

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

Yüksek Matematikçi Veyis TURUT

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 11 Kasım 2010
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL
İkinci Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa BAYram
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN
: Doç. Dr. Cevdet CERİT (İTÜ)
: Doç. Dr. Fatih TAŞÇI (YTÜ)
: Doç. Dr. Yaşar SÖZEN (Fatih Ü.)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. TANIM VE TEOREMLER	3
2.1 Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler	10
2.1.1 Riemann-Liouville Kesirli Türevleri ve Kesirli İntegralleri	10
2.1.2 Caputo Kesirli Türevleri	11
2.1.3 Kesirli Diferensiyel Denklemler	12
3. ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ	15
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	21
4.1 Diferensiyel Dönüşüm yöntemi	21
4.1.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	21
4.1.2 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	22
4.3 Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	27
4.3.1 Bir Boyutlu Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	27

4.3.2 İki Boyutlu Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	31
5. VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ	37
5.1 Varyasyonel İterasyon Yönteminin Temel kavramları	37
5.1.1 Genel Lagrange Çarpanı	37
5.1.2 Stasyoner (Stationary) şartlar	38
5.1.3 Sınırlı (Restricted) Varyasyon	39
6. ÇOK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMI	44
6.1 Tek Değişkenli Padé Yaklaşımı	44
6.2 Padé Yaklaşımının Hesaplanması	47
6.3 Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı	51
7. UYGULAMALAR.....	56
7.1 Adomian Ayırıştırma Yöntemi (AAY) ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY)	56
Uygulama 7.1.1	56
Uygulama 7.1.2	66
7.2 Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi (GDDY) ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY)	75
Uygulama 7.2.1	75
Uygulama 7.2.2	89
7.3 Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VİY) ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY).....	102
Uygulama 7.3.1	102
Uygulama 7.3.2	113
8. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	124
KAYNAKLAR.....	125
ÖZGEÇMİŞ.....	129

KISALTMA LİSTESİ

AAY	Adomian Ayrıştırma Yöntemi.
GDDY	Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi.
VIY	Varyasyonel İterasyon Yöntemi.
ÇPY	Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı.
TÇ	Tam Çözüm.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 6. 1 $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonu, $P_6(x)$ kuvvet serisi ve $P_6(x)$ kuvvet serisine ait $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımının grafikleri.....	50
Şekil 7. 1 $\alpha = 1$ için, (7.8) zaman-kesirli kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü.....	59
Şekil 7. 2 AAY kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 1$ için elde edilen (7.12) çözümü.	60
Şekil 7. 3 (AAY) kullanılarak, (7.8) kesirli kısmi diferansiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 1$ için elde edilen (7.12) çözümünün (4,2) mertebeli ÇPY.	60
Şekil 7. 4 (AAY) kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.19) çözümü.....	62
Şekil 7. 5 AAY kullanılarak, (7.8) kesirli kısmi diferansiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.19) çözümünün (6,2) mertebeli ÇPY.....	62
Şekil 7. 6 (AAY) kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ için elde edilen (7.26) çözümü.....	64
Şekil 7. 7 AAY kullanılarak, (7.8) kesirli kısmi diferansiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.26) çözümünün (49,2) mertebeli ÇPY.....	64
Şekil 7. 8 $\alpha = 2$ için, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin tam çözümü.....	68
Şekil 7. 9 AAY kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 2$ için elde edilen (7.39) çözümü.	68
Şekil 7. 10 (AAY) kullanılarak, (7.34) kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün $\alpha = 2$ için elde edilen (7.39) çözümünün (4,2) mertebeli ÇPY.	69
Şekil 7. 11 (AAY) kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.46) seri çözümü.....	70
Şekil 7. 12 (AAY) kullanılarak, (7.34) kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün $\alpha = 1.5$ için elde edilen (7.46) çözümünün (7,2) mertebeli ÇPY.	71
Şekil 7. 13 (AAY) kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 1.75$ için elde edilen (7.54) çözümünün	72
Şekil 7. 14 (AAY) kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 1.75$ için elde edilen (7.54) çözümünün ÇPY.	73
Şekil 7. 15 $\alpha = 1.0$ değeri için, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümü	80
Şekil 7. 16 (7.63) Zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisi.....	80

Şekil 7. 17 (7.63) Zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisinin ÇPY.....	81
Şekil 7. 18 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ değeri için edilen (7.81) kuvvet serisi.	84
Şekil 7. 19 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ değeri için edilen (7.81) kuvvet serisinin ÇPY.	84
Şekil 7. 20 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.75$ değeri için edilen (7.92) kuvvet serisi.	87
Şekil 7. 21 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.75$ değeri için edilen (7.92) kuvvet serisinin ÇPY.	87
Şekil 7. 22 $\alpha = 1.0$ değeri için, (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümü.	93
Şekil 7. 23 (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.112) kuvvet serisi.	93
Şekil 7. 24 (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.112) kuvvet serisinin ÇPY.	94
Şekil 7. 25 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.121) kuvvet serisi.....	96
Şekil 7. 26 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.121) kuvvet serisinin ÇPY.....	97
Şekil 7. 27 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.132) kuvvet serisi.....	100
Şekil 7. 28 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.132) kuvvet serisinin ÇPY.....	100
Şekil 7. 29 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümü .	105
Şekil 7. 30 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.163) çözümü.....	106
Şekil 7. 31 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.163) çözümünün ÇPY.....	106

Şekil 7. 32 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.169) çözümü.	108
Şekil 7. 33 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.169) çözümünün ÇPY.	109
Şekil 7. 34 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.180) çözümü.	111
Şekil 7. 35 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.180) çözümünün ÇPY.	111
Şekil 7. 36 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümü.....	116
Şekil 7. 37 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.207) çözümü.	116
Şekil 7. 38 $\alpha = 2$ için bulunan (7.207) çözümünün (10,2) mertebeli ÇPY.....	117
Şekil 7. 39 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.50$ için bulunan (7.215) çözümü.	119
Şekil 7. 40 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.50$ için bulunan (7.215) çözümünün ÇPY.	119
Şekil 7. 41 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.236) çözümü.	121
Şekil 7. 42 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.236) çözümüne ait ÇPY.	122

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4. 1 Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri	22
Çizelge 4. 2 İki boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri.....	23
Çizelge 4. 3 Genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri..	34
Çizelge 4. 4 $U_{\alpha,1}(k, h)$ terimlerinin (4.50) rekürens formülüne göre nümerik değerleri.	35
Çizelge 5. 1 Denklem (5.21) ile Newton iterasyon formülünün karşılaştırılması.....	40
Çizelge 7. 1 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.0$ olduğunda, (7.8) kesirli diferansiyel denkleminin (AAY) ile elde edilen (7.11) seri çözümünün ve (7.11) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.....	65
Çizelge 7. 2 $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$, $\alpha = 2.0$ olduğunda, (7.34) kesirli diferansiyel denkleminin (AAY) ile elde edilen (7.38) seri çözümünün ve (7.38) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.....	74
Çizelge 7. 3 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.0$ olduğunda, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün ve (7.69) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.....	88
Çizelge 7. 4 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ olduğunda, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün ve (7.109) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.	101
Çizelge 7. 5 $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$, $\alpha = 2.0$ olduğunda, (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün ve (7.160) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.....	112
Çizelge 7. 6 $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$, $\alpha = 2.0$ olduğunda, (7.201)) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün ve (7.205) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.	123

ÖNSÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne bağlı Matematik anabilim dalında hazırlanan bu doktora tezi sekiz bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölüm giriş bölümü olup, basit anlamda çalışmanın konusunu özetlemekte, amaç ve yönteme ışık tutmaktadır. İkinci bölüm, farklı türdeki kesirli diferensiyel denklemlerin ve tezde kullanılan kesirli türev tanımlarının temel kavramlarını, teoremlerini ve çalışmamızda kullanılan nümerik yöntemlerin altyapısını oluşturan tanımları ve ön bilgileri ele almaktadır. Üçüncü bölüm ise Adomian ayrıştırma yöntemini ele almaktadır. Dördüncü bölüm genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yönteminin temel işlemlerini ve teoremlerini, beşinci bölüm varyasyonel iterasyon yönteminin temel kavramlarını ve teoremlerini, altıncı bölüm ise, çalışmamızın asıl amacı olan, farklı türdeki kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde uygun olup olmadığını araştırmak istediğimiz çok değişkenli Padé yaklaşımının temel kavramlarını ve teoremlerini ele almaktadır. Yedinci bölüm, bu tezin asıl amacının uygulamalar üzerinde gösterildiği, Adomian ayrıştırma, varyasyonel iterasyon ve genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemlerinin, ayrı ayrı çok değişkenli Padé yaklaşımı ile karşılaştırılmalarını ele almaktadır. Son olarak, sekizinci bölümde ise, bir önceki bölümde yapılan uygulamalar göz önünde tutularak yapılan karşılaştırmalara ait, sonuç ve tartışma yer almaktadır.

Bu çalışma esnasında katkılarını esirgemeyen Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik bölümü öğretim üyesi danışmanım Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL'e, Fatih Üniversitesi öğretim üyesi eş danışmanım Prof. Dr. Mustafa BAYRAM'a ve manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen ağabeyim Prof. Dr. Abdülmecit TURUT'a ve çalışmam süresince bana destek olan eşime sonsuz teşekkürlerimle...

Veyis TURUT

ÖZET

Bu tezde, kesirli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Çok değişkenli Padé yaklaşımının etkinliği nümerik olarak, lineer ve nonlinear kesirli diferensiyel denklemler üzerinde incelenmiştir. Çünkü bu çalışmanın asıl amacı, lineer ve nonlinear kesirli diferensiyel denklemler için çok değişkenli Padé yaklaşımı kullanılarak yaklaşık çözümler bulmaktır. Adomian ayrıştırma, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm ve varyasyonel iterasyon yöntemleriyle elde edilen sonuçlar ile çok değişkenli Padé yaklaşımından elde edilen sonuçlar karşılaştırılması, çok değişkenli Padé yaklaşımının son derece etkili ve uyumlu olduğunu ortaya koymaktadır. Çalışmamızda kullanılan kesirli türevler için, Caputo kesirli türev tanımı temel alınmıştır.

Anahtar kelimeler: Çok değişkenli Padé yaklaşımı, kesirli diferensiyel denklem, Zaman-kesirli Fisher denklemi, Zaman-kesirli Fitzhugh–Nagumo denklemi, Zaman-kesirli reaksiyon-difüzyon denklemi, Caputo kesirli türevi.

ABSTRACT

In this thesis, numerical solutions of the differential equations of fractional order are considered. Numerical illustrations that include linear and nonlinear differential equations of fractional order are investigated to show efficiency of multivariate Padé approximation. Because, the fundamental goal of this work has been to construct an approximate solutions for linear and nonlinear differential equations of fractional order by using multivariate padé approximation. Comparison of the results obtained by the variational iteration method, Adomian's decomposition method, generalized differential transform method with those obtained by multivariate Padé approximation reveals that multivariate Padé approximation is very effective and convenient. The fractional derivatives are described in the Caputo sense.

Keywords: Multivariate padé approximation; Fractional differential equation, Time-fractional Fisher equation, Time-fractional Fitzhugh–Nagumo equation, Time-fractional reaction-diffusion equation, Caputo fractional derivative.

1. GİRİŞ

L'Hospital tarafından Leibniz'e, türev operatörünün kesirli olmasının anlamının sorulduğu mektupla (Ross, 1977) matematik literatürüne giren kesirli diferensiyel denklemler, günümüzde pek çok alanda kendini göstermektedir. Matematik, fizik ve kimya yaygın olarak kullanıldığı alanlar olmasının yanında, viskoelastisite problemlerinde (Blair, 1947), elektrik devrelerinde (Podlubny, 1999), biyolojide (Anastasio, 1999), ve kontrol teorisinde de (Oustaloup, 1991) kesirli diferensiyel denklemlere rastlanmaktadır.

Adomian ayrıştırma, varyasyonel iterasyon gibi hem tamsayı türevli hemde kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik yöntemlerden başka, özellikle kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü için bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar arasında, Momani, Odibat ve Ertürk tarafından geliştirilen genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm (Odibat, Momani, 2008a; Momani, Odibat, 2008; Momani, vd., 2007) ve Arıkoğlu ve Özkol tarafından geliştirilen kesirli diferensiyel dönüşüm yönteminden bahsedilebilir (Arıkoğlu ve Özkol, 2007). Adomian ayrıştırma, varyasyonel iterasyon, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemlerinin kesirli diferensiyel denklemler üzerindeki uygulamaları literatürde yeterince mevcuttur ve bu yöntemlerle yapılan çalışmaların doğruluğu ve etkinliği gösterilmiştir (Odibat ve Momani, 2008b; Momani, 2005; Ertürk, vd., 2008; Odibat, vd., 2008; Odibat ve Momani, 2006; Odibat ve Momani, 2008a; Momani ve Odibat, 2008; Momani, vd., 2007; Momani ve Odibat, 2007; Odibat ve Momani, 2008c; Rida, vd., 2010; Odibat ve Momani, 2009).

Henri Eugène Padé'nin doktora çalışmasıyla literatüre giren, Euclid algoritması ve sürekli kesirler temel alınarak geliştirilen (Brezinski, 1991), J.S.R. Chisholm ile başlayıp (Chisholm, 1973), Levin ile devam eden (Levin, 1976) ve Cuyt tarafından teorisi ve kavramları daha da sistemli hale getirilen (Cuyt, 1983) Padé yaklaşımının tek değişkenlisi için, yeterli derecede tamsayı türevli diferensiyel denklemler üzerine çalışma olmasına rağmen, kesirli diferensiyel denklemler için oldukça sınırlıdır (Momani ve Qaralleh, 2007; Momani ve Shawagfeh, 2006). Çok değişkenli Padé yaklaşımı için aynısını söylemek mümkün değildir. Tamsayı türevli diferensiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalar çok sınırlı olmasına rağmen (Turut, vd., 2010), kesirli diferensiyel denklemler üzerine hemen hemen hiçbir çalışma olmadığı söylenebilir.

Bu yüzden, bu çalışmada çok değişkenli Padé yaklaşımının kesirli diferensiyel denklemler üzerine uygulanabileceği amacı hedeflenmiş ve bunun için, yukarıda bahsedilen Adomian

ayırıştırma, varyasyonel iterasyon ve genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemleriyle elde edilen çözümler ile çok değişkenli Padé yaklaşımıyla bulunan çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Karşılaştırmalar için, içerik açısından son derece zengin olduğunu söyleyebileceğimiz farklı sınıftaki kesirli diferensiyel denklemler özellikle seçilmiştir.

Adomian ayırıştırma yöntemi ve çok değişkenli Padé yaklaşımının karşılaştırılmasında non-lineer zaman-kesirli diferensiyel denklemler, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi ve çok değişkenli Padé yaklaşımının karşılaştırılmasında zaman-kesirli reaksiyon-difüzyon denklemleri, varyasyonel iterasyon yöntemi ve çok değişkenli Padé yaklaşımının karşılaştırılmasında ise non-lineer zaman kesirli hiperbolik ve lineer zaman kesirli Klein-Gordon zaman-kesirli diferensiyel denklemler seçilmiştir.

Son yıllarda, kesirli diferensiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville türev operatörü yerine, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü daha çok tercih edilmektedir. Bunun sebebi, başlangıç koşullarını içeren kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü için Caputo türev tanımının daha kullanışlı olmasıdır. Çalışmamızda da başlangıç koşullarını içeren kesirli diferensiyel denklemler tercih edildiğinden, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü kullanılmıştır.

Tamsayı türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde, Padé yaklaşımının kullanışlılığı ve etkinliği bilinmektedir. Bu çalışmayla da, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde, çok değişkenli Padé yaklaşımının kullanışlılığı ve etkinliği, farklı sınıflara giren kesirli diferensiyel denklemler üzerindeki uygulamalardan elde edilen sonuçlarla gösterilmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölüm, çalışmamızda kullanılan tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1: m . dereceden bir

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m \quad (2.1)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşit olmasıyla elde edilen

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına, $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir (Çelik, 2002).

Tanım 2.2: $c_i, b \in R$ ve x_i 'lerde değişkenler olmak üzere,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b \quad (2.3)$$

şeklinde ki bir ifadeye lineer denklem denir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde ki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad (2.5)$$

matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

matrislerine de, sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sistemini, matrisle $Ax = B$ şeklinde gösterebiliriz. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez. Yani;

- i) Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,
- ii) Herhangi bir denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,
- iii) Herhangi bir denklemin her iki yanı, herhangi bir skalerle çarpıldıktan

sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır. Bu sebepten, $[A:B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gaus-Jordan yok etme ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme adı verilir (Turut, 2007).

Tanım 2.3: A $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir (Turut, 2007).

Tanım 2.4: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü var ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B \quad (2.8)$$

eşitliği ile verilir. Burada anlatılmak istenen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

lineer denklem sisteminin çözümü; Δ , A matrisinin determinantı olmak üzere,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & b_n \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

determinantları hesaplanır ve tek çözüm olan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \quad (2.11)$$

olarak değerleri bulunur. Lineer $Ax = B$ denklemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer Kuralı denir (Çelik, 2002).

$$\textbf{Tanım 2.5: } y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \quad (2.12)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferensiyel denklem denir. Görüldüğü gibi eşitliğin sağ tarafındaki r ve sol tarafta ki $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ katsayıları x değişkenine bağlıdır. $r(x) \equiv 0$, olması durumunda (2.12) denklemi homojen, $r(x) \not\equiv 0$ olması durumunda ise (2.12) denklemi homojen olmayan denklem olarak adlandırılır (Kreyszig, 2006).

Tanım 2.6: $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu reel Euclid uzayı, $U \subset \mathbb{R}$, $m \geq 1$ ve F fonksiyonu; $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n^{m-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ve $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$F(D^m u(x), D^{m-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, (x \in U) \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilen bir denkleme, m . mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklem denir. Bu denklemin çözümü, ∂U , U 'nin sınırı olmak üzere, belirli sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar arasından (2.13) denklemini sağlayan tüm u 'ların bulunması olarak tanımlanabilir (Evans, 1998).

Tanım 2.7: F fonksiyonu, $F : \mathbb{R}^{\ell n^m} \times \mathbb{R}^{\ell n^{m-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell n} \times \mathbb{R}^{\ell} \times U \rightarrow \mathbb{R}^{\ell}$ ve $u : U \rightarrow \mathbb{R}^{\ell}$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^{\ell})$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$F(D^m u(x), D^{m-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, (x \in U) \quad (2.14)$$

denklem sistemine, m . mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklem sistemi denir (Evans, 1998).

Tanım 2.8: k tane $x_1, x_2, \dots, x_k$ bağımsız değişkeni, $n \geq 1$ olmak üzere, sırasıyla $j_1, j_2, \dots, j_n$ değişkenlerine sahip $F_1, F_2, \dots, F_n$ bilinmeyen fonksiyonlarını ve sınırlı sayıda bilinen fonksiyon içeren A_1 ve A_2 terimlerinin arasındaki,

$$A_1 = A_2 \quad (2.15)$$

şeklindeki ilişkiye fonksiyonel denklem denir (Aczél, 1966).

Örnek 2.1: Aşağıdaki denklemler, fonksiyonel denklemlere örnek olarak verilebilir:

$$(a) \quad f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2.16)$$

$$(b) \quad f(x)^2 = f(x+y)f(x-y) \quad (2.17)$$

$$(c) \quad F(xz, yz) = z^k F(x, y), \quad (k = \text{sabit}) \quad (2.18)$$

$$(d) \quad F[G(x, y), z] = H[J(x, z), K(y, z)] \quad (2.19)$$

Tanım 2.10: p denklemlerin sayısını ve n sistemdeki fonksiyonların sayısını göstermek üzere, $n \geq 1$ tane bilinmeyen fonksiyonu içeren $p \geq 2$ tane fonksiyonel denklemin oluşturduğu sisteme, fonksiyonel denklem sistemi denir (Aczél, 1966).

Örnek 2.2: Aşağıdaki denklemler, fonksiyonel denklem sistemine örnek olarak verilebilir:

$$(a) \quad \left. \begin{aligned} F_1(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ F_2(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ F_n(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} F_{ij}(x, z) &= F_{i1}(x, y)F_{1j}(y, z) + F_{i2}(x, y)F_{2j}(y, z) + \dots + F_{in}(x, y)F_{nj}(y, z) \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.21)$$

Tanım 2.12: f fonksiyonu reel değerli bir fonksiyon olsun;

i) a noktasını içeren herhangi bir açık aralıkta, f fonksiyonunun a noktasında türevi varsa

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilir ve f , a noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

ii) f fonksiyonunun açık aralıktaki herhangi bir noktada türevi varsa, f fonksiyonu diferensiyellenebilirdir denir (Wade, 2000).

Tanım 2.13: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa ,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots \quad (2.23)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = c'$ deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclauren serisi adı verilir (Çelik, 2002).

Tanım 2.14: $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, negatif olmayan α_i tamsayıları için,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (2.24)$$

biçiminde ifade edilen vektör multiindex olarak tanımlanır. Verilen bir α multiindexi için

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ için, k . mertebeden bütün kısmi türevli diferensiyel denklemlerin ailesi, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ olmak üzere,

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\} \quad (2.26)$$

biçiminde ifade edilir (Evans, 1998).

Tanım 2.15: $|x - x_0| < r$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_k f_k (x - x_0)^k \quad (2.27)$$

olacak şekilde, bir $r > 0$ ve $\{f_k\}$ sabitleri varsa, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna x_0 civarında analitik fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu x_0 civarında analitik ise, f fonksiyonuna C^∞ sınıfındandır veya C^∞ diferensiyellenebilirdir denir. (2.27) ifadesinde f_k sabitleri, $k! = k_1! k_2! \cdots k_n!$ olmak üzere,

$$f_k = \frac{D^k f(x_0)}{k!} \quad (2.28)$$

biçiminde hesaplanabilir (Evans, 1998).

Tanım 2.16: $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ analitik fonksiyonu dikkate alındığında, $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$ kümesine $u(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki spektrumu denir (Kiriş, 2007).

Tanım 2.17: $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ analitik fonksiyonunun $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$ spektrum ayrışımına diferensiyel dönüşüm denir. Burada $u(x)$ orijinal fonksiyon, $\{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$ fonksiyonu ise dönüşmüş fonksiyon olarak tanımlanır (Kiriş, 2007).

Tanım 2.18: $x > 0$ için,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.29)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir (Bell, 1968). (2.29) ifadesi sadece $x > 0$ için tanımlıdır.

Teorem 2.1: $\Gamma(1) = 1$ dir.

İspat 2.1: (2.29) tanımından,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (2.30)$$

Bulunur (Bell, 1968).

Teorem 2.2: $x > 0$ olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olur.

İspat 2.2: (2.29) tanımından,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \quad (2.31)$$

(2.31) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(x+1) = \left[(-e^{-t}) t^x \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) x t^{x-1} dt = 0 + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x) \quad (2.32)$$

olarak elde edilir (Bell, 1968).

Teorem 2.3: $x > 0$ tam sayı olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x!$ olur.

İspat 2.3: Teorem 2.2 den, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 2.2'yi tekrar kullanırsak,

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)\Gamma(x-1) \quad (2.33)$$

bulunur. Teorem 2.2'yi tekrar kullanırsak,

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)(x-3)\dots 3.2.1.\Gamma(1) \quad (2.34)$$

$$= x!\Gamma(1) = x! \quad (2.35)$$

olarak elde edilir (Bell, 1968). Gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir: (Andrews, Askey ve Roy, 2000):

$$\text{a) } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.36)$$

$$\text{b) } \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (0 < p < 1) \quad (2.37)$$

$$\text{c) } \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}, \quad (n < 0) \quad (2.38)$$

Tanım 2.19: e^z üstel fonksiyonunun kuvvet serilerinin genelleştirilmesi sonucu elde edilen,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.39)$$

fonksiyonu Mittag-Leffler fonksiyonu olarak tanımlanır (Benghorbal, 2004). $\alpha = 1$ için,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \quad (2.40)$$

elde edilir. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.41)$$

biçiminde tanımlanır. $\alpha = 2$, $\beta = 1$ ve $z \leftrightarrow -z^2$ için,

$$E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \cos z \quad (2.42)$$

ifadesi elde edilir (Benghorbal, 2004).

2.1 Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle uyuşmayan bir çok tanımı literatürde mevcuttur. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ve varyantları yada belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Bu tanımlar arasındaki temel fark ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Li, 2003). Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville türev tanımıdır. Çalışmamızda başlangıç koşullarını içeren kesirli diferensiyel denklemlerin çözümü esas alındığından, bu tip problemler için daha kullanışlı olan Caputo türev tanımı kullanılmıştır. Caputo türev tanımında, Riemann-Liouville türev tanımından yararlanıldığı için önce Riemann-Liouville integral ve türev tanımları verilip, daha sonra Caputo türev tanımı verilecektir.

2.1.1 Riemann-Liouville Kesirli Türevleri ve Kesirli İntegralleri

Bazı kaynaklarda, Riemann-Liouville integral ve türev tanımları ve teoremleri detaylı bir şekilde verilmiştir (Kilbas, vd., 2006; Oldham, vd., 1974; Ross ve Miller, 1993). Biz sadece çalışmamızda kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.20: $x > 0$ ve $f(x)$ fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0, \infty)$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > \alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ reel sayısı varsa, $f(x)$ reel fonksiyonuna C_α 'dadır denir. Eğer $m \in \mathbb{N}$ ve $f^m \in C_\alpha$ ise, bu taktirde $f(x)$ reel fonksiyonuna C_α^m 'dadır denir (Odibat ve Shawagfeh, 2007).

Tanım 2.21: $a \geq 0$ için, α . mertebeden ($\alpha > 0$) Riemann-Liouville integral operatörü,

$$(J_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x > a \quad (2.43)$$

$$(J_a^0 f)(x) = f(x). \quad (2.44)$$

biçiminde tanımlanır. $f \in C_\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$a) (J_a^\alpha J_a^\beta f)(x) = (J_a^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (2.45)$$

$$b) \left(J_a^\alpha J_a^\beta f \right)(x) = \left(J_a^\beta J_a^\alpha f \right)(x) \quad (2.46)$$

$$c) J_a^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} \quad (2.47)$$

Tanım 2.22: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü, 4. bölümde (4.10)'da verildiği gibi $\alpha > 0$, $a \in \mathfrak{R}$, $x > a$ ve $m-1 < \alpha \leq m$ için,

$$(\widehat{D}_a^\alpha f)(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \right] \text{ biçimindedir.}$$

2.1.2 Caputo Kesirli Türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo, 1967; Kılbas, vd., 2006). Bu yüzden, sadece çalışmamızda kullanacağımız özellikler verilecektir.

Tanım 2.23: $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $f \in C_{-1}^m$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$(D_a^\alpha f)(x) = (J_a^{m-\alpha} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^m(t) dt \quad (2.48)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_\alpha^m$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere, Caputo türev tanımına ait,

$$a) (D_a^\alpha J_a^\alpha f)(x) = f(x) \quad (2.49)$$

$$b) (J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^k(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad a \geq 0 \quad (2.50)$$

özellikleride verilebilir.

Tanım 2.25: m tamsayısı α 'dan büyük en küçük tamsayı yada α 'ya eşit olmak üzere, α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo zaman-kesirli türev operatörü,

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x,\tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & \text{for } m-1 < \alpha < m \\ \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}, & \text{for } \alpha = m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.51)$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.3 Kesirli Diferensiyel Denklemler

Bu bölümde, kesirli diferensiyel denklemler, kesirli diferensiyel denklemlerin tanımları , varlık ve teklik teoremleri verilecektir. Sonuçlarla ilgili ispatlar verilmeyecektir, ispatlar Podlubny tarafından detaylı olarak verilmiştir (Podlubny, 1999). Aksi belirtilmedikçe, D^α Caputo türev operatörünü temsil etmektedir.

Tanım 2.26: Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferensiyel denklem denir. Yani, kesirli diferensiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferensiyel denklemlerdir (Benghorbal, 2004).

Örnek 2.3: Aşağıdaki gibi

$$xD^{1/2}y(x) - D^{2/3}y(x) - y(x) = \sin(x) \quad (2.52)$$

biçiminde verilen (2.52) denklemi bir kesirli diferensiyel denklemdir. Kesirli diferensiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

a) Adi kesirli diferensiyel denklemler. Örneğin,

$$D^{1/3}y(x) + 5y^2(x) = 3 \quad (2.53)$$

$$D^{1/2}y(t) + D^{1/2}x(t) = t \quad (2.54)$$

$$D^{3/2}y(x) + D^{1/2}y(x) - 2y(x) = 0 \quad (2.55)$$

denklemleri adi kesirli diferensiyel denklemlerdir (Podlubny, 1999).

b) Kısmi kesirli diferensiyel denklemler. Örneğin,

$$D_t^{1/2}u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.56)$$

denklemi bir kısmi kesirli diferensiyel denklemdir (Podlubny, 1999).

Başka bir sınıflandırma ise, lineerliliğe ya da non-lineerliliğe göre yapılan sınıflandırma türüdür. Bir kesirli diferensiyel denklem eğer;

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \cdots + a_1(x)D^{\alpha_1}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (2.57)$$

biçiminde ise lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. (2.57) denkleminde; D^{α_i} , ($i = 1, 2, \dots, n$) kesirli diferansiyel operatörüdür ve lineerdir. Dikkat edilirse, lineer kesirli diferansiyel denklemlerin iki özelliği göze çarpmaktadır:

i) Bağımlı değişken y ve y 'nin kesirli türevleri birinci derecedendir. Yani, y bağımlı değişkenini içeren her terimin kuvveti 1'dir.

ii) Her terimin katsayısı yalnız x bağımsız değişkenine bağlıdır (Benghorbal, 2004).

Buna göre, lineer olmayan bir kesirli diferansiyel denklem non-lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanımlardan hareketle;

$$x^3 D^{3/2}y(x) + y(x) = e^x \quad (2.58)$$

$$D^{2q}y(x) + D^qy(x) - y(x) = 0 \quad (2.59)$$

denklemleri lineerdir. Fakat;

$$D^{2/3}y(x) = y^2(x) \quad (2.60)$$

$$y(x)D^{3/2}y(x) + D^{3/5}y(x) = x^3 \quad (2.61)$$

denklemleri nonlineerdir (Benghorbal, 2004).

Tanım 2.27: Kesirli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebedeki türeve denklemin mertebesi denir. Örneğin,

$$y(x)D^{7/3}y(x) + (D^{3/5}y(x))^2 = (x+1)^2 \quad (2.62)$$

denklemini bir $\frac{7}{3}$. mertebeden nonlinear adi diferansiyel denklemdir (Benghorbal, 2004).

Tanım 2.28: $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n$ ve başlangıç koşulları, $y^{(k)}(a) = y_k$, $k = 1, 2, \dots, \lceil q_n \rceil - 1$ olmak üzere,

$$D^{q_n}y(x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}(x)D^{q_{n-i}}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (2.63)$$

biçimindeki kesirli diferansiyel denklemin çözümü başlangıç-değer problemi olarak

adlandırılır (Benghorbal, 2004). Başlangıç-değer problemi göz önüne alındığında aşağıdaki üç temel soru ortaya çıkmaktadır:

i) Problemin bir çözümü var mıdır?

ii) Eğer bir çözüm varsa tek midir?

iii) Varolan çözüm sürekli olarak parametrelere mi yoksa başlangıç koşullarına mı bağlıdır?

İlk iki sorunun cevabı aşağıdaki teoremler tarafından verilmiştir. İlk teorem (2.63) denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlamaktadır. Diğer teorem ise,

$$D^{q_n} y(x) = f(x, y), \quad (2.64)$$

$$y^{(k)}(a) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, \lceil q_n - 1 \rceil. \quad (2.65)$$

şeklindeki daha genel kesirli diferensiyel denklemlerle ilgilidir (Benghorbal, 2004).

Teorem 2.4: Eğer $f(x) \in L_1(a, b)$, ve $a_{n-j} (j = 1, 2, \dots, n)$, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar ise, (2.63)-(2.64) başlangıç-değer probleminin tek bir $y(x) \in L_1(a, b)$ çözümü vardır (Benghorbal, 2004).

Açıklama 2.1: $f(x) \in L_1(a, b)$ ifadesi, $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$, $(a < x < b < \infty)$ ifadesine denktir.

Teorem 2.5: D , R^2 'nin bir alt kümesi ve $f(x, y)$ fonksiyonunda y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Yani,

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq A|y - z|, \text{ öyle ki, } |f(x, y)| \leq M < \infty \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2.66)$$

Bu durumda $G \subset D$ bölgesinde (2.64)-(2.65) probleminin sürekli ve bir tek $y(x)$ çözümü vardır (Benghorbal, 2004).

3. ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ

Adomian ayrıştırma yöntemi (Adomian, 1992, 1994) literatürde problemlerin seri çözümleri için en çok başvurulan yöntemlerden biri olarak görülmektedir. Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY), farklı türdeki lineer ve non-lineer diferensiyel ve integral denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri için kullanılmıştır.

Adomian ayrıştırma yöntemi, lineer olmayan

$$F(x, u(x)) = 0 \quad (3.1)$$

denklemini

$$L(u(x)) + N(u(x)) = 0 \quad (3.2)$$

olacak şekilde iki bileşene ayrıştırma mantığına dayalıdır (Allan, 2007). (3.2) denkleminde L ve N sırasıyla F 'nin lineer ve non-lineer kısımlarıdır. L operatörü, L^{-1} ters dönüşümü elde edilebilen bir operatördür. (3.3) denklemini $L(u(x))$ için çözülürse

$$L(u(x)) = -N(u(x)) \quad (3.3)$$

elde edilir. L^{-1} ters operatörü (3.3) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$u = -L^{-1}(N(u)) + \varphi(x) \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir. $\varphi(x)$, $L(\varphi) = 0$ şartını sağlayan integrasyon sabitidir. u çözümünün

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3.5)$$

şeklinde elde edileceği kabul edilirse, $N(u)$ non-lineer terimi A_n Adomian polinomlarının terimlerini içeren

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.6)$$

seri formatında yazılabilir. A_n Adomian polinomları,

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.7)$$

yada

$$\begin{aligned}
A_0 &= N(u_0), \\
A_1 &= u_1 N'(u_0), \\
A_2 &= u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 N''(u_0), \\
A_3 &= u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3} u_1^3 N'''(u_0), \\
A_4 &= u_4 N'(u_0) + (u_1 u_3 + \frac{1}{2} u_2^2) N''(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 N'''(u_0) + \frac{1}{24} u_1^4 N^{(iv)}(u_0).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edilir. (3.5) ve (3.6) denklemlerini, (3.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \varphi(x) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.5) denkleminde verilen çözümün $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \varphi(x) \\ u_{n+1} &= -L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

şeklindeki iterasyon formülü elde edilir.

Örnek 3.1

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B. \tag{3.11}$$

başlangıç koşulları ile verilen

$$e^x u'' + xu = 0 \tag{3.12}$$

diferensiyel denklemini (Boyce ve DiPirima, 1997) Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) ile çözelim. (3.2) denklemini kullanılırsa, (3.12) denklemini

$$L_{xx} u = -x e^{-x} u \tag{3.13}$$

şeklinde operatör formunda yazılabilir. Burada L_{xx}

$$L_{xx} = \frac{d^2}{dx^2} \tag{3.14}$$

şeklinde 2. mertebeden diferensiyel operatör olarak tanımlanır. Buna göre L_{xx}^{-1} ters operatörü

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.) dx dx \quad (3.15)$$

olarak verilir. L_{xx}^{-1} ters operatörü (3.12) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$u(x) = A + Bx - L_{xx}^{-1}(xe^{-x}u). \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.5) denklemini (3.16) denkleminin her iki tarafında yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + Bx - L_{xx}^{-1} \left(xe^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right). \quad (3.17)$$

elde edilir. Adomian ayrıştırma yöntemine göre

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A + Bx, \\ u_{n+1}(x) &= -L_{xx}^{-1} \left(xe^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

iterasyon formülü elde edilir (Wazwaz, 1998). Buna göre,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A + Bx, \\ u_1(x) &= -L_{xx}^{-1} \left(xe^{-x} u_0 \right) = -L_{xx}^{-1} \left(A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \right) \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)(n+2)n!} x^{n+3} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)(n+3)n!} x^{n+4} \\ &= -A \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{40} x^5 - \dots \right) - B \left(\frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{60} x^6 - \dots \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Buradan,

$$u(x, t) = A \left(1 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{40} x^5 + \dots \right) + B \left(x - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{20} x^5 - \frac{1}{60} x^6 + \dots \right) \quad (3.20)$$

çözümü elde edilir (Wazwaz, 1998).

