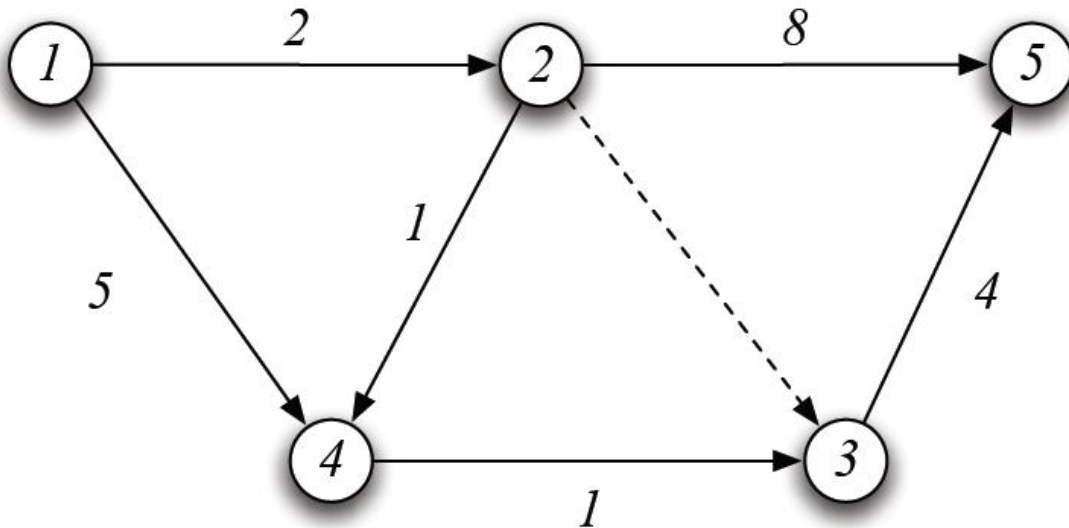
dir.

Aynı  $t'_{ij}$  değişkeni için, üst sınırların hepsi birden sağlanması gerektiği göz önüne alınırsa üst sınırların en küçüğünün  $M_{ij}^k$  olarak seçilmesi de doğal olacaktır. □.

Özellik 5.1'de verilen üst sınırlardan her biri  $t'_{ij}$  değişkeni üzerinde etkilidir. Hiçbir sınır yok sayılamaz. Eğer bu sınırlardan etkin olanı (en küçüğü) yok sayılırsa,  $t'_{ij}$  değişkeninin üst sınırı olması gerekenden daha büyük bir değer olarak belirlenir ve böylece değişkenin optimal değeri olması gerekenden daha büyük olarak elde edilebilir (amacın kar maksimizasyonu olduğu hatırlanmalıdır). Bunun sonucunda alt seviyeye ait kullanıcılar, (5.8) probleminin optimal rotalarında hareket etmeyebilirler. Bu da liderin gerçek karını düşürerek elde edilen çözümü optimalden uzaklaştıracaktır.

Üst sınırların mantığı aşağıdaki örneklerle açıklanabilir (Dewez [43]):

**Örnek 5.1:** Şekil 5.1'de verilen şebekede düğüm 1'den düğüm 5'e giden 1 kullanıcıdan oluşan tek kullanıcı tipi var olsun.



Şekil 5. 1 Örnek 5.1'in şebekesi.

Şebekenin tarifeli arklar kümesi  $TA = \{(2,3)\}$ , tarifersiz (sabit) arklar kümesi ise  $SA = \{(1,2), (1,4), (2,4), (2,5), (3,5), (4,3)\}$  'dir. Ayrıca  $k_1 : 1 \rightarrow 5$  ( $n^1 = 1$ ), ( $K = \{k_1\}$ ) 'dir. Tarifeli (2,3) arki için Özellik 5.1'de belirtilen dört üst sınır sırasıyla  $M_1, M_2, M_3$  ve  $M_4$  olarak isimlendirilsin. Tek kullanıcı tipi var olduğu için formüllerdeki  $k$  indisi ihmal edilecektir.

Tarifeli (2,3) arki için  $i=2$  ve  $j=3$  'dür. Üst sınır değerleri ise sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$M_1 = p_{23} - c_{23} = 2 - 0 = 2$$

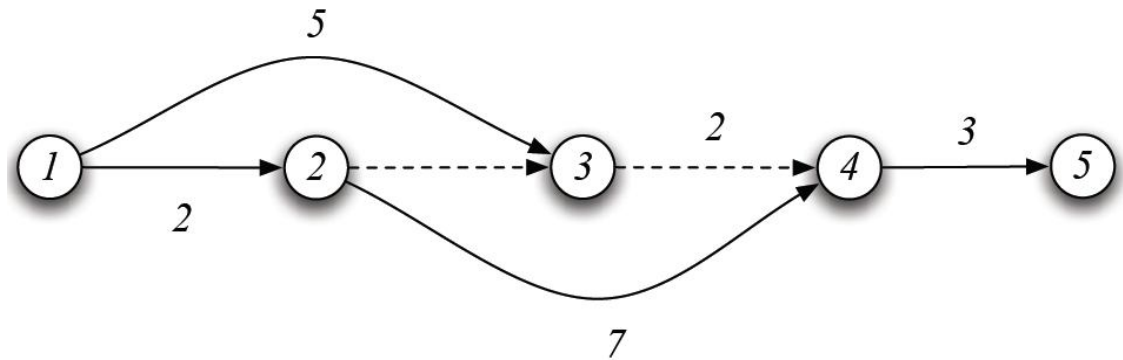
$$M_2 = \bar{\lambda}_3 - \underline{\lambda}_2 - c_{23} = 4 - 2 - 0 = 2$$

$$M_3 = \bar{\lambda}_5 - (\underline{\lambda}_2 + c_{23} + \underline{s}_3) = 8 - (2 + 0 + 4) = 2$$

$$M_4 = \bar{s}_2 - \underline{s}_3 - c_{23} = 6 - 0 - 4 = 2.$$

Görüldüğü gibi sınır değerlerinin hepsi eşit çıkmıştır. Şekil 5.1'de tanımlı ücret tarife problemi için geçerli sabit  $M_{23} = 2$  'dir. Eğer tarifeli (2,3) arkına 2 'den daha büyük bir ücret atanırsa bu ark alt seviye kullanıcılar tarafından hiç kullanılmayacak dolayısıyla lider kar edemeyecektir.

**Örnek 5.2:** Şekil 5.2'de verilen şebekede düğüm 1'den düğüm 5'e giden 1 kullanıcıdan oluşan tek kullanıcı tipi var olsun.



Şekil 5. 2 Örnek 5.2'in şebekesi.

Tarifeli (2,3) arki için üst sınır değerleri aşağıdaki gibidir:

$$M_1 = p_{23} - c_{23} = \infty$$

$$M_2 = \bar{\lambda}_3 - \underline{\lambda}_2 - c_{23} = 5 - 2 - 0 = 3$$

$$M_3 = \bar{\lambda}_5 - (\underline{\lambda}_2 + c_{23} + \underline{s}_3) = 12 - (2 + 0 + 5) = 5$$

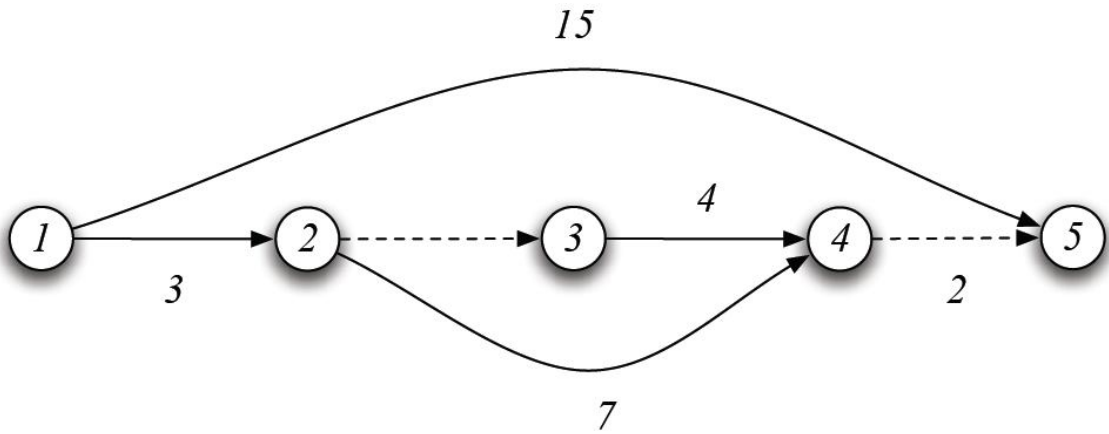
$$M_4 = \underline{s}_2 - \underline{s}_3 - c_{23} = 10 - 5 - 0 = 5.$$

$M_1$  değerinden görüldüğü gibi, düğüm 2'den düğüm 3'e tarifersiz arklarla oluşan bir yol bulunmadığından  $p_{23} = \infty$  değerini almış, buna bağlı olarak da ilk üst sınır değeri etkisiz hale gelmiştir.

