YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK-PARABOLİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN FARK ŞEMALARI

Okan GERÇEK

FBE Matematik Anabilimdalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 17.06.2010
Tez Danışmanları : Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (Yıldız T.Ü.)
: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV (Fatih Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ömer GÖK (Yıldız T.Ü.)
: Prof. Dr. Ayşe KARA (Yıldız T.Ü.)
: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR (Fatih Ü.)
: Doç. Dr. Yaşar SÖZEN (Fatih Ü.)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$C(H)$ $C(H)=C([a,b],H)$, değerleri H Banach uzayında olan ve $[a,b]$ aralığında tanımlı $\|\varphi\|_{C([a,b],H)}=\max_{a\le t\le b}\|\varphi(t)\|_H$ normunda tanımlanan düzgün fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı.

$C_{0,1}^{\alpha}(H)$ $C_{0,1}^{\alpha}(H)=C_{0,1}^{\alpha}([-1,0],H), 0<\alpha<1$,

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0],H)}=\|\varphi\|_{C([-1,0],H)}+\sup_{-1<t<t+\tau<0}\frac{(-t)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuyla verilen $[-1,0]$ aralığı üzerinde tanımlanmış H uzayında değer alan düzgün $\varphi(t)$ fonksiyonları kümesinin tanımlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.

$C_{0,1}^{\alpha}(H)$ $C_{0,1}^{\alpha}(H)=C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H), 0<\alpha<1$,

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}=\|\varphi\|_{C([0,1],H)}+\sup_{0<t<t+\tau<1}\frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuyla verilen $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlanmış H uzayında değer alan düzgün $\varphi(t)$ fonksiyonları kümesinin tanımlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.

$C_{0,1}^{\alpha}(H)$ $C_{0,1}^{\alpha}(H)=C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],H), 0<\alpha<1$,

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],H)}=\|\varphi\|_{C([-1,1],H)}+\sup_{-1<t<t+\tau<0}\frac{(-t)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

$$+\sup_{0<t<t+\tau<1}\frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuyla verilen $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlanmış H uzayında değer alan düzgün $\varphi(t)$ fonksiyonları kümesinin tanımlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.

$C_{\tau}(H)$ $C(\tau,H)=C([a,b]_{\tau},H)$,

$[a,b]_{\tau}=\{t_k=kh, N_a\le k\le N_b, N_a\tau=a, N_b\tau=b\}$ 'de tanımlı $\varphi^{\tau}=\{\varphi_k\}_{N_a}^{N_b}$ ağ fonksiyonları uzayında $\varphi^{\tau}\in H(\tau)$ için $\|\varphi^{\tau}\|_{C([a,b]_{\tau},H)}=\max_{N_a\le k\le N_b}\|\varphi_k\|_H$ normu ile verilen Banach uzayı.

$C_{\tau}^{\alpha}(H)$ $C_{\tau}^{\alpha}(H)=C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H),, 0<\alpha<1$,

$$\|\varphi^{\tau}\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)}=\|\varphi^{\tau}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)}+\sup_{-N\le k<k+r\le 0}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_E\frac{(-k)^{\alpha}}{r^{\alpha}},$$

normuyla verilen $[-1,0]_{\tau}$ aralığı üzerinde tanımlanmış $C_{\tau}^{\alpha}(H)$ üzerinde değer alan H-değerli $\varphi^{\tau}=\{\varphi_k\}_{N_a}^{N_b}$ ağ fonksiyonları kümesinin tanımlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.

$C_{\tau}^{\alpha}(H)$ $C_{\tau}^{\alpha}(H)=C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H), 0<\alpha<1$,

$$\|\varphi^{\tau}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}=\|\varphi^{\tau}\|_{C([0,1]_{\tau},H)}+\sup_{1\le k<k+r\le N-1}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_E\frac{((k+r)\tau)^{\alpha}(N-k)^{\alpha}}{r^{\alpha}}$$

normuyla verilen $[0,1]_{\tau}$ aralığı üzerinde tanımlanmış $C_{\tau}^{\alpha}(H)$ üzerinde değer alan

H-değerli $\varphi^{\tau} = \{\varphi_k\}_{N_a}^{N_b}$ ağ fonksiyonları kümesinin tanımlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.

$C_{\tau}^{\alpha}(H)$ $C_{\tau}^{\alpha}(H) = C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_{\tau}, H), 0 < \alpha < 1$,

$$\| \varphi^{\tau} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_{\tau},H)} = \| \varphi^{\tau} \|_{C([-1,1]_{\tau},H)} + \sup_{-N \le k < k+r \le 0} \| \varphi_{k+r} - \varphi_k \|_E \frac{(-k)^{\alpha}}{r^{\alpha}}$$

$$+ \sup_{1 \le k < k+r \le N-1} \| \varphi_{k+r} - \varphi_k \|_E \frac{((k+r)\tau)^{\alpha} (N-k)^{\alpha}}{r^{\alpha}}$$

normuyla verilen $[-1,1]_{\tau}$ aralığı üzerinde tanımlanmış $C_{\tau}^{\alpha}(H)$ üzerinde değer alan *H*-değerli $\varphi^{\tau} = \{\varphi_k\}_{N_a}^{N_b}$ ağ fonksiyonları kümesinin tanımlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.

$F\{u\}$ *u* fonksiyonunun Fourier dönüşümü.

$L\{u\}$ *u* fonksiyonunun Laplace dönüşümü.

Ω $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < 1, 1 \le k \le n\}$ ile verilen açık birim küp. *S*, bu küpün sınırları ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

Ω^{+} $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < \infty, 1 \le k \le n\}$ ile verilen açık küme. S^{+}, bu kümenin sınırları ve $\overline{\Omega}^{+} = \Omega^{+} \cup S^{+}$.

KISALTMA LİSTESİ

BBDFŞ	Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması
İBDFŞ	İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması sırasında yaptığı değerli katkılar için, benden hiç bir yardımı esirgemeyen, değerli tavsiyeleriyle akademik hayatımda sürekli yol gösteren danışman hocam Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev'e sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında desteklerini esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Ziya Soyuçok'a, maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu araştırmada, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı A operatörlü diferensiyel denklemi için çok noktalı lokal olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \le t \le 1), \\ \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \le t \le 0), \\ u(1) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i) + \varphi \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \le 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

sınır değer problemin iyi konumlanmışlığı $\sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1$ varsayımı koşulu altında çalışılmıştır. Bu sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı ağırlıklı Hölder uzaylarında doğruluğu gösterilmiştir. Eliptik-parabolik denklemlerin lokal olmayan sınır değer problemlerinin çözümü için koersiv eşitsizlikleri elde edilmiştir. Lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci derecedeki yakınlaşması olan fark şemaları sunulmuştur. Fark şemalarının da iyi konumlanmışlığı Hölder uzaylarında ortaya konulmuştur. Uygulamalarda lokal olmayan karma problemlerin yaklaşık çözümü için oluşturulan fark şemalarının çözümlerinde kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Bu fark şemalarının çözümleri için teorik ifadeleri sayısal deney sonuçları ile desteklenmiştir.

Anahtar kelimeler: Lokal olmayan sınır değer problemi, çok noktalı eliptik-parabolik diferensiyel denklemleri, fark şemaları, kararlılık, koersiv kararlılık, birinci basamaktan doğruluk, ikinci basamaktan doğruluk, iyi konumlanmışlık.

ABSTRACT

In the present work, we consider the multipoint nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), \ (0 \le t \le 1), \\ \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), \ (-1 \le t \le 0), \\ u(1) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i) + \varphi, \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_J \le 0 \end{cases}$$

for the elliptic-parabolic equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A under the assumption $\sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1$. The well-posedness of this problem in Hölder spaces with a weight is established. The coercivity inequalities for the solutions of the boundary value problems for elliptic-parabolic equations are obtained. The first and second order of accuracy difference schemes for approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. The well-posedness of these difference schemes in Hölder spaces is established. In applications, the stability, almost coercivity inequalities, coercivity inequalities for the solutions of difference scheme for the approximate solution of this nonlocal boundary value problem for mixed equation are obtained.

The theoretical statements for the solution of these difference schemes are supported by the results of numerical experiments.

Keywords: Nonlocal boundary value problem, multipoint elliptic-parabolic differential equations, difference schemes, stability, coercive stability, first order accuracy, second order accuracy, well-posedness.

1. GİRİŞ

Lokal olmayan problemler fizik, biyoloji, kimya, ekoloji, mühendislik ve endüstrinin çeşitli süreçlerinin matematik modellemeleri için bilinmeyen fonksiyonun sınır değerlerinin belirlenmesinin olanaksız olduğu durumlarda yaygın olarak kullanılır. Kısmi türevli diferensiyel denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerin teori ve sayısal çözüm metotları birçok araştırmacı tarafından araştırılmaktadır. (bakınız, [Agarwal, Bohner ve Shakhmurov, 2005], [Ashyralyev, 2003], [Ashyralyev, 2006b], [Ashyralyev, 2007a], [Ashyralyev, 2007b], [Ashyralyev, 2009], [Ashyralyev, Dural ve Sozen, 2009], [Ashyralyev, Hanalyev ve Sobolevskii, 2001], [Ashyralyev, Karatay ve Sobolevskii, 2004], [Ashyralyev ve Sobolevskii, 2006], [Ashyralyev ve Soltanov, 1998], [Chipot ve Lovat, 1997], [Dautray ve Lions, 1988], [Dehghan, 2005a], [Dehghan, 2005b], [Ewing, Lazarov ve Lin, 2000], [Gordeziani, Natalini ve Ricci, 2005], [Gulin, Ionkin ve Morozova, 2001], [Ionkin ve Morozova, 2000], [Lagnese, 1972], [Martín-Vaquero ve Vigo-Aguiar, 2009], [Pao, 1995], [Pao, 2001], [Sapagovas, 2008], [Samarskii ve Bitsadze, 1969], [Shakhmurov, 2006]).

Bizim ilgi alanımız lokal olmayan sınır değer koşulu ile çok noktalı eliptik-parabolik diferensiyel ve fark problemlerin iyi konumlanmışlığını (well-posedness) çalışmaktır. Akışkanlar mekaniğindeki birçok problemlerde (reaksiyon-difüzyon denklemleri dinamikleri, modelleme süreçleri ve teorik gaz hidrodinamik uygulama problemleri), ısı akışı, füzyon süreci ve diğer fiziksel alanlarda karşımıza eliptik-parabolik tipindeki diferensiyel denklemler çıkmaktadır. Bu türdeki denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerin çözüm metotları üzerine birçok araştırma yapılmıştır. (bakınız, [Salahatdinov, 1974], [Drujaev, 1979], [Vragov, 1983], [Kroner ve Rodrigues, 1985], [Karatopraklieva, 1991], [Hilhorst ve Hulshof, 1991], [Ashyralyev ve Soltanov, 1994], [Bazarov ve Soltanov, 1995], [Ashyralyev ve Soltanov, 1995b], [Nakhushev, 1995], [Glazatov, 1998], [Diaz, Lerena,, Padial, and Rakotoson, 2004], [Ashyralyev, 2006a]).

Lokal olmayan sınır koşuluyla çok noktalı eliptik-parabolik problemi Fourier serileri metodu, Laplace dönüşümü metodu, and Fourier dönüşümü metoduyla çözülebilinir. Bu üç farklı analitik metodu örneklerle açıklayabiliriz.

Birincil olarak Fourier serileri metodu uygulamasını ele alalım.

Örnek 1.1. Aşağıdaki çok noktalı eliptik-parabolik problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-t\sin x, \quad 0<t<1,\ 0<x<\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(-2e^{-t}+1-t)\sin x, \ \ -1<t<0,\ 0<x<\pi, \\ u(1,x)=\frac{1}{2}u(-1,x)+\frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2},x\right)+(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\sin x, \\ u(0_+,x)=u(0_-,x),\ u'(0_+,x)=u'(0_-,x),\ 0\le x\le \pi, \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, \ \ -1\le t\le 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

lokal olmayan sınır koşulu içersinde etüt edelim.

(1.1) probleminin çözümü için Fourier serileri metodunu kullanırız. Problemi çözmek için $u(t,x)$ fonksiyonunu $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)$ şeklinde iki kısma ayıralım. Şöyle ki

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\ 0<t<1,\ 0<x<\pi, \\ \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \ \ -1<t<0,\ 0<x<\pi, \\ v(1,x)=\frac{1}{2}v(-1,x)+\frac{1}{2}v\left(-\frac{1}{2},x\right)+(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\sin x, \\ v(0_+,x)=v(0_-,x),v'(0_+,x)=v'(0_-,x),0\le x\le \pi, \\ v(t,0)=v(t,\pi)=0, \ \ -1\le t\le 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

ve

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -t\sin x,\ 0 < t < 1,\ 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (-2e^{-t} + 1 - t)\sin x, -1 < t < 0,\ 0 < x < \pi, \\ w(1,x) = \frac{1}{2} w(-1,x) + \frac{1}{2} w\left(-\frac{1}{2}, x\right), \\ w(0_+, x) = w(0_-, x), w'(0_+, x) = w'(0_-, x),\ 0 \le x \le \pi, \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

olarak yazılabileceği görülür.

Öncelikle değişkenleri ayırma yöntemi ile problem (1.2)’nin çözümünü elde edeceğiz.

Değişkenlerine ayırma yöntemi gereğince

$v(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$

olarak kabul edelim.

$-1 < t < 0$ koşulunda iken, kısmi türevleri alıp (1.2) denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

denklemi elde ederiz ve bu denklemi düzenlediğimizde

$$-\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \tag{1.4}$$

eşitlikleri şeklinde yazarız.

Böylece, biz (1.4) denkleminden ve (1.2)’deki sınır koşullarından

$$X''(x) = \lambda X(x),\ X(0) = X(\pi) = 0 \tag{1.5}$$

denklemlerini elde ederiz.

Eğer $\lambda \geq 0,$ ise o zaman (1.5) sınır değer probleminin sadece basit çözümü $X(x) = 0$ vardır. λ > 0 için, bu probleminin çözümleri $\lambda_k = -k^2,\ \ X_k(x) = \sin kx,\ \ k = 1, 2, \cdots$ olarak yazılabilir. Bu nedenle, sınır değer probleminin basit olmayan çözümleri

$$\lambda_k = -k^2 \text{ and } X_k(x) = \sin kx,\ k = 1, 2, \cdots \tag{1.6}$$

şeklindedir.

(1.4)' te verilen birinci dereceden türevli denklem

$T'(t) = -\lambda_k T(t),\ \lambda_k = -k^2,\ k = 1, 2, \cdots$ şeklindedir.

Sonrasında, bu eşitliğinin çözümü

$T_k(t) = A_k e^{k^2 t},\ k = 1, 2, \cdots$ şeklindedir.

Böylece, $v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{k^2 t} \sin kx$ denklemini elde ederiz.

0 < t < 1 koşulunda problem (1.2)'yi benzer yöntemle ele alabiliriz. Bunu yapmak için,

$v(t, x) = T(t) X(x) \neq 0$ formunun bir çözümü önerilir.

Sonra, kısmi türevlerini alıp sonucu (1.2) denkleminde yerine yerleştirerek

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

veya

$$-\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \tag{1.7}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Sınır koşullarını uygulayarak ve (1.7) eşitliğini kullanarak

$X''(x)=\lambda X(x),\ X(0)=X(\pi)=0$ olur.

Bu eşitliği önceki kısımda çözmüştük. Çözümü (1.6)'da verilmiştir.

(1.7)'de sunulan diğer denklemin çözümü

$T''(t)=-\lambda T(t),\ \lambda=-k^2,\ k=1,2,\cdots$ şeklindedir.

Bu eşitliğin çözümü

$T_k(t)=(B_k e^{kt}+C_k e^{-kt}),\ k=1,2,\cdots$ şeklinde yazabiliriz.

Bu nedenle,

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k e^{kt}+C_k e^{-kt}\right)\sin kx$$

eşitliği olduğu görülür.

Lokal olmayan sınır koşulunu ve t=0 iken $v(t,x)$, $v'(t,x)$ için süreklilik özelliklerini uygulayarak,

$$\begin{cases} v(1,s)=\frac{1}{2}v(-1,s)+\frac{1}{2}v\left(-\frac{1}{2},s\right)+(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\sin x, \\ v(0_+,x)=v(0_-,x), \\ v'(0_+,x)=v'(0_-,x) \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz.

$k \neq 1$ olsun. Buradan

$$\begin{cases} B_k e^k + C_k e^{-k} = \frac{1}{2} A_k e^{-k^2} + \frac{1}{2} A_k e^{-\frac{1}{2}k^2}, \\ B_k + C_k = A_k, \\ k\left(B_k - C_k\right) = k^2 A_k \end{cases}$$

elde edip çözümlediğimizde, bütün k için, $k \neq 1$ şartında

$B_k = C_k = A_k = 0$ koşullarını elde ederiz.

Aşağıdaki denklem sistemini de $k = 1$ durumunda iken

$$\begin{cases} B_1 e + C_1 e^{-1} = \frac{1}{2} A_1 e^{-1} + \frac{1}{2} A_1 e^{-\frac{1}{2}} + (e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}), \\ B_1 + C_1 = A_1, \\ B_1 - C_1 = A_1 \end{cases}$$

yazılır ve $C_1 = 0$, $A_1 = B_1 = \frac{(e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4})}{e - \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}})}$ bilinmeyenleri bulunarak çözeriz.

Böylece, (1.2)'nin çözümü

$$v\left(t, x\right) \equiv \frac{(e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4})}{e - \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}})} e^t \sin x \text{ elde edilir.}$$

İkincisi, (1.3)'ün çözümü için

$w(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} D_k(t)\sin kx$ eşitliğini varsayalım.

$0<t<1$ koşulunda iken, denklemimize yerleştirdiğimizde,

$$w_{tt}+w_{xx}=\sum_{k=1}^{\infty}(D_k''(t)-k^2D_k(t))\sin kx=-t\sin x$$

elde ederiz. Bunun sonrasında

$D_k''(t)-k^2D_k(t)=0, k\neq 1,$

$D_1''(t)-D_1(t)=-t$

yazabilir ve çözümün çıkarmasını

$D_k(t)=C_k\cosh kt+B_k\sinh kt, k\neq 1,$

$D_1(t)=C_1\cosh t+B_1\sinh t+t$

elde ederiz.

Böylece,

$$w(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t,x)=\sum_{k=2}^{\infty}(C_k\cosh kt+B_k\sinh kt)\sin kx$$

$$+(C_1\cosh t+B_1\sinh t+t)\sin x$$

eşitliğini yazabiliriz.

$-1<t<0$ koşulunda olduğu zaman,

$$w_t + w_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(D_k'(t) - k^2 D_k(t)\right)\sin kx = (-2e^{-t} + 1 - t)\sin x$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu takip ederek,

$$D_k'(t) - k^2 D_k(t) = 0, k \neq 1$$

ve $D_1'(t) - D_1(t) = (-2e^{-t} + 1 - t)$ olur ve çözdüğümüzde,

$D_1(t) = A_1 e^t + t,\ D_k(t) = A_k e^{k^2 t}, k \neq 1$ yazabiliriz.

Böylece,

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t,x) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k e^{k^2 t}\sin kx + (A_1 e^t + t + e^{-t} - e^t)\sin x$$

sonucuna ulaşırız.

$k \neq 1$ durumunda lokal olmayan sınır koşulunu, t=0 iken $w(t,x)$, $w'(t,x)$ için süreklilik özelliklerini ve

$$\begin{cases} w(1,s) = \frac{1}{2}w(-1,s) + \frac{1}{2}w\left(-\frac{1}{2},s\right), \\ w(0_+,x) = w(0_-,x), \\ w'(0_+,x) = w'(0_-,x) \end{cases} \tag{1.8}$$

denklem sistemini kullanarak

$$\begin{cases} B_k \sinh k + C_k \cosh k = \tfrac{1}{2} A_k e^{-k^2} + \tfrac{1}{2} A_k e^{-\frac{1}{2}k^2} \\ C_k = A_k, \\ kB_k = k^2 A_k \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz.

$k = 1$ durumunda (1.8) denklem sistemini kullanarak,

$$\begin{cases} B_1 \sinh 1 + C_1 \cosh 1 + 1 = \tfrac{1}{2}(A_1 e^{-1} - 1 + e^{1} - e^{-1}) + \tfrac{1}{2}(A_1 e^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}) \\ C_1 = A_1, \\ B_1 + 1 = A_1 + 1 \end{cases}$$

elde ederiz ve kolaylıkla $k \neq 1$ durumunda $B_k = C_k = A_k = 0$ olur.

$k = 1$ durumunda

$$B_1 = A_1 - 2, C_1 = A_1 = \frac{-(e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4})}{e - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}} + 1$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece, (1.3)'ün çözümü

$$w(t,x) = ((-\frac{\varphi}{e - \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}})})e^{t} + t + e^{-t})\sin x$$

olarak bulunur. En sonunda, *v (t, x)* ve *w (t, x)* çözümlerini

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$$

formülünde yerleştirilerek

$u(t,x)=(e^{-t}+t)\sin x$ elde ederiz.

Benzer mantığı kullanarak, çok boyutlu eliptik-parabolik eşitlik için aşağıdaki lokal olmayan sınır değer probleminin çözümünü elde ederiz.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\sum\limits_{r=1}^{n} a_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=g(t,x),\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega,\ 0<t<T, \\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\sum\limits_{r=1}^{n} a_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=f(t,x),\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega,\ -T<t<0, \\ u(0_+,x)=u(0_-,x),\ u_t(0_+,x)=u_t(0_-,x), \\ u(T,x)=\sum\limits_{k=1}^{J}\alpha_k u(\lambda_k,x)+\varphi(x), \\ \sum\limits_{k=1}^{J}|\alpha_k|\le 1,\ x\in\overline{\Omega}, \\ -T\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J\le 0, \\ u(t,x)=0,\ x\in S. \end{cases}$$

Burada $\Omega, S, \overline{\Omega}=\Omega\cup S$ ile sınırları verilen $n-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n(0<x_k<1, 1\le k\le n)$'de birim açık küp ve $a_r(x)$ $(a_r(x)\ge a>0, x\in\Omega)$, $\varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$, $g(t,x)$ $(t\in[0,T],\ x\in\overline{\Omega})$, $f(t,x)$ $(t\in[-T,0],\ x\in\overline{\Omega})$ verilen düzgün (smooth) fonksiyonlardır.

Bununla beraber, değişkenlerine ayırma yöntemi, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Oysaki fark şemaları yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için, katsayıların t'de veya uzay değişkenlerinde bağımlı olduğu durumlarda da kullanılabilen etkinliği iyi bilinen bir yöntemdir.

İkincisi, Laplace dönüşüm metodunu ele alalım.

Örnek 1.2. Eliptik parabolik problemi denklemleri için karma problemini

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(2e^{-t}+t)e^{-x}, \quad 0<t<1,\ 0<x<\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(1+t)e^{-x}, \quad -1<t<0,\ 0<x<\infty, \\ u(1,x)=\frac{1}{2}u(-1,x)+\frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2},x\right)+(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})e^{-x}, \\ u(0_+,x)=u(0_-,x),\ u_t(0_+,x)=u_t(0_-,x),\ 0\le x<\infty, \\ u(t,0)=t+e^{-t},\ u_x(t,0)=-(t+e^{-t}),\ -1\le t\le 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

ele alalım.

İlk olarak $0<t<1$ için bu problemi inceleyelim. Diferensiyel denklemin

$$u_{tt}+u_{xx}=(2e^{-t}+t)e^{-x}$$

her iki tarafının da Laplace dönüşümünü alırsak

$$\mathbf{L}\{u_{tt}\}+\mathbf{L}\{u_{xx}\}=\mathbf{L}\{(2e^{-t}+t)e^{-x}\}$$

veya

$$\mathbf{L}\{u(t,x)\}_{tt}+s^2\mathbf{L}\{u(t,x)\}-su(t,0)-u_x(t,0)=\frac{2e^{-t}+t}{s+1}$$

elde ederiz.

Laplace dönüşümü yardımı ile çözebilmemiz için $\mathbf{L}\{u(t,x)\}=v(t,s)$ olarak gösterelim.

Böylece,

$$v_{tt}(t,s) + s^2 v(t,s) - s(t+e^{-t}) + t + e^{-t} = \frac{2e^{-t}+t}{s+1}$$

veya

$$v_{tt}\left(t,s\right)+s^2 v\left(t,s\right)=\frac{-e^{-t}+s^2(t+e^{-t})}{s+1}$$ şeklinde yazılabilir.

Tamamlayıcı (complementary) çözüm

$v_c\left(t,s\right)=c_1 \sin st + c_2 \cos st$ şeklindedir.

Özel (particular) çözüm için

$v_p\left(t,s\right)=\dfrac{t+e^{-t}}{s+1}$ olarak yazabiliriz. Böylece, problemimiz

$$v\left(t,s\right)=c_1 \sin st + c_2 \cos st + \frac{t+e^{-t}}{s+1} \tag{1.10}$$

olur. $-1 \le t \le 0$ için,

$u_t + u_{xx} = \left(1+t\right)e^{-x}$ haline gelir.

Diferensiyel eşitliğin Laplace dönüşümü

$$\mathbf{L}\{u_t\} + \mathbf{L}\{u_{xx}\} = \mathbf{L}\{(1+t)e^{-x}\}$$

veya

$$\left(\mathbf{L}\left\{u\left(t,x\right)\right\}\right)_t + s^2\mathbf{L}\left\{u\left(t,x\right)\right\} - su\left(t,0\right) - u_x\left(t,0\right) = \frac{1+t}{s+1}$$

şeklinde yazılır. O zaman bu problem

$$v_t(t,s) + s^2 v(t,s) - s(t + e^{-t}) + t + e^{-t} = \frac{1+t}{s+1}$$

veya

$$v_t\left(t,s\right) + s^2 v\left(t,s\right) = \frac{1 - e^{-t} + s^2(t + e^{-t})}{s+1} \quad \text{olur.}$$

Bunu çözerek,

$$v\left(t,s\right) = c_3 e^{-s^2 t} + \frac{t + e^{-t}}{s+1} \tag{1.11}$$

elde ederiz.

Lokal olmayan sınır koşulunu, t=0 iken $u(t,x)$, $u'\left(t,x\right)$ için süreklilik özelliklerini ve

$$\begin{cases} u\left(1,x\right) = \frac{1}{2}u\left(-1,x\right) + \frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2},x\right) + (e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4})e^{-x}, \\ u\left(0_+,x\right) = u\left(0_-,x\right), \\ u'\left(0_+,x\right) = u'\left(0_-,x\right) \end{cases}$$

denklem sistemini kullanarak

$$\begin{cases} v\left(1,s\right) = \frac{1}{2}v\left(-1,s\right) + \frac{1}{2}v\left(-\frac{1}{2},s\right) + \frac{(e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4})}{1+s}, \\ v\left(0_+,s\right) = v\left(0_-,s\right), \\ v'\left(0_+,s\right) = v'\left(0_-,s\right) \end{cases}$$

denklem sistemini buluruz.