Örnek 3.2

Başlangıç ve sınır şartları ,

$$\begin{aligned} u(0, t) &= f_1(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= f_2(t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= s(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

olarak verilen

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + g(t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 2, \quad (3.22)$$

formatındaki uzay-kesirli telegraph denklemini ele alalım. $L_t = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ kesirli türev operatörü,

$D_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ Caputo'ya göre α mertebeli türevi ve J^α da D_x^α Caputo türev operatörünün

ters türev operatörü olarak tanımlanırsa; (3.22) denklemi operatör formunda

$$D_x^\alpha u = L_t u + u_t + u + g(t) \quad (3.23)$$

şeklinde ifade edilebilir (Momani, 2005). (3.23) denkleminin her iki tarafına J^α Riemann-Liouville kesirli integral operatörü uygulanırsa,

$$u(x, t) = u(0, t) + x u_x(0, t) + J^\alpha [L_t u + u_t + u + g(t)]. \quad (3.24)$$

elde edilir. Adomian ayrıştırma yöntemine göre $u(x, t)$ için seri çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.25)$$

olarak verilir. (3.25) denklemini (3.24) denkleminin her iki tarafında yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(0, t) + x u_x(0, t) + J^\alpha \left[L_t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right)_t + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) + g(t) \right]. \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.21) başlangıç koşullarını (3.26) denkleminde yerine yazıp, başlangıç koşullarına ve $g(t)$ kaynak fonksiyonuna göre u_0 terimini ve iterasyon formülünü

$$\begin{aligned}
u_0 &= f_1(t) + xf_2(t) + J^\alpha g(t) \\
u_{n+1} &= J^\alpha \left[L_t u_n + (u_n)_t + u_n + g(t) \right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

olarak elde ederiz. Yukarıda verilenlere göre, başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{aligned}
u(0, t) &= t, \quad t \geq 0, \\
\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \quad t \geq 0, \\
u(x, 0) &= x^2, \quad 0 < x < 1,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde verilen

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - x^2 - t + 1, \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \tag{3.29}$$

homojen olmayan zaman-kesirli telegraph denklemini ele alalım. (3.27) iterasyon formülüne göre $u(x, t)$ seri çözümünün ilk terimleri

$$\begin{aligned}
u_0 &= t + J^\alpha (-x^2 - t + 1) = t - \frac{2x^{2+\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)} + (1-t) \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\
u_1 &= J^\alpha \left[L_t u_0 + (u_0)_t + u_0 \right] = (1+t) \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - t \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{2x^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)}, \\
u_2 &= J^\alpha \left[L_t u_1 + (u_1)_t + u_1 \right] = (2+t) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - (1+t) \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2x^{3\alpha+2}}{\Gamma(3\alpha+1)}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak elde edilir. Buna göre $u(x, t)$ seri çözümü

$$u(x, t) = t - \frac{2x^{2+\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)} + (1-t) \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (1+t) \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - t \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \dots \tag{3.31}$$

olarak elde edilir (Momani, 2005).

Örnek 3.1 ve örnek 3.2 den görüldüğü gibi, seri çözümüne ait terimlerin bulunması için Adomian ayrıştırma yöntemi uygulandığında, normal diferensiyel denklem ve kesirli diferensiyel denklemde kullanılan türev operatörleri ve ters türev operatörlerinin sadece türü değişmektedir. Yani, farklı olarak, kesirli diferensiyel denklemler için kesirli türev ve ters kesirli türev operatörü uygulanırken, normal diferensiyel denklemler için ise normal türev ve ters türev operatörü uygulanmaktadır.

Adomian ayrıştırma yöntemi, Wazwaz ve El-Sayed tarafından daha kullanışlı bir hale getirilmiştir. (Wazwaz, 2000; Wazwaz ve El-Sayed, 2001). Ayrıştırma yöntemi ile elde edilen seri çözümleri, çok hızlı bir şekilde yakınsamaktadırlar. Bu yöntemle elde edilen seri çözümlerinin yakınsaklığı, Adomian ve Cherruault tarafından araştırılmıştır (Cherruault, 1989; Cherruault ve Adomian, 1993). Daha sonraki çalışmalarında, Abbaoui ve Cherruault, bu yöntemle elde edilen seri çözümlerinin yakınsaklıkları için yeni yaklaşımlar önermişlerdir (Abbaoui ve Cherruault, 1996).

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodu (GDDM), Diferensiyel dönüşüm metodu (DDM), genelleştirilmiş Taylor formülü ve Caputo türev tanımı temel alınarak geliştirilmiştir. Caputo türev tanımı ile ilgili bilgiler, tanımlar ve teoremler bölümünde, 2.bölümde, verilmiştir. Bu bölümde diferensiyel dönüşüm metodu (DDM) ve genelleştirilmiş Taylor formülü ile ilgili tanımlar ve teoremlerden yararlanarak, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodunun temel tanım ve teoremleri verilecektir.

4.1 Diferensiyel Dönüşüm yöntemi

Diferensiyel dönüşüm metodu (DDM) ilk kez Zhou tarafından elektirik devre analizinde ortaya çıkan lineer ve nonlinear başlangıç değer probleminin çözümünde kullanılmıştır (Zhou, 1986).

4.1.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminde $y(x)$ asıl(orijinal) fonksiyon, $Y(k)$ da $T - \text{fonksiyonu}$ olarak adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur (Ayaz, 2004).

$Y(k)$ 'nın diferensiyel ters dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır.(4.1) ve (4.2) denklemlerinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (4.3)$$

elde edilir.(4.3) denklemi, diferensiyel dönüşümün (transform) Taylor serisi açılımından türetildiği düşüncesini akla getirmektedir. Fakat bu metot sembolik olarak türevleri hesaplamamaktadır. Bununla beraber, hesaplamalar için gerekli türevler, aşağıdaki çizelge 4.1 de görüldüğü gibi asıl (orijinal) fonksiyonların dönüşüm denklemleri olarak tarif edilen bir iteratif yöntemle hesaplanırlar (Ayaz, 2004).

Çizelge 4. 1 Bir boyutlu diferensiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri

Asıl (Orijinal) fonksiyon	Dönüşüm (transform) fonksiyonu
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = cw(x)$	$Y(k) = cW(k)$
$y(x) = dw/dx$	$Y(k) = (k+1)W(k+1)$
$y(x) = d^j w/dx^j$	$Y(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+j)W(k+j)$
$y(x) = u(x)v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$y(x) = x^j$	$Y(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

4.1.2 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

$w(x, y)$ asıl(orijinal) fonksiyon olmak üzere,

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{0,0} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanan $W(k, h)$ fonksiyonuna dönüşüm (transform) fonksiyonu denir. $W(k, h)$

T – *fonksiyonu* olarak adlandırılır. $W(k, h)$ 'ın diferensiyel ters dönüşümü ise,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (4.5)$$

olarak tanımlanır.(4.4) ve (4.5) denklemlerinden

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{0,0} x^k y^h \quad (4.6)$$

denklemini elde edilir (Ayaz, 2003). İki boyutlu diferensiyel dönüşüme (transform) ait temel işlemler çizelge 4.2 de gösterilmiştir.

Çizelge 4. 2 İki boyutlu diferensiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri

Asıl (Orijinal) fonksiyon	Dönüşüm (transform) fonksiyonu
$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$
$w(x, y) = cu(x, y)$ (c : sabit)	$W(k, h) = cU(k, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$	$W(k, h) = (k+1)(k+2)\cdots(k+r)(h+1)(h+2)\cdots(h+s) \times U(k+r, h+s)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$
$w(x, y) = x^m y^n$	$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n, \\ 0, & k \neq m \text{ ve } h \neq n, \end{cases}$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)w(x, y)$	$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Omega(k-r-t, p)$
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$	$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p) \times V(t+1, s)\Omega(k-r-t+1, p)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$	$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p) \times V(t, s)\Omega(k-r-t+2, p)$

4.2 Genelleştirilmiş Taylor formülü

Klasik Taylor formülü bir çok matematikçi tarafından genelleştirilmiştir. Riemann tarafından

$$f(x+h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} (J_a^{m+r} f)(x), \quad (4.7)$$

şeklinde verilmiştir (Hardy, 1945). J_a^{m+r} , $m+r$ mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral operatörüdür. Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün tanımı 2. bölümde verilmiştir. Watanabe tarafından ise, $m < \alpha$, $x > x_0 \geq a$ ve

$$R_{n,m} = (J_a^{\alpha+n} \hat{D}_a^{\alpha+k})(x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha-m)} \int_0^{x_0} (x-t)^{-\alpha-m-1} (\hat{D}_a^{\alpha-m-1} f)(t) dt, \quad (4.8)$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{m=-m}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} (\hat{D}_a^{\alpha+k} f)(x) + R_{n,m} \quad (4.9)$$

şeklinde genelleştirilmiştir (Watanabe, 1931). $\hat{D}_a^{\alpha+n}$ $\alpha+n$ mertebeli Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü, $\alpha > 0$, $a \in \mathfrak{R}$, $x > a$ ve $m-1 < \alpha \leq m$ için,

$$(\hat{D}_a^\alpha f)(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \right] \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır. Son dönemde, Truilljo, Rivero ve Bonilla tarafından, $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere belirli koşullar altında f fonksiyonu için Taylor formülü,

$$R_n(x, a) = \frac{(\hat{D}_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \cdot (x-a)^{(n+1)\alpha}, \quad a \leq \xi \leq x, \quad (4.11)$$

$$c_j = \Gamma(\alpha) \left[(x-a)^{1-\alpha} \hat{D}_a^{(n+1)\alpha} f(x) \right] (a^+), \quad \forall j = 0, \dots, n \quad (4.12)$$

olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{c_j (x-a)^{(j+1)\alpha-1}}{\Gamma((j+1)\alpha)} + R_n(x, a) \quad (4.13)$$

şeklinde verilmiştir (Truilljo, vd., 1999). Burada $\hat{D}_a^{n\alpha} = \hat{D}_a^\alpha \cdot \hat{D}_a^\alpha \cdots \hat{D}_a^\alpha$ olarak tanımlanır. Yukarıda verilen (4.7), (4.9) ve (4.13) genelleştirilmiş Taylor formüllerinde Riemann-Liouville kesirli türev operatörü kullanılmıştır. Odibat ve Shawagfeh tarafından 2. bölümde verilen Caputo türev tanımı ve aşağıdaki teoremler kullanılarak oluşturulmuştur (Odibat ve Shawagfeh, 2007).

Teorem 4.1: (Genelleştirilmiş ortalama değer teoremi) $0 < \alpha \leq 1$ için $f(x) \in C[a, b]$ ve $D_a^\alpha f(x) \in C(a, b]$ alınırsa,

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha f)(\xi) \cdot (x-a)^\alpha \quad (4.14)$$

olur. Burada $a \leq \xi \leq x$ ve $\forall x \in (a, b]$ dir (Odibat ve Shawagfeh, 2007).

İspat 4.1: (2.43) ve (2.48) den

$$J_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (D_a^\alpha f)(t) dt \quad (4.15)$$

elde edilir. İntegral ortalama değer teoremi kullanılırsa $0 \leq \xi \leq x$ için,

$$(J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha f)(\xi) \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha f)(\xi) \cdot (x-a)^\alpha \quad (4.17)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.50) den,

$$(J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - f(a) \quad (4.18)$$

elde edilir. Yani, (4.17) ve (4.18) den, (4.14) elde edilir (Odibat ve Shawagfeh, 2007). Görüldüğü gibi, $\alpha = 1$ için, genelleştirilmiş ortalama değer teoreminden klasik ortalama değer teoremi elde edilir

Teorem 4.2: $0 < \alpha \leq 1$ için, $D_a^{n\alpha} f(x), D_a^{(n+1)\alpha} f(x) \in C(a, b]$ olsun. Bu durumda,

$$(J_a^{n\alpha} D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} (D_a^{n\alpha} f)(a) \quad (4.19)$$

elde edilir. $D_a^{n\alpha} = D_a^\alpha \cdot D_a^\alpha \cdots D_a^\alpha$ dir.

İspat 4.2: (2.45) ifadesi kullanılırsa,

$$(J_a^{n\alpha} D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = J_a^{n\alpha} ((D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^\alpha D_a^{(n+1)\alpha} f)(x)) \quad (4.20)$$

$$= J_a^{n\alpha} ((D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^\alpha D_a^\alpha)(D_a^{n\alpha} f)(x)) \quad (4.21)$$

$$= J_a^{n\alpha} ((D_a^{n\alpha} f)(a)) \quad (4.22)$$

$$(2.47) \text{ ifadesi kullanılırsa; } = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} ((D_a^{n\alpha} f)(a)) \quad (4.23)$$

elde edilir.

Teorem 4.3: (Genelleştirilmiş Taylor formülü) $0 < \alpha \leq 1$ ve $D_a^{k\alpha} f(x) \in C(a, b]$ olsun, $k = 0, 1, \dots, n+1$ için,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a) + \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \cdot (x-a)^{(n+1)\alpha} \quad (4.24)$$

olur, $\forall x \in (a, b]$, $a \leq \xi \leq x$ ve $\widehat{D}_a^{n\alpha} = \widehat{D}_a^\alpha \cdot \widehat{D}_a^\alpha \cdots \widehat{D}_a^\alpha$ dir.

İspat 4.3: (4.19) ifadesinden,

$$\sum_{i=0}^n (J_a^{i\alpha} D_a^{i\alpha} f)(x) - (J_a^{(i+1)\alpha} D_a^{(i+1)\alpha} f)(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a) \quad (4.25)$$

elde edilir. Yani,

$$f(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a) \quad (4.26)$$

olur. İntegral ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$(J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{(n+1)\alpha} (D_a^{(n+1)\alpha} f)(t) dt \quad (4.27)$$

$$= \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{(n+1)\alpha} dt \quad (4.28)$$

$$= \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \cdot (x-a)^{(n+1)\alpha} \quad (4.29)$$

(4.26) ve (4.29) ifadelerinden, (4.24) elde edilir (Odibat ve Shawagfeh, 2007). $\alpha = 1$ için, (4.24) Caputo genelleştirilmiş Taylor formülü, klasik Taylor formülüne dönüşür.

$$\sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_a^{i\alpha} f)(a) \quad (4.30)$$

Genelleştirilmiş Taylor serileri için R yakınsaklık yarıçapı $f(x)$ fonksiyonuna ve a 'ya bağlıdır ve,

$$R = |x-a|^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \cdot \frac{(D_a^{(n+1)\alpha} f)(a)}{(D_a^{n\alpha} f)(a)} \right| \quad (4.31)$$

olarak verilir. (4.24) Caputo genelleştirilmiş Taylor formülü, (4.10) ve (4.13) Riemann-Liouville genelleştirilmiş Taylor formülleriyle kıyaslandığında, Riemann-Liouville Taylor formülleri $f(x)$ fonksiyonu için daha çok şart gerektirmektedir. Caputo genelleştirilmiş Taylor formülünde, katsayıların daha basit ve hesaplanmasının da daha kolay olduğu görülebilir. Ayrıca son zamanlarda, Caputo kesirli türev tanımının bir çok fizik ve mühendislik problemlerinde, Riemann-Liouville kesirli türev tanımından daha çok kullanıldığı görülmektedir (Gorenflo ve Mainardi, 1997). Çünkü problemin formülasyonunda başlangıç ve sınır koşullarının da dahil edilmesine izin vermektedir.

4.3 Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Konunun daha iyi anlaşılması için, bir boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodunun teoremleri ve temel işlemleri verildikten sonra, iki boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodunun teoremleri ve temel işlemleri verilecektir.

4.3.1 Bir Boyutlu Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun k . mertebeden türevinin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşümü, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^k f(x) \right]_{x=x_0} \quad (4.32)$$

olarak tanımlanır (Ertürk, Momani ve Odibat, 2008). $D_a^{k\alpha} = D_a^\alpha \cdot D_a^\alpha \cdots D_a^\alpha$ (k defa) şeklinde tanımlanır. $F_\alpha(k)$ 'nin diferensiyel ters dönüşümü

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k) (x-x_0)^{\alpha k} \quad (4.33)$$

şeklinde tanımlanır. (4.32) ifadesindeki $F_\alpha(k)$ (4.33) ifadesinde yerine yazılıp

(4.24) genelleştirilmiş Taylor formülü kullanılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{\alpha}(k)(x-x_0)^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \left((D_{x_0}^{\alpha})^k f \right)(x_0) = f(x) \quad (4.34)$$

elde edilir. Yani, (4.32) genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm ifadesinin ters dönüşümü (4.33) ifadesidir. (4.34) ifadesi kullanılırsa, $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık değeri sınırlı seri formatında

$$f(x) = \sum_{k=0}^n F_{\alpha}(k)(x-x_0)^{\alpha k} \quad (4.35)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\alpha=1$ olması durumunda (4.32) genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm ifadesinden, klasik diferensiyel dönüşüm ifadesinin elde edileceği görülebilir. (4.32) ve (4.33) tanımları temel alınarak tek boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşümün temel özellikleri aşağıda verilmiştir (Odibat, Momani ve Ertürk, 2008).

Teorem 4.4: Eğer $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ise; $F_{\alpha}(k) = G_{\alpha}(k) \pm H_{\alpha}(k)$ olur.

Teorem 4.5: Eğer $f(x) = ag(x)$ ise; $F_{\alpha}(k) = aG_{\alpha}(k)$ olur.

Teorem 4.6: Eğer $f(x) = g(x)h(x)$ ise; $F_{\alpha}(k) = \sum_{l=0}^k G_{\alpha}(l)H_{\alpha}(k-l)$ olur.

İspat 4.6: (4.33) tanımından

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n G_{\alpha}(k)(x-x_0)^{\alpha k} \times \sum_{k=0}^n H_{\alpha}(k)(x-x_0)^{\alpha k}, \\ &= \left(G_{\alpha}(0) + G_{\alpha}(1)(x-x_0)^{\alpha} + G_{\alpha}(2)(x-x_0)^{2\alpha} + \dots \right) \left(H_{\alpha}(0) + H_{\alpha}(1)(x-x_0)^{\alpha} + H_{\alpha}(2)(x-x_0)^{2\alpha} + \dots \right) \\ &= G_{\alpha}(0)H_{\alpha}(0) + \left(G_{\alpha}(0)H_{\alpha}(1) + G_{\alpha}(1)H_{\alpha}(0) \right)(x-x_0)^{\alpha} + \left(G_{\alpha}(0)H_{\alpha}(2) + G_{\alpha}(1)H_{\alpha}(1) \right. \\ &\quad \left. + G_{\alpha}(2)H_{\alpha}(0) \right)(x-x_0)^{2\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k G_{\alpha}(l)H_{\alpha}(k-l)(x-x_0)^{\alpha k}, \end{aligned}$$

genelleştirilmiş diferensiyel dönüşümün tanımından,

$$= \sum_{l=0}^k G_{\alpha}(l)H_{\alpha}(k-l).$$

elde edilir (Odibat, vd., 2008).

Teorem 4.7: Eğer $f(x) = D_{x_0}^\alpha g(x)$ ise; $F_\alpha(k) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} G_\alpha(k+1)$ olur.

İspat 4.7: (4.32) tanımından,

$$\begin{aligned} F_\alpha(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^k D_{x_0}^\alpha g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^{k+1} D_{x_0}^\alpha g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^{k+1} g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} G_\alpha(k+1). \end{aligned}$$

Teorem 4.8: Eğer $f(x) = (x-x_0)^{n\alpha}$ ise; $F_\alpha(k) = \delta(k-n)$ olur. $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$.

İspat 4.8: (4.33) tanımından, $f(x) = (x-x_0)^{n\alpha}$ ifadesi,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-n)(x-x_0)^{\alpha k}$$

şeklinde yazılabilir. (4.32) ters diferensiyel dönüşüm ifadesi kullanılırsa,

$F_\alpha(k) = \delta(k-n)$ elde edilir (Odibat, vd., 2008).

$\lambda > -1$ için $f(x) = x^\lambda g(x)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için $g(x)$ fonksiyonu da $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^{n\alpha}$ genelleştirilmiş Taylor açılımına sahip olduğunda, $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa;

(a) $\beta < \lambda + 1$ ve α keyfi bir değer

(b) $\beta \geq \lambda + 1$ ve γ keyfi bir değer, $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ ve $m-1 < \beta \leq m$.

Bu durumda, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm

$$F_{\alpha}(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[\left(D_{x_0}^{\alpha} \right)^{\alpha k} f(x) \right]_{x=x_0} \quad (4.36)$$

olur. (4.36) ifadesi, β . dereceden ($\beta > 1$) kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için çok yararlı olan aşağıdaki sonuca ulaşmamızı sağlar (Odibat, vd., 2008).

Teorem 4.9: Eğer $f(x) = D^{\beta} g(x)$, $m-1 < \beta \leq m$ ve $g(x)$ (4.8) ispatında ki şartları sağlıyorsa,

$$F_{\alpha}(k) = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} G_{\alpha}(k + \beta / \alpha) \quad (4.37)$$

olur (Odibat, Momani ve Ertürk, 2008).

İspat 4.9: (4.36) ifadesinden,

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[D^{\alpha k} D^{\beta} g(x) \right]_{x=x_0}, \quad D_a^{\gamma} D_a^{\beta} f(x) = D_a^{\gamma+\beta} f(x) \text{ olduğundan} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[D^{\alpha k + \beta} g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \left[D^{\alpha k + \beta} g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} G_{\alpha}(k + \beta / \alpha). \end{aligned}$$

$$\textbf{Örnek 4.1: } D^{\alpha} y(x) = y^2(x) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < x < 1, \quad (4.38)$$

non-lineer kesirli diferensiyel denklemi

$$y(0) = 0 \quad (4.39)$$

başlangıç şartıyla verilmiş olsun (Odibat, 2008). (4.6) ve (4.7) teoremlerini kullanarak, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm (4.38) diferensiyel denkleminin her iki tarafına uygulanırsa, (4.38) diferensiyel denklemi,

$$\frac{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} Y_{\alpha}(k + 1) = \sum_{l=0}^k Y_{\alpha}(l) Y_{\alpha}(k - l) + \delta(k) \quad (4.40)$$

$$Y_{\alpha}(k+1) = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left\{ \sum_{l=0}^k Y_{\alpha}(l) Y_{\alpha}(k-1) + \delta(k) \right\} \quad (4.41)$$

denklemine dönüşür. (4.39) başlangıç koşulunun genelleştirilmiş diferensiyel dönüşümü

$$Y_{\alpha}(0) = 0 \quad (4.42)$$

olarak verilir. (4.41) rekürens formülü ve (4.42) dönüştürülmüş başlangıç koşulu kullanılırsa genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm çözümüne ait ilk terimlerin bir kısmı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_{\alpha}(0) = 0, \quad Y_{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

$$Y_{\alpha}(2) = 0, \quad Y_{\alpha}(3) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)},$$

$$Y_{\alpha}(4) = 0, \quad Y_{\alpha}(5) = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)^3} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)}$$

$$Y_{\alpha}(6) = 0, \quad Y_{\alpha}(7) = \left\{ \frac{4\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)^2}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \right\} \frac{\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^4 \Gamma(7\alpha + 1)}.$$

(4.38) denklemine ait $y(x)$ çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot x^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot x^{3\alpha} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)^3} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} \cdot x^{5\alpha} \\ & + \left\{ \frac{4\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)^2}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \right\} \frac{\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^4 \Gamma(7\alpha + 1)} \cdot x^{7\alpha} \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Odibat, vd., 2008).

4.3.2 İki Boyutlu Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Bir önceki bölümde gösterildiği gibi, bir boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodu, bir boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunun ve genelleştirilmiş Taylor formülü temel alınarak geliştirilmiştir. Aynı şekilde iki boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm (transform) metodu da, iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu ve genelleştirilmiş Taylor formülü temel alınarak geliştirilmiştir (Odibat ve Momani, 2008a).

İki değişkenli $u(x, y)$ fonksiyonunun, $u(x, y) = f(x)g(y)$ olacak şekilde, tek değişkenli iki

fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini kabul edelim. İki boyutlu diferensiyel dönüşümün temel işlemleri temel olarak alınırsa $u(x, y)$ fonksiyonu, $0 < \alpha$ ve $\beta \leq 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{\alpha}(k)(x-x_0)^{k\alpha} \sum_{h=0}^{\infty} G_{\beta}(h)(y-y_0)^{h\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} U_{\alpha,\beta}(k, h)(x-x_0)^{k\alpha} (y-y_0)^{h\beta}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

olarak ifade edilebilir. $U_{\alpha,\beta}(k, h) = F_{\alpha}(k)G_{\beta}(h)$, $u(x, y)$ fonksiyonunun spektrumu olarak adlandırılır. $u(x, y)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşümü

$$U_{\alpha,\beta}(k, h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)} \left[\left(D_{x_0}^{\alpha} \right)^k \left(D_{y_0}^{\beta} \right)^h u(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} \quad (4.44)$$

şeklinde verilir. $(D_{x_0}^{\alpha})^k = D_{x_0}^{\alpha} \cdot D_{x_0}^{\alpha} \cdots D_{x_0}^{\alpha}$ (k defa) şeklinde ifade edilir. Bu çalışmada, küçük harfle gösterilen $u(x, y)$ orijinal fonksiyonu, büyük harfle gösterilen $U_{\alpha,\beta}(k, h)$ dönüşüm (transformed) fonksiyonunu temsil etmektedir. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ olması durumunda, (4.43) ve (4.44) genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımlarından, klasik iki boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımlarının elde edileceği açıktır. (4.43) ve (4.44) genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımları temel alınır, aşağıdaki sonuçlar elde edilir (Momani ve Odibat, 2008).

Teorem 4.10: $U_{\alpha,\beta}(k, h)$, $V_{\alpha,\beta}(k, h)$ ve $W_{\alpha,\beta}(k, h)$ sırasıyla $u(x, y)$, $v(x, y)$ ve $w(x, y)$ fonksiyonlarının diferensiyel dönüşümleri olsun. Buna göre,

a) Eğer $u(x, y) = v(x, y) \pm w(x, y)$ ise $U_{\alpha,\beta}(k, h) = V_{\alpha,\beta}(k, h) \pm W_{\alpha,\beta}(k, h)$ olur.

b) Eğer $u(x, y) = av(x, y)$, $a \in \mathfrak{R}$ ise, $U_{\alpha,\beta}(k, h) = aV_{\alpha,\beta}(k, h)$ olur.

c) Eğer $u(x, y) = v(x, y)w(x, y)$ ise, $U_{\alpha,\beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V_{\alpha,\beta}(r, h-s)W_{\alpha,\beta}(k-r, s)$ olur.

d) Eğer $u(x, y) = (x-x_0)^{n\alpha}(y-y_0)^{m\beta}$ ise, $U_{\alpha,\beta}(k, h) = \delta(k-n)\delta(h-m)$ olur.

Teorem 4.11: Eğer $0 < \alpha \leq 1$ için $u(x, y) = D_{x_0}^{\alpha}v(x, y)$ ise,

$$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha,\beta}(k+1,h) \quad (4.45)$$

olur.

İspat 4.11: (4.43) tanımından,

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta}(k,h) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta k+1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^k \left(D_{y_0}^\beta \right)^h D_{x_0}^\alpha v(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta k+1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^{k+1} \left(D_{y_0}^\beta \right)^h v(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta k+1)\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \left[\left(D_{x_0}^\alpha \right)^{k+1} \left(D_{y_0}^\beta \right)^h v(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha,\beta}(k+1,h). \end{aligned}$$

Elde edilir.

Teorem 4.12: Eğer $u(x,y) = f(x)g(y)$, $\lambda > -1$ için $f(x) = x^\lambda h(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonunda

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{\alpha k} \text{ genelleştirilmiş Taylor serisine sahip ve}$$

(a) $\beta < \lambda + 1$ ve α keyfi bir değer

(b) $\beta \geq \lambda + 1$ ve γ keyfi bir değer, $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ ve $m-1 < \beta \leq m$.

ise, (4.44) genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm ifadesi aşağıdaki gibi olur,

$$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[D_{x_0}^{\alpha k} \left(D_{y_0}^\beta \right)^h u(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}. \quad (4.46)$$

Yukarıdaki teoremlerden çıkan sonuçlar temel alınarak, genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşümün temel işlemleri aşağıda çizelge 4.3 te verilmiştir.

Çizelge 4. 3 Genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri

Orijinal (asıl) fonksiyon	Dönüşüm (transformation) fonksiyonu
$u(x, y) = v(x, y) \pm w(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = V_{\alpha, \beta}(k, h) \pm W_{\alpha, \beta}(k, h)$
$u(x, y) = \lambda v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \lambda V_{\alpha, \beta}(k, h)$
$u(x, y) = D_{x_0}^{\alpha} v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h) \quad 0 < \alpha \leq 1$
$u(x, y) = D_{y_0}^{\beta} v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\beta(h+1)+1)}{\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha, \beta}(k, h+1) \quad 0 < \beta \leq 1$
$u(x, y) = D_{x_0}^{\alpha} D_{y_0}^{\beta} v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)\Gamma(\beta(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h+1) \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1$
$u(x, y) = D_{x_0}^{\gamma} v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha k + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} V_{\alpha, \beta}(k + \gamma / \alpha, h) \quad m-1 < \gamma \leq 1$
$u(x, y) = D_{x_0}^{\gamma} D_{y_0}^{\delta} v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha k + \gamma + 1)\Gamma(\beta h + \delta + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)} V_{\alpha, \beta}(k + \gamma / \alpha, h + \delta / \beta)$
$u(x, y) = (x - x_0)^{k\alpha} (x - x_0)^{h\beta}$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \delta(k - n)\delta(h - m)$
$u(x, y) = v(x, y)w(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V_{\alpha, \beta}(r, h-s) W_{\alpha, \beta}(k-r, s)$
$u(x, y) = v(x, y)w(x, y)q(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} V_{\alpha, \beta}(r, h-s-p) W_{\alpha, \beta}(t, s) Q_{\alpha, \beta}(k-r-t, p)$

Örnek 4.2: $u(x, 0) = \cos(x)$ (4.47)

başlangıç şartıyla verilen

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0 \quad (4.48)$$

zaman-kesirli diferensiyel difüzyon denklemini göz önüne alalım (Momani, vd., 2007). $u(x, t)$ fonksiyonunun, tek değişkenli iki fonksiyonun çarpımı olarak ifade edilebileceğini kabul edelim. $\beta = 1$ alınarak, çizelge 4.3' teki temel işlemler kullanılırsa, (4.48) kesirli diferensiyel denklemi,

$$\frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} U_{\alpha, 1}(k, h+1) = (k+1)(k+2) U_{\alpha, 1}(k+2, h) \quad (4.49)$$

şekline dönüşür.

Çizelge 4. 4 $U_{\alpha,1}(k, h)$ terimlerinin (4.50) rekürens formülüne göre nümerik değerleri.

	$U_{\alpha,1}(0, h)$	$U_{\alpha,1}(1, h)$	$U_{\alpha,1}(2, h)$	$U_{\alpha,1}(3, h)$	$U_{\alpha,1}(4, h)$
$U_{\alpha,1}(k, 0)$	1	0	$\frac{-1}{2!}$	0	$\frac{1}{4!}$
$U_{\alpha,1}(k, 1)$	$\frac{-1}{\Gamma(\alpha+1)}$	0	$\frac{1}{2!\Gamma(\alpha+1)}$	0	$\frac{-1}{4!\Gamma(\alpha+1)}$
$U_{\alpha,1}(k, 2)$	$\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}$	0	$\frac{-1}{2!\Gamma(2\alpha+1)}$	0	$\frac{1}{4!\Gamma(2\alpha+1)}$
$U_{\alpha,1}(k, 3)$	$\frac{-1}{\Gamma(3\alpha+1)}$	0	$\frac{1}{2!\Gamma(3\alpha+1)}$	0	$\frac{-1}{4!\Gamma(3\alpha+1)}$
$U_{\alpha,1}(k, 4)$	$\frac{1}{\Gamma(4\alpha+1)}$	0	$\frac{-1}{2!\Gamma(4\alpha+1)}$	0	$\frac{1}{4!\Gamma(4\alpha+1)}$

Yani;

$$U_{\alpha,1}(k, h+1) = \frac{(k+1)(k+2)\Gamma(\alpha h+1)}{\Gamma(\alpha(h+1)+1)} U_{\alpha,1}(k+2, h) \quad (4.50)$$

rekürens bağıntısı elde edilir. (4.47) başlangıç şartının genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşümü,

$$U_{\alpha,1}(k, 0) = \frac{1}{k!} \cos(\pi k / 2). \quad (4.51)$$

olarak verilir. (4.50) rekürens bağıntısı ve (4.51) başlangıç şartı kullanılırsa, $U_{\alpha,1}(k, h)$ ilk terimlerinin bazıları, yukarıda çizelge 4.4'te görüldü gibi, hesaplanabilir.

Buna göre, göre (4.48) kesirli diferensiyel denkleminin $u(x, t)$ çözümü

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} - \frac{1}{\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} + \frac{1}{\Gamma(4\alpha+1)} t^{4\alpha} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha - \frac{1}{2!\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} + \frac{1}{2!\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} - \frac{1}{2!\Gamma(4\alpha+1)}t^{4\alpha} + \dots \right) \\
& + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{4!\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{1}{4!\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} - \frac{1}{4!\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} + \frac{1}{4!\Gamma(4\alpha+1)}t^{4\alpha} + \dots \right) \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\
& = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \cos(x) \tag{4.52}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir (Momani, vd., 2007). (4.52) denklemi (4.48) kesirli diferensiyel denkleminin tam çözümüdür. $E_{\alpha}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur ve 2.bölümde tanımı verilmiştir (Tanım 2.19).

5. VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ

1978 yılında Inokuti, Sekine ve Mura tarafından kuantum mekaniğinde non-lineer problemlerin çözümü için genel Lagrange çarpanı yöntemi geliştirilmiştir (Inokuti, vd., 1978). Daha sonra J.H. He tarafından genel Lagrange çarpanı yöntemi temel alınarak varyasyonel iterasyon yöntemi geliştirilmiştir (He, 1997).

5.1 Varyasyonel İterasyon Yönteminin Temel kavramları

Varyasyonel iterasyon yöntemine geçmeden önce, bu yöntemin temel kavramları olan, genel Lagrange çarpanı, stasyoner (stationary) şartlar, sınırlı (restricted) varyasyon örneklerle verilecektir.

5.1.1 Genel Lagrange Çarpanı

Lagrange çarpanı optimizasyon problemlerinde ve varyasyonlar hesabında en çok kullanılan kavramlardan biridir. Lagrange çarpanı kavramını anlamak için,

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathfrak{R} \quad (5.1)$$

cebirsal denklemini göz önüne alalım (He, 2007). Eğer x_n (5.1) denkleminin yaklaşık kökü ise

$$f(x_n) \neq 0 \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Doğruluğunu geliştirmek için aşağıdaki düzeltme (correction) denklemini yazabiliriz:

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n) \quad (5.3)$$

λ , (5.3) denkleminde Lagrange çarpanıdır ve

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0 \quad (5.4)$$

denklemini ile belirlenebilir. (5.4) denklemini de çok iyi bilinen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.5)$$

Newton iterasyon formülünü hatırlatır.

Düzeltilme fonksiyonunu elde etmek için çeşitli yaklaşımlar kullanılabilir. x_n için düzeltme fonksiyonu,

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n) \quad (5.6)$$

şeklinde yazılabilir. $g(x)$ (5.6) denkleminde yardımcı fonksiyondur. Çarpanın belirlenmesinden sonra genel bir iterasyon formülü

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)} \quad (5.7)$$

olarak elde edilir. Yardımcı fonksiyonun değeri, tüm iterasyon adımları boyunca sıfır yada küçük bir değer olmamalıdır, $|g(x_n)| > 1$. $g(x_n) = e^{-\alpha x_n}$ olarak seçilirse, (5.7) iterasyon formülü

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \alpha f(x_n)} \quad (5.8)$$

olur (He, 2007). (5.8) iterasyon formülü $f'(x_n)$ küçük olduğu zaman, çok etkili olmaktadır. Genel Lagrange yöntemi kullanılarak başka iterasyon formülleri elde edilebilir. Aynı şekilde (5.1) denkleminin yerine, diferensiyel bir denklem yazılırsa, (5.3) ifadesine benzer bir düzeltme (correctional) fonksiyoneli elde edilebilir.