Tüm sınır değerleri arasında etkin olan  $M_2$  sınırıdır, dolayısıyla  $M_{23} = 3$ 'dür. Gerçekten tarifeli (2,3) arkına 3'den daha büyük bir ücret atanırsa alt seviye kullanıcı, (3,4) tarifeli arkının ücretine göre  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  ya da  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  rotasını seçecek, fakat (2,3) arkını kesinlikle kullanmayacaktır.

Verilen şebekede bir diğer tarifeli ark (3,4) için de benzer hesaplamalar yapılabilir.

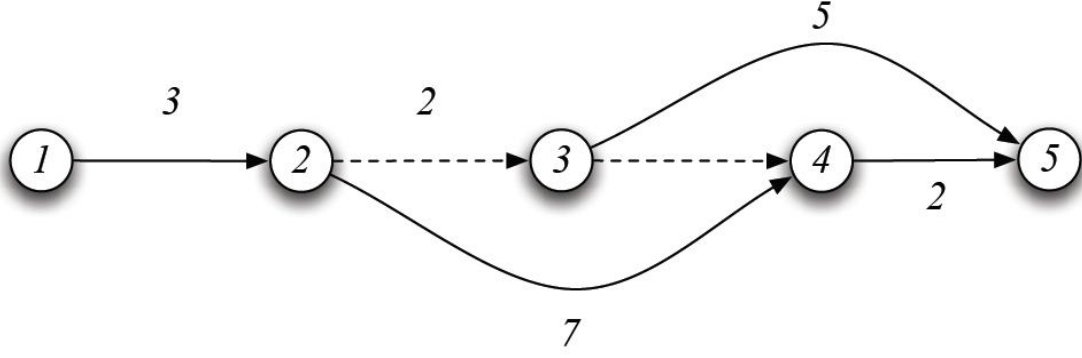
**Örnek 5.3:** Şekil 5.3'de verilen şebekede düğüm 1'den düğüm 5'e giden 1 kullanıcıdan oluşan tek kullanıcı tipi var olsun.



Şekil 5. 3 Örnek 5.3'in şebekesi.

Tarifeli (2,3) arkı için üst sınır değerleri  $M_1 = \infty$ ,  $M_2 = \infty$ ,  $M_3 = 6$ ,  $M_4 = \infty$ 'dur. Görüldüğü gibi üçüncü sınır etkindir ve  $M_{23} = 6$ 'dır.

**Örnek 5.4:** Şekil 5.4'de verilen şebekede düğüm 1'den düğüm 5'e giden 1 kullanıcıdan oluşan tek kullanıcı tipi var olsun.



Şekil 5. 4 Örnek 5.4'in şebekesi.

Tarifeli (3,4) arkı için üst sınır değerleri  $M_1 = \infty$ ,  $M_2 = 5$ ,  $M_3 = 5$ ,  $M_4 = 3$ 'dür. Görüldüğü gibi dördüncü sınır etkindir ve  $M_{34} = 3$ 'dür.

**Özellik 5.2:** (5.8) ile verilen ücret tarife probleminde, her bir tarifeli  $(i, j)$  arkı ve  $k$  kullanıcı tipi için

$$N_{ij} = \max_{k \in K} M_{ij}^k \quad (5.11)$$

geçerli bir sabittir.

**İspat:** (5.8) probleminin

$$t_{ij} - t_{ij}^{\prime k} \leq N_{ij} (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA, \quad (5.12)$$

kısıtından  $N_{ij}$  sabitinin  $t_{ij}$  değişkenine bir üst sınır olduğu görülebilir. Gerçekten  $x_{ij}^k = 0$  olduğunda  $t_{ij}^{\prime k} \leq M_{ij}^k x_{ij}^k$  kısıtı nedeniyle  $t_{ij}^{\prime k}$  değişkeni de sıfır olur ve kısıtın son hali  $t_{ij} \leq N_{ij}$  olarak elde edilir.

(5.8) probleminin çözülmesiyle elde edilen  $t_{ij}$  değişkeninin ücret seviyesi bütün kullanıcı tipleri için aynıdır. Bu sebeple her bir kullanıcı tipi dikkate alınmalıdır. (5.8) probleminin

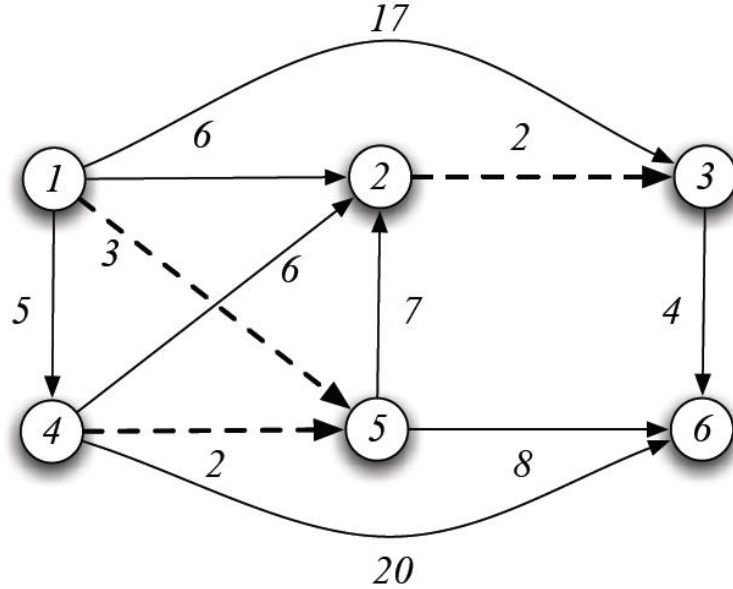
$$t_{ij}^{\prime k} \leq t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in TA, \quad (5.13)$$

kısıtı  $t_{ij}$  ücretinin, bütün kullanıcı tiplerinin  $t_{ij}^{\prime k}$  değerlerinin en büyüğüyle alttan sınırlandırılması demektir. Başka bir ifadeyle  $t_{ij}$  en azından  $t_{ij}^{\prime k}$  değerlerinin en büyüğüne eşittir.  $k$  kullanıcı tipi için tarifeli  $(i, j)$  arkı kullanıldığında ( $x_{ij}^k = 1$

olduğunda), (5.12) kısıtının son hali  $t_{ij} \leq t_{ij}^k$  olacaktır. Bu eşitsizlikle (5.13) kısıtı beraber düşünülürse  $x_{ij}^k = 1$  olduğunda  $t_{ij} = t_{ij}^k$  elde edilmektedir. Bu sebeple  $t_{ij}$  değişkenini üstten sınırlayan  $N_{ij}$  sabiti için, bütün kullanıcı tiplerine ait  $t_{ij}^k$  değişkenlerinin üst sınırları olan  $M_{ij}^k$  değerlerinin maksimumu geçerli bir sabit olacaktır:  $N_{ij} = \max_{k \in K} M_{ij}^k$ . □.

### 5.1.2 Sayısal Örnek

Bu alt bölümde, verilen lineer yaklaşımın anlaşılması için [43]'den alınan bir örnek ile işleyiş açıklanacaktır. İki kullanıcı tipinin var olduğu örneğe ait şebeke Şekil 5.5'de verilmiştir.



Şekil 5. 5 İki kullanıcı tipine sahip bir ÜTP şebekesi.

4 kullanıcıdan oluşan ilk kullanıcı tipi düğüm 1'den düğüm 3'e giderken, 2 kullanıcıdan oluşan ikinci kullanıcı tipi düğüm 4'ten düğüm 6'ya gitmektedir. Şebekenin tarifeli arklar kümesi  $TA = \{(1,5), (2,3), (4,5)\}$ , tarifesiz (sabit) arklar kümesi ise  $SA = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,6), (4,2), (4,6), (5,2), (5,6)\}$ 'dir. 1. kullanıcı tipi  $k_1 : 1 \rightarrow 3$  ( $n^1 = 4$ ), 2. kullanıcı tipi ise  $k_2 : 4 \rightarrow 6$  ( $n^2 = 2$ )'dir ( $K = \{k_1, k_2\}$ ).