Bu koşulları uygulayarak ve (1.10), (1.11) kullanarak,

$$\begin{cases} c_1 \sin s + c_2 \cos s + \frac{1+e^{-1}}{s+1} = \frac{1}{2}(c_3 e^{s^2} - \frac{1-e^{1}}{s+1}) \\ + \frac{1}{2}(c_3 e^{s^2} - \frac{\frac{1}{2}-e^{\frac{1}{2}}}{s+1}) + \frac{(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})}{1+s}, \\ c_2 = c_{3,} \\ sc_1 + \frac{1}{s+1} = -s^2 c_3 + \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemini çözerek,

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ yazabiliriz. O halde,

$v(t,s) = \dfrac{t+e^{-t}}{s+1}$ olur.

Buradan, ters Laplace dönüşümü uygulanınca

$$u(t,x) = \mathbf{L}^{-1}\{v(t,s)\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{t+e^{-t}}{s+1}\right\} = (t+e^{-t})\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = (t+e^{-t})e^{-x}$$

elde edilir.

Böylece, verilen lokal olmayan değer problem (1.9)’un çözümü

$u(t,x) = (e^{-t}+t)e^{-x}$ olur.

Çok boyutlu eliptik-parabolik eşitlik için aşağıdaki lokal olmayan sınır değer probleminin

çözümünü benzer yöntemi kullanarak bulabiliriz.

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\sum_{r=1}^{n} a_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=g(t,x), \\
x=(x_1,\cdots,x_n)\in \overline{\Omega}^+,\ 0<t<T, \\
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\sum_{r=1}^{n} a_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}= f(t,x), \\
x=(x_1,\cdots,x_n)\in \overline{\Omega}^+,\ -T<t<0, \\
u(T,x)=\sum_{k=1}^{J}\alpha_k u(\lambda_k,x)+\varphi(x),\ \sum_{k=1}^{J}\left|\alpha_k\right|\le 1, \\
-T\le \lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J\le 0, \\
u\left(0_+,x\right)=u\left(0_-,x\right), u_t\left(0_+,x\right)=u_t\left(0_-,x\right),\ x\in \overline{\Omega}^+, \\
u(t,x)=0,\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_r}=0,\ r=1,2,\cdots n,\ x\in S^+.
\end{cases}
$$

Burada $\Omega^+, S^+,\ \overline{\Omega}^+=\Omega^+\cup S^+$ ile sınırları verilen $n-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n(0<x_k<\infty, 1\le k\le n)$'de birim açık küp ve $a_r(x)$ $(a_r(x)\ge a>0, x\in\Omega^+)$, $\varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega}^+)$, $g(t,x)$ $(t\in[0,T],\ x\in\overline{\Omega}^+)$, $f(t,x)$ $(t\in[-T,0],\ x\in\overline{\Omega}^+)$ verilen düzgün (smooth) fonksiyonlardır.

Bununla beraber, Laplace dönüşümü metodu, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Oysaki fark şemaları yöntemi kısmi türevli diferensiyel denklemleri çözmek için, katsayıların t'de veya uzay değişkenlerinde bağımlı olduğu durumlarda da kullanılabilen etkinliği iyi bilinen bir yöntemdir.

Son olarak, Fourier dönüşümü metodunun uygulamasını ele alacağız.

Örnek 1.3. Eliptik-parabolik eşitliği için lokal olmayan sınır değer problemini

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (e^{-t} + (e^{-t} + t)(4x^2 - 2))e^{-x^2}, \\ 0 < t < 1, \ -\infty < x < \infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-e^{-t} + 1 + (e^{-t} + t)(4x^2 - 2))e^{-x^2}, \\ -1 < t < 0, \ -\infty < x < \infty, \\ u(0_+, x) = u(0_-, x), u'(0_+, x) = u'(0_-, x), \\ u(1, x) = \frac{1}{2}u(-1, x) + \frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2}, x\right) + \varphi(x), \\ \varphi(x) = (e^{-1} - \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4})e^{-x^2}, \ -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{1.12}$$

inceleyelim.

$\mathbf{F}\{u(t,x)\} = v(t,s)$ olarak gösterelim. (1.12)'deki diferensiyel eşitliğin her iki tarafının Fourier dönüşümünü $-1 < t < 0$ için alırsak,

$v_t(t,s) - s^2 v(t,s) = \mathbf{F}\left\{(-e^{-t} + 1 + (e^{-t} + t)(4x^2 - 2)e^{-x^2}\right\}$ elde ederiz.

$(e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ olduğu için,

$$\mathbf{F}\left\{(4x^2 - 2)e^{-x^2}\right\} = \mathbf{F}\left\{(e^{-x^2})''\right\} = -s^2 \mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \tag{1.13}$$

denklem sistemini yazabiliriz.

Böylece,

$$v_t(t,s) - s^2 v(t,s) = (-e^{-t} + 1 + (e^{-t} + t)s^2)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}$$

elde eder ve çözümlediğimizde,

$$v(t,s)=c_1e^{s^2t}+(e^{-t}+t)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \tag{1.14}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Problemimiz (1.12)'deki diferensiyel eşitliğin her iki tarafının Fourier dönüşümü $0<t<1$ için alırsak, $v_{tt}(t,s)-s^2v(t,s)=\mathbf{F}\left\{(e^{-t}+(e^{-t}+t)(4x^2-2))e^{-x^2}\right\}$ elde ederiz.

(1.13)'deki eşitliği kullanarak,

$$v_{tt}(t,s)-s^2v(t,s)=(e^{-t}+(e^{-t}+t)s^2)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}$$

buluruz ve çözümlediğimizde

$$v(t,s)=c_2\cosh st+c_3\sinh st+(e^{-t}+t)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \tag{1.15}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Lokal olmayan sınır koşullarını ve

$$\begin{cases} u(1,x)=\frac{1}{2}u(-1,x)+\frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2},x\right)+\varphi(x), \\ \phi(x)=(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})e^{-x^2}, \\ u(0_+,x)=u(0_-,x), \\ u'(0_+,x)=u'(0_-,x) \end{cases}$$

denklem sistemini kullanarak,

$$\begin{cases} v(1,s)=\frac{1}{2}v(-1,s)+\frac{1}{2}v\left(-\frac{1}{2},s\right)+(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ v(0_+,s)=v(0_-,s), \\ v'(0_+,s)=v'(0_-,s) \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz.

Bu koşulları uygulayıp ve (1.14) ve (1.15) kullandığımızda,

$$\begin{cases} c_2\cosh s+c_3\sinh s+(e^{-1}+1)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}=c_1e^{-s^2}(e^{-1}+1)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \\ +(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ c_2=c_1, \\ sc_3+\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}=s^2+\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \end{cases}$$

bulduğumuz denklem sistemi çözünüldüğünde $c_1=c_2=c_3=0$ olduğu kolaylıkla anlaşılır.

Böylece,

$v(t,s)=(e^{-t}+t)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}$ denklemine ulaşırız.

Sonuç olarak, ters Fourier dönüşümü uygulanınca, (1.12) probleminin

$u(t,x)=(e^{-t}+t)e^{-x^2}$ sonucunu elde ederiz.

Aynı yöntemi kullanarak, ikinci dereceden çok boyutlu eliptik parabolik eşitlik için lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum\limits_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} - \delta u = g(t,x), \\ 0 < t < T, x, r \in \mathbb{R}^n, \ |r| = r_1 + \cdots + r_n, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} - \delta u = f(t,x), \\ -T < t < 0, x, r \in \mathbb{R}^n, \ |r| = r_1 + \cdots + r_n, \\ -T \le \lambda < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \le 0 \\ u(T,x) = \sum\limits_{k=1}^{J} \alpha_k u(\lambda_k, x) + \varphi(x), \ \sum\limits_{k=1}^{J} |\alpha_k| \le 1, \ x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

çözümünü elde ederiz. Burada $a_r(x)$ $(a_r(x) \ge a > 0, x \in R^n)$, δ yeterince büyük pozitif sabit bir sayı olup $g(t,x)$ $(t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n)$, $f(t,x)$ $(t \in [-T,0], x \in \mathbb{R}^n)$ ve $\varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ verilen düzgün (smooth) fonksiyonlardır.

Öte yandan, Fourier dönüşümü metodu, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Temelde bilgisayarlarla gerçekleştirilen ve sayısal metot olarak bilinen fark metodunun bağımlı katsayılara sahip kısmi diferensiyel problemlerinin çözümünde en faydalı metot olduğu çok iyi bilinmektedir. Fakat sayısal metotlarda kullanılan farklı fark şemalarının kararlığını kanıtlanmaya veya teorik olarak doğrulanmaya ihtiyacı vardır. [Ashyralyev ve Gercek, 2008], [Ashyralyev ve Gercek, 2009] ve [Gercek, 2006]'da *H* Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı denklemleri için lokal olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \le t \le 1), \\ \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \le t \le 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{cases}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı ağırlıklı Hölder uzaylarında doğruluğu ortaya konulmuştur. Eliptik–parabolik denklemlerin lokal olmayan sınır değer problemlerinin çözümü için koersiv eşitsizlikleri elde edilmiştir. Lokal olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci derecedeki yakınlaşması olan fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemalarının iyi konumlanmışlığı Hölder uzaylarında kanıtlanmıştır. Uygulamalarda eliptik-parabolik denklemlerin fark şemalarının çözümü için koersiv eşitsizlikleri sağlanmıştır. Eliptik-parabolik denklemler için fark şemalarının Matlab ile çözümleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada çok noktalı eliptik-parabolik diferensiyel ve fark denklemlerin lokal olmayan sınır değer problemleri çalışılmıştır. Kısaca tezin bölümlerindeki içeriği verelim. Tez 6 bölümden ve bir ekten oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci Bölüm'de H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı A operatörlü diferensiyel

denklemi için çok noktalı lokal olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \le t \le 1), \\ \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \le t \le 0), \\ u(1) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i) + \varphi \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \le 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

sınır değer problemin iyi konumlanmışlığı $\sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1$ varsayımı koşulu altında çalışılmıştır.

Aşağıdaki şartları sağlayan $u(t)$ fonksiyonu (2.1) probleminin çözümüdür:

i. $u(t)$ fonksiyonu $(0,1]$ aralığında ikinci türevi sürekli olan ve $[-1,1]$ aralığında türevi sürekli olan bir fonksiyondur. Aralığın sınır noktalarındaki türevler, uygun tek taraflı türevler olarak anlaşılır;

ii. $u(t)$ fonksiyonu, A operatörünün tanım kümesinin elemanıdır ve $Au(t)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında süreklidir;

iii. $u(t)$ fonksiyonu, (2.1) denklemini ve bu denkleminin lokal olmayan sınır koşulunu sağlar.

Bu şekilde tanımlanan problem (2.1)'in bir çözümü, bundan sonra $C(H)=C([-1,1],H)$ uzayında problem (2.1)'in bir çözümü olarak atıfta bulunacaktır.

Burada, $C(H)=C([-1,1],H)$ $[-1,1]$ aralığında tanımlı H-değerli $\|\varphi\|_{C([-1,1],H)}=\max\limits_{-1\le t\le 1}\|\varphi(t)\|_H$ normuna sahip bütün sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu Banach uzayıdır.

Şimdi $C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],H), 0<\alpha<1$ ile $[-1,1]$ aralığında bütün düzgün (smooth) H-değerli,

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],H)} = \|\varphi\|_{C([-1,1],H)} + \sup_{-1<t<t+\tau<0}\frac{(-t)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

$$+\sup_{0<t<t+\tau<1}\frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuna sahip $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin kapanışı ile elde edilen Banach uzayını $C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H), 0<\alpha<1$ ile $[0,1]$ aralığında bütün düzgün (smooth) H-değerli

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}=\|\varphi\|_{C([0,1],H)}+\sup_{0<t<t+\tau<1}\frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuna sahip $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin kapanışı ile elde edilen Banach uzayını ve $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0],H), 0<\alpha<1$ ile $[-1,0]$ aralığında bütün düzgün (smooth) H-değerli

$$\|\varphi\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)}=\|\varphi\|_{C([-1,0],H)}+\sup_{-1<t<t+\tau<0}\frac{(-t)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuna sahip $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin kapanışı ile elde edilen Banach uzayını ifade edelim.

Burada, $C([a,b],H)$ $[a,b]$ aralığında tanımlı H -değerli $\| \varphi \|_{C([a,b],H)} = \max_{a \le t \le b} \| \varphi(t) \|_H$

normuna sahip bütün sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu Banach uzayıdır.

Eğer problem (2.1)'in herhangi $g(t) \in C([0,1],H)$, $f(t) \in C([-1,0],H)$ ve $\varphi \in D(A)$ için $C(H)$'de tek çözümü varsa ve $M(\delta)$ φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsız olmak üzere

$$\|u''\|_{C([0,1],H)} + \|u'\|_{C([-1,0],H)} + \|Au\|_{C(H)} \le M(\delta)[\|g\|_{C([0,1],H)} + \|f\|_{C([-1,0],H)} + \|A\varphi\|_H],$$

koersiv eşitsizliğini sağlıyorsa, problem (2.1) $C(H)$'de iyi konumlanmıştır denir.

Problem (2.1) $C(H)$'da iyi konumlanmış değildir [Ashyralyev, Soltanov, 1995]. (2.1) sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı, $[-1,1]$'de H değerli bütün düzgün (smooth) fonksiyonların $F(H)$ kati (certain) uzayında ele alınarak ispat edilebilir.

$F(H)$'da bir $u(t)$ fonksiyonu eğer $C(H)$'da (1.1) probleminin bir çözümü ise ve $u''(t)$ $(t \in [0,1])$, $u'(t)(t \in [-1,1])$ ve $Au(t)(t \in [-1,1])$, $F(H)$'a aitse, (2.1) probleminin çözümüdür denir.

$C(H)$ uzayı durumunda olduğu gibi, eğer $M(\delta)$ φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsız olmak üzere

$$\|u''\|_{F([0,1],H)} + \|u'\|_{F([-1,0],H)} + \|Au\|_{F(H)} \le M(\delta)[\|g\|_{F([0,1],H)} + \|f\|_{F([-1,0],H)} + \|A\varphi\|_H], \tag{2.14}$$

koersiv eşitsizliği sağlanıyorsa, biz (2.1) problemi $F(H)$'ta iyi konumlanmıştır deriz.

Eğer biz $F(H)$'ı $C^{\alpha}_{0,1}(H) = C^{\alpha}_{0,1}([-1,1],H)$ $(0 < \alpha < 1)$'a eşit kurarsak, ana teoremimizi ispat edebiliriz.

Lokal olmayan sınır değer (2.1) probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\| u_{tt} \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1],L_2(\bar{\Omega}))} + \| u_t \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0],L_2(\bar{\Omega})])} + \| u \|_{C^{\alpha}_{0,1}([-1,1],W_2^2(\bar{\Omega}))} \tag{2.15}$$

$$\leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| g \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))} + \| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2(\overline{\Omega}))}\right] + M(\delta)\|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsızdır.

Teorem 2.1. $\varphi \in D(A)$ olduğunu varsayalım. $C_{0,1}^{\alpha}(H)$ Hölder uzayında sınır değer problemi (2.1) iyi konumlanmıştır ve aşağıdaki

$$\| u'' \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} + \| u' \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|Au\|_{C_{0,1}^{\alpha}(H)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}\right] + \|A\varphi\|_H\right]$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsızdır.

Teorem 2.1'in iki uygulamasını ele alınacaktır. İlk olarak, çok boyutlu eliptik-parabolik denklem için lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} -u_{tt} - (a(x)u_x)_x + \delta u = g(t,x), \ 0 < t < 1, \ 0 < x < 1, \\ u_t + (a(x)u_x)_x - \delta u = f(t,x), \ -1 < t < 0, \ 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1), \ u_x(t,0) = u_x(t,1), \ -1 \leq t \leq 1, \\ u(1,x) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x), \ \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \leq 1, \\ -1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \leq 0, \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0+,x) = u(0-,x), \ u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2.23}$$

ele alınmıştır.

Burada, eğer $a(x) \geq a > 0(x \in (0,1))$, $g(t,x)$ $(t \in [0,1], x \in [0,1])$, $f(t,x)$ $(t \in [-1,0], x \in [0,1])$ fonksiyonları tanım kümelerinde düzgün (smooth) ve $\delta = sabit > 0$ ise, bu durumda (2.23) probleminin çözümü vardır ve tektir.

$[0,1]$ 'de tanımlı karesi integrallenebilir fonksiyonları $L_2[0,1]$ Hilbert uzayı ile ve sırasıyla

$$\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]} = \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + \left(\int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

ve

$$\|\varphi^h\|_{W_2^2[0,1]} = \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + \left(\int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_{xx}|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

normlarına sahip $W_2^1[0,1]$ ve $W_2^2[0,1]$ Hilbert uzaylarını tanımlayalım. Bu bizim (2.23) karma problemini self-adjoint pozitif tanımla A operatörü ile $H = L_2[0,1]$ Hilbert uzayında lokal olmayan sınır değer problemi (2.1)'e dönüştürmemizi sağlar.

Teorem 2.2. Lokal olmayan sınır değer (2.23) probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\| u_{tt} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2[0,1])} + \| u_t \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2[0,1])} + \| u \|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],W_2^2[0,1])}$$

$$\leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \left[\| g \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2[0,1])} + \| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2[0,1])} \right] + M(\delta) \| \varphi \|_{W_2^2[0,1]}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada $M(\delta)$ katsayısı $f(t,x)$, $g(t,x)$ ve $\varphi(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 2.2'nin ispatı, soyut Teorem 2.1 ve (2.23) problemini tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak, n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\Omega = \left(0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\right)$ bir açık küme ve S bu kümenin sınırı olsun öyle ki $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ 'dir. $[-1,1] \times \Omega$ kümesinde, çok boyutlu eliptik-parabolik denklem için karma sınır değer problemi

$$\begin{cases} -u_{tt} - \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = g(t,x), \ 0 < t < 1, \ x \in \Omega, \\ u_t + \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t,x), \ -1 < t < 0, \ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ x \in S, \ -1 \le t \le 1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x), \ \sum\limits_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1, \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \le 0, \\ u(0+,x) = u(0-,x), \ u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \ x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.24}$$

ele alınmıştır. Burada $a_r(x)$ $(x \in \Omega)$, $g(t,x)$ $(t \in (0,1), \ x \in \overline{\Omega})$, ve $f(t,x)$ $(t \in (-1,0), x \in \overline{\Omega})$ fonksiyonlar tanım kümelerinde düzgün (smooth) ve $a_r(x) \ge a > 0$.

$\overline{\Omega}$'de tanımlı karesi integrallenebilir fonksiyonlarına ve

$$\| \varphi \|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left\{ \int \cdots \int\limits_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

normuna sahip $L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayı ve sırasıyla

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} = \| \varphi \|_{L_2(\overline{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int\limits_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} \left| \varphi_{x_r} \right|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} = \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \left\{\int\cdots\int_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n}\left|\varphi_{x_r}\right|^2 dx_1\cdots dx_n\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int\cdots\int_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n}\left|\varphi_{x_r \bar{x}_r}\right|^2 dx_1\cdots dx_n\right\}^{\frac{1}{2}}$$

normlarına sahip $W_2^1(\overline{\Omega})$, $W_2^2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzaylarını tanımlayalım.

Eğer $a_r(x)$, $g(t,x)$ ve $f(t,x)$ fonksiyonları tanım kümelerinde düzgün (smooth) ise, bu durumda (2.24) probleminin çözümü vardır ve tektir. Bunun için, (2.24) problemi, H Hilbert uzayında $(H = L_2(\overline{\Omega}))$ self-adjoint pozitif tanımlı A operatörlü (2.1) lokal olmayan sınır değer problemine dönüştürmemizi sağlar.

Teorem 2.3. Lokal olmayan sınır değer (2.24) probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\| u_{tt} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))} + \| u_t \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2(\overline{\Omega})])} + \| u \|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],W_2^2(\overline{\Omega}))}$$

$$\leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| g \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))} + \| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2(\overline{\Omega}))}\right] + M(\delta)\left\|\varphi\right\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $f(t,x)$, $g(t,x)$ ve $\varphi(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 2.3.’ün ispatı, soyut Teorem 2.1, (2.24) problemi tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki $L_2(\overline{\Omega})$ uzayında eliptik diferansiyel probleminin çözümü için koersiv eşitsizliği alınan teoreme dayanmaktadır.

Teorem 2.4. Eliptik diferensiyel probleminin

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = \omega(x),\ x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0,\ x \in S$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^{n}\left\|u_{x_r x_r}\right\|_{L_2(\Omega)} \le M(\delta)\|\omega\|_{L_2(\Omega)}$$

koersiv kestirimi sağlanır [Sobolevskii, P. E., 1975].

Üçüncü Bölüm Bu bölümde, (2.1) sınır değer probleminin yakın çözümü için bu probleme karşılık gelen

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k = g_k, \\ g_k = g\left(t_k\right),\ t_k = k\tau,\ 1\le k\le N-1, \\ \tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-Au_{k-1} = f_k, \quad f_k = f(t_{k-1}), \\ t_{k-1} = (k-1)\tau,\ -\left(N-1\right)\le k\le 0, \\ u_N = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+\varphi,\ u_1-u_0 = u_0-u_{-1} \end{cases} \tag{3.1}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması varsayım koşulu altında incelenmiştir.

Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı A diferensiyel operatörlü lokal olmayan sınır değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h 'ye $\left(0<h\le h_0\right)$ göre düzgün self-adjoint pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir. Dolayısıyla bu çalışmada sadece bir değişkenli diskritizasyon fark şemaları incelenmektedir.

$F_\tau(H) = F([a,b]_\tau, H)$, $[a,b]_\tau = \{t_k = kh, N_a\le k\le N_b, N_a\tau = a, N_b\tau = b\}$ ’de tanımlı H-değerli $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_{N_a}^{N_b}$ ağ fonksiyonlarının lineer uzayı olsun. $F_\tau(H)$ üzerinde, kullanacağımız $C([a,b]_\tau, H)$, $C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_\tau, H)$, $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)$, ve $C_0^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ $(0<\alpha<1)$ Banach uzaylarının normları aşağıdaki şekildedir:

$$\| \varphi^\tau \|_{C([a,b]_\tau,H)} = \max_{N_a \le k \le N_b} \| \varphi_k \|_H,$$

$$\| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_{0,1}([-1,1]_\tau,H)} = \| \varphi^\tau \|_{C([-1,1]_\tau,H)} + \sup_{-N \le k < k+r \le 0} \| \varphi_{k+r} - \varphi_k \|_E \frac{(-k)^\alpha}{r^\alpha}$$

$$+ \sup_{1 \le k < k+r \le N-1} \| \varphi_{k+r} - \varphi_k \|_E \frac{((k+r)\tau)^\alpha (N-k)^\alpha}{r^\alpha},$$

$$\| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_0([-1,0]_\tau,H)} = \| \varphi^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \sup_{-N \le k < k+r \le 0} \| \varphi_{k+r} - \varphi_k \|_E \frac{(-k)^\alpha}{r^\alpha},$$

$$\| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_{0,1}([0,1]_\tau,H)} = \| \varphi^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)}$$

$$+ \sup_{1 \le k < k+r \le N-1} \| \varphi_{k+r} - \varphi_k \|_E \frac{((k+r)\tau)^\alpha (N-k)^\alpha}{r^\alpha}.$$

(1.21) lokal olmayan sınır değer problemi $M(\delta)$ f^τ, g^τ, φ ve τ ’dan bağımsız olmak üzere

$$\| u^\tau \|_{F([-1,1]_\tau,H)} \le M(\delta) \left[\| f^\tau \|_{F([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{F([0,1]_\tau,H)} + \| \varphi \|_H \right]$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $F([-1,1]_\tau, H)$ ’de kararlıdır denir.

Teorem 3.1. Lokal olmayan (3.1) sınır değer problemi $C([-1,1]_\tau, H)$ normunda kararlıdır. Lokal olmayan (3.1) sınır değer problemi $F([-1,1]_\tau, H)$ ’de $M(\delta)$ f^τ, g^τ, φ, ve τ ’dan bağımsız olmak üzere

$$\| \{ \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \}_1^{N-1} \|_{F([0,1]_\tau,H)}$$

$$+ \| \{ \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) \}_{-N+1}^{0} \|_{F([-1,0]_\tau,H)} + \left\| \{ A u_k \}_{-N}^{N-1} \right\|_{F([-1,1]_\tau,H)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\| f^{\tau} \|_{F([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{F([0,1]_{\tau},H)} + \| A\varphi \|_{H}\right]$$

koersiv eşitsizliklerini sağlıyorsa, koersiv kararlıdır.

$[-1,1]$'de tanımlı H-değerli sürekli fonksiyonların $C([0,1],H)$ uzayında lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) sınırlı olmayan genel A pozitif operatörü için iyi konumlanmış değildir ve o zaman (3.1) lokal olmayan sınır değer fark probleminin iyi konumlanmışlığı $C([-1,1]_{\tau},H)$ normunda $\tau > 0$' a bağlı olarak düzgün olarak ele alınmaz. Bu da

$$\| u^{\tau} \|_{K_{\tau}(E)} = \| \{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_1^{N-1} \|_{C([0,1]_{\tau},H)}$$

$$+ \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_{-N+1}^{0} \|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \left\| \{Au_k\}_{-N}^{N-1} \right\|_{C([-1,1]_{\tau},H)}$$

koersativ normun $\tau \to 0^{+}$ a gittikçe ∞'a meyletmesi anlamına gelir. (3.1) fark probleminin incelenmesi bu normun büyüme mertebesinin ∞ olarak elde edilmesine imkân verir.

Teorem 3.2. $\varphi \in D(A)$ ve $f_0 \in D(I+\tau B)$ olsun. O zaman (3.1) fark problemi $M(\delta)$ f^{τ}, g^{τ}, φ, ve τ'dan bağımsız olmak üzere

$$\| u^{\tau} \|_{K_{\tau}(E)} \leq M(\delta)[\| A\varphi \|_{H} + \|(I+\tau B)f_0\|_{H}$$

$$+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln \| A\|_{H\to H}\right|\right\}\left[\| f^{\tau} \|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]\Bigg]$$

hemen hemen koersiv eşitsizliğine sahiptir.

İyi konumlanmışlık $C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_{\tau},H)$'de elde edilebilir.

Teorem 3.3 Teorem 3.2'nin kabulleri sağlansın. O zaman (3.1) sınır değer problemi

$C^{\alpha}_{0,1}([-1,1]_\tau,H)$ Hölder uzayında iyi konumlanmıştır ve $M(\delta)$ f^τ, g^τ,φ ve τ'dan bağımsız olmak üzere

$$\| \{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1} \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1]_\tau,H)} + \left\| \{Au_k\}_{-N}^{N-1} \right\|_{C^{\alpha}_{0,1}([-1,1]_\tau,H)}$$

$$+ \| \{\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\}_{-N+1}^{0} \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0]_\tau,H)} \le M(\delta)[\| A\varphi \|_H + \|(I+\tau B)f_0\|_H]$$

$$+\frac{M(\delta}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f^\tau \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1]_\tau,H)}\right]$$

koersiv eşitsizliği sağlanır.