5.1.2 Stasyoner (Stationary) şartlar

Varyasyonlar hesabının en temel problemi

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) y \Big|_{x=x_1} - g_2(x) y \Big|_{x=x_1} \quad (5.9)$$

fonksiyonelinin maximum yada minimum değeri için bir $y = f(x)$ fonksiyonu bulmaktır (He, 2003). (5.9) fonksiyonelinin ekstremum şartı (stasyoner şart) ,

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y \Big|_{x=x_1} \quad (5.10)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y \Big|_{x=x_1} \quad (5.11)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \delta y' \right\} dx + g_1 \delta y|_{x=x_1} - g_2 \delta y|_{x=x_2} \quad (5.12)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right\} dx + g_1 \delta y|_{x=x_1} - g_2 \delta y|_{x=x_2} \quad (5.13)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \delta y \right) \right\} dx + g_1 \delta y|_{x=x_1} - g_2 \delta y|_{x=x_2} \quad (5.14)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y \right\} dx + \left[\frac{dF}{dy'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} + g_1 \delta y|_{x=x_1} - g_2 \delta y|_{x=x_2} \quad (5.15)$$

$$= 0$$

gerektirir. Yukarıdaki ilişkiden, keyfi δy değeri için,

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0, \quad (5.16)$$

ve aşağıdaki sınır şartları elde edilir;

$$\frac{dF}{dy'}(x_1) - g_1(x_1) = 0, \quad \frac{dF}{dy'}(x_2) - g_2(x_2) = 0. \quad (5.17)$$

(5.16) denklemi, *Euler-Lagrange diferensiyel denklemi* yada *Euler denklemi* olarak adlandırılır. (5.17) denklemleri ise, doğal sınır değerleri olarak bilinir (He, 2003).

5.1.3 Sınırlı (Restricted) Varyasyon

Sınırlı (restricted) varyasyonun varyasyonel iterasyon yönteminde nasıl kullanıldığını göstermek için

$$x^2 - 3x + 2 = 0. \quad (5.18)$$

cebisel denklemini göz önüne alalım. (5.18) denklemini,

$$\tilde{x} \cdot x - 3x + 2 = 0 \quad (5.19)$$

şeklinde tekrar yazalım. $\tilde{x}$ burada sınırlı (restricted) değişken olarak adlandırılır. Başlangıçta tahmini bir değer olarak alınır ve kabul edilir. (5.19) denkleminde x çözümlerse,

$$x = \frac{2}{3 - \tilde{x}} \quad (5.20)$$

elde edilir. İterasyon formunda ifade edilirse

$$x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n} \quad (5.21)$$

elde edilir. Çizelge 5.1' den de görüleceği gibi iyi bir tahmin için, bu yöntem gayet etkilidir.

Çizelge 5. 1 Denklem (5.21) ile Newton iterasyon formülünün karşılaştırılması

İterasyon	Denklem (5.21)	Newton İterasyon formülü
0	0.5	0.5
1	0.8	0.875
2	0.909	0.987
3	0.956	0.999
4	0.978	1.000
5	0.989	1.000
6	0.994	1.000
7	0.997	1.000
8	0.998	1.000
9	0.999	1.000

Varyasyonel iterasyon yönteminde, başlangıç tahmini daima muhtemel bilinmeyen bir parametre olarak seçilir, tek iterasyonda yüksek derecede doğruluğa sahip bir çözüme ulaşılabilir (He, 2007).

Varyasyonel iterasyon yönteminin temel kavramlarını izah ettikten sonra, varyasyonel iterasyon tekniğinin temel amacını göstermek için,

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t) \quad (5.22)$$

genel non-lineer sistemi göz önüne alalım. (5.22) non-lineer sisteminde L lineer bir operatör, N non-lineer bir operatör ve $g(t)$ ' de sürekli bir fonksiyondur. Varyasyonel iterasyon yönteminin temel amacı (5.2) sistemi için,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^t \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds \quad (5.23)$$

düzeltilme fonksiyoneli oluşturmaktır. (5.23) düzeltilme fonksiyoneli, λ , varyasyonel teorisyle belirlenen Lagrange çarpanı, u_n , n . yaklaşık çözüm ve $\delta\tilde{u}_n = 0$ olmak üzere

$\tilde{u}_n$ ise, sınırlı (restricted) varyasyonu göstermektedir (He, 2007). Lineer problemlerin çözümünde, Lagrange çarpanının belirlenmesine bağlı olarak, tam çözüm tek bir iterasyon adımıyla elde edilebilir.

Örnek 5.1: Aşağıda başlangıç koşuluyla beraber verilen

$$u' - 2xu = 0, \quad u(0) = 1. \quad (5.24)$$

diferensiyel denklemini varyasyonel iterasyon yöntemiyle çözelim (Wazwaz, 2009).

Düzeltilme (correctional) fonksiyoneli (5.24) denklemi için,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t) \{u'_n(t) - 2tu_n(t)\} dt, \quad n \geq 0. \quad (5.25)$$

olarak verilir. (5.25) denkleminin her iki tarafının varyasyonunu alırsak,

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \left(\int_0^x \lambda \{u'_n(t) - 2tu_n(t)\} dt \right) \quad (5.26)$$

elde edilir. $\delta\tilde{u}_n = 0$ (sınırlı varyasyon) olması gerektiğinden, yani $2t\delta u_n = 0$ olduğundan,

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \left(\int_0^x \lambda u'_n(t) d\xi \right) \quad (5.27)$$

elde edilir. (5.27) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \lambda u_n(x) - \delta \int_0^x \lambda' u_n(t) dt \quad (5.28)$$

$$= \delta(1 + \lambda|_{t=x})u_n - \delta \int_0^x \lambda' u_n(t) dt \quad (5.29)$$

elde edilir. u_{n+1} 'in ekstremum şartından dolayı, $\delta u_{n+1} = 0$ olacağından, yani, (5.29) ifadesinin sol tarafı sıfır olur, bundan dolayı (5.29) ifadesinin sağ tarafı da sıfır olur. Bu da,

$$\begin{aligned} (1 + \lambda|_{t=x}) &= 0 \\ \lambda'|_{t=x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

olmasını gerektirir. Yani, $\lambda = -1$ bulunur. Bu durumda (5.24) diferensiyel denklemi için düzeltme fonksiyoneli,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \{u'_n(t) - 2tu_n(t)\} dt \quad (5.31)$$

olarak elde edilir. $u_0 = 1$ alınabileceğinden, aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x \{u'_0(t) - 2tu_0(t)\} dt = 1 + x^2, \\ u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x \{u'_1(t) - 2tu_1(t)\} dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4, \\ u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x \{u'_2(t) - 2tu_2(t)\} dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6, \\ u_4(x) &= u_3(x) - \int_0^x \{u'_3(t) - 2tu_3(t)\} dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8, \\ &\vdots \\ u_n(x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{2n} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (5.33)$$

ifadesi ile,

$$u(x) = e^{x^2} \quad (5.34)$$

tam çözümü elde edilir (Wazwaz, 2009).

Örnek 5.2 (Momani ve Odibat, 2007)

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (5.35)$$

başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x(t) &= x(t) + y(t) \\ D^{\alpha_2} y(t) &= -x(t) + y(t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Lineer kesirli diferensiyel denklemler sistemini varyasyonel iterasyon yöntemiyle çözelim.

Varyasyonel iterasyon yöntemine göre (5.36) sistemi için düzeltme fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} x^{k+1}(t) &= x^k(t) + \lambda_1 \int_0^t \{D^{\alpha_1} x^k(\tau) - x^k(\tau) - y^k(\tau)\} d\tau \\ y^{k+1}(t) &= y^k(t) + \lambda_2 \int_0^t \{D^{\alpha_2} y^k(\tau) + x^k(\tau) - y^k(\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (5.37)$$

olarak verilir. $\delta \tilde{u}_n = 0$ (sınırlı varyasyon) olması gerektiğinden ve $\delta x^{k+1} = 0$, $\delta y^{k+1} = 0$ olacağından, aşağıdaki stasyoner şartlar oluşur:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_1|_{\tau=t}) &= 0 & (1 + \lambda_2|_{\tau=t}) &= 0 \\ \lambda_1'|_{\tau=t} &= 0 & \lambda_2'|_{\tau=t} &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

(5.38) stasyoner şartlarına göre, Lagrange çarpanları $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ bulur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x^{k+1}(t) &= x^k(t) - \int_0^t \{D^{\alpha_1} x^k(\tau) - x^k(\tau) - y^k(\tau)\} d\tau \\ y^{k+1}(t) &= y^k(t) - \int_0^t \{D^{\alpha_2} y^k(\tau) + x^k(\tau) - y^k(\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (5.39)$$

düzeltilme fonksiyonelleri elde edilir. $x^0 = 0$ ve $y^0 = 1$ olarak alınırsa, aşağıdaki yaklaşımlar

$$\begin{aligned} x^1(t) &= x^0(t) - \int_0^t \{D^{\alpha_1} x^0(\tau) - x^0(\tau) - y^0(\tau)\} d\tau = t \\ y^1(t) &= y^0(t) - \int_0^t \{D^{\alpha_2} y^0(\tau) + x^0(\tau) - y^0(\tau)\} d\tau = 1 + t \\ x^2(t) &= x^1(t) - \int_0^t \{D^{\alpha_1} x^1(\tau) - x^1(\tau) - y^1(\tau)\} d\tau = 2t + t^2 - \frac{t^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)} \\ y^2(t) &= y^1(t) - \int_0^t \{D^{\alpha_2} y^1(\tau) + x^1(\tau) - y^1(\tau)\} d\tau = 1 + 2t - \frac{t^{2-\alpha_2}}{\Gamma(3-\alpha_2)} \\ x^3(t) &= 3t + 3t^2 + \frac{t^3}{3} - 3 \frac{t^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)} - 3 \frac{t^{3-\alpha_1}}{\Gamma(4-\alpha_1)} + \frac{t^{3-2\alpha_1}}{\Gamma(4-2\alpha_1)} - \frac{t^{3-\alpha_2}}{\Gamma(4-\alpha_2)} \\ y^3(t) &= 1 + 3t - \frac{t^3}{3} - 3 \frac{t^{2-\alpha_2}}{\Gamma(3-\alpha_2)} - \frac{t^{3-\alpha_2}}{\Gamma(4-\alpha_2)} + \frac{t^{3-2\alpha_2}}{\Gamma(4-2\alpha_2)} + \frac{t^{3-\alpha_1}}{\Gamma(4-\alpha_1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Varyasyonel iterasyon yönteminin etkinliği ve yakınsaklığı üzerine yapılan çeşitli çalışmalar ve analizler, yöntemin son derece etkili ve istenen çözüme çok fazla bir hesaplama gerektirmeden ulaştırdığı konusunda birbirini desteklemektedir. (Tatari ve Dehghan, 2007; Odibat, 2010; Salkuyeh, 2008)

6. ÇOK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMI

Çok değişkenli Padé yaklaşımı, tek değişkenli Padé yaklaşımı temel alınarak elde edildiği için, tek değişkenli Padé yaklaşımının temel tanımları ve teoremleri verildikten sonra çok değişkenli Padé yaklaşımına geçilecektir.

6.1 Tek Değişkenli Padé Yaklaşımı

f fonksiyonu $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ yani;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (c_0 \neq 0) \quad (6.1)$$

şeklinde bir kuvvet serisiyle temsil edilsin. Bu durumda bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \quad (6.2)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur (polinomların oranı). Payın derecesi m , paydanın derecesi n dir. (6.2) de $m+1$ tane payın katsayısı ve $n+1$ tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (6.2)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0 = 1$ alınmalıdır. Bu seçimle (6.2)'nin payının $m+1$ tane bağımsız katsayısı ve paydasının n tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda $m+n+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[m/n]$, (6.1)'deki kuvvet serisinin ilk $m+n+1$ terimine karşılık gelir (Baker ve Grave-Morris, 1996). (6.1)'deki

$$1, x, x^2, \dots, x^{m+n} \quad (6.3)$$

$m+n$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımını

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} + O(x^{m+n+1}) \quad (6.4)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.4) denkleminde içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + O(x^{m+n+1}) \quad (6.5)$$

elde edilir. (6.5) denklemindeki $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
b_n c_{m-n+1} + b_{n-1} c_{m-n+2} + \cdots + b_0 c_{m+1} &= 0 \\
b_n c_{m-n+2} + b_{n-1} c_{m-n+3} + \cdots + b_0 c_{m+2} &= 0 \\
&\vdots \\
b_n c_m + b_{n-1} c_{m+1} + \cdots + b_0 c_{m+n} &= 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

sistemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğu için, (6.6) denklemi n tane lineer denklemden oluşur.

Yani;

$$\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & \cdots & c_{m+1} \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+4} & c_{m-n+5} & \cdots & c_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

olur. Buradan b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (6.4) denkleminde payın

katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları $1, x, x^2, \dots, x^m$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\vdots \\
a_m &= c_m + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} b_i c_{m-i}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

olarak bulunur. Böylece (6.6) ve (6.8) denklemlerindeki a ve b katsayıları, Padé yaklaşımının pay ve paydasını oluşturacak terimlerin katsayıları olarak tanımlanır. Dolayısıyla, bu terimlerden elde edilen denklemlere Padé denklemleri denir. Padé yaklaşımının hesaplanmasında görülecektir ki, (6.6) ve (6.8) de elde edildiği gibi Padé denklemleri katsayılar hesaplanmadan,

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \tag{6.9}$$

denklemleriyle de elde edilebilir . Bu denklemler yardımıyla x^{m+n} y. dereceden $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisine karşılık gelen $[m/n]$ Padé yaklaşımı oluşturulur. Yani verilen $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisini keyfi dereceden Maclaurin serisine dönüştürerek, bu serinin keyfi Padé yaklaşımı (serisi) oluşturulur. (Bundan sonra p ve q 'nün kesin polinomsal dereceleri ∂ ile, seri içerisindeki dereceleri ω ile gösterilecektir)

Yani bir $f(x)$ fonksiyonu için $[m/n]_f(x)$ Padé yaklaşımı problemi; Padé yaklaşımında pay ve payda polinomları olan

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad (6.10)$$

polinomlarını bulmayı içerir. Yani ,

$$[m/n]_f(x) = \frac{p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i}{q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad (6.11)$$

olur. (6.4) ifadesinde, yapılan içler dışlar çarpımıyla elde edilen (6.6) ve (6.8) denklemlerinde

$[m/n]_f(x)$ bulunurken ;

$$\begin{aligned} \partial(p) &\leq m \\ \partial(q) &\leq n \\ \omega(fq - p) &\geq m + n + 1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

durumu söz konusudur.

Teorem 6.1: Eğer p_1, q_1 ve p_2, q_2 polinomları (6.12) durumunu sağlarsa bu durumda $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ olur.

İspat 6.1: $p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$ ifadesi $(fq_2 - p_2)q_1 - (fq_1 - p_1)q_2$ şeklinde de yazılabilir. (6.12) durumundan

$$\left. \begin{array}{l} \omega(fq_1 - p_1) \geq m + n + 1 \\ \omega(fq_2 - p_2) \geq m + n + 1 \end{array} \right\} \text{ olduğundan}$$

Buradan $\omega(p_1.q_2 - p_2.q_1) \geq m + n + 1$ elde edilir. Fakat $(p_1q_2 - p_2q_1)(x)$ polinomunun

derecesi en fazla $m + n$ olacağından, $p_1.q_2 - p_2.q_1$ olur.

Teorem 6.1'in bir sonucu olarak, p_1/q_1 ve p_2/q_2 rasyonel ifadeleri birbirine denktir.

Çalışmamızda şimdiye kadar sadece orijin merkezli kuvvet serileri için Padé yaklaşımının tanımını verdik. Orijin merkezli olmayan ve herhangi bir nokta merkez alınarak Padé yaklaşımı tanımlanabilir. Aşağıdaki şekilde tanımlanan;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i \quad (c_0 \neq 0) \quad (6.13)$$

kompleks uzayda x_0 merkezli bir kuvvet serisi olsun. Bu kuvvet serisi için (m, n) dereceli Padé yaklaşımını bulmak mümkündür. Orijin merkezli kuvvet serilerinde kullandığımız yöntemler burada da aynen geçerlidir. Buna göre;

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i (x - x_0)^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i \quad (6.14)$$

şeklinde ifade edilir.ve

$$(fq - p)(x) = \sum_{i \geq m+n+1} d_i (x - x_0)^i \quad (6.15)$$

ifadesinden (6.6) ve (6.8) denklem sistemindekine benzer lineer denklem sistemleri elde edilir ve aynı şekilde çözülür. Ayrıca (6.12)'deki durum burada da aynen geçerlidir.

Teorem 6.2: $r_{m,n}(x)$ rasyonel fonksiyonu bir f fonksiyonuna ait (m, n) dereceli Padé yaklaşımı olmak üzere; her negatif olmayan m, n sayısı için f fonksiyonuna ait tek bir (m, n) dereceli $r_{m,n}(x)$ Padé yaklaşımı vardır.

6.2 Padé Yaklaşımının Hesaplanması

Padé yaklaşımının hesaplanmasında literatürde farklı algoritmalar kullanılmaktadır. Biz çalışmamızda en yaygın ve kullanışlı olan determinant formüllerini kullandık. Şimdide bu yöntem üzerinde duralım.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (6.16)$$

serisiyle temsil edilen fonksiyonun (m, n) dereceli Padé yaklaşımını

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad (6.17)$$

olarak tanımlarsak,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad (6.18)$$

ifadesinin içler dışlar çarpımıyla oluşan denklem sistemi ve bu sistemdeki katsayılar determinant yöntemiyle bulunabilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (6.19)$$

İçin,

$$\left. \begin{aligned} F_k(x) &= \sum_{i=0}^k c_i x^i, & k \geq 0 \\ F_k(x) &= 0, & k < 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

yazılabilir.

Teorem 6.3: Eğer bir f fonksiyonu için (m, n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad \text{ve} \quad D_{m,n} = \begin{pmatrix} c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

olarak ifade ediliyor ve $D = \det D_{m,n} \neq 0$ ise;

$$p_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_m(x) & xF_{m-1}(x) & \cdots & x^n F_{m-n}(x) \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}, \quad q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix} \quad (6.22)$$

olur.

İspat 6.3: $D \neq 0$ olduğundan, yukarıdaki (6.6) denklem sisteminde $b_0 = 1$ alındığında bu homojen (6.6) denklem sisteminin tek çözümü olduğu görülmüştü. Aynı şekilde aşağıdaki homojen denklem sistemi de aşıkâr olmayan (nontrivial) çözüme sahiptir.

$$\begin{cases} (1 - q_0(x))b_0 + xb_1 + x^2b_2 + \cdots + x^n b_n = 0 \\ c_{m+1}b_0 + c_m b_1 + \cdots + c_{m+1-n} b_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m+n}b_0 + c_{m+n-1}b_1 + \cdots + c_m b_n = 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Böylece katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşittir. Yani;

$$\begin{vmatrix} 1 - q_0(x) & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} = 0 \quad (6.24)$$

Aynı zamanda $q_0(x)$ için bir denklem ifadesinin de olduğunu göstermiş oluruz.

Eğer $f(x)q_0(x)$ ifadesini göz önüne alırsak;

$$f(x)q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f(x) & xf(x) & \cdots & x^n f(x) \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}. \quad (6.25)$$

ifadesi elde edilir. $p_0(x)$ polinomu $f(x)q_0(x)$ serilerindeki m den küçük yada m 'ye eşit dereceye sahip tüm terimleri içerdiğinden (6.25) ifadesinde $p_0(x)$ 'in determinant formatını elde ederiz. Bu da ispatımızı tamamlar.

Determinant algoritması bir çok ekleme ve çarpım işlemlerini ihtiva ettiğinden m ve n 'nin küçük değerlerini hesaplamada daha kullanışlıdır.

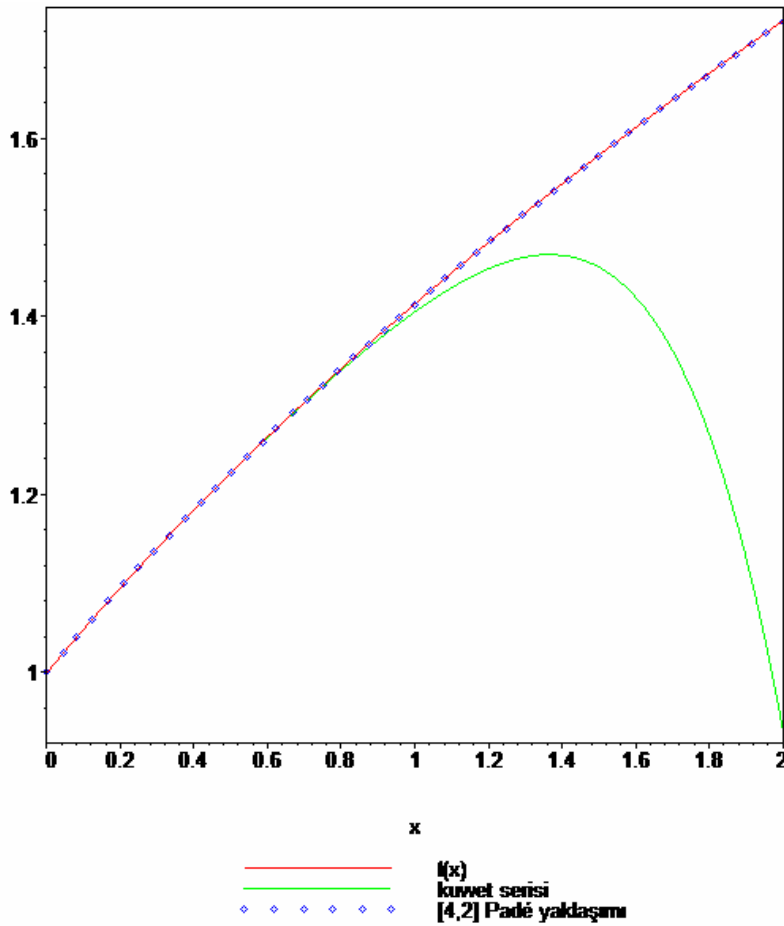
Örnek 6.1: $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonunu verilsin. $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonunun 6.dereceden Taylor açılımı,

$$P_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{7}{1024}x^6 \quad (6.26)$$

şeklindedir. (6.26) kuvvet serisinin (4,2) dereceli Padé yaklaşımı (6.9) determinant denklemleri yardımıyla,

$$r_{4,2}(x) = \frac{1 + \frac{5}{3}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{384}x^4}{1 + \frac{7}{6}x + \frac{7}{24}x^2} \quad (6.27)$$

olarak hesaplanır. $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonu, $P_6(x)$ kuvvet serisi ve (4,2) dereceli Padé yaklaşımına ait grafik şekil 6.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4. 1 $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonu, $P_6(x)$ kuvvet serisi ve $P_6(x)$ kuvvet serisine ait $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımının grafikleri.

6.3 Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı

Çalışmamızı iki değişkenli fonksiyonlarla sınırlayacağız. Çünkü ikiden fazla değişkene sahip fonksiyonlar için genelleştirme yapılabileceği açıktır.

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \quad (6.28)$$

Taylor serisiyle temsil edilen çift değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ fonksiyonu için tek değişkenli Padé yaklaşımının;

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \quad (6.29)$$

denklemleriyle verildiğini biliyoruz.

$p(x)$ ve $q(x)$ ifadelerinde j 'inci satırı x^{j+m-1} ile çarptıktan sonra, $p(x)$ ve $q(x)$ ifadelerindeki j 'inci sütunu x^{j-1} 'e bölelim. ($j = 2, \dots, n+1$). Bu pay ve paydanın x^{mn} ile çarpımıyla sonuçlanır. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \cdots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \cdots & c_m x^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \cdots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \cdots & c_m x^m \end{vmatrix}} \cdot (D = \det D_{m,n} \neq 0) \quad (6.30)$$

elde edilir.

Yukarıdaki determinant doğrudan çift değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonu için yazılabilir. Yani

$\sum_{i=0}^k c_i x^i$ toplamının yerine $f(x, y)$ fonksiyonunun k 'inci dereceden Taylor açılımının kısmi toplamaları yazıldığında, $c_k x^k$ ifadesi $f(x, y)$ fonksiyonuna ait k 'inci dereceden tüm terimleri içerir. Burada çift değişkenli $c_{ij} x^i y^j$ teriminin derecesi $i + j$ 'dir denilir.

Eğer ,

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} \sum_{i+j=0}^m c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=0}^{m-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=0}^{m-n} c_{ij} x^i y^j \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij} x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j \end{vmatrix} \quad (6.31)$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij} x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j \end{vmatrix} \quad (6.32)$$

olarak tanımlarsak, $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ ' nin formlarının aşağıdaki şekilde olduğunu görmek kolaydır.

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i+j=mn}^{mn+m} a_{ij} x^i y^j \\ q(x, y) &= \sum_{i+j=mn}^{mn+n} b_{ij} x^i y^j \end{aligned} \quad (6.33)$$

Burada (6.33) ifadeleri için aşağıdaki (6.34) durumu söz konusudur.

$$\begin{cases} \omega(p) \geq mn \\ \partial(p) \leq mn + m \\ \omega(q) \geq mn \\ \partial(q) \leq mn + n \\ \omega[(fq - p)(x, y)] \end{cases} \quad (6.34)$$

Tek değişkenli Padé yaklaşımlarında (6.12) durumuyla kıyaslandığında p ve q 'nin dereceleri, p, q 'nin mertebesi (Padé yaklaşımının derecesi) ve $fq - p$ 'nin derecesinin mn kadar kaydığı görülmektedir. Fakat Padé yaklaşımının indirgenemez formu elde edildiğinde bunun kaybolduğu görülecektir. (Cuyt ve Wuytack, 1987)

Teorem 4.1: Eğer $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ (6.31) ve (6.32) ile verilirse;

$$(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j \text{ olur.}$$

İspat 4.1: Eğer ;

$$A_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} a_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, \dots, m) \quad (6.35)$$

$$B_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} b_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, \dots, n) \quad (6.36)$$

$$C_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} c_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.37)$$

olarak ifade edilirse $(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j$ için aşağıdaki yazılabilir (Cuyt, 1983):

$$\begin{cases} C_0(x, y)B_0(x, y) = A_0(x, y) \\ C_1(x, y)B_0(x, y) + C_0(x, y)B_1(x, y) = A_1(x, y) \\ \vdots \\ C_m(x, y)B_0(x, y) + \dots + C_{m-n}(x, y)B_n(x, y) = A_m(x, y) \end{cases} \quad (6.38)$$

$$\begin{cases} C_{m+1}(x, y)B_0(x, y) + C_{m+1-n}(x, y)B_n(x, y) = 0 \\ \vdots \\ C_{m+n}(x, y)B_0(x, y) + \dots + C_m(x, y)B_n(x, y) = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Burada $k < 0$ için $C_k = 0$ dir. Bu notasyonlara göre;

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^m A_k(x, y) \quad \text{ve} \quad q(x, y) = \sum_{k=0}^n B_k(x, y) \text{ olarak da ifade edilebilir.}$$

$$B_0(x, y) = \begin{vmatrix} C_m(x, y) & \cdots & C_{m+1-n}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}(x, y) & & C_m(x, y) \end{vmatrix} \quad (6.40)$$

olarak seçip, Cramer kuralını uygulayarak $B_k(x, y)$ için yukarıdaki homojen denklem sistemini çözdükten sonra, yukarıdaki denklem sistemlerinde $A_k(x, y)$ 'de yerine yazarsak; (6.31) ve (6.32) determinantlarını, yani; $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ ifadelerini elde ederiz. (6.31) ve (6.32) de verilen $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ (6.34) için bir çözüm oluşturur. Buda ispatımızı tamamlar.

Burada $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ ifadelerine çok değişkenli Padé denklemleri denir . Ve

$$r_{m,n}(x, y) = \frac{p_0}{q_0}(x, y) \quad (6.41)$$

ifadesine de $f(x, y)$ fonksiyonunun (m, n) dereceli indirgenemez Padé yaklaşımı denir.

Teorem 4.2: Her m ve n sayısı için, $f(x, y)$ fonksiyonunun tek bir tane (m, n) dereceli çok değişkenli Padé yaklaşımı vardır.(Cuyt ve Wuytack, 1987)

Yukarıdaki tanımdan sonra, çok değişkenli Padé yaklaşımı için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 4.1: $f(x, y) = 1 + \frac{x}{0.1 - y} + \sin(xy)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyona ait seri açılımı

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 10^i xy^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(xy)^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad (6.42)$$

$$= 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2 + \cdots \quad (6.43)$$

şeklinde olur. $m = 1 = n$ olarak alınır; yani m ve n 'nin dereceleri 1 olarak alınır; $p(x, y)$ ve $q(x, y)$, (6.31) ve (6.32) Padé denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} 1+10x & 1 \\ 101xy & 10x \end{vmatrix} = 10x + 100x^2 - 101xy \quad (6.44)$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 101xy & 10x \end{vmatrix} = 10x - 101xy \quad (6.45)$$

elde edilir. Buna göre;

$$\frac{p}{q}(x, y) = \frac{10x + 100x^2 - 101xy}{10x - 101xy} \quad (6.46)$$

elde edilir. Bu ifadenin indirgenemez formu;

$$r_{1,1}(x, y) = \frac{1 + 10x - 10.1y}{1 - 10.1y} \quad (6.47)$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi indirgenemez formu elde ettiğimizde, $mn = 1$ kadar artan derece de kaybolmaktadır. Fakat bu her zaman olmayabilir. Aşağıdaki örnekte bu açıkça görülmektedir. Şunu da hemen belirtelim ki bu elde ettiğimiz sonucu etkilemez.

Örnek 4.2: $m = 1$ ve $n = 2$ alınır; (6.34)'ü sağlayan (6.31) ve (6.32) Padé denklemlerini kullanarak $p(x, y)$ ve $q(x, y)$;

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} 1 + 10x & 1 & 0 \\ 101xy & 10x & 1 \\ 1000xy^2 & 101xy & 10x \end{vmatrix} = 100x^2 - 101xy + 1000x^3 - 2020x^2y + 1000xy^2 \quad (6.48)$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101xy & 10x & 1 \\ 1000xy^2 & 101xy & 10x \end{vmatrix} = 100x^2 - 101xy + 1010x^2y - 1000xy^2 + 201x^2y^2 \quad (6.49)$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{p}{q}(x, y) = \frac{100x^2 - 101xy + 1000x^3 - 2020x^2y + 1000xy^2}{100x^2 - 101xy + 1010x^2y - 1000xy^2 + 201x^2y^2} \quad (6.50)$$

bulunur. $\frac{p}{q}(x, y)$ ifadesinin indirgenemez formu ise ;

$$r_{1,2}(x, y) = \frac{x - 10.1y + 10x^2 - 20.2xy + 10y^2}{x - 1.01y + 10.1xy - 10y^2 + 2.01xy^2} \quad (6.51)$$

olarak bulunur (Cuyt, 1987).

7. UYGULAMALAR

Bu bölüm, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, Adomian ayrıştırma yöntemi ile çok değişkenli Padé yaklaşımı karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma, non-lineer kesirli diferansiyel denklemler üzerinde yapılacaktır. Her iki non-lineer kesirli diferansiyel denklem önce Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözüldükten sonra, elde edilen seri çözümlerinin Padé yaklaşımları alınıp, çözümlerin sonuçları nümerik olarak karşılaştırılacaktır. İkinci alt bölümde, genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çok değişkenli Padé yaklaşımı karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma, zaman-kesirli reksiyon-difüzyon diferansiyel denklemleri üzerinde yapılacaktır. Her kesirli diferansiyel denklem önce genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözüldükten sonra, elde edilen seri çözümlerinin Padé yaklaşımları alınıp, çözümlerin sonuçları nümerik olarak karşılaştırılacaktır. Üçüncü alt bölümde, varyasyonel iterasyon yöntemi ile çok değişkenli Padé yaklaşımı karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma, non-lineer hiperbolik zaman kesirli ve lineer kesirli Klein-Gordon diferansiyel denklemleri üzerinde yapılacaktır. Her kesirli diferansiyel denklem önce varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözüldükten sonra, elde edilen seri çözümlerinin Padé yaklaşımları alınıp, çözümlerin sonuçları nümerik olarak karşılaştırılacaktır.

7.1 Adomian Ayrıştırma Yöntemi (AAY) ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY)

Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) ve çok değişkenli Padé yaklaşımının (ÇPY) karşılaştırılması iki uygulama üzerinde gösterilecektir.