Probleme ait değişkenler:

$$\begin{aligned}
x^1 &= [x_{1-5}^1 \quad x_{2-3}^1 \quad x_{4-5}^1]^T, & x^2 &= [x_{15}^2 \quad x_{23}^2 \quad x_{45}^2]^T, \\
y^1 &= [y_{12}^1 \quad y_{13}^1 \quad y_{14}^1 \quad y_{36}^1 \quad y_{42}^1 \quad y_{46}^1 \quad y_{52}^1 \quad y_{56}^1]^T, \\
y^2 &= [y_{12}^2 \quad y_{13}^2 \quad y_{14}^2 \quad y_{36}^2 \quad y_{42}^2 \quad y_{46}^2 \quad y_{52}^2 \quad y_{56}^2]^T, \\
t &= [t_{15} \quad t_{23} \quad t_{45}]
\end{aligned}$$

dir. Burada vektörler üzerindeki  $[\dots]^T$  matrisin transpozmesini göstermektedir.

$x$  ve  $y$  değişkenleri ile ilişkilendirilmiş sabit maliyet vektörleri sırasıyla

$$c = [3 \quad 2 \quad 2], \quad d = [6 \quad 17 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 20 \quad 7 \quad 8],$$

tarifeli arklara ait bağlantı matrisi  $A$  ve tarifesiz arklara ait bağlantı matrisi  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$b^k$  talep vektörleri ise  $b^1 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  ve  $b^2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$ 'dir.

(5.8) modelindeki tarifeli arklar için elde edilen  $M_{ij}^k$  ve  $N_{ij}$  sabitleri örnek problem için aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$M_{15}^1 = \max\{0, \min\{\infty, \infty, 5, 5\}\} = 5,$$

$$M_{15}^2 = \max\{0, \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\}\} = 0,$$

$$N_{15} = \max\{5, 0\} = 5,$$

$$M_{23}^1 = \max\{0, \min\{\infty, 9, 9, \infty\}\} = 9,$$

$$M_{23}^2 = \max\{0, \min\{\infty, \infty, 8, \infty\}\} = 8,$$

$$N_{23} = \max\{9, 8\} = 9,$$

$$M_{45}^1 = \max\{0, \min\{\infty, \infty, 1, \infty\}\} = 1,$$

$$M_{45}^2 = \max \{0, \min \{\infty, \infty, 10, 10\}\} = 10,$$

$$N_{45} = \max \{1, 10\} = 10.$$

Buna göre ilgili örnek için (5.8) modeline karşılık gelen lineer programlama problemi oluşturulmuş ve problemin çözümü bir paket program kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$t'_{23}{}^1 = 9, t'_{45}{}^2 = 10,$$

$$t_{15} = 5, t_{23} = 9, t_{45} = 10,$$

$$x_{23}^1 = 1, x_{45}^2 = 1,$$

$$y_{12}^1 = 1, y_{56}^2 = 1,$$

$$\lambda_1^1 = -6, \lambda_1^2 = 4, \lambda_2^1 = 0, \lambda_2^2 = 5, \lambda_3^1 = 11, \lambda_3^2 = 16, \lambda_4^1 = -1, \lambda_4^2 = 0, \lambda_5^1 = -7, \\ \lambda_5^2 = 12, \lambda_6^1 = 1, \lambda_6^2 = 20.$$

Bu sonuçlara göre amaç fonksiyonunun aldığı değer  $n^1 t'_{23}{}^1 + n^2 t'_{45}{}^2 = 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10 = 56$  'dır.

1. kullanıcı tipindeki 4 kullanıcı 1 → 2 → 3 yolunu, 2. kullanıcı tipindeki 2 kullanıcı ise 4 → 5 → 6 yolunu seçmekte ve sırasıyla  $8 + t'_{23}{}^1 = 17$ ,  $10 + t'_{45}{}^2 = 20$  toplam maliyetlerini ödemektedirler.

## 5.2 Talep Miktarları Bulanık Sayı Olan ÜTP'nin Analizi

(2.4)-(2.9) ile verilen ÜTP'nde her bir  $k \in K$  kullanıcı tipi için tanımlanan  $n^k$  kullanıcı sayıları, gerçek hayat problemlerinde kesin (crisp) sayı olarak verilmeyebilir. Örneğin özel bir karayolu şebekesinde, belirli başlangıç ve bitiş noktaları arasında yol kat edecek kullanıcı sayısı kesin olarak bilinemez. Bu durumda ÜTP'deki talep miktarları ( $n^k$ ) bulanık sayı olarak ifade edilebilir. Böylelikle probleme ait bu parametre daha gerçekçi bir şekilde ele alınmış olur. Talep miktarlarının bulanık sayı olarak alınmasıyla oluşan BÜTP'nin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir:

$$\max_t \tilde{F} = t \sum_{k \in K} \tilde{n}^k x^k, \quad (5.14)$$

$$\min_{x,y} G = \sum_{k \in K} [(c+t)x^k + dy^k]$$

$$Ax^k + By^k = b^k, \forall k \in K$$

$$x^k, y^k \geq 0, \forall k \in K, (x_a^k, y_a^k \text{ tamsayı}, \forall a \in TA \cup SA)$$

$$t \geq 0.$$

(5.8) probleminde sadece birinci seviye amaç fonksiyonunda bulanıklık söz konusudur. Dolayısıyla Bölüm 5.1'de verilen iki seviyeli programlama probleminin tek seviyeye indirgenmesi amacıyla yapılan dönüşümlerin hepsi bulanık model için de geçerlidir. Böylece (5.8) ile verilen iki seviyeli model, Bölüm 5.1'dekine benzer olarak aşağıdaki tek seviyeli lineer programlama problemine dönüştürebilir:

$$\max_{x,y,\lambda,t,t'} \tilde{F} = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in TA} \tilde{n}^k t_{ij}'^k \quad (5.15)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in TA} x_{ij}^k + \sum_{i:(i,j) \in SA} y_{ij}^k - \sum_{l:(j,l) \in TA} x_{jl}^k - \sum_{l:(j,l) \in SA} y_{jl}^k = \begin{cases} 1 & , j = o_k \\ -1 & , j = d_k \\ 0 & , \text{aksi takdirde} \end{cases}, \forall k \in K, j \in N,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq c_{ij} + t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq d_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in SA,$$

$$\sum_{(i,j) \in TA} (c_{ij} x_{ij}^k + t_{ij}'^k) + \sum_{(i,j) \in SA} d_{ij} y_{ij}^k = \lambda_{d_k}^k - \lambda_{o_k}^k, \quad \forall k \in K,$$

$$t_{ij}'^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$t_{ij} - t_{ij}'^k \leq N_{ij} (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$t_{ij}'^k \leq t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$t_{ij}'^k, t_{ij} \geq 0, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, (i,j) \in SA.$$

Modelde  $M_{ij}^k$  ve  $N_{ij}$  sabitleri sırasıyla (5.10) ve (5.11) eşitlikleri ile belirlenecektir.

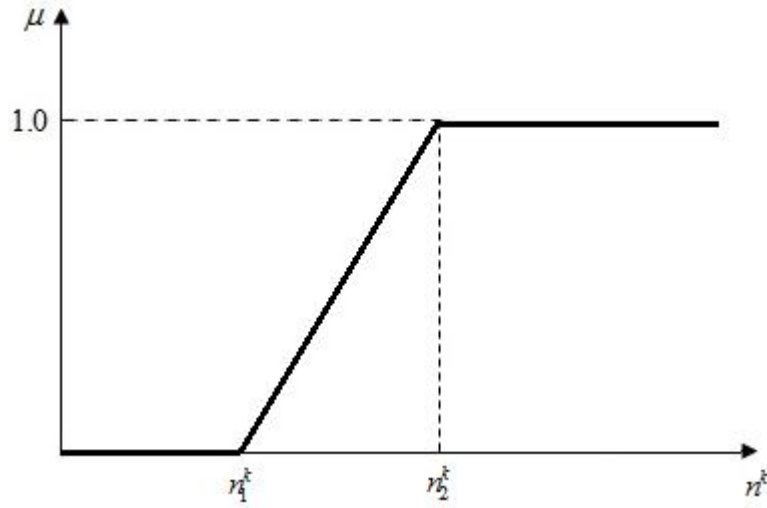
Bu aşamada problemin çözümü için  $\tilde{n}^k$  bulanık sayısının hangi tipte seçileceğine karar verilmelidir. Belirtildiği üzere  $\tilde{n}^k$ , şebekedeki kullanıcı tiplerinin sayısını başka bir ifadeyle kullanıcı tiplerinin talep miktarlarını belirtmektedir. Kullanıcı sayısının artışı, liderin bu kullanıcılardan elde edeceği karın (amaç fonksiyonunun) dolayısıyla da bulanık kullanıcı sayısının tatmin seviyesinin (üyelik değerinin) artışı ile

sonuçlanmalıdır. Buna göre  $n_1^k \in \mathbb{R}$  ve  $n_2^k \in \mathbb{R}$  sırasıyla,  $k$  kullanıcı tipi için beklenen en az ve en çok kullanıcı sayıları olmak üzere,  $\tilde{n}^k$

$$\tilde{n}^k = (n_1^k, n_2^k, \infty) \quad (\forall k \in K) \quad (5.16)$$

yapısında üçgensel bulanık sayı olarak seçilebilir. (5.16) ile verilen bulanık sayının üyelik fonksiyonu ve şekli sırasıyla (5.17) ve Şekil 5.6 ile verilmiştir.

$$\mu_{\tilde{n}^k}(n^k) = \begin{cases} 0 & , n^k < n_1^k \\ \frac{n^k - n_1^k}{n_2^k - n_1^k} & , n_1^k \leq n^k \leq n_2^k \\ 1 & , n^k > n_2^k \end{cases} \quad (5.17)$$



Şekil 5. 6 Bulanık kullanıcı sayılarının üyelik fonksiyonu.