Uygulamada ilk olarak, çok boyutlu eliptik-parabolik denklem için, (2.24) lokal olmayan sınır değer problemi ele alınacaktır. Burada (2.24) probleminin diskritizasyonu iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$\widehat{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1m_1,\cdots,h_nm_n), m = (m_1,\cdots,m_n),$$

$$0 \le m_r \le N_r,\ h_rN_r = 1,\ r = 1,\cdots,n\},$$

$$\Omega_h = \widehat{\Omega}_h \cap \Omega,\ S_h = \widehat{\Omega}_h \cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Daha sonrada, (2.24) problemi tarafından oluşturulan A diferensiyel operatörü yerine

$$A_h^x u_x^h = -\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u^h_{\bar{x}_r}\right)_{x_r,m_r} \tag{3.49}$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada A_h^x fark operatörünün yardımıyla (1.21) lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} -\frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2}+A_h^x u^h(t,x)=g^h(t,x),\ 0<t<1,\ x\in\Omega_h, \\ \frac{du^h(t,x)}{dt}-A_h^x u^h(t,x)=f^h(t,x), -1<t<0,\ x\in\Omega_h, \\ u^h(1,x)=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i u^h(\lambda_i,x)+\varphi^h(x),\ \sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\le 1, x\in\widehat{\Omega}_h, \\ u^h(0+,x)=u^h(0-,x), \frac{du^h(0+,x)}{dt}=\frac{du^h(0-,x)}{dt}, x\in\widehat{\Omega}_h \end{cases} \tag{3.50}$$

adi diferensiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (3.50) problemi için (3.1) fark şeması kullanılarak,

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h\left(x\right)=g_k^h(x), \\ g_k^h(x)=g^h(t_k,x), t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1,\ N\tau=1,\ x\in\Omega_h, \\ \frac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}-A_h^x u_{k-1}^h\left(x\right)=f_k^h(x), \\ f_k^h(x)=f^h(t_k,x), t_{k-1}=\left(k-1\right)\tau,\ -N+1\le k\le -1,\ x\in\Omega_h, \\ u_N^h(x)=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}^h(x)+\varphi^h(x),\ x\in\widehat{\Omega}_h, \\ u_1^h(x)-u_0^h(x)=u_0^h(x)-u_{-1}^h(x),\ x\in\widehat{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.51}$$

fark şeması elde edilir.

Sonuçlarımızı formüle edebilmek için, $L_{2h}=L_2(\widehat{\Omega}_h), W_{2h}^1=W_2^1(\widehat{\Omega}_h), W_{2h}^2=W_2^2(\widehat{\Omega}_h)$ uzaylarını tanıtalım. Bu uzaylar sırasıyla, $\widehat{\Omega}_h$ 'da tanımlı

$$\left\|\phi^h\right\|_{L_2(\widehat{\Omega}_h)}=\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\left|\phi^h(x)\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2},$$

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^1}=\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{n}\left|(\varphi^h)_{x_r}\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2}$$

ve

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}=\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{n}\left|(\varphi^h)_{x_r}\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2}+\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{n}\left|(\varphi^h)_{x_r\bar{x}_r,\,m_r}\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2}$$

normlarına sahip $\varphi^h(x)=\{\varphi(h_1m_1,\cdots,h_nm_n)\}$ ağ fonksiyonlarının uzaylarıdır.

Teorem 3.4. Eğer τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$ yeterince küçük pozitif sayılar ise, bu durumda (3.51) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1}\right\|_{C([-1,1]_\tau,L_{2h})}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\right\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{g_k^h\right\}_{1}^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}+\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}$$

$$+\left\|\left\{\tau^{-1}(u_k^h-u_{k-1}^h)\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1}\right\|_{C([-1,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\tau\left\|f_0^h\right\|_{W_{2h}^1}\right.$$

$$\left.+\ln\frac{1}{\tau+|h|}\left[\left\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\right\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{g_k^h\right\}_{1}^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]\right],$$

kararlılık ve hemen hemen koersiv kestirimleri sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı

$\tau, h, f_k^h(x), -N+1 \le k \le 0, g_k^h(x), 1 \le k \le N-1$ ve $\varphi^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.4'ün ispatı, soyut Teorem 3.1-Teorem 3.2 ve A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine, aşağıdaki L_{2h} uzayındaki eliptik fark probleminin çözümü için koersiv eşitsizliği elde edilen teoreme ve

$$\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln\|A_h^x\|_{L_{2h}\to L_{2h}}\right|\right\} \le M \ln\frac{1}{\tau+|h|} \tag{3.52}$$

kestirime dayanmaktadır.

Teorem 3.5. Eliptik fark probleminin

$$A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), x \in \Omega_h, \tag{3.53}$$

$$u^h(x) = 0, x \in S_h$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(u^h\right)_{\bar{x}_r x_r, m_r}\right\|_{L_{2h}} \le M\|\omega^h\|_{L_{2h}}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır [Sobolevskii, 1975].

Teorem 3.6. Eğer τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar ise, bu durumda fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\|\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\}_1^{N-1}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}$$

$$+\|\{\tau^{-1}(u_k^h - u_{k-1}^h)\}_{-N+1}^{0}\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, L_{2h})} + \left\|\left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_\tau, W_{2h}^2)}$$

$$\leq M(\delta)\Big[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \tau \left\| f_0^h \right\|_{W_{2h}^1}$$

$$+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\Big[\| \left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1} \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, L_{2h})} + \| \left\{g_k^h\right\}_1^{N-1} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})} \Big]\Big],$$

koersiv kararlılık kestirimi sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $\tau, h, f_k^h(x), -N+1 \leq k \leq 0$, $g_k^h(x), 1 \leq k \leq N-1$ ve $\varphi^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.6'nın ispatı, soyut Teorem 3.3, (3.49) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayındaki (3.53) eliptik fark probleminin çözümü için koersiv eşitsizliğine ve Teorem 3.5'e dayanmaktadır.

Dördüncü Bölüm iki kısımdan oluşur. Birinci kısımda koşul altında (2.1) sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için Crank-Nicholson fark Şeması kullanılarak

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k = g_k, \\ g_k = g\left(t_k\right),\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1, \\ \tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-\frac{1}{2}\left(Au_{k-1}+Au_k\right) = f_k, \quad f_k = f(t_{k-\frac{1}{2}}), \\ t_{k-\frac{1}{2}} = (k-\frac{1}{2})\tau,\ -\left(N-1\right) \leq k \leq 0, \\ u_N = \sum\limits_{k=1}^{J} \alpha_i \left(u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + \left(\lambda_i - [\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)\left(f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + Au_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right)\right) + \varphi, \\ u_2 - 4u_1 + 3u_0 = -3u_0 + 4u_{-1} - u_{-2} \end{cases} \tag{4.1}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasını elde ettik. Bu fark şemasının Hölder uzaylarında iyi konuşlanmışlığı sağlanmıştır. Uygulamalarda, lokal olmayan karma problemlerin yaklaşık çözümü için fark şemaları oluşturulmuş ve çözümlerinde kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Beşinci bölüm sayısal analizlerdir. Birinci ve ikinci basamaktan kararlılıklı fark şemaları kurulmuş ve hata analizi verilmiştir. İkinci basamaktan kararlılıklı fark şemalarının birinci basamaktan kararlılıklı fark şemalarına oranla daha doğru olmasını sonuçlandırmak için uygun bir Matlab programı verilmiştir. Şekiller ve tablo eklenmiştir.

Altıncı bölüm sonuçlardır.

Bu bölümlerin yanı sıra tezin sonunda **Kaynaklar** ve **Ekler** kısmı verilmiştir.

Ekler kısmında Matlab programları sunulmaktadır.

2. ELİPTİK-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

2.1. Temel Teorem

Bu çalışmada, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı A operatörlü diferensiyel denklemler için çok noktalı lokal olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2}+Au(t)=g(t),(0\le t\le 1), \\ \frac{du(t)}{dt}-Au(t)=f(t),(-1\le t\le 0), \\ u(1)=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i u(\lambda_i)+\varphi \\ -1\le \lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J\le 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

sınır değer problemin iyi konumlanmışlığı çalışılmıştır. Burada $BA\ge\delta I$ ve $\delta>\delta_0>0$'dır.

Bu kısımda, H Hilbert uzayında $B=A^{\frac{1}{2}}$ olarak ifade edelim. O zaman B'nin self-adjoint pozitif tanımlı operatör olduğu açıkça görülür ve $\delta>\delta_0>0$ durumunda $B\ge\delta^{\frac{1}{2}}I$ 'dır.

Bu çalışmamızda, varsayım

$$\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\le 1 \tag{2.2}$$

koşulu altında problem (2.1)'in iyi konumlanmışlığını ele aldık.

Öncelikle ileride ihtiyaç duyacağımız yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 2.1. Aşağıdaki [Sobolevskii, 1977]:

$$\begin{cases} \| B^{\alpha} e^{-tB} \|_{H \to H} \le t^{-\alpha} (\frac{\alpha}{e})^{\alpha}, \ 0 \le \alpha \le e, \ t > 0, \\ \| A^{\alpha} e^{-tA} \|_{H \to H} \le t^{-\alpha} (\frac{\alpha}{e})^{\alpha}, \ 0 \le \alpha \le e, \ t > 0, \\ \| \left(I - e^{-2B} \right)^{-1} \|_{H \to H} \le M(\delta) \end{cases} \tag{2.3}$$

kestirimler bazı $M(\delta) \ge 0$ için sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.2. Varsayım (2.2) sağlansın.

O zaman,

$$B(I - e^{-2B}) + I + e^{-2B} - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(B - \lambda_i A)}$$

operatörünün tersi vardır ve

$$T = \left(B(I - e^{-2B}) + I + e^{-2B} - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(B-\lambda_i A)} \right)^{-1} \tag{2.4}$$

olduğu görülür ve aşağıdaki

$$\| T \|_{H \to H} \le M(\delta), \tag{2.5}$$

$$\| BT \|_{H \to H} \le M(\delta) \tag{2.6}$$

kestirimler sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı α_i ve λ_i 'den bağımsızdır.

İspat. (2.5) kestiriminin ispatı üçgen eşitsizliğine, (2.2) varsayımına ve ispatı yapılan

$$\left\| \left(B(I-e^{-2B}) + I + e^{-2B} - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-(B-\lambda_i A)} \right)^{-1} \right\|_{H\to H}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\mu<\infty} \frac{1}{\left| 1+e^{-2\mu}+\mu(1-e^{-2\mu}) - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(\mu-\lambda_i\mu^2)} \right|}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\mu<\infty} \frac{1}{1+e^{-2\mu}+\mu(1-e^{-2\mu}) - 2\sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| e^{-(\mu-\lambda_i\mu^2)}}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\mu<\infty} \frac{1}{1+e^{-2\mu}-2e^{-\mu}} \leq \frac{1}{(1-e^{-\delta})^2} = M(\delta)$$

eşitsizliğe dayanmaktadır.

Benzer bir şekilde, (2.6) kestirimini ispatlamak için, üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını ve aşağıda ispatı yapılan

$$\left\| B\left(B(I-e^{-2B}) + I + e^{-2B} - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(B-\lambda_i A)} \right)^{-1} \right\|_{H\to H}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\mu<\infty} \frac{\mu}{\left| 1+e^{-2\mu}+\mu(1-e^{-2\mu}) - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(\mu-\lambda_i\mu^2)} \right|}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\mu<\infty} \frac{\mu}{1+e^{-2\mu}+\mu(1-e^{-2\mu}) - 2\sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| e^{-(\mu-\lambda_i\mu^2)}}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\mu<\infty} \frac{\mu}{(1-2e^{-\mu})^2+\mu(1-e^{-2\mu})}$$

$$\leq \sup_{\delta \leq \mu < \infty} \frac{1}{(1-e^{-2\mu})} \leq \frac{1}{(1-e^{-2\delta})} = M(\delta)$$

eşitsizliği kullanırız. Böylece, Yardımcı Teorem 2.2 ispatlanmıştır.

Aşağıdaki şartları sağlayan $u(t)$ fonksiyonu (2.1) probleminin çözümüdür:

i. $u(t)$ fonksiyonu (0,1] aralığında ikinci türevi sürekli olan ve $[-1,1]$ aralığında türevi sürekli olan bir fonksiyondur. Aralığın sınır noktalarındaki türevler, uygun tek taraflı türevler olarak anlaşılır;

ii. $u(t)$ fonksiyonu, A operatörünün tanım kümesinin elemanıdır ve $Au(t)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında süreklidir;

iii. $u(t)$ fonksiyonu, (2.1) denklemini ve bu denkleminin lokal olmayan sınır koşulunu sağlar.

Bu şekilde tanımlanan problem (2.1)'in bir çözümü, bundan sonra $C(H) = C([-1,1],H)$ uzayında problem (2.1)'in bir çözümü olarak atıfta bulunacaktır.

Şimdi, (2.1) probleminin çözümü için gerekli formüller elde edilecektir. Bilindiği gibi, [Krein, 1966]

$$\begin{cases} -u''(t) + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

problemlerinin düzgün dataları için başlangıç değer problemlerini sağlayan tek çözümleri vardır ve aşağıdaki formüller sağlanır:

$$u(t) = \left(I - e^{-2B}\right)^{-1}\left[\left(e^{-tB} - e^{-(-t+2)B}\right)u_0 + \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(t+1)B}\right)u_1\right] \tag{2.9}$$

$$+ (I - e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-t)B} - e^{-(t+1)B})(2B)^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(s+1)B})g(s)ds$$

$$-(2B)^{-1}\int_0^1 (e^{-(t+s)B} - e^{-|t-s|B})g(s)ds, \ 0 \le t \le 1,$$

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds, \ \ -1 \le t \le 0. \qquad (2.10)$$

$u(1) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i) + \varphi$ koşulunu ve (2.9), (2.10) formülleri kullanılarak,

$$u(t) = \left(I - e^{-2B}\right)^{-1}\Big[\left(e^{-tB} - e^{-(-t+2)B}\right)u_0 \qquad (2.11)$$

$$+(e^{-(1-t)B} - e^{-(t+1)B})\left(\sum_{i=1}^{J}\left[\alpha_i e^{\lambda_k A}u_0 + \int_0^{\lambda_i} e^{(\lambda i - s)A} f(s)ds\right] + \varphi\right)\Big]$$

$$+ (I - e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-t)B} - e^{-(t+1)B})(2B)^{-1}\int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(s+1)B})g(s)ds$$

$$-(2B)^{-1}\int_0^1 (e^{-(t+s)B} - e^{-|t-s|B})g(s)ds, \ 0 \le t \le 1$$

operatör denklemi sağlanır. u_0 için, $u'(0+) = Au(0) + f(0)$ koşulunu ve (2.11) formülü kullanılarak,

$$Au(0) + f(0) = \left(I - e^{-2B}\right)^{-1}\Big[-B\left(I + e^{-2B}\right)u_0 \qquad (2.12)$$

$$+2Be^{-B}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{\lambda iA}u_0+\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\int_0^{\lambda i}e^{(\lambda_i-s)A}f(s)ds+\varphi\right)\Bigg]$$

$$+\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}e^{-B}\int_0^1\left(e^{-(1-s)B}-e^{-(s+1)B}\right)g(s)ds+\int_0^1 e^{-sB}g(s)ds.$$

operatör denklemi elde edilir. Bilindiği gibi,

$$B(I-e^{-2B})+I+e^{-2B}-2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i e^{-(B-\lambda_i A)}$$

operatörünün

$$T=\left(B(I-e^{-2B})+I+e^{-2B}-2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i e^{-(B-\lambda_i A)}\right)^{-1}$$

tersi var olduğundan, (2.12) operatör denkleminin çözümü için

$$u_0=T\left[e^{-B}\left[2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\int_0^{\lambda_i}e^{(\lambda_i-s)A}f(s)ds\right.\right. \tag{2.13}$$

$$\left.\left.+\int_0^1 B^{-1}\left(e^{-(1-s)A^{\frac{1}{2}}}-e^{-(s+1)A^{\frac{1}{2}}}\right)g(s)ds\right]+2e^{-B}\varphi\right]$$

$$+\left(I-e^{-2B}\right)TB^{-1}\left[-f(0)+\int_0^1 e^{-sB}g(s)ds\right]$$

formülü elde edilir. Böylece, (2.1) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için (2.10), (2.11) ve (2.13) formülleri belirlenmiş olur.

Bu çalışmada, $C(H)=C([-1,1],H)$ $[-1,1]$ aralığında tanımlı H-değerli $\|\varphi\|_{C([-1,1],H)}=\max\limits_{-1\le t\le 1}\|\varphi(t)\|_H$ normuna sahip bütün sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu Banach uzayıdır.

Şimdi $C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],H), 0<\alpha<1$ ile $[-1,1]$ aralığında bütün düzgün (smooth) H-değerli,

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],H)} = \|\varphi\|_{C([-1,1],H)} + \sup_{-1<t<t+\tau<0} \frac{(-t)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

$$+\sup_{0<t<t+\tau<1} \frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuna sahip $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin kapanışı ile elde edilen Banach uzayını $C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H), 0<\alpha<1$ ile $[0,1]$ aralığında bütün düzgün (smooth) H-değerli

$$\|\varphi\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}=\|\varphi\|_{C([0,1],H)}+\sup_{0<t<t+\tau<1} \frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuna sahip $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin kapanışı ile elde edilen Banach uzayını ve $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0],H), 0<\alpha<1$ ile $[-1,0]$ aralığında bütün düzgün (smooth) H-değerli

$$\|\varphi\|_{C_{0}^{\alpha}([-1,0],H)}=\|\varphi\|_{C([-1,0],H)}+\sup_{-1<t<t+\tau<0} \frac{(-t)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuna sahip $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin kapanışı ile elde edilen Banach uzayını ifade edelim.

Burada, $C([a,b],H)$ $[a,b]$ aralığında tanımlı H-değerli $\|\varphi\|_{C([a,b],H)}=\max\limits_{a\le t\le b}\|\varphi(t)\|_H$

normuna sahip bütün sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu Banach uzayıdır.

Eğer problem (2.1)'in herhangi $g(t)\in C([0,1],H)$, $f(t)\in C([-1,0],H)$ ve $\varphi\in D(A)$ için $C(H)$'de tek çözümü varsa ve $M(\delta)$, φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsız olmak üzere

$$\|u''\|_{C([0,1],H)} + \|u'\|_{C([-1,0],H)} + \|Au\|_{C(H)} \le M(\delta)[\|g\|_{C([0,1],H)} + \|f\|_{C([-1,0],H)} + \|A\varphi\|_H]$$

koersiv eşitsizliğini sağlıyorsa, problem (2.1) $C(H)$'de iyi konumlanmıştır denir.

Problem (2.1) $C(H)$'da iyi konumlanmış değildir [Ashyralyev, Soltanov, 1995]. (2.1) sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı, $[-1,1]$'de H değerli bütün düzgün (smooth) fonksiyonların $F(H)$ kati (certain) uzayında ele alınarak ispat edilebilir.

$F(H)$'da bir $u(t)$ fonksiyonu eğer $C(H)$'da (1.1) probleminin bir çözümü ise ve $u''(t)$ $(t \in [0,1])$, $u'(t)(t \in [-1,1])$ ve $Au(t)(t \in [-1,1])$, $F(H)$'a aitse, (2.1) probleminin çözümüdür denir.

$C(H)$ uzayı durumunda olduğu gibi, eğer $M(\delta)$ φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsız olmak üzere

$$\|u''\|_{F([0,1],H)} + \|u'\|_{F([-1,0],H)} + \|Au\|_{F(H)} \le M(\delta)[\|g\|_{F([0,1],H)} + \|f\|_{F([-1,0],H)} + \|A\varphi\|_H] \tag{2.14}$$

koersiv eşitsizliği sağlanıyorsa, biz (2.1) problemi $F(H)$'ta iyi konumlanmıştır deriz.

Eğer biz $F(H)$'ı $C^{\alpha}_{0,1}(H) = C^{\alpha}_{0,1}([-1,1],H)$ $(0 < \alpha < 1)$'a eşit kurarsak, ana teoremimizi ispat edebiliriz.

Lokal olmayan sınır değer (2.1) probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\| u_{tt} \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1],L_2(\bar{\Omega}))} + \| u_t \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0],L_2(\bar{\Omega})])} + \| u \|_{C^{\alpha}_{0,1}([-1,1],W_2^2(\bar{\Omega}))} \tag{2.15}$$

$$\le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| g \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1],L_2(\bar{\Omega}))} + \| f \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0],L_2(\bar{\Omega}))}\right] + M(\delta)\|\varphi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $f(t,x)$, $g(t,x)$ ve $\varphi(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 2.1. $\varphi \in D(A)$ olduğunu varsayalım. $C^{\alpha}_{0,1}(H)$ Hölder uzayında sınır değer problemi (2.1) iyi konumlanmıştır ve aşağıdaki

$$\|u''\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} + \|u'\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \| Au \|_{C_{0,1}^{\alpha}(H)} \tag{2.16}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}\right] + \|A\varphi\|_H\right]$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı φ, $f(t)$ ve $g(t)$'den bağımsızdır.

İspat. (2.16) koersiv eşitsizliği (2.8) ters Cauchy probleminin çözümü için verilen

$$\|u'\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \| Au \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} \leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + M\|Au_0\|_H \tag{2.17}$$

kestiriminden ve (2.7) sınır değer probleminin çözümü için verilen

$$\|u''\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} + \| Au \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} \leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} \tag{2.18}$$

$$+ M(\delta)[\|Au_0\|_H + \|Au_1\|_H]$$

kestiriminden ve (2.1) sınır değer probleminin çözümü için elde edilen

$$\|Au_0\|_H \leq M(\delta)\left[\| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} + \|A\varphi\|_H\right], \tag{2.19}$$

$$\|Au_1\|_H \leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}\right] + M(\delta)\|A\varphi\|_H \tag{2.20}$$

kestirimlerinden elde edilmektedir. (2.17) ve (2.18) kestirimleri [Sobolevskii, 1964], [Sobolevskii, 1969] ve [Sobolevskii, 1977]'de ispatlanmıştır. Şimdi, (2.19) ve (2.20) kestirimlerini elde edelim.

(2.9), (2.10) ve (2.13)'ü kullanarak,

$$Au_0 = 2Te^{-B}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\int_{\lambda_i}^{0}Ae^{(\lambda_i-s)A}\left(f(s)-f(\lambda_i)\right)ds \tag{2.21}$$

$$+\,Te^{-B}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(g(s)-g(1))ds$$

$$-\,Te^{-B}\int_0^1 Be^{-(s+1)B}(g(s)-g(0))ds+2Te^{-B}A\varphi$$

$$+\,(I-e^{-2B})T\int_0^1 Be^{-sA^{\frac{1}{2}}}(g(s)-g(0))ds$$

$$+\,2Te^{-B}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(e^{\lambda_i A}-I)f(\lambda_i)$$

$$+\,T(e^{-B}-e^{-2B})g(1)+T(I+2e^{-3B}-2e^{-2B}-e^{-B})g(0)$$

$$+TB(e^{-2B}-I)f(0)=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+J_7+J_8+J_9$$

olur. Burada,

$$J_1 \;=\; 2Te^{-B}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\int_0^{\lambda_i}Ae^{(\lambda_i-s)A}(f(s)-f(\lambda_i))ds,$$

$$J_2 \;=\; Te^{-B}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(g(s)-g(1))ds,$$

$$J_3 \;=\; Te^{-B}\int_0^1 Be^{-(s+1)B}(g(s)-g(0))ds,$$

$$J_4 = 2Te^{-B}A\varphi,$$

$$J_5 = (I - e^{-2B})T\int_0^1 Be^{-sB}(g(s) - g(0))ds,$$

$$J_6 = 2Te^{-B}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i(e^{\lambda_i A} - I)f(\lambda_i),$$

$$J_7 = T(e^{-B} - e^{-2B})g(1),$$

$$J_8 = T(I + 2e^{-3B} - 2e^{-2B} - e^{-B})g(0),$$

$$J_9 = TB(e^{-2B} - I)f(0)$$

’dır.

$$Au_1 = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i e^{\lambda_i A}Au_0 + \sum_{i=1}^{J}\alpha_i\int_{\lambda_i}^{0}Ae^{(\lambda_i - s)A}\left(f(s) - f(\lambda_i)\right)ds \tag{2.22}$$

$$+\sum_{i=1}^{J}\alpha_i(I - e^{\lambda_i A})f(\lambda_i) + A\varphi = K_1 + K_2 + K_3$$

olup, burada

$$K_1 = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i e^{\lambda_i A}Au_0,$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i\int_{\lambda_k}^{0}Ae^{(\lambda_i - s)A}(f(s) - f(\lambda_i))ds,$$

$$K_3 = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i (I - e^{\lambda_i A}) f(\lambda_i) + A\varphi$$

olarak tanımlanmıştır. İlk önce (2.19) elde edelim. (2.21)'in normunun kestirimini oluşturmak için J_k 'ların norm kestirimlerini $k = 1, 2, \cdots, 9$ için ayrı ayrı bulalım.

Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, $C_0^{\alpha}([-1,0], H)$ uzayının norm tanımını, (2.3) ve (2.5) kestirimlerini kullanarak,

$$\| J_1 \|_H \leq \| T \|_{H \to H} \| B^2 e^{-B} \|_{H \to H} 2 \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i|$$

$$\times \int_{\lambda_k}^{0} \| e^{-(s-\lambda_k)A} \|_{H \to H} \left\| f(s) - f(\lambda_k) \right\|_H ds \leq M_1(\delta) \left\| f \right\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)}$$

elde ederiz.

J_2 'nin normunun kestirimini bulalım. Üçgen eşitsizliğini, $C_{0,1}^{\alpha}([0,1], H)$, uzayının norm tanımını ve (2.3) , (2.6) kestirimlerini kullanarak,

$$\| J_2 \|_H \leq \| BT \|_{H \to H} \int_0^1 \| e^{-(2-s)B} \|_{H \to H} \| g(s) - g(1) \|_H ds$$

$$\leq M_2(\delta) \int_0^1 (1-s)^{\alpha} ds \left\| g \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} \leq M_2(\delta) \left\| g \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}$$

Aynı şekilde

$$\| J_3 \|_H \leq \| BT \|_{H \to H} \int_0^1 \| e^{-(s+2)B} \|_{H \to H} \| g(s) - g(0) \|_H ds$$

$$\leq M_3(\delta)\int_0^1 s^{\alpha}ds\|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} \leq M_3(\delta)\|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}$$

gösterebiliriz.