Uygulama 7.1.1

$$D_{*t}^{\alpha} u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) + g(x, t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad (7.1)$$

biçimindeki non-lineer kesirli diferansiyel denkleme Adomian ayrıştırma yönteminin uygulanması için, (7.1) kesirli diferansiyel denkleminin,

$$D_{*t}^{\alpha} u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad x > 0, \quad (7.2)$$

biçiminde operatör formunda ifade edilmelidir (Odibat ve Momani, 2008c). (7.1)' de L , α . mertebeden küçük kesirli türevleri içeren lineer bir operatör, N , α . mertebeden küçük kesirli türevleri içeren nonlinear bir operatör, g kaynak fonksiyonu ve $D_{*t}^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ ise α . mertebeden Caputo kesirli türevini temsil etmektedir. D_{*t}^{α} operatörünün tersi olan J^{α} operatörü (7.2) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) - J^\alpha [Lu(x, t) + Nu(x, t)]. \quad (7.3)$$

elde edilir. Adomian ayrıştırma yöntemi, $u(x, t)$ çözümünün

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (7.4)$$

şeklinde sonsuz terimli seriye ve (7.3) denklemindeki nonlinear fonksiyonun da

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (7.5)$$

biçiminde ayrıştırılmış olmasını gerektirmektedir. Bilindiği gibi A_n , Adomian polinomları olarak adlandırılmaktadır. (7.4) ve (7.5) serileri (7.3)'te yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) - J^\alpha \left[L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right]. \quad (7.6)$$

elde edilir. (7.6) denklemden iterasyon formülü

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) \\ u_1(x, t) &= -J^\alpha (Lu_0 + A_0), \\ u_2(x, t) &= -J^\alpha (Lu_1 + A_1), \\ &\vdots \\ u_{n+1}(x, t) &= -J^\alpha (Lu_n + A_n). \end{aligned} \quad (7.7)$$

biçiminde elde edilir (Odibat ve Momani, 2008b). Buna göre,

$$D_{*t}^\alpha u(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = x + xt^2, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (7.8)$$

non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemi

$$u(x, 0) = 0. \quad (7.9)$$

başlangıç şartıyla verilsin. Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak, (7.8) kesirli diferensiyel denklemi ve (7.9) başlangıç şartı (7.7)'de yerlerine yazılırsa,

$$u_0(x, t) = u(x, 0) + J^\alpha(x + xt^2) = x \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)} \right), \quad (7.10)$$

$$u_{j+1}(x, t) = -J^\alpha(A_j), \quad j \geq 0,$$

rekürens bağıntısı elde edilir. A_j , non-lineer $N = uu_x$ fonksiyonu için Adomian polinomları olarak adlandırılır. (7.10) rekürens bağıntısına göre, seri çözümünün ilk terimlerinin bir kaçı,

$$u_0(x, t) = x \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)} \right),$$

$$u_1(x, t) = -x \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{4\Gamma(2\alpha + 3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(3\alpha + 3)} + \frac{4\Gamma(2\alpha + 5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha + 3)^2 \Gamma(3\alpha + 5)} \right), \quad (7.10)$$

$$u_2(x, t) = 2x \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^3 \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} + \frac{8\Gamma(2\alpha + 5)\Gamma(4\alpha + 7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha + 1)^3 \Gamma(3\alpha + 5)\Gamma(5\alpha + 7)} + \dots \right),$$

$$\vdots$$

biçiminde elde edilir. (7.4) seri çözümünün ilk üç terimi,

$$u(x, t) = x \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2 \Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{4\Gamma(2\alpha + 3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(3\alpha + 3)} + \dots \right). \quad (7.11)$$

olarak elde edilir (Odibat ve Momani, 2008b). $\alpha = 1$ için (7.11) denklemi,

$$u(x, t) = xt + 0.1 \times 10^{-9} t^3 - 0.1333333333xt^5 \quad (7.12)$$

olarak elde edilir. $m = 4$ ve $n = 2$ için, (7.12) seri çözümüne ait çok değişkenli Padé denklemleri (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x, t) = \begin{vmatrix} xt + 0.1 \times 10^{-9} t^3 & xt & xt \\ 0 & 0.1 \times 10^{-9} t^3 & 0 \\ -0.1333333333xt^5 & 0 & 0.1 \times 10^{-9} t^3 \end{vmatrix} \quad (7.13)$$

$$= 0.1333333333 \times 10^{-10} (t^2 + 0.7500000002 \times 10^{-9}) x^3 t^7 \quad (7.14)$$

$$q(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.1 \times 10^{-9} t^3 & 0 \\ -0.1333333333xt^5 & 0 & 0.1 \times 10^{-9} t^3 \end{vmatrix} \quad (7.15)$$

$$= 0.1333333333 \times 10^{-10} (t^2 + 0.7500000002 \times 10^{-9}) x^2 t^6 \quad (7.16)$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.8) non-lineer

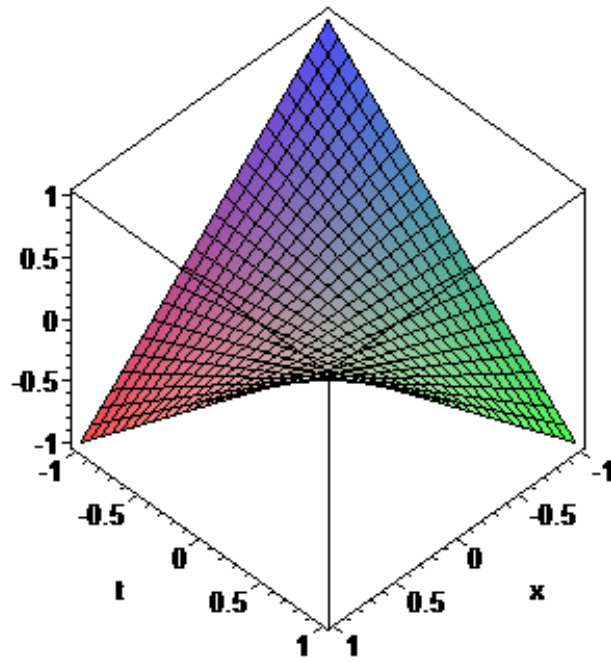
zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 1$ için elde edilen (7.12) çözümünün, (4,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$[4,2]_{(x,t)} = \frac{(t^2 + 0.7500000002 \times 10^{-9})xt}{t^2 + 0.7500000002 \times 10^{-9}} \quad (7.17)$$

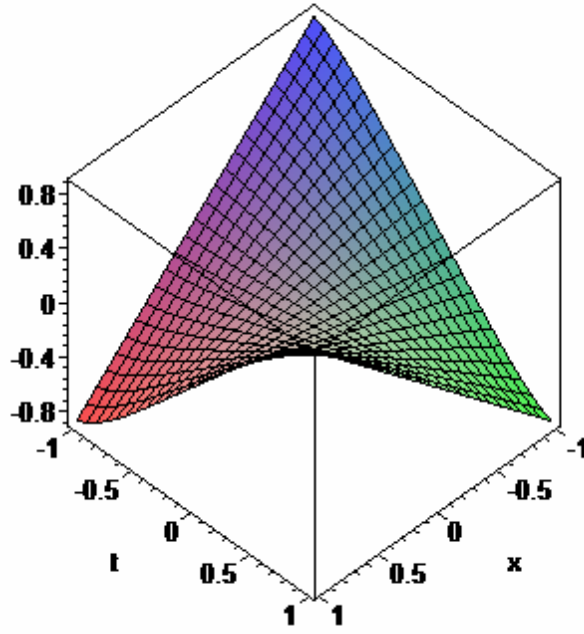
olarak elde edilir. $\alpha = 1$ için (7.8) zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin tam çözümü

$$u(x,t) = xt \quad (7.18)$$

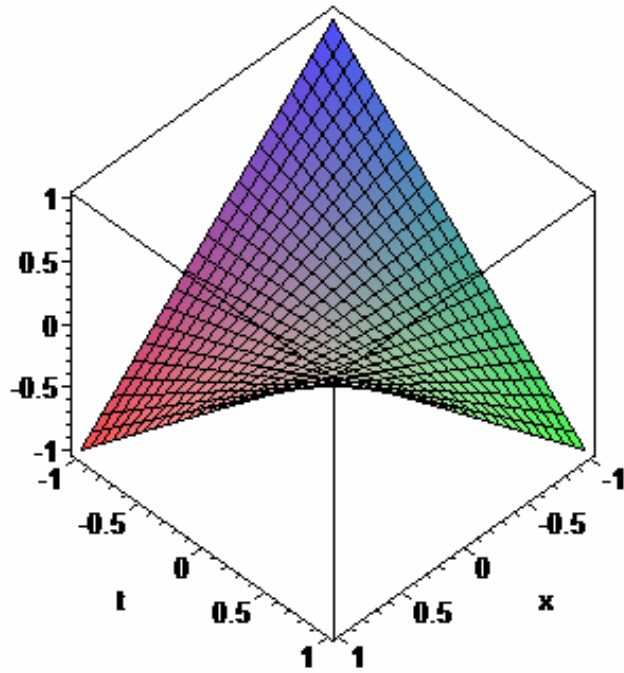
olarak verilmektedir (Odibat ve Momani, 2008b). Buna göre, $\alpha = 1$ için (7.8) zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin tam çözümünün, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin $\alpha = 1$ için bulunan (7.12) seri çözümünün ve $\alpha = 1$ için bulunan (7.12) seri çözümüne ait (4,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri ve nümerik değerleri, aşağıdaki gibidir (Şekil 7.1, Şekil 7.2, Şekil 7.3, Çizelge 7.1).



Şekil 7. 1 $\alpha = 1$ için, (7.8) zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin tam çözümü.



Şekil 7. 2 AAY kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 1$ için elde edilen (7.12) çözümü.



Şekil 7. 3 (AAY) kullanılarak, (7.8) kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 1$ için elde edilen (7.12) çözümünün (4,2) mertebeli ÇPY.

$\alpha = 0.5$ için (7.11) denklemi,

$$u(x, t) = 1.128379167xt^{0.5} - 0.9577979850xt^{1.5} + 0.6018022226xt^{2.5} - 0.7005608116xt^{3.5} \quad (7.19)$$

olarak elde edilir. (7.19) denklemi için $t^{1/2} = a$ olarak alınırsa,

$$u(x, a) = 1.128379167xa - 0.9577979850xa^3 + 0.6018022226xa^5 - 0.7005608116xa^7 \quad (7.20)$$

elde edilir. $m = 6$ ve $n = 2$ için, (7.20) seri çözümüne ait çok değişkenli Padé denklemleri (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} 1.128379167xa - 0.9577979850xa^3 + 0.6018022226xa^5 & 1.128379167xa - 0.9577979850xa^3 & 1.128379167xa - 0.9577979850xa^3 \\ 0 & 0.6018022226xa^5 & 0 \\ -0.7005608116xa^7 & 0 & 0.6018022226xa^5 \end{vmatrix}$$

(7.21)

$$= -0.4907854507(1.201464294a^4 - 1.231832347a^2 - 0.8326662354)x^3a^{11} \quad (7.22)$$

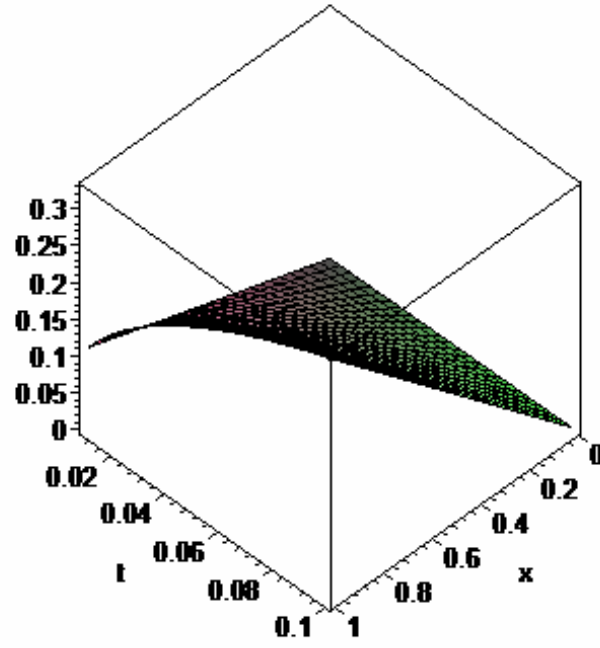
$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.6018022226xa^5 & 0 \\ -0.7005608116xa^7 & 0 & 0.6018022226xa^5 \end{vmatrix} \quad (7.23)$$

$$= 0.4907854507(0.7379312378 + 1.718058483a^2)x^3a^{10} \quad (7.24)$$

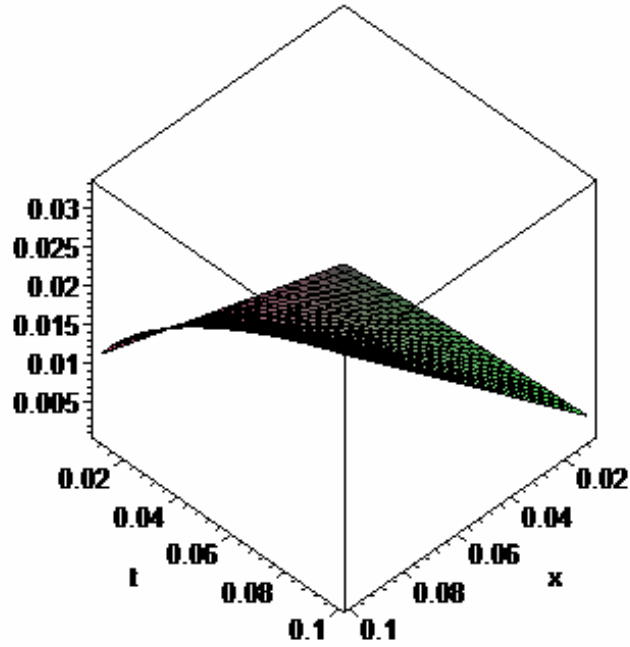
biçiminde elde edilir. $a = t^{1/2}$ alınırsa, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.19) çözümünün, (6,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$[6, 2]_{(x,t)} = -\frac{(1.201464294t^2 - 1.231832347t - 0.8326662354)x\sqrt{t}}{0.7379312378 + 1.718058483t} \quad (7.25)$$

olarak elde edilir. Buna göre, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin $\alpha = 0.5$ için bulunan (7.19) seri çözümünün ve $\alpha = 0.5$ için bulunan (7.19) seri çözümüne ait (6,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri ve nümerik değerleri aşağıdaki gibidir (Şekil 7.4, Şekil 7.5, Çizelge 7.1).



Şekil 7. 4 (AAY) kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.19) çözümü.



Şekil 7. 5 AAY kullanılarak, (7.8) kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.19) çözümünün (6,2) mertebeli ÇPY.

$\alpha = 0.75$ için (7.11) denklemi,

$$u(x, t) = 0.00007125345441xt^{7.5} + 0.1764791440 \times 10^{-5}xt^{9.5} - 0.1238343301 \times 10^{-17}xt^{22.5} - 0.2897967272 \times 10^{-19}xt^{24.5} \quad (7.26)$$

olarak elde edilir. (7.26) denklemi için $t^{1/2} = a$ olarak alınırsa,

$$u(x, a) = 0.00007125345441xa^{15} + 0.1764791440 \times 10^{-5}xa^{19} - 0.1238343301 \times 10^{-17}xa^{45} - 0.2897967272 \times 10^{-19}xa^{49} \quad (7.27)$$

elde edilir.

$$A = 0.00007125345441xa^{15} + 0.1764791440 \times 10^{-5}xa^{19} - 0.1238343301 \times 10^{-17}xa^{45} \quad (7.28)$$

alınırsa, $m = 49$ ve $n = 2$ için, (7.27) seri çözümüne ait çok değişkenli Padé denklemleri (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} A & A & A \\ -0.2897967272 \times 10^{-19}xa^{49} & 0 & 0 \\ 0 & -0.2897967272 \times 10^{-19}xa^{49} & 0 \end{vmatrix} \quad (7.29)$$

$$= -0.8398214310 \times 10^{-39}x^3a^{113}(-0.00007125345441 - 0.1764791440 \times 10^{-5}a^4 + 0.1238343301 \times 10^{-17}a^{30}) \quad (7.30)$$

$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.2897967272 \times 10^{-19}xa^{49} & 0 & 0 \\ 0 & -0.2897967272 \times 10^{-19}xa^{49} & 0 \end{vmatrix} \quad (7.31)$$

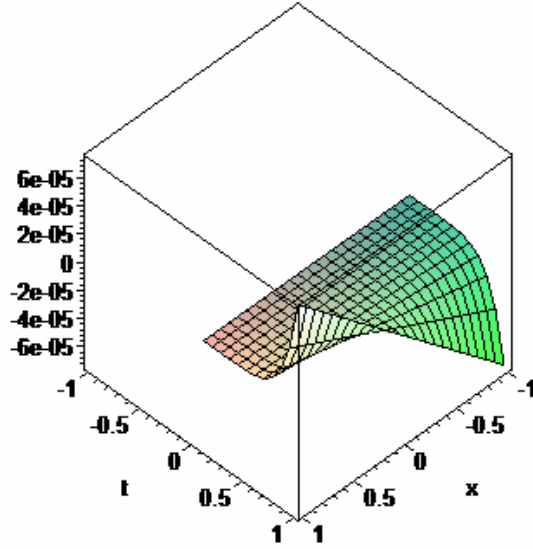
$$= 0.8398214310 \times 10^{-39}x^2a^{98} \quad (7.32)$$

biçiminde elde edilir. $a = t^{1/2}$ alınırsa, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemi için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ için elde edilen (7.26) çözümünün (49, 2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

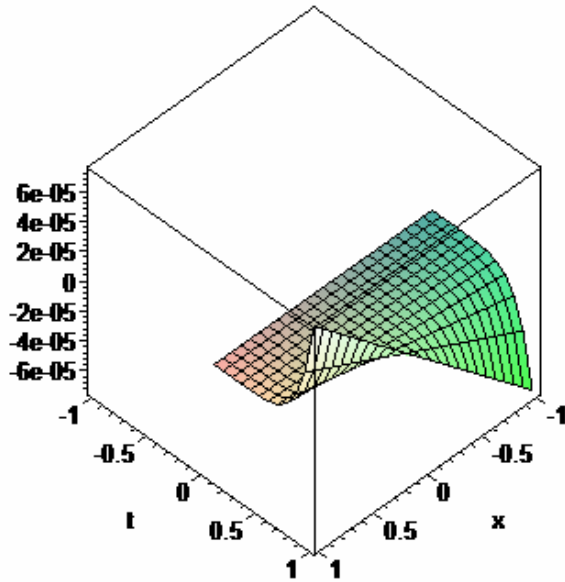
$$[49, 2]_{(x,t)} = \frac{0.8398214310 \times 10^{-39}x^3t^{113/2}(-0.00007125345441 - 0.1764791440 \times 10^{-5}t^2 + 0.1238343301 \times 10^{-17}t^{15})}{0.8398214310 \times 10^{-39}x^2t^{49}} \quad (7.33)$$

olarak elde edilir. Buna göre, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.8) non-lineer

zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin $\alpha = 0.75$ için bulunan (7.26) seri çözümünün ve $\alpha = 0.75$ için bulunan (7.26) seri çözümüne ait (49,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri ve nümerik değerleri aşağıdaki gibidir (Şekil 7.6, Şekil 7.7, Çizelge 7.1).



Şekil 7. 6 (AAY) kullanılarak, (7.8) non-lineer zaman-kesirli kısmi diferensiyel denklemini için bulunan (7.11) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ için elde edilen (7.26) çözümü.



Şekil 7. 7 AAY kullanılarak, (7.8) kesirli kısmi diferensiyel denklemini için bulunan (7.11) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ için elde edilen (7.26) çözümünün (49,2) mertebeli ÇPY.

Çizelge 7. 1 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.0$ olduğunda, (7.8) kesirli diferensiyel denkleminin (AAY) ile elde edilen (7.11) seri çözümünün ve (7.11) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.

x	t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1.0$		
		u_{AAY}	$u_{ÇPY}$	u_{AAY}	$u_{ÇPY}$	u_{AAY}	$u_{ÇPY}$	$u_{TÇ}$
0.01	0.01	0.001118860666	0.001118859998	$0.7125363089 \times 10^{-21}$	$0.7125363089 \times 10^{-21}$	0.00009999999987	0.00010000000000	0.0001
0.02	0.02	0.003138022015	0.003138007574	$0.2579676158 \times 10^{-18}$	$0.2579676148 \times 10^{-18}$	0.00039999999915	0.00040000000000	0.0004
0.03	0.03	0.005716640278	0.005716554826	$0.8097412617 \times 10^{-17}$	$0.8097412644 \times 10^{-17}$	0.00089999999028	0.00090000000000	0.0009
0.04	0.04	0.008727882362	0.008727584792	$0.9339702880 \times 10^{-16}$	$0.9339702881 \times 10^{-16}$	0.0015999999454	0.00160000000000	0.0016
0.05	0.05	0.01209607907	0.01209530419	$0.6224118481 \times 10^{-15}$	$0.6224118464 \times 10^{-15}$	0.002499997917	0.00250000000000	0.0025
0.06	0.06	0.01576873408	0.01576705530	$0.2931772549 \times 10^{-14}$	$0.2931772552 \times 10^{-14}$	0.003599993779	0.00360000000000	0.0036
0.07	0.07	0.01970633078	0.01970312778	$0.1086905954 \times 10^{-13}$	$0.1086905954 \times 10^{-13}$	0.004899984313	0.00490000000000	0.0049
0.08	0.08	0.02387754051	0.02387197301	$0.3381735603 \times 10^{-13}$	$0.3381735608 \times 10^{-13}$	0.006399965047	0.00640000000000	0.0064
0.09	0.09	0.02825661342	0.02824760190	$0.9203528751 \times 10^{-13}$	$0.9203528751 \times 10^{-13}$	0.008099929141	0.00810000000000	0.0081
0.1	0.1	0.03282181204	0.03280802591	$0.2253790147 \times 10^{-12}$	$0.2253790145 \times 10^{-12}$	0.009999866667	0.01000000000000	0.01

Uygulama 7.1.2

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right), \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (7.34)$$

non-lineer zaman-kesirli hiperbolik diferensiyel denklemi,

$$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = -2x^2. \quad (7.35)$$

başlangıç şartıyla verilsin. Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak, (7.34) kesirli diferensiyel denklemi ve (7.35) başlangıç şartı (7.7)'de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= u(x,0) + tu_x(x,0) = x^2(1-2t), \\ u_{j+1}(x,t) &= J^{\alpha}(A_j)_x, \quad j \geq 0, \end{aligned} \quad (7.36)$$

rekürens bağıntısı elde edilir. A_j , non-lineer $N = uu_x$ fonksiyonu için Adomian polinomları olarak adlandırılır. (7.36) rekürens bağıntısına göre, seri çözümünün ilk terimlerinin bir kaçı,

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= x^2(1-2t), \\ u_1(x,t) &= 6x^2 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{4t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{8t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right), \\ u_2(x,t) &= 72x^2 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{4t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} + \frac{8t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} - \frac{2\Gamma(\alpha+2)t^{2\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+2)} \right) \\ &\quad + 72x^2 \left(\frac{8\Gamma(\alpha+3)t^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(2\alpha+3)} - \frac{16\Gamma(\alpha+4)t^{2\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(2\alpha+4)} \right), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7.37)$$

biçiminde elde edilir. (7.4) seri çözümünün ilk üç terimi,

$$u(x,t) = x^2(1-2t) + 6x^2 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{4t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{8t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right) + 72x^2 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots \right). \quad (7.38)$$

olarak elde edilir (Odibat ve Momani, 2008b). $\alpha = 2$ için (7.38) denklemi,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= x^2(1-2t) + 6x^2(0.5000000000t^2 - 0.6666666668t^3 + 0.3333333334t^4) \\ &\quad + 3.000000000x^2t^4 \end{aligned} \quad (7.39)$$

olur. $m = 4$ ve $n = 2$ için, (7.39) seri çözümüne ait çok değişkenli Padé denklemleri (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x, t) = \begin{vmatrix} x^2(1-2t) + 3.000000000x^2t^2 & x^2(1-2t) & x^2 \\ -4.000000001x^2t^3 & 3.000000000x^2t^2 & -2x^2t \\ 5.000000000x^2t^4 & -4.000000001x^2t^3 & 3.000000000x^2t^2 \end{vmatrix} \quad (7.40)$$

$$= -20.00000000t^4(0.28 \times 10^{-9}t^2 - 0.34 \times 10^{-9}t - 0.04999999986)x^6 \quad (7.41)$$

$$q(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4.000000001x^2t^3 & 3.000000000x^2t^2 & -2x^2t \\ 5.000000000x^2t^4 & -4.000000001x^2t^3 & 3.000000000x^2t^2 \end{vmatrix} \quad (7.42)$$

$$= 20.00000000t^4(0.0499999999 + 0.1000000001t + 0.0500000004t^2)x^4 \quad (7.43)$$

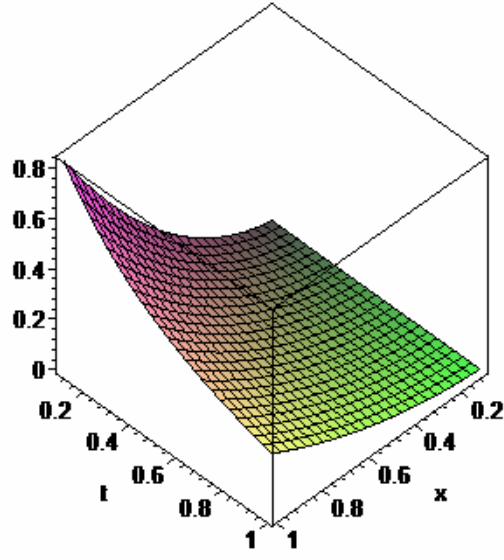
Bu durumda, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.34) non-lineer zaman-kesirli diferensiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 2$ için elde edilen (7.39) çözümünün, (4,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$[4, 2]_{(x,t)} = -\frac{1.000000000(0.28 \times 10^{-9}t^2 - 0.34 \times 10^{-9}t - 0.04999999986)x^2}{0.0499999999 + 0.1000000001t + 0.0500000004t^2} \quad (7.44)$$

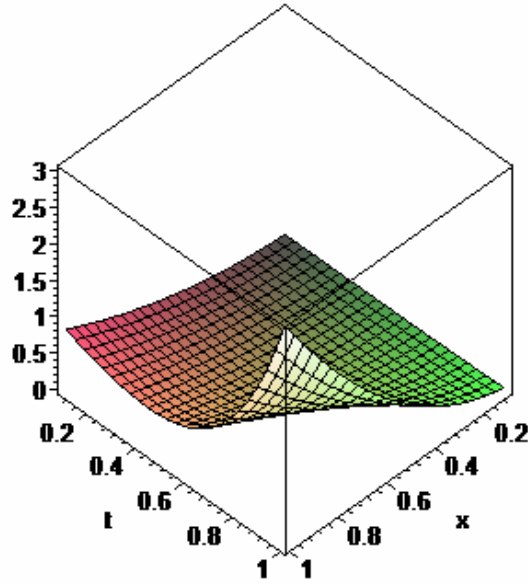
elde edilir. $\alpha = 2$ için (7.34) zaman-kesirli kısmi diferensiyel denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{t+1}\right)^2 \quad (7.45)$$

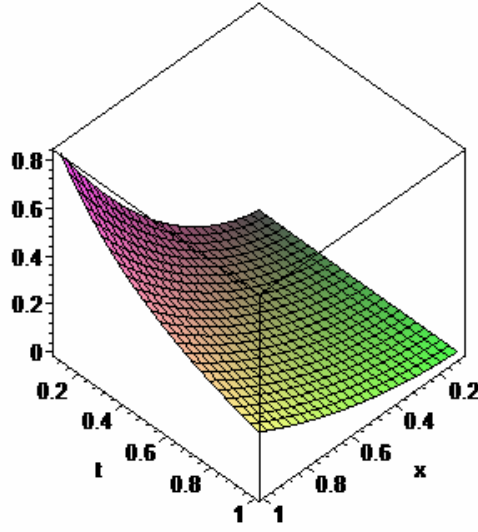
olarak verilmektedir (Odibat ve Momani, 2008b). Buna göre, $\alpha = 2$ için (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin tam çözümünün, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin $\alpha = 2$ için bulunan (7.39) seri çözümünün ve $\alpha = 2$ için bulunan (7.39) seri çözümüne ait (4,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri ve nümerik değerleri, aşağıdaki gibidir (Şekil 7.8, Şekil 7.9, Şekil 7.10, Çizelge 7.2).



Şekil 7. 8 $\alpha = 2$ için, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin tam çözümü.



Şekil 7. 9 AAY kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denklemini için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 2$ için elde edilen (7.39) çözümü.



Şekil 7. 10 (AAY) kullanılarak, (7.34) kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün $\alpha = 2$ için elde edilen (7.39) çözümünün (4,2) mertebeli ÇPY.

$\alpha = 1.5$ için (7.38) denklemi,

$$u(x, t) = x^2(1 - 2t) + 6x^2(0.7522527782t^{1.5} - 1.203604445t^{2.5} + 0.6877739683t^{3.5}) + 12.00000000x^2t^{3.0} \quad (7.46)$$

olarak elde edilir. (7.46) denklemi için $t^{1/2} = a$ olarak alınırsa,

$$u(x, a) = x^2(1 - 2a^2) + 6x^2(0.7522527782a^3 - 1.203604445a^5 + 0.6877739683a^7) + 12.00000000x^2a^6 \quad (7.47)$$

$$= x^2 - x^2 2a^2 + 4.513516669x^2a^3 - 7.221626670x^2a^5 + 4.126643810x^2a^7 + 12.00000000x^2a^6 \quad (7.48)$$

elde edilir. $m = 7$ ve $n = 2$ için, (7.48) seri çözümüne ait çok değişkenli Padé denklemleri (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} x^2 - x^2 2a^2 + 4.513516669x^2a^3 - 7.221626670x^2a^5 & x^2 - x^2 2a^2 + 4.513516669x^2a^3 & x^2 - x^2 2a^2 + 4.513516669x^2a^3 \\ 12.00000000x^2a^6 & -7.221626670x^2a^5 & 0 \\ 4.126643810x^2a^7 & 12.00000000x^2a^6 & -7.221626670x^2a^5 \end{vmatrix} \quad (7.49)$$

$$= 49.51972572(8.235760151a^5 + 0.879185531a^4 + 1.253427636a^3 + 1.403426542a^2 + 1.750000001a + 1.053153890)x^6a^{10} \quad (7.50)$$

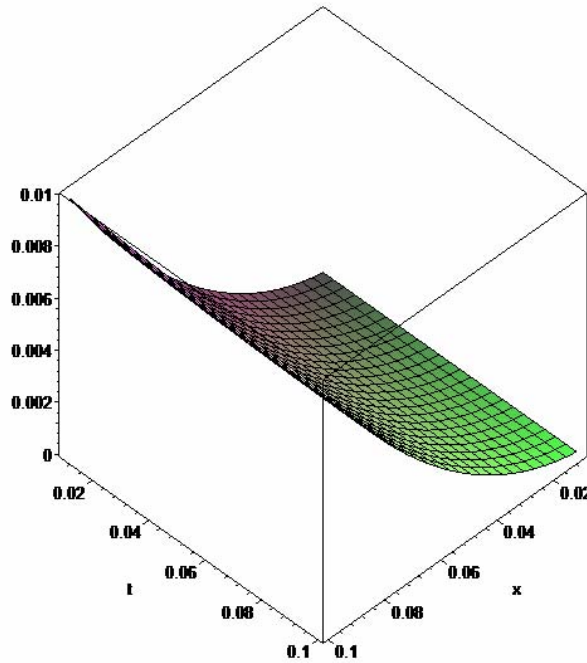
$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12.00000000x^2a^6 & -7.221626670x^2a^5 & 0 \\ 4.126643810x^2a^7 & 12.00000000x^2a^6 & -7.221626670x^2a^5 \end{vmatrix} \quad (7.51)$$

$$= 49.51972572(1.053153890 + 1.750000001a + 3.509734322a^2)x^4a^{10} \quad (7.52)$$

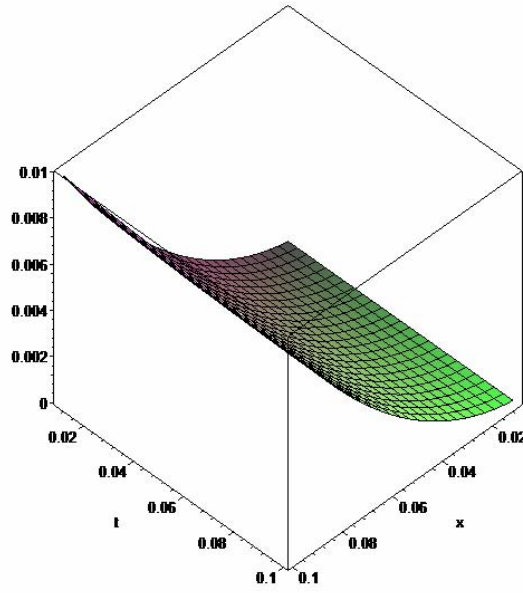
biçiminde elde edilir. $a = t^{1/2}$ alınırsa, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 1.5$ için elde edilen (7.46) çözümünün, (7, 2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$[7, 2]_{(x, t)} = \frac{(8.235760151t^{5/2} + 0.879185531t^2 + 1.253427636t^{3/2} + 1.403426542t + 1.750000001\sqrt{t} + 1.053153890)x^2}{1.053153890 + 1.750000001\sqrt{t} + 3.509734322t} \quad (7.53)$$

elde edilir. Buna göre, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.46) seri çözümünün ve $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.46) seri çözümüne ait (7, 2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri ve nümerik değerleri aşağıdaki gibidir (Şekil 7.11, Şekil 7.12, Çizelge 7.2).



Şekil 7. 11 (AAY) kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.46) seri çözümü.



Şekil 7. 12 (AAY) kullanılarak, (7.34) kesirli diferansiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün $\alpha = 1.5$ için elde edilen (7.46) çözümünün (7,2) mertebeli ÇPY.

$\alpha = 1.75$ için (7.38) denklemi,

$$u(x,t) = x^2(1-2t) + 6x^2(0.6217515726t^{1.75} - 0.9043659240t^{2.75} + 0.4823284927t^{3.75}) + 6.189965715x^2t^{3.5} \quad (7.54)$$

olarak elde edilir. (7.54) denklemi için $t^{1/4} = a$ olarak alınırsa,

$$u(x,a) = x^2(1-2a^4) + 6x^2(0.6217515726a^7 - 0.9043659240a^{11} + 0.4823284927a^{15}) + 6.189965715x^2a^{14} \quad (7.55)$$

$$= x^2 - 2x^2a^4 + 3.730509436x^2a^7 - 5.426195544x^2a^{11} + 2.893970956x^2a^{15} + 6.189965715x^2a^{14} \quad (7.56)$$

elde edilir. $m=15$ ve $n=2$ için, (7.56) seri çözümüne ait çok değişkenli Padé denklemleri (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$P(x,a) = \begin{vmatrix} x^2 - 2x^2a^4 + 3.730509436x^2a^7 - 5.426195544x^2a^{11} & x^2 - 2x^2a^4 + 3.730509436x^2a^7 - 5.426195544x^2a^{11} & x^2 - 2x^2a^4 + 3.730509436x^2a^7 - 5.426195544x^2a^{11} \\ 6.189965715x^2a^{14} & 0 & 0 \\ 2.893970956x^2a^{15} & 6.189965715x^2a^{14} & 0 \end{vmatrix}$$

(757)

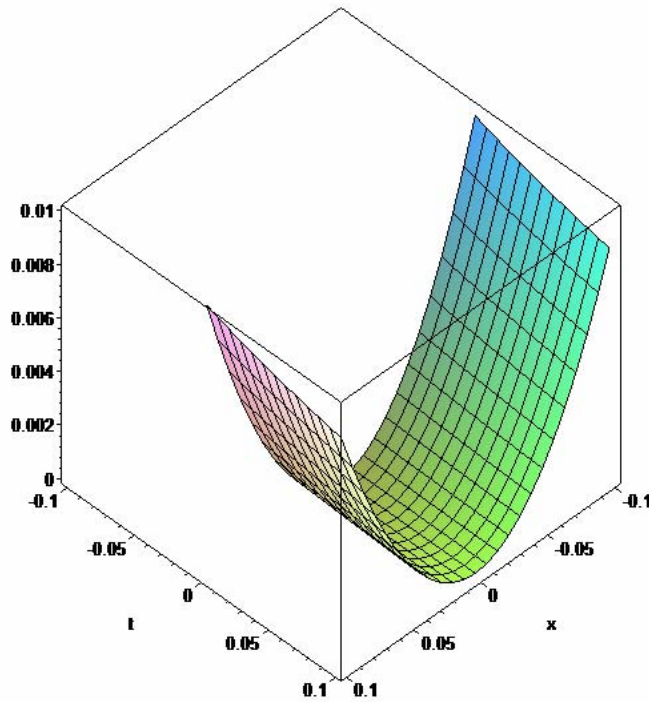
$$= -38.31567556x^6a^{28}(-1+2a^4-3.730509436a^7+5.426195544a^{11}) \quad (7.58)$$

$$q(x,a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6.189965715x^2a^{14} & 0 & 0 \\ 2.893970956x^2a^{15} & 6.189965715x^2a^{14} & 0 \end{vmatrix} = 38.31567556x^4a^{28} \quad (7.59)$$

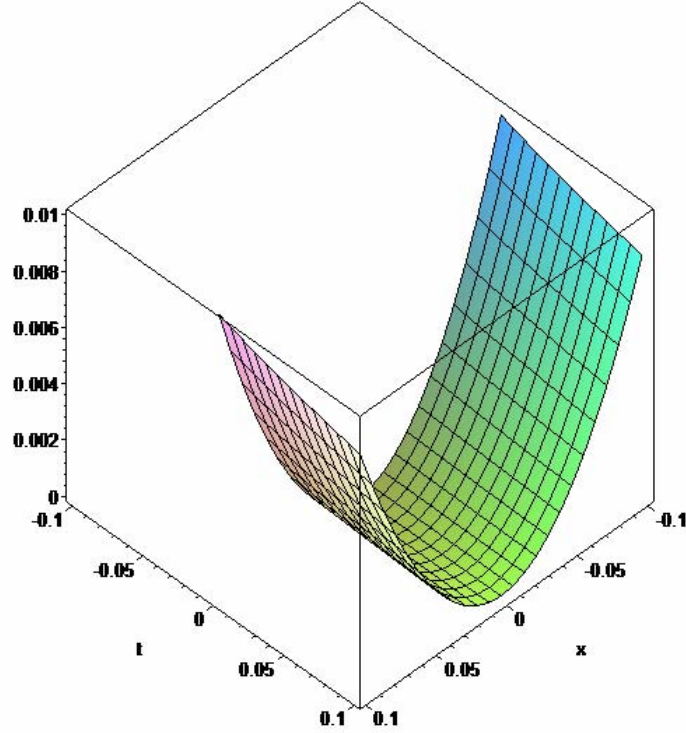
biçiminde elde edilir. $a=t^{1/4}$ alınırsa, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha=1.75$ için elde edilen (7.54) çözümünün, (15,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$[15,2]_{(x,t)} = \frac{-38.31567556x^6t^7(-1+2t-3.730509436t^{7/4}+5.426195544t^{11/4})}{38.31567556x^4t^7} \quad (7.60)$$

elde edilir. Buna göre, Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin $\alpha=1.75$ için bulunan (7.54) seri çözümünün ve $\alpha=1.75$ için bulunan (7.54) seri çözümüne ait (15,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri ve nümerik değerleri aşağıdaki gibidir (Şekil 7.13, Şekil 7.14, Çizelge 7.2).



Şekil 7. 13 (AAY) kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha=1.75$ için elde edilen (7.54) çözümü



Şekil 7. 14 (AAY) kullanılarak, (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denklemi için bulunan (7.38) seri çözümünün, $\alpha = 1.75$ için elde edilen (7.54) çözümünün ÇPY.

(7.8) ve (7.34) zaman-kesirli diferensiyel denklemlerinin, Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) ile elde edilen seri çözümünün farklı α değerleri için elde edilen çözümlere ve farklı α değerleri için elde edilen çözümlerin çok değişkenli Padé yaklaşımlarına (ÇPY) ait grafiklerden (Şekil 7.1-14) ve nümerik değerlerden görüldüğü gibi (Çizelge 7.1-2), her iki yöntemden elde edilen sonuçlar, tam çözümlerle (TÇ) çok iyi uyumluluk göstermektedirler. Fakat, çok değişkenli Padé yaklaşımı (ÇPY), Adomian ayrıştırma yöntemine (AAY) göre, tam çözümlerle daha uyumludur. Ayrıca, (7.8) ve (7.34) kesirli diferensiyel denklemlerinde, sırasıyla, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$ değerleri için, her iki nümerik yaklaşımda birbirleriyle son derece uyumludur.