Buna göre (5.15) probleminin amaç fonksiyonunun son hali

$$\max_{x,y,\lambda,t'} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in TA} \tilde{n}^k t_{ij}^k = \max_{x,y,\lambda,t'} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in TA} (n_1^k, n_2^k, \infty) t_{ij}^k$$

olacaktır.  $\tilde{n}^k$  bulanık sayısının üyelik fonksiyonu,  $[n_1^k, n_2^k]$  kapalı aralığında monoton artandır ve  $\mu_{\tilde{n}^k}(n^k) = \alpha \Rightarrow n^k = \mu_{\tilde{n}^k}^{-1}(\alpha)$  olacak şekilde bir  $\alpha \in [0,1]$  mevcuttur.  $k$  kullanıcı tipi için beklenen en az ve en çok kullanıcı sayıları sınırlarının ( $n_1^k$  ve  $n_2^k$ ) aşılmayacağı kabul edilirse, (5.17) ile verilen üyelik fonksiyonu tek parçalı hale gelir ve

$$\mu_{\tilde{n}^k}(n^k) = \alpha \Rightarrow \frac{n^k - n_1^k}{n_2^k - n_1^k} = \alpha$$

$$\Rightarrow n^k = n_1^k + (n_2^k - n_1^k)\alpha \quad (5.18)$$

elde edilir.  $\tilde{n}^k$  bulanık sayısının  $\alpha$  – kesenin sol uç noktasını veren parametrik (5.18) eşitliği amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa (5.15) modelinin son hali

$$\max_{x,y,\lambda,t,t'} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in TA} (n_1^k + (n_2^k - n_1^k)\alpha) t_{ij}'^k \quad (5.19)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in TA} x_{ij}^k + \sum_{i:(i,j) \in SA} y_{ij}^k - \sum_{l:(j,l) \in TA} x_{jl}^k - \sum_{l:(j,l) \in SA} y_{jl}^k = \begin{cases} 1 & , j = o_k \\ -1 & , j = d_k \\ 0 & , \text{aksi takdirde} \end{cases}, \forall k \in K, j \in N,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq c_{ij} + t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \leq d_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in SA,$$

$$\sum_{(i,j) \in TA} (c_{ij} x_{ij}^k + t_{ij}'^k) + \sum_{(i,j) \in SA} d_{ij} y_{ij}^k = \lambda_{d_k}^k - \lambda_{o_k}^k, \quad \forall k \in K,$$

$$t_{ij}'^k \leq M_{ij}^k x_{ij}^k, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$t_{ij} - t_{ij}'^k \leq N_{ij} (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$t_{ij}'^k \leq t_{ij}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$t_{ij}'^k, t_{ij} \geq 0, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in K, (i,j) \in TA,$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, (i,j) \in SA,$$

$$\alpha \in [0,1]$$

olacaktır. (5.19) modelinin amaç fonksiyonu  $\alpha$  parametresi ile  $t_{ij}'^k$  değişkenlerinin çarpımını içermesi sebebiyle bir bilineer programlama problemidir. Non-lineerlikten kurtulmak amacıyla (5.19) modelinin analizi,  $\alpha$  parametresinin  $\bar{\alpha} \in \{0,0.1,0.2,\dots,1\}$  olası değerlerine karşılık elde edilecek, karma tamsayılı programlama problemlerinin çözülmesi ile sağlanacaktır.

Burada  $\mu_{\tilde{n}^k} = \alpha$  olması sebebiyle,  $\alpha$  parametresinin alabileceği değerler KV'nin risk davranışını tanımlayacaktır. Bilindiği gibi KV'ler riskten kaçan, riske kayıtsız (nötr) ve risk alan bir davranış sergileyebilirler.

**Riskten Kaçan KV:** Kararlarını alırken riske girmek istemez. Seçimlerinde öncelik riskin az olmasıdır. Bu nedenle karın düşük olması pahasına, gerçekleşebilecek en kötü durumu dikkate alarak kötümser bakış açısıyla karar verirler.

**Riske Kayıtsız KV:** Riske ve kara aynı önemi verir. Seçimlerinde risk ve karın ağırlığı dengededir.

**Risk Alan KV:** Daha fazla kar elde etmek için riske girmekten çekinmez. Seçimlerinde öncelik karın yüksek olmasıdır. Bu nedenle gerçekleşebilecek en iyi durumu dikkate alarak iyimser bakış açısıyla karar verirler.

Ele aldığımız ÜTP için lider olarak tanımladığımız 1. seviye KV konumundadır. Buna göre *riskten kaçan* lider en kötü tatmine ( $\alpha = 0$ ) yakın çözümleri kabul ederken, *risk alan* lider en iyi tatmine ( $\mu_{\tilde{r}^k} = 1$ ) yakın çözümleri, *riske kayıtsız* lider ise  $\mu_{\tilde{r}^k} = 0.5$ 'e karşılık gelen çözümleri kabul edecektir.

Önerilen BÜTP modelinin çözümü için liderin risk davranışı  $\alpha$  parametresinin alabileceği değerleri sınırlamaktadır. Buna göre liderden alınacak önbilgiye göre risk davranışına uygun olarak riskten kaçan, riske kayıtsız ve risk alan davranışlarını sergileyen lider için sırasıyla  $\alpha \in [0, 0.5)$ ,  $\alpha = 0.5$  ve  $\alpha \in (0.5, 1]$  alınarak model işletilebilir.

### 5.2.1 Sayısal Örnek

Bu alt bölümde, önerilen bulanık modelin incelemesi [40]'dan alınan şebeke örneği üzerinde ele alınacaktır. Bu çalışmada kesin (crisp) değerler olarak alınan kullanıcı sayıları, tezimizde önerilen BÜTP modeli için bulanık sayı olarak alınacak ve bu problemin çözümü analiz edilecektir. Dört kullanıcı tipinin var olduğu şebeke Şekil 5.7'de verilmiştir.



gösterimlerinde başlangıç ve bitiş arkları arasında “-” işareti kullanılacaktır  $((\bullet)_{i-j})$ . Buna göre probleme ait değişkenler aşağıdaki gibidir:

$$x^k = [x_{1-10}^k \quad x_{5-8}^k \quad x_{6-9}^k \quad x_{7-3}^k \quad x_{9-7}^k \quad x_{10-9}^k \quad x_{11-3}^k]^T,$$

$$y^k = [y_{1-4}^k \quad y_{1-5}^k \quad y_{2-1}^k \quad y_{2-6}^k \quad y_{2-10}^k \quad y_{2-11}^k \quad y_{4-3}^k \quad y_{5-6}^k \quad y_{5-9}^k \quad y_{6-5}^k \quad y_{6-7}^k \quad y_{7-2}^k \quad y_{8-4}^k \quad y_{8-7}^k \quad y_{9-2}^k \quad y_{9-8}^k \quad y_{9-11}^k \quad y_{10-2}^k]^T$$

$$t = [t_{1-10} \quad t_{5-8} \quad t_{6-9} \quad t_{7-3} \quad t_{9-7} \quad t_{10-9} \quad t_{11-3}]$$

$x$  ve  $y$  değişkenleri ile ilişkilendirilmiş sabit maliyet vektörleri sırasıyla

$$c = [2 \quad 2 \quad 2 \quad 7 \quad 2 \quad 2 \quad 2] ,$$

$$d = [10 \quad 5 \quad 10 \quad 4 \quad 8 \quad 14 \quad 10 \quad 4 \quad 8 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 4 \quad 5 \quad 10 \quad 6 \quad 6 \quad 10],$$

tarifeli arklara ait bağlantı matrisi  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(11 \times 7)},$$

ve tarifesiz arklara ait bağlantı matrisi  $B$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11 \times 18)$$

$b^k$  talep vektörleri ise

$$b^1 = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$b^2 = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$b^3 = [0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$b^4 = [0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

dır.