Şimdi J_4'ün normunun kestirimini bulacağız. Üçgen eşitsizliğini, (2.3) ve (2.5) kestirimlerini kullanarak,

$$\|J_4\|_H \leq 2\|T\|_{H\to H}\|e^{-B}\|_{H\to H}\|A\phi\|_H \leq M_4(\delta)\|A\phi\|_H$$

elde ederiz.

J_5'in normunun kestirimini bulalım. Üçgen eşitsizliğini, $C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayının norm tanımını, (2.3) ve (2.6) kestirimlerini kullanarak,

$$\|J_5\|_H \leq \{1+\|e^{-2B}\|_{H\to H}\}\ \|BT\|_{H\to H}\int_0^1 \|e^{-sB}\|_{H\to H}\ \|g(s)-g(0)\|_H ds$$

$$\leq M_5(\delta)\int_0^1 s^{\alpha}ds\|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} \leq M_5(\delta)\|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}$$

buluruz.

Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, $C_0^{\alpha}([-1,0],H)$ uzayının norm tanımını, (2.3) ve (2.5) kestirimlerini kullanarak,

$$\|J_6\|_H \leq \|T\|_{H\to H}\ \|e^{-B}\|_{H\to H}\ 2\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\ (1+\|e^{\lambda_i A}\|_{H\to H})\ \|f(\lambda_i)\|_H$$

$$\leq M_6(\delta)\max_{-1\leq t\leq 0}\|f(t)\|_H \leq M_6(\delta)\|f\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)}$$

elde ederiz.

Üçgen eşitsizliğini, $C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayının norm tanımını, (2.3) ve (2.5) kestirimlerini kullanarak,

$$\| J_7 \|_H \leq \| T \|_{H \to H} \left(\| e^{-2B} \|_{H \to H} + \| e^{-B} \|_{H \to H} \right) \| g(1) \|_H$$

$$\leq M_7(\delta) \max_{0 \leq t \leq 1} \| g(t) \|_H \leq M_7(\delta) \| g \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}.$$

Benzer şekilde,

$$J_8 = T(I + 2e^{-3B} - 2e^{-2B} - e^{-B}) g(0),$$

$$\| J_8 \|_H \leq \| T \|_{H \to H} \left(1 + 2 \| e^{-3B} \|_{H \to H} + 2 \| e^{-2B} \|_{H \to H} + \| e^{-B} \|_{H \to H} \right) \| g(0) \|_H$$

$$\leq M_8(\delta) \max_{0 \leq t \leq 1} \| g(t) \|_H \leq M_8(\delta) \| g \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}$$

olduğunu gösterebiliriz.

Son olarak, $C_0^{\alpha}([-1,0],H)$ uzayının norm tanımını, (2.3) ve (2.6) kestirimlerini kullanarak,

$$\| J_9 \|_H \leq \| BT \|_{H \to H} \left(1 + \| e^{-2B} \|_{H \to H} \right) \| f(0) \|_H$$

$$\leq M_9(\delta) \max_{-1 \leq t \leq 0} \| f(t) \|_H \leq M_9(\delta) \| f(t) \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)}$$

elde ederiz.

Böylece $J_k,\ k = 1,2,...,9$ için normlarının kestirimleri bir araya getirerek (2.21)'i elde ederiz.

İkinci olarak, (2.20)' i elde ederiz. (2.22)'in normunun kestirimini oluşturmak için K_1, K_2 ve K_3'ün norm kestirimlerini ayrı ayrı bulalım.

Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (2.3) ve (2.19) kestirimlerini kullanarak,

$$\|K_1\|_H \leq \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \, \| \, e^{\lambda_i A} \, \|_{H\to H} \, \|Au_0\|_H$$

$$\leq \|Au_0\|_H \leq M_1(\delta)\left[\|g\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)} + \|f\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|A\varphi\|_H\right]$$

elde ederiz.

Şimdi K_2'nin normunu hesaplayacağız. Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (2.3) ve (2.5) kestirimlerini ve $C_0^{\alpha}([-1,0],H)$ uzayının norm tanımını kullanarak,

$$\|K_2\|_H \leq \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \int_{\lambda_i}^{0} \| \, Ae^{\lambda_i A} \, \|_{H\to H} \, \|f(s) - f(\lambda_i)\|_H \, ds$$

$$\leq M_2(\delta)\int_{\lambda_k}^{0} \frac{(s-\lambda_i)^{\alpha} ds}{(s-\lambda_i)(-s)^{\alpha}} \|f\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} \leq \frac{M_2(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)}$$

buluruz.

Son olarak, Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (2.3) kestirimini ve $C_0^{\alpha}([-1,0],H)$ uzayının norm tanımını kullanarak,

$$\|K_3\|_H \leq \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \, \| \, I - e^{\lambda_i A} \, \|_{H\to H} \, \|f(\lambda_i)\|_H + \|A\varphi\|_H$$

$$\leq M_3(\delta) \max_{-1\leq i\leq 0} \|f(\lambda_i)\|_H + \|A\varphi\|_H \leq M_3(\delta)\|f\|_{C_0^{\alpha}([-1,0],H)} + \|A\varphi\|_H$$

elde ederiz.

Böylece K_1, K_2 ve K_3'ün norm kestirimlerini birleştirerek (2.22)'yi elde ederiz. Bu sonuç Teorem 2.1'in ispatını sonuçlandırır.

2.2. Uygulamalar

Teorem 2.1'in uygulamalarını ele alalım.

İlk olarak, çok boyutlu eliptik-parabolik denklem için lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} -u_{tt} - (a(x)u_x)_x + \delta u = g(t,x),\ 0 < t < 1,\ 0 < x < 1, \\ u_t + (a(x)u_x)_x - \delta u = f(t,x),\ -1 < t < 0,\ 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1),\ u_x(t,0) = u_x(t,1),\ -1 \le t \le 1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x),\ \sum\limits_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1, \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_i < \cdots < \lambda_J \le 0,\ 0 \le x \le 1, \\ u(0+,x) = u(0-,x),\ u_t(0+,x) = u_t(0-,x),\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{2.23}$$

ele alınmıştır. Eğer $a(x) \ge a > 0 (x \in (0,1))$, $g(t,x) (t \in [0,1],\ x \in [0,1])$, $f(t,x) (t \in [-1,0],\ x \in [0,1])$ fonksiyonları tanım kümelerinde düzgün (smooth) ve $\delta = sabit > 0$ ise, bu durumda (2.23) probleminin çözümü vardır ve tektir.

$[0,1]$'de tanımlı karesi integrallenebilir fonksiyonları $L_2[0,1]$ Hilbert uzayı ile ve sırasıyla

$$\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]} = \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + \left(\int_0^1 |\varphi_x|^2\, dx \right)^{1/2}$$

ve

$$\|\varphi^h\|_{W_2^2[0,1]} = \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + \left(\int_0^1 |\varphi_x|^2\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_{xx}|^2\, dx \right)^{1/2}$$

normlarına sahip $W_2^1[0,1]$ ve $W_2^2[0,1]$ Hilbert uzaylarını tanımlayalım. Bu bizim (2.23) karma problemini self-adjoint pozitif tanımla A operatörü ile $H = L_2[0,1]$ Hilbert uzayında lokal olmayan sınır değer problemi (2.1)'e dönüştürmemizi sağlar.

Teorem 2.2. Lokal olmayan sınır değer (2.23) probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\| u_{tt} \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1],L_2[0,1])} + \| u_t \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0],L_2[0,1])} + \| u \|_{C^{\alpha}_{0,1}([-1,1],W_2^2[0,1])}$$

$$\leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \left[\| g \|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1],L_2[0,1])} + \| f \|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0],L_2[0,1])} \right] + M(\delta) \| \varphi \|_{W_2^2[0,1]}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $f(t,x)$, $g(t,x)$ ve $\varphi(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 2.2'nin ispatı, soyut Teorem 2.1 ve (2.23) problemini tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak, n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\Omega = \left(0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\right)$ bir açık küme ve S bu kümenin sınırı olsun öyle ki $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ 'dir. $[-1,1] \times \Omega$ kümesinde, çok boyutlu eliptik-parabolik denklem için karma sınır değer problemi

$$\begin{cases} -u_{tt} - \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = g(t,x), \ 0 < t < 1, \ x \in \Omega, \\ u_t + \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t,x), \ -1 < t < 0, \ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ x \in S, \ -1 \leq t \leq 1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x), \ \sum\limits_{i=1}^{J} \left|\alpha_i\right| \leq 1, \\ -1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \leq 0, \\ u(0+,x) = u(0-,x), \ u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \ x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.24}$$

ele alınmıştır. Burada $a_r(x)$ $(x \in \Omega)$, $g(t,x)$ $(t \in (0,1), \ x \in \overline{\Omega})$, ve $f(t,x)$ $(t \in (-1,0), x \in \overline{\Omega})$

fonksiyonları tanım kümelerinde düzgün (smooth) ve $a_r(x) \geq a > 0$ ’dır.

$\overline{\Omega}$ ’de tanımlı bütün karesi integrallenebilir ve

$$\| \varphi \|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

normuna sahip fonksiyonları $L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzaylarını ve sırasıyla

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} = \| \varphi \|_{L_2(\overline{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} \left|\varphi_{x_r}\right|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\|\varphi^h\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} \left|\varphi_{x_r}\right|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} \left|\varphi_{x_r \overline{x_r}}\right|^2 dx_1 \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

normlarına sahip $W_2^1(\overline{\Omega}), W_2^2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzaylarını tanımlayalım. Eğer $a_r(x)$, $g(t,x)$ ve $f(t,x)$ fonksiyonları tanım kümelerinde yeterince düzgün ise, bu durumda (2.24) probleminin çözümü vardır ve tektir. Bunun için, (2.24) problemi, H Hilbert uzayında ($H = L_2(\overline{\Omega})$) self-adjoint pozitif tanımlı A operatörlü (2.1) lokal olmayan sınır değer problemine dönüştürülebilir.

Teorem 2.3. Lokal olmayan sınır değer (2.24) probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\| u_{tt} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))} + \| u_t \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2(\overline{\Omega}))]} + \| u \|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1],W_2^2(\overline{\Omega}))}$$

$$\leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \left[\| g \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))} + \| f \|_{C_0^{\alpha}([-1,0],L_2(\overline{\Omega}))} \right] + M(\delta) \|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır. Burada $M(\delta)$ katsayısı $f(t,x)$, $g(t,x)$ ve $\varphi(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 2.3'ün ispatı, soyut Teorem 2.1, (2.24) problemi tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki $L_2(\overline{\Omega})$ uzayında eliptik diferensiyel probleminin çözümü için koersiv eşitsizliği alınan teoreme dayanmaktadır.

Teorem 2.4. Eliptik diferensiyel probleminin

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = \omega(x),\ x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0,\ x \in S$$

çözümü için aşağıdaki

$$\sum_{r=1}^{n}\left\|u_{x_r x_r}\right\|_{L_2(\Omega)} \le M \,\|\,\omega\,\|_{L_2(\Omega)}$$

koersiv kestirimi sağlanır [Sobolevskii, 1975].

3. BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

3.1. Fark Şeması

Bu bölümde, (2.1) sınır değer probleminin yakın çözümü için bu probleme karşılık gelen

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k=g_k, \\ g_k=g\left(t_k\right),\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1, \\ \tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-Au_{k-1}=f_k, \quad f_k=f(t_{k-1}), \\ t_{k-1}=(k-1)\tau,\ -\left(N-1\right)\le k\le 0, \\ u_N=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+\varphi,\ u_1-u_0=u_0-u_{-1} \end{cases} \tag{3.1}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (2.2) varsayım koşulu altında incelenmiştir.

Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı A diferensiyel operatörlü lokal olmayan sınır değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h 'ye $\left(0<h\le h_0\right)$ göre düzgün self-adjoint pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir. Dolayısıyla bu çalışmada sadece bir değişkenli diskritizasyon fark şemaları incelenmektedir.

$B=\frac{1}{2}(\tau A+\sqrt{A(4+\tau^2 A)})$ operatörünün self-adjoint pozitif tanımlı olduğu gayet iyi bilindiği üzere H uzayında tanımlanan $R=(I+\tau B)^{-1}$ operatörü sınırlı bir operatördür. Burada I birim operatörüdür.

Öncelikle gerek duyulacak yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.1. Aşağıdaki kestirimler [Sobolevskii, 1977]

$$\begin{cases} \| P^k \|_{H\to H} \le (1+\delta\tau)^{-k},\ k\tau \| AP^k \|_{H\to H} \le 1,\ \left\| P^k - e^{-k\tau A} \right\|_{H\to H} \le \frac{M(\delta)\tau}{k\tau}, \\ \| R^k \|_{H\to H} \le (1+\delta\tau)^{-k},\ k\tau \| BR^k \|_{H\to H} \le 1, \\ \| (I-R^{2N})^{-1} \|_{H\to H} \le M(\delta),\ \left\| R^k - e^{-k\tau A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H} \le \frac{M(\delta)\tau}{k\tau},\ k\ge 1,\ \delta>0, \end{cases} \tag{3.2}$$

self-adjoint pozitif tanımlı A operatörü olduğu zaman sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı τ'dan bağımsızdır ve $M(\delta)>0$, $P=P(\tau A)=(I+\tau A)^{-1}$, τ yeterince küçük pozitif bir sayıdır.

Yardımcı Teorem 3.2. (2.2) varsayımı sağlansın. Yeterince küçük pozitif bir τ sayısı için

$$I+(I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1}+B^{-1}A(I+2\tau A)^{-1}(I-R^{2N-1})$$

$$-(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^{N}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}$$

operatörünün tersi vardır ve

$$T_\tau=(I+(I+\tau A)\left(I+2\tau A\right)^{-1}R^{2N-1}+B^{-1}A\left(I+2\tau A\right)^{-1}\left(I-R^{2N-1}\right)$$
$$-(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^{N}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1})^{-1} \tag{3.3}$$

aşağıdaki

$$\| T_\tau \|_{H\to H} \le M(\delta), \tag{3.4}$$

$$\| BRPT_\tau \|_{H\to H} \le M(\delta) \tag{3.5}$$

kestirimler sağlanır. Burada, $M(\delta)$ τ 'dan bağımsızdır.

İspat. Self-adjoint pozitif tanımlı A operatörü için,

$$B^{-1}A(I+2\tau A)^{-1}(I-R^{2N-1}) \geq 0$$

ve

$$I+(I+\tau A)\left(I+2\tau A\right)^{-1}R^{2N-1}-(2I+\tau B)\left(I+2\tau A\right)^{-1}R^{N}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} \geq 0$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece,

$$V_\tau = \left(I+(I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1}-(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^{N}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} \right)^{-1}$$

ve

$S_\tau = \left(B^{-1}A\left(I+2\tau A\right)^{-1}\left(I-R^{2N-1}\right)\right)^{-1}$ olduğu zaman

$$\| T_\tau \|_{H\to H} \leq \| V_\tau \|_{H\to H} \tag{3.6}$$

ve

$$\| BRPT_\tau \|_{H\to H} \leq \| BRPS_\tau \|_{H\to H} \tag{3.7}$$

kestirimleri elde edilir.

B’nin tanımıyla,

$BRPS_\tau = \left(I+\tau A\right)^{-1}\left(I+2\tau A\right)\left(I-R^{2N-1}\right)^{-1}$ elde edilir.

(3.7) eşitsizliği kullanarak,

$\| BRPS_\tau \|_{H\to H} \leq \| \left(I+\tau A\right)^{-1}\left(I+2\tau A\right) \|_{H\to H} \| \left(I-R^{2N-1}\right)^{-1} \|_{H\to H} \leq M(\delta)$ bulunur.

Buradan ve (3.7) kestiriminden (3.5) kestirimi elde edilir.

$$Y - V_\tau = YV_\tau(Z_\tau - Z) \tag{3.8}$$

denklemini (3.4) kestiriminin ispatı için ifade edelim.

Burada

$$Z_\tau = I + (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1} - (2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1},$$

$Z = I + e^{-2A^{\frac{1}{2}}} - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(A^{\frac{1}{2}} - \lambda_i A)}$ olarak tanımlanmıştır.

Üçgen eşitsizliğini uygulayarak

$$\| Z_\tau - Z \|_{H\to H} \le \Bigg\| I + (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1}$$

$$-(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}$$

$$-I - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} + 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(A^{\frac{1}{2}} - \lambda_i A)} \Bigg\|_{H\to H}$$

$$\le \left\| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1} - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H}$$

$$+ \left\| 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(A^{\frac{1}{2}} - \lambda_i A)} - (2I+\tau B)\left(I+2\tau A\right)^{-1} R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} \right\|_{H\to H} = I_1 + I_2$$

elde ederiz.

Burada

$$I_1 = \left\| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} R^{2N-1} - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H}$$

ve

$$I_2 = \left\| 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(A^{\frac{1}{2}}-\lambda_i A)} - (2I+\tau B)\left(I+2\tau A\right)^{-1} R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} \right\|_{H\to H}$$

olur.

Öncelikle I_1 ve I_2'nin normlarının kestirimlerini bulalım. (3.2) kestirimini ve (2.2) varsayımını uyguladığımızda,

$$I_1 = \left\| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} R^{2N-1} - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H}$$

$$= \left\| ((I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} - I) R^{2N-1} + (I+\tau B) R^{2N} - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H}$$

$$= \left\| (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A - I - 2\tau A) R^{2N-1} + R^{2N} + \tau B R^{2N} - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H}$$

$$\leq \left\| (I+2\tau A)^{-1}(-\tau) B^2 R^{2N} \right\|_{H\to H} + \left\| \tau B R^{2N} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{2N} - e^{-2A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H}$$

$$\leq \frac{\tau M(\delta)}{(2N\tau)^2} + \frac{\tau}{(2N\tau)^2} + \frac{\tau M(\delta)}{2N\tau} \leq M(\delta)\tau,$$

$$I_2 = \left\| (2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1} R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} - 2\sum_{i=1}^{J} \alpha_i e^{-(A^{\frac{1}{2}}-\lambda_i A)} \right\|_{H\to H}$$

$$=\| \; 2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left[\frac{1}{2}(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^N P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} - e^{-(A^{\frac{1}{2}}-\lambda_i A)}\right] \|_{H\to H}$$

$$=\| \; 2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i R^N P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}\left[\frac{1}{2}(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1} - I\right]$$

$$+2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left[R^N P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} - e^{-(A^{\frac{1}{2}}-\lambda_i A)}\right]\Bigg\| \;\; \|_{H\to H}$$

$$\leq \| \; 2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left(R^N P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}\left[\frac{1}{2}(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1} - I\right]\right) \|_{H\to H}$$

$$+\| \; 2\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left(\left[R^N - e^{-A^{\frac{1}{2}}}\right]P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} + \left[P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} - e^{-\lambda_i A}\right]e^{-A^{\frac{1}{2}}}\right) \|_{H\to H}$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\tau\Big[\|BR^N\|_{H\to H}\left\|P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}\right\|_{H\to H}\frac{1}{2}\left\|(I+2\tau A)^{-1}\right\|_{H\to H}$$

$$+2\|B^2R^N\|_{H\to H}\left\|P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}\right\|_{H\to H}2\left\|R(I+2\tau A)^{-1}\right\|_{H\to H}\Big]$$

$$+2\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\Bigg\{\left\|R^N - e^{-A^{\frac{1}{2}}}\right\|_{H\to H}\left\|P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}\right\|_{H\to H}$$

$$+\left\|P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1} - e^{-\lambda_i A}\right\|_{H\to H}\left\|e^{-A^{\frac{1}{2}}}\right\|_{H\to H}\Bigg\} \leq M(\delta)\tau \text{ olur.}$$

I_1 ve I_2'nin normlarının kestirimlerini birleştirdiğimizde

$$\| Z_\tau - Z \|_{H\to H} \leq M(\delta)\tau \tag{3.9}$$

elde ederiz.

(3.8) ve (3.9) uygulandığında,

$$\| V_\tau \|_{H\to H} \leq \| Y \|_{H\to H} + \| Y \|_{H\to H} \; \| V_\tau \|_{H\to H} \; \| Z_\tau - Z \|_{H\to H}$$

$$\leq M(\delta) + \tau M(\delta) \| V_\tau \|_{H\to H}$$

bulunur.

Sonrasında, buradan ve (3.6)'dan

$$\| T_\tau \|_{H\to H} \leq M(\delta)$$

sonucuna ulaşırız ve bu sonuç Yardımcı Teorem 3.2'nin ispatını tamamlar.

Yardımcı Teorem 3.3. Herhangi bir $g_k, 1 \leq k \leq N-1$ ve $f_k, -N+1 \leq k \leq 0$ tanımlanmış fonksiyonlar için problem (3.1)'in çözümü vardır ve aşağıdaki formüller sağlanır:

$$u_k = (I - R^{2N})^{-1} \Big\{ \big[R^k - R^{2N-k} \big] u_0 \tag{3.10}$$

$$+ [R^{N-k} - R^{N+k}] \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} u_0 - \tau \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} f_s \right\} + \varphi \right]$$

$$-[R^{N-k} - R^{N+k}](I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} [R^{N-s} - R^{N+s}] g_s \tau \Big\}$$

$$+ (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} [R^{|k-s|} - R^{k+s}] g_s \tau \, , 1 \leq k \leq N,$$

$$u_k = P^{-k}u_0 - \tau\sum_{s=k+1}^{0} P^{s-k} f_s, -N \le k \le -1, \tag{3.11}$$

$$u_0 = T_\tau \left(I + 2\tau A\right)^{-1} (I+\tau A)\left\{\left(2+\tau B\right) R^N\right. \tag{3.12}$$

$$\times\left[-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\tau \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} f_s + \varphi\right] - R^{N-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s} - R^{N+s}]g_s\tau$$

$$\left. +(I-R^{2N})B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}g_s\tau - (I-R^{2N})\left(I+\tau B\right)B^{-1}Pf_0\right\}.$$

Burada

$$T_\tau = (I + (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1} + B^{-1}A(I+2\tau A)^{-1}(I-R^{2N-1})$$

$$-(2I+\tau B)\left(I+2\tau A\right)^{-1} R^N \sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1})^{-1}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat. [Sobolevskii, 1977] ile

$$u_k = (I-R^{2N})^{-1}\left\{\left[R^k - R^{2N-k}\right]\xi + \left[R^{N-k} - R^{N+k}\right]\psi\right. \tag{3.13}$$

$$\left. -[R^{N-k} - R^{N+k}](I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s} - R^{N+s}]g_s\tau\right\}$$

$$+ (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{|k-s|} - R^{k+s}]g_s\tau\ , 1 \le k \le N$$

aşağıdaki sınır değer

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k=g_k, \\ g_k=g\left(t_k\right),\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1, \\ u_0=\xi,\ u_N=\psi \end{cases} \tag{3.14}$$

probleminin çözümü olup

ve

$$u_k=P^{-k}\xi-\tau\sum_{s=k+1}^{0}P^{s-k}f_s, -N\le k\le -1 \tag{3.15}$$

eşitliği ise aşağıdaki ters

$$\begin{cases} \tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-Au_{k-1}=f_k,\quad f_k=f(t_{k-1}), \\ t_{k-1}=(k-1)\tau,\ -\left(N-1\right)\le k\le 0,\ u_0\ =\xi \end{cases} \tag{3.16}$$

Cauchy probleminin çözümüdür.

(3.13), (3.15) ve

$$\psi=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+\varphi,\ \xi=u_0, \tag{3.17}$$

formülleri kullanılarak

(3.10) ve (3.11) elde edilir. u_0 için, (3.10), (3.11) ve

$u_1-u_0=u_0-u_{-1}$ formülünü kullanarak, aşağıdaki operatör denklemi

$$(I-R^{2N})^{-1}\{[R-R^{2N-1}]u_0+[R^{N-1}-R^{N+1}]$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left\{P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0-\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}f_s\right\}+\varphi\right]$$

$$-[R^{N-1}-R^{N+1}](I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s}-R^{N+s}]g_s\tau\Bigg\}$$

$$+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}\left[R^{s-1}-R^{1+s}\right]g_s\tau=2u_0-Pu_0+\tau Pf_0$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2 ile

$$I+(I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1}+B^{-1}A(I+2\tau A)^{-1}(I-R^{2N-1})$$

$$-(2I+\tau B)(I+2\tau A)^{-1}R^{N}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1}$$

operatörünün tersi

$$T_\tau=(I+(I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}R^{2N-1}+B^{-1}A(I+2\tau A)^{-1}(I-R^{2N-1})$$

$$-(2I+\tau B)\left(I+2\tau A\right)^{-1}R^{N}\sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]-1})^{-1}$$

vardır. Böylece aşağıdaki formülümüz

$$u_0=T_\tau(I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}\left\{(2I+\tau B)R^{N}\times\left[-\tau\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}f_s+\varphi\right]\right.$$

$$-R^{N-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s}-R^{N+s}]g_s\tau$$

$$+(I-R^{2N})B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}g_s\tau-(I-R^{2N})\left(I+\tau B\right)B^{-1}Pf_0\Big\}$$

sağlanır ve bu sonuç ile Yardımcı Teorem 3.3.’ün ispatı tamamlanır.

$F_\tau(H)=F([a,b]_\tau,H)$, $[a,b]_\tau=\{t_k=kh,N_a\le k\le N_b,N_a\tau=a,N_b\tau=b\}$ ’de tanımlı H-değerli $\varphi^\tau=\{\varphi_k\}_{N_a}^{N_b}$ ağ fonksiyonlarının lineer uzayı olsun. $F_\tau(H)$ üzerinde kullanacağımız $C([a,b]_\tau,H)$, $C_{0,1}^\alpha([-1,1]_\tau,H)$, $C_{0,1}^\alpha([-1,0]_\tau,H)$, ve $C_0^\alpha([0,1]_\tau,H)$ $(0<\alpha<1)$ Banach uzaylarının normları aşağıdaki şekildedir:

$$\|\varphi^\tau\|_{C([a,b]_\tau,H)}=\max_{N_a\le k\le N_b}\|\varphi_k\|_H,$$

$$\|\varphi^\tau\|_{C_{0,1}^\alpha([-1,1]_\tau,H)}=\|\varphi^\tau\|_{C([-1,1]_\tau,H)}+\sup_{-N\le k<k+r\le 0}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_E\frac{(-k)^\alpha}{r^\alpha}$$

$$+\sup_{1\le k<k+r\le N-1}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_E\frac{((k+r)\tau)^\alpha(N-k)^\alpha}{r^\alpha},$$

$$\|\varphi^\tau\|_{C_0^\alpha([-1,0]_\tau,H)}=\|\varphi^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}+\sup_{-N\le k<k+r\le 0}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_E\frac{(-k)^\alpha}{r^\alpha},$$

$$\|\varphi^\tau\|_{C_{0,1}^\alpha([0,1]_\tau,H)}=\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\sup_{1\le k<k+r\le N-1}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_E\frac{\left((k+r)\tau\right)^\alpha(N-k)^\alpha}{r^\alpha}.$$

Lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) , $M(\delta)$ f^τ, g^τ, φ, ve τ ’dan bağımsız olmak üzere

$$\|u^\tau\|_{F([-1,1]_\tau,H)}\le M(\delta)\Big[\|f^\tau\|_{F([-1,0]_\tau,H)}+\|g^\tau\|_{F([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H\Big],$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $F([-1,1]_\tau, H)$'de kararlıdır denir.