Çizelge 7. 2 $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$, $\alpha = 2.0$ olduğunda, (7.34) kesirli diferansiyel denkleminin (AAY) ile elde edilen (7.38) seri çözümünün ve (7.38) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.

x	t	$\alpha = 1.5$		$\alpha = 1.75$		$\alpha = 2.0$		
		u_{AAY}	$u_{ÇPY}$	u_{AAY}	$u_{ÇPY}$	u_{AAY}	$u_{ÇPY}$	$u_{TÇ}$
0.01	0.01	0.00009844537131	0.00009844533110	0.00009811632420	0.00009811625316	0.00009802960500	0.00009802960486	0.00009802960494
0.02	0.02	0.0003889833219	0.0003889809228	0.0003855443171	0.0003855410232	0.0003844675200	0.0003844675123	0.0003844675125
0.03	0.03	0.0008664034309	0.0008663775704	0.0008529749012	0.0008529437792	0.0008483364450	0.0008483363176	0.0008483363182
0.04	0.04	0.001527388854	0.001527250241	0.001492265504	0.001492112228	0.001479290880	0.001479289940	0.001479289941
0.05	0.05	0.002370102454	0.002369595331	0.002296248891	0.002295720729	0.002267578126	0.002267573695	0.002267573696
0.06	0.06	0.003393997434	0.003392539471	0.003258613123	0.003257161294	0.003204002880	0.003203987182	0.003203987184
0.07	0.07	0.004599726730	0.004596176215	0.004373819216	0.004370404791	0.004279895445	0.004279849765	0.004279849769
0.08	0.08	0.005989109024	0.005981449991	0.005637043845	0.005629880400	0.005487083520	0.005486968446	0.005486968450
0.09	0.09	0.007565131844	0.007550068937	0.007044140677	0.007030367394	0.006817867605	0.006817607941	0.006817607945
0.1	0.1	0.009331981000	0.009304436794	0.008591616573	0.008566895894	0.008265000000	0.008264462804	0.008264462810

7.2 Genelleştirilmiş Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi (GDDY) ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY)

Genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm Yöntemi (GDDY) ve çok değişkenli Padé yaklaşımının (ÇPY) karşılaştırılması iki uygulama üzerinde gösterilecektir. Uygulamalar için, zaman-kesirli reaksiyon-difüzyon denklemleri kullanılacaktır; zaman-kesirli Fisher denklemi ve zaman-kesirli Fitzhugh–Nagumo denklemi. Reaksiyon-difüzyon denklemleri genel olarak,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.61)$$

biçiminde ifade edilir. (7.61) zaman-kesirli diferensiyel denkleminde, D difüzyon katsayısını, $f(u)$ ise, reaksiyon kinetiğini temsil eden non-lineer bir fonksiyondur.

Uygulama 7.2.1

(7.61) denkleminde $f(u) = 6u(1-u)$ olarak alınırsa, başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} \quad (7.62)$$

olarak verilen, aşağıdaki (7.63) zaman-kesirli Fisher denklemi elde edilir (Rida, El-Sayed ve Arafa, 2010).

$$D_t^\alpha u = D_x^2 u + 6u(1-u), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.63)$$

$\beta = 1$ alınıp, Çizelge 4.3'teki ilgili temel işlemler kullanılıp, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (7.63) denkleminde uygulanırsa aşağıdaki şekilde çözülür ve (Rida, vd., 2010):

$$\frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} U_{\alpha,1}(k, h+1) = (k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2, h) + 6U_{\alpha,1}(k, h) - 6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U_{\alpha,1}(r, h-s)U_{\alpha,1}(k-r, s) \quad (7.64)$$

yani;

$$U_{\alpha,1}(k, h+1) = \frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} \left[(k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2, h) + 6U_{\alpha,1}(k, h) - 6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U_{\alpha,1}(r, h-s)U_{\alpha,1}(k-r, s) \right] \quad (7.65)$$

ifadeleri elde edilir. $U_{\alpha,\beta}(k, h)$ dönüşüm fonksiyonunun, genelleştirilmiş ters dönüşümü olan

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha, \beta}(k, h)(x - x_0)^{k\alpha} (y - y_0)^{h\beta} \quad (7.66)$$

ters dönüşüm fonksiyonu (7.62) başlangıç şartına uygulanırsa, $U_{\alpha, 1}(k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, başlangıç dönüşüm katsayıları,

$$U_{\alpha, 1}(0, 0) = \frac{1}{4}, U_{\alpha, 1}(1, 0) = -\frac{1}{4}, U_{\alpha, 1}(2, 0) = \frac{1}{16}, U_{\alpha, 1}(3, 0) = \frac{1}{48}, U_{\alpha, 1}(4, 0) = -\frac{1}{96} \quad (7.67)$$

olarak elde edilir. Çizelge 4.3'teki verilen temel işlemler kullanılarak $U_{\alpha, 1}(k, h)$ için bazı değerler elde edilebilir. Bütün $U_{\alpha, 1}(k, h)$ değerleri (7.66) ters dönüşüm fonksiyonunda yerine yazılıp, gerekli işlemler yapılırsa (7.62) ve (7.63) denklemlerinin seri çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{8\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x \\ & + \left(\frac{1}{16} - \frac{5}{16\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^2 + \left(\frac{1}{48} - \frac{5}{24\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{25}{24\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^3 \\ & + \left(-\frac{1}{96} + \frac{5}{96\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{425}{384\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^4 \end{aligned} \quad (7.68)$$

(7.68) seri çözümü denklemini aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{96}x^4 + \dots \right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{8}x - \frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \dots \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ & + \left(\frac{25}{8} + \frac{25}{8}x - \frac{25}{8}x^2 - \frac{25}{24}x^3 + \frac{425}{384}x^4 + \dots \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \end{aligned} \quad (7.69)$$

$\alpha = 1.0$ değeri için, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümü,

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{x-5t})^2} \quad (7.70)$$

olarak verilmiştir (Rida, vd., 2010). (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için aşağıdaki kuvvet serisi,

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
& - 0.0104166667x^4 + (1.250000000 - 0.625000000x - 0.312500000x^2 \\
& - 0.208333333x^3 + 0.052083333x^4)t + 0.500000000(3.125000000 \\
& + 3.125000000x - 3.125000000x^2 - 1.401666667x^3 + 1.106770833x^4)t^2
\end{aligned} \tag{7.71}$$

$$\begin{aligned}
= & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
& - 0.0104166667x^4 + 1.250000000t - 0.625000000xt - 0.312500000x^2t \\
& - 0.208333333x^3t + 0.052083333x^4t + 1.562500000t^2 + 1.562500000xt^2 \\
& - 1.562500000x^2t^2 - 0.520833335x^3t^2 + 0.5533854165x^4t^2
\end{aligned} \tag{7.72}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
A = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
& - 0.0104166667x^4 + 1.250000000t - 0.625000000xt - 0.312500000x^2t \\
& - 0.208333333x^3t + 1.562500000t^2 + 1.562500000xt^2 - 1.562500000x^2t^2
\end{aligned} \tag{7.73}$$

$$\begin{aligned}
B = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
& + 1.250000000t - 0.625000000xt - 0.312500000x^2t + 1.562500000t^2 \\
& + 1.562500000xt^2
\end{aligned} \tag{7.74}$$

$$\begin{aligned}
C = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 \\
& + 1.250000000t - 0.625000000xt + 1.562500000t^2
\end{aligned} \tag{7.75}$$

olarak alınıp, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisinin $m = 4$ ve $n = 2$ için çok değişkenli Padé denklemleri, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$P(x,t) = \begin{vmatrix}
A & B & C \\
0.0520833333x^4t - 0.520833335x^3t^2 & -0.0104166667x^4 - 0.208333333x^3t - 1.562500000x^2t^2 & 0.020833333x^3 - 0.312500000x^2t + 1.562500000xt^2 \\
0.5533854165x^4t^2 & 0.0520833333x^4t - 0.520833335x^3t^2 & -0.0104166667x^4 - 0.208333333x^3t - 1.562500000x^2t^2
\end{vmatrix} \tag{7.76}$$

$$\begin{aligned}
&= -0.5533854165x^4(-0.0001225490198x^5t - 0.03063725491t^5x^4 \\
&+ 0.3082873774t^4x^3 + 0.02037377449t^3x^4 + 0.003604983663t^2x^5 \\
&+ 0.00004901960791x^5 - 0.00001225490198x^6 - 1.470588235t^4 \\
&- 0.3676470590t^4x^2 + 0.002757352939t^3x^6 - 0.04289215684t^3x^3 \\
&+ 0.09803921566t^3x^2 - 0.0001633986928tx^6 - 0.2573529412t^3x \\
&+ 0.1608455885t^4x + 0.0001225490196x^7t^2 - 0.01072303921x^5t^4 \\
&- 0.06318933824t^5x^5 - 0.001914828416t^5x^6 + 0.00004084967320x^8t^2 \\
&- 0.002323325162x^7t^3 + 0.02221200981x^6t^4 - 0.00002042483661x^9t^2 \\
&- 0.0006382761434x^8t^3 + 0.007531658495x^7t^4 - 0.4084967326 \times 10^{-5}x^7 \\
&+ 0.2042483663 \times 10^{-5}x^8 - 9.191176472t^6 + 5.840226718t^6x^2 - 9.334788603t^6x \\
&- 7.352941178t^5 + 4.049862133t^5x^3 - 2.202052696t^5x^2 + 1.953125001t^5x \\
&+ 0.3498391544t^4x^4 + 0.05895118467t^3x^5 + 0.002024611930t^2x^6 \\
&+ 0.0001021241832tx^7 - 0.00004901960791x^4 - 0.006587009808t^2x^4 \\
&+ 0.02205882354t^2x^3 + 0.001470588237tx^4 - 0.03431372552t^2x^2 - 0.001960784315tx^3)
\end{aligned} \tag{7.77}$$

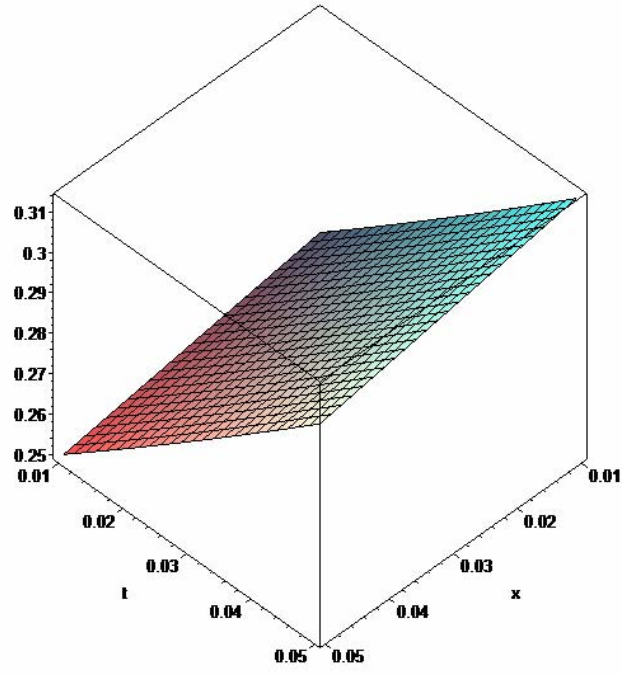
$$q(x,t) = \begin{vmatrix} & 1 & & 1 & & 1 \\ 0.05208333333x^4t - 0.5208333335x^3t^2 & -0.01041666667x^4 - 0.2083333333x^3t - 1.562500000x^2t^2 & 0.02083333333x^3 - 0.3125000000x^2t + 1.562500000xt^2 \\ 0.5533854165x^4t^2 & 0.05208333333x^4t - 0.5208333335x^3t^2 & -0.01041666667x^4 - 0.2083333333x^3t - 1.562500000x^2t^2 \end{vmatrix} \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.5533854165x^4(1.029411764t^3x + 5.882352942t^4 + 0.091911764t^4x \\
&- 0.001960784314t^2x^5 + 0.001960784314t^3x^4 + 0.02083333333t^3x^5 \\
&+ 0.01531862746t^2x^4 + 0.1102941176t^3x^3 + 2.052696079t^4x^2 \\
&+ 0.007843137258tx^3 + 0.1372549020t^2x^2 + 0.009803921564t^2x^3 \\
&- 0.0490196080t^3x^2 + 0.0001960784315x^4 + 0.0009803921572tx^4)
\end{aligned} \tag{7.79}$$

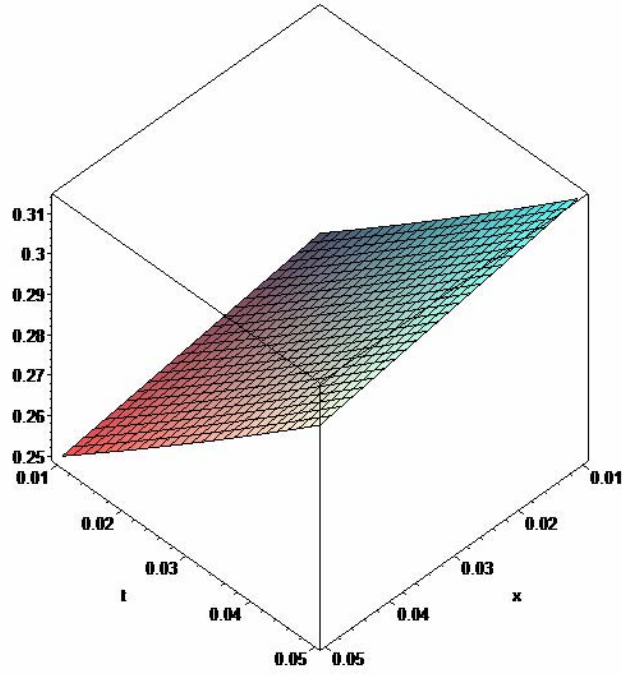
biçiminde elde edilir. Buna göre, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisinin $m = 4$ ve $n = 2$, yani; $(4, 2)$ mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned}
[4, 2]_{(x,t)} = & -(-0.0001225490198x^5t - 0.03063725491t^5x^4 \\
& + 0.3082873774t^4x^3 + 0.02037377449t^3x^4 + 0.003604983663t^2x^5 \\
& + 0.00004901960791x^5 - 0.00001225490198x^6 - 1.470588235t^4 \\
& - 0.3676470590t^4x^2 + 0.002757352939t^3x^6 - 0.04289215684t^3x^3 \\
& + 0.09803921566t^3x^2 - 0.0001633986928tx^6 - 0.2573529412t^3x \\
& + 0.1608455885t^4x + 0.0001225490196x^7t^2 - 0.01072303921x^5t^4 \\
& - 0.06318933824t^5x^5 - 0.001914828416t^5x^6 + 0.00004084967320x^8t^2 \\
& - 0.002323325162x^7t^3 + 0.02221200981x^6t^4 - 0.00002042483661x^9t^2 \\
& - 0.0006382761434x^8t^3 + 0.007531658495x^7t^4 - 0.4084967326 \times 10^{-5}x^7 \\
& + 0.2042483663 \times 10^{-5}x^8 - 9.191176472t^6 + 5.840226718t^6x^2 - 9.334788603t^6x \\
& - 7.352941178t^5 + 4.049862133t^5x^3 - 2.202052696t^5x^2 + 1.953125001t^5x \\
& + 0.3498391544t^4x^4 + 0.05895118467t^3x^5 + 0.002024611930t^2x^6 \\
& + 0.0001021241832tx^7 - 0.00004901960791x^4 - 0.006587009808t^2x^4 \\
& + 0.02205882354t^2x^3 + 0.001470588237tx^4 - 0.03431372552t^2x^2 \\
& - 0.001960784315tx^3)/(1.029411764t^3x + 5.882352942t^4 + 0.091911764t^4x \\
& - 0.001960784314t^2x^5 + 0.001960784314t^3x^4 + 0.02083333333t^3x^5 \\
& + 0.01531862746t^2x^4 + 0.1102941176t^3x^3 + 2.052696079t^4x^2 \\
& + 0.007843137258tx^3 + 0.1372549020t^2x^2 + 0.009803921564t^2x^3 \\
& - 0.0490196080t^3x^2 + 0.0001960784315x^4 + 0.0009803921572tx^4)
\end{aligned} \tag{7.80}$$

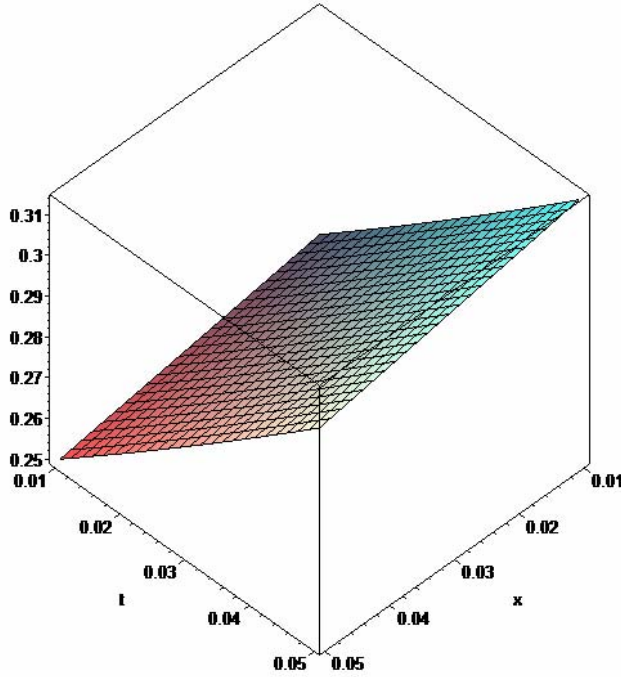
olarak elde edilir. Buna göre, $\alpha = 1.0$ değeri için, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümünün, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisinin ve (7.72) kuvvet serisinin çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri Şekil 7.15, Şekil 7.16, Şekil 7.17’de, nümerik değerleri ise Çizelge 7.3’te verilmiştir.



Şekil 7. 15 $\alpha = 1.0$ değeri için, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümü



Şekil 7. 16 (7.63) Zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisi



Şekil 7. 17 (7.63) Zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ değeri için elde edilen (7.72) kuvvet serisinin ÇPY.

(7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümü, $\alpha = 0.5$ değeri için,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\
 & - 0.01041666667x^4 + 1.128379167(1.250000000 - 0.6250000000x \\
 & - 0.3125000000x^2 - 0.2083333333x^3 + 0.05208333333x^4)t^{0.5} \\
 & + (3.125000000 + 3.125000000x - 3.125000000x^2 - 1.401666667x^3 \\
 & + 1.106770833x^4)t
 \end{aligned} \tag{7.81}$$

olur. $t^{1/2} = a$ alınırsa (7.81) seri çözümü,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\
 & - 0.01041666667x^4 + 1.128379167(1.250000000 - 0.6250000000x \\
 & - 0.3125000000x^2 - 0.2083333333x^3 + 0.05208333333x^4)a \\
 & + (3.125000000 + 3.125000000x - 3.125000000x^2 - 1.401666667x^3 \\
 & + 1.106770833x^4)a^2
 \end{aligned} \tag{7.82}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
&- 0.01041666667x^4 + 1.410473959a - 0.7052369794ax - 0.3526184897ax^2 \\
&- 0.2350789931ax^3 + 0.05876974828ax^4 + 3.125000000a^2 + 3.125000000a^2x \\
&- 3.125000000a^2x^2 - 1.401666667a^2x^3 + 1.106770833a^2x^4
\end{aligned} \tag{7.83}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
E &= 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
&- 0.01041666667x^4 + 1.410473959a - 0.7052369794ax - 0.3526184897ax^2 \\
&- 0.2350789931ax^3 + 3.125000000a^2 + 3.125000000a^2x - 3.125000000a^2x^2
\end{aligned} \tag{7.84}$$

$$\begin{aligned}
F &= 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 + 0.0208333333x^3 \\
&+ 1.410473959a - 0.7052369794ax - 0.3526184897ax^2 + 3.125000000a^2 \\
&+ 3.125000000a^2x
\end{aligned} \tag{7.85}$$

$$\begin{aligned}
G &= 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.0625000000x^2 \\
&+ 1.410473959a - 0.7052369794ax + 3.125000000a^2
\end{aligned} \tag{7.86}$$

olarak alınırsa, (7.83) seri çözümüne ait Padé denklemleri, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x,a) = \begin{vmatrix} E & F & G \\ 0.05876974828a^4 - 1.401666667a^2x^3 & -0.01041666667x^4 - 0.2350789931ax^3 - 3.125000000a^2x^2 & 0.0208333333x^3 - 0.3526184897ax^2 - 0.3125000000a^2x \\ 1.106770833a^2x^4 & 0.05876974828a^4 - 1.401666667a^2x^3 & -0.01041666667x^4 - 0.2350789931ax^3 - 3.125000000a^2x^2 \end{vmatrix} \tag{7.87}$$

$$\begin{aligned}
&= -1.106770833x^4(1.724963655a^4x + 0.00055331270431ax^4 \\
&+ 0.00002450980395x^5 - 0.6127450986 \times 10^{-5}x^6 - 0.2042483661 \times 10^{-5}x^7 \\
&+ 0.1021241831 \times 10^{-5}x^8 + 0.02621254569a^2x^3 - 0.005445232711a^2x^4 \\
&- 0.03677161152a^2x^2 - 0.0008296905640ax^3 - 0.2074226410a^3x \\
&+ 0.000104497505a^2x^5 + 0.07657717919a^3x^4 + 0.0659779402a^4x^3 \\
&- 0.1247554646a^3x^3 - 1.014826625a^4x^2 + 0.1 \times 10^{-12}x^5a + 0.1019438376a^3x^2 \\
&- 0.00006914088034ax^6 - 2.941176471a^4 - 36.76470589a^6 + 23.36090687a^6x^2 \\
&- 37.33915441a^6x - 16.59381128a^5 + 9.204379692a^5x^3 - 2.830454788a^5x^2 \\
&+ 5.444844332a^5x + 0.3449658071a^4x^4 + 0.07042023202a^3x^5 + 0.001477816147a^2x^6 \\
&+ 0.00004609392028ax^7 - 0.00002450980395x^4)
\end{aligned} \tag{7.88}$$

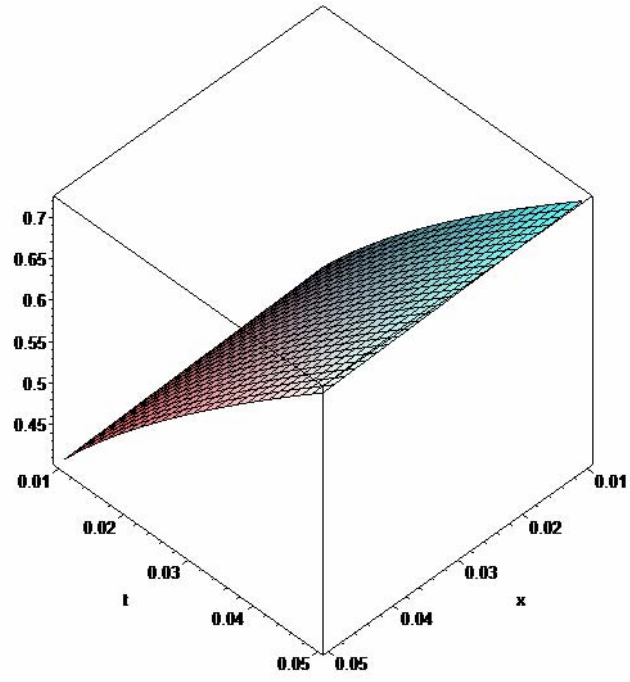
$$q(x,a) = \begin{vmatrix} & 1 & & 1 & & 1 \\ 0.05876974828a^4 & -1.401666667a^2x^3 & -0.01041666667x^4 & -0.2350789931ax^3 & -3.125000000a^2x^2 & 0.02083333333x^3 & -0.3526184897ax^2 & -0.3125000000a^2x \\ & 1.106770833a^2x^4 & & 0.05876974828a^4 & -1.401666667a^2x^3 & & -0.01041666667x^4 & -0.2350789931ax^3 & -3.125000000a^2x^2 \end{vmatrix} \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} &= 1.106770833x^4(11.76470588a^4 + 0.003318762259ax^3 \\ &+ 0.00009803921577x^4 + 0.1470864461a^2x^2 + 0.02351215238a^2x^3 \\ &0.01353735183a^2x^4 + 0.1244535845a^3x^3 + 4.105392158a^4x^2 \\ &- 0.4079311941a^3x^2 + 0.183823528a^4x + 0.0005531270429ax^4 \\ &+ 0.8296905634a^3x) \end{aligned} \quad (7.90)$$

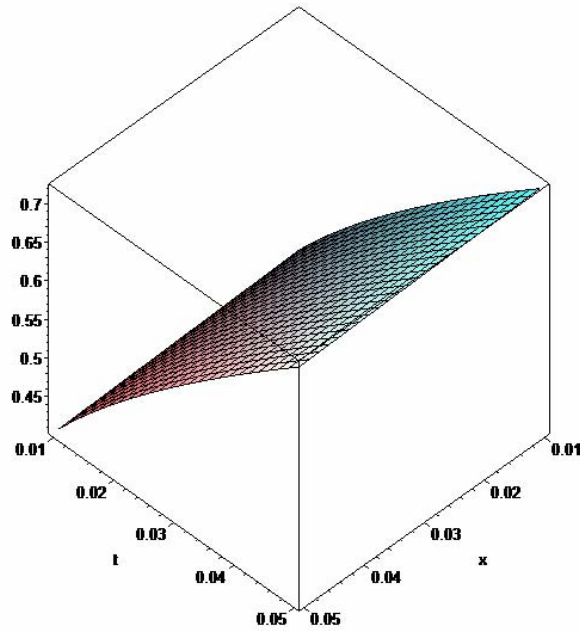
olarak elde edilir. $a = t^{1/2}$ alınırsa, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ değeri için elde edilen (7.81) kuvvet serisine ait (4,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned} [4,2]_{(x,t)} &= -(1.724963655t^2x + 0.00055331270431\sqrt{t}x^4 + 0.00002450980395x^5 \\ &- 0.6127450986 \times 10^{-5}x^6 - 0.2042483661 \times 10^{-5}x^7 + 0.1021241831 \times 10^{-5}x^8 \\ &+ 0.02621254569tx^3 - 0.005445232711tx^4 - 0.03677161152tx^2 \\ &- 0.0008296905640\sqrt{t}x^3 - 0.2074226410t^{3/2}x + 0.000104497505tx^5 \\ &+ 0.07657717919t^{3/2}x^4 + 0.0659779402t^2x^3 - 0.1247554646t^{3/2}x^3 \\ &- 1.014826625t^2x^2 + 0.1 \times 10^{-12}x^5\sqrt{t} + 0.1019438376t^{3/2}x^2 \\ &- 0.00006914088034\sqrt{t}x^6 - 2.941176471t^2 - 36.76470589t^3 \\ &+ 23.36090687t^3x^2 - 37.33915441t^3x - 16.59381128t^{5/2} + 9.204379692t^{5/2}x^3 \\ &- 2.830454788t^{5/2}x^2 + 5.444844332t^{5/2}x + 0.3449658071t^2x^4 + 0.07042023202t^{3/2}x^5 \\ &+ 0.001477816147tx^6 + 0.00004609392028\sqrt{t}x^7 - 0.00002450980395x^4)/(11.76470588t^2 \\ &+ 0.003318762259\sqrt{t}x^3 + 0.00009803921577x^4 + 0.1470864461tx^2 + 0.02351215238tx^3 \\ &0.01353735183tx^4 + 0.1244535845t^{3/2}x^3 + 4.105392158t^2x^2 - 0.4079311941t^{3/2}x^2 \\ &+ 0.183823528t^2x + 0.0005531270429\sqrt{t}x^4 + 0.8296905634t^{3/2}x) \end{aligned} \quad (7.91)$$

olarak elde edilir. (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ değeri için edilen (7.81) kuvvet serisinin ve (7.81) kuvvet serisine ait (4,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7. 18 ve şekil 7.19' de, nümerik değerler ise çizelge 7.3'te verilmiştir.



Şekil 7. 18 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ değeri için edilen (7.81) kuvvet serisi.



Şekil 7. 19 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.5$ değeri için edilen (7.81) kuvvet serisinin ÇPY.

(7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümü, $\alpha = 0.75$ değeri için,

$$\begin{aligned} u(x,t) = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\ & -0.01041666667x^4 + 1.088065252(1.250000000 - 0.6250000000x - 0.3125000000x^2 \\ & -0.2083333333x^3 + 0.05208333333x^4)t^{0.75} + 0.7522527782(3.125000000 + 3.125000000x \\ & -3.125000000x^2 - 1.401666667x^3 + 1.106770833x^4)t^{1.50} \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\ & -0.01041666667x^4 + 1.360081565t^{0.75} - 0.6800407825t^{0.75}x - 0.3400203912t^{0.75}x^2 \\ & -0.22668002608t^{0.75}x^3 + 0.05667006520t^{0.75}x^4 + 2.350789932t^{1.50} + 2.350789932t^{1.50}x \\ & -2.350789932t^{1.50}x^2 - 0.7835966442t^{1.50}x^3 + 0.8325714340t^{1.50}x^4 \end{aligned} \quad (7.93)$$

olur. $t^{1/4} = a$ alınırsa (7.93) seri çözümü,

$$\begin{aligned} u(x,a) = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\ & -0.01041666667x^4 + 1.360081565a^3 - 0.6800407825a^3x - 0.3400203912a^3x^2 \\ & -0.22668002608a^3x^3 + 0.05667006520a^3x^4 + 2.350789932a^6 + 2.350789932a^6x \\ & -2.350789932a^6x^2 - 0.7835966442a^6x^3 + 0.8325714340a^6x^4 \end{aligned} \quad (7.94)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} H = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\ & -0.01041666667x^4 + 1.360081565a^3 - 0.6800407825a^3x - 0.3400203912a^3x^2 \\ & -0.22668002608a^3x^3 + 0.05667006520a^3x^4 + 2.350789932a^6 + 2.350789932a^6x \end{aligned} \quad (7.95)$$

$$\begin{aligned} K = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\ & -0.01041666667x^4 + 1.360081565a^3 - 0.6800407825a^3x - 0.3400203912a^3x^2 \\ & -0.22668002608a^3x^3 + 2.350789932a^6 \end{aligned} \quad (7.96)$$

$$\begin{aligned} L = & 0.2500000000 - 0.2500000000x - 0.06250000000x^2 + 0.02083333333x^3 \\ & -0.01041666667x^4 + 1.360081565a^3 - 0.6800407825a^3x - 0.3400203912a^3x^2 \end{aligned} \quad (7.97)$$

alınırsa, (7.94) seri çözümüne ait, $m = 7$, $n = 2$ için Padé denklemleri, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x,a) = \begin{vmatrix} H & K & L \\ -2.350789932a^6x^2 & 0.05667006520a^3x^4 + 2.350789932a^6x & 2.350789932a^6 - 0.22668002608a^3x^3 \\ -0.7835966442a^6x^3 & -2.350789932a^6x^2 & 0.05667006520a^3x^4 + 2.350789932a^6x \end{vmatrix} \quad (7.98)$$

$$\begin{aligned}
&= 1.842071102x^2(0.55703900549a^6x^4 + 14.10473959a^{12} - 0.9467234329a^6x^3 \\
&- 0.00001816058365x^{10} + 0.00003632116729x^9 + 0.0004358540080x^6 \\
&- 0.0004358540080x^7 + 0.0001089635019x^8 + 0.07834715868a^3x^4 \\
&- 0.03616022708a^3x^3 + 1.500000000a^6 + 0.8750000002a^6x^2 \\
&- 0.999999998a^6x - 0.04520028386a^3x^5 + 2.040122348a^9x^2 \\
&+ 18.80631945a^{12}x + 0.0000987995000a^3x^{10} - 5.100305867a^9x^3 \\
&+ 0.00387786414a^3x^6 - 0.001848360442a^3x^8 - 0.0006463106887a^3x^9 \\
&+ 0.005343335889a^3x^7 - 0.05054699319a^6x^7 + 0.0297127611a^6x^5 \\
&- 0.07855231035a^6x^6 - 1.416751630a^9x^4 - 1.360081565a^9x + 8.160489388a^9)a^6
\end{aligned} \tag{7.99}$$

$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2.350789932a^6x^2 & 0.05667006520a^3x^4 + 2.350789932a^6x & 2.350789932a^6 - 0.22668002608a^3x^3 \\ -0.7835966442a^6x^3 & -2.350789932a^6x^2 & 0.05667006520a^3x^4 + 2.350789932a^6x \end{vmatrix} \tag{7.100}$$

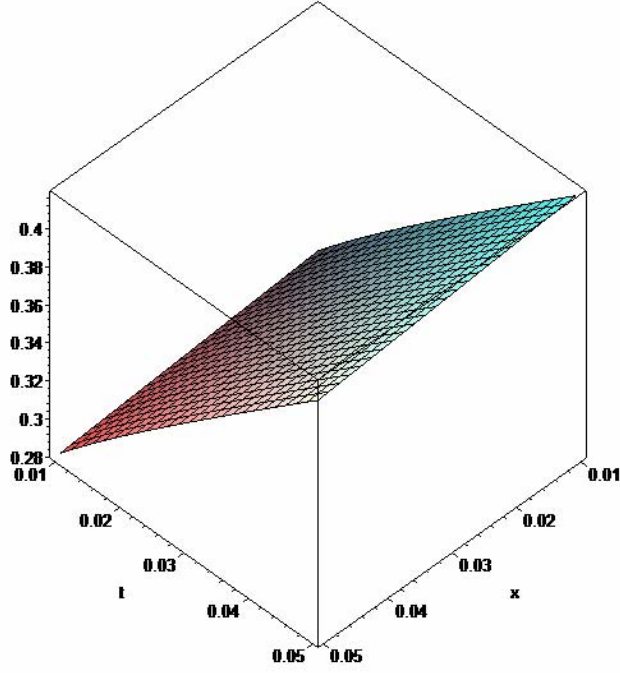
$$\begin{aligned}
&= 1.842071102x^2(-0.1446409084a^3x^3 + 0.1687477264a^3x^4 + 5.999999998a^6 \\
&+ 1.999999999a^6x + 3.999999999a^6x^2 + 0.001743416031x^6 + 0.02410681806a^3x^5)a^6
\end{aligned} \tag{7.101}$$

olarak elde edilir. $t^{1/4} = a$ alınırsa, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.75$ değeri için elde edilen (7.92) kuvvet serisine ait (7,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

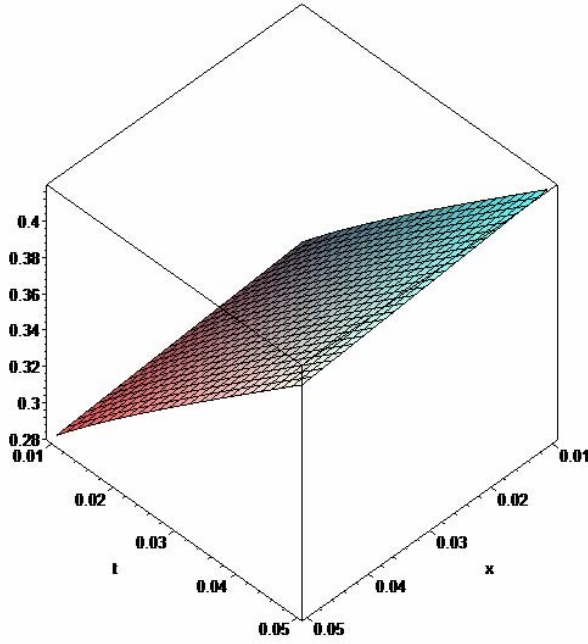
$$\begin{aligned}
[7, 2]_{(x,t)} &= (0.55703900549t^{3/2}x^4 + 14.10473959t^3 - 0.9467234329t^{3/2}x^3 \\
&- 0.00001816058365x^{10} + 0.00003632116729x^9 + 0.0004358540080x^6 \\
&- 0.0004358540080x^7 + 0.0001089635019x^8 + 0.07834715868t^{3/4}x^4 \\
&- 0.03616022708t^{3/4}x^3 + 1.500000000t^{3/2} + 0.8750000002t^{3/2}x^2 \\
&- 0.999999998t^{3/2}x - 0.04520028386t^{3/4}x^5 + 2.040122348t^{9/4}x^2 \\
&+ 18.80631945t^3x + 0.0000987995000t^{3/4}x^{10} - 5.100305867t^{9/4}x^3 \\
&+ 0.00387786414t^{3/4}x^6 - 0.001848360442t^{3/4}x^8 - 0.0006463106887t^{3/4}x^9 \\
&+ 0.005343335889t^{3/4}x^7 - 0.05054699319t^{3/2}x^7 + 0.0297127611t^{3/2}x^5 \\
&- 0.07855231035t^{3/2}x^6 - 1.416751630t^{9/4}x^4 - 1.360081565t^{9/4}x \\
&+ 8.160489388t^{9/4})/(-0.1446409084t^{3/4}x^3 + 0.1687477264t^{3/4}x^4 \\
&+ 5.999999998t^{3/2} + 1.999999999t^{3/2}x + 3.999999999t^{3/2}x^2 \\
&+ 0.001743416031x^6 + 0.02410681806t^{3/4}x^5)
\end{aligned} \tag{7.102}$$

olarak elde edilir. (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.75$ değeri için edilen (7.92) kuvvet serisine ve (7.92) kuvvet serisine ait (7,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7. 20 ve şekil 7.21' de,

nümerik değerler ise çizelge 7.3'te verilmiştir.