Tarifeli arklar için sırasıyla (5.10) ve (5.11) ile elde edilen  $M_{ij}^k$  ve  $N_{ij}$  sabitleri, Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5. 1 Örneğe ait  $M_{ij}^k$  sabitleri.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
(1,10)	8	11	0	0
(5,8)	1	3	6	8
(6,9)	1	2	4	10
(7,3)	7	0	0	15
(9,7)	7	0	0	2
(10,9)	8	0	0	6
(11,3)	8	0	0	16

Çizelge 5. 2 Örneğe ait  $N_{ij}$  sabitleri.

	(1,10)	(5,8)	(6,9)	(7,3)	(9,7)	(10,9)	(11,3)
$N_{ij}$	11	8	10	15	7	8	16

Bulanık kullanıcı sayılarının  $\alpha$  parametresine bağlı değerleri:

$$n^1 = 30 + 10\alpha, n^2 = 18 + 4\alpha, n^3 = 10 + 20\alpha, n^4 = 10 + 9\alpha$$

dır. Burada istenirse liderle olan etkileşim sonucu  $\alpha$  parametresinin değerleri risk davranışını modele katmak amacıyla sınırlandırılabilir. Fakat verilen sayısal örnek için her türlü durumun dikkate alınması amacıyla bir sınırlandırma yapılmamış ve 0.01 duyarlılıkta olası bütün  $\alpha \in [0,1]$  değerlerine karşılık gelen çözüm takımları oluşturulmuştur.

Oluşturulan verilerle Şekil 5.7 ile verilen şebeke için (5.19) modeline karşılık gelen karma tamsayıli lineer programlama modeli kurulmuş ve sonuçlar bir paket program kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$\alpha = 0$  için elde edilen sonuçlar:

$$t = [8 \ 4 \ 2 \ 15 \ 7 \ 0 \ 0], \quad (5.20)$$

$$t^1 = [8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad t^2 = [8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$t^3 = [0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad t^4 = [0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$x^1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T, \quad x^2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$x^3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x^4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$$

$$y^1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T,$$

$$y^2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$$

$$y^3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$y^4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T,$$

$$\lambda^1 = [-12 \ 0 \ 8 \ -2 \ -7 \ -3 \ 0 \ -5 \ 0 \ -2 \ 6],$$

$$\lambda^2 = [-19 \ 1 \ -1 \ -9 \ -14 \ -10 \ -7 \ -12 \ -9 \ -9 \ -3],$$

$$\lambda^3 = [10 \ 0 \ 14 \ 18 \ 8 \ 4 \ -8 \ 14 \ 8 \ 20 \ 14],$$

$$\lambda^4 = [10 \ 0 \ 16 \ 6 \ 0 \ 4 \ 0 \ 2 \ 8 \ 20 \ 14],$$

$\alpha \in [0,0.80)$  için elde edilen sonuçlar:

$$t = [8 \ 6 \ 10 \ 15 \ 7 \ 0 \ 0], \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
t'^1 &= [8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad t'^2 = [8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\
t'^3 &= [0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad t'^4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\
x^1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T, \quad x^2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
x^3 &= [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x^4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\
y^1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \\
y^2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\
y^3 &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
y^4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
\lambda^1 &= [-12 \ 0 \ 8 \ -2 \ -7 \ -3 \ 0 \ -5 \ 0 \ -2 \ 6], \\
\lambda^2 &= [-19 \ 1 \ -1 \ -9 \ -14 \ -10 \ -7 \ -12 \ -9 \ -9 \ -3], \\
\lambda^3 &= [10 \ 0 \ 14 \ 20 \ 8 \ 4 \ -8 \ 16 \ 10 \ 20 \ 14], \\
\lambda^4 &= [10 \ 0 \ 16 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 8 \ 20 \ 14],
\end{aligned}$$

ve  $\alpha \in [0.80, 1]$  için elde edilen sonuçlar:

$$\begin{aligned}
t &= [11 \ 6 \ 10 \ 15 \ 7 \ 8 \ 14], & (5.22) \\
t'^1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad t'^2 = [11 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\
t'^3 &= [0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad t'^4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 14], \\
x^1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x^2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
x^3 &= [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x^4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\
y^1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
y^2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\
y^3 &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
y^4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\
\lambda^1 &= [0 \ 0 \ 20 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 13 \ 4], \\
\lambda^2 &= [-22 \ 1 \ -2 \ -12 \ -17 \ -13 \ -7 \ -12 \ -9 \ -9 \ -3], \\
\lambda^3 &= [10 \ 0 \ 14 \ 20 \ 8 \ 4 \ -8 \ 16 \ 10 \ 23 \ 14],
\end{aligned}$$

$$\lambda^4 = [10 \ 0 \ 30 \ 20 \ 8 \ 4 \ 8 \ 16 \ 10 \ 23 \ 14]$$

dür.

Sonuçlardan görüldüğü gibi,  $\alpha = 0$  için (5.20) ve (5.21) alternatif çözüm takımları mevcuttur. (5.21) çözümünün (5.20)'ye göre daha geniş olan  $\alpha \in [0, 0.80)$  aralığında geçerli olduğu göz önüne alınırsa, bu iki çözüm takımından sadece (5.21) çözümünün KV'ye önerilmesi daha anlamlı olacaktır. Bu sebeple, bundan sonraki analizde (5.20) çözümüne yer verilmemiştir.

Çözümlere ait bulanık amaç fonksiyon değerleri (liderin karı),

$\alpha \in [0, 0.80)$  için

$$\tilde{Z} = (30, 40, \infty)[8] + (18, 22, \infty)[8] + (10, 30, \infty)[6] + (10, 19, \infty)[0] = (444, 676, \infty),$$

$\alpha \in [0.80, 1]$  için

$$\tilde{Z} = (30, 40, \infty)[0] + (18, 22, \infty)[11] + (10, 30, \infty)[6] + (10, 19, \infty)[14] = (398, 688, \infty)$$

olarak elde edilir. Bulanık amaç fonksiyon değerleri  $\alpha$  parametresi cinsinden ise

$\alpha \in [0, 0.80)$  için

$$Z(\alpha) = (30 + 10\alpha)[8] + (18 + 4\alpha)[8] + (10 + 20\alpha)[4] + (10 + 9\alpha)[2] = 444 + 232\alpha$$

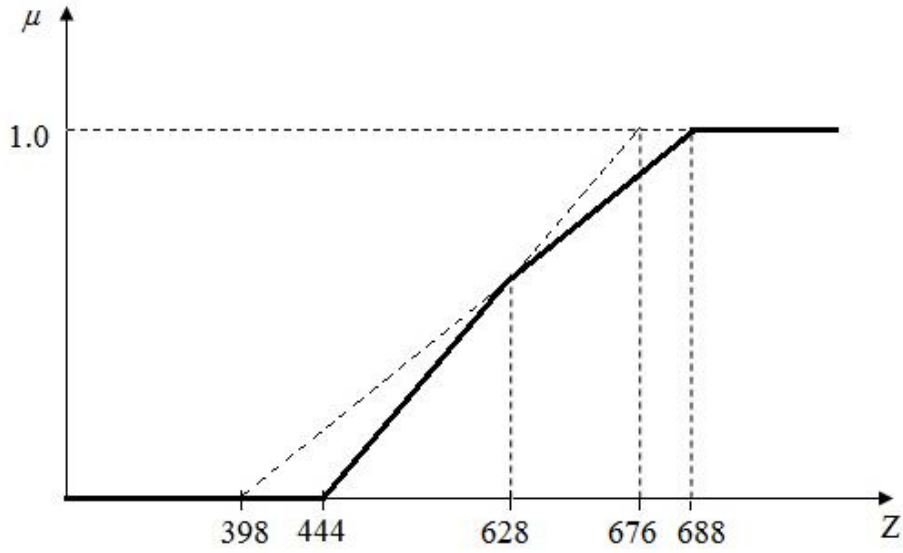
$\alpha \in [0.80, 1]$  için

$$Z(\alpha) = (30 + 10\alpha)[0] + (18 + 4\alpha)[11] + (10 + 20\alpha)[6] + (10 + 9\alpha)[14] = 398 + 290\alpha$$

dir. Böylece liderin karının üyelik fonksiyonu

$$\mu_z(Z) = \begin{cases} 0 & , Z < 444 \\ \frac{Z - 444}{232} & , 444 \leq Z < 628 \\ \frac{Z - 398}{290} & , 628 \leq Z < 688 \\ 1 & , Z \geq 688 \end{cases}$$

olacaktır. Liderin karına ait üyelik fonksiyonunun şekli Şekil 5.8 ile verilmiştir.



Şekil 5. 8 Liderin karının üyelik fonksiyonu.

Liderin atayacağı optimal ücretler ve kullanıcıların optimal rotaları Çizelge 5.3'de verilmiştir.