Teorem 3.1. Lokal olmayan (3.1) sınır değer problemi $C([-1,1]_\tau, H)$ normunda kararlıdır.

İspat. [Sobolevskii, 1977] ile (3.16) ters Cauchy probleminin çözümü için verilen

$$\left\|\{u_k\}_{-N}^{0}\right\|_{C([-1,0]_\tau,H)} \le M(\delta)\left[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \|u_0\|_H\right] \tag{3.18}$$

kestiriminden, (3.14) sınır değer probleminin çözümü için verilen

$$\left\|\{u_k\}_{1}^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,H)} \le M(\delta)\left[\| g^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)} + \|u_0\|_H + \|u_N\|_H\right] \tag{3.19}$$

kestiriminden ve (3.1) sınır değer probleminin çözümü için elde edilen

$$\| u_0 \|_H \le M(\delta)\left[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)} + \| \varphi \|_H\right], \tag{3.20}$$

$$\| u_N \|_H \le M(\delta)\left[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)} + \| \varphi \|_H\right] \tag{3.21}$$

kestirimlerinden Teorem 3.1'in ispatı elde edilmektedir. Şimdi, (3.20) ve (3.21) kestirimlerini elde edelim.

İlkin, (3.20)'yi elde edelim. (3.12) formülünü uygulayarak,

$$u_0 = K_1 + K_2,$$

ve burada

$$K_1 = T_\tau (I+\tau A)\left(I+2\tau A\right)^{-1}\left(2I+\tau B\right) R^N \tag{3.22}$$

$$\times \left[-\tau \sum_{i=1}^{J} \alpha_i \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} f_s + \varphi \right],$$

$$K_2 = T_\tau (I+\tau A)\left(I+2\tau A\right)^{-1}\left\{-R^{N-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}\left[R^{N-s}-R^{N+s}\right]g_s\tau\right. \tag{3.23}$$

$$\left.+(I-R^{2N})B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}g_s\tau-(I-R^{2N})\left(I+\tau B\right)B^{-1}Pf_0\right\}$$

tanımlanmış olsun.

u_0’ın normunun kestirimini oluşturmak için K_1 ve K_2’nin norm kestirimlerini ayrı ayrı bulduğumuzda aşağıdaki

$$\| K_1 \|_H \leq M(\delta)\left[\|\phi\|_H + \| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)}\right], \tag{3.24}$$

ve

$$\| K_2 \|_H \leq M(\delta)\left[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)}\right] \tag{3.25}$$

kestirimleri elde ederiz.

Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (3.2) ve (3.4) kestirimlerini (3.22)’de uygulayarak,

$$\| K_1 \|_H \leq \| T_\tau \|_{H\to H} \| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} \|_{H\to H} \|(2I+\tau B)R^N\|_{H\to H}$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}\left\|P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\|_{H\to H}\|f_s\|_H+\|\varphi\|_H\right]\leq M(\delta)\left[\|\phi\|_H+\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)}\right]$$

(3.24) kestirimini buluruz.

Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (3.2) ve (3.4) kestirimlerini (3.23)’de uyguladığımızda,

$$\| K_2 \|_H \leq \| T_\tau \|_{H\to H} \| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} \|_{H\to H} \sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|$$

$$\times\left\{\| R^{N-1} \|_{H\to H} \quad \| B^{-1} \|_{H\to H} \sum_{s=1}^{N-1} \tau[\| R^{N-s} \|_{H\to H} + \| R^{N+s} \|_{H\to H}]\| g_s \|_H\right.$$

$$+(\left(1+\|R^{2N}\|_{H\to H}\right) \| B^{-1} \|_{H\to H} \sum_{s=1}^{N-1} \| R^{s-1} \|_{H\to H} \|g_s\|_H\tau$$

$$\left.+\left(1+\|R^{2N}\|_{H\to H}\right)\left(\|B^{-1}\|_{H\to H}+\tau\right)\|P\|_{H\to H}\|f_0\|_H\right\}$$

$$\leq M(\delta)\left[\| f^{\tau} \|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]$$

(3.25) kestirimini buluruz.

Buradan K_1 ve K_2’nin norm kestirimlerini birleştirerek (3.20)’yi elde ederiz.

İkinci olarak, (3.21)’ i elde edelim.

$$u_N = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left[P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0 - \tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} f_s\right] + \varphi = M_1 + M_2, \tag{3.26}$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0,$$

$$M_2 = -\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} f_s + \varphi$$

olarak tanımlansın. Şimdi (3.26)’nın normunun kestirimini oluşturmak için M_1 ve M_2’nin norm kestirimlerini ayrı ayrı bulalım.

Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (2.3) ve (2.19) kestirimlerini kullanarak,

$$\| M_1 \|_H \le \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \| P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \|_{H\to H} \| u_0 \|_H$$

$$\le M(\delta)\left[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)} + \| \varphi \|_H \right]$$

kestirimini elde ederiz.

Şimdi M_2'nin normunu hesaplayacağız. Üçgen eşitsizliğini, (2.2) varsayımını, (3.2) ve (3.20) kestirimlerini ve $C_0^\alpha([-1,0],H)$ uzayının norm tanımını kullanarak,

$$\| M_2 \|_H \le \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \tau \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} \left\| P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \right\|_{H\to H} \| f_s \|_H + \| \varphi \|_H$$

$$\le M(\delta)\left[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \| \varphi \|_H \right]$$

elde ederiz.

Böylece M_1 ve M_2'nin norm kestirimlerini birleştirerek (3.26)'yı elde ederiz. Bu sonuç Teorem 3.1'in ispatını sonuçlandırır.

$[-1,1]$'de tanımlı H-değerli sürekli fonksiyonların $C([0,1],H)$ uzayında lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) sınırlı olmayan genel A pozitif operatörü için iyi konumlanmış değildir ve o zaman (3.1) lokal olmayan sınır değer fark probleminin iyi konumlanmışlığı $C([-1,1]_\tau,H)$ normunda $\tau > 0$' a bağlı olarak düzgün olarak ele alınmaz. Bu da

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(E)} = \| \{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_1^{N-1} \|_{C([0,1]_\tau,H)}$$

$$+ \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_{-N+1}^{0} \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \left\| \{Au_k\}_{-N}^{N-1} \right\|_{C([-1,1]_\tau,H)}$$

koersativ normun $\tau \to 0^{+}$ a gittikçe ∞'a meyletmesi anlamına gelir. (3.1) fark probleminin incelenmesi bu normun büyüme mertebesinin ∞ olarak elde edilmesine imkân verir.

Teorem 3.2. $\varphi \in D(A)$ ve $f_0 \in D(I+\tau B)$ olsun. O zaman (3.1) fark problemi $M(\delta)$ f^{τ}, g^{τ}, φ, ve τ'dan bağımsız olmak üzere

$$\| u^{\tau} \|_{K_{\tau}(E)} \leq M(\delta)[\| A\varphi \|_{H} + \|(I+\tau B)f_0\|_{H}$$

$$+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln \| A\|_{H\to H}\right|\right\}\left[\| f^{\tau} \|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]\Big]$$

hemen hemen koersiv eşitsizliğine sahiptir

İspat. [Sobolevskii, 1977]'yi kullanarak, ters Cauchy fark problemi (3.16)'nın çözümü için,

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_{-N+1}^{0}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \left\|\{Au_k\}_{-N}^{0}\right\|_{C([-1,0]_{\tau},H)} \tag{3.27}$$
$$\leq M(\delta)\left[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln \| A \|_{H\to H}|\right\} \| f^{\tau} \|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \|Au_0\|_{H}\right]$$

ve sınır değer problemi (3.14)'ün çözümü için

$$\|\{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_{1}^{N-1}\|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \left\|\{Au_k\}_{1}^{N-1}\right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} \tag{3.28}$$
$$\leq M(\delta)\left[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln \| A \|_{H\to H}|\right\} \| g^{\tau} \|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \|Au_0\|_{H} + \|Au_N\|_{H}\right]$$

yazılabilir. O zaman, Teorem 3.2'nin ispatı hemen hemen koersiv eşitsizlikleri (3.27), (3.28), ve sınır değer problemi (3.1)'in çözümü için var olan

$$\| Au_0 \|_{H} \leq M(\delta)\left[\| A\varphi\|_{H} + \|(I+\tau B) f_0\|_{H}\right. \tag{3.29}$$
$$\left.+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln \| A \|_{H\to H}|\right\}\left[\| f^{\tau} \|_{C([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]\right],$$

$$\| Au_N \|_{H} \leq M(\delta)\left[\| A\varphi\|_{H} + \|(I+\tau B) f_0\|_{H}\right. \tag{3.30}$$

$$+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+|\ln\|A\|_{H\to H}|\right\}\left[\|f^{\tau}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)}+\|g^{\tau}\|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]\Bigg]$$

eşitsizliklerine dayanır. Şimdi (3.29) ve (3.30) kestirimlerini elde edelim.

Öncelikle, (3.29)'u elde edelim. (3.12) formülünü kullanırsak,

$$Au_0 = AK_1 + AK_2 \tag{3.31}$$

olup, burada

$$AK_1 = T_{\tau}(I+\tau A)\left(I+2\tau A\right)^{-1}\left(2I+\tau B\right)R^N\left[-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}f_s+\varphi\right] \tag{3.32}$$

ve

$$AK_2 = T_{\tau}(I+\tau A)\left(I+2\tau A\right)^{-1} \tag{3.33}$$

$$\times\left\{-R^{N-1}R\sum_{s=1}^{N-1}B\left[R^{N-s}-R^{N+s}\right]g_s\tau+(I-R^{2N})\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}g_s\tau-(I-R^{2N})BPf_0\right\}$$

olarak tanımlanır. (3.31)'in normu için AK_1 ve AK_2'nin normlarının kestirimini ayrı ayrı verelim. Bu amaçla,

$$\|AK_1\|_H\leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\}\|f^{\tau}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)}\right] \tag{3.34}$$

ve

$$\|AK_2\|_H\leq M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\} \tag{3.35}$$

$$\times\left[\|f^{\tau}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)}+\|g^{\tau}\|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. İlk önce [Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994]’ de verilen:

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\} \tag{3.36}$$

kestirimi ele alalım. Bilindiği gibi $N\tau=1$ ve

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{s}\leq M(\delta)\int_{1}^{N}\frac{ds}{s}\leq M(\delta)\ln N$$

olup,

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\ln\frac{1}{\tau} \tag{3.37}$$

kestirimi elde edilir. (3.2) kestirimini kullanarak, buradan da

$$\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\min\left\{\frac{1}{s\tau},\|A\|_{H\to H}\right\}$$

olur. Eğer $\|A\|_{H\to H}\geq N$ ise,

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\sum_{s=1}^{N}\frac{\tau}{s\tau}\leq M(\delta)\int_{1}^{\|A\|_{H\to H}}\frac{ds}{s}\leq M(\delta)\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|$$

’dir. Eğer $\|A\|_{H\to H}\leq 1$ ise, o zaman

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\sum_{s=1}^{N}\|A\|_{H\to H}\leq M(\delta)\|A\|_{H\to H}\leq M(\delta)$$

olur. Son olarak, eğer $1\leq\|A\|_{H\to H}\leq N$ ise,

$$\sum_{s=1}^{N}\|AP^{s}\|_{H\to H}\ \tau \leq M(\delta)\left\{\sum_{s=1}^{\left[N\|A\|_{H\to H}^{-1}\right]}\|A\|_{H\to H}\ \tau+\sum_{s=\left[N\|A\|_{H\to H}^{-1}\right]+1}^{N}\frac{\tau}{s\tau}\right\}$$

$$\leq M(\delta)\left(1+\int_{\|A\|_{H\to H}^{-1}}^{1}\frac{ds}{s}\right)\leq M(\delta)(1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|)$$

'dir. Dolayısıyla, üç durumda da

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|AP^{s}\right\|_{H\to H}\tau\leq M(\delta)(1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|) \tag{3.38}$$

kestirimi vardır.

(3.37) ve (3.38) kestirimlerinden (ve homojen fark probleminin üniform iyi konumlanmışlığından) (3.36) kestirimini elde ederiz.

Benzer şekilde, B pozitif tanımlı self- adjoint operatörü için

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|BP^{s}\right\|_{H\to H}\tau\leq M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\} \tag{3.39}$$

olduğunu gösterebiliriz. (3.32) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (2.2) kabulünü ve (3.2), (3.4), ve (3.36) kestirimlerini kullanarak, (3.34) kestirimini elde ederiz.

$$\|AK_1\|_H\leq\|T_\tau\|_{H\to H}\|(I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1}\|_{H\to H}\|(2I+\tau B)R^N\|_{H\to H}$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}\left\|AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\|_{H\to H}\|f_s\|_H+\|A\varphi\|_H\right]$$

$$\leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+|\ln\|A\|_{H\to H}|\right\}\|f^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}\right].$$

(3.35) kestirimini elde etmek için,

$$\sum_{s=1}^{N}\left\|BP^{s}\right\|_{H\to H}\tau\leq M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\} \tag{3.40}$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekmektedir. $A = B^2 R$ olduğunu biliyoruz. Buradan, $B = (I+\tau B)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = (I+\tau B)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-1}{2}} A$ elde ederiz. O zaman, üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\| B \|_{H\to H} \leq \| (I+\tau B)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-1}{2}} \|_{H\to H} \ \| A \|_{H\to H}$$

ve

$$\| (I+\tau B)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-1}{2}} \|_{H\to H} \leq \| (1+\frac{\tau^2}{2}A+\frac{\tau}{2}\sqrt{A(4+\tau^2 A)})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-1}{2}} \|_{H\to H}$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{\tau^2}{2}\lambda+\frac{\tau}{2}\sqrt{\lambda(4+\tau^2\lambda)}}}{\sqrt{\lambda}} \leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty} \sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau}{2}\sqrt{(\frac{4}{\lambda}+\tau^2)}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{\delta}+\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau}{2}\sqrt{(\frac{4}{\delta}+\tau^2)}} = M(\delta)$$

elde edilir. Dolayısıyla, bu iki kestirimi birleştirerek

$$\| B \|_{H\to H} \leq M(\delta) \| A \|_{H\to H} \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.39) ve (3.41) kestirimlerinden, (3.40) kestirimi elde edilir.

(3.35)'in kestirimi, (3.33) formülünden, üçgen eşitsizliğinden, (2.2) varsayımdan ve (3.2), (3.4), ve (3.40) kestirimlerinden

$$\| AK_2 \|_H \leq \| T_\tau \|_{H\to H} \ \| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} \|_{H\to H} \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i|$$

$$\times \Big\{ \| R^N \|_{H\to H} \sum_{s=1}^{N-1} \tau [\| BR^{N-s+1} \|_{H\to H} + \| BR^{N+s+1} \|_{H\to H}] \| g_s \|_H$$

$$+\{1+\| R^{2N} \|_{H\to H}\}\sum_{s=1}^{N-1} \| BR^{s} \|_{H\to H} \| g_s \|_{H}\tau$$

$$+(1+\|R^{2N}\|_{H\to H})\|BR\|_{H\to H}\|P\|_{H\to H}\|f_0\|_{H}\Big\}$$

$$\leq M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\}\left[\|f^{\tau}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)}+\|g^{\tau}\|_{C([0,1]_{\tau},H)}\right]$$

olarak çıkartılır. Dolayısıyla AK_1 ve AK_2 normları için elde edilen kestirimlerden, (3.29) olur.

İkinci olarak, (3.30)'u elde edelim.

$$AM_1=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i AP^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0,$$
$$AM_2=-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}f_s+\varphi$$

olmak üzere,

$$Au_N=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left[AP^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0-\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}f_s\right]+A\varphi=AM_1+AM_2 \qquad (3.42)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi, (3.42) için kestirim AM_1 ve AM_2'nin normunun kestirimini ayrı ayrı inceleyerek elde edilir. Üçgen eşitsizliğini, (2.2) kabulünü, (3.2) kestirimini ve (3.29)'u kullanarak,

$$\| AM_1 \|_H \leq \sum_{i=1}^{J}|\alpha_i| \| P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \|_{H\to H} \| Au_0 \|_H \leq \| Au_0 \|_H$$

$$\leq M(\delta)\left[\|f^{\tau}\|_{C([-1,0]_{\tau},H)}+\|g^{\tau}\|_{C([0,1]_{\tau},H)}+\|A\varphi\|_{H}\right]$$

elde edilir. Şimdi AM_2 normunun kestirimini yapalım. Üçgen eşitsizliği, (2.2) kabulü, (3.2) kestirimi ve $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)$ uzaylarında normun tanımını kullanırsak,

$$\| AM_2 \|_H \leq \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \tau \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} \left\| AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \right\|_{H\to H} \| f_s \|_H + \| A\varphi \|_H$$

$$\leq M(\delta)\left[\min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln \| A \|_{H\to H}\right| \right\} \| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau, H)} + \| A\varphi \|_H \right]$$

olur. Dolayısıyla AM_1 ve AM_2 normları için verilen kestirimleri birleştirilerek (3.42) elde edilir. Bu da Teorem 3.2'nin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3. Teorem 3.2'nin kabulleri sağlansın. O zaman (3.1) sınır değer problemi $C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_\tau, H)$ Hölder uzayında iyi konumlanmıştır ve $M(\delta)$ f^τ, g^τ, φ, ve τ'dan bağımsız olmak üzere

$$\| \{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_1^{N-1} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)} + \left\| \{Au_k\}_{-N}^{N-1} \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_\tau, H)}$$

$$+ \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_{-N+1}^{0} \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)} \leq M(\delta)[\| A\varphi \|_H + \| (I+\tau B) f_0 \|_H]$$

$$+\frac{M(\delta}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f^\tau \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)} + \| g^\tau \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)} \right]$$

koersiv eşitsizliği sağlanır.

İspat. [Sobolevskii,1977] ile ters Cauchy fark problemi (3.16)'nın çözümü için

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_{-N+1}^{0} \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)} + \left\| \{Au_k\}_{-N}^{0} \right\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)} \tag{3.43}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\| f^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)} + \|Au_0\|_H\right]$$

ve sınır değer problemi (3.14)'ün çözümü için,

$$\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)} + \left\|\{Au_k\}_1^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)} \tag{3.44}$$

$$\leq \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| g^{\tau} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)} + \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H\right]$$

olur. O zaman Teorem 3.3'ün ispatı (3.43), (3.44) koersiv eşitsizliklerine ve sınır değer problemi (3.1)'in çözümünün

$$\|Au_0\|_H \leq M(\delta)\Big[\|A\varphi\|_H + \|(I+\tau B)f_0\|_H \tag{3.45}$$

$$+\| f^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}\Big],$$

$$\|Au_N\|_H \leq M(\delta)\Big[\|A\phi\|_H + \|(I+\tau B)f_0\|_H \tag{3.46}$$

$$+\frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)} + \| g^{\tau} \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}\right]\Big]$$

kestirimlerine dayanır. Şimdi, (3.19) ve (3.20) kestirimlerini elde edelim.

(3.10), (3.11) ve (3.12)'yi uygularsak,

$$Au_0 = T_{\tau}\left(I+2\tau A\right)^{-1}(I+\tau A) \tag{3.47}$$

$$\times\left\{(2I+\tau B)R^N \times \left[-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}(f_s - f_{-N+1}) + A\varphi\right]\right.$$

$$-R^{N-1}AB^{-2}\sum_{s=1}^{N-1}BR^{N-s}(g_s-g_{N-1})\tau$$

$$-R^{N-1}AB^{-2}\sum_{s=1}^{N-1}BR^{N+s}(g_1-g_s)\tau$$

$$+(I-R^{2N})AB^{-2}\sum_{s=1}^{N-1}BR^{s-1}(g_s-g_1)\tau\Bigg\}$$

$$+T_\tau(I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\Bigg\{\Bigg\{(2+\tau B)R^N\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\tau\Big(P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}-I\Big)f_{-N+1}$$

$$-R^{N-1}AB^{-2}\{(I-R^{N-1})\tau g_{N-1}-(R^{N-2}-R^{2N-1})\tau g_1\}\}$$

$$+(I-R^{2N})AB^{-2}(I-R^{N-1})\tau g_1-(I-R^{2N})(I+\tau B)B^{-1}APf_0\}$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+J_7+J_8+J_9$$

olur. Burada,

$$J_1 = T_\tau(I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\Bigg\{(2I+\tau B)R^N\sum_{i=1}^{J}\alpha_i$$

$$\times-\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\Big(f_s-f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\Big)\Bigg\},$$

$$J_2 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\left\{(2I+\tau B)R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i A\varphi\right\},$$

$$J_3 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\left\{-R^{N-1}AB^{-2}\sum_{s=1}^{N-1} BR^{N-s}(g_s - g_{N-1})\tau\right\},$$

$$J_4 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\left\{-R^{N-1}AB^{-2}\sum_{s=1}^{N-1} BR^{N+s}(g_1 - g_s)\tau\right\},$$

$$J_5 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\left\{(I-R^{2N})AB^{-2}\sum_{s=1}^{N-1} BR^{s-1}(g_s - g_1)\tau\right\},$$

$$J_6 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\left\{(2+\tau B)R^N \sum_{i=1}^{J} \alpha_i \tau\left(P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} - I\right) f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\},$$

$$J_7 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)\{-R^{N-1}AB^{-2}(I-R^{N-1})\tau g_{N-1}\},$$

$$J_8 = T_\tau (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)AB^{-2}$$

$$\times \{R^{N-1}(R^{N-2} - R^{2N-1}) + (I-R^{2N})(I-R^{N-1})\}\tau g_1,$$

$$J_9 = T_\tau \left(I+2\tau A\right)^{-1}(I+\tau A)\left\{-(I-R^{2N})\left(I+\tau B\right)B^{-1}APf_0\right\}$$

olarak tanımlanır.

$$Au_N = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} Au_0 - \sum_{i=1}^{J} \alpha_i \tau \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\left(f_s - f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right) \tag{3.48}$$

$$-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left(I-P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right)f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+A\varphi = X_1+X_2+X_3,$$

olup, burada ise

$$X_1 = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}Au_0,$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^{J}\alpha_i \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}\tau A P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\left(f_s-f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right),$$

$$X_3=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left(P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}-I\right)f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+A\varphi$$

olarak tanımlanır. İlk önce, (3.45)'i elde edelim. $k=1,2,\cdots,9$ için J_k'nin normlarının kestirimlerini ayrı ayrı elde ederek, (3.47) için kestirimi gösterelim.

Üçgen eşitsizliğinden, (2.2) kabulünden, $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)$ uzayında normun tanımından ve (3.2) ve (3.4) kestirimlerinden,

$$\|J_1\|_H \le \| T_\tau \|_{H\to H} \;\| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} \|_{H\to H} \;\| A(2I+\tau B)R^N \|_{H\to H}$$

$$\times\sum_{i=1}^{J}|\alpha_i|\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}\| P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\|_{H\to H}\left\|f_s-f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\|_H \le M_1(\delta)\left\|f^\tau\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}$$

olur. Şimdi J_2 normunun kestirimini verelim. Üçgen eşitsizliği, (2.2) varsayım koşulu ve (3.2) ve (3.4) kestirimlerinden,

$$\|J_2\|_H \le \| T_\tau \|_{H\to H} \;\| (I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A) \|_{H\to H}$$

$$\times \| \left(2I+\tau B\right) R^{N} \|_{H\to H} \sum_{i=1}^{J} \left|\alpha_i\right| \| A\phi \|_{H} \le M_2(\delta) \| A\varphi \|_{H}$$

elde edilir. Şimdi J_3'ün normunun kestirimine bakalım. Üçgen eşitsizliği, (3.2) ve (3.5) kestirimleri ve $C_0^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında normun tanımından,

$$\| J_3 \|_H \le \| BPRT_\tau \|_{H\to H} \| (I+\tau A)R^{N-1} \|_{H\to H}$$

$$\times \sum_{s=1}^{N-1} \tau \| R^{N-s} \|_{H\to H} \left\| g_s - g_{N-1} \right\|_H \le M_3(\delta) \left\| g^\tau \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\| J_4 \|_H \le \| BPRT_\tau \|_{H\to H} \| (I+\tau A)R^{N-1} \|_{H\to H}$$

$$\times \sum_{s=1}^{N-1} \tau \left\| R^{N+s} \right\|_{H\to H} \left\| g_1 - g_s \right\|_H \le M_4(\delta) \left\| g^\tau \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi J_5'in normunun kestirimini incelersek, üçgen eşitsizliği, (3.2) ve (3.4) ve $C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında normun tanımından,

$$\| J_5 \|_H \le \| BPRT_\tau \|_{H\to H} \| (I+\tau A)(I-R^{2N})R^{N-2} \|_{H\to H}$$

$$\times \sum_{s=1}^{N-1} \tau \| R^{s-1} \|_{H\to H} \left\| g_s - g_1 \right\|_H \le M_5(\delta) \left\| g^\tau \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}$$

eşitsizliği çıkartılır. Üçgen eşitsizliği, (2.2) kabulü, $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau, H)$ uzayında normun tanımı, (3.2) ve (3.5)'i kullanarak,

$$\| J_6 \|_H \le \| T_\tau \|_{H\to H} \| (I+\tau A)(2+\tau B)(I+2\tau A)^{-1} R^{N} \|_{H\to H}$$

$$\times\sum_{i=1}^{J}\left|\alpha_i\right| \| \left(P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}-I\right)\|_{H\to H}\left\|f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\|_H \le M_6(\delta)\left\|f^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği, $C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)$ uzayında normun tanımı, (3.2) ve (3.4)'ten

$$\|J_7\|_H \le \| T_\tau \|_{H\to H} \quad \| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} \|_{H\to H}$$

$$\times \| R^N \|_{H\to H} (1+\| R^{N-1} \|_{H\to H}))\|g_{N-1}\|_H$$

$$\le M_7(\delta)\max_{0\le k\le N}\left\|g_k\right\|_H \le M_7(\delta)\left\|g^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}$$

olur. Benzer tarzda,

$$\|J_8\|_H \le \| T_\tau \|_{H\to H} \left\|(I+2\tau A)^{-1}(I+\tau A)R\right\|_{H\to H}$$

$$\times \| R^{2N-3} \|_{H\to H} (1+\| R^{N+1} \|_{H\to H})$$

$$+ (1+\| R^{2N} \|_{H\to H})(1+\| R^{N-1} \|_{H\to H})\|g_1\|_H$$

$$\le M_8(\delta)\max_{0\le k\le N}\left\|g_k\right\|_H \le M_8(\delta)\left\|g^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}$$

olduğunu gösterebiliriz. Son olarak, üçgen eşitsizliği, (3.2) ve (3.5) kestirimi, $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)$ uzayında normun tanımından

$$\|J_9\|_H \le \| BPRT_\tau \|_{H\to H} \quad \| (I+\tau A)(I+2\tau A)^{-1} \|_{H\to H}$$

$$\times (1+\| R^{2N} \|_{H\to H})(1+\tau \| B \|_{H\to H})\|f(0)\|_H$$

$$\le M_9(\delta)\max_{-1\le t\le 0}\left\| f(t)\right\|_H \le M_9(\delta)\left\| f^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)}$$

eşitsizlikleri çıkartılır. Dolayısıyla, $J_k, \quad k=1,2,\cdots,9,$ için elde edilen kestirimleri birleştirerek, (3.45) elde edilir.