Şekil 7. 20 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.75$ değeri için edilen (7.92) kuvvet serisi.



Şekil 7. 21 (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün $\alpha = 0.75$ değeri için edilen (7.92) kuvvet serisinin ÇPY.

Çizelge 7. 3 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.0$ olduğunda, (7.63) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.69) seri çözümünün ve (7.69) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.

x	t	$\alpha = 0.50$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1.0$		
		u_{GDDY}	$u_{ÇPY}$	u_{GDDY}	$u_{ÇPY}$	u_{GDDY}	$u_{ÇPY}$	$u_{TÇ}$
0.01	0.01	0.4194042447	0.4194042447	0.2926737579	0.2926737582	0.2601012529	0.2601012532	0.2600986403
0.02	0.02	0.5062062188	0.5062062185	0.3234070082	0.3234070086	0.2704098802	0.2704098802	0.2703889140
0.03	0.03	0.5796147904	0.5796147915	0.3516746983	0.3516747025	0.2809328587	0.2809328609	0.2808618961
0.04	0.04	0.6462358324	0.6462358347	0.3787958658	0.3787958858	0.2916767275	0.2916767370	0.2915080826
0.05	0.05	0.7086276674	0.7086276723	0.4053118054	0.4053118748	0.3026475836	0.3026476112	0.3023174246
0.06	0.06	0.7680978547	0.7680978705	0.4315082304	0.4315084185	0.3138510763	0.3138511466	0.3132793692
0.07	0.07	0.8254176805	0.8254177184	0.4575570408	0.4575574788	0.3252924053	0.3252925577	0.3243829010
0.08	0.08	0.8810841195	0.8810842025	0.4835702540	0.4835711634	0.3369763157	0.3369766126	0.3356165892
0.09	0.09	0.9354369921	0.9354371578	0.5096247442	0.5096264889	0.3489070959	0.3489076324	0.3469686330
0.1	0.1	0.9887186126	0.9887189207	0.5357751408	0.5357782276	0.3610885742	0.3610894836	0.35842669144

Uygulama 7.2.2

(7.61) denkleminde $f(u) = u(1-u)(u-\mu)$ olarak alınırsa, başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)} \quad (7.103)$$

olarak verilen, aşağıdaki (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denklemi elde edilir (Rida, El-Sayed ve Arafa, 2010).

$$D_t^\alpha u = D_x^2 u + u(1-u)(u-\mu), \quad \mu > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.104)$$

Çizelge 4.3'teki ilgili temel işlemler kullanılıp, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (7.104) denkleminde uygulanırsa aşağıdaki şekilde çözülür ve (Rida, vd., 2010):

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} U_{\alpha,1}(k, h+1) &= (k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2, h) - \mu U_{\alpha,1}(k, h) + (1+\mu) \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U_{\alpha,1}(r, h-s) U_{\alpha,1}(k-r, s) \\ &\quad - \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U_{\alpha,1}(r, h-s-p) U_{\alpha,1}(t, s) U_{\alpha,1}(k-r-t, p) \end{aligned} \quad (7.105)$$

yani;

$$\begin{aligned} U_{\alpha,1}(k, h+1) &= \frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} \left[(k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2, h) - \mu U_{\alpha,1}(k, h) + (1+\mu) \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U_{\alpha,1}(r, h-s) U_{\alpha,1}(k-r, s) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U_{\alpha,1}(r, h-s-p) U_{\alpha,1}(t, s) U_{\alpha,1}(k-r-t, p) \right] \end{aligned} \quad (7.106)$$

ifadeleri elde edilir. $U_{\alpha,\beta}(k, h)$ dönüşüm fonksiyonunun, genelleştirilmiş ters dönüşümü olan

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha,\beta}(k, h) (x-x_0)^{k\alpha} (y-y_0)^{h\beta}$$

(7.66) ters dönüşüm fonksiyonu (7.103) başlangıç şartına uygulanırsa, $U_{\alpha,1}(k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, başlangıç dönüşüm katsayıları,

$$U_{\alpha,1}(0, 0) = \frac{1}{2}, \quad U_{\alpha,1}(1, 0) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad U_{\alpha,1}(2, 0) = 0, \quad U_{\alpha,1}(3, 0) = -\frac{1}{96}, \quad U_{\alpha,1}(4, 0) = 0. \quad (7.107)$$

olarak elde edilir. Çizelge 4.3'teki verilen temel işlemler kullanılarak $U_{\alpha,1}(k, h)$ için bazı değerler elde edilebilir. Bütün $U_{\alpha,1}(k, h)$ değerleri (7.66) ters dönüşüm fonksiyonunda yerine yazılıp, gerekli işlemler yapılırsa (7.103) ve (7.104) denklemlerinin seri çözümleri aşağıdaki

şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & \left(\frac{1}{2} + \frac{1-2\mu}{8\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{(1-2\mu)^2}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{(1-2\mu)^2}{32\sqrt{2}\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x \\
 & + \left(\frac{1-2\mu}{64\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{(1-2\mu)^2}{64\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^2 + \left(-\frac{1}{96\sqrt{2}} + \frac{(1-2\mu)^2}{192\sqrt{2}\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^3 \\
 & + \left(\frac{1-2\mu}{768\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{(1-2\mu)^2}{768\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^4
 \end{aligned} \quad (7.108)$$

(7.108) seri çözümünü aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} x - \frac{1}{96\sqrt{2}} x^3 + \frac{1}{1920\sqrt{2}} x^5 + \dots \right) + \frac{1-2\mu}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{32} x^2 + \frac{1}{384} x^4 - \frac{17}{92160} x^6 + \dots \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
 & - \left(\frac{(1-2\mu)}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{2}} x - \frac{1}{16} x^2 - \frac{1}{48\sqrt{2}} x^3 + \frac{1}{192} x^4 + \dots \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}
 \end{aligned} \quad (7.109)$$

$\alpha = 1.0$ vedeğeri için, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin tam çözümü,

$$u(x,t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1-2\mu}{\sqrt{2}} t \right)}} \quad (7.110)$$

olarak verilmiştir (Rida, vd., 2010). (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denklemi genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değeri için aşağıdaki kuvvet serisi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\
 & + 0.05000000000(0.2500000000 - 0.03125000000x^2 + 0.002604166667x^4 \\
 & - 0.0001844618056x^6)t - 0.001250000000(0.5000000000 - 0.08838834762x \\
 & - 0.06250000000x^2 - 0.01473139128x^3 + 0.005208333333x^4)t^2
 \end{aligned} \quad (7.111)$$

$$\begin{aligned}
 = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 \\
 & + 0.0003682847818x^5 + 0.01250000000t - 0.001562500000tx^2 \\
 & + 0.0001302088884tx^4 - 0.9223090280 \times 10^{-5}tx^6 - 0.0006250000000t^2 \\
 & + 0.0001104854345t^2x + 0.00007812500000t^2x^2 + 0.00001841423910t^2x^3 \\
 & - 0.6510416666 \times 10^{-5}t^2x^4
 \end{aligned} \quad (7.112)$$

ayrıca,

$$\begin{aligned}
 M &= 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 \\
 &+ 0.0003682847818x^5 + 0.01250000000t - 0.001562500000tx^2 \\
 &+ 0.0001302088884tx^4 - 0.0006250000000t^2 + 0.0001104854345t^2x \\
 &+ 0.00007812500000t^2x^2 + 0.00001841423910t^2x^3
 \end{aligned} \tag{7.113}$$

$$\begin{aligned}
 N &= 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 \\
 &+ 0.01250000000t - 0.001562500000tx^2 - 0.0006250000000t^2 \\
 &+ 0.0001104854345t^2x + 0.00007812500000t^2x^2
 \end{aligned} \tag{7.114}$$

$$\begin{aligned}
 R &= 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 \\
 &+ 0.01250000000t - 0.001562500000tx^2 - 0.0006250000000t^2 \\
 &+ 0.0001104854345t^2x
 \end{aligned} \tag{7.115}$$

olarak alınıp, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.112) kuvvet serisinin $m = 5$ ve $n = 2$ için çok değişkenli Padé denklemleri, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x,t) = \begin{vmatrix} M & N & R \\ -0.6510416666 \times 10^{-5} t^2 x^4 & 0.0003682847818 x^5 + 0.0001302088884 t x^4 + 0.00001841423910 t^2 x^3 & 0.00007812500000 t^2 x^2 \\ -0.9223090280 \times 10^{-5} t x^6 & -0.6510416666 \times 10^{-5} t^2 x^4 & 0.0003682847818 x^5 + 0.0001302088884 t x^4 + 0.00001841423910 t^2 x^3 \end{vmatrix} \tag{7.116}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.6004616067 \times 10^{-10} x^6 (-399.3073584 x^5 + 1.529411773 t^2 x^4 - 25.29411764 t x^6 \\
 &- 49.91341983 t^2 x^3 + 254.1176472 t^2 x^2 - 254.1176470 t x^4 + 1129.411764 x^4 \\
 &+ 7.058823529 t^4 + 0.4656862748 t x^8 + 798.6147174 t x^3 - 8.8180375507 t^2 x^5 \\
 &- 6.705882349 t^3 x^2 - 1.455882353 t^3 x^4 - 0.2911764705 t^4 x^2 - 0.2870021640 t^4 x^3 \\
 &+ 0.01360294119 t^4 x^4 + 28.28427124 t x^5 - 0.1176470588 t^2 x^6 + 0.5407287154 t^3 x^3 \\
 &+ 0.01143849208 t^3 x^5 + 39.93073589 t^3 x - 0.4991341962 t^4 x + 0.0004939348840 t^6 x^3 \\
 &+ 0.07916666674 t^3 x^6 + 0.02066727542 t^4 x^5 + 0.002683823532 t^5 x^4 + 0.8318903301 x^9 \\
 &+ 0.2010401634 t^2 x^7 - 16.63780660 x^7 - 0.008823529412 t^6 + 0.0008823529411 t^6 x^2 \\
 &+ 0.0003119588732 t^6 x + 0.1764705882 t^5 + 0.001585790946 t^5 x^3 - 0.005735294120 t^5 x^2 \\
 &- 0.02495670995 t^5 x)
 \end{aligned} \tag{7.117}$$

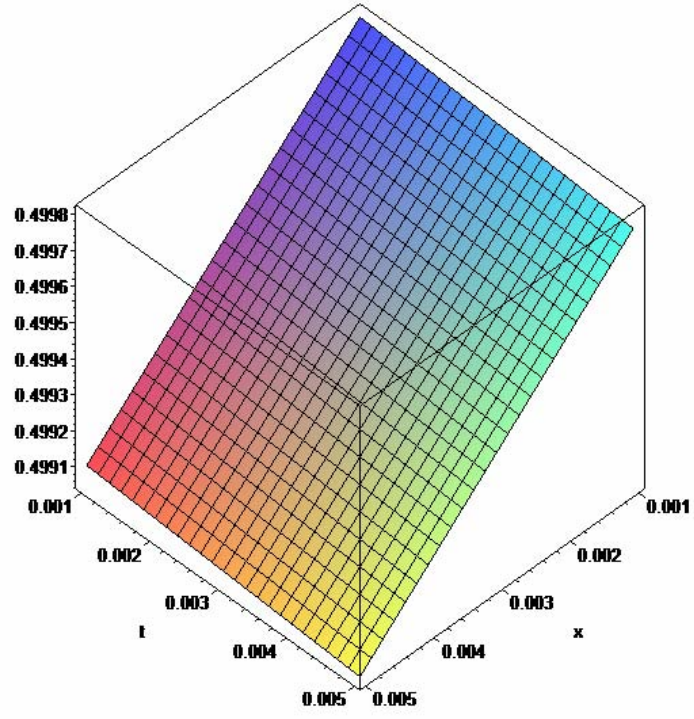
$$q(x,t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.6510416666 \times 10^{-5} t^2 x^4 & 0.0003682847818 x^5 + 0.0001302088884 t x^4 + 0.00001841423910 t^2 x^3 & 0.00007812500000 t^2 x^2 \\ -0.9223090280 \times 10^{-5} t x^6 & -0.6510416666 \times 10^{-5} t^2 x^4 & 0.0003682847818 x^5 + 0.0001302088884 t x^4 + 0.00001841423910 t^2 x^3 \end{vmatrix} \tag{7.118}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.6004616067 \times 10^{-10} x^6 (14.11764706t^4 + 2.11764706t^3 x^2 + 0.7058823527t^4 x^2 \\
&+ 508.2352942t^2 x^2 + 79.86147180t^3 x + 1.996536794t^4 x + 2258.823528x^4 \\
&+ 1597.229435x^3 t + 39.93073587t^2 x^3 + 56.56854248tx^5 + 20.00000001t^2 x^4 \\
&+ 2.828427126t^3 x^3)
\end{aligned} \tag{7.119}$$

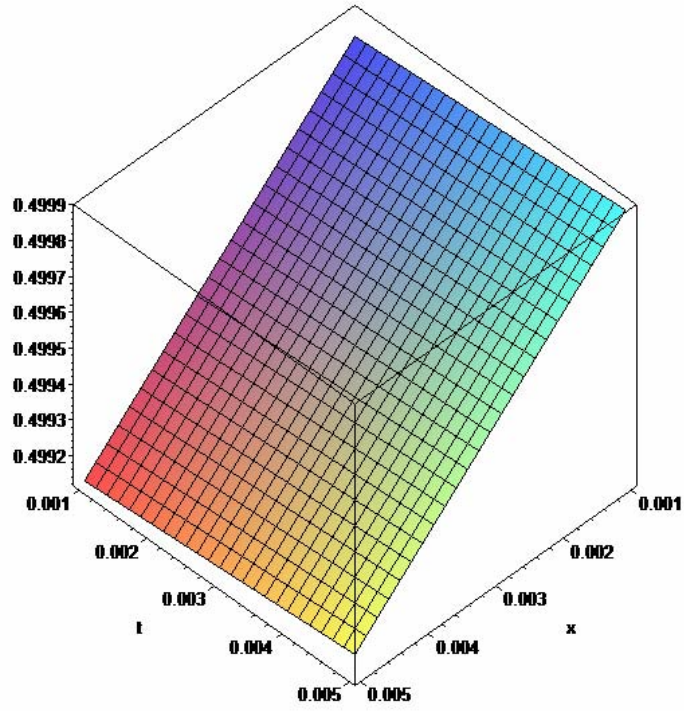
biçiminde elde edilir. Buna göre, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.112) kuvvet serisinin, (5,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned}
[5,2]_{(x,t)} &= (-399.3073584x^5 + 1.529411773t^2 x^4 - 25.29411764tx^6 - 49.91341983t^2 x^3 \\
&+ 254.1176472t^2 x^2 - 254.1176470tx^4 + 1129.411764x^4 + 7.058823529t^4 \\
&+ 0.4656862748tx^8 + 798.6147174tx^3 - 8.8180375507t^2 x^5 - 6.705882349t^3 x^2 \\
&- 1.455882353t^3 x^4 - 0.2911764705t^4 x^2 - 0.2870021640t^4 x^3 + 0.01360294119t^4 x^4 \\
&+ 28.28427124tx^5 - 0.1176470588t^2 x^6 + 0.5407287154t^3 x^3 + 0.01143849208t^3 x^5 \\
&+ 39.93073589t^3 x - 0.4991341962t^4 x + 0.0004939348840t^6 x^3 + 0.07916666674t^3 x^6 \\
&+ 0.02066727542t^4 x^5 + 0.002683823532t^5 x^4 + 0.8318903301x^9 + 0.2010401634t^2 x^7 \\
&- 16.63780660x^7 - 0.008823529412t^6 + 0.0008823529411t^6 x^2 + 0.0003119588732t^6 x \\
&+ 0.1764705882t^5 + 0.001585790946t^5 x^3 - 0.005735294120t^5 x^2 \\
&- 0.02495670995t^5 x) / (14.11764706t^4 + 2.11764706t^3 x^2 + 0.7058823527t^4 x^2 \\
&+ 508.2352942t^2 x^2 + 79.86147180t^3 x + 1.996536794t^4 x + 2258.823528x^4 \\
&+ 1597.229435x^3 t + 39.93073587t^2 x^3 + 56.56854248tx^5 + 20.00000001t^2 x^4 \\
&+ 2.828427126t^3 x^3)
\end{aligned} \tag{7.120}$$

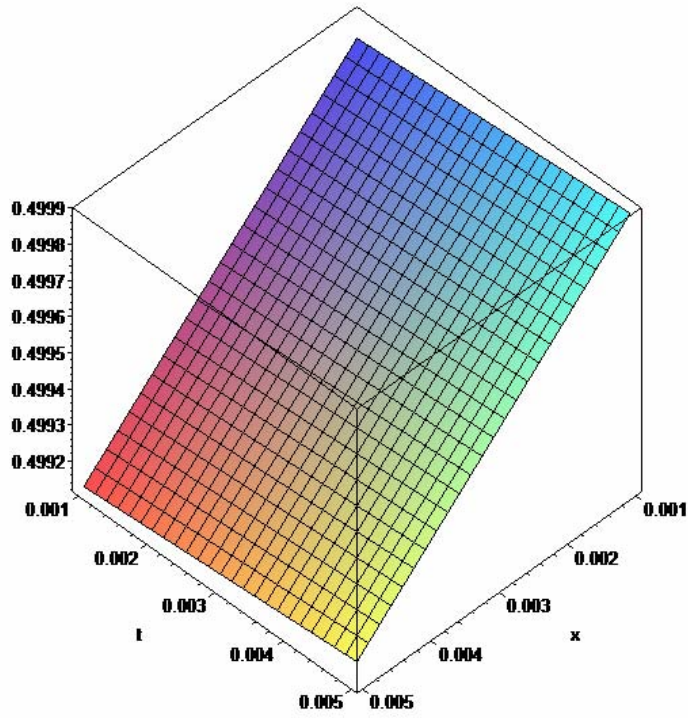
Buna göre, $\alpha = 1.0$ değeri için, (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümünün, (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değeri için elde edilen (7.112) kuvvet serisinin ve (7.112) kuvvet serisinin çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri Şekil 7.22, Şekil 7.23, Şekil 7.24'de, nümerik değerleri ise Çizelge 7.4'te verilmiştir.



Şekil 7. 22 $\alpha = 1.0$ değeri için, (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin tam çözümü.



Şekil 7. 23 (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.112) kuvvet serisi.



Şekil 7. 24 (7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.112) kuvvet serisinin ÇPY.

(7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümü, $\alpha = 0.50$ and $\mu = 0.45$ değerleri için,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\
 & + 0.05641895835(0.2500000000 - 0.03125000000x^2 + 0.002604166667x^4 \\
 & - 0.0001844618056x^6)t^{0.5} - 0.002500000000(0.5000000000 - 0.08838834762x \\
 & - 0.06250000000x^2 - 0.01473139128x^3 + 0.005208333333x^4)t
 \end{aligned} \quad (7.121)$$

$$\begin{aligned}
 = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\
 & + 0.01410473959t^{0.5} - 0.001763092448t^{0.5}x^2 + 0.0001469243707t^{0.5}x^4 \\
 & - 0.00001040714293t^{0.5}x^6 - 0.001250000000t + 0.0002209708690tx \\
 & + 0.0001562500000tx^2 + 0.00003682847820tx^3 - 0.00001302083333tx^4
 \end{aligned} \quad (7.122)$$

olur. $t^{1/2} = a$ alınırsa (7.122) seri çözümü,

$$\begin{aligned}
 u(x, a) = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\
 & + 0.01410473959a - 0.001763092448ax^2 + 0.0001469243707ax^4 \\
 & - 0.00001040714293ax^6 - 0.001250000000a^2 + 0.0002209708690a^2x \\
 & + 0.0001562500000a^2x^2 + 0.00003682847820a^2x^3 - 0.00001302083333a^2x^4
 \end{aligned} \quad (7.123)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} S = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\ & + 0.01410473959a - 0.001763092448ax^2 + 0.0001469243707ax^4 - 0.001250000000a^2 \\ & + 0.0002209708690a^2x + 0.0001562500000a^2x^2 + 0.00003682847820a^2x^3 \end{aligned} \quad (7.124)$$

$$\begin{aligned} T = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.01410473959a \\ & - 0.001763092448ax^2 - 0.001250000000a^2 + 0.0002209708690a^2x + 0.0001562500000a^2x^2 \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} V = & 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.01410473959a \\ & - 0.001763092448ax^2 - 0.001250000000a^2 + 0.0002209708690a^2x \end{aligned} \quad (7.126)$$

(7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.123) kuvvet serisinin $m = 5$ ve $n = 2$ için çok değişkenli Padé denklemleri, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak,

$$p(x,a) = \begin{vmatrix} S & T & V \\ -0.0001302083333a^2x^4 & 0.0003682847818x^5 + 0.0001469243707ax^4 + 0.00003682847820a^2x^3 & 0.0001562500000a^2x^2 \\ -0.0000104714293a^6 & -0.00001302083333a^2x^4 & 0.0003682847818x^5 + 0.0001469243707ax^4 + 0.00003682847820a^2x^3 \end{vmatrix} \quad (7.127)$$

$$\begin{aligned} = & 0.1355096735 \times 10^{-9} x^6 (-176.9384663x^5 + 500.4575575x^4 + 14.14213562ax^5 - 0.1042619911a^2x^6 \\ & - 127.0588234ax^4 - 12.64705882ax^6 + 179.7418057a^2x^2 - 34.59022553a^2x^3 - 1.864967528a^2x^4 \\ & + 0.01143849208a^3x^5 + 39.93073588a^3x - 1.527651730a^4x + 0.5407287176a^3x^3 + 12.511438894a^4 \\ & + 0.2328431370ax^8 + 0.3686218050x^9 - 7.372436097x^7 - 5.430474480a^2x^5 - 7.988400797a^3x^2 \\ & - 1.386412603a^3x^4 - 0.4194856542a^4x^2 - 0.4711921255a^4x^3 + 0.02008511870a^4x^4 + 399.3073586ax^3 \\ & + 0.0011750953574a^6x^3 + 0.07716273155a^3x^6 + 0.02800876865a^4x^5 + 0.005367647059a^5x^4 \\ & + 0.1536097286a^2x^7 - 0.04991341984a^5x - 0.03127859737a^6 + 0.003127859737a^6x^2 \\ & + 0.01147058823a^5x^2 + 0.3529411765a^5 + 0.003171581881a^5x^3 - 0.01147058823a^5x^2) \end{aligned} \quad (7.128)$$

$$q(x,a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.0001302083333a^2x^4 & 0.0003682847818x^5 + 0.0001469243707ax^4 + 0.00003682847820a^2x^3 & 0.0001562500000a^2x^2 \\ -0.0000104714293a^6 & -0.00001302083333a^2x^4 & 0.0003682847818x^5 + 0.0001469243707ax^4 + 0.00003682847820a^2x^3 \end{vmatrix} \quad (7.129)$$

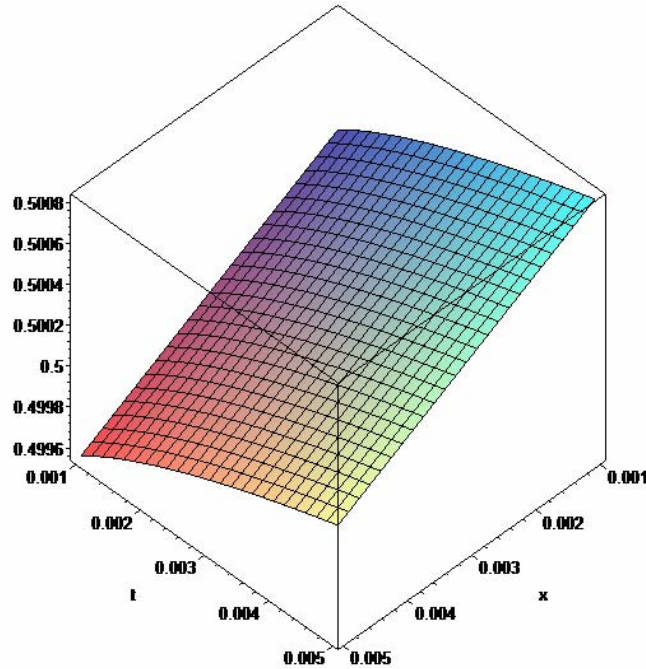
$$\begin{aligned} = & 0.1355096735 \times 10^{-9} x^6 (25.02287789a^4 + 2.11764705a^3x^2 + 1.2511438894a^4x^2 + 359.4836114a^2x^2 \\ & + 79.86147175a^3x + 3.538769329a^4x + 1000.915115x^4 + 798.6147171x^3a + 35.38769327a^2x^3 \\ & + 28.28427125x^5a + 11.28379167a^2x^4 + 2.828427126a^3x^3) \end{aligned} \quad (7.130)$$

biçiminde elde edilir. Buna göre, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.121) kuvvet serisinin, (5,2) mertebeli çok

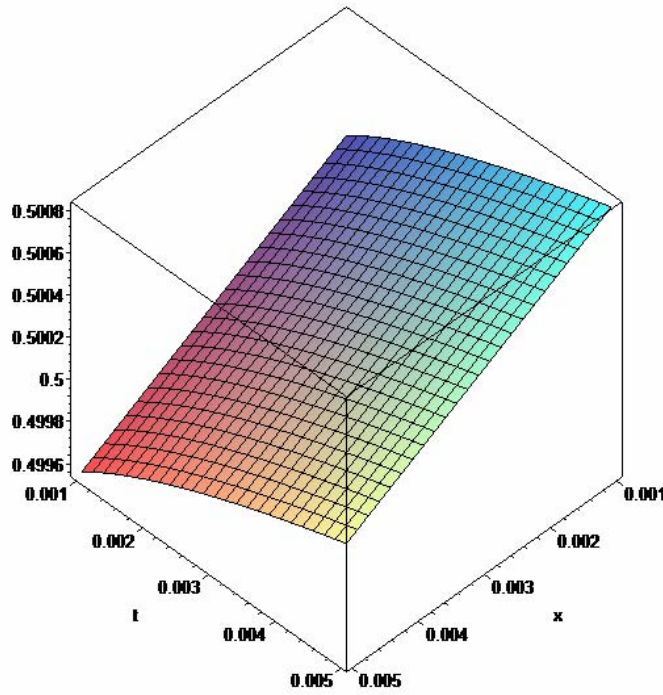
değişkenli Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned}
 [5.2]_{(x,t)} = & (-176.9384663x^5 + 500.4575575x^4 + 14.14213562\sqrt{t}x^5 \\
 & -0.1042619911tx^6 - 127.0588234\sqrt{t}x^4 - 12.64705882\sqrt{t}x^6 + 179.7418057tx^2 \\
 & -34.59022553tx^3 - 1.864967528tx^4 + 0.01143849208t^{3/2}x^5 + 39.93073588t^{3/2}x \\
 & -1.527651730t^2x + 0.5407287176t^{3/2}x^3 + 12.511438894t^2 + 0.2328431370\sqrt{t}x^8 \\
 & +0.3686218050x^9 - 7.372436097x^7 - 5.430474480tx^5 - 7.988400797t^{3/2}x^2 \\
 & -1.386412603t^{3/2}x^4 - 0.4194856542t^2x^2 - 0.4711921255t^2x^3 + 0.02008511870t^2x^4 \\
 & +399.3073586\sqrt{t}x^3 + 0.0011750953574t^3x^3 + 0.07716273155t^{3/2}x^6 + 0.02800876865t^2x^5 \\
 & +0.005367647059t^{5/2}x^4 + 0.1536097286tx^7 - 0.04991341984t^{5/2}x - 0.03127859737t^3 \\
 & +0.003127859737t^3x^2 + 0.01147058823t^{5/2}x^2 + 0.3529411765t^{5/2} + 0.003171581881t^{5/2}x^3 \\
 & -0.01147058823t^{5/2}x^2)/(25.02287789t^2 + 2.11764705t^{3/2}x^2 + 1.2511438894t^2x^2 + 359.4836114tx^2 \\
 & +79.86147175t^{3/2}x + 3.538769329t^2x + 1000.915115x^4 + 798.6147171x^3\sqrt{t} + 35.38769327tx^3 \\
 & +28.28427125x^5\sqrt{t} + 11.28379167tx^4 + 2.828427126t^{3/2}x^3)
 \end{aligned} \tag{7.131}$$

olarak elde edilir. (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.121) kuvvet serisinin ve (7.121) kuvvet serisine ait çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7.25, şekil 7.26'te ve nümerik değerler ise çizelge 7.4'te verilmiştir.



Şekil 7. 25 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.121) kuvvet serisi



Şekil 7. 26 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.50$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.121) kuvvet serisinin ÇPY.

(7.104) zaman-kesirli Fisher denkleminin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümü, $\alpha = 0.75$ and $\mu = 0.45$ değerleri için,

$$u(x, t) = 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 + 0.05440326260(0.2500000000 - 0.03125000000x^2 + 0.002604166667x^4 - 0.0001844618056x^6)t^{0.75} - 0.001880631946(0.5000000000 - 0.08838834762x - 0.06250000000x^2 - 0.01473139128x^3 + 0.005208333333x^4)t^{1.50} \quad (7.132)$$

$$= 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 + 0.01360081565t^{0.75} - 0.001700101956t^{0.75}x^2 + 0.0001416751630t^{0.75}x^4 - 0.00001003532405t^{0.75}x^6 - 0.0009403159730t^{1.50} + 0.0001662259502t^{1.50}x + 0.0001175394966t^{1.50}x^2 + 0.00002770432505t^{1.50}x^3 - 0.9794958051 \times 10^{-5}t^{1.50}x^4 \quad (7.133)$$

olarak elde edilir. $t^{1/4} = a$ alınırsa (7.133) seri çözümü,

$$u(x, a) = 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 + 0.01360081565a^3 - 0.001700101956a^3x^2 + 0.0001416751630a^3x^4 - 0.00001003532405a^3x^6 - 0.0009403159730a^6 + 0.0001662259502a^6x + 0.0001175394966a^6x^2 + 0.00002770432505a^6x^3 - 0.9794958051 \times 10^{-5}a^6x^4 \quad (7.134)$$

olur. Ayrıca,

$$Y = 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\ + 0.01360081565a^3 - 0.001700101956a^3x^2 + 0.0001416751630a^3x^4 - 0.0009403159730a^6 \\ + 0.0001662259502a^6x + 0.0001175394966a^6x^2 \quad (7.135)$$

$$Z = 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\ + 0.01360081565a^3 - 0.001700101956a^3x^2 + 0.0001416751630a^3x^4 - 0.0009403159730a^6 \\ + 0.0001662259502a^6x \quad (7.136)$$

$$I = 0.5000000000 - 0.1767766952x - 0.007365695635x^3 + 0.0003682847818x^5 \\ + 0.01360081565a^3 - 0.001700101956a^3x^2 - 0.0009403159730a^6 \quad (7.137)$$

olarak alınıp, (7.134) seri çözümünün, $m = 8$ ve $n = 2$ için (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak Padé denklemleri,

$$p(x,a) = \begin{vmatrix} Y & Z & I \\ 0.0002770432505a^6x^3 - 0.00001003532405a^3x^6 & 0.0001175394966a^6x^2 & 0.0001662259502a^6x + 0.0001416751630a^3x^4 \\ -0.9794958051 \times 10^{-5}a^6x^4 & 0.0002770432505a^6x^3 - 0.00001003532405a^3x^6 & 0.0001175394966a^6x^2 \end{vmatrix} \quad (7.138)$$

$$= -0.9794958051 \times 10^{-5}x^4(-0.00007257591929x^6 - 0.514079428 \times 10^{-5}x^8 \\ + 0.2227383885 \times 10^{-7}x^{11} + 0.00002462745270a^3x^5 + 0.0001152063889a^3x^3 \\ - 0.3786552603 \times 10^{-8}x^{13} + 0.2886689512 \times 10^{-5}x^9 + 0.00002565946232x^7 \\ - 0.00003010597218a^3x^4 + 0.1477000393 \times 10^{-5}a^6x^5 - 0.2263460486 \times 10^{-6}a^3x^8 \\ + 0.2840147227 \times 10^{-6}a^6x^6 + 0.7826520955 \times 10^{-8}a^3x^9 - 0.4382354311 \times 10^{-8}a^6x^8 \\ - 0.1065755353 \times 10^{-5}a^9x^2 - 0.1064464005 \times 10^{-5}a^9x^3 + 0.6782425517 \times 10^{-5}a^9x \\ - 0.00001278906419a^9 - 0.1601429235 \times 10^{-6}a^6x^7 + 0.00004469028926a^6x^3 \\ - 0.00001370665784a^3x^6 - 0.3384074604 \times 10^{-5}a^6x^4 - 0.1565304191 \times 10^{-6}a^3x^7 \\ + 0.4788518010 \times 10^{-7}a^9x^5 + 0.2181467984 \times 10^{-6}a^9x^4 + 0.1782226356 \times 10^{-7}a^3x^{10} \\ + 0.884194129 \times 10^{-6}a^{12} + 0.1565760439 \times 10^{-6}a^{12}x^2 - 0.6252196644 \times 10^{-5}a^{12}x \\ - 0.0004701579863a^6 - 0.0001861042030a^6x^2 + 0.0004155648754a^6x)a^6 \quad (7.139)$$

$$q(x,a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.0002770432505a^6x^3 - 0.00001003532405a^3x^6 & 0.0001175394966a^6x^2 & 0.0001662259502a^6x + 0.0001416751630a^3x^4 \\ -0.9794958051 \times 10^{-5}a^6x^4 & 0.0002770432505a^6x^3 - 0.00001003532405a^3x^6 & 0.0001175394966a^6x^2 \end{vmatrix} \quad (7.140)$$

$$= -0.9794958051 \times 10^{-5}x^4(0.0009403159722a^6 - 0.0002304127778a^3x^3 \\ - 0.0004986778508a^6x + 0.0001451518386x^6 - 0.0000212512744a^3x^4 \\ - 0.00005676836553a^3x^5 + 0.00001028158857x^8 + 0.0001958991611a^6x^3)a^6 \quad (7.141)$$

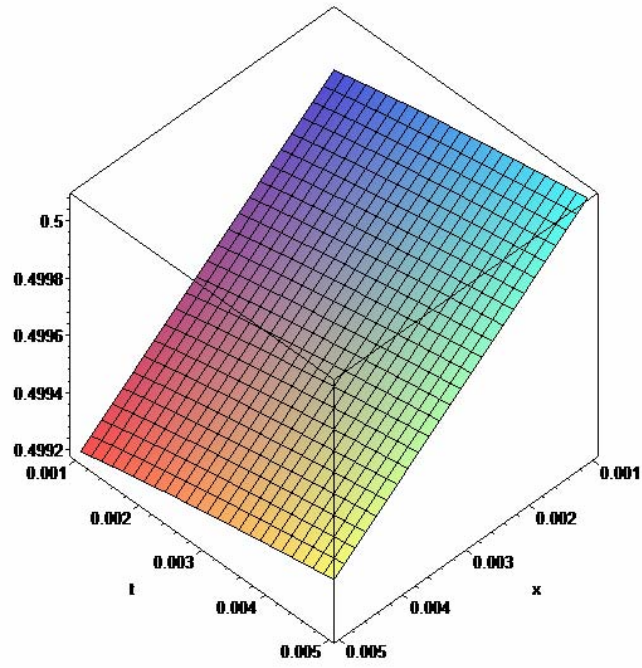
biçiminde elde edilir. Buna göre, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin

genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemiyle elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.132) kuvvet serisinin, (8,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

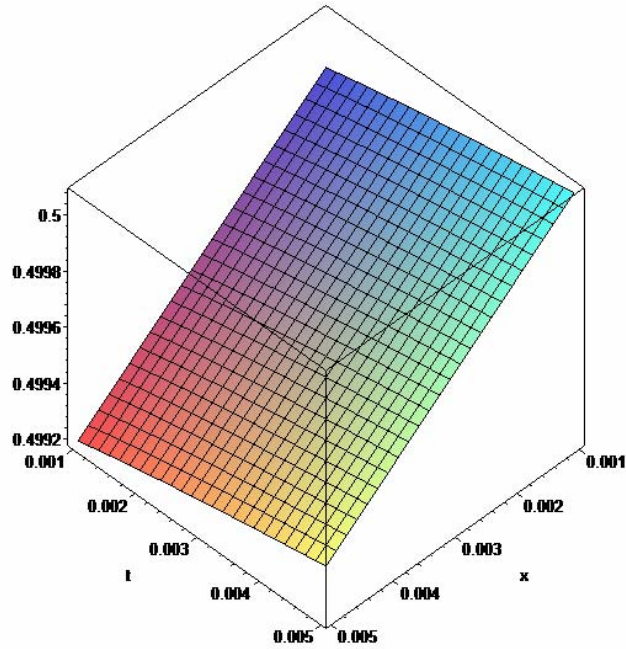
$$\begin{aligned}
[8,2]_{(x,t)} = & -(-0.00007257591929x^6 - 0.514079428 \times 10^{-5}x^8 + 0.2227383885 \times 10^{-7}x^{11} \\
& + 0.00002462745270t^{3/4}x^5 + 0.0001152063889t^{3/4}x^3 - 0.3786552603 \times 10^{-8}x^{13} \\
& + 0.2886689512 \times 10^{-5}x^9 + 0.00002565946232x^7 - 0.00003010597218t^{3/4}x^4 \\
& + 0.1477000393 \times 10^{-5}t^{3/2}x^5 - 0.2263460486 \times 10^{-6}t^{3/4}x^8 + 0.2840147227 \times 10^{-6}t^{3/2}x^6 \\
& + 0.7826520955 \times 10^{-8}t^{3/4}x^9 - 0.4382354311 \times 10^{-8}t^{3/2}x^8 - 0.1065755353 \times 10^{-5}t^{9/4}x^2 \\
& - 0.1064464005 \times 10^{-5}t^{9/4}x^3 + 0.6782425517 \times 10^{-5}t^{9/4}x - 0.00001278906419t^{9/4} \\
& - 0.1601429235 \times 10^{-6}t^{3/2}x^7 + 0.00004469028926t^{3/2}x^3 - 0.00001370665784t^{3/4}x^6 \\
& - 0.3384074604 \times 10^{-5}t^{3/2}x^4 - 0.1565304191 \times 10^{-6}t^{3/4}x^7 + 0.4788518010 \times 10^{-7}t^{9/4}x^5 \\
& + 0.2181467984 \times 10^{-6}t^{9/4}x^4 + 0.1782226356 \times 10^{-7}t^{3/4}x^{10} + 0.884194129 \times 10^{-6}t^3 \\
& + 0.1565760439 \times 10^{-6}t^3x^2 - 0.6252196644 \times 10^{-5}t^3x - 0.0004701579863t^{3/2} \\
& - 0.0001861042030t^{3/2}x^2 + 0.0004155648754t^{3/2}x)/(0.0009403159722t^{3/2} \\
& - 0.0002304127778t^{3/4}x^3 - 0.0004986778508t^{3/2}x + 0.0001451518386x^6 \\
& - 0.0000212512744t^{3/4}x^4 - 0.00005676836553t^{3/4}x^5 + 0.00001028158857x^8 \\
& + 0.0001958991611t^{3/2}x^3)
\end{aligned} \tag{7.142}$$

olarak elde edilir. (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.132) kuvvet serisinin ve (7.132) kuvvet serisine ait çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7.27, şekil 7.28’de ve nümerik değerler ise çizelge 7.4’te verilmiştir.