Çizelge 5. 3 Optimal ücretler ve optimal rotalar.

		$\alpha \in [0, 0.80)$	$\alpha \in [0.80, 1]$
Liderin Karı		$444 + 232\alpha$	$398 + 290\alpha$
Liderin atayacağı ücretler	$t_{1-10}$	8	11
	$t_{5-8}$	6	6
	$t_{6-9}$	10	10
	$t_{7-3}$	15	15
	$t_{9-7}$	7	7
	$t_{10-9}$	0	8
	$t_{11-3}$	0	14
Kullanıcı tiplerinin optimal rotaları	$k_1$	$1 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$
	$k_2$	$1 \rightarrow 10 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 10 \rightarrow 2$
	$k_3$	$2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4$	$2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4$
	$k_4$	$2 \rightarrow 11 \rightarrow 3$	$2 \rightarrow 11 \rightarrow 3$

Kullanıcı tiplerinin belirlenen rotalar için maliyet detayları ve liderin ilgili rotalardan elde ettiği birim karlar Çizelge 5.4’de verilmiştir. Çizelge 5.4’de optimal rotaların oklarının altında yazan ifadeler ilgili arkın maliyetini, “Maliyetin Üst Limiti” olarak ifade edilen sütun da kullanıcıların sadece tarifesiz arkları kullanmaları durumunda ödeyecekleri maliyeti göstermektedir. Görüldüğü gibi, kullanıcılar liderin arklarını kullanarak maliyetlerinde azalma sağlayabilmektedir.

Çizelge 5. 4 Maliyet ve kar analizi.

$\alpha \in [0, 0.80)$ aralığı için	Maliyetin Üst Limiti	Kullanıcıların Maliyeti	Liderin Karı
$k_1 : 1 \xrightarrow{2+t_{1-10}} 10 \xrightarrow{2+t_{10-9}} 9 \xrightarrow{6} 11 \xrightarrow{2+t_{11-3}} 3$	20	20	8
$k_2 : 1 \xrightarrow{2+t_{1-10}} 10 \xrightarrow{10} 2$	23	20	8
$k_3 : 2 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{2+t_{5-8}} 8 \xrightarrow{4} 4$	20	20	6
$k_4 : 2 \xrightarrow{14} 11 \xrightarrow{2+t_{11-3}} 3$	30	16	0
$\alpha \in [0.80, 1]$ aralığı için	Maliyetin Üst Limiti	Kullanıcıların Maliyeti	Liderin Karı
$k_1 : 1 \xrightarrow{10} 4 \xrightarrow{10} 3$	20	20	0
$k_2 : 1 \xrightarrow{2+t_{1-10}} 10 \xrightarrow{10} 2$	23	23	11
$k_3 : 2 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{2+t_{5-8}} 8 \xrightarrow{4} 4$	20	20	6
$k_4 : 2 \xrightarrow{14} 11 \xrightarrow{2+t_{11-3}} 3$	30	30	14

Sonuç olarak, KV konumundaki lider riskten kaçan bir davranış sergiliyorsa (5.21) çözümü, risk alan bir davranış sergiliyorsa (5.22) çözümü kendisine önerilebilir. Riske kayıtsız lidere ise (5.21) çözümünün önerilmesi fakat bunun yanında daha iyi olan çözümün bilgisinin verilmesi de uygun olacaktır.

Yapılan analiz, gerçek hayatta çok sık rastlanan bir durum olan talep miktarlarının (kullanıcı sayılarının) kesin olarak belirlenememesi halinde KV konumundaki liderin risk davranışı da modele dahil ederek, lidere çözüm önerileri getirilebilmesine imkan sağlamaktadır.

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren bağlantıların bir dizilişi olarak tanımlanan *şebekeler*, günlük yaşantımızda her yerde karşımıza çıkmaktadır. Şebekeler aracılığıyla ifade edilebilen *şebeke problemlerinin* hepsinde ilgili şebekede bazı girdilerin bir noktadan başka bir noktaya olabilecek en etkin şekilde taşınması (iletilmesi) ve bu gerçekleştirilirken şebeke kullanıcılarına mümkün olan en iyi servisin verilmesi ve ilgili araç gerecin en etkin şekilde kullanılması amaçlanmaktadır. Şebeke problemleri taşıma, haberleşme, iletişim, çizelgeleme sistemleri başta olmak üzere birçok uygulama alanında önemli bir yere sahiptir. Buna göre, şebeke problemlerinin matematiksel açıdan incelenmesi olarak tanımlanan *şebeke analizlerinin* gerçek hayata katkısı ve önemi oldukça açıktır.

Klasik matematiksel yöntemlerde, verilerin tam olması gereksiniminden dolayı bu yöntemlerle gerçek hayattaki sistemleri modellemek ve kontrol etmek oldukça zordur. Bulanık mantık, matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uyarlama alanı oluşturmak suretiyle bu zorluğu ortadan kaldırmış ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlamıştır.

Şebeke analizleri ve bulanık matematik alanlarını birleştirme iki yolla mümkün olmaktadır. Birincisi: Şebeke analizlerinde problemlere ait parametreler bilgi eksikliğinden, değişen ekonomik koşullardan veya ilgili niteliğin doğasından kaynaklanan bazı sebeplerle kesin şekilde ifade edilemediğinde, bu parametreleri çeşitli tipte bulanık sayılar aracılığıyla ifade etme yolu. İkincisi: İlgili şebeke probleminin yapısında çok amaçlılık veya çok seviyelilik durumu söz konusu ise probleme bulanık programlama teknikleri aracılığıyla çözüm getirme yolu.

“Şebeke Analizlerine Bulanık Yaklaşımlar” adlı tezimizde şebeke problemleri ve bulanık matematik hakkında altyapı oluşturulduktan sonra en temel şebeke problemi olan EKYP’ne ve son yıllarda oldukça dikkat çeken ÜTP’ne bulanık matematik aracılığıyla yaklaşımlar üretilmiştir.

Çalışmamızda kesin (crisp) ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP, tek amaçlı bulanık ark ağırlıklarına sahip EKYP ve çok amaçlı bulanık ark ağırlıklarına sahip EKYP olarak üç tip problem için dengeleyici operatörler aracılığıyla bulanık yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bildiğimiz kadarıyla, tezimizden üretilen yayınlar hariç, literatürde EKYP ile dengeleyici operatörleri birleştiren hiç bir çalışma bulunmamaktadır.

İlk bulanık yaklaşımda, ark ağırlıklarının yol uzunluğu yanında zaman, yol güvenliği veya risk gibi nitelikleri de belirtmesi gerekliliği ile ortaya çıkan ÇEKYP, çok amaçlı lineer programlama problemi olarak ele alınmıştır. Ark ağırlıklarının kesin alındığı problemde amaçların üyelik fonksiyonları oluşturularak Werners’in “bulanık ve” operatörü aracılığıyla probleme dengeleyici bulanık bir model önerilmiştir. “Bulanık ve” operatörü kullanılarak kurulan model, ÇEKYP için hem dengeleyici hem de Pareto-optimal olan uzlaşık çözümler üretmektedir.

İkinci bulanık yaklaşım, ark ağırlıkları yamuksal bulanık sayı olarak alınan BEKYP’ni çözmek üzere geliştirilmiştir. BEKYP için “minimum (basılamayan) çözüm” ve “uzlaşık çözüm” tanımları verildikten sonra, tek amaçlı BEKYP, bir sıralama bağıntısına dayanan çok amaçlı programlama yaklaşımıyla (Okada ve Soper [8]), kesin ark ağırlıklarına sahip ÇEKYP’ne dönüştürülmüştür. Oluşan ÇEKYP, tezimizde üretilen ilk bulanık yaklaşımla çözümlenerek, BEKYP için hem dengeleyici nitelikte hem de “minimum” tanımına uyan uzlaşık çözümler elde edilmiştir.

Tek amaçlı BEKYP için önerdiğimiz dengeleyici yaklaşım, problemi çok amaçlı yapıya dönüştürmektedir. Bu nedenle, önerilen yaklaşım Çok Amaçlı BEKYP’nin çözümü için de kullanılabilir.

Tezimizde önerdiğimiz dengeleyici modeller ile Pareto-optimal çözümler üretildiğine dair teorem verilerek ispatlanmıştır. Ayrıca modeller, yaklaşımların anlaşılması için sayısal örneklerle de desteklenmiştir.

Çalışmamızda orijinal katkının yapıldığı ikinci problem ÜTP’dir. ÜTP’nin başlıca parametreleri alt seviyenin talep miktarları (kullanıcı sayıları), sabit ve tarifeli arklara ait

ark ağırlıklarıdır. Bu parametrelerin bulanık olması ile BÜTP oluşmaktadır. Tezimizde alt seviyenin talep miktarlarındaki belirsizlik durumu incelenmiştir. Literatürde ÜTP’nde talep miktarlarındaki bulanıklığı ele alan hiçbir çalışma bulunmamaktadır. Talep miktarları özel bir üçgensel bulanık sayı formunda alınarak, lider olarak isimlendirilen üst seviyeye bu belirsizlik karşısında karar alternatifleri sunacak bir analiz verilmiştir. Bu analiz sayesinde KV konumundaki lidere, atayacağı ücretler hakkında talep miktarlarının kesin olarak alındığı duruma göre daha gerçekçi bir bilgi sunulmuştur. Ayrıca yapılan analiz, liderin risk davranışının da modele dahil edilmesine imkan sağlamaktadır. Yaklaşımı açıklayan sayısal bir örnek de sunulmuştur.

ÜTP’nde alt seviye kullanıcıları basit anlamda kendi EKYP’lerini çözerek optimal rotalarını belirlerler. Bu çözüm aşamasında şebekedeki arkların yol ücreti gibi tek bir niteliği temsil ettiği kabul edilir. Başka bir ifadeyle ikinci seviyede çözülen EKYP tek amaçlı bir problemdir ve kullanıcılar sadece maliyet kriterini dikkate alarak optimal rotalarını belirlerler. Fakat gerçek hayatta maliyet yanında zaman, yol güvenliği vb. niteliklerin de dikkate alınması gerekebilir. Böylece liderin, alt seviye kullanıcıların diğer amaçlarını da göz önünde bulundurarak ücret ataması yapması gerekir. Anlatılan bu özel durum ÜTP modelinin gelişmesine ve gerçek hayata uyarlanmasına önemli katkılar sağlayabilir.

## KAYNAKLAR

- 
- [1] Dubois, D. ve Prade, H., (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.
  - [2] Lawler, E., (1976). *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Dover Publications Inc., New York.
  - [3] Klein, C.M., 1991. "Fuzzy shortest paths", *Fuzzy Sets and Systems*, 39: 27-41.
  - [4] Kung, J.-Y. ve Chuang, T.-N., (2005). "The shortest path problem with discrete fuzzy arc lengths", *Computers and Mathematics with Applications*, 49: 263-270.
  - [5] Moazeni, S., (2006). "Fuzzy shortest path problem with finite fuzzy quantities", *Applied Mathematics and Computation*, 183(1):160-169.
  - [6] Chuang, T.-N. Ve Kung, J.-Y., (2006). "A new algorithm for the discrete fuzzy shortest path problem in a network", *Applied Mathematics and Computation*, 174:660-668.
  - [7] Okada, S., (2004). "Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths", *Fuzzy Sets and Systems*, 142: 335-357.
  - [8] Okada, S. ve Soper, T., (2000). "A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths", *Fuzzy Sets and Systems*, 109:129-140.
  - [9] Nayeem, S.M.A. ve Pal, M., (2005). "Shortest path problem on a network with imprecise edge weight", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4: 293–312.
  - [10] Cornelis, C., De Kesel, P. ve Kerre, E.E., (2004). "Shortest paths in fuzzy weighted graphs", *International Journal of Intelligent Systems*, 19: 1051-1068.
  - [11] Ji, X., Iwamura, K. ve Shao, Z., (2007). "New models for shortest path problem with fuzzy arc lengths", *Applied Mathematical Modelling*, 31(2): 259-269.
  - [12] Boulmakoul, A., (2004). "Generalized path-finding algorithms on semirings and the fuzzy shortest path problem", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162:263-272.
  - [13] Lin, K.-C. ve Chern, M.-S., (1993). "The fuzzy shortest path problem and its most vital arcs", *Fuzzy Sets and Systems*, 58(3): 343-353.
  - [14] Hernandez, F., Lamata, M.T., Verdegay, J.L. ve Yamakami, A., (2007). "The shortest path problem on networks with fuzzy parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, 158(14): 1561-1570.

- [15] Keshavarz, E. ve Khorram, E., (2009). "A fuzzy shortest path with the highest reliability", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230(1): 204-212.
- [16] Tajdin, A., Mahdavi, I., Mahdavi-Amiri, N. ve Sadeghpour-Gildeh, B., (2010). "Computing a fuzzy shortest path in a network with mixed fuzzy arc lengths using  $\alpha$ -cuts", *Computers & Mathematics with Applications*, 60(4): 989-1002.
- [17] Li, Y., Gen, M. ve Ida, K., (1996). "Solving fuzzy shortest path problems by neural Networks", *Computers & Industrial Engineering*, 31(3): 861-865.
- [18] Hassanzadeh, R., Mahdavi, I., Mahdavi-Amiri, N. ve Tajdin, A., (2011). "A genetic algorithm for solving fuzzy shortest path problems with mixed fuzzy arc lengths", *Mathematical and Computer Modelling*, Available online 19 April 2011, ISSN 0895-7177, 10.1016/j.mcm.2011.03.040.
- [19] Tarapata, Z., (2007). "Selected multicriteria shortest path problems: An analysis of complexity, models and adaptation of standard algorithms", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17: 269-287.
- [20] Granat, J. ve Guerriero, F., (2003). "The interactive analysis of the multicriteria shortest path problem by the reference point method", *European Journal of Operational Research*, 151: 103-118.
- [21] Tung, C. ve Chew, K., (1992). "A multicriteria pareto-optimal path algorithm", *European Journal of Operational Research*, 62(2): 203-209.
- [22] Warburton, A., (1987). "Approximation of Pareto Optima in Multiple-Objective, Shortest-Path Problems", *Operations Research*, 35(1), 70-79.
- [23] Vincke, P., (1974). "Problèmes multicritères", *Cahiers du Centre D'Etudes de Recherche Operationnelle*, 16: 425-439.
- [24] Brumbaugh-Smith, J. ve Shier, D., (1989). "An empirical investigation of some bicriterion shortest path algorithms", *European Journal of Operational Research*, 43: 216-224.
- [25] Hansen, P., (1980). "Bicriterion path problems", in: Beckmann, M., Kunzi, H. P.,(Ed), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Applications*, Lecture Note in Economics and in Mathematical Systems, 177:109-127, Springer, Berlin.
- [26] Skriver, A.J.V. ve Andersen, K.A., (2000). "A label correcting approach for solving bicriterion shortest-path problems", *Computers and Operations Research*, 27: 507-524.
- [27] Martins, E., (1984). "On a multicriteria shortest path problem", *European Journal of Operational Research*, 16: 236-245.
- [28] Climaco, J.C.N. ve Martins, E.Q.V., (1982). "A bicriterion shortest path algorithm", *European Journal of Operational Research*, 11: 399-404.
- [29] Azvedo, J. ve Marins, E.Q.V., (1991). "An algorithm for the multiobjective shortest path problem on acyclic networks", *Investigacao Operational*, 11: 52-69.

- [30] Mote, J., Murthy, I. ve Olson, D., (1991). "A parametric approach to solving bicriterion shortest path problems", *European Journal of Operational Research*, 53: 81-92.
- [31] Carraway, R., Morin, L. ve Moskowitz, H., (1990). "Generalized dynamic programming for multicriteria optimization", *European Journal of Operational Research*, 44: 95-104.
- [32] Modesti, P. ve Sciomachen, A., (1998). "A utility measure for finding multiobjective shortest paths in urban multimodal transportation Networks", *European Journal of Operational Research*, 111: 495-508.
- [33] Bracken, J., ve McGill, J., (1973). "Mathematical programs with optimization problems in the constraints", *Operations Research*, 21: 37-44.
- [34] Bracken, J. ve McGill, J., (1974). "Defense applications of mathematical programs with optimization problems in the constraints", *Operations Research*, 22: 1086-1096.
- [35] Bracken, J. ve McGill, J., (1978). "Production and marketing decisions with multiple objectives in a competitive environment", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 24: 449-458.
- [36] Candler, W. ve Norton, R., (1977). *Multilevel programming*, Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington DC, USA.
- [37] Dempe, S., (2002). *Foundations of Bilevel Programming*, Volume 61 of *Nonconvex Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [38] Colson, B., Marcotte, P. ve Savard, G., (2005). "Bilevel programming: A survey", *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, 3(2): 87-107.
- [39] Hansen, P. , Jaumard, B. ve Savard, G., (1992), "New branch-and-bound rules for linear bilevel programming," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(5): 1194-1217.
- [40] Labbé, M., Marcotte, P. ve Savard, G., (1998). "A bilevel model of taxation and its applications to optimal highway pricing", *Management Science*, 44: 1608-1622.
- [41] Brotcorne, L., Labbé, M., Marcotte, P. ve Savard, G., (2001). "A bilevel model for toll optimization on a multicommodity transportation network", *Transportation Science*, 35: 345–358.
- [42] Hoesel, S. van, Kraaij, A. van der, Mannino, C., Oriolo, G. ve Bouhtou, M., (2003). "Polynomial cases of the tarification problem", Technical Report RM03053, Maastricht Economic Research School on Technology and Organisation, Maastricht, The Netherlands.
- [43] Dewez, S., (2004). *On the toll setting problem*, Doktora Tezi, Université Libre de Bruxelles, Brüksel, Belçika.
- [44] Brotcorne, L., Labbé, M., Marcotte, P. ve Savard, G., (2000). "A Bilevel Model and Solution Algorithm for a Freight Tariff-Setting Problem", *Transportation Science*, 34(3): 289-302.

- [45] Côté, J.-P., Marcotte, P. ve Savard, G., (2003). “A bilevel modeling approach to pricing and fare optimization in the airline industry”, *Journal of Revenue and Pricing Management*, 2:23-36.
- [46] Dewez, S., Labbe, M., Marcotte, P., Savard, G., (2008). “New formulations and valid inequalities for a bilevel pricing problem”, *Operations Research Letters*, 36(2):141-149.
- [47] Kalashnikov, V.V., Kalashnykova, N.I. ve Vallejo, J.F.C., (2008). “Solving Bilevel Toll Assignment Problem by Penalty Function Algorithm”, *Eighth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA '08)*, 3: 62-66.
- [48] Heilporn, G., Labbé, M., Marcotte P. ve Savard, G., (2010). “A parallel between two classes of pricing problems in transportation and economics”, *Journal of Revenue & Pricing Management*, 9: 110-125.
- [49] Dempe, S. ve Starostina, T., (2006). *Computational Intelligence, Theory and Applications: Optimal Toll Charges in a Fuzzy Flow Problem*, 405-413, 2006.
- [50] Ahuja, R.K., Magnanti, T. L. ve Orlin, J. B., (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey.
- [51] Ahlatcioglu, M. ve Tiryaki, F., (1998). *Kantitatif Karar Verme Teknikleri*, Y.T.Ü. Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.
- [52] Ülker, E. ve Çomak, E., (2004). “İki Boyutta Verilen 4 Kontrol Noktasına Göre Bulanık Mantık Kullanılarak Eğri Uydurulması”, *IJSIT Lecture Notes of 1st International Conference on Informatics*, 1(2).
- [53] Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S., (2003). *Bulanık Mantığa Giriş*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 4, İstanbul.
- [54] Günay, H., (2006). *Bulanık Karar Vermede Birleştirme Operatörleri ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [55] Zimmermann, H.-J.,(1993). *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Second, Revised Edition, Sixth Printing, Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London.
- [56] Lai, Y.J. ve Hwang, C.L., (1996). *Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Second corrected printing, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [57] Luhandjula, M.K. , (1982). “Compensatory operator in fuzzy linear programming with multiple objective”, *Fuzzy Sets and Systems*, 8: 245-252.
- [58] Shih, H.S. ve Lee, E.S., (2000). “Compensatory fuzzy multiple level decision making”, *Fuzzy Sets and Systems*, 114: 71-87.
- [59] Zimmermann, H.-J., (1978). “Fuzzy programming and linear programming with several objective functions”, *Fuzzy Sets and Systems*,1: 45-55.
- [60] Guu, S.M. ve Wu, Y.K., (1997). “Weighted coefficients in two-phase approach for solving the multiple objective programming problems”, *Fuzzy Sets and Systems*, 85: 45-48.

- [61] Lee, E.S. ve Li, R.J., (1993). "Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with Pareto optimum", *Fuzzy Sets and Systems*, 53: 275-288.
- [62] Wu, Y.K. ve Guu, S.M., (2001). "A compromise model for solving fuzzy multiple objective problems", *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 18(5): 87-93.
- [63] Zimmermann, H.J. ve Zysno, P., (1980). "Latent connectives in human decision making", *Fuzzy Sets and Systems*, 4(1): 37-51.
- [64] Chen, H.K. ve Chou, H.W., (1996). "Solving multiobjective linear programming problems-a generic approach", *Fuzzy Sets and Systems*, 82: 35-38.
- [65] Guu, S.M. ve Wu, Y.K., (1999). "Two-phase approach for solving the fuzzy linear programming problems", *Fuzzy Sets and Systems*, 107: 191-195.
- [66] Tiryaki, F.,(2006). "Interactive compensatory fuzzy programming for decentralized multi-level linear programming (DMLLP) problems", *Fuzzy Sets and Systems*, 157: 3072-3090.
- [67] Werners, B.M., (1988). Aggregation models in mathematical programming, in: G. Mitra (Ed.), *Mathematical Models for Decision Support*, Springer, Berlin, 295–305.
- [68] Yager, R.R.,(1981). "A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval", *Information Science*, 24: 143-161.
- [69] Sakawa, M., (1993). *Fuzzy Sets And Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, Newyork.
- [70] Chen, C.-L. ve Lee, W.-C., (2004). "Multi-objective optimization of multi-echelon supply chain networks with uncertain product demands and prices", *Computers & Chemical Engineering*, 28: 1131-1144.
- [71] Ahlatcioglu M. ve Tiryaki F., (2007). "Interactive fuzzy programming for decentralized two-level linear fractional programming (DTLLFP) problems", *Omega*, 35: 432-450.
- [72] Tanaka, H., Ichihashi, H. ve Asai, K., (1984). "A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers", *Control and Cybernetics*, 13: 185-194.
- [73] Ramik, J. ve Rimanek, J., (1985). "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization", *Fuzzy Sets and Systems*, 16: 123-138.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Hale GONCE KÖÇKEN  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 28.07.1981- İstanbul  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** : [halegk@gmail.com](mailto:halegk@gmail.com)

### ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2005
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2003
Lise	Fen-Matematik	Pertevniyal Lisesi	1999

### İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2004-halen	Y.T.Ü. Matematik Mühendisliği, Uygulamalı Matematik ABD	Araştırma Görevlisi
2003-2004	Balnak Nakliyat	Denizyolu İhracat Operasyon Elemanı

## YAYINLARI

### Makale

1. **Kocken Gonce, H.**, Ahlatcioglu, M, “A Compensatory Approach to Multiobjective Linear Transportation Problem with Fuzzy Cost Coefficients”, *Mathematical Problems in Engineering*, volume 2011, Article ID 103437, 19 pages, 2011 (ISSN:1024-123X) (doi:10.1155/2011/103437)(SCI/Expanded)
2. **Kocken Gonce, H.**, Ahlatcioglu, M, “A Compensatory Approach to Multi-objective Interval Transportation Problem”, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences (Yıldız Teknik Üniversitesi, Sigma Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi)*, 23.11.2011’de kabul edildi, basılacak.

### Bildiri

1. Tiryaki, F., **Gonce H.**, “A Compensatory Fuzzy Approach to Multiple Objective Linear Transportation Problem”, *INISTA’2005, Innovations in Intelligent Systems and Applications*, June, 15-18, 2005, YTU, Istanbul-TURKEY.
2. Tiryaki, F., Ahlatcioglu, B., **Gonce, H.**, “Bulanık Fiyat, Arz ve Talep Miktarlı Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemine bir Dengeleyici Yaklaşım”, *Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 2005 (YA/EM’2005) XXV. Ulusal Kongresi*, 4-6 Temmuz 2005, Koç Üniversitesi, İstanbul.
3. Tiryaki, F., **Gonce H.**, “A Compensatory Fuzzy Approach to Multiobjective Solid Transportation Problem”, *MME-06, Mathematical Methods in Engineering International Symposium*, 27-29 April 2006, Çankaya University, Ankara-TURKEY. ([http://mme06.cankaya.edu.tr/otherpapers/018\\_%2091%20tiryaki%20gonce.pdf](http://mme06.cankaya.edu.tr/otherpapers/018_%2091%20tiryaki%20gonce.pdf))
4. **Gonce, H.**, Tiryaki, F., “Bulanık En Kısa Yol Problemi Ve Bir Uygulama ”, *Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 2008 (YA/EM’2008) 28. Ulusal Kongresi*, Temmuz 2008, Galatasaray Üniversitesi, İstanbul.
5. **Gonce, H.**, Ahlatcioglu, M., Tiryaki, F., “A Compensatory Approach to Fuzzy Shortest Path Problem”, *1st International Fuzzy Systems Symposium*, 01-02 October 2009, TOBB University of Economics and Technology, Ankara-TURKEY.
6. **Kocken Gonce, H.**, Tiryaki, F., “Using some fuzzy aggregation operators for Multi-Objective Linear Transportation Problem”, *International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA 2011)*, 29-30 June, 01-02 July 2011, Yıldız Technical University, Istanbul-TURKEY.