İkinci olarak, (3.46) elde edelim. Şimdi X_1, X_2 ve X_3'ün normlarını ayrı ayrı elde ederek, (3.48)'in normunun kestirimini verelim.

Üçgen eşitsizliği, (2.2) kabulü ve (3.4), (3.45) kestirimlerinden,

$$\|X_1\|_H \le \sum_{i=1}^{J}|\alpha_i| \;\| P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \|_{H\to H} \;\|Au_0\|_H \le \|Au_0\|_H$$

$$\le M_1(\delta)\left[\left\|g^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1],H)}+\left\| f^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)}+\left\|A\varphi\right\|_H\right]$$

olur. Şimdi, X_2'nin normunun kestirimini verelim. Üçgen eşitsizliği, (2.2) kabulü ve (3.4) kestiriminden,

$$\|X_2\|_H \le \sum_{i=1}^{J}|\alpha_i| \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} \| AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \|_{H\to H} \left\| f_s - f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\|_H$$

$$\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}\frac{\tau}{((s-[\frac{\lambda_i}{\tau}])\tau)^{1-\alpha}(-s)^{\alpha}}\left\| f^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)} \le \frac{M_2(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left\| f^{\tau}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)}$$

elde edilir. Son olarak, üçgen eşitsizliği, (2.2) kabulü, (2.3) kestirimi ve $C_{0,1}^{\alpha}([-1,0]_{\tau},H)$ uzayında normun tanımından,

$$\left\|X_3\right\|_H \le \sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_i\right| \| P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} - I \|_{H\to H} \left\| f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right\|_H + \left\|A\varphi\right\|_H$$

$$\le M_3(\delta) \max_{-N+1\le k\le 0} \left\| f_k \right\|_H + \| A\varphi \|_H \le M_3(\delta) \left\| f^\tau \right\|_{C^\alpha_{0,1}([-1,0]_\tau, H)} + \| A\varphi \|_H$$

olur. Dolayısıyla X_1, X_2 ve X_3 normları için kestirimleri birleştirilerek (3.46) elde edilir. Bu da Teorem 3.3'ün ispatını tamamlar.

3.2. Uygulamalar

İlk olarak, çok boyutlu eliptik-parabolik denklem için, (2.24) lokal olmayan sınır değer problemi ele alınacaktır. Burada (2.24) probleminin diskritizasyonu iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$\widehat{\Omega}_h = \{ x = x_m = (h_1 m_1, \cdots, h_n m_n), m = (m_1, \cdots, m_n),$$

$$0 \le m_r \le N_r,\ h_r N_r = 1,\ r = 1, \cdots, n \},$$

$$\Omega_h = \widehat{\Omega}_h \cap \Omega,\ S_h = \widehat{\Omega}_h \cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Daha sonra da, (2.24) problemi tarafından oluşturulan A diferensiyel operatörü yerine

$$A_h^x u_x^h = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x) u^h_{\bar{x}_r} \right)_{x_r, m_r} \tag{3.49}$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada A_h^x fark operatörünün yardımıyla (2.24) lokal olmayan sınır değer problemi

$$
\begin{cases}
-\frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2} + A_h^x u^h(t,x) = g^h(t,x), \ 0 < t < 1, \ x \in \Omega_h, \\
\frac{du^h(t,x)}{dt} - A_h^x u^h(t,x) = f^h(t,x), -1 < t < 0, \ x \in \Omega_h, \\
u^h(1,x) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u^h(\lambda_i, x) + \varphi^h(x), \ \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1, x \in \widehat{\Omega}_h, \\
u^h(0+,x) = u^h(0-,x), \frac{du^h(0+,x)}{dt} = \frac{du^h(0-,x)}{dt}, x \in \widehat{\Omega}_h
\end{cases}
\tag{3.50}
$$

adi diferensiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (3.50) problemi için (3.1) fark şeması kullanılarak,

$$
\begin{cases}
-\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = g_k^h(x), \\
g_k^h(x) = g^h(t_k, x), t_k = k\tau, \ 1 \le k \le N-1, \ N\tau = 1, \ x \in \Omega_h, \\
\frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - A_h^x u_{k-1}^h(x) = f_k^h(x), \\
f_k^h(x) = f^h(t_k, x), t_{k-1} = (k-1)\tau, \ -N+1 \le k \le -1, \ x \in \Omega_h, \\
u_N^h(x) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}^h(x) + \varphi^h(x), \ x \in \widehat{\Omega}_h, \\
u_1^h(x) - u_0^h(x) = u_0^h(x) - u_{-1}^h(x), \ x \in \widehat{\Omega}_h.
\end{cases}
\tag{3.51}
$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şemasını [Sobolevskii, 1977] elde ederiz.

Sonuçlarımızı formüle edebilmek için, $L_{2h} = L_2(\widehat{\Omega}_h), W_{2h}^1 = W_2^1(\widehat{\Omega}_h), W_{2h}^2 = W_2^2(\widehat{\Omega}_h)$ uzaylarını tanıtalım. Bu uzaylar sırasıyla, $\widehat{\Omega}_h$ 'da tanımlı

$$
\|\varphi^h\|_{L_2(\widehat{\Omega}_h)} = \left(\sum_{x \in \widehat{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2},
$$

$$\left\|\phi^h\right\|_{W_{2h}^1}=\left\|\phi^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{n}\left|(\phi^h)_{x_r}\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2}$$

ve

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}=\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{n}\left|(\varphi^h)_{x_r}\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2}+\left(\sum_{x\in\widehat{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{n}\left|(\varphi^h)_{x_r\,\bar{x}_r,\;m_r}\right|^2 h_1\cdots h_n\right)^{1/2}$$

normlarına sahip $\varphi^h(x)=\{\varphi(h_1m_1,\cdots,h_nm_n)\}$ ağ fonksiyonlarının uzaylarıdır.

Teorem 3.4. Eğer τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$ yeterince küçük pozitif sayılar ise, bu durumda (3.51) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1}\right\|_{C([-1,1]_\tau,L_{2h})}$$

$$\leq M(\delta)\left[\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\|\left\{g_k^h\right\}_1^{N-1}\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}+\|\varphi^h\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}$$

$$+\|\left\{\tau^{-1}(u_k^h-u_{k-1}^h)\right\}_{-N+1}^{0}\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1}\right\|_{C([-1,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\tau\left\|f_0^h\right\|_{W_{2h}^1}+\ln\frac{1}{\tau+|h|}\left[\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\|\left\{g_k^h\right\}_1^{N-1}\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]\right]$$

kararlılık ve hemen hemen koersiv kestirimleri sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $\tau,h,\ f_k^h(x),-N+1\leq k\leq 0$, $g_k^h(x),1\leq k\leq N-1$ ve $\varphi^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.4'ün ispatı, soyut Teorem 3.1,Teorem 3.2, (3.49) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine, aşağıdaki L_{2h} uzayındaki eliptik fark probleminin çözümü için koersiv eşitsizliği elde edilen teoreme ve

$$\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|A_h^x\|_{L_{2h}\to L_{2h}}\right|\right\}\le M\ln\frac{1}{\tau+|h|} \tag{3.52}$$

kestirime dayanmaktadır.

Teorem 3.5. Eliptik fark probleminin

$$A_h^x u^h(x)=\omega^h(x), x\in\Omega_h, \tag{3.53}$$

$$u^h(x) = 0, x \in S_h$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(u^h\right)_{\bar{x}_r x_r, m_r}\right\|_{L_{2h}} \le M\|\omega^h\|_{L_{2h}}$$

koersiv eşitsizliği sağlanır [Sobolevskii, 1975].

Teorem 3.6. Eğer τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar ise, bu durumda (3.51) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\|\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\}_1^{N-1}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}$$

$$+\|\{\tau^{-1}(u_k^h - u_{k-1}^h)\}_{-N+1}^{0}\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,L_{2h})} + \left\|\left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$

$$\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\tau\left\|f_0^h\right\|_{W_{2h}^1}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,L_{2h})}+\|\left\{g_k^h\right\}_1^{N-1}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]\right]$$

koersiv kararlılık kestirimi sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $\tau,h,f_k^h(x),-N+1\le k\le 0$

$g_k^h(x), 1 \leq k \leq N-1$ ve $\varphi^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.6'nın ispatı, soyut Teorem 3.3, (3.49) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayındaki (3.53) eliptik fark probleminin çözümü için koersiv eşitsizliğine ve Teorem 3.5'e dayanmaktadır.

Sınır değer problemi (2.23)'ün yaklaşık çözümleri için bir değişkene bağlı olarak birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları aynı şekilde oluşturulabilinir. Yukarıda verilen soyut teoremleri fark şemaları çözümleri için kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimlerini elde etmemize izin verir.

4. İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

4.1. Fark Şeması

Bu bölümde, (2.2) varsayım koşulu altında (2.1) sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için Crank-Nicholson fark şeması kullanılarak

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k=g_k, \\ g_k=g\left(t_k\right),\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1, N\tau=1, \\ \tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-\frac{1}{2}\left(Au_{k-1}+Au_k\right)=f_k, \quad f_k=f(t_{k-\frac{1}{2}}), \\ t_{k-\frac{1}{2}}=(k-\frac{1}{2})\tau,\ -\left(N-1\right)\le k\le 0, \\ u_N=\sum_{k=1}^{J}\alpha_i\left(u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)\left(f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+Au_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right)\right)+\varphi, \\ u_2-4u_1+3u_0=-3u_0+4u_{-1}-u_{-2} \end{cases} \tag{4.1}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasını elde edilmiştir.

Fark şeması (4.1)' in Hölder uzaylarında iyi konumlanmışlığı sağlanmıştır. Bir uygulama olarak, eliptik- parabolik denklemlerin fark şemalarının çözümü için koersiv eşitsizlikleri elde edilir.

Aşağıdaki operatörler

$$P=(I-\frac{\tau A}{2})G, G=(I+\frac{\tau A}{2})^{-1}, R=(I+\tau B)^{-1},$$

ve

$$T_\tau=\left(I+B^{-1}A(I+\tau A+\frac{\tau}{2}G^{-2})K(I-R^{2N-1})\right.$$

$$+K(I-\frac{\tau^2 A}{2})G^{-2}R^{2N-1}-K(I-\frac{\tau^2 A}{2})G^{-2}(2I+\tau B)$$

$$(2I+\tau B)R^N\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right]\Bigg)^{-1}$$

vardır ve self-adjoint pozitif operatör A için sınırlıdır. Burada

$$B=\frac{1}{2}(\tau A+\sqrt{A(4+\tau^2 A)})\text{ ve }K=\left(I+2\tau A+\frac{5}{4}(\tau A)^2\right)^{-1}$$

olarak tanımlanmışlardır.

Öncelikle bu bölümde gerek duyulacak yardımcı teoremleri verelim**.**

Yardımcı Teorem 4.1. Herhangi bir $g_k, 1\le k\le N-1$ ve $f_k, -N+1\le k\le 0$ tanımlanmış fonksiyonlar için problem (4.1)'in çözümü vardır ve aşağıdaki formüller sağlanır:

$$u_k=(I-R^{2N})^{-1}\Big\{\left[R^k-R^{2N-k}\right]u_0+\left[R^{N-k}-R^{N+k}\right] \tag{4.2}$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big[\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)\right.$$

$$\left.\times\left(P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0-\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}Gf_s\right)+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\Big]+\varphi\right]$$

$$-[R^{N-k}-R^{N+k}](I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s}-R^{N+s}]g_s\tau\Big\}$$

$$+ (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{|k-s|}-R^{k+s}]g_s\tau \text{ }, 1\le k\le N,$$

$$u_k = P^{-k}u_0 - \tau\sum_{s=k+1}^{0}P^{s-k-1}Gf_s, -N\le k\le -1, \tag{4.3}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}T_\tau KG^{-2}\times\left\{\left(2I-\tau^2A\right)\left\{\left(2+\tau B\right)R^N\right.\right. \tag{4.4}$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(-\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}Gf_s\right)+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right]+\varphi\right]$$

$$\left.-R^{N-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s}-R^{N+s}]g_s\tau+(I-R^{2N})B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}g_s\tau\right\}$$

$$\left.+(I-R^{2N})(I+\tau B)(\tau B^{-1}g_1-4GB^{-1}f_0+PGB^{-1}f_0+GB^{-1}f_{-1})\right\},$$

$$T_\tau = \left(I+B^{-1}A(I+\tau A+\frac{\tau}{2}G^{-2})K(I-R^{2N-1})\right.$$

$$+K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}R^{2N-1}-K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}(2I+\tau B)$$

$$\left.(2I+\tau B)R^N\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}u_0\right]\right)^{-1}.$$

İspat. Herhangi bir $\{f_k\}_{k=-N}^{-1}$ ve ξ için temel ters Cauchy fark problemi çözümü

$$\begin{cases} \tau^{-1}\left(u_k - u_{k-1}\right) - \tfrac{1}{2}\left(Au_{k-1} + Au_k\right) = f_k, \\ -\left(N-1\right) \le k \le 0,\ u_0 = \xi \end{cases} \tag{4.5}$$

vardır ve aşağıdaki formül kullanılır [Sobolevskii, 1974] :

$$u_k = P^{-k}\xi - \tau \sum_{s=k+1}^{0} P^{s-k-1} G f_s, -N \le k \le -1 \tag{4.6}$$

$\xi = u_0$ yerleştirerek elde ederiz.

Şimdi, aşağıdaki temel fark problemini ele alabiliriz

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\right) + Au_k = g_k, \\ g_k = g\left(t_k\right),\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1, \\ u_0 = \xi,\ u_N = \psi. \end{cases} \tag{4.7}$$

(4.7)'nin çözümü için [Sobolevskii, 1977] aşağıdaki formülün kullanıldığı iyi bilinir.

$$u_k = (I - R^{2N})^{-1}\Big\{\left[R^k - R^{2N-k}\right]\xi + \left[R^{N-k} - R^{N+k}\right]\psi \tag{4.8}$$

$$-[R^{N-k} - R^{N+k}](I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} [R^{N-s} - R^{N+s}] g_s \tau \Big\}$$

$$+(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} \left[R^{|k-s|} - R^{k+s}\right] g_s \tau\ , 1 \le k \le N$$

olur. (4.6)'yı uygulayarak ve $\xi = u_0$,

$$\psi = \sum_{k=1}^{J} \alpha_i \left(u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + \left(\lambda_i - [\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau \right) \left(f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + Au_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} \right) \right) + \varphi$$

formüllerini (4.8)'ye yerleştirerek , (4.2)'yi elde ederiz.

u_0 için (4.2), (4.3) ve

$$u_2 - 4u_1 + 3u_0 = -3u_0 + 4u_{-1} - u_{-2},$$

koşulunu kullanarak operatör denklemini elde ederiz.

$$(2I - \tau^2 A)\{(I - R^{2N})^{-1}\{[R - R^{2N-1}]u_0 + [R^{N-1} - R^{N+1}]$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(I + \left(\lambda_i - [\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau \right) A \right) \left(P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} u_0 - \tau \sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0} P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]} f_s \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda_i - [\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau \right) f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + \varphi \right]$$

$$\left. -[R^{N-1} - R^{N+1}](I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} [R^{N-s} - R^{N+s}] g_s \tau \right\}$$

$$\left. +(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} [R^{s-1} - R^{1+s}] g_s \tau \right\}$$

$$= -\tau^2 g_1 + G^2 (2I + 4\tau A + \frac{5}{2}(\tau A)^2) u_0 + 4G\tau f_0 - PG\tau f_0 - G\tau f_{-1}.$$

Operatör

$$I+B^{-1}A(I+\tau A+\frac{\tau}{2}G^{-2})K(I-R^{2N-1})$$

$$+K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}R^{2N-1}-K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}(2I+\tau B)$$

$$(2I+\tau B)R^N\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(I+\Big(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\Big)A\Big)P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right]$$

bir ters

$$T_\tau=\Big(I+B^{-1}A(I+\tau A+\frac{\tau}{2}G^{-2})K(I-R^{2N-1})$$

$$+K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}R^{2N-1}-K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}(2I+\tau B)$$

$$(2I+\tau B)R^N\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right]\Bigg)^{-1}$$

operatöre sahiptir.

Böylece

$$u_0=\frac{1}{2}T_\tau KG^{-2}\times\{(2I-\tau^2A)\{(2+\tau B)R^N$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big[\Big(I+\Big(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\Big)A\Big)\right.$$

$$\left.\times\left(-\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}P^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}Gf_s\right)+\Big(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\Big)f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right]+\varphi\Bigg]$$

$$-R^{N-1}B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}[R^{N-s}-R^{N+s}]g_s\tau+(I-R^{2N})B^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}g_s\tau\Bigg\}$$

$$+(I-R^{2N})(I+\tau B)\left(\tau B^{-1}g_1-4GB^{-1}f_0+PGB^{-1}f_0+GB^{-1}f_{-1}\right)\Big\}$$

elde ederiz.

Bu sonuç yardımcı Teorem 4.1'in ispatını sonuçlandırır.

Bu bölümde , (4.1)'in iyi konumlanmışlığını çalışıyoruz. Öncelikle P^k, R^k ve T_τ için gerekli bazı kestirimleri verelim.

Yardımcı Teorem 4.2. Aşağıdaki [Sobolevskii, 1974], [Sobolevskii, 1977] ve [Ashyralyev ve Sobolevskii, 1982]:

$$\begin{cases} \| P^k \|_{H\to H} \le 1,\ k\tau \| AP^kG^2 \|_{H\to H} \le M(\delta)\ , \\ \| G \|_{H\to H} \le 1,\ \left\| P^k - e^{-k\tau A} \right\|_{H\to H} \le \frac{M(\delta)\tau}{k\tau},\ k\ge 1, \delta>0, \\ \| R^k \|_{H\to H} \le M(\delta)(1+\delta\tau)^{-k},\ k\tau \| BR^k \|_{H\to H} \le M(\delta), \\ \| (I-R^{2N})^{-1} \|_{H\to H} \le M(\delta),\ \left\| R^k - e^{-k\tau A^{\frac{1}{2}}} \right\|_{H\to H} \le \frac{M(\delta)\tau}{k\tau},\ k\ge 1,\ \delta>0 \end{cases} \tag{4.9}$$

kestirimleri bazı $M(\delta)\ge 0$ için sağlanır.

Buradan aşağıdaki kestirim

$$\Bigg\|\Bigg(I+B^{-1}A(I+\tau A+\frac{\tau}{2}G^{-2})K\left(I-R^{2N-1}\right) \tag{4.10}$$

$$+K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}R^{2N-1}-K(I-\frac{\tau^2A}{2})G^{-2}(2I+\tau B)R^NP^N)^{-1}$$

$$(2I+\tau B)R^N\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)P^{-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right]\Bigg)^{-1}\Bigg\|_{H\to H}\leq M(\delta)$$

elde edilir.

Teorem 4.1. Lokal olmayan (4.1) sınır değer problemi $C([-1,1]_\tau,H)$ normunda kararlıdır.

İspat. [Sobolevskii, 1977] ile sınır değer problemi (4.1)'in çözümü için

$$\left\|\{u_k\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}\leq M\left[\|g^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|u_0\|_H+\|u_N\|_H\right] \tag{4.11}$$

olup, [Sobolevskii, 1974] ile

$$\left\|\{u_k\}_{-N}^{0}\right\|_{C([-1,0]_\tau,H)}\leq M\left[\|f^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}+\|u_0\|_H\right] \tag{4.12}$$

elde ederiz O zaman Teorem 4.1'in ispatı, (4.11), (4.12) kararlıklı eşitsizliklerine sınır değer problemi (4.1) çözümü için

$$\|u_0\|_H\leq M(\delta)\left[\|f^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}+\|g^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H\right], \tag{4.13}$$

$$\|u_N\|_H\leq M(\delta)\left[\|f^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}+\|g^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H\right] \tag{4.14}$$

kestirimlerine dayanmaktadır.

Teorem 4.2. $\varphi\in D(A)$ ve $f_0,\ f_{-1},\ g_1\in D(I+\tau B)$ olsun. O zaman (4.1) fark problemi $M(\delta)$ $f^\tau,\ g^\tau,\ \varphi$ ve τ 'dan bağımsız olmak üzere

$$\|\ \{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\ \|_{C([0,1]_\tau,H)}$$

$$+\|\ \{\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\}_{-N+1}^{0}\ \|_{C([-1,0]_\tau,H)}$$

$$+\left\| \{Au_k\}_1^{N-1} \right\|_{C([0,1]_\tau,H)} + \left\| \left\{ \frac{1}{2}(Au_k + Au_{k-1}) \right\}_{-N+1}^{0} \right\|_{C([-1,0]_\tau,H)}$$

$$\leq M(\delta)\Big[\min\Big\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln\| A \|_{H\to H}|\Big\}\big[\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \| g^\tau \|_{C([0,1]_\tau,H)}\big]$$

$$+\| A\varphi\|_H + \|(I+\tau B) f_0\|_H + \|(I+\tau B) g_1\|_H + \|(I+\tau B) f_{-1}\|_H\Big]$$

hemen hemen koersiv eşitsizliğine sahiptir.

İyi konumlanmışlık $C_{0,1}^{\alpha}([-1,1]_\tau, H)$ 'de elde edilebilir.

İspat. [Ashyralyev ve Sobolevskii, 1981] ile ters Cauchy fark problemi (4.5) çözümü için

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_{-N+1}^{0} \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + + \left\| \left\{ \frac{1}{2}(Au_k + Au_{k-1}) \right\}_{-N+1}^{0} \right\|_{C([-1,0]_\tau,H)} \tag{4.15}$$

$$\leq M(\delta)\Big[\min\Big\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln\| A \|_{H\to H}|\Big\}\| f^\tau \|_{C([-1,0]_\tau,H)} + \|Au_0\|_H\Big]$$

eşitsizliğine sahibiz.

[Sobolevskii, 1977] ile sınır değer problemi (4.7) çözümü için

$$\| \{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_1^{N-1} \|_{C([0,1]_\tau,H)} + \left\| \{Au_k\}_1^{N-1} \right\|_{C([0,1]_\tau,H)} \tag{4.16}$$

elde ederiz.

O zaman, Teorem 4.2'nin hemen hemen koersiv eşitsizlikleri (4.15), (4.16) ve sınır değer problemi (4.1) çözümü için

$$\| Au_0 \|_H \leq M(\delta)\big[\| A\varphi\|_H + \|(I+\tau B) f_0\|_H$$

$$+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln\|A\|_{H\to H}|\right\}\left[\|f^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}+\|g^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}\right]\Big],$$

$$\|Au_N\|_H \le M(\delta)\Big[\left[\|A\varphi\|_H+\|\left(I+\tau B\right)f_0\|_H\right]$$

$$+\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+|\ln\|A\|_{H\to H}|\right\}\left[\|f^\tau\|_{C([-1,0]_\tau,H)}+\|g^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}\right]\Big]$$

kestirimlerine dayanmaktadır. Bu kestirimlerin ispatı [Sobolevskii, 1977] ve [Ashyralyev ve Sobolevskii, 1981] makalelerinin şemasını takip eder ve (4.4), (4.9) ve (4.10) kestirimlerine dayanır.

Böylece, Teorem 4.2'nin ispatı sonuçlandırılır.

Teorem 4.3. Teorem 4.2'nin kabulleri sağlansın. O zaman (4.1) sınır değer problemi $C^{\alpha}_{0,1}([-1,1]_\tau,H)$, $\widetilde{C}^{\alpha}_{0,1}([-1,1]_\tau,H)$ Hölder uzaylarında iyi konumlanmıştır ve $M(\delta)$ f^τ, g^τ, φ ve τ 'dan bağımsız olmak üzere

$$\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1]_\tau,H)}$$

$$+\|\{\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\}_{-N+1}^{0}\|_{\widetilde{C}^{\alpha}_{0}([-1,0]_\tau,H)}$$

$$+\left\|\{Au_k\}_1^{N-1}\right\|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\left\{\frac{1}{2}(Au_k+Au_{k-1})\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{\widetilde{C}^{\alpha}_{0}([-1,0]_\tau,H)}$$

$$\le M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\|f^\tau\|_{C^{\alpha}_{0}([-1,0]_\tau,H)}+\|g^\tau\|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1]_\tau,H)}\right]+\|A\varphi\|_H\right.$$

$$\left.+\|(I+\tau B)f_0\|_H+\|(I+\tau B)g_1\|_H+\|(I+\tau B)f_{-1}\|_H\right],$$

$$\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\|_{C^{\alpha}_{0,1}([0,1]_\tau,H)}$$

$$+\left\|\left\{\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}$$

$$+\left\|\left\{Au_k\right\}_{1}^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\left\{\frac{1}{2}(Au_k+Au_{k-1})\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\| f^{\tau}\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\| g^{\tau}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\right]+\| A\varphi\|_H\right.$$

$$\left.+\|\left(I+\tau B\right)f_0\|_H+\|\left(I+\tau B\right)g_1\|_H+\|\left(I+\tau B\right)f_{-1}\|_H\right]$$

koersiv eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. [Ashyralyev ve Sobolevskii, 1981] ve [Ashyralyev ve Sobolevskii, 1982] ile Cauchy fark problem (4.5) çözümü için

$$\|\{\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\}_{-N+1}^{0}\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\left\|\left\{\frac{1}{2}\left(Au_k+Au_{k-1}\right)\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)} \tag{4.17}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\| f^{\tau}\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\|Au_0\|_H\right],$$

$$\|\{\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\}_{-N+1}^{0}\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\left\|\left\{\frac{1}{2}\left(Au_k+Au_{k-1}\right)\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)} \tag{4.18}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\| f^{\tau}\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\|Au_0\|_H\right]$$

yazılabilir.

[Sobolevskii, 1977] ile sınır değer problemi (4.7) çözümü için

$$\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)} \tag{4.19}$$

$$\leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|\ g^{\tau}\ \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\|Au_0\|_H+\|Au_N\|_H\right]$$

elde ederiz

O zaman, Teorem 4.3'ün ispatı (4.17) - (4.19) koersiv eşitsizliklerine ve sınır değer problemi (4.1) çözümü için

$$\|Au_0\|_H \leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\|\ f^{\tau}\ \|_{\widehat{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\|\ g^{\tau}\ \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\right]\right. \tag{4.20}$$

$$\left.+\|A\varphi\|_H+\|(I+\tau B)f_0\|_H+\|(I+\tau B)g_1\|_H+\|(I+\tau B)f_{-1}\|_H\right],$$

$$\|Au_N\|_H \leq M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\|\ f^{\tau}\ \|_{\widehat{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau,H)}+\|\ g^{\tau}\ \|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\right]\right. \tag{4.21}$$

$$\left.+\|A\varphi\|_H+\|(I+\tau B)f_0\|_H+\|(I+\tau B)g_1\|_H+\|(I+\tau B)f_{-1}\|_H\right]$$

kestirimlerine dayanmaktadır.

Problem (4.1)'in çözümü ile (4.9) ve (4.10)'un kestirimi için olan

$$Au_0=\frac{1}{2}T_\tau KG^{-2}\left\{\left(2I-\tau^2A\right)\left\{\left(2+\tau B\right)R^N\left[(-\tau)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}G(f_s-f_{-N+1})+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)Af_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+A\varphi\right]$$

$$-R^{N-1}AB^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{N-s}(g_s-g_{N-1})\tau+R^{N-1}AB^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{N+s}(g_s-g_1)\tau$$

$$\left.+(I-R^{2N})AB^{-1}\sum_{s=1}^{N-1}R^{s-1}(g_s-g_1)\tau\right\}$$

$$+(I-R^{2N})(I+\tau B)(\tau B^{-1}Ag_1-4GB^{-1}Af_0+PGB^{-1}Af_0+GB^{-1}Af_{-1})$$

$$+(2I-\tau^2 A)(2+\tau B)R^N(P^N-I)f_{-N+1}$$

$$+AB^{-2}(R^{N-1}-I)\{R^{N-1}g_{N-1}+(R^{2N}-R^{2N-1}-I)g_1\}\},$$

$$Au_N=\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)P^{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}Au_0$$

$$-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left(I+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right)\tau\sum_{s=[\frac{\lambda_i}{\tau}]+1}^{0}AP^{s-[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\left(f_s-f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{J}\alpha_i\left[\left(I-P^{-[\frac{\lambda_N}{\tau}]}\right)+\left(\lambda_i-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)A\right]f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+A\varphi$$

formülleriyle (4.20) ve (4.21) kestirimlerini elde ederiz. Bu sonuç Teorem 4.3’ün ispatını sonlandırır.

4.2. Uygulamalar

Bu bölümde lokal olmayan karma problemlerin yaklaşık çözümü için fark şemalarının çözümlerinde kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimleri elde etmek için Teorem 4.1, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 uygulamalarını göstereceğiz. Öncelikle, çok boyutlu eliptik parabolik denklemi (2.24) için çok noktalı karma sınır değer probleminin yaklaşık çözümüne bu soyut sonucun uygulamaları ele alınacaktır.

Problem (3.50) için fark şeması (4.1) fark şeması kullanılarak

[Sobolevskii, 1974], [Sobolevskii, 1977]:

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=g_k^h(x), \\ g_k^h(x)=g^h(t_k,x),\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1,\ N\tau=1,\ x\in\Omega_h, \\ \frac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}-\frac{A_h^x}{2}\left(u_k^h(x)+\varphi_{k-1}^h(x)\right)=f_k^h(x), \\ f_k^h(x)=f^h(t_{k-\frac{1}{2}},x),\ \ t_{k-\frac{1}{2}}=(k-\frac{1}{2})\tau,\ -N+1\le k\le 0,\ x\in\Omega_h, \\ u_N^h(x)=\sum\limits_{k=1}^{J}\alpha_i\left(u^h_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}(x)+\left(\lambda_k-[\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\right)\left(f^h_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}+A_h^x u^h_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}(x)\right)\right) \\ +\varphi^h(x),\ x\in\widehat{\Omega}_h, \\ -u_2^h(x)+4u_1^h(x)-3u_0^h(x)=3u_0^h(x)-4u_{-1}^h(x)+u_{-2}^h(x),\ x\in\widehat{\Omega}_h \end{cases} \tag{4.22}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması yazılır.

Teorem 4.4. Eğer τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$ yeterince küçük pozitif sayılar ise, bu durumda (4.22) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\left\| \left\{u_k^h\right\}_{-N}^{N-1} \right\|_{C([-1,1]_\tau,L_{2h})} \leq M\left[\| \left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1} \|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})} \right.$$

$$\left. +\| \left\{g_k^h\right\}_1^{N-1} \|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})} + \|\varphi^h\|_{L_{2h}} \right],$$

$$\| \{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\}_1^{N-1} \|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})} + \left\| \left\{u_k^h\right\}_1^{N-1} \right\|_{C([0,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$
$$+ \|\{\tau^{-1}(u_k^h - u_{k-1}^h)\}_{-N+1}^{0} \|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})} + \left\| \left\{\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\}_{-N+1}^{0} \right\|_{C([-1,0]_\tau,W_{2h}^2)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|f_0^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|f_{-1}^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|g_1^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \tau\left\|f_0^h\right\|_{W_{2h}^1} + \tau\left\|f_{-1}^h\right\|_{W_{2h}^1}\right.$$

$$\left. +\tau\left\|g_1^h\right\|_{W_{2h}^1} + \ln\frac{1}{\tau+|h|}\left[\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\|_{C([-1,0]_\tau,L_{2h})} + \|\left\{g_k^h\right\}_1^{N-1}\|_{C([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]\right]$$

kararlılık ve hemen hemen koersiv kestirimleri sağlanır. Burada $M(\delta)$ katsayısı $\tau, h, f_k^h(x), -N+1 \leq k \leq 0$ $g_k^h(x), 1 \leq k \leq N-1$ ve $\varphi^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 4.4'ün ispatı, soyut Teorem 4.1, Teorem 4.2, (3.49) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayındaki (3.53) eliptik fark probleminin çözümü için koersiv eşitsizliğine ve Teorem 3.5'e dayanmaktadır.

Teorem 4.3 ün bir sonuç çıkarmasını verelim.

Teorem 4.5. τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. O zaman, fark şeması (4.22) çözümü

$$\| \{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\}_1^{N-1} \|_{C_{0,1}^\alpha([0,1]_\tau,L_{2h})}$$

$$+\left\| \left\{\tau^{-1}(u_k^h - u_{k-1}^h)\right\}_{-N+1}^{0} \right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, L_{2h})} + \left\| \left\{u_k^h\right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, W_{2h}^2)}$$

$$+\left\| \left\{\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\}_{-N+1}^{0} \right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, W_{2h}^2)}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \tau\left\|f_0^h\right\|_{W_{2h}^1} + \tau\left\|f_{-1}^h\right\|_{W_{2h}^1} + \tau\left\|g_1^h\right\|_{W_{2h}^1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\left\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\right\|_{C_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, L_{2h})} + \left\|\left\{g_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}\right]\right],$$

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}$$

$$+\left\|\left\{\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\}_{-N+1}^{0}\right\|_{\widehat{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, W_{2h}^2)}$$

$$+\left\| \left\{\tau^{-1}(u_k^h - u_{k-1}^h)\right\}_{-N+1}^{0} \right\|_{\widetilde{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, L_{2h})} + \left\| \left\{u_k^h\right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, W_{2h}^2)}$$

$$\leq M\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \tau\left\|f_0^h\right\|_{W_{2h}^1} + \tau\left\|f_{-1}^h\right\|_{W_{2h}^1} + \tau\left\|g_1^h\right\|_{W_{2h}^1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left[\left\|\left\{f_k^h\right\}_{-N+1}^{-1}\right\|_{\widehat{C}_0^{\alpha}([-1,0]_\tau, L_{2h})} + \left\|\left\{g_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{0,1}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}\right]\right]$$

koersiv kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, $M(\delta)$ katsayısı $\tau, h, f_k^h(x), -N+1 \leq k \leq 0$ $g_k^h(x), 1 \leq k \leq N-1$ ve $\varphi^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 4.5'in ispatı, soyut Teorem 4.3, (3.49) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayındaki (3.53) eliptik fark probleminin çözümü için koersiv eşitsizliğine ve Teorem 3.5'e dayanmaktadır.

Sınır değer problemi (2.23)’ün yaklaşık çözümleri için bir değişkene bağlı olarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları aynı şekilde oluşturulabilinir. Yukarıda verilen soyut teoremler fark şemaları çözümleri için kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimlerini elde etmemize izin verir.

5. SAYISAL SONUÇLAR

Kararlılık eşitsizliklerindeki sabit sayılar için kesin bir kestirim alınamamaktadır. Bu yüzden, eliptik-parabolik denklem için lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}((1+x)\frac{\partial u}{\partial x})=g\left(t,x\right), \\ g\left(t,x\right)=-t\sin x+(e^{-t}+t)(\cos x-x\sin x), \\ -1<t\leq 0,\ 0<x<\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}((1+x)\frac{\partial u}{\partial x})=f\left(t,x\right), \\ f\left(t,x\right)=(-2e^{-t}+1-t)\sin x+(e^{-t}+t)(\cos x-x\sin x), \\ \quad 0<t<1,\ 0<x<\pi, \\ u\left(1,x\right)=\frac{1}{2}u\left(-1,x\right)+\frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2},x\right)+\varphi\left(x\right), \\ \phi\left(x\right)=(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\sin x,\ 0\leq x\leq\pi, \\ u\left(t,0\right)=u\left(t,\pi\right)=0,\ -1\leq t\leq 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

sayısal çözümleri verilecektir. Bu problemin tam çözümü

$$u(t,x) = (e^{-t}+t)\sin x.$$

şeklindedir.

Burada, lokal olmayan (5.1) sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılacaktır. İkinci mertebeden katsayıları matris olan n'ye göre fark denklemleri elde edilecektir. Bu fark denklemlerini çözmek için iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır. Sayısal denemelerin sonucu olarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına oranla daha doğru olduğu gösterilecektir.

5.1. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

Eliptik parabolik denklem için lokal olmayan (5.1) sınır değer problemini ele alacağız. (5.1) probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{aligned}[-1,1]_\tau \times [0,\pi]_h = \{(t_k, x_n):\ t_k = k\tau,\ -N \le k \le N,\quad N\tau = 1,\\ x_n = nh,\quad 0 \le n \le M, Mh = \pi\}\end{aligned}$$

τ ve h küçük parametrelerine bağlı grid noktalar ailesinin $[-1,1]_\tau \times [0,\pi]_h$ setini ele alalım.

Öncelikle

$$\begin{cases} \frac{u(x_{n+1})-u(x_{n-1})}{2h} - u'(x_n) = O(h^2), \\ \\ \frac{u(x_{n+1})-2u(x_n)+u(x_{n-1})}{h^2} - u''(x_n) = O(h^2) \end{cases} \tag{5.2}$$

formülleri uygulayarak ve lokal olmayan (5.1) sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci basamaktan doğruluklu (3.51) fark şeması kullanarak

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}+\frac{(1+x_n)(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k)}{h^2}+\frac{u_{n+1}^k-u_{n-1}^k}{2h}=g(t_k,x_n), \\ 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1, \\ \frac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}+\frac{(1+x_n)(u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1})}{h^2}+\frac{u_{n+1}^{k-1}-u_{n-1}^{k-1}}{2h}=f(t_{k-1},x_n), \\ -N+1\le k\le 0,\ 1\le n\le M-1, \\ \frac{u_n^1-u_n^0}{\tau}+\frac{(1+x_n)u_{n+1}^{-1}-2u_n^{-1}+u_{n-1}^{-1}}{h^2}+\frac{u_{n+1}^{-1}-u_{n-1}^{-1}}{2h}=-(1+x_n)\sin x_n+\cos x_n, \\ x_n=nh,\ 1\le n\le M-1, \\ u_n^N=\frac{1}{2}u_n^{-N}+\frac{1}{2}u_n^{-\frac{N}{2}}+\varphi\left(x_n\right),\ x_n=nh,\ 0\le n\le M, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ -N\le k\le N. \end{cases} \tag{5.3}$$

denklemler sistemini elde ederiz.

Böylece, $\left(2N+1\right)\times\left(M+1\right)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi (5.3)'de matris formunda yazılabilecek şekilde elde edilmiş olur.

Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek aşağıdaki formda

$$\begin{cases}\left(\frac{1+x_n}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)u_{n+1}^{k}+\left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k+1}+\left(-\frac{2}{\tau^2}-\frac{2(1+x_n)}{h^2}\right)u_n^{k}+\left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1}\\ +\left(\frac{1+x_n}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)u_{n-1}^{k}=g(t_k,x_n),\ 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1,\\ \left(\frac{1+x_n}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)u_{n+1}^{k-1}+\frac{1}{\tau}u_n^{k}+\left(-\frac{1}{\tau}-\frac{2(1+x_n)}{h^2}\right)u_n^{k-1}+\left(\frac{1+x_n}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)u_{n-1}^{k-1}\\ =f(t_{k-1},x_n),\ -N+1\le k\le 0,\ 1\le n\le M-1,\\ \left(\frac{1+x_n}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)u_{n+1}^{-1}+\left(-\frac{2(1+x_n)}{h^2}\right)u_n^{-1}+\left(-\frac{1}{\tau}\right)u_n^{0}+\left(\frac{1}{\tau}\right)u_n^{1}\\ +\left(\frac{1+x_n}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)u_{n-1}^{-1}=-(1+x_n)\sin x_n+\cos x_n,\\ x_n=nh,\ 1\le n\le M-1,\\ u_n^{N}-\frac{1}{2}u_n^{-N}-\frac{1}{2}u_n^{-\frac{N}{2}}=\varphi\left(x_n\right),\ x_n=nh,\ 0\le n\le M,\\ u_0^{k}=u_M^{k}=0,\ -N\le k\le N.\end{cases}$$

yazılabilinir.

Birinci aşamada, birinci basamaktan doğruluklu (3.51) fark şeması uygulayarak matris formunda

$$\begin{cases}A_nU_{n+1}+B_nU_n+C_nU_{n-1}=D\varphi_n,\ 1\le n\le M-1,\\ U_0=\widehat{0},\ U_M=\widehat{0},\end{cases}\tag{5.4}$$

denklem sistemini elde ederiz.

Tanımlanmış olan A_n, B_n ve C_n

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ a_n & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & a_n & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_n & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & . & -1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \\ b_n & c & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & c & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & b_n & c & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & d & e_n & d & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & d & e_n & d & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & d & e_n & d \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & f & g & c & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ r_n & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & r_n & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & r_n & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & r_n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & r_n & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & r_n & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & r_n & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(2N+1)\times(2N+1)$ matrisleri olup ve D $(2N+1)\times(2N+1)$ birim matrisidir,

φ_n, U_s ise

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \\ \vdots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \; U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ \vdots \\ U_s^0 \\ \vdots \\ U_s^N \end{bmatrix} \quad \text{for } s = n \pm 1, n$$

$(2N+1)\times 1$ sütun vektörleri olup, φ_n^k'da

$$\varphi_n^k = \begin{cases} \varphi(x_n), \quad k = -N, \\ f(t_{k-1}, x_n), \quad -N+1 \le k \le 0, \\ g(t_k, x_n), \quad 0 \le k \le N-1, \\ -(1+x_n)\sin x_n + \cos x_n, \quad k = N \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Burada,

$$
\begin{aligned}
&a_n = \frac{1+x_n}{h^2} + \frac{1}{2h},\ r_n = \frac{1+x_n}{h^2} - \frac{1}{2h},\\
&b_n = -\frac{1}{\tau} - \frac{2(1+x_n)}{h^2},\ c = \frac{1}{\tau},\ d = \frac{1}{\tau^2},\\
&e_n = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1+x_n)}{h^2},\ f = -\frac{2(1+x_n)}{h^2},\ g = -\frac{1}{\tau}
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilmiştir.

Dolayısıyla, ikinci mertebeden n 'ye göre katsayıları matris olan (5.4) fark denklemi elde edilmiş olur. Bu fark denklemini çözmek için, matris denkleminin katsayılarıyla iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemini uygularız. Bu tarz sistemi Samarskii ve Nikolaev [Samarskii ve Nikolaev, 1989] tarafından fark denklemleri için kullanılmıştır. Böylece, matris denklemin çözümünü

$$
\begin{cases}
U_j = \alpha_{j+1} U_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = M-1, \cdots, 2, 1, \\
U_M = 0
\end{cases}
$$

formunda elde ederiz.

Burada $\alpha_j \ (j = 1, \cdots, M)$ $(2N+1) \times (2N+1)$ kare matrisleri ve

$\beta_j \ (j = 1, \cdots, M)$ ve $(2N+1) \times 1$ sütun matrisleri olup

$$
\begin{cases}
\alpha_{j+1} = -(B + C\alpha_j)^{-1} A, \\
\beta_{j+1} = (B + C\alpha_j)^{-1} (D\varphi_j - C\beta_j),
\end{cases}
$$

olarak tanımlanmıştır.

α_1 $(2N+1)\times(2N+1)$ sıfır matrisi ve

β_1 $(2N+1)\times 1$ sıfır matrisidir.

Farklı N ve M değerleri verildiğinde, (5.1) probleminin sayısal çözümlerini yukarıdaki yöntem ile bulan bir Matlab program Ek 1 kısmında verilmiştir.

5.2. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

İkinci olarak, (5.2) formüllerini uygulayarak ve (5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan (4.22) doğruluk fark şemasını kullanarak aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}+\frac{(1+x_n)(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k)}{h^2}+\frac{u_{n+1}^k-u_{n-1}^k}{2h}=g(t_k,x_n), \\ t_k=k\tau,\ x_n=nh,\ 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1, \\ \frac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}+\frac{(1+x_n)(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k)}{2h^2}+\frac{u_{n+1}^k-u_{n-1}^k}{4h} \\ +\frac{(1+x_n)(u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1})}{2h^2}+\frac{u_{n+1}^{k-1}-u_{n-1}^{k-1}}{4h}=f(t_k-\frac{\tau}{2},x_n), \\ t_k=k\tau,\ x_n=nh,\ -N+\ 1\le k\le 0,\ 1\le n\le M-1, \\ -u_n^2+4u_n^1-3u_n^0=3u_n^0-4u_n^{-1}+u_n^{-2},\ x_n=nh,\ 1\le n\le M-1, \\ u_n^N=\frac{1}{2}u_n^{-N}+\frac{1}{2}u_n^{-\frac{N}{2}}+\varphi(x_n),\ x_n=nh,\ 0\le n\le M, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ -N\le k\le N. \end{cases}$$

İlk kısımdakine benzer bir şekilde $(2N+1)\times(M+1)$ lineer denklemler sistemine sahibiz ve onları matris formunda yazacağız. (5.1) probleminin yaklaşık çözümü için bu sistemi

$$\begin{cases} \left(\frac{1+x_n}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)u_{n+1}^k+\left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k+1}+\left(-\frac{2}{\tau^2}-\frac{2(1+x_n)}{h^2}\right)u_n^k+\left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1} \\ +\left(\frac{1+x_n}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)u_{n-1}^k = g(t_k,x_n),\ 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1, \\ \left(\frac{1+x_n}{2h^2}+\frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^{k-1}+\left(\frac{1+x_n}{2h^2}+\frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^k+\left(-\frac{1}{\tau}-\frac{1+x_n}{h^2}\right)u_n^{k-1} \\ +\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1+x_n}{h^2}\right)u_n^k+\left(\frac{1+x_n}{2h^2}-\frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^{k-1}+\left(\frac{1+x_n}{2h^2}-\frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^k \\ = f\left(t_k-\frac{\tau}{2},x_n\right),\ -N+1\le k\le 0,\ 1\le n\le M-1, \\ u_n^{-2}-4u_n^{-1}+6u_n^0-4u_n^1+u_n^2 = 0,\ 1\le n\le M-1, \\ u_n^N-\frac{1}{2}u_n^{-N}-\frac{1}{2}u_n^{-\frac{N}{2}} = \varphi(x_n),\ x_n = nh,\ 0\le n\le M, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ -N\le k\le N \end{cases}$$

formunda tekrar yazabiliriz. İkinci aşamada, matris formunda

$$\begin{cases} A_nU_{n+1}+B_nU_n+C_nU_{n-1}=D\varphi_n,\ \ 1\le n\le M-1, \\ U_0=\widehat{0},\ U_M=\widehat{0}, \end{cases} \tag{5.5}$$

(5.5) lineer denklemleri elde etmek için ikinci basamaktan (4.22) doğruluk fark şemasını uygularız.

Tanımlanmış olan A_n, B_n ve C_n

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ v_n & v_n & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & v_n & v_n & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & v_n & v_n & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & a_n & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & . & -1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \\ y_n & z_n & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_n & z_n & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & y_n & z_n & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & d & e_n & d & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e_n & d & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & d & e_n & d \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ w_n & w_n & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & w_n & w_n & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & w_n & w_n & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & r_n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & r_n & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & r_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(2N+1)\times(2N+1)$ matrisleri olup,

D $(2N+1)\times(2N+1)$ birim matrisi

φ_n, U_s ise aşağıda gösterilmiş olan $(2N+1)\times 1$ sütun vektörleridir.

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \\ \vdots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ \vdots \\ U_s^0 \\ \vdots \\ U_s^N \end{bmatrix} \quad \text{for } s = n \pm 1, n.$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
v_n &= \frac{1+x_n}{2h^2} + \frac{1}{4h},\ w_n = \frac{1+x_n}{2h^2} - \frac{1}{4h},\\
a_n &= \frac{1+x_n}{h^2} + \frac{1}{2h},\ r_n = \frac{1+x_n}{h^2} - \frac{1}{2h},\\
y_n &= -\frac{1}{\tau} - \frac{1+x_n}{h^2},\ z_n = \frac{1}{\tau} - \frac{1+x_n}{h^2},\\
d &= \frac{1}{\tau^2},\ e_n = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(1+x_n)}{h^2}
\end{aligned}
$$

ile

$$
\varphi_n^k = \begin{cases} \varphi(x_n),\ k = -N, \\ f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n),\ \ -N+1 \le k \le 0, \\ g(t_k, x_n),\ 1 \le k \le N-1, \\ 0, k = N. \end{cases}
$$

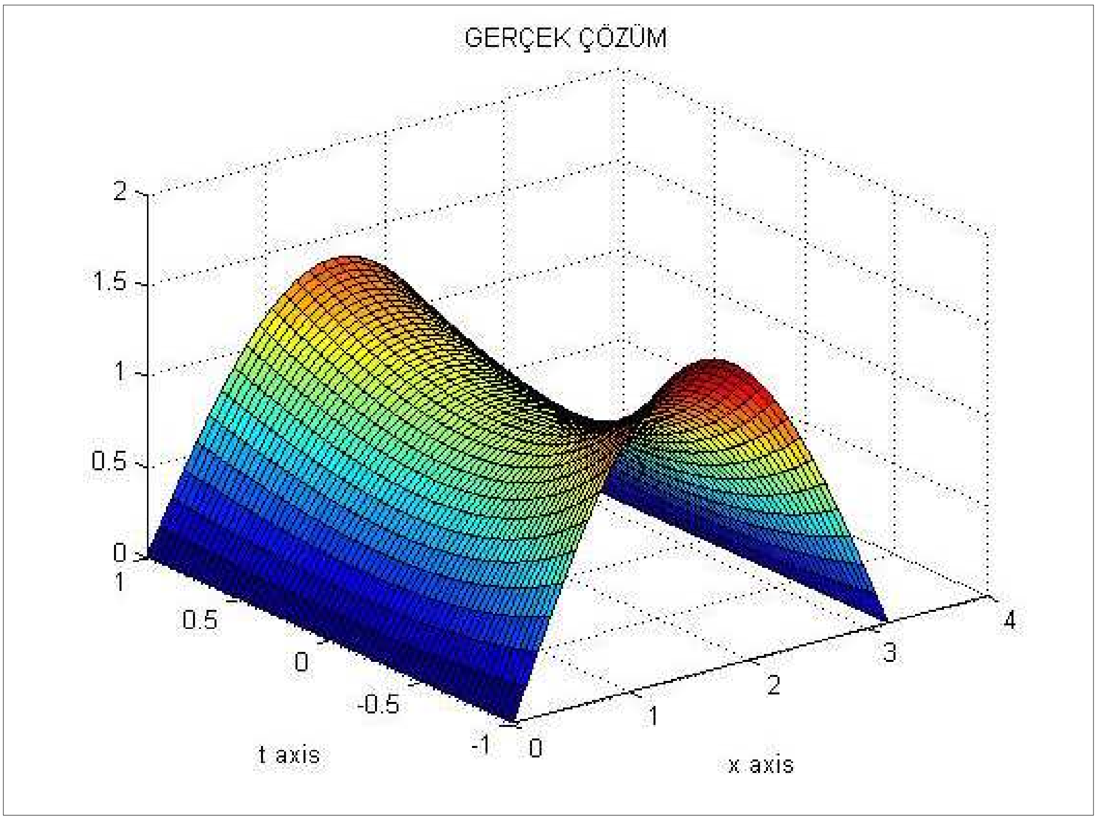
olarak ifade edilmiştir.

Böylece ikinci mertebeden n 'ye göre katsayıları matris olan (5.5) fark denklemine sahibiz. Bu fark denklemini çözmek için modifiye edilmiş Gauss eliminasyon metodunun sürecini aynı şekilde uyguladık.

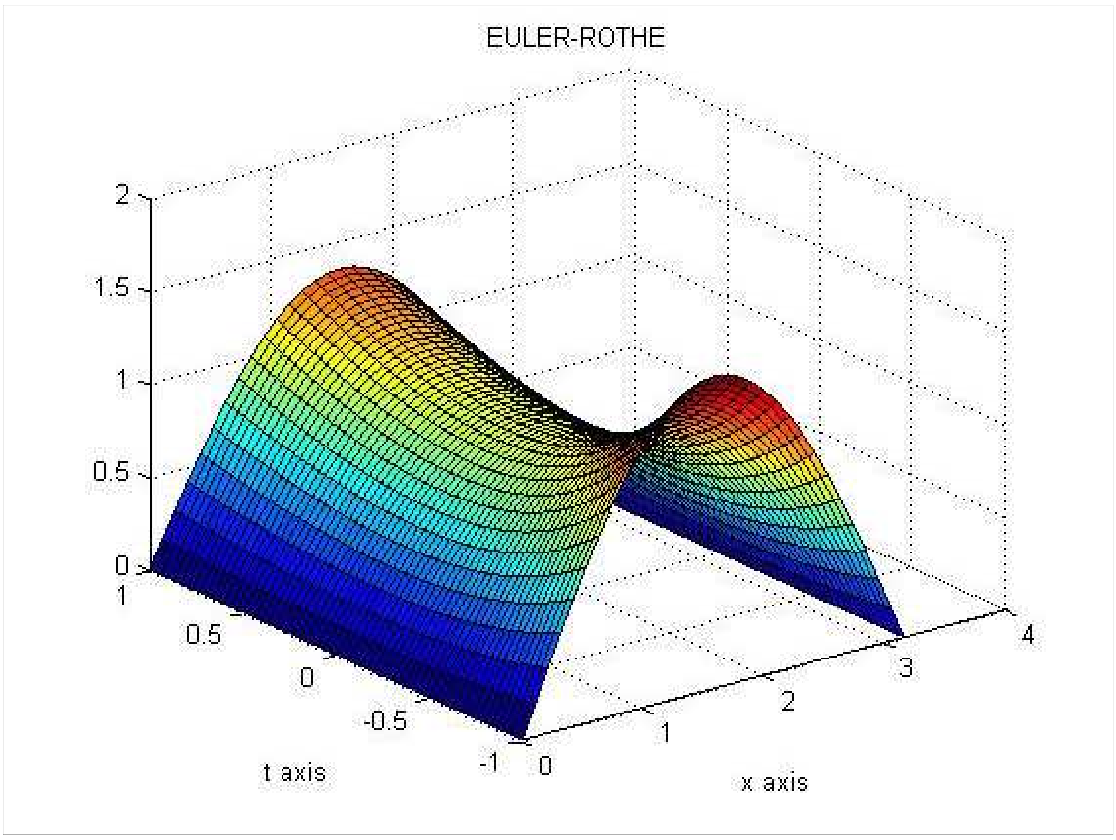
Farklı N ve M değerleri verildiğinde, (5.1) probleminin sayısal çözümlerini yukarıdaki yöntem ile bulan bir Matlab program Ek 1 kısmında verilmiştir.

5.3. Hata Analizleri

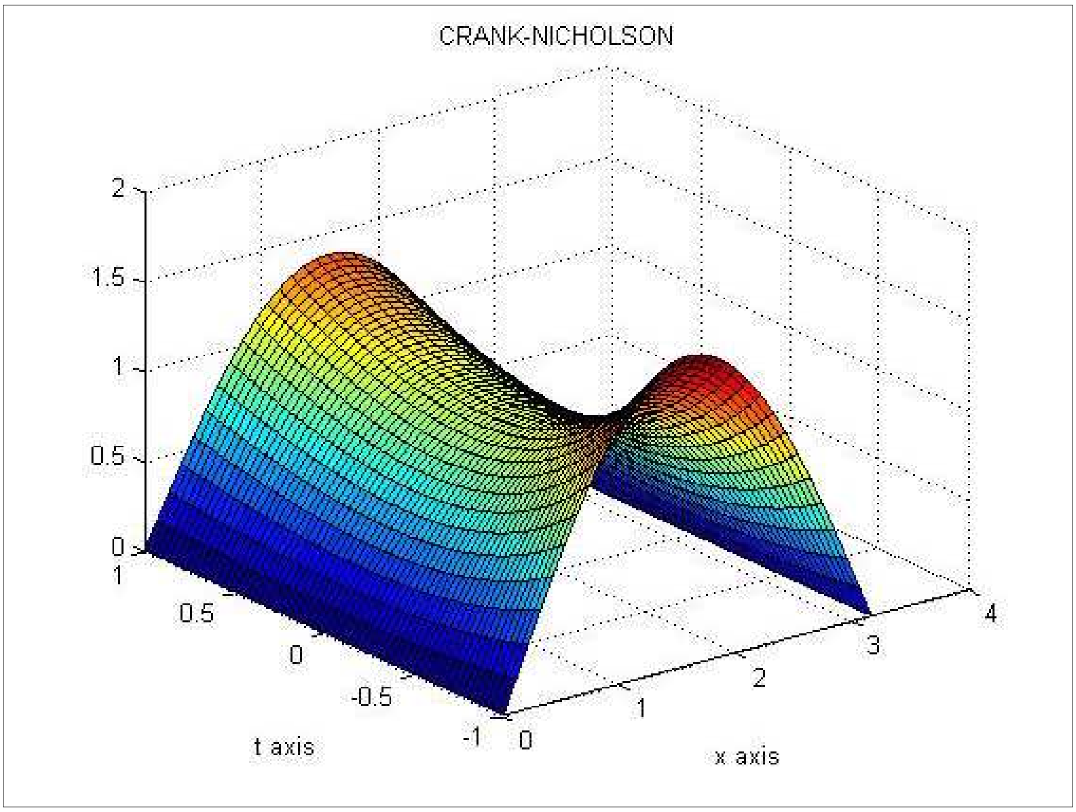
Eliptik parabolik denklem için lokal olmayan (5.1) sınır değer problemini dikkate alalım. Lokal olmayan (5.1) sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için doğruluk fark şemalarının birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılmıştır ve *N=M=30* için aşağıdaki şekillerde (5.1) probleminin gerçek ve yaklaşık çözümleri verilmiştir.



Şekil 5.1 Gerçek çözüm



Şekil 5.2 Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması



Şekil 5.3 İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması

Sonuçların karşılaştırılması için hatalar

$$E_M^N = \max_{\substack{-N \le k \le N \\ 1 \le n \le M-1}} \left| u(t_k, x_n) - u_n^k \right|,$$

formülüyle hesaplanır.

Burada $u(t_k, x_n)$ problemin gerçek çözümünü ve u_n^k' de, (t_k, x_n) noktasında sayısal çözümü temsil etmektedir. Sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 *u(t,x)* için hata analizi

Metot	$N = M = 30$	$N = M = 60$	$N = M = 90$
BBDFŞ	0,042169	0,021639	0,014546
İBDFŞ	0,000908	0,000227	0,000101

Çizelgeden de açık bir şekilde görüldüğü gibi, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına oranla gerçek çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmanın esas amacı lokal olmayan sınır değer koşulları ile çok noktalı eliptik-parabolik diferensiyel ve fark problemlerin iyi konumlanmışlığının doğruluğunun ortaya konulmasıdır. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki orijinal sonuçlar elde edilmiştir:

- Self-adjoint pozitif tanımlı A operatörlü soyut eliptik-parabolik denklem için çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \le t \le 1), \\ \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \le t \le 0), \\ u(1) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i) + \varphi, \\ \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1, \\ -1 \le \lambda_1 < ... < \lambda_J \le 0 \end{cases}$$

iyi konumlanmışlığı ağırlıklı Hölder uzaylarında doğruluğu ortaya konularak elde edilmiştir.

Uygulamada bu soyut sonuç çok noktalı lokal olmayan karma sınır değer problemi için kurulan

$$\begin{cases} -u_{tt} - (a(x)u_x)_x + \delta u = g(t,x), \ 0 < t < 1, \ 0 < x < 1, \\ u_t + (a(x)u_x)_x - \delta u = f(t,x), \ -1 < t < 0, \ 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1), \ u_x(t,0) = u_x(t,1), \ -1 \le t \le 1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x), \ \sum\limits_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1, \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_J \le 0, \ 0 \le x \le 1, \\ u(0+,x) = u(0-,x), \ u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

karma denklemde ve çok noktalı lokal olmayan karma sınır değer denklemleri için kurulan

$$\begin{cases} -u_{tt} - \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = g(t,x), \ 0 < t < 1, \ x \in \Omega, \\ u_t + \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = f(t,x), \ -1 < t < 0, \ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ x \in S, \ -1 \le t \le 1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x), \ \sum\limits_{i=1}^{J} |\alpha_i| \le 1, \\ -1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J \le 0, \\ u(0+,x) = u(0-,x), \ u_t(0+,x) = u_t(0-,x), \ x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

eliptik-parabolik denklemde koersiv kararlılık eşitsizlikleri elde etmemizi sağlar.

Burada, Ω sınırlı n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ $(0 < x_k < 1, \ 1 \le k \le n)$ ’deki açık birim küptür.

- Lokal olmayan sınır değer problemi için verilen eliptik–parabolik denklemin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = g_k, \\ g_k = g(t_k),\ t_k = k\tau,\ 1 \leq k \leq N-1, \\ \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) - Au_{k-1} = f_k, \quad f_k = f(t_{k-1}), \\ t_{k-1} = (k-1)\tau, \ -(N-1) \leq k \leq 0, \\ u_N = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + \varphi,\ u_1 - u_0 = u_0 - u_{-1}. \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = g_k, \\ g_k = g(t_k),\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1, \\ \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) - \frac{1}{2}(Au_{k-1} + Au_k) = f_k, \quad f_k = f(t_{k-\frac{1}{2}}), \\ t_{k-\frac{1}{2}} = (k - \frac{1}{2})\tau, \ -(N-1) \leq k \leq 0, \\ u_N = \sum_{k=1}^{J} \alpha_i \Big(u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + \big(\lambda_i - [\frac{\lambda_i}{\tau}]\tau\big)\big(f_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + Au_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]}\big)\Big) + \varphi, \\ \sum_{i=1}^{J} |\alpha_i| \leq 1, u_2 - 4u_1 + 3u_0 = -3u_0 + 4u_{-1} - u_{-2} \end{cases}$$

birinci ve ikinci dereceden kararlılıklı fark şemaları kurulmuştur.

Hölder uzayında bu fark şemalarının iyi konumlanmışlığı elde edilmiştir. Pratikte, fark şemalarının yaklaşık çözümü için kararlılık, hemen hemen koersiv eşitsizliği, koersiv kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

- Eliptik-parabolik denklem için lokal olmayan sınır değer

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}((1+x)\frac{\partial u}{\partial x})=g(t,x), \\ g(t,x)=-t\sin x+(e^{-t}+t)(\cos x-x\sin x), \\ 0<t<1,\ 0<x<\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}((1+x)\frac{\partial u}{\partial x})=f(t,x), \\ f(t,x)=(-2e^{-t}+1-t)\sin x+(e^{-t}+t)(\cos x-x\sin x), \\ -1<t\le 0,\ 0<x<\pi, \\ u(1,x)=\frac{1}{2}u(-1,x)+\frac{1}{2}u(-\frac{1}{2},x)+\varphi(x), \\ \phi(x)=(e^{-1}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4})\sin x,\ 0\le x\le\pi, \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0,\ -1\le t\le 1 \end{cases}$$

probleminin fark şemalarının çözümlerinin teorik ifadeleri sayısal deney sonuçları ile desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

Agarwal R.P., Bohner M., ve Shakhmurov V.B., (2005) “Maximal regular boundary value problems in Banach-valued weighted spaces”, Boundary Value Problems, 1, 9-42.

Ashyralyev A., (2003) “On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations”, Numerical Functional Analysis and Optimization, 24, 1-2, 1-15.

Ashyralyev A., (2006a) “A note on the nonlocal boundary value problem for elliptic-parabolic equations”, Nonlinear Studies, 13, 4, 327-333.

Ashyralyev A., (2006b) “Nonlocal boundary-value problems for abstract parabolic equations: well-posedness in Bochner spaces”, Journal of Evolution Equations**,** 6, 1, 1-28.

Ashyralyev A., (2007a) “Well-posedness of the modified Crank-Nicholson difference schemes in Bochner spaces”, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B (DCDS-B), 7, 1, 29-51.

Ashyralyev A., (2007b) “Well-Posedness of the difference schemes of elliptic equations in C_0^α spaces” Applied Mathematics Letters, 22, 3, 390-395.

Ashyralyev A., (2009) “High-accuracy stable difference schemes for well-posed nonlocal boundary value problems”, Operator Theory: Advances and Applications, 191, 229-252.

Ashyralyev A., Dural A. ve Sozen Y., (2009) “Multipoint nonlocal boundary value problems for reverse parabolic equations: well-posedness”, Vestnik of Odessa National University. Mathematics and Mechanics, 13, 1-12.

Ashyralyev A. ve Gercek O., (2008) "Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations" Discrete Dynamics in Nature and Nature, 01-16.

Ashyralyev A. ve Gercek O., (2009) "Numerical solution of nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic equations", Further progress in analysis: Proceedings of the 6th International ISAAC Congress Ankara, Turkey 13 - 18 August 2007, World Scientific, 663-670.

Ashyralyev A., Hanalyev A. ve Sobolevskii P.E., (2001) “Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations”, Abstract and Applied Analysis, 6, 1, 53-61.

Ashyralyev A., Karatay I. ve Sobolevskii P.E., (2004) “Well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations”, Discrete Dynamics in Nature and Society, 2, 2, 273-286.

Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (1981) “Correct solvability of the Crank-Nicholson difference scheme for parabolic equations", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Khim. Geol. Nauk, 6, 10-16.

Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (1982) “Coercive stability of a Crank-Nicholson difference scheme in C_0^α spaces”, in: Approximate Methods for Investigations of Differential Equations and their Applications, Kuybishev, 16-24.

Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (1984) “The linear operator interpolation theory and the stability of difference schemes”, Doklady Akademii Nauk SSSR, 275, 6, 1289-1291.

Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (1994) Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.

Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (2006) “Well-Posedness of the difference schemes of the high order of accuracy for elliptic equations” Discrete Dynamics in Nature and Nature, 01-12.

Ashyralyev A. ve Soltanov H., (1994) “On the stability of the difference scheme for the parabolic-elliptic equations in a Hilbert Space”, Labour of the IMM of AS of theTurkmenistan, Ashgabat, 53-57.

Ashyralyev A. ve Soltanov H., (1995a) “On coercive stability of difference scheme for parabolic-elliptic equations”, Labour of the IMM of AS of theTurkmenistan, Ashgabat, 3, 63-66.

Ashyralyev A. ve Soltanov H., (1995b) “On elliptic-parabolic equations in a Hilbert space”, in: Proceeding of the IMM of CS of Turkmenistan, 101-104, Ashgabat, Turkmenistan.

Ashyralyev A. ve Soltanov H., (1998) “On one difference schemes for an abstract nonlocal problem generated by the investigation of the motion of gas on the homogeneous space” in: Modeling Processes of Exploitation of Gas Places and Applied Problems of Theoretical Gasohydrodynamics, Ilim, Ashgabat, 147-154.

Bazarov D. ve Soltanov, H., (1995) Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types, Ylim: Ashgabat.

Chipot M. ve Lovat B., (1997) “Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems”, Nonlinear Analysis, 30, 7, 4619-4627.

Dautray R. ve J.L. Lions, (1988) Analyse Mathematique et Calcul Numerique Pour les Sciences et les Technique, 1-11, Masson, Paris, France.

Dehghan M., (2005a) “On the solution of the diffusion equation with a nonlocal boundary condition”, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 21, 1, 24-40.

Dehghan M., (2005b) “Efficient techniques for the second-order parabolic equation subject to nonlocal specifications”, Applied Numerical Mathmatics, 52, 39-62.

Diaz J., Lerena M., Padial J. ve Rakotoson J., (2004) “An elliptic-parabolic equation with a nonlocal term for the transient regime of a plasma in a Stellarator”, Journal of differential equations, 198, 2, 321-355.

Dzhuraev, T.D., (1979) Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types", Fan:Tashkent.

Ewing R.E., Lazarov R.D. ve Lin Y., (2000) “Finite volume element approximations nonlocal reactive flows in porous media”, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16, 285-311.

Glazatov S.N., (1998) “Nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear equations of variable type", Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Preprint, 46, 26.

Okan Gerçek, (2006) “Nonlocal boundary value problems for parabolic-elliptic equations”, Master Thesis, 64p.

Gordeziani N., Natalini P. ve Ricci P.E., (2005) “Finite-difference methods for solution of nonlocal boundary value problems”, Computers & Mathematics with Applications, 50, 8-9, 1333—1344.

Gulin A.V., Ionkin N.I., ve Morozova V.A., (2001) Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem, Differential Equations, 37, 7, 970-978.

Hilhorst D. ve Hulshof J., (1991) “An elliptic-parabolic problem in combustion theory: Convergence to travelling waves”, Nonlinear Analysis, 17, 6, 519-546.

Ionkin N.I. ve Morozova V.A., (2000) “The two-dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions” Differential Equations, 36, 7, 982—987.

Karatopraklieva M.G., (1991) “On a nonlocal boundary value problem for an equation of mixed type”, Differensial'nye Uravneniya, 27, 1, 68-79.

Krein S.G., (1966) Linear Differential Equations in a Banach Space, Nauka: Moscow.

Lagnese J., (1972) “Elliptic and parabolic boundary value problems of nonlocal type”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 40, 1, 183-201.

Martín-Vaquero J. ve Vigo-Aguiar J., (2009) “On the numerical solution of the heat conduction equations subject to nonlocal conditions”, Applied Numerical Mathmatics, 59 2507-2514.

Nakhushev A.M., (1995) Equations of Mathematical Biology, Textbook for Universities, Vysshaya Shkola: Moskow.

Pao C.V., (1995) “Dynamics of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions”, Quart. Appl. Math., 53, 173-186.

Pao C.V., (2001) “Numerical solutions of reaction--diffusion equations with nonlocal boundary conditions”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 136, 1-2, 227-243.

Salakhitdinov M.S., (1974) Equations of Mixed-Composite Type, Fan:Tashkent.

Sapagovas M.P., (2008) “On the stability of finite difference scheme for nonlocal parabolic boundary value problems”, Lithuanian Math. J., 48, 3, 339-356.

Samarskii A.A. ve Bitsadze A.V., (1969) “Some Elementary Generalizations of Linear Elliptic Boundary Value Problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 185, 4, 739-740.

Samarskii A.A. ve Nikolaev E.S., (1989) Numerical Methods for Grid Equations, vol. 2: Iterative Methods, Birkhauser, Basel, Switzerland.

Shakhmurov V.B., (2006) “Maximal B-regular boundary value problems with parameters”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 320, 1, 1-19.

Sobolevskii P.E., (1964) “Coerciveness inequalities for abstract parabolic equations”, Doklady Akademii Nauk SSSR, 157, 1, 52-55.

Sobolevskii P.E., (1969) "On elliptic equations in a Banach space", Differensialnyye Uravneniya, 4, 7, 1346-1348.

Sobolevskii P.E., (1974) “On the stability and convergence of the Crank-Nicolson scheme in:Variational-Difference Methods in Mathematical Physics, Vychisl.Tsentr Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 146-151.

Sobolevskii P.E., (1975) Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations, Voronezh State University Press, Voronezh.

Sobolevskii P.E., (1977) “The theory of semigroups and the stability of difference schemes” in:Operator Theory in Function Spaces (Proc. School, Novosibirsk, 1975), Nauka, Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 304-337.

Vragov V.N., (1983) Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Textbook for Universities, NGU: Novosibirsk.

EKLER

EK 1 Euler Rothe fark şeması (5.2)'nin uygulanması için yazılan Matlab Programı

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)
% first order accuracy rother method
% mixed type
close; close;
w=1
if nargin<1;
N=30 ; M=30 ;
end;
tau=1/N;
h=pi/M;
A=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
for i=2:N+1;
A(i,i-1,s)=(1+s*h*w)/(h^2)+(1/(2*h));
end;
for i=N+2:2*N;
A(i,i,s)=(1+s*h*w)/(h^2)+(1/(2*h));
end;
A(2*N+1,N,s)=(1+s*h*w)/(h^2)+(1/(2*h));
end;A;
B=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
B(1,1,s)=-1/2;
B(1,(N/2)+1,s)=-1/2;
B(1,2*N+1,s)=1;
for i=2:N+1;
B(i,i-1,s)=(-1/tau)-((2*(1+s*h*w))/(h^2));
B(i,i,s)=1/tau;
end;
for i=N+2:2*N;
B(i,i,s)=(-2/(tau^2))-((2*(1+s*h*w))/(h^2));
B(i,i+1,s)=1/(tau^2);
B(i,i-1,s)=1/(tau^2);
```

```
end;
B(2*N+1,N,s)=-((2*(1+s*h*w))/(h^2));
B(2*N+1,N+1,s)=-1/tau;
B(2*N+1,N+2,s)=1/tau;
end; B;
D=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
for i=1:2*N+1;
D(i,i,s)=1;
end ;
end ;  D;
C=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
for i=2:N+1; C(i,i-1,s)=(1+s*h*w)/(h^2)-(1/(2*h));
end;
for i=N+2:2*N; C(i,i,s)=(1+s*h*w)/(h^2)-(1/(2*h));
end;
C(2*N+1,N,s)=(1+s*h*w)/(h^2)-(1/(2*h));
end; C;
%'fii(j) finding ' ;
for s=1:M-1;
x=s*h;
fii(1,s:s) =(exp(-1)-(1/2)*exp(1)-(1/2)*exp(1/2)+(7/4))*sin(x);
fii(2*N+1,s:s)=-sin(x)-sin(x)*x*w+cos(x)*w;
for k=2:N+1;
x=s*h;
t=(-N+k-1)*tau ;
fii( k,s:s ) =(-2*exp(-t)+1-t)*sin(x)+w*(exp(-t)+t)*(cos(x)-x*sin(x));
end;
for k=N+2:2*N;
x=s*h;
t=(-N+k-1)*tau+tau;
fii(k,s:s) = -t*sin(x)+w*(exp(-t)+t)*(cos(x)-x*sin(x));
end;
end;fii;
```

```
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;
betha(2*N+1,1:1) = 0 ;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1) =-inv(B(:,:,j:j)+C(:,:,j:j)*alpha(:,:,j:j))*A(:,:,j:j) ;
betha(:,j+1:j+1)                =inv(B(:,:,j:j)+C(:,:,j:j)*alpha(:,:,j:j))*(D(:,:,j:j)*(fii(:,j:j))-C(:,:,j:j)*
betha(:,j:j));
end;
U( 2*N+1,1,M:M ) = 0;
for z = M-1:-1:1 ;
U(:,:,z:z ) = alpha(:,:,z+1:z+1)* U(:,:,z+1:z+1) + betha(:,z+1:z+1);
end;
for z = 1:M;
p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z);
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;
for j=1:M+1;
for k=1:2*N+1;
t=(-N+k-1)*tau;
x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,
es(k,j) = (exp(-t)+t)*sin(x);
end;
end;
'ERROR ANALYSIS' ;
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(p)) ;
maxerror=max(max(abs(es-p)));
relativeerror=max(max((abs(es-p))))/max(max(abs(es)) );
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
%%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%%%
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
[xler,tler]=meshgrid(0:h:pi,-1:tau:1);
```

```
surf(xler,tler,es); xlabel('x axis');ylabel('t axis');
title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);rotate3d;
figure;
surf(xler,tler,p); XLabel('x axis');YLabel('t axis');
title('EULER-ROTHE'); rotate3d ;set(gca,'ZLim',[q w]);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

EK 2 Crank-Nicholson fark şeması (5.3)'ün uygulanması için yazılan Matlab Programı

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)
% second order accuracy rother method
% mixed type
 close; close;
 if nargin<1;
N=30 ;
M=30 ;
end;
tau=1/N;
h=pi/M;
w=1
A=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
for i=2:N+1;
A(i,i-1,s)=((1+s*h*w)/(2*h^2))+(1/(4*h));
A(i,i,s)=((1+s*h*w)/(2*h^2))+(1/(4*h));
end;
for i=N+2:2*N;
A(i,i,s)=((1+s*h*w)/(h^2))+(1/(2*h));
end;
end;
B=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
B(1,1,s)=-1/2;
B(1,N/2+1,s)=-1/2;
B(1,2*N+1,s)=1;
```

```
for i=2:N+1;
B(i,i-1,s)=(-1/tau)-((1+s*h*w)/(h^2));
B(i,i,s)=(1/tau)-((1+s*h*w)/(h^2));
end;
for i=N+2:2*N;
B(i,i,s)=(-2/(tau^2))-((2*(1+s*h*w))/(h^2));
B(i,i+1,s)=1/(tau^2);
B(i,i-1,s)=1/(tau^2);
end;
B(2*N+1,N-1,s)=1;
B(2*N+1,N,s)=-4;
B(2*N+1,N+1,s)=6;
B(2*N+1,N+2,s)=-4;
B(2*N+1,N+3,s)=1;
end;
D=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
for i=1:2*N+1;
D(i,i,s)=1;
end ;
end ;
C=zeros(2*N+1,2*N+1,M-1);
for s=1:M-1;
for i=2:N+1;
C(i,i-1,s)=((1+s*h*w)/(2*h^2))-(1/(4*h));
C(i,i,s)=((1+s*h*w)/(2*h^2))-(1/(4*h));
end;
for i=N+2:2*N;
C(i,i,s)=((1+s*h*w)/(h^2))-(1/(2*h));
end;
end;
%'fii(j) finding ' ;
for s=1:M-1;
fii(1,s:s) =(exp(-1)-(1/2)*exp(1)-(1/2)*exp(1/2)+(7/4))*sin(s*h);
fii(2*N+1,s:s)=0;
```

```
for k=2:N+1;
t=(-N+k-1)*tau-(tau/2);
fii(k,s:s )=(-2*exp(-t)+1-t)*sin(s*h)+w*(exp(-t)+t)*(cos(s*h)-(s*h)*sin(s*h));
end;
for k=N+2:2*N;
t=(-N+k-1)*tau;
fii(k,s:s)=(-t)*sin(s*h)+w*(exp(-t)+t)*(cos(s*h)-(s*h)*sin(s*h));
end;
end;
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;
betha(2*N+1,1:1) = 0 ;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=-inv(B(:,:,j:j)+C(:,:,j:j)*alpha(:,:,j:j))*A(:,:,j:j) ;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B(:,:,j:j)+C(:,:,j:j)*alpha(:,:,j:j))*(D(:,:,j:j)*(fii(:,j:j))-
(C(:,:,j:j)*betha(:,j:j) ));
end;
U( 2*N+1,1, M:M ) = 0;
for z = M-1:-1:1 ;
U(:,:,z:z ) = alpha(:,:,z+1:z+1)* U(:,:,z+1:z+1) + betha(:,z+1:z+1);
end;
for z = 1:M;
p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z);
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;
for j=1:M+1;
for k=1:2*N+1;
t=(-N+k-1)*tau;
x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,
es(k,j) = (exp(-t)+t)*sin(x);
end;
end;
'ERROR ANALYSIS' ;
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(p)) ;
 maxerror=max(max(abs(es-p)));
```

```
relativeerror=max(max((abs(es-p))))/max(max(abs(es)) );
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%%%
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
[xler,tler]=meshgrid(0:h:pi,-1:tau:1);
surf(xler,tler,es); xlabel('x axis');ylabel('t axis');
title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);rotate3d;
figure;
surf(xler,tler,p); XLabel('x axis');YLabel('t axis');
title('CRANK-NICHOLSON'); rotate3d ;set(gca,'ZLim',[q w]);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	11.06.1972	
Doğum yeri	Çorum	
Lise	1987-1990	Ankara Fen Lisesi
Lisans	1990-1997	Boğaziçi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2004-2006	Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	2007-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurum(lar)

1999-2000	Florya Yeni Dünya Koleji Matematik Öğretmeni
2000-2003	Florya Anafen Dershanesi Matematik Öğretmeni
2003-2005	Fatih Fen Lisesi Matematik Öğretmeni
2005-Devam ediyor	Fatih Üniversitesi Meslek Yüksek Okulu İşletme Yönetimi Bölümü Öğretim Görevlisi