(7.63) zaman-kesirli Fisher ve (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo diferensiyel denklemlerinin, genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm yöntemi (GDDY) ile elde edilen farklı α değerlerine ait seri çözümlere ve farklı α değerleri için elde edilen seri çözümlerin çok değişkenli Padé yaklaşımlarına (ÇPY) ait grafiklerden (Şekil 7.15-7.28) ve nümerik değerlerden görüldüğü gibi (Çizelge 7.3-7.4), her iki yöntemden elde edilen sonuçlar, tam çözümlerle ve birbirleriyle son derece uyumludur.



Şekil 7. 27 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.132) kuvvet serisi.



Şekil 7. 28 (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün, $\alpha = 0.75$ ve $\mu = 0.45$ değerleri için elde edilen (7.132) kuvvet serisinin ÇPY.

Çizelge 7. 3 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1.0$ ve $\mu = 0.45$ olduğunda, (7.104) zaman-kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin (GDDY) ile elde edilen (7.109) seri çözümünün ve (7.109) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.

x	t	$\alpha = 0.50, \mu = 0.45$		$\alpha = 0.75, \mu = 0.45$		$\alpha = 1.0, \mu = 0.45$		
		u_{GDDY}	$u_{ÇPY}$	u_{GDDY}	$u_{ÇPY}$	u_{GDDY}	$u_{ÇPY}$	$u_{TÇ}$
0.001	0.001	0.5002680044	0.5002680043	0.4998996766	0.4998996769	0.4998357227	0.4998357226	0.4998107234
0.002	0.002	0.5002747302	0.5002747301	0.4997749909	0.4997749911	0.4996714440	0.4996714440	0.4996214466
0.003	0.003	0.5002384692	0.5002384695	0.4996438587	0.4996438587	0.4995071641	0.4995071642	0.4994321701
0.004	0.004	0.5001799565	0.5001799565	0.4995089812	0.4995089813	0.4993428826	0.4993428826	0.4992428939
0.005	0.005	0.5001072237	0.5001072235	0.4993715189	0.4993715192	0.4991785998	0.4991785991	0.4990536177
0.006	0.006	0.5000243897	0.5000243893	0.4992321101	0.4992321104	0.4990143154	0.4990143158	0.4988643418
0.007	0.007	0.4999339015	0.4999339013	0.4990911545	0.4990911544	0.4988500295	0.4988500293	0.4986750662
0.008	0.008	0.4998373530	0.4998373532	0.4989489244	0.4989489247	0.4986857419	0.4986857418	0.4984857911
0.009	0.009	0.4997358519	0.4997358518	0.4988056161	0.4988056163	0.4985214527	0.4985214532	0.4982965163
0.01	0.01	0.4996302043	0.4996302048	0.4986613772	0.4986613775	0.4983571616	0.4983571620	0.4981072420

7.3 Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VİY) ve Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY)

Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VİY) ve çok değişkenli Padé yaklaşımının (ÇPY) karşılaştırılması iki uygulama üzerinde gösterilecektir. Homojen olmayan lineer Klein-Gordon kesirli diferansiyel denklemi ve bir non-lineer zaman kesirli diferansiyel denklem varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözülüp çok değişkenli Padé yaklaşımı alındıktan sonra her iki nümerik yöntem karşılaştırılacaktır.

Uygulama 7.3.1

$f(x)$, $g(x)$ ve $q(x,t)$ sürekli fonksiyonları ve α , $(m-1 < \alpha \leq m)$ Caputo türev tanımına göre α . mertebeden zaman-kesirli türevi ve $R[x]$, x 'e göre diferansiyel operatörü göstermek üzere,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x,t) &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, t > 0, \end{aligned} \quad (7.143)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ u(x,t) &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, t > 0, \end{aligned} \quad (7.144)$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} u(x,t) = R[x]u(x,t) + q(x,t), \quad t > 0, x \in R, \quad (7.145)$$

formatındaki zaman-kesirli diferansiyel denklem için düzeltme fonksiyonelinin ve iterasyon formülünün nasıl oluşturulduğunu gösterelim (Odibat ve Momani, 2009). 5. bölümde verilen varyasyonel iterasyon yöntemine göre, (7.145) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için düzeltme fonksiyoneli,

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + J_t^\beta \left[\lambda \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x,t) - R[x] \tilde{u}_k(x,t) - q(x,t) \right) \right], \quad (7.146)$$

$$= u_k(x,t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x,\tau) - R[x] \tilde{u}_k(x,\tau) - q(x,\tau) \right) d\tau, \quad (7.147)$$

olarak verilir. J_t^β , β . mertebeden $(\beta = \alpha + 1 - m)$, t 'ye göre Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ve λ ise, varyasyonel teorisine göre belirlenen Lagrange çarpanıdır. Buna

göre düzeltme fonksiyoneli yaklaşık olarak,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t \left[\lambda(\tau) \left(\frac{\partial^m}{\partial \tau^m} u_k(x, \tau) - R[x] \tilde{u}_k(x, \tau) - q(x, \tau) \right) \right] d\tau. \quad (7.148)$$

biçiminde ifade edilebilir. Sınırlı varyasyonlar, $R[x]u$ non-lineer terimine uygulanacağından, Lagrange çarpanı kolaylıkla belirlenebilir. Fonksiyonel stasyoner için, $\delta \tilde{u}_k = 0$ olacağından,

$$\delta u_{k+1}(x, t) = \delta u_k(x, t) + \delta \int_0^t \left[\lambda(\tau) \left(\frac{\partial^m}{\partial \tau^m} u_k(x, \tau) - q(x, \tau) \right) \right] d\tau, \quad (7.149)$$

olur. Bu durumda Lagrange çarpanları,

$$m = 1 \text{ için, } \lambda = -1, \quad (7.150)$$

$$m = 2 \text{ için, } \lambda = \tau - t. \quad (7.151)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, $(0 < \alpha \leq 1)$, $m = 1$ için $\lambda = -1$ ve $(1 < \alpha \leq 2)$, $m = 2$ için

$\lambda = \tau - t$ Lagrange çarpanları, (7.147) düzeltme fonksiyonelinde yerlerine yazılırsa, sırasıyla;

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x, t) - R[x] u_k(x, t) - q(x, t) \right]. \quad (7.152)$$

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-2} (\tau - t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x, \tau) - R[x] u_k(x, \tau) - q(x, \tau) \right) d\tau, \quad (7.153)$$

$$= u_k(x, t) - \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x, \tau) - R[x] u_k(x, \tau) - q(x, \tau) \right) d\tau. \quad (7.154)$$

iterasyon formülleri elde edilir. (7.152) ve (7.153) iterasyon formüllerinden,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - (\alpha - 1) J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x, t) - R[x] u_k(x, t) - q(x, t) \right]. \quad (7.155)$$

iterasyon formülü elde edilir. u_0 başlangıç iterasyonu, başlangıç ve sınır şartlarına göre kolaylıkla oluşturulabilir. Yukarıda verilen bilgilere göre (7.145) formatında,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (7.156)$$

başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 6x^3 t + (x^3 - 6x)t^3, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (7.157)$$

homojen olmayan lineer Klein-Gordon kesirli diferensiyel denklemi verilsin. (7.155)

iterasyon formülüne göre, (7.157) lineer Klein-Gordon kesirli diferensiyel denklemi için iterasyon formülü,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - (\alpha - 1) J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - 6x^3 t - (x^3 - 6x)t^3 \right]. \quad (7.158)$$

biçiminde verilir. (7.158) iterasyon formülüne göre ve başlangıç şartlarına göre $u_0 = 0$ alınırsa,

$$u_1(x, t) = (\alpha - 1) \left[6x^3 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + (x^3 - 6x) \frac{6t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} \right], \quad (7.159)$$

$$u_2(x, t) = 6x^3 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + 6(x^3 - 6x) \frac{t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} - (\alpha - 1)^2 \left[6(x^3 - 6x) \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} + 6(x^3 - 12x) \frac{t^{2\alpha+3}}{\Gamma(2\alpha+4)} \right] + \dots. \quad (7.160)$$

yaklaşık çözümler elde edilir. (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümü,

$$u(x, t) = x^3 t^3 \quad (7.161)$$

olarak verilmektedir (Odibat ve Momani, 2009). (7.160) çözümü $\alpha = 2$ için,

$$u(x, t) = x^3 t^3 + (x^3 - 6x) \frac{6t^5}{\Gamma(6)} + 36x \frac{t^5}{\Gamma(6)} - 36x \frac{6t^7}{\Gamma(8)} - 6x^3 \frac{t^5}{\Gamma(6)} - (x^3 - 6x) \frac{6t^7}{\Gamma(8)} + \dots. \quad (7.162)$$

$$= x^3 t^3 - 0.001190476190 x^3 t^7 - 0.01428571428 x t^7 \quad (7.163)$$

olur. $m = 8$ ve $n = 2$ için, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak (7.163) çözümünün çok değişkenli Padé denklemleri,

$$p(x, t) = \begin{vmatrix} x^3 t^3 - 0.01428571428 x t^7 & x^3 t^3 & x^3 t^3 \\ 0 & -0.01428571428 x t^7 & 0 \\ -0.001190476190 x^3 t^7 & 0 & -0.01428571428 x t^7 \end{vmatrix} \quad (7.164)$$

$$= -0.00001700680271(x^4 - 12.00000000x^2 + 0.1714285714t^4)x^3 t^{17} \quad (7.165)$$

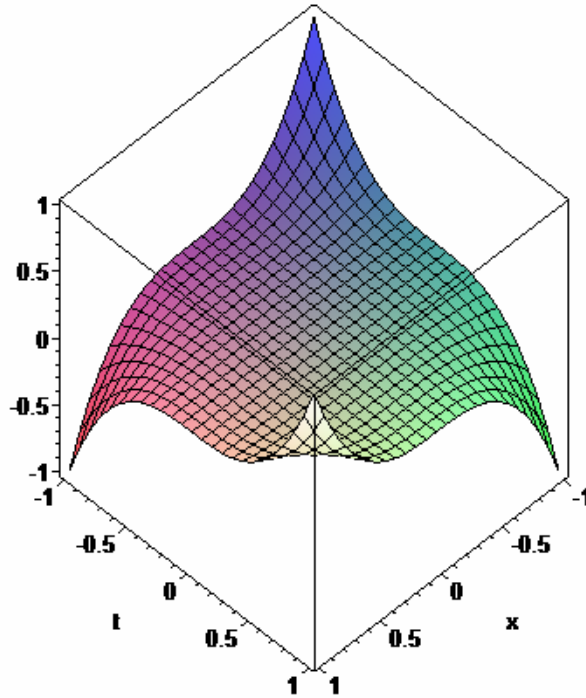
$$q(x,t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.01428571428xt^7 & 0 \\ -0.001190476190x^3t^7 & 0 & -0.01428571428xt^7 \end{vmatrix} \quad (7.166)$$

$$= -0.00001700680271(-12.00000000 + x^2)x^2t^{14} \quad (7.167)$$

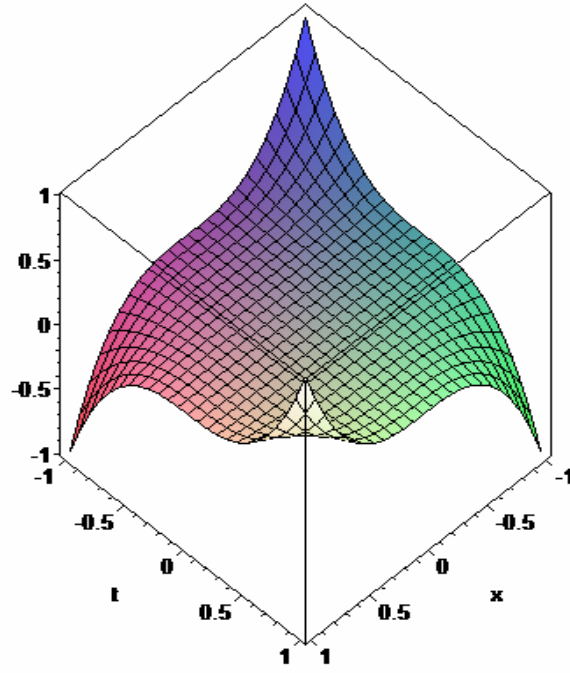
olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). Bu durumda, (7.163) için (8,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı (ÇPY),

$$[8,2]_{(x,t)} = \frac{(x^4 - 12.00000000x^2 + 0.1714285714t^4)xt^3}{-12.00000000 + x^2} \quad (7.168)$$

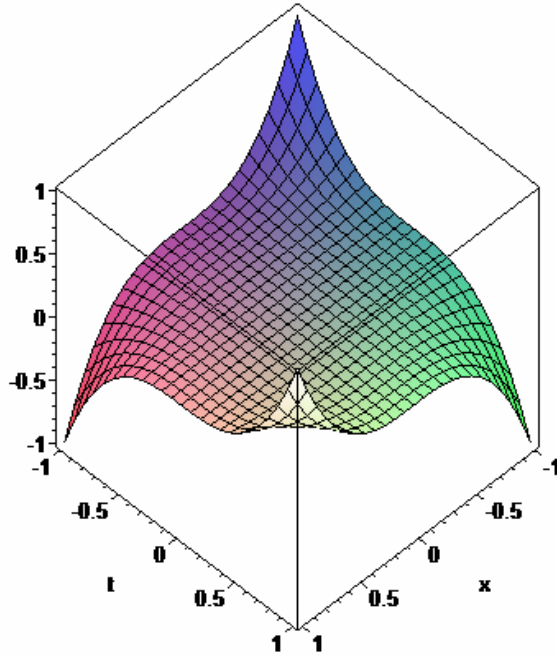
(7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümünün, varyasyonel iterasyon yöntemiyle (VIY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.163) çözümü ve (7.163) çözümünün (8,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7.29, şekil 7.30, şekil 7.31’da, nümerik değerleri ise çizelge 7.5’te verilmiştir.



Şekil 7. 29 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümü



Şekil 7. 30 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.163) çözümü



Şekil 7. 31 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.163) çözümünün ÇPY.

(7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin varyasyonel iterayon yöntemiyle (ViY) elde edilen (7.160) çözümü $\alpha = 1.5$ için,

$$u(x, t) = 1.805406668x^3t^{2.5} + 0.1146289948(x^3 - 6x)t^{4.5} - 0.06250000000(x^3 - 6x)t^{4.0} - 0.002083333334(x^3 - 12x)t^{6.0} \quad (7.169)$$

$$\begin{aligned} &= 1.805406668x^3t^{2.5} + 0.1146289948x^3t^{4.5} - 0.6877739688xt^{4.5} \\ &- 0.06250000000x^3t^{4.0} + 0.3750000000xt^{4.0} - 0.002083333334x^3t^{6.0} \\ &+ 0.02500000001xt^{6.0} \end{aligned} \quad (7.170)$$

olur. $t^{1/2} = a$ alınırsa, (7.170) çözümü,

$$\begin{aligned} u(x, a) &= 1.805406668x^3a^5 + 0.1146289948x^3a^9 - 0.6877739688xa^9 \\ &- 0.06250000000x^3a^8 + 0.3750000000xa^8 - 0.002083333334x^3a^{12} \\ &+ 0.02500000001xa^{12} \end{aligned} \quad (7.171)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} K &= 1.805406668x^3a^5 + 0.1146289948x^3a^9 - 0.6877739688xa^9 - 0.06250000000x^3a^8 \\ &+ 0.3750000000xa^8 + 0.02500000001xa^{12} \end{aligned} \quad (7.172)$$

$$\begin{aligned} L &= 1.805406668x^3a^5 + 0.1146289948x^3a^9 - 0.6877739688xa^9 \\ &- 0.06250000000x^3a^8 + 0.3750000000xa^8 \end{aligned} \quad (7.173)$$

$$M = 1.805406668x^3a^5 - 0.6877739688xa^9 - 0.06250000000x^3a^8 + 0.3750000000xa^8 \quad (7.174)$$

olarak alınıp, (7.171) çözümü için (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak $m = 13$ ve $n = 2$ için Padé denklemleri,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} K & L & M \\ 0 & 0.02500000001xa^{12} & 0.1146289948x^3a^9 \\ -0.002083333334x^3a^{12} & 0 & 0.02500000001xa^{12} \end{vmatrix} \quad (7.175)$$

$$\begin{aligned} &= -0.00005208333337(-1.805406668x^4a^5 - 0.6877739692x^4a^9 \\ &+ 0.06250000000x^4a^8 + 0.3750000000x^2a^8 - 21.66488002x^2a^5 \\ &+ 8.253287626a^9 - 4.500000000a^8 - 0.3000000001a^{12})x^3a^{24} \end{aligned} \quad (7.176)$$

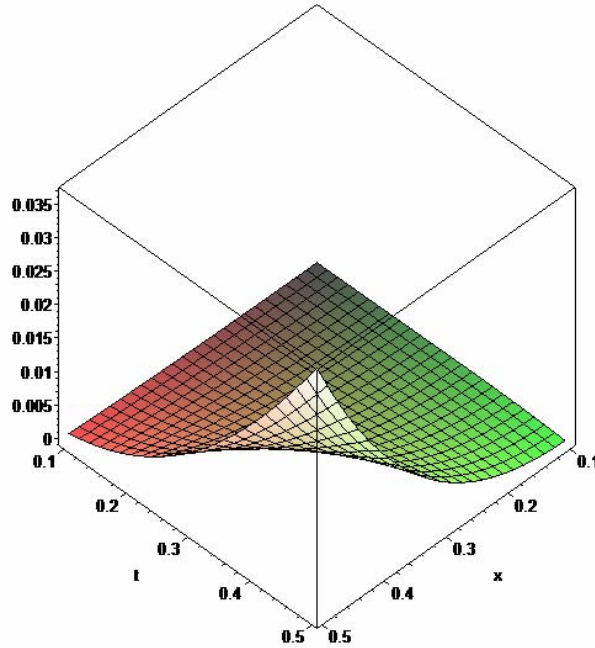
$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.02500000001xa^{12} & 0.1146289948x^3a^9 \\ -0.002083333334x^3a^{12} & 0 & 0.02500000001xa^{12} \end{vmatrix} \quad (7.177)$$

$$= -0.00005208333337(-12.00000000 - x^2 + \frac{4.585159790}{a^3})x^2 a^{24} \quad (7.178)$$

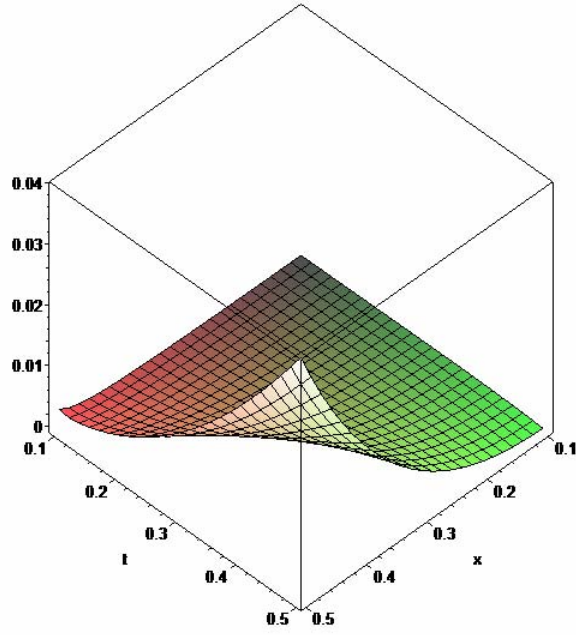
olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). $a = t^{1/2}$ alınırsa, (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.169) ifadesinin (13,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned} [13,2]_{(x,t)} = & (-1.805406668x^4 t^{5/2} - 0.6877739692x^4 t^{9/2} + 0.06250000000x^4 t^4 \\ & + 0.3750000000x^2 t^4 - 21.66488002x^2 t^{5/2} + 8.253287626t^{9/2} - 4.500000000t^4 \\ & - 0.3000000001t^6)x / (-12.00000000 - x^2 + \frac{4.585159790}{t^{1.5}}) \end{aligned} \quad (7.179)$$

biçiminde elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). Buna göre, (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.169) ifadesinin ve (7.169) ifadesinin (13,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7.32 ve şekil 7.33'de, nümerik değerleri ise çizelge 7.5'te verilmiştir (Turut ve Güzel, 2010).



Şekil 7. 32 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.169) çözümü.



Şekil 7. 33 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.160) serisinin $\alpha = 1.5$ için bulunan (7.169) çözümünün ÇPY.

(7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle (VİY) elde edilen (7.160) çözümü $\alpha = 1.75$ için,

$$u(x, t) = 1.356548886x^3t^{2.75} + 0.07615713042(x^3 - 6x)t^{4.75} - 0.06447880955(x^3 - 6x)t^{4.5} - 0.001803603064(x^3 - 12x)t^{6.5} \quad (7.180)$$

$$\begin{aligned} &= 1.356548886x^3t^{2.75} + 0.07615713042x^3t^{4.75} - 0.4569427825xt^{4.75} \\ &- 0.06447880955x^3t^{4.5} + 0.3868728573xt^{4.5} - 0.001803603064x^3t^{6.5} \\ &+ 0.02164323677xt^{6.5} \end{aligned} \quad (7.181)$$

olur. $t^{1/4} = a$ alınırsa, (7.181) çözümü,

$$\begin{aligned} u(x, a) &= 1.356548886x^3a^{11} + 0.07615713042x^3a^{19} - 0.4569427825xa^{19} \\ &- 0.06447880955x^3a^{18} + 0.3868728573xa^{18} - 0.001803603064x^3a^{26} \\ &+ 0.02164323677xa^{26} \end{aligned} \quad (7.182)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} N &= 1.356548886x^3a^{11} + 0.07615713042x^3a^{19} - 0.4569427825xa^{19} \\ &- 0.06447880955x^3a^{18} + 0.3868728573xa^{18} + 0.02164323677xa^{26} \end{aligned} \quad (7.183)$$

$$P = 1.356548886x^3a^{11} + 0.07615713042x^3a^{19} - 0.4569427825xa^{19} - 0.06447880955x^3a^{18} + 0.3868728573xa^{18} \quad (7.184)$$

$$R = 1.356548886x^3a^{11} + 0.07615713042x^3a^{19} - 0.4569427825xa^{19} - 0.06447880955x^3a^{18} + 0.3868728573xa^{18} \quad (7.185)$$

olarak alınıp, (7.182) çözümü için (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanılarak $m = 27$ ve $n = 2$ için Padé denklemleri,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} N & P & R \\ 0 & 0.02164323677xa^{26} & 0 \\ -0.001803603064x^3a^{26} & 0 & 0.02164323677xa^{26} \end{vmatrix} \quad (7.186)$$

$$= 0.00003903580815(1.356548886x^4 + 0.07615713042x^4a^8 + 0.4569427825x^2a^8 - 0.06447880955x^4a^7 - 0.3868728573x^2a^7 + 16.27858663x^2 - 5.483313390a^8 + 4.642474288a^7 + 0.2597188412a^{15})x^3a^{63} \quad (7.187)$$

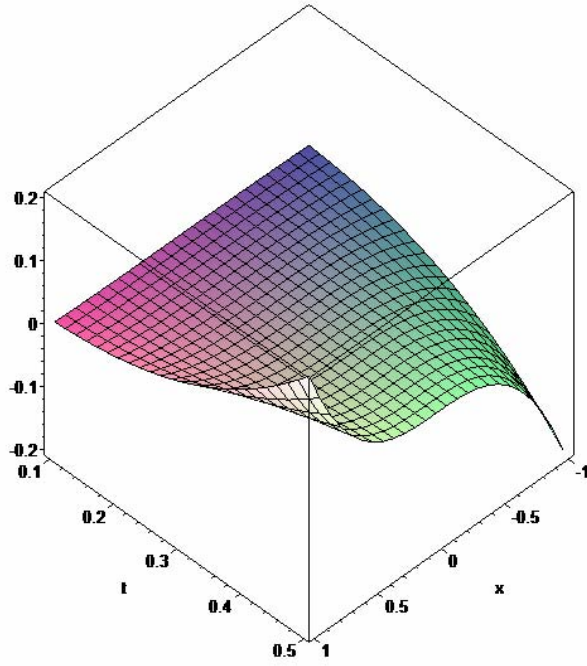
$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.02164323677xa^{26} & 0 \\ -0.001803603064x^3a^{26} & 0 & 0.02164323677xa^{26} \end{vmatrix} \quad (7.188)$$

$$= 0.00003903580815(12.00000000 + x^2)x^2a^{52} \quad (7.189)$$

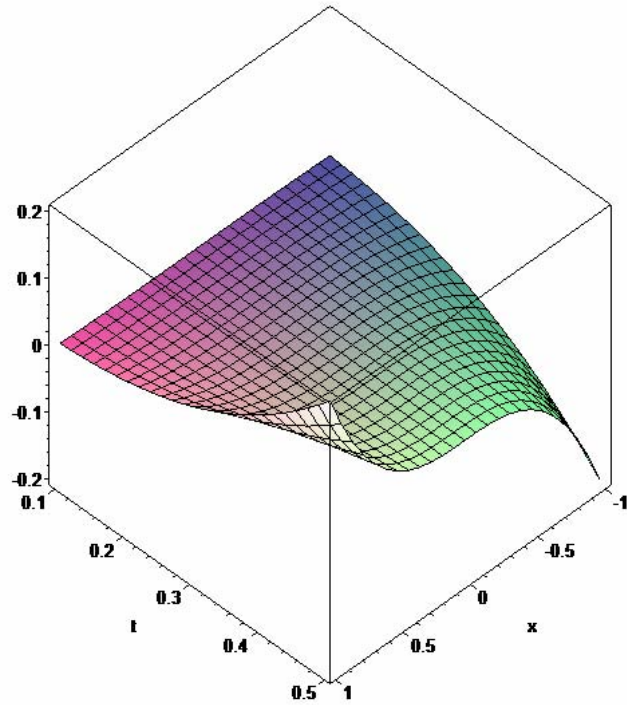
Olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). $a = t^{1/4}$ alınırsa, (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.180) çözümünün (27, 2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$[27, 2]_{(x,t)} = ((1.356548886x^4 + 0.07615713042x^4t^2 + 0.4569427825x^2t^2 - 0.06447880955x^4t^{7/4} - 0.3868728573x^2t^{7/4} + 16.27858663x^2 - 5.483313390t^2 + 4.642474288t^{7/4} + 0.2597188412t^{15/4})xt^{11/4} / (12.00000000 + x^2) \quad (7.190)$$

olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). Buna göre, (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.180) çözümünün ve (7.180) çözümüne ait (27, 2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri, şekil 7.34, şekil 7.35'te ve nümerik değerleri ise, çizelge 7.5'te verilmiştir.



Şekil 7. 34 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.180) çözümü.



Şekil 7. 35 (7.157) Klein-Gordon kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.180) çözümünün ÇPY.

Çizelge 7. 4 $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$, $\alpha = 2.0$ olduğunda, (7.157) Klein-Gordon kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) elde edilen (7.160) çözümünün ve (7.160) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.

x	t	$\alpha = 1.5$		$\alpha = 1.75$		$\alpha = 2.0$		
		$u_{VİY}$	$u_{ÇPY}$	$u_{VİY}$	$u_{ÇPY}$	$u_{VİY}$	$u_{ÇPY}$	$u_{TÇ}$
0.01	0.01	$0.4867606662 \times 10^{-10}$	$0.4867625260 \times 10^{-10}$	$0.6713514104 \times 10^{-11}$	$0.6713514105 \times 10^{-11}$	$0.9999985714 \times 10^{-12}$	$0.9999985717 \times 10^{-12}$	0.1×10^{-11}
0.02	0.02	$0.1705755572 \times 10^{-8}$	$0.1705792441 \times 10^{-8}$	$0.3281759859 \times 10^{-9}$	$0.3281759859 \times 10^{-9}$	$0.6399963428 \times 10^{-10}$	$0.6399963427 \times 10^{-10}$	0.64×10^{-10}
0.03	0.03	$0.1381609983 \times 10^{-7}$	$0.1381692273 \times 10^{-7}$	$0.3204055164 \times 10^{-8}$	$0.3204055165 \times 10^{-8}$	$0.7289906264 \times 10^{-9}$	$0.7289906262 \times 10^{-9}$	0.729×10^{-9}
0.04	0.04	$0.6128672929 \times 10^{-7}$	$0.6129422227 \times 10^{-7}$	$0.1616230193 \times 10^{-7}$	$0.1616230193 \times 10^{-7}$	$0.4095906365 \times 10^{-8}$	$0.4095906364 \times 10^{-8}$	0.4096×10^{-8}
0.05	0.05	$0.1952751831 \times 10^{-6}$	$0.1953168894 \times 10^{-6}$	$0.5675792133 \times 10^{-7}$	$0.5675792134 \times 10^{-7}$	$0.156244184 \times 10^{-7}$	$0.156244184 \times 10^{-7}$	0.15625×10^{-7}
0.06	0.06	$0.5044516999 \times 10^{-6}$	$0.5046216523 \times 10^{-6}$	$0.1584901621 \times 10^{-6}$	$0.1584901621 \times 10^{-6}$	$0.4665359983 \times 10^{-7}$	$0.4665359983 \times 10^{-7}$	0.46656×10^{-7}
0.07	0.07	$0.1127182674 \times 10^{-5}$	$0.1127740978 \times 10^{-5}$	$0.3777857545 \times 10^{-6}$	$0.3777857544 \times 10^{-6}$	$0.1176407612 \times 10^{-6}$	$0.1176407612 \times 10^{-6}$	0.117649×10^{-6}
0.08	0.08	$0.2264536447 \times 10^{-5}$	$0.2266102644 \times 10^{-5}$	$0.8019718443 \times 10^{-6}$	$0.8019718443 \times 10^{-6}$	$0.2621200197 \times 10^{-6}$	$0.2621200198 \times 10^{-6}$	0.262144×10^{-6}
0.09	0.09	$0.4194040677 \times 10^{-5}$	$0.4197934702 \times 10^{-5}$	$0.1558181826 \times 10^{-5}$	$0.1558181826 \times 10^{-5}$	$0.5313794632 \times 10^{-6}$	$0.5313794631 \times 10^{-6}$	0.531441×10^{-6}
0.1	0.1	$0.7284137720 \times 10^{-5}$	$0.7292939395 \times 10^{-5}$	$0.2823149542 \times 10^{-5}$	$0.2823149543 \times 10^{-5}$	$0.9998570239 \times 10^{-6}$	$0.9998570234 \times 10^{-6}$	0.1×10^{-5}

Uygulama 7.3.2

$D_{*t}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, $(m-1 < \alpha \leq m)$ Caputo türev tanımına göre α . mertebeden zaman-kesirli

türevi, $m \in \mathbb{N}$, f non-lineer bir fonksiyon ve g kaynak fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, t) &\rightarrow 0 \quad , \quad |x| \rightarrow \infty, t > 0, \end{aligned} \quad (7.191)$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen,

$$D_{*t}^\alpha u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) + g(x, t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad (7.192)$$

formatındaki non-lineer zaman-kesirli diferensiyel denklem için düzeltme fonksiyonelinin ve iterasyon formülünün nasıl oluşturulduğunu gösterelim (Odibat ve Momani, 2008b). 5. bölümde verilen varyasyonel iterasyon yöntemine göre, (7.192) non-lineer zaman-kesirli diferensiyel denklemi için düzeltme fonksiyoneli,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x, \xi) - f(\tilde{u}_k, (\tilde{u}_k)_x, (\tilde{u}_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi, \quad (7.193)$$

λ , varyasyonel teorisine göre belirlenen Lagrange çarpanı ve $\delta \tilde{u}_n = 0$ olmak üzere, $\tilde{u}_k, (\tilde{u}_k)_x, (\tilde{u}_k)_{xx}$ sınırlı varyasyonlardır. Buna göre, fonksiyonel stasyoner,

$$\delta u_{k+1}(x, t) = \delta u_k(x, t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x, \xi) - g(x, \xi) \right) d\xi, \quad (7.194)$$

durumundan, Lagrange çarpanları,

$$\begin{aligned} m=1 \text{ için } \lambda &= -1, \\ m=2 \text{ için } \lambda &= \xi - t. \end{aligned} \quad (7.195)$$

olarak elde edilir. Yani, $m=1$ için,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi. \quad (7.196)$$

$$u_0(x, t) = h(x). \quad (7.197)$$

iterasyon formülü ve u_0 başlangıç yaklaşımı, $m=2$ için ise,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t (\xi - t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi. \quad (7.198)$$

$$u_0(x, t) = h(x) + tk(x). \quad (7.199)$$

iterasyon formülü ve u_0 başlangıç yaklaşımı elde edilir. Yukarıda verilen bilgilere göre (7.192) formatında,

$$u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = -2x^2. \quad (7.200)$$

başlangıç koşullarıyla verilen,

$$D_{*t}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right), \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (7.201)$$

(7.201) non-lineer hiperbolik zaman-kesirli diferensiyel denklemi verilsin. (7.198) iterasyon formülüne göre, (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denklemi için iterasyon formülü,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t (\xi - t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi. \quad (7.202)$$

biçiminde verilir. $u_0 = x^2 - 2tx^2$ olarak alınırsa, (7.202) iterasyon formülüne göre,

$$u_0(x, t) = x^2(1 - 2t), \quad (7.203)$$

$$u_1(x, t) = x^2(1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + 2t^4), \quad (7.204)$$

$$u_2(x, t) = x^2(1 - 2t + 6t^2 - 8t^3 + 7t^4 - 6t^5 + \frac{174}{30}t^6 - \frac{192}{42}t^7 + \frac{168}{56}t^8 - \frac{96}{72}t^9 + \frac{24}{90}t^{10}) \\ + x^2 \left(\frac{-6}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha} - \frac{48}{\Gamma(7-\alpha)} t^{6-\alpha} \right), \quad (7.205)$$

⋮

yaklaşık çözümleri elde edilir. $\alpha = 2$ için, (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin tam çözümü,

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{t+1} \right)^2 \quad (7.206)$$

olarak verilmektedir. $\alpha = 2$ için, (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen (7.205) çözümü,

$$u(x,t) = x^2(1-2t+6t^2-8t^3+7t^4-6t^5+5.8t^6-4.571428571t^7+3t^8-1.333333333t^9+0.2666666667t^{10}) + x^2(-3t^2+4.000000001t^3-2t^4) \quad (7.207)$$

$$= x^2 - 2x^2t + 3x^2t^2 - 3.999999999x^2t^3 + 5x^2t^4 - 6x^2t^5 + 5.8x^2t^6 - 4.571428571x^2t^7 + 3x^2t^8 - 1.333333333x^2t^9 + 0.2666666667x^2t^{10} \quad (7.208)$$

Olur (Turut ve Güzel, 2010).

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2x^2t + 3x^2t^2 - 3.999999999x^2t^3 + 5x^2t^4 - 6x^2t^5 + 5.8x^2t^6 - 4.571428571x^2t^7 + 3x^2t^8 \\ B &= x^2 - 2x^2t + 3x^2t^2 - 3.999999999x^2t^3 + 5x^2t^4 - 6x^2t^5 + 5.8x^2t^6 - 4.571428571x^2t^7 \\ C &= x^2 - 2x^2t + 3x^2t^2 - 3.999999999x^2t^3 + 5x^2t^4 - 6x^2t^5 + 5.8x^2t^6 \end{aligned} \quad (7.209)$$

olarak alınırsa, (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.207) çözümünün $m = 10$ ve $n = 2$ için çok değişkenli Padé denklemleri, (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri yardımıyla,

$$p(x,t) = \begin{vmatrix} A & B & C \\ -1.333333333x^2t^9 & 3x^2t^8 & -4.571428571x^2t^7 \\ 0.2666666667x^2t^{10} & -1.333333333x^2t^9 & 3x^2t^8 \end{vmatrix} \quad (7.210)$$

$$\begin{aligned} &= 0.3555555555t^{16}(4.70382656t^8 - 8.48265312t^7 + 14.20535725t^6 \\ &- 20.91071441t^5 + 17.81250006t^4 - 14.71428577t^3 + 11.61607147t^2 \\ &- 8.51785717t + 8.169642871)x^6 \end{aligned} \quad (7.211)$$

$$q(x,t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.333333333x^2t^9 & 3x^2t^8 & -4.571428571x^2t^7 \\ 0.2666666667x^2t^{10} & -1.333333333x^2t^9 & 3x^2t^8 \end{vmatrix} \quad (7.212)$$

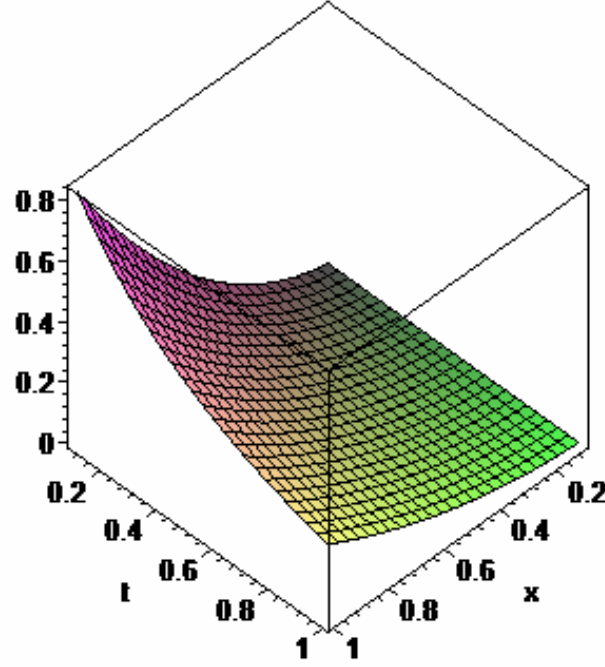
$$= 0.3555555555t^{16}(8.16964287 + 7.821428571t + 2.749999997t^2)x^4 \quad (7.213)$$

olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). Buna göre, (7.207) çözümü için (10,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

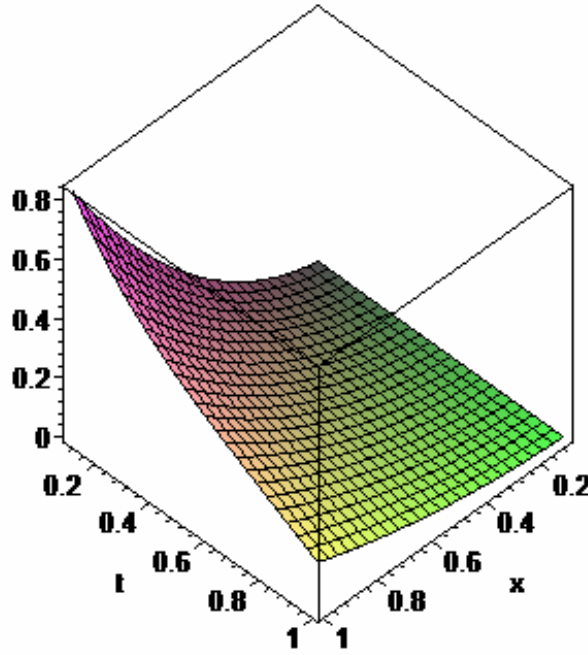
$$\begin{aligned} [10,2]_{(x,t)} &= (4.70382656t^8 - 8.48265312t^7 + 14.20535725t^6 \\ &- 20.91071441t^5 + 17.81250006t^4 - 14.71428577t^3 + 11.61607147t^2 \\ &- 8.51785717t + 8.169642871)x^2 / (8.16964287 + 7.821428571t + 2.749999997t^2) \end{aligned} \quad (7.214)$$

olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümünün, varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.207) çözümünün ve (7.207) çözümünün (10,2) mertebeli çok

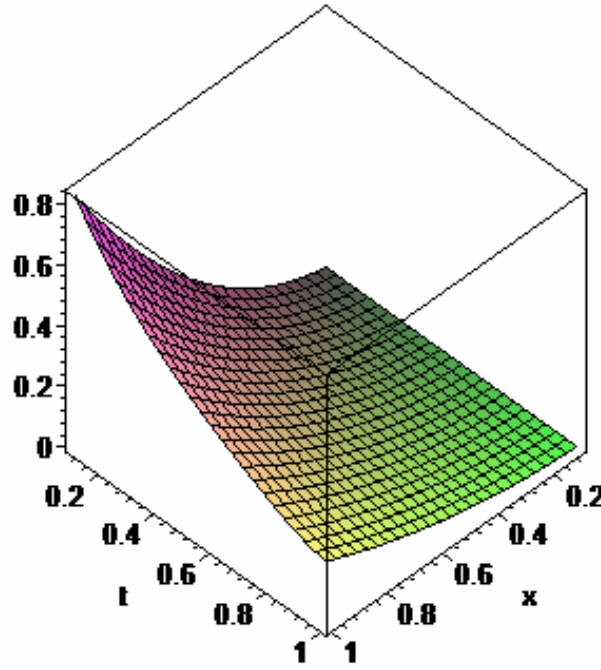
değişkenli Padé yaklaşımının grafikleri şekil 7.36, şekil 7.37, şekil 7.38’de ve nümerik değerleri ise çizelge 7.6’da verilmiştir.



Şekil 7. 36 (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümü



Şekil 7. 37 (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 2$ için bulunan (7.207) çözümü.



Şekil 7. 38 $\alpha = 2$ için bulunan (7.207) çözümünün (10, 2) mertebeli ÇPY.

$\alpha = 1.50$ için, (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen (7.205) çözümü,

$$u(x, t) = x^2(1 - 2t + 6t^2 - 8t^3 + 7t^4 - 6t^5 + 5.8t^6 - 4.571428571t^7 + 3t^8 - 1.333333333t^9 + 0.2666666667t^{10}) + x^2(-1.805406668t^{2.5} + 2.063321905t^{3.5} - 0.9170319581t^{4.5}) \quad (7.215)$$

$$= x^2 - 2x^2t + 6x^2t^2 - 8x^2t^3 + 7x^2t^4 - 6x^2t^5 + 5.8x^2t^6 - 4.571428571x^2t^7 + 3x^2t^8 - 1.333333333x^2t^9 + 0.2666666667x^2t^{10} - 1.805406668x^2t^{2.5} + 2.063321905x^2t^{3.5} - 0.9170319581x^2t^{4.5} \quad (7.226)$$

olur. $t^{1/2} = a$ alınırsa (7.226) çözümü,

$$u(x, a) = x^2 - 2x^2a^2 + 6x^2a^4 - 8x^2a^6 + 7x^2a^8 - 6x^2a^{10} + 5.8x^2a^{12} - 4.571428571x^2a^{14} + 3x^2a^{16} - 1.333333333x^2a^{18} + 0.2666666667x^2a^{20} - 1.805406668x^2a^5 + 2.063321905x^2a^7 - 0.9170319581x^2a^9 \quad (7.227)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
D &= x^2 - 2x^2a^2 + 6x^2a^4 - 8x^2a^6 + 7x^2a^8 - 6x^2a^{10} + 5.8x^2a^{12} \\
&- 4.571428571x^2a^{14} + 3x^2a^{16} - 1.333333333x^2a^{18} \\
&- 1.805406668x^2a^5 + 2.063321905x^2a^7 - 0.9170319581x^2a^9
\end{aligned} \tag{7.228}$$

$$\begin{aligned}
E &= x^2 - 2x^2a^2 + 6x^2a^4 - 8x^2a^6 + 7x^2a^8 - 6x^2a^{10} + 5.8x^2a^{12} \\
&- 4.571428571x^2a^{14} + 3x^2a^{16} - 1.805406668x^2a^5 \\
&+ 2.063321905x^2a^7 - 0.9170319581x^2a^9
\end{aligned} \tag{7.229}$$

$$\begin{aligned}
F &= x^2 - 2x^2a^2 + 6x^2a^4 - 8x^2a^6 + 7x^2a^8 - 6x^2a^{10} + 5.8x^2a^{12} \\
&- 4.571428571x^2a^{14} + 3x^2a^{16} - 1.805406668x^2a^5 \\
&+ 2.063321905x^2a^7 - 0.9170319581x^2a^9
\end{aligned} \tag{7.230}$$

olarak alınıp, (7.227) çözümünün, $m = 20$ ve $n = 2$ için (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanıldığında çok değişkenli Padé denklemleri,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} D & E & F \\ 0 & -1.333333333x^2a^{18} & 0 \\ 0.2666666667x^2a^{20} & 0 & -1.333333333x^2a^{18} \end{vmatrix} \tag{7.231}$$

$$\begin{aligned}
&= -0.3555555555(2.521837884a^9 - 8.511202852a^7 + 9.027033336a^5 \\
&- 10.42857142a^{16} + 17.05714285a^{14} - 22.99999999a^{12} + 22.99999999a^{10} \\
&- 26.99999999a^8 + 33.99999998a^6 - 27.99999999a^4 + 8.999999996a^2 \\
&3.666666662a^{18} - 4.999999998 + 0.917031958a^{11})x^6a^{36}
\end{aligned} \tag{7.232}$$

$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1.333333333x^2a^{18} & 0 \\ 0.2666666667x^2a^{20} & 0 & -1.333333333x^2a^{18} \end{vmatrix} \tag{7.233}$$

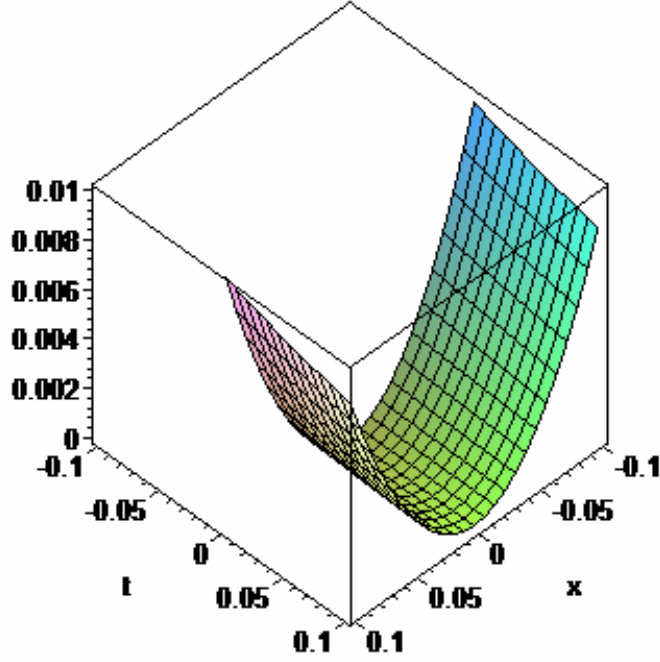
$$= -0.3555555555(4.999999998 + a^2)x^4a^{36} \tag{7.234}$$

olarak elde edilir (Turut ve Güzel, 2010). Buna göre, $a = t^{1/2}$ alınırsa, (7.215) çözümü için (20, 2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

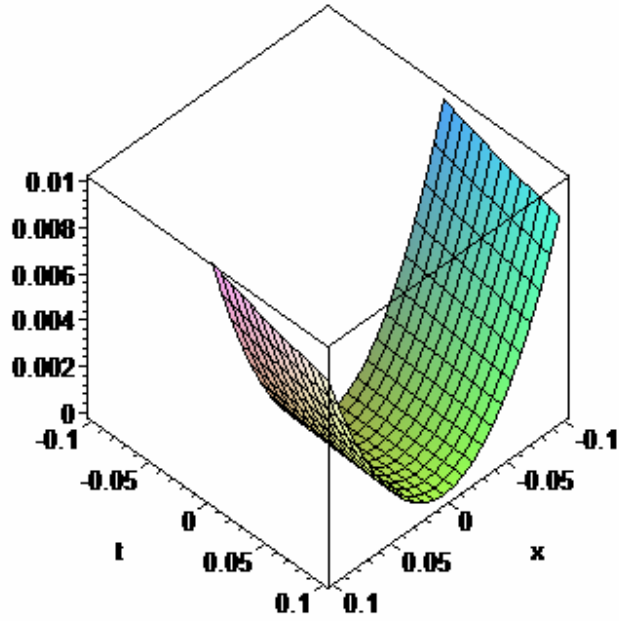
$$\begin{aligned}
[20, 2]_{(x,t)} &= -(2.521837884t^{9/2} - 8.511202852t^{7/2} + 9.027033336t^{5/2} \\
&- 10.42857142t^8 + 17.05714285t^7 - 22.99999999t^6 + 22.99999999t^5 \\
&- 26.99999999t^4 + 33.99999998t^3 - 27.99999999t^2 + 8.999999996t \\
&3.666666662t^9 - 4.999999998 + 0.917031958t^{11/2})x^2 / (4.999999998 + t)
\end{aligned} \tag{7.235}$$

Olarak elde edilir. (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VIY) ile elde edilen

(7.205) çözümünün $\alpha = 1.50$ için bulunan (7.215) çözümünün ve (7.215) çözümüne ait (ÇPY) grafikler şekil 7.39, şekil 7.40'ta ve nümerik değerler ise çizelge 7.6'da verilmiştir.



Şekil 7. 39 (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.50$ için bulunan (7.215) çözümü.



Şekil 7. 40 (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.50$ için bulunan (7.215) çözümünün ÇPY.

$\alpha = 1.75$ için, (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen (7.205) çözümü,

$$u(x, t) = x^2(1 - 2t + 6t^2 - 8t^3 + 7t^4 - 6t^5 + 5.8t^6 - 4.571428571t^7 + 3t^8 - 1.333333333t^9 + 0.2666666667t^{10}) + x^2(-2.353626989t^{2.25} + 2.896771680t^{3.25} - 1.363186673t^{4.25}) \quad (7.236)$$

$$= x^2 - 2x^2t + 6x^2t^2 - 8x^2t^3 + 7x^2t^4 - 6x^2t^5 + 5.8x^2t^6 - 4.571428571x^2t^7 + 3x^2t^8 - 1.333333333x^2t^9 + 0.2666666667x^2t^{10} - 2.353626989x^2t^{2.25} + 2.896771680x^2t^{3.25} - 1.363186673x^2t^{4.25} \quad (7.237)$$

olur. $t^{1/4} = a$ olarak alınırsa, (7.237) çözümü,

$$u(x, a) = x^2 - 2x^2a^4 + 6x^2a^8 - 8x^2a^{12} + 7x^2a^{16} - 6x^2a^{20} + 5.8x^2a^{24} - 4.571428571x^2a^{28} + 3x^2a^{32} - 1.333333333x^2a^{36} + 0.2666666667x^2a^{40} - 2.353626989x^2a^9 + 2.896771680x^2a^{13} - 1.363186673x^2a^{17} \quad (7.238)$$

olur. Ayrıca,

$$G = x^2 - 2x^2a^4 + 6x^2a^8 - 8x^2a^{12} + 7x^2a^{16} - 6x^2a^{20} + 5.8x^2a^{24} - 4.571428571x^2a^{28} + 3x^2a^{32} - 1.333333333x^2a^{36} - 2.353626989x^2a^9 + 2.896771680x^2a^{13} - 1.363186673x^2a^{17} \quad (7.239)$$

$$H = x^2 - 2x^2a^4 + 6x^2a^8 - 8x^2a^{12} + 7x^2a^{16} - 6x^2a^{20} + 5.8x^2a^{24} - 4.571428571x^2a^{28} + 3x^2a^{32} - 1.333333333x^2a^{36} - 2.353626989x^2a^9 + 2.896771680x^2a^{13} - 1.363186673x^2a^{17} \quad (7.240)$$

$$I = x^2 - 2x^2a^4 + 6x^2a^8 - 8x^2a^{12} + 7x^2a^{16} - 6x^2a^{20} + 5.8x^2a^{24} - 4.571428571x^2a^{28} + 3x^2a^{32} - 2.353626989x^2a^9 + 2.896771680x^2a^{13} - 1.363186673x^2a^{17} \quad (7.241)$$

olarak alınıp, olarak alınıp, (7.238) çözümünün, $m = 41$ ve $n = 2$ için (6.31) ve (6.32) determinant ifadeleri kullanıldığında çok değişkenli Padé denklemleri,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} G & H & I \\ 0.2666666667x^2a^{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0.2666666667x^2a^{40} & 0 \end{vmatrix} \quad (7.242)$$

$$= -0.07111111113x^6a^{80}(-1 + 2a^4 - 6a^8 + 8a^{12} - 7a^{16} + 6a^{20} - 5.8a^{24} + 4.571428571a^{28} - 3a^{32} + 1.333333333a^{36} + 2.353626989a^9 - 2.896771680a^{13} + 1.363186673a^{17}) \quad (7.243)$$

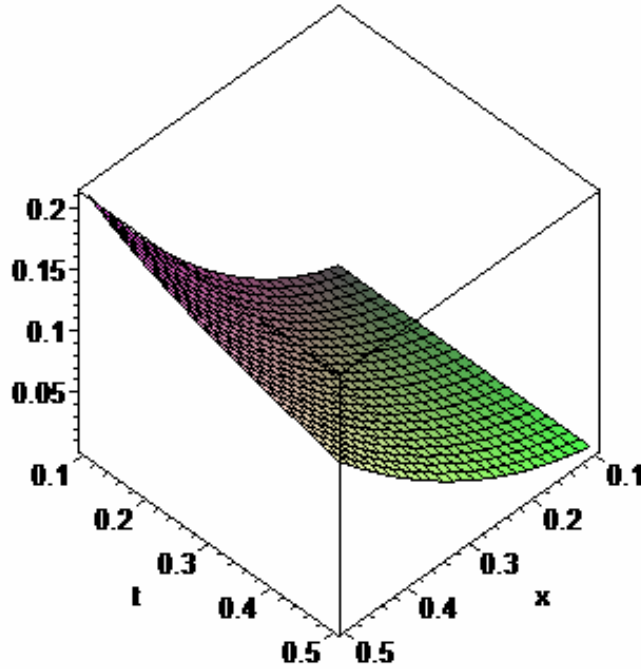
$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.2666666667x^2a^{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0.2666666667x^2a^{40} & 0 \end{vmatrix} \quad (7.244)$$

$$= 0.07111111113x^4a^{80} \quad (7.245)$$

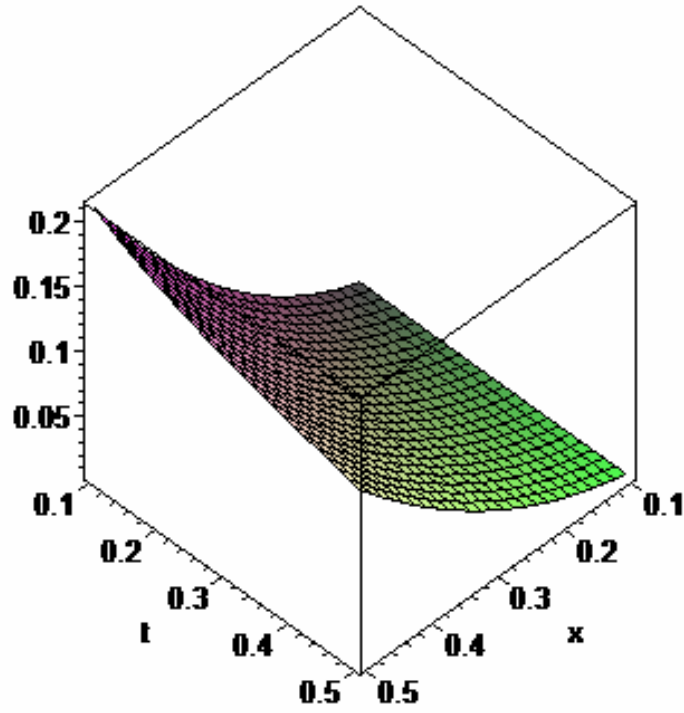
olarak elde edilir. Buna göre, $a = t^{1/4}$ alınırsa, (7.236) çözümü için (41,2) mertebeli çok değişkenli Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned} [41,2]_{(x,t)} = & -0.07111111113x^6t^{20}(-1+2t-6t^2+8t^3-7t^4+6t^5-5.8t^6 \\ & +4.571428571t^7-3t^8+1.333333333t^9+2.353626989t^{9/4} \\ & -2.896771680t^{13/4}+1.363186673t^{17/4})/0.07111111113x^4t^{20} \end{aligned} \quad (7.246)$$

olarak elde edilir. (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.75$ çin bulunan (7.236) çözümünün ve (7.236) çözümüne ait (ÇPY) grafikleri şekil 7.41, şekil 7.42’de ve nümerik değerler ise çizelge 7.6’da verilmiştir.



Şekil 7. 41 (7.201) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.75$ çin bulunan (7.236) çözümü.



Şekil 7. 42 (7.201) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin (VİY) ile elde edilen (7.205) çözümünün $\alpha = 1.75$ için bulunan (7.236) çözümüne ait ÇPY.

(7.157) homojen olmayan lineer Klein-Gordon ve (7.201) non-lineer hiperbolik zaman-kesirli diferensiyel denklemlerinin, varyasyonel iterasyon yöntemi (VİY) ile elde edilen farklı α değerlerine ait seri çözümlere ve farklı α değerleri için elde edilen seri çözümlerin çok değişkenli Padé yaklaşımlarına (ÇPY) ait grafiklerden (Şekil 7.29-7.42) ve nümerik değerlerden görüldüğü gibi (Çizelge 7.5-7.6), her iki yöntemden elde edilen sonuçlar, tam çözümlerle ve birbirleriyle son derece uyumludur (Turut ve Güzel, 2010).

Çizelge 7. 5 $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$, $\alpha = 2.0$ olduğunda, (7.201)) zaman-kesirli diferensiyel denkleminin (VIY) ile elde edilen (7.205) çözümünün ve (7.205) seri çözümüne ait (ÇPY) nümerik değerleri.

x	t	$\alpha = 1.5$		$\alpha = 1.75$		$\alpha = 2.0$		
		u_{VIY}	$u_{ÇPY}$	u_{VIY}	$u_{ÇPY}$	u_{VIY}	$u_{ÇPY}$	$u_{TÇ}$
0.01	0.01	0.00009805742207	0.00009805742208	0.00009805185529	0.00009805185529	0.00009802960494	0.00009802960495	0.00009802960494
0.02	0.02	0.0003848949142	0.0003848949143	0.0003847966767	0.0003847966767	0.0003844675124	0.0003844675125	0.0003844675125
0.03	0.03	0.0008504258525	0.0008504258524	0.0008499060377	0.0008499060378	0.0008483363175	0.0008483363176	0.0008483363182
0.04	0.04	0.001485685664	0.001485685663	0.001484004096	0.001484004096	0.001479289934	0.001479289934	0.001479289941
0.05	0.05	0.002282722748	0.002282722747	0.002278566886	0.002278566886	0.002267573656	0.002267573655	0.002267573696
0.06	0.06	0.003234501119	0.003234501118	0.003225836632	0.003225836632	0.003203987014	0.003203987014	0.003203987184
0.07	0.07	0.004334811900	0.004334811899	0.004318746188	0.004318746188	0.004279849200	0.004279849200	0.004279849769
0.08	0.08	0.005578192194	0.005578192193	0.005550851279	0.005550851280	0.005486966839	0.005486966839	0.005486968450
0.09	0.09	0.006959850295	0.006959850295	0.006916269160	0.006916269160	0.006817603925	0.006817603924	0.006817607945
0.1	0.1	0.008475596550	0.008475596548	0.008409622712	0.008409622712	0.008264453717	0.008264453716	0.008264462810

8. SONUÇ VE TARTIŞMA

“Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri” isimli tezimizde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde özellikle doğruluğu ve etkinliği ispatlanmış nümerik yöntemlerin Padé yaklaşımı ile karşılaştırılmasına önem verilmiştir. Bu yüzden, özellikle Adomian ayrıştırma, genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm ve varyasyonel iterasyon yöntemleri seçilmiştir. Literatürde tek değişkenli Padé yaklaşımının kesirli diferansiyel denklemler üzerindeki sınırlı uygulamalarına rastlanmasına rağmen (Momani ve Qaralleh, 2007; Momani ve Shawagfeh, 2006), çok değişkenli Padé yaklaşımının kesirli diferansiyel denklemler üzerindeki uygulamalarına hemen hemen hiç rastlanmamaktadır. Bundan dolayı, bu çalışmanın temel hedefi çok değişkenli Padé yaklaşımının kesirli diferansiyel denklemlere uygulanabileceğini göstermektir. Çalışmamızın uygulamalar kısmındaki sonuçlardan da görüleceği gibi bu hedefe başarıyla ulaşılmıştır. Dolayısıyla çalışmamızın, literatürdeki önemli bir boşluğu dolduracağına inanmaktayız.

KAYNAKLAR

- Abbaoui, K. ve Cherruault Y. (1996), "New ideas for proving convergence of decomposition methods", *Computers and Mathematics with Applications*, 29 (7): 103–108
- Aczél, J. (1966), "Lectures on functional equations and their applications", Academic Press Inc, New York.
- Adomian, G. (1992), "A review of decomposition method and some recent results for nonlinear equation", *Mathematical and Computer Modelling*, 13 (7):17–43.
- Adomian, G. (1994), "Solving frontier problems of physics: The decomposition method", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht..
- Allan, F M. (2007), "Derivation of the Adomian decomposition method using the homotopy analysis method", *Applied Mathematics and Computation*, 190: 6-14.
- Anastasio, T.J. (1994), "The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons", *Biological Cybernetics*, 72:69-79.
- Andrews, G.E., Askey R. ve Roy R. (2000), "Special Functions", Cambridge University Press, Cambridge.
- Arikoglu, A. ve Ozkol İ. (2007), "Solution of fractional differential equations by using differential transform method", *Chaos, Solitons & Fractals*, 34 (5): 1473–1481.
- Ayaz, F. (2003), "On the Two-Dimensional Differential Transform Method", *Applied Mathematics and Computation*, 143:361-374.
- Ayaz, F. (2004), "Applications of Differential Transform Method to Differential-Algebraic Equations", *Applied Mathematics and Computation*, 152:649-657.
- Baker, G.A. ve Graves-Morris, P., (1996), "Padé Approximants", Cambridge University Press, Cambridge.
- Bell, W.W, (1968), "Special Functions For Scientists and Engineers", D. Van Nostrand Company, Toronto.
- Benghorbal, M.M, (2004), "Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals", Faculty of Graduate Studies (Doktora Tezi), The University of Western Ontario, Canada.
- Blair, G.W.S, (1968), "The role of psychophysics in rheology", *Journal of Colloid Sciences*, 2: 21-32.
- Boyce, W.E ve DiPrima, R.C (1997), "Elementary Differential Equations", Wiley, New York.
- Brezinski, C., (1991), *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg.
- Caputo, M., (1967), "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II", *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13: 529–539
- Cherruault, Y., (1989), "Convergence of Adomian's method", *Kybernetes*, 18: 31–38.
- Cherruault, Y. ve Adomian, G., (1993), "Decomposition methods: A new proof of convergence", *Mathematical and Computer Modelling*, 18: 103–106.

- Chisholm, J.S.R, (1973), "Rational approximants defined from double power series", *Mathematics of Computation*, 27:841-848.
- Cuyt, A. (1983a), "Multivariate Padé approximants", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 96 (1): 283-293.
- Cuyt, A. ve Wuytack, L., (1987), "Nonlinear Methods in Numerical Analysis", Amsterdam.
- Cuyt, A. ,(1983), "How Well the Concept of Padé Approximant be Generalized to the Multivariate Case", *Journal of Computational and Applied Mathematics* ,105:25-50.
- Çelik, E., (2002), "Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü", Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ertürk, V.S., Momani S. ve Odibat Z., (2008), "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13:1642-1654 .
- Evans, L.C., (1998),"Partial differential equations", American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 19:1-2.
- Gorenflo, R. ve Mainardi, F., (1997), "Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, *Fractals and Fractional Calculus*," Carpinteri & Mainardi, New York.
- Hardy, G. ,(1945), "Riemann's form of Taylor series", *Journal of the London Mathematical Society*, 20:48-57.
- He, J.H., (1997), "A new approach to non-linear partial differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(4): 230-235.
- He, J.H., (2003), "Generalized Variational Principles in Fluids", Science & Culture Publishing House of China, (in Chinese).
- He, J.H., (2007), "Variational iteration method-Some recent results and new interpretations", *Journal of computational and Applied Mathematics*, 207: 3-17.
- Inokuti, M., Sekine H. ve Mura T., (1978), "General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed.), *Variational Method in the Mechanics of solids*", Pergamon Press, pp. 156–162, New York.
- Kiriş, M.E, (2007), "Kesirli Türevlere Sahip Diferansiyel Denklemler ve Pantograf Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi İle Çözümlerinin İncelenmesi", Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Kilbas, A.A., Srivastava ve H.M., Trujillo, J.J., (2006) "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier B.V., Amsterdam.
- Kreyszig, E., (2006), "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons ,Singapore.
- Levin, D., (1976), "General order Padé-type rational approximants defined from double power series", *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 18:395-407.
- Li, X., (2003), "Fractional Calculus, Fractal Geometry and Stochastic Processes", PhD Thesis, Selçuk Üniversitesi, The University of Western Ontario, Canada.
- Momani, S., (2005), "Analytic and approximate solutions of the space- and time-fractional telegraph equations", *Applied Mathematics and Computation*, 170:1126-1134.

- Momani, S. ve Shawagfeh N. (2006), "Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 182:1083-1092.
- Momani, S. ve Odibat Z. (2007), "Numerical Approach to Differential Equations of Fractional Order", *Journal of Computational And Applied Mathematics*, 27:96-110.
- Momani, S. ve Qaralleh R. (2007), "Numerical approximations and Pade' approximants for a fractional population growth model", *Applied Mathematical Modelling*, 31:1907-1914.
- Momani, S. ve Odibat Z. (2008), "A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula", *Journal of Computational And Applied Mathematics*, 220:85-95.
- Momani S., Odibat Z. ve Ertürk, V.S, (2007), "Generalized differential transform method for solving time- fractional diffusion-wave equation", *Physics Letters A*, 370:379-387 .
- Odibat, Z. ve Momani, S., (2006) "Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (1): 27–34.
- Odibat, Z. ve Shawagfeh, N., (2007) , "Generalized Taylor's formula", *Applied Mathematics and Computation*, 186: 286–293.
- Odibat, Z. ve Momani, S., (2008a), "A Generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order", *Applied Mathematics Letters*, 21: 194-199.
- Odibat, Z. ve Momani, S., (2008b), "Numerical methods for nonlinear differential equations of fractional order", *Applied Mathematical Modelling*, 32:28-39.
- Odibat, Z., Momani, S., Ertürk, V.S, (2008), "Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order", *Applied Mathematics and computation*, 197: 467-477.
- Odibat, Z. ve Momani, S., (2009), "The variational iteration method: An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics", *Computers and Mathematics with Applications*, 58:2199-2208.
- Odibat, Z.M, (2010), "A Study On The Convergence Of Variational Iteration Method", *Mathematical and Computer modelling*, 51:1181-1192.
- Oldham, K.B., Jerome, S., Trujillo, J.J., (1974), "The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order", Academic Pres, California.
- Oustaloup, A., (1991), "La command Crone", Hermes, Paris.
- Podlubny, I., (1999), "Fractional Differential Equations", Academic Press, San Diego, California.
- Rida, S.Z., El-Sayed, A.M.A. ve Arafa, A.A.M., "On the solutions of time-fractional reaction–diffusion equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* , doi:10.1016/j.cnsns.2010.02.007.
- Ross, B. (1977), "The Development of Fractional Calculus,(1695-1900), *Historia Mathematica*", 4: 75-89.

- Ross, B. ve Miller, K.S., (1993), “An introduction To Fractional Calculus And Fractional Differential Equations”, John Wiley and Sons Inc., Canada.
- Salkuyeh, D.K., (2008), “Convergence of the variational iteration method for solving linear systems of ODEs with constant coefficients”, *Computers and Mathematics with Applications*, 56: 2027–2033.
- Tatari, M. ve Dehghan, M., (2007), “On the convergence of He’s Variational Iteration Method”, *Journal of computational and Applied Mathematics*, 207: 121-128 .
- Tuilljo, J., Rivero, M. ve Bonilla, B., (1999), “On a Riemann–Liouville generalized Taylor’s formula”, *Journal of Matematical Analysis and Applications*, 231: 255–265.
- Turut, V., (2007), “Çok Değişkenli Padé Yaklaşımları Ve Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Turut, V., Çelik, E. ve Yiğider, M., “Multivariate padé approximation for solving partial differential equations (PDE)”, *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, in press, DOI: 10.1002/flid.2305.
- Turut, V., ve Güzel N., (2010), "On Solving Partial Differential Equations of Fractional Order by Using the Variational Iteration Method and Multivariate Padé Approximation", *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, article in pres.
- Wade, W.R, (2000), “An Introduction To Analysis”, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, USA.
- Watanabe, Y., (1931), “Notes on the generalized derivatives of Riemann–Liouville and its application to Leibntz’s Formula II”, *Tohoku Mathematical journal*, 34: 28–41.
- Wazwaz, A., (1998), “A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in series solutions”, *Applied mathematics and computation*, 97: 37-44.
- Wazwaz, A., (2000), “A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators”, *Applied mathematics and computation*, 111: 53–69.
- Wazwaz, A. ve El-Sayed, S., (2001), “A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators”, *Applied mathematics and computation*, 122: 393-405.
- Wazwaz, A., (2009) , “The variational iteration method for analytic treatment for linear and nonlinear ODEs”, *Applied mathematics and computation*, 212: 120-134.
- Zhou, J.K., (1986), “Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits”, Huazhong Univ. Press, Wuhan, China, (in Chinese).

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 18.03.1974

Doğum yeri Muş

Lise 1989-1992 Erzurum Lisesi

Lisans 2001-2005 Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik BölümüYüksek Lisans 2005-2007 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Matematik ProgramıDoktora 2007- 2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı**Çalıştığı kurum**2009-Devam ediyor Batman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi