

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Koneweg-de Vries Denklemleri
Türünde Diferansiyel
Denklemleri

Alençdar Demirel

Doktora Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
KOCATEPE YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Canp



KORIEWEG-DE VRIES DENKLEMİ
TÜRÜNDEKİ DENKLEMLERİN İNVERSE SCATTRİNG
(TERS SAÇINIM) METODU
İLE ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Doktora Tezi

Alemdar DEMİREL

İSTANBUL - 1984



YILDIZ ONİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

R 209

Kot :49.....
Alındığı Yer : Fen Bil. Enst.....
Tarih :26/5/1987.....
Fatura :-.....
Fiatı :1200T1.....
Ayniyat No :1/6.....
Kayıt No :44311.....
UDC :515.35.....378.242.....
Ek :



İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZET

SUMMARY

BÖLÜM 1: KdV DENKLEMİ VE TERS SAÇINIM DÖNÜŞÜMÜ

1.1. Tarihi Gelişim	1
1.2. Elemanter Özellikler	3
1.3. Soliton Davranış	6
1.4. Miura Dönüşümü ve MKdV	8
1.5. Ters Saçınım Dönüşümü İle (GGKM) Çözümü.	10
1.6. Lineer Schrödinger Denklemi İçin Saçınım Problem lemi	12
1.7. Lax Formalizmi	14
1.8. Zakharov-Shabat Sistemi	20

BÖLÜM 2: GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ BİLEŞİKLİ KdV BOUSSINESQ DENKLEMİ VE SOLİTON BAĞLANTISI

2.1. Crystal Lattice (Kristal Şebeke)	26
2.2. Matris KdV	30
2.3. Çözüm	35
2.4. Yüksek Mertebeden Saçınım Problemi ve Boussi- nesq Denklemi.	43
2.5. Boussinesq Denklemine Elemanter Çözümü.	50

BÖLÜM 3: TANIUTİ-WEİ İNDİRGEME METODU

3.1. Giriş	55
3.2. Genel İndirgeme Metodu	59
3.3. Genelleştirilmiş KdV Denklemine Yaklaşık Çö- zümü	68
3.4. Genelleştirilmiş Boussinesq Denklemine Yakla- şık Çözümü	72
3.5. Özel Haller.	84
EK	100
SONUÇLAR	104
TEŞEKKÜR	105
KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	112

SUMMARY

In this thesis has been shown that Some special cases of crystal lattice equation [21].

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \beta v^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi} - \epsilon_1 \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} = 0$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\partial v^*}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} (u^* v^*) - \epsilon_1 \frac{\partial^3 v^*}{\partial \xi^3} = 0$$

is the matrix KdV equation and solvable by the method of inverse scattering transformation, [4,15,19] and in the other cases in the crystals lattice equation asymptotically reducible in to Kordeweg-de Vries equation.

In the first chapter, the KdV equation [13] and some of its properties introduced. Also the method of inverse scattering transformation and the formalisms of Lax [15] and of Ablowitz-Koup-Newell-Segur (AKNS) [4] have been discussed briefly.

In the second chapter has been shown that the Crystals-Lattice equation are in the type of generalized KdV or generalized Boussinesq equation and not general solveble by the direct use of the inverse scattering transformation.

However in a special case the coefficients of crystal lattice equation will be transformed into the Matrix KdV equation.



In this special form can be possible to solve the equation by inverse scattering transformation.

In the third chapter, using of the asymptotic Taniuti-wei reductive method, the crystal Lattice equation reduced asymptotically in to the KdV or MKdV equation [44,46].



Ö Z E T

Bu çalışmada,

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \beta v^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi} - \epsilon_1 \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} = 0$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\partial v^*}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} (u^* v^*) - \epsilon_1 \frac{\partial^3 v^*}{\partial \xi^3} = 0$$

Kristal şebeke denkleminin, katsayılarının özel durumunda, matris KdV denklemi olduğu ve bunun ters saçınım metoduyla çözülebildiği, genel durumda pertürbatif yöntemle KdV veya MKdV denkleminde indirgenebileceği ve çözülebileceği gösterilmiştir [41,48,50].

Çalışmanın birinci bölümü, daha ziyade tanıtma niteliğinde olup, bu bölümde KdV denklemi ve bunun bazı özellikleriyle birlikte ters saçınım metodunun Lax ve A-K-N-S (AKNS) formalizmleri, kısaca tanıtılmaya çalışılmıştır [15, 2,3].

İkinci bölümde kristal şebeke denklemlerinin genelleştirilmiş KdV veya Boussinesq tipinde olduğu görülmüş, ve bu denklemlerin genel olarak ters saçınım dönüşümü ile çözülemediği, ancak kat sayılarının özel durumunda, şebeke denklemleri matris KdV denkleminde dönüşmüş olup bu çözülebilirdir [21,26,38].

Bu bölümde ayrıca ters saçınım dönüşümü ile çözülebilecek alan denklemleri çıkartılmıştır.

Üçüncü bölümde, asimtotik Tanuiti-Wei indirgeme metoduyla, kristal şebeke denklemleri KdV denkleminde indir-

Benmiş ancak çözümler üzerinde durulmamıştır. Zira KdV denkleminin veya MKdV denkleminin çözümleri değişik yöntemlerle bulunmuştur. Bu bakımdan burada çözümleri vermek enterasan değildir [44-46-48-49].



BÖLÜM I

KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ VE TERS SAÇINIM DÖNÜŞÜMÜ

1.1. TARİHİ GELİŞİM:

J. Scott-RUSSELL'in, 1844 de bir kanalda ilerleyen bir dalga ile at sırtında yaptığı yarışı anlatan "DALGALAR ÜZERİNE RAPOR"u Korteweg-de Vries (KdV) denklemi üzerine yapılan araştırmaların ve yayınlanan makalelerin girişinde yer almaktadır. Biz bu geneleğe uyalım ve SCOTT-RUSSELL'in sözlerini burada iktibas edelim [51].

Dar bir kanal boyunca iki at tarafından hızla çekilen bir kayığın hareketini gözlüyordum. Kayır birden durunca kanalda kayığın harekete geçirdiği su aynı şekilde durmadı. Aracın arkasında şiddetle tahrik edilmiş şekilde toplandı sonra aniden aracı arkada bırakarak büyük bir hızla ileri doğru yuvarlandı, hareket eden şey yuvarlak düzgün ve iyi tanımlı bir su tümseği büyük bir soliter yükselti halini almıştı, kanal boyunca yolunu ve biçimini değiştirmeden ve hızını azaltmadan ilerliyordu, onu at sırtında olduğum halde izledim ve saatde 8-9 millik hızla ilerlemekte iken ona yetiştim. Boyu 30 ayak kadar ve yüksekliği bir buçuk ayak kadar olan ilk şeklini koruyordu yüksekliği yavaş yavaş azaldı ve bir yada iki millik yarıştan sonra onu kanalın kıvrımları arasında kaybettim, işte bu tekil ve şahane güzel olayla ilk tanışmam 1834'ün Ağustos ayında böyle oldu.



KdV'nın 1895 de yayınlanan makalesinde, Scott-Russell tarafından gözlenen olaya matematiksel bir açıklama getirmek amacı ile bir model ileri sürülüyordu. Bu orijinal şekli ile denklem; [13]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (1.1.1)$$

biçimindeydi. Burada x bir boyutlu kanal boyunca ölçülen bir değişken, t zaman, $\eta(x,t)$ su yüzeyinin, denge seviyesinden yüksekliği, g yerçekimi ivmesi, α sıvının düzgün (Üniform) hareketi ile ilgili bir katsayı, l suyun derinliği, σ ;

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 \frac{Tl}{\rho g} \quad (1.1.2)$$

ile tanımlı ikinci bir sabit, T yüzey gerilimi, ρ yoğunluktur. (1.1.1) denklemi bu gün KdV denklemi olarak bilinmektedir.

Hemen hemen 65 yıl boyunca KdV denklemi sakin bir hayat yaşadı, ara sıra Literatürde adı geçti, ara sıra unutuldu [7] patlama 1960 yıllarında Gardner ve Morikova denklemi çarpışmasız hidromanyetik dalgaların incelenmesinde yeniden bir model olarak keşfettikleri zaman oldu, bu tarihten beri KdV denklemi çok çeşitli fiziksel olayları tasfir eden bir model denklem olarak çeşitli kalıplarda tekrar tekrar çıkarılıyor. Bugün KdV denkleminin matematiksel fiziğin temel denklemlerinden biri gözü ile bakılabilir ancak şöhreti sadece buna dayanmamaktadır.

Aynı ölçüde önemli bir sebep de KdV denkleminin incelenmesinden çıkan matematik yöntem ve sonuçlardır. Bu yöntem ve sonuçlar, dalga yayılımının "Pratik" sorunlarından cebirsel geometrideki daha "saf" konulara kadar uygulama sahaları bulmuştur [9]. Bugün meşhur olan bu denkleme adlarını veren şahısların kimler olduğu ve nasıl işbirliği

yapmış oldukları da tabii olarak akla gelecek sorulardandır. Bu sorulara Vander Bilj (1978) de bazı cevaplar vardır. Didrik Johannes Korteweg (31.3.1848 5.10.1941) Amsterdam Üniversitesi'nde tanınmış bir profesör ve bir çok makalenin yazarıdır.

Gustov de Wries, Korteweg'in gözetiminde bir doktora tezi yazdı ve onu 1 Aralık 1984 de Amsterdam Üniversitesinde sundu. Bu tez Hollanda dilinde idi ve 9 nci sahifesinde bu gün KdV denklemi olarak bilinen denklemi içeriyordu, öyle görülmüyorki G. de Vries bundan sonraki meslek hayatının çoğunu bir lise öğretmeni olarak geçirmiş. Son olarak şöhret ve popülerliğine rağmen KdV denkleminin bir kanaldaki (Uzun) su dalgalarının davranışı temsil eden bir model denklem olarak rakipsiz kalmadığını da belirtelim. Bona ve Mahony (1972) başka bir model önerdi, bu konuların münakaşası mesela [14] de bulunabilir.

Ayrıca KdV denklemi ile temsil edilen olayları şöyle sıralamak mümkündür.

Sığ su dalgaları-plazmalarda Ion-Acoustic dalgaları, plazmalarda Magneto-hidrodynamic dalgaları, Elastik ortamlarda ki boyuna dalgalar vs. [11-9-17].

1.2. ELEMENTER ÖZELLİKLER

KdV denkleminde başlangıçtaki fiziksel problemin bütün izlerini silecek bir değişken dönüşümü ile KdV denkleminin standart biçimleri elde edilir, en çok kullanılan biçim (1.1.1) den

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{1\tau}} t; \quad \bar{x} = \frac{-x}{\sqrt{g}}; \quad u = \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{3} \alpha \quad (1.2.1)$$

dönüşümleri ile elde edilir, ve KdV denklemi



$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.2.2)$$

şeklini alır. İkinci terimin önündeki sayısal çarpan hiç bir özel önem taşımamaktadır. Aslında $x, t \rightarrow \bar{x}, \bar{t}; \eta \rightarrow u$ dönüşümlerini biraz değiştirerek $\mu, \nu, \gamma, \neq 0$ keyfi olarak değiştirilebilecek sayısal çarpanlar olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + \mu \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \nu u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad (1.2.3)$$

denklemini elde edilebilir bununla beraber biz burada yaygın olarak kullanılan (1.2.2) biçimini kullanacağız. KdV denkleminin aşağıdaki anlamda GALİLE tipi invaryantlığı olduğuna da dikkati çekelim

$$t = \bar{t}; \quad x = \bar{x} - ct; \quad u(x, t) = u(\bar{x} + ct, \bar{t}) + \frac{1}{6} c \quad (1.2.4)$$

dönüşümü altında u

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.2.5)$$

denklemini sağlar. burada

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad \text{dir.}$$

Lineerleştirilmiş KdV yani

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (1.2.6)$$

denklemini incelersek bu denklemin her k dalga sayısı için c dalga hızının

$$c = -k^2 \quad (1.2.7)$$

eşitliğini sağlaması şartı ile

$$U(x, t) = A e^{ik(x-ct)} \quad (1.2.8)$$

Harmonik dalgalarını çözüm kabul ettiğini görürüz, faz hızı sabit olmayan (dalga sayısının bir fonksiyonu olabilir) dalgalara "Dispersiyon'lu" dalgalar denir, (Whitham 1974) (1.2.7) bağıntısınınada Dispersiyon bağıntısı denir. (1.2.6) denklemi lineer olduğundan (farklı dalga sayılarında) harmonik dalgaların herhangi bir süper pozisyonu yine (1.2.6) nın bir çözümüdür. Lineerleştirilmiş KdV denkleminin bütün dispersiyonlu dalga çözümlerinin (zaman ilerlerken) sola doğru hareket ettikleri dikkatimizi çekiyor.

Şimdi yeniden KdV denkleminin tanımına dönüyor ve kalıcı tip denen kalıpta özel çözümlerin varlığını araştırıyoruz. Bunlara gezen veya ilerleyen dalgalarda deniyor. Bunlar hareket eden özel bir koordinat sisteminden bakıldığında zamanla şeklini değiştirmeyen dalgalardır. [52]

$$u(x,t)=u(x-ct) \quad (1.2.9)$$

kabul ederiz, bu KdV denkleminde yerine konduğunda üstler $z=x-ct$ ye göre türevleri göstermek üzere

$$u'' - (6u+c)u' = 0 \quad (1.2.10)$$

adi lineer olmayan diferansiyel denklemi elde eder, bunu bir kere integre ederek m keyfi bir sabit olmak üzere

$$u'' - 3u^2 - cu = m \quad (1.2.11)$$

elde ederiz. Bunu u' ile çarpıp bir kere daha integre edersek, n tekrar keyfi bir sabit olmak üzere

$$u'^2 - 2u^3 - cu^2 - 2mu = 8 \quad (1.2.12)$$

elde edilir, son aşamada u eliptik integreller cinsinden kapalı olarak ifade edilebilir. Sonuçta cn jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden ifade edilen, $u(z)=u(z+T)$ gibi periyodik çözümlerin varlığı sonucuna gidilebilir, bunlara bu yüzden "cnoidal" dalgalar denir [18].

Aşağıda $z \rightarrow \pm\infty$ için kendisi ve türevleri sıfır olan kalıcı tipde $u(z)$ çözümlerine önem verilecektir.

Bu çözümlerde "soliter dalgalar" adı verilecektir.

Soliter dalga için (1.2.11) de $m=0$ ve (1.2.12) de $n=0$ konursa

$$u'^2 = u^2(2u+c) \quad (1.2.13)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde kolayca integre edilerek x_0 keyfi bir sabit olmak üzere

$$u(x,t) = u(x-ct) = -\frac{1}{2}c \operatorname{Sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-c_0+x_0)\right] \quad (1.2.14)$$

bulunur. Hatta

$$\operatorname{Sech}^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z} = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2} \quad (1.2.15)$$

olur ki bu soliter dalga $z \rightarrow \pm\infty$ için üstel olarak azalır şu iki gözlem önemlidir, a) Soliter dalga çözümü sadece $c>0$ için mevcuttur. böylece KdV denkleminin her soliter dalga çözümü (Artan t için) sağa doğru hareket eder, b) Soliter dalganın yayılma hızı dalganın genliği ile orantılıdır, böylece büyük soliter dalga küçük olandan daha hızlı yayılır.

1.3. SOLİTON DAVRANIŞI

KdV denklemi lineer olmadığından soliter dalgaların süper pozisyonu denklemin çözümü olmayacak, bu yüzden soliter dalgaların, KdV denkleminin genel teorisi içindeki rolü çok sınırlı olacağı düşünülebilir, bu kanaata ters doğrultuda ilk belirtiler [30] da görülebilir.

Soliter dalgayı tanımlayan fonksiyonu

$$S(z,c) = -\frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c} z\right) \quad (1.3.1)$$

ile gösterelim ve aşağıdaki deneyin yapıldığını farz edelim KdV denkleminin çözümü olan $u(x,t)$ nin $t=0$ anındaki değeri olan $u(x,0)$ nin $X>0$ ve yeteri kadar büyük, $c_1 > c_2$ olmak üzere

$$u(x,0) = S(x,c_1) + S(x-X,c_2) \quad (1.3.2)$$

ile verilmiş olsun, Soliter dalga üstel olarak azaldığından, zaman başlangıcındaki iki soliter dalga bir biri içine o kadar girmemiştir. Zamanla $c_1 > c_2$ olduğundan büyük soliter dalganın küçük soliter dalgayı yakalamaya çalışacağı gözlenecektir. Acaba girişimin etkisi ne olacaktır?

Zabusky ve Kruskal'ın çalışmalarında deney mümerik analiz ile gerçekleştirildi, $t=T>0$ yeteri kadar büyük iken θ_1 ve θ_2 sabitler olmak üzere

$$u(x,T) = S(x-c_1 T - \theta_1, c_1) + S(x-c_2 T - \theta_2, c_2) \quad (1.3.3)$$

elde edilir, böylece iki soliter dalga girişiminden sonra şekil bakımından değişmemiş iki soliter dalga olarak çıkarlar girişimin yegane tesiri θ_1 ve θ_2 faz kaymaları ile temsil edilir, çarpışmalarda özelliklerini korudukları için Kruskal ve Zabuskı onlara "Soliton" dediler bu isim onların parçacık gibi davrandıklarını ima ediyor, Soliton terimi bilhassa matematiksel fizikte hemen popüler oldu, Solitonun ne olduğunun matematiksel bir tanımı ortada görülmüyor, tanım genellikle özel bir problem kalıbında bir formül vasıtası ile yapılıyor [53].

1.4. MIURA DÖNÜŞÜMÜ ve MODİFİYE KdV DENKLEMİ

Matematik literatüründe öyle dönüşümler vardır ki bazı lineer difiransiyel denklemlerin yardımı ile bunlara ilişkin lineer olmayan denklemin çözümleri üretilir, oldukça elemanter bir örnek şöyle verilebilir [16-53],

TEOREM: (1.5.1): $v(x)$ $v_{xx} - u(x)v = 0$

Schrödinger denkleminin bir çözümü olsun $w = \frac{v_x}{v}$
ile tanımlanan $w(x)$ fonksiyonu

$$w_x + w^2 = u$$

Riccati denkleminin bir çözümüdür, teorimin ispatı doğrudan yerine koyma ile elde edilir, şimdi basit fakat önemli bir genelleştirmeden söz edeceğiz, yani $v(x), \lambda$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$v_{xx} - [u(x) - \lambda]v = 0 \quad (1.5.1)$$

denklemini sağlarsa

$$w = \frac{v_x}{v} \text{ ile tanımlanan } w(x)$$

$$w_x + w^2 = u - \lambda \quad (1.5.2)$$

denklemini sağlar bu karmaşık sonuç Hopf ve Cole (1951) tarafından bulundu.

Teorem (1.5.2): $v(x, t); v_t = v v_{xx}$

Isı denkleminin bir çözümü olsun o zaman $w = -2v \frac{v_x}{v}$

HOPF-COLE dönüşümü ile tanımlanan $w(x, t)$ fonksiyonu



$$w_t + ww_x = v w_{xx} \quad (1.5.3)$$

Burgers denklemini sağlar, ispat yine yerine koyma ile yapılır. Burgers denkleminin bir dereceye kadar KdV denklemini temsil ettiğini dikkat edelim, teorem 1.5.2 de ifade edilen sonuçların varlığı ışığında KdV denklemini için benzer bir dönüşüm aramak doğal olacaktır. Aşağıdaki sonuç Miura (1968) e aittir [16].

$$\text{Teorem (1.5.3)} \quad w(x,t) \quad w_t - 6w^2 w_x + w_{xxx} = 0$$

Modifiye KdV denkleminin bir çözümü olsun o zaman $u = w^2 + w_x$

Miura dönüşümü ile tanımlanan $w(x,t)$ fonksiyonu

$$\text{KdV denklemini sağlar yani } u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

dır.

İspat yine yerine koyma ile yapılabilir;

Teorem (1.5.1) ve (1.5.2) de verilen sonuçlarla karşılaştırdığımızda Miura dönüşümünün ters bir doğrultuda işlediği görülmektedir. Lineer olmayan KdV denkleminin çözümleri Nonlineartesi daha kuvvetli bir denklemin çözümleri tarafından doğrulanmaktadır.

Şimdi Miura dönüşümünün ters doğrultuda yorumlandığını düşünelim bu, dönüşüm olarak W yı u cinsinden tanımlar o zaman W Riccati denkleminin bir çözümüdür, KdV denklemini Galile tipi invaryant olduğundan

$$u - \lambda = w^2 + w_x \quad (1.5.4)$$

yazılırsa 1.5.1 (1.5.2) (1.5.3) denklemleri üzerinde KdV denklemini ilişkin olarak u potansiyeli KdV denklemini sağlamak üzere (1.5.1) Schrödinger denklemini inceleme durumunda oluruz, okuyucu teorem 1.5.3'ü izleyince yukarıdaki incele-

meleri tatmin edici bulsa dahi öğretici bulmayabilir, mamafi [14,53] kullanılan yol çoğu kez budur. Gardner, Greene, Kruskal ve Miura 1967 KdV için başlangıç değer problemini çözmeye yönelten düşüncede budur [10,14].

1.5. TERS SAÇINIM DÖNÜŞÜMÜ İLE GARDNER-GREENE-KRUSKAL-MIURA (GGKM) ÇÖZÜMÜ

Ters saçınım dönüşümü yöntemi ve solitonlar teorisi uygulamalı matematik sahasının en yeni ve büyüleci gelişmelerindendir. Teorinin dahaziyade 15 yıl içinde vukû bulan gelişmesi patlama biçiminde olmuş ve sonuçları geniş etkiler yapmıştır. Amacımız önce konuya yatkın olmayanlar, solitanları hiç duymamış matematikçi ve fizikçiler veya bu gibi yeni kavramların uyandırdığı heyecanı uzaktan izleyenler için bir giriş yapmaktadır [11].

Bir dizi şaşırtıcı ve ilgi çekici buluşları ile Gardner-Greene Kruskal-Miura (GGKM) KdV denklemi için daha sonra çeşitli genelleştirmelerle ters saçınım dönüşümü denen (buna Spektral dönüşümünde denir) bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir.

GGKM yönteminin başlangıç noktası

$$v_{xx} - \{u(x,t) - \lambda\}v = 0 \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1.5.1)$$

Schrödinger denklemi içindeki potansiyeller olarak

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad t \geq 0 \quad (1.5.2)$$

KdV denklemini sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonları önermektir.

(1.5.2) KdV denkleminin

$$u(x,0) = u(x) \quad (1.5.3)$$



Başlangıç koşulu altında çözümünü bulmak istiyoruz.

Bu probleme ilişkin olarak,

$$v_{xx} - \{u(x,t) - \lambda\}v = 0 \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1.5.4)$$

Schrödinger denklemini gözönüne alırız [54,55].

$t=0$ için spektrum hesaplanır. Bunlar sonlu sayıda (veya belkide sıfır tane)

$\lambda = -k_n^2$ ayrık özdeğeri ile $\lambda = k^2$ gibi bir sürekli kısmıdan oluşur. Sonra

$$C_n(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{k_n x} \psi(x,t) = C_n$$

ile olarak tanımlanan $C_n(t)$ normalizasyon katsayısı ve $b(k,t)$ yansıma katsayısı hesaplanır. Daha önceki bir teorem'de spektrom'un zamana bağlı olmadığı ispatlandı, saçınım bilgisinden

$$C_n(t) = C_n(0) e^{4k_n^3 t}; \quad b(k,t) = b(k,0) e^{8ik^3 t} \quad (1.5.5)$$

olduğu gösterilebilir. Schrödinger denkleminin potansiyeli herhangi bir $t > 0$ anındaki saçınım bilgisinden ters saçınım problemi çözülerek bulunur. Bu amaçla,

$$K(\xi, t) = \sum_{n=1}^N C_n^2(t) e^{-k_n \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k,t) e^{ik\xi} dk \quad (1.5.6)$$

fonksiyonu ve

$$g(x,y,t) + K(x,y,t) + \int_x^{\infty} K(z,y,t) g(x,z,t) dz = 0 \quad (1.5.7)$$

Gelfand-Levitan Integral denklemi ithal edilir. Bu son denklemde x ve t parametrelerden KdV denkleminin başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x,x,t) \quad (1.5.8)$$

formülünden elde edilir. Şuna dikkat çekelimki Nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemi bu şekilde bir boyutlu lineer integral denklemine indirgenmiş oluyor.

Yukarıda özetlenen GCKM yöntemi ve bunların buluşundan hareketle daha sonra elde edilen ilerlemelere "Ters saçınım dönüşümü" denir.

1.6. LİNEER SCHRODINGER DENKLEMİ İÇİN SAÇINIM PROBLEMİ

Bu bölümde GCKM yöntemi özetlenecektir. Sonuçlar genel teoremin bir gereci olarak hizmet edecektir. Notasyon kolaylığı bakımından bu kesimde potansiyelin zamana bağımlılığını yok farz edecek ve

$$v_{xx} - \{u(x) - \lambda\}v = 0 \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1.6.1)$$

denklemini gözönüne alacağız, burada $U(x)$ potansiyelinde

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| |x|^k dx < \infty \quad k=0,1,2,\dots \quad (1.6.2)$$

şartını sağladığını kabul edeceğiz. λ nın (Öz değer denen) öyle değerlerini ayırıyoruz ki; bu değerler için (1.6.1) denkleminin $[x] \rightarrow \infty$ için sınırlı kalan çözümleri vardır. Bütün öz değerlerin topluluğuna verilen bir $U(x)$ potansiye-line karşılık gelen spektrum denir. (1.6.2) sağlayan her potansiyel için sonlu sayıda

$$\lambda = \lambda_n = -k_n^2 \quad k_n \in \mathbb{R}^+ \quad (1.6.3)$$

öz değerleri vardır. Bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar

$$\psi_n(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

olur. Öz fonksiyonları



$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x) dx = 1 \quad x \rightarrow +\infty \text{ iken } \psi_n(x) > 0 \quad (1.6.4)$$

şeklinde normalize edilmiş olarak alacağız. Bu öz fonksiyonların $x \rightarrow +\infty$ için davranışları

$$\psi_n(x) \sim \begin{cases} C_n e^{-k_n x} & x \rightarrow +\infty \text{ iken} \\ \bar{C}_n e^{k_n x} & x \rightarrow -\infty \text{ iken} \end{cases}$$

ile verilmiştir, böylece normalizasyon katsayıları

$$C_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{k_n x} \psi_n(x) \quad (1.6.5)$$

şeklinde tanımlanmış olur.

Schrödinger denkleminin

$$\lambda = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad k \neq 0 \quad (1.6.6)$$

için $[x] \rightarrow +\infty$ için sınırlı çözümleri de vardır. $\psi_k(x)$ ile gösterilecek olan bu çözümler $x \rightarrow +\infty$ için e^{-ikx} ile e^{ikx} in bir lineer kombinasyonu gibi davranacaklardır. $\psi_k(x)$ çözümlerini aşağıdaki normalleştirmeler yardımı ile tanımlarız.

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{-kx} + b(k) e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \text{ için} \\ a(k) e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \text{ için} \end{cases} \quad (1.6.7)$$

Buradaki $a(k)$ ya iletim katsayısı $b(k)$ yada yansıma katsayısıdır, bu ikisi

$$[a]^2 + [b]^2 = 1 \quad (1.6.8)$$

Korunum yasası ile birbirine bağlıdır. ψ_n ve ψ_k fonksiyonları yukarıdakinden farklı şekilde de tanımlanabilir, bu çeşitli normalleştirmeler arasındaki bağıntıların üzerinde durmayacağız, genel olarak belli bir normalleştirmenin

kullanılması bir zevk meselesi ve bazende bir kolaylıktır. C_n , $a(k)$, $b(k)$ katsayıları ile birlikte Schrödinger denkleminin spektrumuna, verilen $u(x)$ potansiyelinin saçınım bilgisi denir. Şimdi ters saçınım problemine dönüyoruz, burada problem saçınım bilgisinden yararlanarak $U(x)$ potansiyeline bulmaktır. Bu çözüm şöyle elde edilir,

$$B(\xi) = \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-k_n \xi} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik\xi} dk \quad (1.6.9)$$

yardımı ile bir fonksiyonunu tanımlayalım, burada N ayrık özdeğerlerin sayısıdır. Eğer ayrık özdeğer yoksa (1.7.9) ifadesinin sağındaki ilk terim yok olacaktır. Biz birde

$$K(x,y) + B(x+y) + \int_x^{\infty} B(z+y) K(x,z) dz = 0 \quad y > x \quad (1.6.10)$$

integral denkleminin çözümü olarak $K(x,y)$ fonksiyonunu tanımlarız o zaman

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x) \quad (1.6.11)$$

olur, (1.7.10) integral denklemine GEL'FAN -LEVITON denkleminin denir. Bazı yazarlar buna MARCHENKO denkleminde derler [12] .

1.7. LAX YAKLAŞIMI

L , Fonksiyonların V Banach uzayları üzerinde tarif edilmiş kapalı operatörlerin bir ailesi olsun. L sabit bir operatör ve M_u , t parametresi ile $u(x,t)$ gibi fonksiyonlar ailesiyle çarpım operatörü olmak üzere, L yi $L = L_0 + M_u$ şeklinde alalım. Sabit bir t anında L nin spektrumu; $L + \lambda$ operatörünün V nin bütün değerleri için sınırlı, sürekli bir tersinin bulunmadığı λ değerlerinin topluluğudur. $u(x,t)$ lere karşılık gelen spektrum t 'ye bağlı değilse $u(x,t)$ 'lere eş spektrumlu potansiyeller denir.

GCKM analizinin önemli keşiflerinden biri KdV denkleminin $[x] \rightarrow \infty$ için uygun azalırılık özelliklerine sahip çözümlerinin, Schrödinger denklemi için eş spektrumlu potansiyeller olmalarıdır. Bu keşif bizi en azından şu kaçınılmaz sorunlara götürmektedir.

1. KdV denkleminden başka, çözümleri Schrödinger denklemi için eş spektrumlu potansiyeller olan başka denklemler var mıdır?

2. Schrödinger denkleminden başka, bazı ilginç evolüsyon denklemlerinin çözümü olarak eş spektrumlu potansiyelleri bulunabilen özdeğer problemleri var mıdır?

3. $u(x,t)$ fonksiyonları için bir evolüsyon denklemi verildiğinde $u(x,t)$ eş spektrumlu potansiyelleri olacak şekilde bir öz değer problemi bulunabilir mi?

P. LAX [15] 1. soruya olumlu olarak cevap verdi, 2. soruya da cevaplama yolunu işaret eden bir formalizm geliştirdi, 3. soruya henüz sistematik bir cevap verilemedi.

LAX'ın yaklaşımı iki operatörün aynı spektrum'a sahip olması olayını Hilbert uzaylarındaki Selfadjoint (kendine eş) operatörler teorisinde iyi bilinen ve üniteler eş değer operatörler kavramı ile alâkalı bir olay oluşunun gözlenmesi ile başlıyor. Bu düzen içerisinde LAX eş spektrum'lu potansiyellerin karakterize edilmesine imkan veren bir formalizm geliştirdi. Biz burada bu formalizm'in matematiksel ayrıntılarını değil, basit bir özetini sunacağız. Ayrıca, bu bölümle ilgili temel teoremlerden birinin ispatını, diğerlerinin ise ifadesini vereceğiz.

Teorem: 1.7.1 V Hilbert uzayı içinde "Yoğun olarak tanımlanmış" t parametresine göre sürekli türetilebilen bir parametrelili kendine eş L operatörünü ele alalım. L nin

ayrık özdeğerlerinin ve bunlara karşılık gelen ψ öz fonksiyonlarının t 'ye göre sürekli türetilibildiklerini varsayalım. Öyle ki; $\psi, \psi_t \in V_0 \subset V$ olsun. Ayrıca B, BL, LB, L, V nin V_0 alt cümlesinde "Yoğun olarak" tanımlanmak koşuluyla

$$\frac{\partial L}{\partial t} = BL - LB$$

olacak şekilde bir parametrelili operatörler ailesinin bir B operatörünün varolduğunu kabul edelim. Bu takdirde L nin ayrık özdeğerleri t ye göre değişmez kalır. Hatta özdeğerler basit ise bunlara karşılık gelen ψ özfonksiyonu

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (B+C)\psi$$

Gelişim denklemini sağlar ki burada C t 'nin keyfi fonksiyonudur. Şayet $B+C$ Antisimetrik ise $\|\psi\|$ t 'den bağımsızdır.

İSPAT

$\xi(t)$ özdeğer $\psi(,t)$ 'de buna karşılık gelen özfonksiyon olsun

$$L\psi + \xi\psi = 0 \quad (1.7.1)$$

Özdeğer problemini düşünüp, t 'ye göre türev alırsak

$$\frac{\partial L}{\partial t} \cdot \psi + L \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \psi + \xi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (1.7.2)$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial t} = BL - L \quad (1.7.3)$$

olduğunu bildiğimizden;

$$(L + \xi) \frac{\partial \psi}{\partial t} + BL\psi - LB\psi + \frac{\partial \xi}{\partial t} \psi = 0 \quad (1.7.4)$$

bulunur. (1.7.1)'e B operatörünün soldan tatbik edersek

$$BL\psi = -\xi B\psi \quad (1.7.5)$$

elde edilir. Böylece

$$(L+\xi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - B\psi \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \psi = 0 \quad (1.7.6)$$

elde edilir. Bunun iki yanını ψ öz fonksiyonu ile çarpar

$$\langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2$$

olduğuna dikkat edersek

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \|\psi\|^2 = -\langle \psi, (L+\xi) (\psi_t - B\psi) \rangle \quad (1.7.7)$$

L 'nin self adjoint olduğunu kullanırsak

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \|\psi\|^2 = -\langle (L+\xi) \psi, \psi_t - B\psi \rangle \quad (1.7.8)$$

bulunur. (1.7.1)'e göre (1.3.8)'in sağ yanı sıfır olduğundan

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (1.7.9)$$

bulunur.

Bu ξ nin; $t=t_0$ anındaki özdeğeri olduğunu biliyorsak, bunun her t için özdeğer olduğunu, yani özdeğerlerin t 'den bağımsız olduğunu gösterir. Şimdi (1.7.6)'ya döner $\xi_t = 0$ olduğunu düşünersek,

$$(L+\xi) (\psi_t - B\psi) = 0 \quad (1.7.10)$$

elde edilir. Bu ise

C, t 'nin keyfi sürekli bir fonksiyonu olmak üzere

$$\psi_t - B\psi = C\psi \quad (1.7.11)$$

olduğunda gerçekleşir. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\psi\|^2 = \langle \psi, (B+C)\psi \rangle + \langle (B+C)\psi, \psi \rangle \quad (1.7.12)$$

B+C Antisimetrik ise

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\psi\|^2 = 0 \quad (1.7.13)$$

bulunur. Böylece teorem ispat edilmiş olur [15].

Teorem (1.7.2) V Hilbert uzayında "yoğun olarak tanımlanmış" t parametresine göre sürekli türetilebilen bir parametrelili kendine eş operatörler ailesinden L operatörünü düşünelim. Eğer bir parametrelili bir antisimetrik operatörler ailesinin aşağıdaki şartları sağlayan B operatörü varsa L'nin spektrumları t'den bağımsızdır.

$$i) \frac{\partial L}{\partial t} = BL - LB$$

$$ii) \frac{\partial U}{\partial t} = BU \quad (U)_{t=0} = I \text{ (idantik operatör)}$$

operatör denkleminin her $t > 0$ için V üzerinde bir parametrelili çözüm ailesi vardır.

iii) LU t'ye göre türetilebilir.

Teorem (1.7.3) L, $\tilde{L}$ uniter eşdeğer kendine eş iki operatörse bunlar aynı spektrum'a sahiptirler.

Lax Metodunun esası:

$u_t = K(u)$, $u(x,0) = u(x)$ başlangıç şartı ile verilen Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi çözmek istiyoruz. Bu Lineer olmayan problemi L Lineer operatör olmak üzere

$$L\psi + \xi\psi = 0 \quad (1.7.14)$$

saçınım problemi haline dönüştüreceğiz. Buradaki u lineer Schrödinger denklemindeki katsayı olup, L'nin özvektörleri-

nin t 'den bağımsız olması gerektiğini biliyoruz. Bu durumda ψ saçınım dalgası $x \rightarrow +\infty$ iken $U_0(x)$ den elde edilecektir. ψ 'nin $x \rightarrow +\infty$ 'deki davranışı

i) Sürekli spektrum halinde

$$\begin{aligned} \psi^+ &= e^{-ikx} + R(k,t)e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \text{ iken} \\ \psi^- &= T e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \text{ iken} \end{aligned}$$

ii) Ayrık spektrum halinde

$$\begin{aligned} \psi_b^+ &= C_n^+ e^{-k_n x} & x \rightarrow +\infty \\ \psi_b^- &= C_n^- e^{k_n x} & x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

formundadır. Buradaki R , T , C_n^+ ve C_n^- $u(x,0)$ kullanılarak $t=0$ için elde edilirler. Gelişim denklemi ise B operatörünü ihtiva eden,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi \quad (1.7.15)$$

den elde edilir. L 'nin özdeğerlerinin t 'den bağımsız olması şartıyla LAX şartı denen

$$\frac{\partial L}{\partial t} = BL - LB = [B, L] \quad (1.7.16)$$

bağıntısından B operatörü bulunur. Son olarak $\psi(x,t)$ yani $R(t)$, $T(t)$ ve $C_n^+(t)$ belli olduğunda $g(x,y,t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$g(x,y,t) + K(x,y,t) + \int_{y=x}^{\infty} K(y,y',t)g(x,y',t)dy' = 0 \quad (1.7.17)$$

Gel'fant-Levitan (Marchenko) denklemini çözeceğiz. Burada

$$K(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k,t)e^{ikx} dk - \sum_{n=1}^N C_n(t)e^{-k_n x} \quad (1.7.18)$$

olup, N ayrık özdeğerlerinin sayısıdır.

Şayet ayırık özdeğer yoksa (1.7.18) de son terimin sıfır olacağı aşıkardır.

Saçınım teorisinde

$$u(x,t) = -i \frac{\partial}{\partial x} K(x,x,t)$$

den elde edilmektedir. Lax B operatörü

$$B_q = \frac{\partial^{2q+1}}{\partial x^{2q+1}} \sum_{j=1}^q (b_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} b_j)$$

formunda bulmuştur. ($q=0,1,2,\dots$).

1.8. ZAKHARAR-SHABAT SİSTEMİ

Lax Formalitasyonunda L operatörü geneldir, burada L olarak Kuantum mekanikini lineer Schrödinger operatörünü alacağız, Yani

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$$

dir.

Zakharov Shabat Sistemi aşağıdaki biçimdedir [19].

$$\psi_{1x} = -i\xi\psi_1 + u(x,t)\psi_2$$

$$\psi_{2x} = i\xi\psi_2 + \psi_1$$

(1.8.1)

Bu Lax yaklaşımındaki

$$L\psi = \lambda\psi$$

saçınım problemini eşdeğerdedir, hakikaten (1.8.1) sistemi

$$(\frac{\partial}{\partial x} + i\xi)\psi_1 = u(x,t)\psi_2$$



$$\psi_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\xi \right) \psi_2$$

formunda yazılarak ψ_1 elimine edilerek

$$L\psi_2 = \xi^2 \psi_2$$

bulunur. $\psi_2 \equiv \psi$; $\xi^2 = \lambda$ diyecek olursak (1.8.3) ifadesinin (1.8.2) ye eşdeğer olduğu görülür.

Zakharov-Shabat sisteminin genelleştirilmesi Ablowitz-Kaup-Newell-Segur formu.

Bu bölümde Lax yaklaşımından farklı, ancak sonuçları eşdeğer bir yaklaşım sonucu ters saçınım metodu ile çözülebilecek lineer olmayan gelişim denklemini çıkaracağız $|2,3,4|$.

$$\psi_{1x} = -i\xi\psi_1 + u(x,t)\psi_2$$

$$u_{2x} = i\xi\psi_2 + u(x,t)\psi_1 \quad (1.8.4)$$

genelleştirilmiş Zakharov-Shabat sistemini

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$L\tilde{\psi} + i\xi\tilde{\psi} = 0$$

formunda yazabiliriz. Burada

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -u \\ v & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

dir. Genel olarak L operatörü kendine eş değildir. Bu nedenle kendine eş operatörler için yaptıklarımızı burada yapamayız. Ancak benzer bir yöntemle

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi$$

olacak şekilde B operatörünü bulabiliriz. Ancak burada amacımız bu değildir.

(1.8.4) özdeğer problemine eşlik eden gelişim denklemleri

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (1.8.9)$$

elde edilir, burada $d=-a$ almakla genelliği pek bozmayız, ancak bazı kolaylıklar elde ederiz bu açıdan burada böyle alacağız,

$$\psi_{1tx} = \psi_{1xt}; \psi_{2tx} = \psi_{2xt} \quad (1.8.10)$$

olduğuna dikkat edersek

$$\begin{aligned} a_x &= uc - vb \\ b_x &= -2ua + iu_t - 2i\xi b \\ c_x &= 2va + iv_t + i\xi c \end{aligned}$$

AKNS denklemleri elde edilir, bu denklemler yardımı ile sistematik olarak bu yöntemle çözülebilecek evalüsyon denklemini çıkartabiliriz. (1.8.10) dan lineer olmayan denklemlimize uygun olarak a, b ve c hesaplanır böylece (1.8.9) gelişim denklemi bulunur [1,5,10]. AKNS formalizminin eşdeğer gösterilişi (Soliton Bağlantısı): [43]. (1.8.4) sistemini düşünersek gelişim denklemi

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (1.8.11)$$

formunda yazılır. $\psi_1 = \psi_1(x, t); \psi_2 = \psi_2(x, t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} d\psi_1 &= \psi_{1x} dx + \psi_{1t} dt \\ d\psi_2 &= \psi_{2x} dx + \psi_{2t} dt \end{aligned} \quad (1.8.12)$$

ifadelerinde

$$\psi_{1x}, \psi_{2x}, \psi_{1t}, \psi_{2t}$$

yerine konursa

$$\begin{aligned} d\psi_1 &= (-i\xi dx - iadt)\psi_1 + (udx - ibdt)\psi_2 \\ d\psi_2 &= (vdx - icdt)\psi_1 + (i\xi dx + iadt)\psi_2 \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \theta^0 &= i\xi dx + iadt \\ \theta^1 &= -udx + ibdt \\ \theta^2 &= -vdx + icdt \end{aligned}$$

1-formları olmak üzere

$$\begin{aligned} d\psi_1 &= -\theta^0 \psi_1 - \theta^1 \psi_2 \\ d\psi_2 &= -\theta^2 \psi_1 + \theta^0 \psi_2 \end{aligned} \quad (1.8.14)$$

bulunur.

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \theta^0 & \theta^1 \\ \theta^2 & -\theta^0 \end{bmatrix} \quad (1.8.15)$$

diyecek olursak (1.8.14) ifadesi matris formunda

$$d\tilde{\psi} + \Gamma\tilde{\psi} = 0 \quad (1.8.16)$$

şeklinde yazılır. [43]

Exterior (dış) çarpımlarda

$$dx \wedge dx = 0, \quad d(dx) = 0, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

$d(wf) = dw.f - w \wedge df$ olduğu düşünülür se

$$d(d\tilde{\psi}) = -d(\Gamma\tilde{\psi}) = -d \begin{bmatrix} \theta^0 & \theta^1 \\ \theta^2 & -\theta^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8.17)$$

bulunur. (1.8.17) ifadeleri (1.8.14) ve (1.8.15) düşünülerek

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = 0 \quad (1.8.18)$$

formunda yazılabilir. Bu denklemden AKNS denklemlerine eş-
değer

$$\begin{aligned} d\theta^0 + \theta^1 \wedge \theta^2 &= 0 \\ d\theta^1 + 2\theta^0 \wedge \theta^1 &= 0 \\ d\theta^2 - 2\theta^0 \wedge \theta^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.8.19)$$

denklemleri elde edilir. 1.8.19) dan gelişim denklemi bu-
lunarak denklemimiz çözülebilir [43].

Örneğin KdV için θ^i 1- formları

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (-4i\xi^3 + 2i\xi u - u_x) dt + i\xi dx \\ \theta^1 &= (4\xi^2 u + 2i\xi u_x - 2u^2 - u_{xx}) dt + u dx \\ \theta^2 &= (-4\xi^2 + 2u) dt - dx \end{aligned}$$

alınırsa

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = 0 \text{ denklemi}$$

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

KdV denklemini gerektirmektedir. Böylece KdV nin çözülebi-
lirliğini buradan da görmüş oluyoruz, daha genel olarak

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (4u + 2u^2) dt - dx \\ \theta^1 &= (u_{xx} + 2u_x + 2u^3 + 6u^2 + 4u) dt - (u+1) dx \\ \theta^2 &= (-u_{xx} + u_x - 2u^3 - 6u^2 - 4u) dt + (u+1) dx \end{aligned}$$

alacak olursak

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = 0 \text{ matris denklemi}$$

$$u_t + 12uu_x + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$



denklemini gerektirmektedir ki bu KdV ve MKdV denklemlerinin ikisini de içermektedir.

$$\text{Burada } u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

dir.



BÖLÜM 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ BİLEŞİKLİ KdV, BOUSSINESQ DENKLEMİ VE BUNLARIN SOLİTON BAĞLANTISI

2.1. KRİSTAL ŞEBEKE (CRYSTAL LATTICE)

Bir boyutlu şebeke (Lattice) dinamiğini temsil eden denklemin uzun dalga limitinde KdV denklemini verdiği bilinmektedir (A. Jeffrey and T. Kakutani 1972) KdV denklemi kristal şebekelerde uygulama alanları bulan soliton tipi çözümler verdiği için ilginç bir denklemdir. Şebeke denklemlerinin incelenmesi gösterirki, sürekli ortam formülasyonu için sadece lineer olmayan etkilerin değil, aynı zamanda yerdeğiştirmelerin 2. gradyontlerinin de alınması gerekir. Bu gibi teoriler 1960 11 yıllarda bir hayli heyecan uyandırmış ve kuple gerilme teorilerine yol açmışlardır [21].

Bir boyutlu şebeke denkleminin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{12} a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + B \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.1)$$

ile temsil edildiği bilinmektedir (A. Aşkar 1981).

Burada

$$\rho = \frac{M}{a}, \quad E = \frac{k_2}{a}, \quad B = 2 k_3 \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanmış olup, M kütle, a, k_2, k_3 de ortamla ilgili sabitlerdir.

$$\xi = x - ct, \quad \tau = \frac{k_3}{k_2} a c t \quad \text{yan karakteristik koordinatlarda}$$



$v = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ diyerek (2.1.1) denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} - \epsilon \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.1.1')$$

şekline dönüştürülür. Burada

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \epsilon = \frac{1}{24} \frac{k_2}{k_3} \text{ a olup } \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \text{ ihmal edilmiştir.}$$

(2.1.1') KdV denklemidir. Şayet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \text{ ihmal edilemeyecek durumda ise (2.1.1) genel-}$$

leştirilmiş Boussinesq denklemine dönüşür [21].

Bir boyutlu şebeke denkleminde benzer olarak 3. boyutlu şebeke denklemi

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho C_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho C_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ile verilir. Burada C_1 : enine, C_2 : boyuna dalganın hızı v enine u boyuna dalgayı temsil eder.

A_1, A_2, B_1, B_2 de ortamla ilgili büyüklüklerdir. (2.1.3) den bir bakıma genelleştirilmiş KdV veya genelleştirilmiş Boussinesq elde etmek için yarı karakteristik koordinatları kullanıp

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \text{ ve } \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \text{ ihmal edilirse} \\ \frac{\partial u^*}{\partial \tau} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \beta v^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi} - \epsilon_1 \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\partial v^*}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \beta (u^* v^*)_{\xi} - \epsilon_1 \frac{\partial^3 v^*}{\partial \xi^3} = 0$$

bulunur ki bu genelleştirilmiş KdV olup, Burada



$$\xi = x - c, \tau = \frac{3}{2\rho c_1} t \quad u = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad v = \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

dir. Şayet $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ ve $\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}$ ihmal edilemeyecek büyüklükte ise (2.1.3) genelleştirilmiş Boussinesq denklemi haline dönüşür. (2.1.4) deki ϵ_1 , ϵ_2 , γ ve β ortamla ilgili büyüklüklerdir.

Soliton bağıntısı:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (au_x^* + a\sigma v_x^*) dt \\ \theta^1 &= (-\dot{u} - \sigma \dot{v}) dx + (2au^{*2} + u_{xx}^* + 4a\sigma u^* v^* + 2a\sigma^2 v^{*2} + \sigma v_{xx}^*) dt \\ \theta^2 &= a dx - (2a^2 u^{*2} + 2a^2 \sigma v^{*2}) dt \end{aligned}$$

1. formları alındığında

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = 0$$

denklemini

$$u_t^* + \sigma v_t^* + u_{xxx}^* + \sigma v_{xxx}^* + 6auu_x^* + 6a\sigma(u^* v^*)_x + 6a\sigma^2 v^* v_x^* = 0 \quad (2.1.5)$$

denklemini gerektirmektedir. Burada ki a ve σ katsayılarını değiştirmek suretiyle çözülebilir gelişim denklemlerini elde etmek mümkündür.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1.6)$$

KdV denklemini düşünüp $\epsilon^2 = 1$ olmak üzere

$$w = \dot{u} + \epsilon v^*$$

dönüşümünü yaparsak (2.1.6) dan

$$u_t^* + u^* u_x^* + \epsilon^2 v^* v_x^* + \epsilon v_t^* + \epsilon(u^* v^*)_x + u_{xxx}^* + \epsilon v_{xxx}^* = 0 \quad (2.1.7)$$

buluruz. Görüldüğü gibi $\sigma = \epsilon$, $6a = 1$ ise (2.1.5) de (2.1.7) özdeş olarak eşittir.



Şimdi (2.1.5) denkleminde (2.1.4) denklemlerini her hangi bir yolla elde etmenin mümkün olup olmadığını araştıralım, bunun için eldeki imkanlar

$$u \rightarrow \bar{a}u^*, v \rightarrow b^*v, x \rightarrow cx, t \rightarrow dt \quad (2.1.8)$$

dönüşümlerini yapmaktır. Burada ($\tau \rightarrow t; \xi \rightarrow x$) Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}}{d}=1, \quad \frac{\bar{a}^2}{c}=1, \quad \frac{\bar{a}}{c^3}=-\epsilon_1, \quad \frac{b^2}{c}=\beta \\ \frac{b}{d}=\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}; \quad \gamma=0, \quad \frac{\bar{a}b}{c}=\beta, \quad \frac{b}{c^3}=-\epsilon_1 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

olmalıdır. (2.1.9) denklemlerinden

$$\bar{a}=d, \quad \bar{a}^2=c; \quad \bar{a}^5=-1/\epsilon_1, \quad b=\sqrt{\bar{a}^2}\beta \quad d=\bar{a}=b \cdot \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\sqrt{\beta}=\beta \quad \text{ve} \quad b=-\epsilon_1 c^3$$

elde edilir. Görüldüğü gibi burada bilinmiyenden fazla denklem olup çözümün mümkün olabilmesi için

$$\beta=1; \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = -1, \quad \text{olması gerekir.}$$

Bu durumda (2.1.4) denklemleri

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + u^* u^*_{\xi} + v^* v^*_{\xi} + u^*_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.1.10-a)$$

$$v^*_{\tau} + (u^* v^*)_{\xi} + v^*_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.1.10-b)$$

şekline gelir. Buradan da

(2.1.10-a) ile (2.1.10-b) çıkartılarak

$$(u^*-v^*)_{\tau} + (u^*-v^*)_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}[(u^*-v^*)^2]_{\xi} = 0 \quad (2.1.11-a)$$

(2.1.10-a) ile (2.1.10-b) toplanarak

$$(u^*+v^*)_{\tau} + (u^*+v^*)_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}[(u^*+v^*)^2]_{\xi} = 0 \quad (2.1.11-b)$$

bulunur veya $u - v = w$; $u + v = w$ olmak üzere

$$w_t + \frac{1}{2} w_\xi^2 + w_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.1.12-a)$$

$$w_t + \frac{1}{2} w_\xi^2 + w_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.1.12-b)$$

elde edilirki bunların her biri KdV denklemdir. Bu denklemler ters saçınım dönüşümü ile çözülebilir. Böylece (2.1.4) özel durumda ters saçınım transformu ile çözülebilir.

Diğer bir deyişle (2.1.4) ün genel durumunda ters saçınım dönüşümü ile çözümü mümkün değildir. Zira bu sistem AKNS şemasına uymamaktadır.

2.2. MATRİS KdV

(2.1) bölümünde ki (2.1.4) denkleminde $\beta=1$, $\gamma=0$, $\epsilon_1=\epsilon_2 = -1$, alacak olursak

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}(u^2+v^2)_x + u_{xxx} &= 0 \\ v_t + (uv)_x + v_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi,

$$V_{\approx} = \begin{bmatrix} u & v \\ v & u \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Kabulü ile

$$V_{\approx t} + V_{\approx} \cdot V_{\approx} + V_{\approx xxx} = 0 \quad (2.2.3)$$

matris formunda yazabiliriz. Bu matris KdV denklemdir. Bu denklem için Lax çiftleri,

$$L = -aI D^2 + V_{\approx} \quad B = bI D^3 - \frac{3b}{2a} V_{\approx} - \frac{3b}{4a} V_{\approx x} \quad (2.2.3)$$

dir. Hakikaten

$L_t = [L, B]$ Lax şartından $b=-4$, $a=-6$ için gelişim denklemi elde edilir [1, 17, 26].

Şimdi

$$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{U} \underset{\sim}{I} + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \underset{\sim}{V}^{(i)} = \begin{bmatrix} u+v^{(2)} & v^{(1)} - v^{(3)} \\ v^{(1)} + v^{(3)} & u - v^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

seçelim. Burada

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{dir.}$$

$$L = -a \underset{\sim}{I} D^2 + \underset{\sim}{V} \quad B = b \underset{\sim}{I} D^3 + \underset{\sim}{B}_1 D + \underset{\sim}{B}_0$$

olarak

$$[L, B] = \frac{\partial L}{\partial t} = \underset{\sim}{V}_t \quad (2.2.5)$$

olacak şekilde, u ve $v^{(i)}$ nin değişik durumları için ters saçınım dönüşümü ile çözülebilecek gelişim denklemlerini bulabiliriz. Hakikaten

1) (2.2.5) denkleminde,

$$u = u, \quad v^{(i)} = v, \quad v^{(2)} = v^{(3)} = 0 \quad \text{alacak olursak,}$$

$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2, v^2)_x \quad (2.2.6-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uv)_x \quad (2.2.6-b)$$

bulunur. (2.2.6-a) ve (2.2.6-b) de $-\frac{b}{4}=1$; $-\frac{3b}{4a} = 1/2$ alırsak (2.2.3) matris KdV denklemi bulunacak, ayrıca $u=v$ olmak üzere (2.2.6-a) ile (2.2.6-b) özdeş olacaktır.



$$2) \quad u=u, \quad v^{(2)}=v, \quad v^{(1)}=v^{(3)}=0 \quad \text{ise}$$

$$u_t = \frac{3b}{4a}(u^2+v^2)_x - \frac{b}{2} u_{xxx} \quad (2.2.7-a)$$

$$v_t = \frac{3b}{2a}(u \cdot v)_x + \frac{b}{4}(u-v)_{xxx} \quad (2.2.7-b)$$

$$3) \quad u=u, \quad v^{(3)}=v, \quad v_1^{(1)}=v^{(2)}=0 \quad \text{ise}$$

$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} + \frac{3b}{4a}(u^2-v^2)_x \quad (2.2.8-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a}(2uv)_x \quad (2.2.8-b)$$

$$4) \quad u=0, \quad v^{(1)}=0, \quad v^{(2)}=w, \quad v^{(3)}=v \quad \text{ise}$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} + \frac{3b}{4a}(w^2-v^2)_x \quad (2.2.9-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} \quad (2.2.9-b)$$

$$5) \quad u=0, \quad v^{(1)}=w, \quad v^{(2)}=v, \quad v^{(3)}=0 \quad \text{ise}$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} \quad (2.2.10-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a}(u^2+v^2)_x \quad (2.2.10-b)$$

$$6) \quad v^{(1)}=w, \quad v^{(2)}=v, \quad v^{(3)}=u=0 \quad \text{ise}$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} \quad (2.2.11-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a}(u^2+v^2)_x \quad (2.2.11-b)$$

$$7) \quad u=v^{(2)}=0, \quad v^{(1)}=w, \quad v^{(3)}=v \quad \text{ise}$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} \quad (2.2.12-a)$$

$$v^2 = w^2 \quad (2.2.12-b)$$



denklem sistemleri elde edilecektir. a ve b değerleri sabittir. Bu sabitlerin uygun değişken dönüşümü ile değiştirilebileceği aşıkardır.

NOT: Matris KdV denkleminde $U=u+v$ alırsak

$$U_t + UU_x + U_{xxx} = 0 \quad (2.2.13)$$

skaler KdV denklemini elde ederiz. (2.2.5) de

$$u=u, \quad v^{(1)}=v, \quad v^{(2)}=w, \quad v^{(3)}=0$$

alacak olursak,

$$u_t + w_t = -\frac{b}{4} (u+w)_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 + w^2 - 2uw)_x \quad (2.2.14-a)$$

$$u_t - w_t = -\frac{b}{4} (u-w)_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 + w^2 - 2uw)_x \quad (2.2.14-b)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uv)_x \quad (2.2.14-c)$$

(2.2.14-a) ve (2.2.14-b) den

$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 + w^2)_x \quad (2.2.15-a)$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uw)_x \quad (2.2.15-b)$$

(2.2.14-c) ile (2.2.15-b) ye bakılırsa $v=w$ olduğu grlr.

$$u=u, \quad v^{(1)}=v, \quad v^{(2)}=0, \quad v^{(3)}=w$$

alırsak

$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 - w^2)_x \quad (2.2.16-a)$$

$$v_t - w_t = -\frac{b}{4} (v-w)_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uv - 2uw)_x \quad (2.2.16-b)$$

$$v_t + w_t = -\frac{b}{4} (v+w)_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uv + 2uw)_x \quad (2.2.16-c)$$

sisteminden,

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uv)_x \quad (2.2.17-a)$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uw)_x \quad (2.2.17-b)$$

olarak bulunabilir. Görüldüğü gibi v ile w aynı denklemi sağlamaktadırlar.

$$v^{(3)} = w, \quad u = u, \quad v^{(2)} = v, \quad v^{(1)} = 0$$

alacak olursak,

$$u_t + v_t = -\frac{b}{4} (u+v)_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 + 2uv - w^2)_x \quad (2.2.18-a)$$

$$u_t - v_t = -\frac{b}{4} (u-v)_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 - w^2 - 2uv)_x \quad (2.2.18-b)$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uw)_x \quad (2.2.18-c)$$

sisteminden

$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uw)_x \quad (2.2.19-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a} (2uv)_x \quad (2.2.19-b)$$

bulunur. (2.2.18-c) ile (2.2.19-b) karşılaştırıldığında v ile w nin aynı denklemi sağladığı görülmektedir.

$$u = 0, \quad v^{(1)} = u, \quad v^{(2)} = v, \quad v^{(3)} = w$$

alacak olursak,

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a} (u^2 + v^2 - w^2)_x \quad (2.2.20-a)$$

$$u_t + w_t = -\frac{b}{4} (u+w)_{xxx} \quad (2.2.20-b)$$

$$u_t - w_t = -\frac{b}{4} (u-w)_{xxx} \quad (2.2.20-c)$$

bu son iki denklemden,



$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} \quad (2.2.21-a)$$

$$w_t = -\frac{b}{4} w_{xxx} \quad (2.2.21-b)$$

bulunmakta, yani u ile w nin aynı tür denklemi sağladığı görülmektedir. Bu bakımdan (2.2.20-a)-(2.2.20-c) denklemleri yerine,

$$u_t = -\frac{b}{4} u_{xxx} \quad (2.2.22-a)$$

$$v_t = -\frac{b}{4} v_{xxx} + \frac{3b}{4a} (v^2)_x \quad (2.2.22-b)$$

denklemleri bulunmaktadır.

(2.2.1) sisteminde $u+v=u$, $u-v=w$ diyecek olursak u ve w nin her ikisinde skalar KdV denklemini sağlarlar. Bu nedenle u ve w her hangi bir yöntemle çözülebilirse (2.2.1) sistemide çözülmüş olacaktır.

Bu nedenle (GGKM) metodu ile KdV denkleminin nasıl çözülebileceğini göstereceğiz.

2.3. ÇÖZÜM: Bu bölümde (2.1.4) sisteminde, $\gamma=0$, $\beta=1$, $\epsilon_1=\epsilon_2=-1$ $u+v=-6V$ olarak elde edilen $(\frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x})$

$$V_t - 6VV_x + V_{xxx} = 0 \quad (2.3.1)$$

KdV denklemini (GGKM) metodu ile çözeceğiz.

$$\psi_{xx} - (V - \lambda) = 0 \quad (2.3.2)$$

Schrödinger denklemini düşünelim. Burada $V(x,t)$ (2.3.1) KdV denklemini sağlayan potansiyeldir.

(2.3.2) den $V(x,t)$ çözümlüp (2.3.1) de yerine konursa



$$Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(V + \lambda)\psi_x \quad (2.3.3.)$$

olmak üzere

$$\lambda_t \psi^2 + [\psi \phi_x - \psi_x Q]_x = 0 \quad (2.3.4)$$

buluruz. (2.3.2) özdeğer probleminin ayırık özdeğerlerinin t den bağımsız olduğu ($\lambda_t = 0$) düşünülürse ve (2.3.4) $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_t \psi^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\psi Q_x - \psi_x Q)_x dx = 0 \quad (2.3.5)$$

veya (2.3.5) ten

$$(\psi Q_x - \psi_x Q)_x = 0 \quad (2.3.6)$$

veya

D integrasyon sabiti olmak üzere

$$\psi Q_x - \psi_x Q = D = \text{sabit} \quad (2.3.7)$$

elde edilecektir. Veya integre edilerek C de integral sabiti olmak üzere,

$$Q = C\psi D + \int_0^x \frac{dx}{\psi^2} \quad (2.3.8)$$

bulunur. Q nün (2.3.3) deki değeri yerine konur,

$$\psi \int_0^x \frac{dx}{\psi^2} = \phi \quad (2.3.9)$$

denirse,

$$Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(V + \lambda)\psi_x = C\psi + D\phi \quad (2.3.10)$$

bulunur.



Asimtotik olarak yani $|x| \rightarrow \infty$ iken $v=0$ olup zamandan bağımsız, ayırık öz değerler $\lambda_n < 0$ ($n=1,2,\dots$) dir. Burada $C=C(t)$ $D=D(t)$, ϕ ise (2.3.2) Schrödinger denkleminin ψ den bağımsız çözümüdür.

λ_n özdeğerine karşılık gelen normalize öz fonksiyon ψ ise $|x| \rightarrow \infty$ iken sınırsız olur bu nedenle $D(t) \equiv 0$ olmalıdır. Böylece, (2.3.10) ün iki tarafı ψ ile çarpılırsa,

$$\psi \psi_t + \psi \psi_{xxx} - 3(V+\lambda) \psi \psi_x = C(t) \psi^2 \quad (2.3.11)$$

bulunur. Bu ifadede $x \rightarrow \infty$ iken $v(X,t) \rightarrow 0$ olduğu düşünülür. Ve integre edilirse,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \psi^2 dx = 0 \quad (2.3.12)$$

olduğundan

$$C(t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 0 \quad (2.3.13)$$

veya (2.3.12) nin ilki kullanılırsa

$$C(t) = 0 \quad (2.3.14)$$

bulunur.

Böylece (2.3.10) ifadesi

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(V+\lambda) \psi_x = 0 \quad (2.3.15)$$

haline gelir.

Ayrık özdeğerler için (yani $k_n \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_n = -k_n^2$)

$|x| \rightarrow \infty$ deki davranışı



$$\psi_n \sim C_n(t) e^{-k_n x} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (2.3.16)$$

şeklinde olan öz fonksiyonlar seçip (2.3.15)'de yerine kōnursa,

$$C_n(t) = C_n(0) e^{4k_n^3 t} \quad (2.3.17)$$

bulunur.

Sürekli spektrum halinde, yani $\lambda = k^2 > 0, k \in \mathbb{R}$

$[X] \rightarrow \infty$ deki davranış

$$\psi \sim e^{-ikx} + b(k, t) e^{ikx} \quad (x \rightarrow \infty \text{ iken}) \quad (2.3.18-a)$$

$$\psi \sim a(k, t) e^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty \text{ iken}) \quad (2.3.18-b)$$

şeklinde olan öz fonksiyonlar seçip bu değerleri (2.3.10)'de yerine koyarsak

$$(a_t + 4ik^3 a) e^{-ikx} = a C e^{-ikx} + \frac{D}{a} e^{-ikx} \int_0^x e^{2ikx} dx \quad (2.3.19)$$

veya

$$(a_t + 4ik^3 a) = a C + \frac{D}{a} \int_0^x e^{2ikx} dx \quad (2.3.20)$$

elde edilir. Burada $|x| \rightarrow \infty$ iken $\frac{D}{a} \int_0^x e^{2ikx} dx$ ifadesini sınırsız büyüyeceğini düşünürsek, bu sınırsızlığın düzeltilmesi için $D=0$ olması gerekecek, böylece (2.3.20) ifadesi,

$$a_t + (4ik^3 - C)a = 0 \quad (2.3.21)$$

haline gelecektir.

(2.3.18-b) de (2.3.10) diferansiyel denkleminin çözümü olacağı düşünülürse



$$C=4ik^3 \quad (2.3.22)$$

ve

$$b_t - 8ibk^3 = 0 \quad (2.3.23)$$

bulunur. Buda integre edilirse,

$$b(k, t) = b(0) e^{8ik^3 t} \quad (2.3.24)$$

C nin (2.3.22) deki değeri (2.3.21) de yerine konursa,

$$a(k, T) = a(k, 0) \quad (2.3.25)$$

bulunur.

KdV denklemini

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.3.26)$$

şeklindeki ençok rastlanan formunda alarak

$$u(x, 0) = U_0(x) = 2 \operatorname{sech}^2 x \quad (2.3.27)$$

başlangıç şartındaki çözümünü bulmaya çalışacağız. Önce,

$$\psi_{xx} - (U_0(x) - \lambda) \psi = 0 \quad (2.3.28)$$

Özdeğer problemini çözecek ve N ayrık spektrumun sayısı, $k_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_n = -k_n^2 < 0$ ayrık öz değerler olmak üzere

$$B(\xi, t) = \sum_{n=1}^N C_n^2(0) e^{8k_n^3 t - k_n \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, 0) e^{i(8k^3 t + k \xi)} dk \quad (2.3.29-a)$$

$$B(\xi) = \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-k_n \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, 0) e^{ik \xi} dk \quad (2.3.29-b)$$

şeklinde tariflenen fonksiyonları bulacak, sonra

$$K(x, y; t) + B(x+y; t) + \int_x^\infty B(z+y; t) K(x, z; t) dz = 0 \quad (2.3.30)$$

GELFAND LEVITAN denklemini

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = -\frac{1}{2}u(x); \quad [x+y] \rightarrow \infty \text{ iken } K(x, y) \rightarrow 0 \quad (2.3.31)$$

sınır şartlarında çözülecektir.

Böylece lineer olmayan KdV denklemi yerine lineer integral denklemini çözmek gerekecektir.

Saçınım teorisinde

$$\psi_{xx} + (2\text{Sech}^2 x + \lambda)\psi = 0 \quad (2.3.32)$$

öz değer probleminin ayrık öz değerinin tek olduğu bilinmektedir. Yani

$$k_1 = 1, \quad c_1(0) = \sqrt{2}, \quad b(k, 0) = 0 \text{ dır.}$$

Daha önce tanımladığımız

$$B(\xi, t) = c_1^2(0) e^{8t-\xi} = 2e^{8t-\xi},$$

$$B(x+y|T) = 2e^{(8t-x-y)} = 2e^{-x} e^{8t-y} \quad (2.3.33)$$

olduğu düşünür.

$$K(x, y) = L(x)e^{-y} \text{ formunda olduğunu kabul edersek}$$

GELFAND LEVITAN DENKLEMİMİZ

$$L(x)e^{-y} + 2e^{(8t-x)} \cdot e^{-y} + 2e^{8t} \cdot e^{-y} L(x) \int_x^\infty e^{-2z} dz = 0 \quad (2.3.34)$$

buradanda

$$L(x) = \frac{-2e^x}{1+e^{(2x-8t)}} \quad (2.3.35)$$

$$K(x,y) = e^{-y} L(x) = \frac{-2 e^{(x-y)}}{1+e^{(2x-8t)}} \quad (2.3.36)$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d}{dx} K(x,x) = \frac{-u}{2}(x,t)$$

den

$$u(x,t) = - \frac{8e^{(2x-8t)}}{|1+\exp(2x-8t)|^2} = -2\text{Sech}^2(x-4t) \quad (2.3.37)$$

elde edilir. Bu KdV denkleminin tek soliton tipi çözümüdür. Şimdi

$$u(X,0) = -6 \text{Sech}^2 x$$

şeklinde başlangıç potansiyeli olarak KdV denklemini çözmeye çalışalım. Bu durumda

$$k_1=1, \quad k_2=2, (\lambda_1=-1, \lambda_2=-4) \quad b(k,0)=0$$

olup,

$$B(\xi,t) = C_2^2(0)e^{(64t-2\xi)} + C_1^2(0)e^{(8t-\xi)}$$

$$B(x,y|t) = \sum_{n=1}^2 C_n^2(0) \exp [8k_n^3 t - k_n(x+y)]$$

olacak ψ_n belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$K(x,y) = - \sum_{n=1}^2 C_n \psi_n(x) e^{-k_n y} \quad (2.3.38)$$

formunda bulunacaktır. Daha önce olduğu gibi

$$c_n(k,t) = c_n(0) e^{4k_n^3 t}$$

şeklinde elde edilecek, böylece



$$k(x, y) + \sum_{n=1}^2 C_n^2(0) \exp\{8k_n^3 t - k_n(x+y)\} + \sum_{n=1}^2 C_n^2(0) \exp(-k_n y) \int_x^{\infty} \exp(-k_n z) R(x, z) \quad (2.3.39)$$

GELFAND LEVINTAN denklemleri bulunacaktır. (2.3.38) ifadesi (2.3.39)'de yerine konur gerekli işlemler yapılırsa

$$\psi_n(x) + \sum_{m=1}^{N=2} C_m \cdot C_n \frac{[\exp(-(k_m + k_n)x)]}{k_m + k_n} \psi_n = C_m \exp(-k_n x) \quad (2.3.40)$$

elde edilir. Buradaki ψ_n lerin k_n özdeğerine karşı gelen normalize az fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\begin{aligned} I &= (\delta_{ij}) \\ \tilde{C} &= (C_m C_n \frac{\exp(-(k_m + k_n)x)}{k_m + k_n}) = \begin{bmatrix} C_1^2 \frac{e^{-4x}}{4} & C_1 C_2 \frac{e^{-3x}}{3} \\ C_1 C_2 \frac{e^{-3x}}{3} & C_2^2 \frac{e^{-2x}}{2} \end{bmatrix} \\ \tilde{\psi} &= \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \\ \tilde{E} &= \begin{bmatrix} C_1 e^{-k_2 x} \\ C_2 e^{-k_1 x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-2x} \\ C_2 e^{-x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere (2.3.40) ifadesi

$$(\tilde{I} + \tilde{C}) \tilde{\psi} = \tilde{E} \quad (2.3.41)$$

matris formunda yazılabilir. Bu denklemden

$$\tilde{\psi} = (\tilde{I} + \tilde{C})^{-1} \tilde{E} \quad (2.3.42)$$

veya

$\Delta = \det (I+C)$ olmak üzere

$$\psi_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \left(1 + \frac{c_2^2 e^{-2x}}{2} \right) c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \left(-\frac{1}{3} c_1 c_2 e^{-3x} \right) \right| \quad (2.3.46-a)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\Delta} \left| c_1 e^{-2x} \left(-\frac{1}{3} \right) c_1 c_2 e^{-3x} + c_2 e^{-x} \left(1 + \frac{1}{4} c_1^2 e^{-4x} \right) \right| \quad (2.3.46-b)$$

bulunur. (2.3.41) de $x=y$ alır (2.3.46-a) ve (2.3.46-b) kullanılırsa

$$K(x, x) = - \sum_{m=1}^2 C_m \psi_m(x) e^{-k_m x} \quad (2.3.47)$$

şeklinde elde edilecek. Böylece

$$\frac{d}{dx} K(x, x; t) = -\frac{1}{2} u(x, t)$$

den

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \quad (2.3.48)$$

bulunacaktır. Bu KdV denkleminin iki-soliton çözümüdür.

2.4. YÜKSEK MERTEBEDEN SAÇINIM PROBLEMİ

$$\psi_{1x} = i\xi \psi_1 + u(x, t) \psi_2$$

$$\psi_{2x} = i\xi \psi_2 + v(x, t) \psi_1 \quad (2.4.1)$$

Zakharov-Shabat sistemi ile

$$\psi_{1t} = A\psi_1 + B\psi_2$$

$$\psi_{2t} = C\psi_1 + D\psi_2$$

gelişim denklemini alarak

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

olmak üzere genelleştirilmiş Zakhorov-Shabet ters saçınım problemini matris formunda

$$\begin{aligned} \underline{V}_x &= i \xi \underline{D} + \underline{N} \underline{V} \\ \underline{V}_t &= \underline{Q} \underline{V} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

formunda yazabiliriz [1].

$$\underline{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} ; \quad \underline{D} = \delta_{ij} d_i \quad \underline{N} = (N_{ij}), \quad N_{ii} = 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_x &= i \xi \underline{D} \underline{\psi} + \underline{N} \underline{\psi} \\ \underline{\psi}_t &= \underline{Q} \underline{\psi} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

saçınım problemini düşünelim.

$\underline{\psi}_{xt} = \underline{\psi}_{tx}$ ve $\xi_t = 0$ olduğuna dikkat edersek (2.4.3) sisteminden

$$\underline{Q}_x = \underline{N}_t + \xi i (\underline{D} \underline{Q} - \underline{Q} \underline{D}) + (\underline{N} \underline{Q} - \underline{Q} \underline{N}) \quad (2.4.4)$$

veya

$$\underline{Q}_x = \underline{N}_t + \xi i [\underline{D}, \underline{Q}] + [\underline{N}, \underline{Q}] \quad (2.4.5)$$

bulunur.

$\underline{Q}$ matrisini o şekilde bulmaya çalışacağız ki $\underline{N}$ matrisi verildiğinde (2.4.5) denklemi aradığımız gelişim denklemini versin. Hakikaten

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ N_{21} & 0 & (1+w_3)N_{31} \\ N_{31} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (w_3 = e^{-\frac{2\pi i}{3}})$$

özel halinde $Q^{(i)}$ ler (3×3) bilinmeyen matrisler olmak üzere

$$Q = \xi^2 Q^{(2)} + \xi Q^{(1)} + Q^{(0)}$$

seçer ve (2.4.5) denkleminde yerine koyarsak ξ nin kuvvetlerine göre sıralandığında

$$\xi^0 : Q_x^{(0)} = N_t [N, Q^{(0)}] \quad (2.4.6-a)$$

$$\xi^3 : i [D, Q^{(2)}] = 0 \quad (2.4.6-b)$$

$$\xi^2 : Q_x^{(2)} = i [D, Q^{(1)}] + [N, Q^{(2)}] \quad (2.4.6-c)$$

$$\xi : Q_x^{(1)} = i [D, Q^{(0)}] + [N, Q^{(1)}] \quad (2.4.6-d)$$

olacak böylece

(2.4.6-b) den

$$Q_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} q_i^{(2)} \quad q_i^{(2)} = \text{sabit} = \text{keyfi}$$

(2.4.6-c) den

$$Q_{ij}^{(1)} = \begin{cases} q_i^{(1)} = \text{keyfi} & i=j \\ \frac{q_1^{(2)} - q_i^{(2)}}{i(d_i - d_j)} N_{ij} = a_{ij} N_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

olup burada

$$a_{ij} = \frac{q_1^{(2)} - q_i^{(2)}}{i(d_i - d_j)} = a_{ji} \quad \text{şeklinde tariflenmiştir.}$$

(2.4.6-d) den

$$Q_{ii}^{(0)} = q_i^{(0)}, \quad Q_{12}^{(0)} = -\frac{a_{13} - a_{23}}{i(d_1 - d_2)} = -\gamma_{123}, \quad Q_{13}^{(0)} = \frac{q_1^{(1)} - q_3^{(1)}}{i(d_1 - d_3)} = \epsilon_{13}$$

$$Q_{21}^{(0)} = \beta_{21} N_{21x} - \gamma_{123} (1+w_3) N_{31}^2 + \epsilon_{21} N_{21}$$

$$Q_{23}^{(0)} = \beta_{23} (1+w_3) N_{31x} - \gamma_{123} N_{21} + \epsilon_{23} (1+w_3) N_{31}$$

$$Q_{31}^{(0)} = \beta_{31} N_{31x} - \gamma_{123} N_{21} + \epsilon_{31} N_{31}$$

$$Q_{32}^{(0)} = \frac{q_3^{(1)} - q_2^{(1)}}{i(d_3 - d_2)} = 32 \quad \text{olacaktır. Burada}$$

$$\beta_{ij} = \frac{a_{ij}}{i(d_i - d_j)} = -\beta_{ji} ; \gamma_{ijk} = \frac{a_{kj} - a_{ik}}{i(d_i - d_j)} = \gamma_{jik} = \gamma_{kij}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{q_i^{(1)} - q_j^{(1)}}{i(d_i - d_j)} = \epsilon_{ji}$$

$$N_{ijx} = \frac{\partial N_{ij}}{\partial x} \quad \text{şeklinde tarif edilmişlerdir.}$$

(2.4.6-a) denkleminde

$$q_1^{(0)} = \beta_{31} N_{31} + \text{sabit}; \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{32} \quad (2.4.7-a)$$

$$q_2^{(0)} = (\beta_{31} - w_3 \gamma_{123}) N_{31} + \text{sabit} \quad (2.4.7-b)$$

$$q_3^{(0)} = (\beta_{31} - (1+w_3) \gamma_{123}) N_{31} + \text{sabit} \quad (2.4.7-c)$$

$$\beta_{21} N_{21xx} + \epsilon_{21} N_{21x} = N_{21t} + (1+w_3) \left[\gamma_{123} + \frac{1}{2} (\beta_{31} - \beta_{23}) \right] (N_{31}^2)_x \quad (2.4.7-d)$$

$$\beta_{31} - w_3 \gamma_{123} = (1+w_3) \beta_{32} \quad (2.4.7-e)$$

$$\beta_{23} (1+w_3) N_{31xx} + \epsilon_{23} (1+w_3) N_{31x} = (1+w_3) N_{31t} + (\epsilon_{13} - \epsilon_{21})$$

$$N_{21} + \beta_{12} N_{21x} + \gamma_{123} N_{21x} \quad (2.4.7.f)$$

$$\beta_{31} N_{31xx} + \epsilon_{31} N_{31x} = N_{31t} + (\gamma_{123} - \beta_{12}) N_{21x} + \epsilon_{21} N_{21} \quad (2.4.7-g)$$



$$q_{3x}^{(0)} = \beta_{23}(1+w_3)N_{31x} - \beta_{31}N_{31x} \quad (2.4.7-h)$$

$$2\beta_{31} - (1+w_3)[\gamma_{123} + \beta_{23}] = 0 \quad (2.4.7-i)$$

olması gerektiği görülecektir. Şayet $\epsilon_{ij}=0$ seçersek ve (2.4.7-f) ile (2.4.7-2) nin özdeş olarak aynı olması gerektiği düşünülürse

$$\beta_{31} = \beta_{23} = \beta_{12} \quad (2.4.8)$$

olması gerekecektir.

$$\psi_x = i\xi D^* \psi + N^* \psi$$

saçınım problemini düşünür ψ_2, ψ_3 elimine edilerek $\psi_1 \equiv \psi$ diyecek olursak ve

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 0 \quad \text{seçersek}$$

Özdeğer problemi

$$\psi_{xxx} - (2+w_3)N_{31}\psi_x - \{N_{31x} + N_{21} + i\xi^3\}\psi = 0 \quad (2.4.9)$$

haline dönüşür. Burada

$$d_1 = -1, \quad d_2 = (1+w_3) \quad d_3 = -w_3$$

seçilmiştir. (2.4.9) (2.4.9) denkleminde eşlik eden gelişim denkleminizin

$$q_{tt} = 3q_{xxxx} - 12(q^2)_{xx} \quad (2.4.10)$$

veya

$$q_t = -3P_x$$

$$P_t = -q_{xxx} + (4q^2)_x \quad (2.4.11)$$

şeklinde iki yönlü sıg-su dalgalarının girişimini temsil eden (KdV den farkı solitonlarının çift yönlü olmasıdır). Boussinesq denklemini olmasını istersek ve bu denklem için Lax çiftlerinin

$$L = iD^3 + \frac{q}{i} D + \frac{1}{i} q_x + P$$

$$B = i(PD^2 - 4q)$$

olduğunu düşünürsek $(D^i = \frac{\partial^i}{\partial x})$

$$P = i(1+w_3) N_{3x} - i N_{21}$$

$$q = (2+w_3) N_{31}$$

olacaktır. Böylece (2.4.9) özdeğer problemine eşlik eden gelişim denklemlerimiz

$$(1+w_3)N_{31t} = \beta_{23}(1+w_3) N_{31xx} + \beta_{21}N_{21x} - \gamma_{123}N_{21x}$$

$$N_{21t} = \beta_{21}N_{21xx} - (1+w_3)\gamma_{123}(N_{31}^2)_x \quad (2.4.12)$$

olarak buluruz. (2.4.12) de $N_{31} = x$, $N_{21} = v$ diyerek v yi elimine edersek ve $\gamma_{123} = 1$ olacak şekilde seçim yaparsak (2.4.12) yerine

$$3(2+w_3)(1+w_3) u_{tt} = w_3(w_3-1) u_{xxxx} + 2(1+w_3)^2 (u^2)_{xx}$$

denklemini de alınabilir. Burada x, t bağımsız değişkenlerine uygun dönüşüm yaparak Boussinesq denklemi (2.4.10) formunda elde edilebilir.

Böylelikle "Boussinesq" denkleminde ters saçınım metodu ile çözülebileceği gösterilmiş olur [1], [37]. Genel olarak

Boussinesq denklemleri uygun transformla,

$$u_{tt} = \left[\frac{1}{4} \ddot{u}_{xx} + u \right]_{xx} \quad (2.4.12)$$

şeklinde yazılabilir.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \sum_{i=1}^8 u^i R_i \quad A = \sum_{i=1}^8 A_i R_i$$

olmak üzere.

$$\Gamma = u dx + A dt$$

iken

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = u_t - A_x + (Au - uA) = u_t - A_x + [u, A] = 0 \quad (2.4.13)$$

denkleminde genel olarak;

$$i) \quad \partial A_k = \partial_t u_k - u_i A_i C_{ij}^k \quad (k=1, 2, \dots, 8)$$

bulunur. Burada C_{ij}^k $[u, A]$ matrisinden gelen sabittir.

Şayet

$$u_1 = \xi = \text{sabit}$$

$$u_2 = y$$



$$\begin{aligned} u_5 &= z \\ u_i &= 0 \quad (i \neq 1, 2, 5) \end{aligned}$$

seçersek,

$$A_1=0; \quad A_2=2 \quad u_2 u_5 + u_{5x}; \quad A_3=\xi u_5; \quad A_4=0$$

$$A_5= \frac{1}{3} [u_2^2 - 3u_5^2] - \frac{1}{3} u_{2x}; \quad A_6= \xi u_2; \quad A_7=0, \quad A_8=\xi^2$$

bulunur.

Böylece,

$$\begin{aligned} u_{5t} &= -\frac{1}{3} u_{2xx} - \frac{1}{3} |3u_5^2 - u_2^2|_x \\ u_{2t} &= u_{5xx} + 2(u_2 u_5)_x \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Modified Boussinesq denklemi bulunur.

Burada görüldüğü gibi A ve u bileşenlerinin değişik değerleri için (2.4.14) tipinde evalüsyon (Gelişim) denklemleri bulunur. Böylece Boussinesq tipindeki hangi denklemlerin ters saçınım dönüşümü ile çözülebileceği görülebilir.

2.5. BOUSSINESQ DENKLEMİNİN ELEMENTER ÇÖZÜMÜ

Bu denklem uygun değişken transformu ile

$$u_{tt} - u_{xxxx} - 6(uu_x)_x = 0 \quad (2.5.1)$$

formunda yazılabilir.

$$(2.5.1)'de \quad x - \lambda t = \eta \quad (\lambda = \text{sabit}) \quad (2.5.2)$$

dönüşümünü yaparsak,

$$\lambda^2 u_{\eta\eta} - u_{\eta\eta\eta\eta} - 6(uu_\eta)_\eta = 0 \quad (2.5.3)$$



elde edilir. Bu denklemi ye göre integre edersek A integral sabiti olmak üzere,

$$\lambda^2 u' - u''' - 6uu' = -A \quad (2.5.4)$$

elde edilir. Burada

$$u' = \frac{du}{d\eta}, \quad u''' = \frac{d^3u}{d\eta^3}$$

dir. (2.5.4) bir defa daha integre edilirse B'de integral sabiti olmak üzere,

$$\lambda^2 u - u'' - 3u^2 = -A\eta + B \quad (2.5.5)$$

elde edilir. (2.5.5) denklemi u' ile çarpılır,

$$\eta \rightarrow +\infty \text{ iken } u \xrightarrow{\text{asympt}} u_{\infty} \quad (2.5.6)$$

olduğuna varsayarak integre edersek, $A \neq 0$ ve

$$\frac{1}{2} (u')^2 = -u^3 + \frac{\lambda^2}{2} u^2 + Bu + C \quad (2.5.7)$$

bulunur. (2.5.7) yi

$$u'^2 = -2u^3 + \lambda^2 u^2 + 2Bu + C = 2f(u) \quad (2.5.8)$$

formunda da yazabiliriz. Burada B ve C integrasyon sabiti olup (2.5.8) in reel çözümü $f(u) \geq 0$ olması ile mümkündür. Şayet $f(u) = 0$ ise sadece bir tane reel kök var. Ancak sınırlı değildir. Farzedelim ki $f(u)$ üç reel köke sahiptir. Bunlar $c_1 < c_2 < c_3$ olacak şekilde ise,

$$f(u) = (u - c_1)(u - c_2)(c_3 - u) \quad (2.5.9)$$

olacak ve c_1, c_2, c_3 , aşağıdaki bağıntıları sağlayacaktır.

$$\lambda^2 = 2(c_1 + c_2 + c_3)$$

$$B = -(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)$$

$$C = 2c_1 c_2 c_3$$

Üçüncü dereceden $f(u)=0$ denkleminin kökleri,

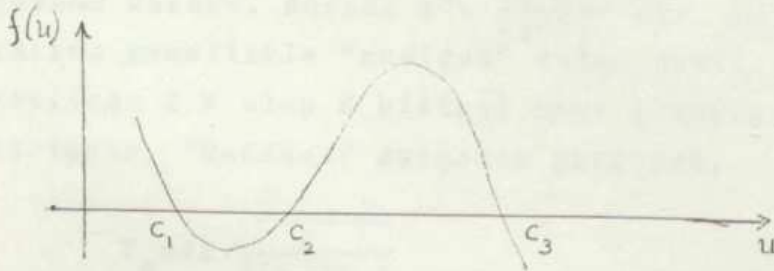
$$p = -B - \frac{\lambda^4}{4} \quad q = -\frac{C}{2} - \frac{B\lambda^2}{6} - \frac{2C^3}{216} \quad \Delta = -4p^3 - 27q^2$$

olmak üzere,

- i) $\Delta > 0$ ise üç kökten reel farklı,
- ii) $\Delta = 0$ ise bütün kökler reel, ikisi eşit,
- iii) $\Delta < 0$ ise bir kök reel, diğer ikisi eşlenik kompleks tir.

$$\Delta > 0 \text{ yani } \lambda^4 + 12B > 0 \text{ ise}$$

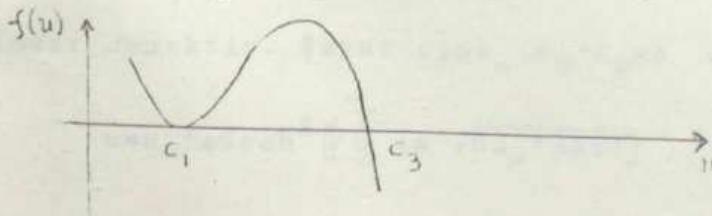
$f(u)$ fonksiyonunun davranışı Şekil (1)'de gösterilmiştir.



Şekil-1

Bu (2.5.8)'in reel çözümünün c_2 ve c_3 arasında lineer olmayan salınımını temsil eder. Ayrıca iki özel hal vardır.

$$(1) \quad c_2 \rightarrow c_1 \quad (\Delta=0)$$



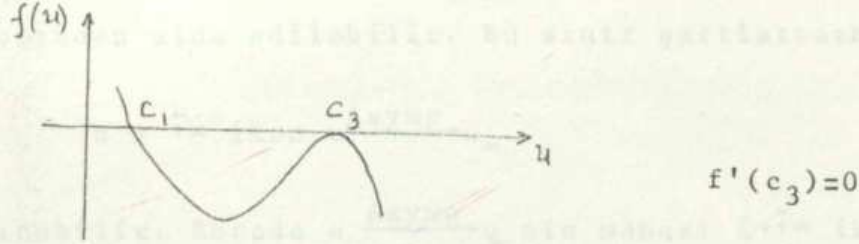
$$f'(c_1) = 0$$

Şekil-2



Bu soliter dalgaya karşılık gelir. Yani soliton çözüm vardır.

(2) $c_2 + c_3$ bu hal $u=c_3$ ile verilen sabit çözüme tekabül eder. Bu lineer sinusoidal dalga ile ilgili olup, aşağıda tanımlanacak olan $k^2 < 1$ dir.



şayet $c_1=c_2=c_3$ ise denklemimizin $u=c_1$ şeklinde sabit çözümü olacaktır. (2.5.8) denkleminin jacobian eliptik fonksiyonu cinsinden

$$u=c_2+(c_3-c_2)cn^2\left[\frac{c_3-c_1}{2}\{x-\sqrt{2(c_1+c_2+c_3)}t\};k\right] \quad (2.5.10)$$

çözümü vardır. Burada $k^2 = \frac{c_3-c_2}{c_3-c_1}$ dir, (2.5.10) dalga katarına genellikle "cnoidal" dalga denir. cn^2 fonksiyonunun periyodu $2K$ olup K birinci nevi eliptik fonksiyondan belirlenir. "Cnoidal" dalganın periyodu,

$$T_p = 4K\sqrt{\frac{1}{2(c_3-c_1)}} \quad (2.5.11)$$

ile verilir. Özel olarak $c_2 \rightarrow c_1$, $k \rightarrow 1$ olursa eliptik fonksiyon hiperbolik fonksiyona döner. Ayrıca

$T_p \rightarrow \infty$ olur. Bu ise

$$u=c_1+(c_3-c_1)Sech^2\left[\sqrt{\frac{c_3-c_1}{2}}\{x-\sqrt{2(c_1+c_3)}t\}\right] \quad (2.5.12)$$

olması demektir. Şayet $c_1=u_\infty$, $c_3-c_1=a$ diyecek olursak,

$$u=u_\infty+aSech^2\left[\sqrt{\frac{a}{2}}\{x-\sqrt{6u_\infty+2a}t\}\right] \quad (2.5.12')$$

olur. Burada a genliği, u_∞ sonsuzdaki üniform hali temsil etmektedir. (2.5.8) in soliter dalga çözümü (2.5.12'), direct olarak

$$f\left[u-u_\infty = \frac{df}{du}\right]_{u=u_\infty} = 0$$

şartından elde edilebilir. Bu sınır şartlarının yerine

$$u \rightarrow \bar{\tau}_\infty \text{ iken } u \xrightarrow{\text{Asymp}} u_\infty$$

alınabilir. Burada $u \xrightarrow{\text{Asymp}} u_\infty$ nin anlamı $\xi \rightarrow \bar{\tau}_\infty$ iken u ve u nun her türevinin sıfır olması demektir.

Bu sınır şartlarını $u_\infty = 0$ olacak şekilde seçersek $B=C=0$ olacağı aşikardır. Böylece (2.5.8) ifadesi,

$$\frac{1}{2}(u')^2 = -u^3 + \frac{\lambda^2}{2} u^2 = -u^2(u - \frac{\lambda^2}{2}) = F(u) \quad (2.5.13)$$

olup soliter dalganın boyu

$$\lambda^2 = 2a$$

dir. (2.5.13) ün integrasyonundan

$$u = 2a \operatorname{Sech}^2(\eta/D) \quad (2.5.14)$$

bulunur. Buradan $D = \left(\frac{a}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

dir. o halde

$$u = 2a \operatorname{Sech}^2 \sqrt{a}(x - \lambda t) \quad (2.5.15)$$

bulunur.



BÖLÜM 3

TANİUTİ-WEİ İNDİRGEME METODU

3.1. GİRİŞ

Bu bölümde Lineer olmayan denklem sistemlerinin KdV denklemine indirgenip indirgenemeyeceğini, indirgenirse hangi modellerin indirgenebileceğini araştıracağız.

Probleme başlamadan önce bu bölümde geçen bir kavramı açıklamaya çalışacağız.

Dispersiyon: Bu terimin ilkel bir manası "ışık dalgalarının dispersiyonunda" geçen ve bu kavramla gökkuşağının yedi rengi açıklanır. Bu gibi fikirlerden hareket ederek fizikçi ve matematikçiler bu tabiat olayının asıl yapı özelliklerini çıkarmışlar ve işçilerinde ses dalgaları, su dalgaları, elâstik dalgalar, elektro manyetik dalgalar ve plâzma dalgaları da bulunmak üzere genel lineer dalgalar için dispersiyonun kesin bir tanımını elde etmişlerdir[6].

Olayı temsil eden diferansiyel denklemlerin lineerliği sebebiyle lineer dalgalara ilişkin ortama ait büyüklükler fourier bileşenlerine ayrılabilirler. Basit bir örnek olarak bir boyutlu düzlem dalgalarını ele alalım. Bu halde olayı karakterize eden denklemlerin

$$u(x,t) = a \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1.1)$$



tipinde elemanter çözümleri vardır. Buradan x bir boyutlu mekan koordinatı t zaman-a amplitüd k dalga sayısı w açısal frekans'tır. Dalga boyu $= \frac{2\lambda}{k}$ olarak tanımlanır. Çözümün aşikar (trival) olması için w ile k arasındaki

$$w=w(k) \quad \text{veya} \quad D(w,k)=0 \quad (3.1.2)$$

şeklinde bir tutarlılık şartı bulunması gerekir ki, buna dispersiyon bağıntısı denir. Görülüyorki dispersiyon; açısal frekansın sabit olmaması; dalga sayısına bağlı olmasıdır. O halde genel çözüm;

$$\int_0^{\infty} A(k) e^{i(kx-wt)} dk \quad (3.1.3)$$

biçimindeki Fourier integralleri ile verilir. Burada $A(k)$ spektrum fonksiyonu, uygun başlangıç şartları ya da sınır şartları yardımıyla belirlenebilir. Dalganın V_p faz hızı ve V_g grup hızı

$$V_p=w/k \quad V_g=\partial w/\partial k \quad (3.1.4)$$

bağıntıları ile verilmektedir. Dispersiyon bağıntısında bu iki hızın birbirine eşit olmadığı, diğer bir deyişle faz hızının dalga sayısına bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda dalga Dispersitive veyahutta daha geniş bir anlamda Dispersiyonludur diyeceğiz.

Dispersif sistemlerde dispersiyon bağıntısı genel olarak reel bir k değerine karşılık kompleks w değeri verir bu yüzden faz hızı sadece dalga sayısını (dalganın boyuna) bağlı olmayacak aynı zamanda dalganın genliği zamanla değişecektir.

$\text{Im}(w)>0$ ise dalganın etkin genliği zaman süresince sınırsız büyüyecektir. Bu durumu çözümün instabilitesi (kararsızlığı) denir, şayet $\text{Im}(w)<0$ ise etkin genlik zamanla azalacak ve dalgada sönüm olacaktır, buna (Dissipasyon)

diyoruz, böyle olaylara karakterize eden denklemlerde "bissipasif" denklemler denir, özel olarak dispersiyon bağıntısı reel k değerinin reel fonksiyonu ise $J_m(w)=0$ ki bu durumda $\frac{\partial V}{\partial k} \neq 0$, o zaman nesnüm ne de instabiliteye rastlanır buna salt dispersiyon veyahut dar manada dispersiyon diyoruz, böylece lineer sistemler için dispersiyon açıklanmış olur, lineer olmayan dalga sistemlerinde dalganın frekansı sadece dalga sayısına değil aynı zamanda genlik gibi lineer yaklaşımda küçük oldukları kabul edilen diğer bazı büyüklüklerinde fonksiyonudur, lineer olmayan sistemlerde lineer sistemlerden farklı olarak dispersiyonun iyi bir tanımı henüz yapılmış değildir, bununla birlikte bir çok durumda aslında lineer olmayan denklemlerin lineerize ederek buralara karşı gelen lineer dispersif sistem elde edebiliriz, böyle durumlarda lineer olmayan dalgaların dispersiyonunu incelemek mümkündür. Şayet lineerleştirilmiş biçimi lineer dalgalar anlamında dispersiyonlu ise sisteme dispersifdir diyeceğiz. Sürekli ortamlarda basit lineer olmayan dalgaların yayılması genellikle

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A}(x, t, \underline{u}) \frac{\underline{U}}{x} + \underline{B}(x, t, \underline{u}) = 0 \quad (3.1.5)$$

biçiminde hiperpolik difariyansiyel denklemlerle ifade edilir. Burada

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

şeklinde n bileşeni sütun vektördür,

$\underline{A}$ ve $\underline{B}$ nun her ikisinde $(n \times n)$ biçiminde matrisler olup her ikisininde x , t ve $\underline{U}$ 'ya göre istenildiği kadar türetilbildiği var sayılmakta, $\underline{A}$ matrisinin bütün öz değerlerini reel ve farklı olduğu kabul edilmektedir. Bu yüzden (3.1.5) denklemi hiperboliktir. Bu denklemin çözümleri (x, t) düzleminde, zamanla şekilleri değiştirecekler, ve neticede bir t_c kritik anında çok değerli olacaklardır. Başlangıç

değerleri keyfi olarak düzgün verilse dahi durum aynıdır, bu hal başlangıç değerlerini analitik olması halinde de doğrudur, hakiki fiziki sistemler U 'nun daha yüksek mertebeden türevlerini bulunduran denklemlerle ifade edilir. U 'nun bu türevleri genellikle küçük bir sabitle çarpılarak (3.1.5) denklemine ilave edilmişlerdir.

Böyle sistemlerde dahga bir kere dikleşince çok küçük parametrelerle çarpılsalar dahi, yüksek mertebeden türevli terimler rol oynamaya başlar. Bu olay viskoz sıvılarda sınır tabaka teorisindeki benzer asimtotik yöntem geliştirmenin mümkün olacağını akla getirir. Yüksek Mertebeli türevler genellikle dalganın lineer olmayan dikleşmelerine karşı bir kontrol veya dengeleme tesiri icra ederler. Ve kararlı halin oluşmasını sağlarlar. Bu gibi kararlı hallerin tipik örneği sönümlü ortamlardaki şok dalgaları yahut saf dispersif ortamdaki soliter dalgalardır. Böyle bir sistemi temsil eden en basit denklem muhtemelen sönümlü sistemlerdeki Burgers denklemi yahut saf dispersif ortamlardaki KdV denklemleridir. Genel dispersif sistemlerin geniş sınıfı içinde lineerleştirilmiş dispersiyon bağıntısı

$$w = ak + bk^3 + \dots \quad (3.1.6)$$

biçiminde olan orijinal lineer olmayan denklem sistemleri, küçük fakat sonlu genlikli dalgalarla ilgileniliyorsa çoğu kere asimtotik olarak KdV denklemine indirgenebilirler. (3.1.6). bağıntısında k küçük a ve b reel sabitlerdir. Bu sebepten önce lineerleştirilmiş haldeki dispersiyon bağıntısını araştırmak fikir verici olacaktır. Bununla birlikte şuna dikkat edilmelidir ki çarpışmasız plâzma içindeki (T.KAKUTANI and H.ONO-1969) Lineer olmayan alfven dalgasında olduğu gibi vaziyet her zaman böyle değildir ki bu denklem bir MKdV ile verilmiştir. Aynı zamanda KdV'nin düzeltilmiş veya genelleştirilmiş biçimleri ile ihtiva edilen daha birçok örnek vardır [44].



Genel dispersif denklemlerinin hangilerinin KdV'ye hangi kesin şartlar altında indirgenebileceği henüz halledilmiş değildir. Bununla birlikte Taniuti-wei's [46] ve Gardner ve Su (C.H.SU AND C.S.GARDNER-1969) tarafından öğretici bir yaklaşım yapılmış ve bunlar bir takım lineer olmayan denklem sınıflarını KdV denklemine veya bunun genelleştirilmiş biçimlerden birine indirgemek için Asimtotik bir pertürbasyon yöntemi geliştirmişlerdir. TANIUTİ-WEİ'in yöntemleri ilk denklem sistemlerin Burgers denklemlerine veya onun genelleştirilmiş biçimlerinden birine indirgenebilen sönümlü sistemlere de uygulanabilmektedir [47].

3.2. GENEL İNDİRGEME METODU

Daha önce söylediğimiz gibi KdV denklemleriyle ifade edilebilen birçok fizik olayları vardır. Bununla birlikte bugüne kadar, lineer olmayan denklem sisteminin KdV denklemine indirgenip indirgenemeyeceği konusunda gerek ve yeter şartlar belirlenmiş değildir. Daha önce verdiğimiz Dispersiyon bağıntısının biçimi sadece gerek şart olup, yeter şart değildir.

$u_1, u_2, \dots, u_n$ gibi en bileşimli $\underline{U}$ sütun vektörü tarafından sağlanan aşağıdaki lineer olmayan vektörel denklemleri gözönüne alalım.

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \left[\sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p (H_i^n \frac{\partial}{\partial t} + K_i^n \frac{\partial}{\partial x}) \right] \underline{U} = 0 \quad (3.2.1)$$

burada $\underline{A}$, $\underline{H}_i^n$ ve $\underline{K}_i^n$ elemanları sadece $\underline{U}$ 'ya bağlı olan ve $\underline{U}$ 'ya göre istenildiği kadar türetilbildiği kabul edilen $(n \times n)$ matrislerdir. Metodumuzun esası aşağıdaki kabullere dayanmaktadır.

A1) Uniform hali temsil eden sabit bir $\underline{U}_0$ çözümü vardır ve $\underline{U}$ bu uniform hal civarında ϵ ölçek parametresi cinsinden



$$\underline{U} = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \underline{U}_i \quad (3.2.2)$$

biçiminde kuvvet serisine açılabilir.

A2) $\underline{A}_0 \equiv \underline{A}(\underline{U}_0)$ matrisinin özdeğerleri reel en az biri dejenere değil, sonlu, sıfırdan farklı ve özuzayı hiçbir invariand alt uzay ihtiva etmez.

A3) $x \rightarrow -\infty$ iken $\underline{U} - \underline{U}_0$ üniform

$$\text{hale gider yani } \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{U} - \underline{U}_0 = 0 \quad (3.2.3)$$

olur. Bu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{U}_j = 0 \quad (3.2.4)$$

olması demektir.

A1) varsayımı ve $\underline{A} \underline{H}_i^n \underline{K}_i^n$ 'nin türetilebilirliği sebebiyle $\underline{A}, \underline{H}_i^n \underline{K}_i^n$ 'nin kuvvet serilerine aşağıdaki gibi açılabilirler.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \underline{A}_j \\ \underline{H}_i^n &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \underline{H}_{ij}^n; \quad \underline{K}_i^n = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \underline{K}_{ij}^n \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Burada

$$\underline{A}_0 = \underline{A}(\underline{U}_0); \quad \underline{A}_1 = -\underline{U}_1 \cdot (\nabla_{\underline{u}} \underline{A})_0$$

dir. Benzer tanımlar

$$\underline{H}_{i0}^n, \underline{K}_{i0}^n, \underline{H}_{i1}^n, \underline{K}_{i1}^n$$

içinde yapılabilir. Genel olarak $\underline{X}$ matrisi ϵ nin kuvvetlerine göre

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \epsilon \{ \underline{U}_1 \cdot (\nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 + \epsilon^2 \{ \underline{U}_2 \cdot (\nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 + \frac{1}{2} \underline{U}_1 \underline{U}_1 : (\nabla_{\underline{u}} \nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 + \dots$$

dir. Burada $\underline{X}_0 = (\underline{X})_{\underline{U} \equiv \underline{U}_0}$

$$U_i \cdot (\nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 = \left(\frac{\partial \underline{X}}{\partial u}(\bar{m}) \right)_{\underline{U} \equiv \underline{U}_0} U_i^{(\bar{m})} \quad (j, i=1, 2, \dots) \\ (\bar{n}, \bar{m}=1, 2, \dots, n) \quad (3.2.7)$$

$$U_i U_j : (\nabla_{\underline{u}} \nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 = \left(\frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial u}(\bar{m}) \partial u(\bar{n}) \right) U_i^{(\bar{m})} U_j^{(\bar{n})}$$

Lineer olmayan problemi ele almadan önce lineer dispersiyon bağıntısının çıkarılışını görelim.

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{\hat{U}} \quad (|\underline{\hat{U}}| < \underline{U}_0)$$

koyarak (2.2.1)'i $\underline{\hat{U}}$ 'ye göre lineerleştirelim, ayrıca $\underline{\hat{U}}$ Sinisoydal dalgasını $\text{Re}^{i(kx - \omega t)}$ biçiminde kabul ederek

$$\det \left[-V_p \underline{I} + \underline{A}_{\underline{U}_0} + (ik)^{p-1} \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p (-V_{\underline{U}_0} H_{\underline{U}_0}^n + K_{\underline{U}_0}^n) \right] = 0 \quad (3.2.8)$$

dispersiyon bağıntısını elde ederiz. Burada $\underline{I}$ Birim matris ve $V_p = \frac{\omega}{k}$ faz hızıdır. k 'nın küçük değerleri için bu faz hızı k^{p-1} 'nin kuvvet serisine açılabilir. Böylece

$$V_p = V_0 \left[1 + a_1 k^{p-1} + O(k^{2(p-1)}) \right] \quad (3.2.9)$$

olur. Burada V_0 $\underline{A}_{\underline{U}_0}$ 'nin dejenere olmayan sonlu ve sıfır olmayan özdeğeri a_1 ise,

$$a_1 = i^{p-1} \underline{1}_0 \left\{ \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p (-V_0 H_{\underline{U}_0}^n + K_{\underline{U}_0}^n) \right\} \underline{r}_0 / V_0 \underline{1}_0 \underline{r}_0 \quad (3.2.10)$$

ile verilen sabittir. Burada $\underline{r}_0$ ve $\underline{1}_0 \underline{A}_{\underline{U}_0}$ nin V_0 öz değerine karşılık gelen normalleştirilmiş sağ ve sol öz vektörlerdir. Dalganın fazörü;

$$kx - \omega t = k(x - V_0 t) - V_0 a_1 k^p t \quad (3.2.11)$$

haline geleceğinden aşağıdaki koordinat dönüşümlerini uygulayacağız.



$$\xi = \epsilon^a (x - V_0 t) \quad \tau = \epsilon^{a+1} t \quad a \equiv (p-1)^{-1} \quad (3.2.12)$$

Bu yeni koordinatlar cinsinden (2.2.1) denklemi

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} + (-V_0 \underline{I} + \underline{A}) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \epsilon \left[\sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p H_i^n \frac{\partial}{\partial \xi} + (-V_0 \underline{H}_i^n + \underline{K}_i^n) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u = 0$$

haline gelir.

$$\underline{A}, \underline{H}_i^n, \underline{K}_i^n \text{ ve } \underline{u} \text{ nin}$$

(2.2.2) ve (2.2.5) seri açılımları (3.2.13) denkleminde yerine konup $\underline{u}$ nin kuvvetlerine göre sıralarsak, sıra ile ϵ' için ;

$$(-V_0 \underline{I} + \underline{A}) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} = 0 \quad (3.2.14)$$

ϵ^2 için

$$\begin{aligned} (-V_0 \underline{I} + \underline{A}) \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \tau} - (\underline{u}_1 \cdot (\nabla_u \underline{A})) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} \\ &- \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p (-V_0 \underline{H}_{i0}^n + \underline{K}_{i0}^n) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi^p} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

elde edilir.

(3.2.14) A3 varsayımı kullanılarak integre edilirse,

$$\underline{u}_1 = \underline{r}_0 u^{(1)} \quad (3.2.16)$$

elde edilir. Buradan $u^{(i)}$; $\underline{u}_1$ nun bileşenlerinden biri olup $\underline{r}_0$ nin buna karşı gelen bileşeni 1 olarak normalize edilmiştir. (2.2.16) da $\underline{u}_1$; $\underline{u}$ ye bağlı keyfi bir fonksiyonu ihtiva etmez, çünkü $\lim_{x \rightarrow -\infty} \xi \rightarrow -\infty$ veya $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \underline{u}_j \rightarrow 0$ ($j=1,2,\dots$)

dir. (2.2.15) deki ikinci mertebede çoklukları V_0 özdeğerine karşılık gelen $\underline{l}_0$ normalleştirilmiş, sol öz vektörle çarparak ortadan kaldırılabılır. Böylece $u^{(i)}$ için tek denklemler,

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + c_1 u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = c_2 \frac{\partial p_u^{(1)}}{\partial \xi^p} \quad (3.2.17)$$

bulunur. Burada

$$c_1 = \frac{1}{\underline{r}_0} \{ \underline{r}_0 \cdot (\underline{V}_u \underline{A})_0 \} \underline{r}_0 / \underline{l}_0 \underline{r}_0 \quad (3.2.18-a)$$

$$c_2 = -\frac{1}{\underline{l}_0} \left\{ \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p (-\underline{V}_{0\underline{z}_{i0}}^n + \underline{K}_{i0}^n) \underline{r}_0 / \underline{l}_0 \underline{r}_0 \right\} \quad (3.2.18-b)$$

dir. (3.2.16) ya bakınca $\underline{u}_1$ in bileşimlerinin (3.2.17) denkleminde benzer denklemlerle ifade edilebileceği anlaşılır. p tek olduğu zaman (3.2.17) nin genelleştirilmiş KdV, p çifti olduğu zaman da genelleştirilmiş Burgers denklemi olacağı aşıkardır. $-i^{(p-1)}$ işaret çarpanı bir tarafa bırakılır.

larsa, en yüksek dereceli terimin c_2 katsayısı lineer dispersiyon bağıntısındaki k^{p-1} nin kat sayısı ile aynıdır.

Şayet $\underline{A}_0$ nin öz uzayı invariant alt uzay ihtiva ederse yukarıda özetlediğimiz indirgeme metodu geçerli olmayabilir. Mesela bu uzayın m ve $(n-m)$ boyutlu iki alt uzaydan oluştuğu en basit hali göz önüne alalım. Bu durumda $\underline{A} = \underline{A}(\underline{U}_0)$ matrisi

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} \underline{A}_0^+ & 0 \\ 0 & \underline{A}_0^- \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

şeklinde indirgenemez temsile sahiptir. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^p \left(\underline{H}_{\underline{z}_i}^n \frac{\partial}{\partial t} + \underline{K}_{\underline{z}_i}^n \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

oparatörü

$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{D}^- \\ \underline{D}^+ & 0 \end{bmatrix}$$

(3.2.20)

haline dönüşür. Bu halde (3.2.18-b)'de verilen $c_2=0$ olur. (buna karşılık lineer dispersiyon bağıntısında k^{p-1} nin a_1 katsayısı da 0 dır). Ve netice olarak (3.2.17) denkleminin artık düzgün bir çözümü bulunamaz. Böylece A_1 varsayımı ihlal edilmiş olur. Genel bir teori tesbit etmek oldukça müşkül ve karmaşık olduğundan aşağıdaki özel hal-
le yetineceğiz.

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \left[\prod_{i=1}^p (\underline{H}_i \frac{\partial}{\partial t} + \underline{K}_i \frac{\partial}{\partial x}) \right] \underline{U} = 0 \quad (3.2.21)$$

matris denklemini ele alalım. Buradaki $\underline{U}$, $(n \times 1)$ şeklinde sütün vektör $\underline{A}$, $\underline{H}_i$ ve $\underline{K}_i$ ler elemanları $\underline{U}$ nin bileşenleri-
nin fonksiyonu olan $(n \times n)$ formunda matrislerdir. Bu durum-
da A_1 , A_2 ve A_3 varsayımları şöyle değişir.

B1) A matrisi;

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}^+ & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{A}^- \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada $\underline{A}^+$ ve $\underline{A}^-$ sadece $\underline{U}^+$ nun fonksiyonu olan $(m \times m)$ ve $(n-m \times n-m)$ matrislerdir. $\underline{B}$ ve $\underline{C}$ ise $\underline{U}^-$ nun bileşenlerinin $\underline{U}^+$ nun fonksiyonları ile çarpılıp toplanmasından elde edilen lineer kombinasyonlarıdır. $\underline{U}^+$ ve $\underline{U}^-$ şöyle tanımlanır.

$$\underline{U}^+ = \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} \quad \underline{U}^- = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad \underline{U}^- = \begin{bmatrix} U_{m+1} \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

B2) Sistemin

$$\underline{U}_0 = \begin{bmatrix} U_0^+ \\ U_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0^+ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.24)$$

ile verilen bir üniform hale karşılık gelen çözüm mevcuttur ve $\underline{U}_0^+$ ile $\underline{U}_0^-$ bu hal etrafında ϵ ölçü parametresi cinsinden;

$$\underline{U}^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \underline{U}_j^+ \quad (3.2.25-a)$$

$$\underline{U}^- = \epsilon^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \underline{U}_j^- \quad (3.2.25-b)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilirler.

B3) $\underline{A}_0$ matrisi

$$\underline{A}_0 = \underline{A}(\underline{U}_0) = \begin{bmatrix} \underline{A}_0^+ & 0 \\ 0 & \underline{A}_0^- \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

deki gibi indirgenemez temsiline sahiptir. Bu $B(\underline{U}_0)=0$ manasına gelir.

$\underline{A}_0^+$ nın öz değerleri; reel en az biri dejenere değil sonlu ve 0 dan farklı ayrıca $\underline{A}_0^-$ nın hiçbir öz değerine eşit değildir.

B4) $\underline{H}_i$ ve $\underline{K}_i$ sadece $\underline{U}^+$ nun fonksiyonlarıdır. (3.2.21) denkleminin son terimindeki operatör

$$\prod_{i=1}^p (\underline{H}_i \frac{\partial}{\partial t} \underline{K}_i \frac{\partial}{\partial x}) = \begin{bmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.27)$$

biçimini alır.

B5) $x \rightarrow -\infty$ iken $\underline{U}$ üniform hale gider yani

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{U} \rightarrow \underline{U}_0 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{U}_i^+ \rightarrow 0 \quad (i=1,2,\dots) \quad (3.2.28)$$

dir.

Aşağıdaki gibi tanımlanmış bir koordinat dönüşümü uygulayalım.



$$\xi = \epsilon^b (x - V_o^+ t), \tau = \epsilon^{b+1} t, \quad b \equiv \frac{1}{2(p-1)} \quad (3.2.29)$$

burada V_o^+ , A_o^+ nın denejere olmayan sonlu ve sıfırdan farklı özdeğeridir. Bu durumda (3.2.21) denklemi,

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} + (-V_o^+ I + A) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2} \left[\prod_{i=1}^p \{ (-V_o^+ H_i + K_i) \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon H_i \frac{\partial}{\partial \tau} \} \right] u = 0 \quad (3.2.30)$$

şeklini alır. Bu denklemin son terimi

$$\epsilon^{1/2} \prod_{i=1}^p \{ (-V_o^+ H_i + K_i) \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon H_i \frac{\partial}{\partial \tau} \} u = \epsilon^{1/2} \sum_{q=0}^p \epsilon^q D_q u \quad (3.2.31)$$

şeklinde ifade edilebilir ki buradaki D_q matrisi B4 varsayımı nedeniyle

$$D_q = \begin{bmatrix} 0 & D_q^- \\ D_q^+ & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.32)$$

halini alır. Böylece (3.2.30) denklemi iki kısma ayrılabilir.

$$\epsilon \frac{\partial u^+}{\partial \tau} + (-V_o^+ I + A^+) \frac{\partial u^+}{\partial \xi} + B \frac{\partial u^+}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2} \sum_{q=0}^p \epsilon^q D_q^- u^+ = 0 \quad (3.2.33-a)$$

$$\epsilon \frac{\partial u^-}{\partial \tau} + (-V_o^+ I + A^-) \frac{\partial u^-}{\partial \xi} + C \frac{\partial u^-}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2} \sum_{q=0}^p \epsilon^q D_q^+ u^- = 0 \quad (3.2.33-b)$$

B1, B2 ve B4 varsayımlarının ışığı altında A^+ , B , C ve D^+ matrislerinin

$$A^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j A_j^+ \quad (3.2.34-a)$$

$$B = \epsilon^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j B_j \quad (3.2.34-b)$$



$$\underline{C} = \epsilon^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \underline{C}_j \quad (3.2.34-c)$$

$$\underline{D}_q^{\bar{F}} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \underline{d}_{qj}^{\bar{F}} \quad (3.2.34-d)$$

şeklinde kuvvet serilerine açılabilildiğini biliyoruz.

Burada

$$\underline{A}_1^{\bar{F}} = \underline{U}_1^+ \cdot (\nabla_j + \underline{A}_j^{\bar{F}})_0 ; \quad \underline{B}_1 = \underline{U}_1^- (V_u - B)_0$$

$$\underline{C}_1 = \underline{U}_1^- (\Delta_u - C)_0 ; \quad \underline{d}_{q1}^{\bar{F}} = \underline{U}_1^+ \cdot (\nabla_u + D_q^{\bar{F}})_0$$

$$\underline{d}_{00}^{\bar{F}} = \underline{d}_{00}^{\bar{F}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^p \text{ olup, } \underline{d}_{00}^{\bar{F}}$$

sabit matristir.

$\underline{U}^+$ ve $\underline{U}^-$ nin açılımları ile (3.2.34-a)-(3.2.34-d) ifadeleri (3.2.33-a) (3.2.33-b) denklemlerinde yerine koyup ϵ 'nin her kuvvetine göre düzenlersek ϵ ' için;

$$(-V_{00}^+ I + \underline{A}_{00}^+) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} = 0 \quad (3.2.35-a)$$

$$(-V_{00}^+ I + \underline{A}_{00}^-) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} + \underline{d}_{00}^+ \underline{U}_1^+ = 0 \quad (3.2.35-b)$$

elde edilir. Bu denklemlerden ilki hemen çözülerek

$$\underline{U}_1^+ = \underline{r}_0^+ u^{(1)+} \quad (3.2.36)$$

bulunur. Burada sınır şartı kullanılmış ve $u^{(1)}$, $\underline{U}_1^+$ nun bileşenlerinden biri olarak alınmış $\underline{r}_0^+$ de $\underline{A}_{00}^+$ nın V_0 özdeğrine karşı gelen normalize edilmiş sağ özvektörüdür.

(3.2.36) çözümünü (3.2.35-b)'de yerine konacak olur sa $\underline{U}_1^-$ için $u^{(1)+}$ cinsinden



$$\underline{u}_1^- = -(-V_o^+ I + A_o^-)^{-1} \underline{a}_{oo}^+ \underline{r}_o^+ \frac{\partial^{p-1} u(1)^+}{\partial \xi^{p-1}} \quad (3.2.37)$$

elde edilir.

Benzer şekilde ϵ^2 için,

$$(-V_o^+ I + A_o^+) \frac{\partial u_2^+}{\partial \xi} = -\frac{\partial u_1^+}{\partial \tau} - \underline{a}_{11}^+ \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} - \underline{d}_{oo}^- u_1^- \quad (3.2.38-a)$$

$$(-V_o^+ I + A_o^-) \frac{\partial u_2^-}{\partial \xi} + \underline{d}_{oo}^+ u_2^+ = -\frac{\partial u_1^-}{\partial \tau} - \underline{a}_{11}^- \frac{\partial u_1^-}{\partial \xi} - \underline{c}_{11} \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} - \underline{d}_{1o} u_1^- - \underline{d}_{o1} u_1^+ \quad (3.2.38-b)$$

elde edilir. (3.2.38-a) yı $\underline{A}$ matrisinin normalleştirilmiş sol özvektörü $\underline{l}_o$ ile çarpar. (3.2.27) yi kullanırsak

$$c_1^+ = \underline{l}_o^+ \{ \underline{r}_o^+ (\nabla_u + A_o^+) \{ \underline{r}_o^+ / (\underline{l}_o^+ \underline{r}_o^+) \} \} \quad (3.2.39-a)$$

$$c_2^+ = \underline{l}_o^+ \underline{a}_{oo}^- (-V_o^+ I + A_o^-)^{-1} \underline{a}_{oo}^+ \underline{r}_o^+ / (\underline{l}_o^+ \underline{r}_o^+) \quad (3.2.39-b)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial u(1)^+}{\partial \tau} + c_1^+ u(1)^+ \frac{\partial u(1)^+}{\partial \xi} = c_2^+ \frac{\partial^{2p-1} u(1)^+}{\partial \xi^{2p-1}} \quad (3.2.40)$$

denklemini elde edilir. Bu genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olup $p=2$ için KdV denklemine dönüşür .

3.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

(2.2.1) bölümündeki (2.1.4) denklem sisteminde, $\tau \rightarrow t$; $\xi \rightarrow x$ alırsak bu sistem,

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \right\} \underline{u} = \underline{0}$$

matris formunda yazılabilir.

Burada;



$$\underline{U} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} w_1 & \beta w_2 \\ \beta w_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} & \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}(\beta w_1 - \gamma) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) = \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$H_{\alpha}^{\beta} = H_{\alpha} = 0, \quad \bar{s}=1, \quad p=3, \quad K_{\alpha}^{\beta} \equiv K_{\alpha} = \bar{I}$$

$$K_{\alpha}^{\beta} \equiv K_{\alpha} = \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{\alpha}^{\beta} \equiv K_{\alpha} = I$$

dir. Görüldüğü gibi bu sistem şekil olarak taniuti-wei formundadır. Bu formun diğer şartlarının sağlanıp sağlanmadığını araştıracağız ve mümkünse bu sistemi KdV denklemine veya bunun genelleştirilmiş hallerinde birine indirgeyeceğiz, öncelikle $\gamma=0$ özel halini ele alacağız, denge haline tekabül eden sabit çözümün U_0 olduğunu kabul ederek $\underline{U} = \underline{U}_0 + \epsilon \hat{U}$ formunda çözüm alıp $\epsilon=0$ olarak denklemi lineerleştirerek $\underline{U}_0$ çözümünün bir şarta bağlı olmadığını göreceğiz, bu bakımdan sabit çözümü

$$\underline{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

şeklinde alabiliriz.

$\underline{U}$ 'nin bu sabit çözüm civarında ϵ ölçü parametresinin kuvvetleri cinsinden



$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \epsilon \underline{U}_1 + \epsilon^2 \underline{U}_2 + \dots \quad (3.3.2)$$

şeklinde seriye açılabilirdi kabul edilmektedir.

$$\underline{A}_0 = \underline{A}(\underline{U}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{bmatrix}$$

olduğundan bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ şeklindedir. Özdeğerler reel ve sıfırdan farklıdır.

$x \rightarrow -\infty$ iken $\underline{U} \rightarrow \underline{U}_0$ yani $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{U}_i \rightarrow 0$ ($i=1,2,\dots$) olacaktır.

$\underline{U} = \underline{U}_0 + \hat{U}$; $|\hat{U}| \ll |\underline{U}_0|$ alınır ve denkleminiz $\hat{U}$ 'ye göre lineerleştirilirse ve elde edilen denklemin çözümü

$$\underline{U} = \underline{R} e^{i(kx - \omega t)}$$

yapısında olduğunu kabul edersek

$$\left[-i\omega \underline{I} + i k \underline{A}_0 + (ik)^3 \prod_{\alpha=1}^3 k_{\alpha} \right] \underline{R} = 0 \quad (3.3.4)$$

bulunur. Bu cebrik sistemin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğundan, dispersiyon bağıntısı olarak,

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\omega}{k} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^2 \epsilon_1 & 0 \\ 0 & k^2 \epsilon_2 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.3.5)$$

elde edilir. Bu ifadeyi de düzenliyecek olursak dispersiyon bağıntısı

$$D(\omega, k) = \left(1 - \frac{\omega}{k} \epsilon_1 k^2\right) \left(\beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \epsilon_2 k^2 - \frac{\omega}{k}\right) = 0 \quad (3.3.6)$$

veya $\omega = k + \epsilon_1 k^3$ elde edilir ki bu aranan gerek şarttır k 'nin küçük değerleri için V_p faz hızı $k^{p-1} = k^2$ cinsinden

$$V_p = 1 + \epsilon_1 k^2 \quad (3.3.7)$$

bulunur.

Bu genel haldeki

$V_p = V_o (1 + a_4 k^2 + O(k^4))$ ifadesine eşdeğer olup burada $V_o \equiv \lambda_1 = 1$ sıfırdan farklı reel özdeğer, λ_{-o} ve $\underline{1}_o$ buna karşı gelen sağ ve sol özvektörler yani

$$\underline{r}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{l}_o = [1, 0] ; \quad \underline{l}_o \underline{r}_o^{-1}$$

ve

$$a_1 = i^2 \underline{l}_o \left(\prod_{\alpha=1}^3 K \right) \underline{r}_o / V_o \underline{l}_o \underline{r}_o = -(1, 0) \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} / 1 = \epsilon_1$$

olup (3.3.7) ile uyushmaktadır.

$$a = (p-1)^{-1} = \frac{1}{2} \text{ olmak üzere}$$

$\xi = \epsilon^a (x - V_o^t), \tau = \epsilon^{a+1} t$ koordinat dönüşümü ile denklem sistemimiz

$$\epsilon \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tau} + (\underline{A} - V_o \underline{I}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial \xi} + \epsilon \left(\prod_{\alpha=1}^3 K \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \underline{u} = 0 \quad (3.3.8)$$

şekline dönüşür.

Şayet $\underline{u}$ ve $\underline{A}$ 'nin ϵ 'nin serisine açılımı düşünülür ve ϵ nin kuvvetlerine göre sıralanırsa, sırasıyla

ϵ için;

$$(\underline{A}_o - V_o \underline{I}) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} = 0 \quad (3.3.9)$$

ϵ^2 için;



$$(\underline{A} - \underline{V}_0 \underline{I}) \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial \tau \xi} - \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \tau} - \{ \underline{u}_1 \cdot (\nabla_u \underline{A})_0 \} \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} - \left(\prod_{\alpha=1}^3 K_{\alpha} \right) \frac{\partial^3 \underline{u}_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.3.10)$$

(3.3.9) integre edilirse, $u^{(1)}$ $\underline{U}$ 'nin normalize edilmiş, $\underline{r}_0$ 'nin birim olan bileşenine karşılık gelen bileşeni olmak üzere

$$\underline{u}_1 = \underline{r}_0 u^{(1)} \quad (3.3.11)$$

elde edilir. (3.9.10) denklemi solda $\underline{l}_0$ özvektörü ile çarpılır $\underline{l}_0 (\underline{A} - \underline{V}_0 \underline{I}) = 0$ olduğu düşünülürse

$$-\underline{l}_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \tau} - \underline{l}_0 \{ \underline{u}_1 \cdot (\nabla_u \underline{A})_0 \} \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 \underline{u}_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.3.12)$$

elde edilir.

(3.1.11) çözümü, (3.1.12)'den yerine konur

$$\underline{u}_1 \cdot (\nabla_u \underline{A})_0 = \underline{r}_0 u^{(1)} \cdot (\nabla_u \underline{A})_0 = u^{(1)} \cdot \underline{r}_0 \cdot (\nabla_u \underline{A})_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{bmatrix}$$

olduğuna da dikkat edilirse

$$\underline{u}_1 + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} - \epsilon_1 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.3.13)$$

elde edilir. Bu KdV denklemdir. $\underline{u}_0$ değişik seçimleri içinde benzer şekilde KdV veya bunun genelleştirilmiş şekillerinden birine indirgemek mümkündür.

3.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BOUSSINESQ'İN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde 2 ci bölümdeki (2.1.3) sistemini Taniuti-Wei yöntemi ile çözmeye çalışacağız. (2.1.3) sisteminden

$$\rho A_1^* = -A_1, \quad B_1 = \rho B_1^*, \quad B_2 = \rho B_2^*, \quad A_2 = -\rho A_2^* \quad (3.4.1)$$

olmak üzere



$$q_1 = u_x, \quad q_2 = u_t, \quad q_3 = v_x, \quad q_4 = v_t$$

diyecek olursak

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{-\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \right\} \underline{u} = 0 \quad (3.4.2)$$

vektörel diferensiyel denklemi elde edilecektir. Burada;

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -C_1^2 - B_1 q_1 & 0 & -B_2^* q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -B_2^* q_3 & 0 & -C_2^2 - q_1 B_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$S=1, \quad p=3 \quad \underline{K}_i^{\alpha} = \underline{K}_i; \quad \underline{H}_i^{\alpha} \equiv \underline{H}_i, \quad \underline{H}_i = 0 \quad (c=1,2,3)$$

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = \underline{I}, \quad \underline{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

(3.4.2) sisteminin

$$u^{(k)}(0,t) = u_0^{(k)} + \epsilon F(t) \quad t > 0 \quad (k=0)$$

$$u^{(i)}(0,t) = u_0^{(i)} \quad t > 0 \quad (c \neq k) \quad (i=1,2,3)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{u} = \underline{u}_0; \quad \underline{u}(x,0) = \underline{u}_0 \quad \text{sabit}$$

Sınır ve başlangıç şartı altında asimtotik çözümünü arayacağız. Burada $u^{(k)}$, $\underline{u}$ vektörünün bileşenlerinden herhangi-biri ($\epsilon < 1$) ölçü parametresini göstermekte $F(t)$ $t=0$ anında Lipschitz anlamında sürekli bir fonksiyondur. Problemimizde aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edeceğiz.

i) Ünüform duruma karşı gelen $\underline{U}_0 = (0,0,0,1)$ sabit çözümü (Dalga cephesinin önündeki ortam hareketsizdir) $\underline{U}$ bu sabit çözüm civarında,

$$\underline{U} = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \underline{U}_i = \underline{U}_0 + \epsilon \underline{U}_1 + \epsilon^2 \underline{U}_2 + \dots \quad (3.4.3)$$

şeklinde kuvvet serisi açılabilir. $\underline{A}$ ve $\underline{K}$ matrislerini elemanları $\underline{U}$ vektörünün bileşenlerine göre istenildiği kadar türetilibildikleri gözönünde bulundurulursa $\underline{U}$ 'nun seri açılımı kullanılarak katsayı matrisleri de

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \epsilon \{ \underline{U}_1 (\nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 \} + \epsilon^2 \{ \underline{U}_2 \cdot (\nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 + \frac{1}{2} \underline{U}_1 \cdot \underline{U}_1 : (\nabla_{\underline{u}} \nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 \} + \dots \quad (3.4.4)$$

formunda seriye açılabilirler. Burada

$$\underline{X}_0 = (\underline{X})_{\underline{U}=\underline{U}_0}$$

$$\underline{U}_i \cdot (\nabla_{\underline{u}} \underline{X})_0 = \left(\frac{\partial \underline{X}}{\partial u^{(m)}} \right)_{\underline{U}=\underline{U}_0} u_i^{(m)} \quad \begin{matrix} (i, j=1, 2, \dots) \\ (m, n=1, 2, \dots, 4) \end{matrix}$$

$$\underline{U}_i \cdot \underline{U}_j : (\nabla_i \nabla_j \underline{X})_0 = \left(\frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial u^{(m)} \partial u^{(n)}} \right)_{\underline{U}=\underline{U}_0} u_i^{(m)} u_j^{(n)} \quad (3.4.5)$$

$u_i^{(m)}$ $\underline{U}_i$ vektörünün m ci bileşenidir.

ii) Zayıf lineer olmayan dispersif dalgalar incelendiğinden $\underline{H}$ ve $\underline{K}$ matrislerinin seri açınımlarında ortaya çıkan katsayı matrislerinin elemanlarının $\epsilon^{1/3}$ mertebesinde oldukları kabul edileceklerdir. Burada $\underline{K}_{\alpha i}$ =sabit olduğundan $\underline{K}_{\alpha i} = 0(\epsilon^{1/3})$ olduklarını kabul ediyoruz ($\underline{H}_{\alpha i} \neq 0$) (3.4.2) sistemindeki son terim (3.4.3) ve (3.4.4) ışığında

$$\left[\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \right] \underline{U} = (\epsilon \underline{T}_0 + \epsilon^2 \underline{T}_1 + \dots) (\underline{U}_0 + \epsilon \underline{U}_1 + \dots)$$

$$= \epsilon^2 \underline{T}_0 \underline{U}_1 + \epsilon^3 (\underline{T}_0 \underline{U}_2 + \underline{T}_1 \underline{U}_1) + \dots$$

şeklinde kuvvet serisine açabiliriz. Burada

$$\underline{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 & +0 & 0 & 0 \\ -A_1^* \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_2^* \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{T}_i = 0 \quad i > 0$

dir. Sistemimizde

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -c_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

iii) $\underline{A}_0$ matrisinin özdeğerleri gerçel, en az bir tanesi yozlaşmaz, Sonlu ve sıfırdan farklı olduğundan indirgeme şartı-gerçeklenmektedir.

Bu kabuller altında denklem sistemimizi

$$(\epsilon \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} + \dots) + \{ \underline{A}_0 \epsilon \underline{u}_1 \cdot (\nabla_u \underline{A})_0 + \dots \} \{ \epsilon \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial x} + \dots \} + \epsilon \underline{T}_0 (\underline{u}_0 + \epsilon \underline{u}_1 + \dots) = 0 \quad (3.4.6)$$

şeklinde yazabiliriz. ϵ 'nin çeşitli mertebeleri için ϵ için:

$$\frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} + \underline{A}_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial x} = 0 \quad (3.4.7)$$

ϵ^2 için

$$\frac{\partial \underline{u}_2}{\partial t} + \underline{A}_0 \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial x} + [\underline{u}_1 (\nabla_u \underline{A})_0] \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial x} + \underline{T}_0 \underline{u}_1 = 0 \quad (3.4.8)$$

denklemleri elde edilir. Sınır ve başlangıç şartlarını da aynı şekilde seriye açarsak;

ϵ^3 için;



$$u_1^{(0)}(0, t) = F(t) \quad t > 0 \quad (3.4.9-a)$$

$$u_1^{(i)}(0, t) = 0 \quad t > 0 \quad i \neq 0 \quad (3.4.9-a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{u}_1 \rightarrow 0 ; \quad u_1(x, 0) = 0 \quad (3.4.9-c)$$

ϵ^1 için:

$$\underline{u}_1(0, t) = 0 \quad (3.4.10-a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{u}_e \rightarrow 0 \quad (3.4.10-b)$$

$$u_1(x, 0) = 0 \quad (3.4.10-c)$$

(3.4.7) denkleminin, (3.4.9-a)(3.4.9-c) sınır başlangıç şartları altında çözümünü bulmaya çalışacağız.

$$\lambda_0 = V_0 = c_1, \quad \lambda_1 = -c_1, \quad \lambda_2 = c_2, \quad \lambda_3 = -c_3$$

A_0 sabit matrisinin özdeğerleri

$$r_0 = \frac{1}{(c_1^2 + 1)^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{1+c_2^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \quad r_3 = \frac{1}{\sqrt{1+c_2^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ler sağ özvektörleri

$$\underline{l}_0 = (-c_1, 1, 0, 0) \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \quad \underline{l}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} (c_1, 1, 0, 0)$$

$$\underline{l}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+c_2^2}} (0, 0, -c_2, 1) \quad \underline{l}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+c_2^2}} (0, 0, c_2, 1)$$

de sol özvektörler olarak bulunur.

(3.4.7) denklemi; soldan $\underline{l}_i$ ($i=0,1,2,3$) ile çarpılır. $\underline{l}_i \underline{\Lambda}_{20} = \lambda_i \underline{l}_i$ olduğunu düşünürsek

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}\right) \underline{l}_i \underline{U}_1 = 0 \quad (i=0,1,2,3) \quad (3.4.11)$$

haline gelir.

$c_1^2 \neq c_2^2$ olması halindeki sağ ve sol özvektörler sıra ile

$$\underline{r}_i \text{ ve } \underline{l}_i \quad (i=0,1,2,3)$$

olmak üzere

$w_1^{(i)} = \underline{l}_i \underline{U}_1$ tanımını yapalım ve $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ in $(1, \lambda_i)$ doğrultusunda türetme operatörü olduğunu düşünürsek (3.4.11) için formel çözüm

$$w_1^{(i)} = w_1^{(i)} \left(t - \frac{x}{\lambda_i}\right) = w_1^{(i)}(\xi_i) \quad (i=0,1,2,3)$$

formundadır.

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \underline{l}_0 \\ \underline{l}_1 \\ \vdots \\ \underline{l}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{c_2}{\sqrt{1+c_2^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+c_2^2}} \end{bmatrix}$$

tanımını yaparak ki burada $\underline{w}_1$ bileşenleri $w_1^{(i)}$ ($i=0,1,2,3$) olan sütun vektördür.

$$\det \underline{L} = \frac{4c_1 c_2}{(1+c_1^2)(1+c_2^2)} \neq 0 \text{ olduğundan } \underline{L}^{-1} \text{ mevcuttur}$$

Bu nedenle

$$\underline{U}_1 = \underline{L}^{-1} \underline{w}_1 \quad (3.4.12)$$

$\underline{L}^{-1}$ matrisinin $\underline{n}_0, \underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ sütun vektörlerinden oluştuğu düşünülürse

$$\underline{n}_i = \frac{1}{\underline{l}_i \underline{r}_i} \underline{v}_i \quad (i=0,1,2,3) \quad (3.4.13)$$

dir. 0 halde

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2c_1} & \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2c_1} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2} & \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1+c_2^2}}{2c_2} & \frac{\sqrt{1+c_2^2}}{2c_2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1+c_2^2}}{2} & \frac{\sqrt{1+c_2^2}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4.14)$$

bulunur. Böylece

$$\underline{U}_1 = w_1^{(0)} \underline{n}_0 + w_1^{(1)} \underline{n}_1 + w_1^{(2)} \underline{n}_2 + w_1^{(3)} \underline{n}_3 \quad (3.4.15)$$

elde edilir. Şimdi bu genel çözümden sınır şartlarını sağlayan çözümü arayalım. Verilen sınır şartlarına karşı gelen özdeğer $v_0 = \lambda_0 = c_1$ dir. Genel olarak bu problemin fiziksel özelliğinden kestirilir.

$$\xi = t - \frac{x}{c_1} \quad \eta = t + \frac{x}{c_1} \quad (3.4.16)$$

genel olarak,

$$\xi = t - \frac{x}{\lambda_i} \quad \eta = t + \frac{x}{\lambda_i} \quad (3.4.16-a)$$

Değişken dönüşümünü yapalım. (3.4.15) denkleminin sınır şartlarını sağlayan çözümü

inşa edilebilir. Buna göre k nci basit dalga çözümünün

$$\frac{du_1^{(0)}}{r_k^{(0)}} = \frac{du_1^{(k)}}{r_k^{(k)}} = \frac{du_1^{(3)}}{r_k^{(3)}} = a \text{ (sabit)} \quad (3.4.18)$$

olduğu bulunabilir. $k=0$ ise $r_o^{(0)}=1$ olduğundan

$$du_1^{(i)} = r_o^{(i)} du_1^{(0)} \quad i=(1,2,3,4) \quad (3.4.19)$$

veya,

$$u_1^{(i)} - r_o^{(i)} u_1^{(0)} + \alpha_i = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (3.4.20)$$

bulunur. Burada α_i sabit, $r_k^{(i)}$ r_k özvektörün i ci bileşeni, $u_1^{(k)}$ da u_1 vektörünün k ci bileşenidir. Böylece 3 tane lineer bağımsız denklem sistemi elde edilir. Bunlara karşı gelen (3.4.20) bağıntılarına sıfırcı Reimann invariantları denir. Başlangıç şartı kullanılırsa (3.4.20) bağıntısı

$$u_1^{(i)} - r_o^{(i)} u_1^{(0)} = 0 \quad \text{veya} \quad u_1 = r_o u_1^{(0)} \quad (3.4.21)$$

formunda bulunur. Burada da sınır şartlarının ilki kullanılırsa,

$$u_1 = F(\xi) r_o \quad (3.4.22)$$

bulunur. Buradanda

$$u_1 = w_1^{(0)}(\xi) r_o = F(\xi) r_o + w_1^{(0)} = F(\xi) l_o r_o \quad (3.4.23)$$

elde edilir. Bu çözüm kullanılırsa (3.4.8) denklemi,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A_{\frac{\partial}{\partial x}} \right) u_2 = - [r_o \cdot (\nabla_u A)_{\frac{\partial}{\partial x}}] r_o F(\xi) \frac{\partial}{\partial x} F(\xi) - T_o r_o F(\xi) \quad (3.4.24)$$

formunda yazılabilir. Bunun l_o sol vektörü ile çarpıp ξ, η koordinatlarında yazarsak,

$$w_2^{(0)} = \underline{1}_0 \underline{U}_2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial \eta} w_2^{(0)} &= \frac{1}{V_0} \underline{1}_0 [\underline{r}_0 (\nabla_0 A)_0] \underline{r}_0 F(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi) - \underline{1}_0 \left\{ \prod_{\alpha=1}^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_\alpha}{V_0} \right\} \underline{r}_0 \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

bulunur. Bu η ye göre integre edilirse, $g(\xi)$ integre sabiti olmak üzere

$$2w_2^{(0)} = \left[\frac{B_1^*}{2c_1} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{A_1^*}{c_1} \frac{\partial^3 F(\xi)}{\partial \xi^3} \right] \eta + g(\xi) \quad (3.4.26)$$

bulunur.

$\xi = \eta$ yani $x=0$ iken $\xi = t$ olduğu düşünülürse, (3.4.10-a) sınır şartından,

$$\underline{U}_2(\xi, \xi) = 0 \quad (3.4.27)$$

bulunur.

$$w_2^{(0)} = \underline{1}_0 \underline{U}_2 \text{ olduğu için (3.4.27) çözümü,}$$

$$w_2^{(0)}(\xi, \xi) = 0 \quad (3.4.28)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemden (3.4.26) bağıntısındaki $g(\xi)$ integrar sabiti,

$$g(\xi) = \left[\frac{A_1^*}{c_1} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} - \frac{B_1^*}{2c_1} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right] \xi \quad (3.4.29)$$

elde edilir. Böylece

$$w_2^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{B_1^*}{4c_1} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{A_1^*}{2c_1} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right] (\eta - \xi) \quad (3.4.30)$$

bulunur.

(3.4.16) , (3.4.30) ve $w_2^{(0)}$ nin tarifi dikkata alınır;

$$\underline{U}_2 = \left\{ \left[MF(\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi} + N \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right] x \right\} \underline{r}_0 \quad (3.4.31)$$

bulunur. Burada M ve N integral sabitlerdir. Böylece $\underline{U}$ için ikinci mertebeden formel çözüm;

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \epsilon F(\xi) \underline{r}_0 + \epsilon^2 \left\{ \left[MF(\xi) F_\xi + NF_{\xi\xi\xi} \right] x \right\} \underline{r}_0 + O(\epsilon^3) \quad (3.4.32)$$

olarak bulunur. Buradan $x=0(\frac{1}{\epsilon})$ ile $\epsilon \underline{U}_1$ ve $\epsilon^2 \underline{U}_2$ nun aynı etkiye sahip olacakları görülmektedir. Zira burada

$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{U}_2^{+\infty}$ oluyor yani seküleriteye sahip olmaktadır.

Bu durum değişik ölçekleme ile giderilebilir. Hakikaten $x_0 = x$ $x_1 = \epsilon x$ $t_0 = t$ bağımsız değişkenlerini seçelim. $\underline{U} = \underline{U}(x_0, x_1, t_0)$ olacaktır. Başlangıçtaki denkleminin yeni koordinatlarda yazar $\underline{U}$ ve katsayı matrislerinin seri açılımlarını kullanır. ϵ nin değişik kuvvetlerine göre düzenlersek

ϵ için,

$$\frac{\partial \hat{\underline{U}}_1}{\partial t_0} + \hat{\underline{A}}_0 \frac{\partial \hat{\underline{U}}_1}{\partial x_0} = 0 \quad (3.4.33)$$

ϵ^2 için

$$\frac{\partial \hat{\underline{U}}_2}{\partial t_0} + \hat{\underline{A}}_0 \frac{\partial \hat{\underline{U}}_2}{\partial x_0} + \hat{\underline{A}}_0 \frac{\partial \hat{\underline{U}}_1}{\partial x_1} + \left[\hat{\underline{U}}_1 \cdot (\nabla \hat{\underline{U}}^A)_0 \right] \frac{\partial \hat{\underline{U}}_1}{\partial x_0} + \hat{\underline{T}}_0 \hat{\underline{U}}_1 = 0 \quad (3.4.34)$$

bulunur. (3.4.33) için $\xi_0 = t - \frac{x_0}{v_0} = t_0 = \frac{x_0}{c_1}$ olmak üzere daha önce olduğu gibi;

$$\hat{\underline{U}}_1 = \hat{\underline{u}}_1^{(0)}(\xi_0, x_1) \underline{r}_0 \quad (3.4.35)$$

formunda çözüm bulunur. Bu çözüm (3.4.34) denkleminde yerine konursa

$$N(\xi_0, x_1) = \left[-\frac{1}{c_1} \frac{\partial \hat{u}_1^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{1}{c_1} \right] r_0 \cdot (V_{\hat{u}} \hat{A})_0 [\hat{u}_1^{(0)} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \xi_0} - \hat{r}_0 u_1^{(0)}] \quad (3.4.36)$$

olmak üzere,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \hat{A}_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \hat{u}_2 = N(\xi_0, x_1) r_0 \quad (3.4.37)$$

elde edilir. Bu denklemin formel çözümü daha önce olduğu gibi,

$$\hat{u}_2 = \{ [1_0 N(\xi_0, x_1) r_0]_0 + \hat{h}(\xi_0, x_1) \} r_0 / 21_0 r_0 \quad (3.4.38)$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi çözümde yine bir sekülerite vardır. Yani $x \rightarrow \infty$ için $u_2 \rightarrow \infty$ olmaktadır. Bu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ 1_0 N(\xi_0, x_1) r_0 \} = 0 \quad (3.4.39)$$

sekülerite şartı ile kaldırılabilir.

Buradan ilk adımda sadece yapısı bulunan $\hat{u}_1^{(0)}$ fonksiyonunun,

$$\frac{\partial \hat{u}_1^{(0)}}{\partial x_1} + a_1 u_1^{(0)} \frac{\partial \hat{u}_1^{(0)}}{\partial \xi_0} = a_2 \frac{\partial^3 \hat{u}_1^{(0)}}{\partial \xi_0^3} \quad (3.4.40)$$

denkleminin çözümü olması gerektiği ortaya çıkar. Bu bildiğimiz KdV denklemdir. Buradan a_1, a_2 sabitleri,

$$a_1 = -1_0 [r_0 (V_{\hat{u}} \hat{A})_0] r_0 / V_0 1_0 r_0 = B_1^* / 2c_1^2$$

$$a_2 = -1_0 \left(\prod_{\alpha=1}^3 - \frac{K_{\alpha}}{V_0} \right) r_0 / V_0 1_0 r_0 = A_1^* / 2c_1^2 \quad (3.4.41)$$

şeklinde tanımlanır. (3.4.40) denkleminden $\hat{u}_1^{(0)}$ için bir çözüm bulunabilirse (3.4.35) bağıntısından kolaylıkla $\hat{u}_1$ hesaplanır. Diğer taraftan $\hat{u}_1$ çözüm vektörü ile u_1 çözüm vektörü $x=0$ veya $x_0=0, x_1=0$ için biri birileriyle özdeş olması gerektiğinden

$$\hat{u}_1^{(0)}(\xi_0, 0) = F(\xi_0) \quad \xi_0 > 0 \quad (3.4.42)$$

$$u_1^{(0)}(\xi_0, 0) = 0 \quad \xi_0 < 0 \quad (3.4.43)$$

elde edilir. (3.4.38) ve (3.4.39) ifadeleri dikkate alınır-
sa, $\hat{u}_2$ nin η_0 değişkeninden bağımsız olduğu görülecek ve
(3.4.37) denklemi

$$(A_0 - V_0 I) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_0} = -V_0 N(\xi_0, x_1) \underline{r}_0 \quad (3.4.44)$$

formunda yazılacaktır. Böylece $\underline{N}$, ξ_0, x_1 nin bilinen fonk-
sionudur. Şayet (3.4.44) denkleminin çözümü varsa bu çö-
züm $\underline{A}_0$ nin sağ öz vektörlerinin lineer bir kombinasyonu
şeklinde yazılabilir. Yani

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_0} = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \underline{r}_i \quad (3.4.45)$$

dir. $V_0 \underline{A}_0$ nin öz değeri olduğundan (3.4.44) denkleminde,

$$\underline{1}_0 N(\xi_0, x_1) \underline{r}_0 = 0 \quad (3.4.46)$$

olur ki bu daha önce söylediğimiz sekülerite şartından
başka birşey değildir. O halde (3.4.45) ifadesi,

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_0} = -V_0 \sum_{i \neq 0} \frac{\underline{1}_i N(\xi_0, x_1)}{(\lambda_i - V_0) \underline{1}_i \underline{r}_i} \underline{r}_i + \alpha_0(\xi_0, x_0) \underline{r}_0 \quad (3.4.47)$$

formunda ifade edilebilir.

Bu denklem yardımıyla, $\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_0}$ nin üç bileşeni mesela,

$$\frac{\partial \hat{u}_2^{(0)}}{\partial \xi_0}$$

cinsinden ifade edilebilir. $\underline{r}_0$ nin birinci bileşeni 1 ol-
duğundan,

$$\alpha_o(\xi_o, x_o) = V_o \sum_{i \neq 0} \frac{\underline{1}_i N(\xi_o, x_1) \underline{r}_o}{(\lambda_i - V_o)} r_i + \frac{\partial \hat{u}_2^{(o)}}{\partial \xi_o} \quad (3.4.48)$$

olarak seçersek ve bunu (3.4.47) denkleminde yerine koyup integre edersek $\underline{U}_2$ vektörünün bileşenleri $\underline{U}_2^{(o)}$ cinsinden ifade edilebilir. $\underline{U}_1$ ve $\hat{U}_2$ kullanılarak ε^3 nin kat sayılarının eşitliğinde,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_o} + A_o \frac{\partial}{\partial x_o} \right) \underline{U}_3 = \underline{P}(u_2^{(o)}, u_1^{(o)}) \quad (3.4.49)$$

yapısında bir bağıntı elde edilir. Bunun çözümünde yine bir sekülerite ortaya çıkacağı açıktır. Bu ise $x \rightarrow \infty$ için,

$$\underline{1}_o \underline{P}(u_2^{(o)}, u_1^{(o)}) = 0 \quad (3.4.50)$$

sekülerite şartı ile ortadan kaldırılabilir. Böylece $u_2^{(o)}$ nin sağladığı yeni bir denklem ortaya çıkar. Bu çözülerek $\hat{U}_2$ bulunabilir. Böyle devam ederek istediğimiz mertebeden çözümü bulabiliriz.

3.5. ÖZEL HALLER

Bu bölümde (3.4.40) denklemindeki a_1 veya a_2 nin 0 olması halini gözönüne alacağız. Önce $a_1 = 0$ halini düşünelim. Bu durum uygulanan perturbasyon açılımında disipatif veya dispersif terimlerin non-lineerlikten daha etkin olarak gözönüne alınmasından doğmaktadır. Perturbasyon işlemi iki etkiyi eş mertebede tutacak şekilde değiştirilerek zayıf non-lineer dalgaları karakterize eden denklemler elde edilir.

Bu durumda A1-A3 varsayımlarına karşı gelen B1-B4 varsayımlarını alarak yeni bir perturbasyon işlemi uygulayacaktır.

Şayet

$$\underline{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

olarak $\underline{A}_0$ ın özdeğerlerini bulursak yine $\lambda_0 = c_1$, $\lambda_1 = -c_1$, $\lambda_2 = c_2$, $\lambda_3 = -c_2$ bulunacaktır. Eğer $V_0 = -c_2$ alır (3.4.40) daki katsayıları hesaplırsak $a_1 = 0$ bulunur. Bu nedenle bu durumda

$$\underline{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_1^2 - B_1^* U_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{A}^- = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_2^2 - B_2^* U_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^+ = \underline{B}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2 U_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}^+ & \underline{B}^- \\ \underline{B}^+ & \underline{A}^- \end{bmatrix} \quad \text{yapısındadır.}$$

ayrıca

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \end{bmatrix} \quad \underline{U}^+ = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \underline{U}^- = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (u_i \equiv q_i)$$

kabul edilerek

$$\underline{U}_0 = \begin{bmatrix} u_0^+ \\ u_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^+ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_0^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{U}_0^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formunda denge haline tekabül eden sabit çözümün var olduğunu varsayıp, $\underline{U}_0^+$ ve $\underline{U}_0^-$ nin bu sabit çözüm civarında ϵ ölçü parametresi cinsinden

$$\underline{U}^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \underline{U}_j^+, \quad \underline{U}^- = \epsilon^{1/2} \sum_j \epsilon^j \underline{U}_j^- \quad (3.5.2)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilirler.

$$\underline{A}_0 = \underline{A}(\underline{U}_0) = \begin{bmatrix} \underline{A}_0^+ & 0 \\ 0 & \underline{A}_0^- \end{bmatrix}$$

formunda olup, burada

$$\underline{A}_0^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_1^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_0^- = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_2^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

dir. $\underline{A}_0^+$ nin öz değerleri c_1 ve $-c_1$, $\underline{A}_0^-$ nin öz vektörleri ise c_2 ve $-c_2$ dir. Görüldüğü gibi $c_1 \neq c_2$ ise $\underline{A}_0^+$ ve $\underline{A}_0^-$ nin ortak özdeğerleri yoktur ve hepsi 0 dan farklıdır.

$$\underline{A}^+ = \underline{X} \text{ için}$$

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \epsilon \{ \underline{U}_1 (\nabla_{\underline{u}+\underline{X}}) \}_0 + \epsilon^2 \{ \underline{U}_2 (\nabla_{\underline{u}+\underline{X}}) \}_0 + \frac{1}{2} \underline{U}_1^+ \underline{U}_1^+ : (\nabla_{\underline{u}+\underline{X}}) \}_0 + O(\epsilon^3) \quad (3.5.4)$$

$$\underline{B}^+ = \underline{Y} \text{ için de}$$

$$\underline{Y} = \epsilon^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \underline{Y}_j \quad \underline{Y}_1 = \underline{U}_1^- (\nabla_{\underline{u}} - \underline{Y})_0, \dots \quad (3.5.5)$$

şeklinde seriye açılabilirler. $\underline{A}_0^+$ nin $\lambda_1 = +c_1$, $\lambda_2 = -c_2$ özdeğerlerine karşılık gelen sağ ve sol öz vektörleri

$$\underline{r}_0^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -c_1 \end{bmatrix} \quad \underline{r}_1^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad \underline{l}_0^+ = (-c_1, 1) \quad \underline{l}_1^+ = (c_1, 1)$$

dir. $\underline{A}_0^-$ nin özdeğerlerine karşılık gelen sol ve sağ öz vektörler $\underline{l}_k$ ve $\underline{r}_k$ benzer şekilde bulunur ($k=3,4$).

$$u^{(1)}(0,t) = 0 + \epsilon F(t) \quad t > 0 \quad j \in \{1,2\}$$

$$u^{(2)}(0,t) = 1 \quad t > 0 \quad i \neq j$$

Genel sınır başlangıç şartlarını

$$u^1(0,t) = \epsilon F(t)$$

$$u^{(2)}(0,t) = 1, \quad u^{(3)}(0,t) = u^{(4)}(0,t) = 0 \text{ dır.}$$

Burada $u^{(1)}$ lar $\underline{u}$ vektörünün bileşenleridir. Daha önceki pertürbasyon işlemini yapacak olursak $x_0 = 0$ (ϵ^{-1}) de ikinci merteye formel çözüm seküler bir davranış gösterir, bunun için orada yapılan değişik zaman ölçekleri metodu kullanılarak sekülerite giderilebilir. Bunun için x, t yerine $x_0 = x, x_1 = \epsilon x, t_0 = t$ bağımsız değişkenlerini seçiyoruz. Böylece

$$\underline{u}(x,t) = \hat{\underline{u}}(x_0, x_1, t_0) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (3.5.6)$$

elde edilir. A.2 varsayımında olduğu gibi, K_α ($\alpha=1,2,3$) $K_\alpha = 0$ ($\epsilon^{1/3}$) olacağından B.1-B.4 varsayımları ışığı altında

$$\hat{\underline{u}}^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \underline{u}_k^+ \quad \hat{\underline{u}}^- = \epsilon^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \underline{u}_k^- \quad \hat{\underline{\Lambda}}^\mp = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \underline{\Lambda}_k^\mp$$

$$\hat{\underline{B}}^+ = \epsilon^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \underline{u}_k^+ (\nabla_u + \hat{\underline{B}}^+)_0 \quad \hat{\underline{B}}^- = \epsilon^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \underline{u}_k^- (\nabla_u - \hat{\underline{B}}^-)_0$$

açınımları denklemimizde yerine konursa $\hat{\underline{u}}^+$ ve $\hat{\underline{u}}^-$ için

$$\frac{\partial \hat{\underline{u}}^+}{\partial t_0} \hat{\underline{\Lambda}}^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\epsilon}{\partial x_1} \right) \hat{\underline{u}}^+ \hat{\underline{B}}^- \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\epsilon}{\partial x_1} \right) \hat{\underline{u}}^- + \epsilon \hat{\underline{K}}^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\epsilon}{\partial x_1} \right)^3 \hat{\underline{u}}^+ = 0 \quad (3.5.7)$$

$$\frac{\partial \hat{\underline{u}}^-}{\partial t_0} \hat{\underline{B}}^- \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\epsilon}{\partial x_1} \right) \hat{\underline{u}}^+ + \hat{\underline{\Lambda}}^- \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\epsilon}{\partial x_1} \right) \hat{\underline{u}}^- + \epsilon \hat{\underline{K}}^- \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\epsilon}{\partial x_1} \right)^3 \hat{\underline{u}}^- = 0 \quad (3.5.8)$$

Denklemleri elde edilir. Ki burada

$$\hat{K}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_1^* & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{K}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

dir. (3.5.7) de ki denklemimiz

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \prod_{\alpha=1}^3 K_{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{K}^+ & 0 \\ 0 & \hat{K}^- \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} (\hat{U}_0^+ + \epsilon \hat{U}_1^+) + (A_0^+ + \epsilon A_1^+) D (\hat{U}_0^+ + \epsilon \hat{U}_1^+) + \epsilon (\epsilon B_1^- + \epsilon^2 B_2^-)$$

$$D(\epsilon \hat{U}_1^-) + \epsilon K^+ D^3 (\hat{U}_0^+) = 0 \quad (3.5.9)$$

$$\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial t_0} (\epsilon \hat{U}_1^- + \dots) + \epsilon^{1/2} (\epsilon B_1^+ + \epsilon^2 B_2^+ + \dots) D (\hat{U}_0^+) + \epsilon^{1/2} (A_0^- + \epsilon A_1^- + \dots)$$

$$D(\epsilon \hat{U}_1^- + \epsilon^2 \hat{U}_2^- + \dots) + \epsilon^{3/2} K^- D^3 (\epsilon \hat{U}_1^- + \dots) = 0 \quad (3.5.10)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden ilki ϵ nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

ϵ için

$$\frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial t_0} + A_0^+ \frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial x_0} = 0 \quad (3.5.11-a)$$

ϵ^2 için

$$\frac{\partial \hat{U}_2^+}{\partial t_0} + A_0^+ \frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial x_1} + A_1^+ \frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial x_0} + \hat{K}^+ \frac{\partial^3 \hat{U}_1^+}{\partial x_0^3} + A_0^+ \frac{\partial \hat{U}_2^+}{\partial x_0} \quad (3.5.11-b)$$

ikinci denklemde $\epsilon^{1/2}$ ile bölündükten sonra ϵ nin kuvvetlerine göre sıralanırsa

ϵ için

$$\frac{\partial \hat{u}_1^-}{\partial t_o} + A_o - \frac{\partial \hat{u}_1^-}{\partial x_o} = 0 \quad (3.5.12-a)$$

ϵ^2 için

$$\frac{\partial \hat{u}_2^-}{\partial t_o} + \frac{B_1^+}{2} \frac{\partial \hat{u}_1^-}{\partial x_o} + \frac{A_o^-}{2} \frac{\partial \hat{u}_1^-}{\partial x_1} + \frac{A_o^-}{2} \frac{\partial \hat{u}_2^-}{\partial x_o} + \frac{A_1^-}{2} \frac{\partial \hat{u}_1^-}{\partial x_o} + \frac{K^-}{2} \frac{\partial^3 \hat{u}_1^-}{\partial x_o^3} = 0 \quad (3.5.12-b)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden (3.5.11-a) ve (3.5.12-a) sınır şartları altında integre edilirse,

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^- &= u_1^{(2)}(\xi_o, x_1) r_o^+ \\ \hat{u}_1^- &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

çözümü bulunur ki burada $\xi_o = t_o - \frac{x_o}{v_o^+} = t_o - \frac{x_o}{c_1}$

olarak tanımlanmıştır. Bu çözümler (3.5.11-b)'de yerine konursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_2^-}{\partial t_o} + A_o^+ \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{u}_1^{(2)} r_o^+ + u_1^{(2)} (v_u + A^+) \frac{\partial}{\partial x_o} \hat{u}_1^{(2)} r_o^+ + \frac{K^+}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ \hat{u}_1^{(2)} r_o^+ + A_o^+ \frac{\partial \hat{u}_2^+}{\partial x_o} = 0 \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

veya

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_o} + I \frac{A_o^+}{2} + \frac{\partial}{\partial x_o} \right) \hat{u}_2^+ = N(\xi_o, x_1) r_o^+ \quad (3.5.15)$$

formunda yazılabilir. Burada

$$N = -A_o^+ \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} u_1^{(2)} (v_u + A^+) \frac{1}{v_o^+} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi_o} + K^+ \left(\frac{1}{v_o^+} \right)^3 \frac{\partial^3 u_3^{(2)}}{\partial \xi_o^3}$$

şeklinde ki katsayıdır.

$$(\nabla_{u^+} A^+)_{\mathbf{o}} = \frac{\partial}{\partial u_1} A^+ + \frac{\partial}{\partial u_2} A^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_1^2 - B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$N(\xi_o, x_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_1^2 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{1}{c_1} u_1^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_1^2 - B_1^o & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi_o^3} + \frac{1}{c_1^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 u_1^{(2)}}{\partial \xi_o^3} \quad (3.5.16)$$

olup böylece $\eta_o = t_o + \frac{x_o}{c_1}$ olmak üzere

$$\hat{u}_2 = \{ [l_o^+ N(\xi_o, x_1) r_o^+] \eta_o + h(\xi_o, x_1) \} \hat{x}_o^+ / 2l_o r_o^+$$

çözümü bulunur. Görüldüğü gibi yine bir sekülerite vardır. Bunu

$$\lim_{x=x_o+\infty; \eta_o \rightarrow \infty} l_o^+ N(\xi_o, x_1) r_o^+ \rightarrow \infty \quad (3.5.17)$$

sekülerite şartından kaldırabiliriz.

Buradan da ilk adımda sadece yapısı bulunan (3.5.13) çözümündeki u için

$$\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{2c_1^2 + B_1^*}{2c_1^3} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi_o} = \frac{A_1^*}{2c_1^5} \frac{\partial^3 u_1^{(2)}}{\partial \xi_o^3} \quad (3.5.18)$$

denklemini elde ederiz. Sınır şartı $\underline{u}^-$ vektörünün bir bileşimi içinde verilse, aynı pertürbasyon işlemine bağlı kalınarak (3.5.11-a) ve (3.5.12-a) denklemleri ile karşılaştırılacak ve bunların çözümleri

$$\underline{u}_1^+ = 0 \quad \underline{u}_1^- = u_1^{(k)}(\xi_o, x_1) r_k^- \quad (3.5.19)$$

yapısında olacaktır. Bunun sonucu (3.5.11-a) denkleminde (3.5.18) denklemi

$$\frac{\partial u_1(k)}{\partial x_1} = a_2^- \frac{\partial^3 u_1(k)}{\partial \xi_0^3} \quad (3.5.20)$$

tipinde elde edilecektir. Bu durumda pertürbasyon işlemini ve varsayımları değiştirmemiz gerekecektir. Bunun için, sınır değeri $\underline{U}^-$ nin bileşenlerinden birisi için verilse, yani,

$$u^{(k)}(0, t) = \epsilon F(t) \quad t > 0 \quad k \in [m+1, \dots, n] = [3, 4] \quad (3.5.21)$$

ayrıca K_{α}^{β} ve H_{α}^{β} lerin seri açılımlarında ortaya çıkan sabit katsayı matrislerinin elemanları $\epsilon^{2/p} = \epsilon^{2/3}$ mertebesinde olacaktır. Ayrıca

$$\underline{U}^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{2k} \underline{U}_k^+$$

$$\underline{U}^- = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{2k-1} \underline{U}_k^-$$

formunda kuvvet serisine açılacaklardır. Bunlar kullanılarak

$$\underline{A}_1^- = \underline{U}_1^+ (\nabla_{\underline{U}^+} \underline{A}^{\tau})_0 \quad \underline{B}_1^{\tau} = \underline{U}_1^- (\nabla_{\underline{U}^-} \underline{B}^{\tau})_0$$

olmak üzere

$$\underline{A}^{\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^{2k} \underline{A}_k^{\tau} \quad \underline{B}^{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{2k-1} \underline{B}_k^{\tau} \quad (3.5.22)$$

şeklinde yazılacaklardır. Bu sonuçlar, B 1 - B.4 varsayımlarıyla birlikte ilk denkleminizde yerine konursa

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \underline{U}^+ \\ \underline{U}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{A}^+ & \underline{B}^- \\ \underline{B}^+ & \underline{A}^- \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \underline{U}^+ \\ \underline{U}^- \end{bmatrix} + \epsilon^2 \begin{bmatrix} 3 \\ \Pi \\ \alpha=1 \end{bmatrix} \underline{K}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \underline{U}^+ \\ \underline{U}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.23)$$

veya $\underline{U}^+$ ve $\underline{U}^-$ ya bağlı olarak,

$$\frac{\partial \underline{U}^+}{\partial t} + \underline{A}^+ \frac{\partial \underline{U}^+}{\partial x} + \underline{B}^- \frac{\partial \underline{U}^-}{\partial x} + \epsilon^2 \underline{K}^+ \frac{\partial^3 \underline{U}^+}{\partial x^3} = 0 \quad (3.5.24-a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{U}^- + \underline{B}^+ \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}^- + \underline{B}^- \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}^- + \epsilon^2 \underline{K}^- \frac{\partial^3}{\partial x^3} \underline{U}^- = 0 \quad (3.5.24-b)$$

denklem çifti elde edilecektir. Bu iki denklemi ϵ nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$\epsilon \text{ için } \frac{\partial \underline{U}_1^-}{\partial t} + \underline{A}_0^- \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_1^- = 0 \quad (3.5.25-a)$$

$$\epsilon^2 \text{ için } \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}_1^+ + \underline{A}_0^+ \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_1^+ + \underline{B}_1^+ \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_1^- = 0 \quad (3.5.25-b)$$

ϵ^3 için

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{U}_2^- + \underline{B}_1^+ \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_1^+ + \underline{A}_0^- \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_2^- + \underline{K}^- \frac{\partial^3}{\partial x^3} \underline{U}_1^- + \underline{A}_1^- \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_1^- = 0 \quad (3.5.25-c)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden ilki soldan $\underline{I}_k^-$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k^- \frac{\partial}{\partial x} \right) \underline{I}_k^- \underline{U}_1^- = 0 \quad (3.5.26)$$

denklemi elde edilir. $k=3$ alınırse sınır şartları

$$u^{(3)}(0, t) = \epsilon F(t) \quad t > 0$$

$$u^i(0, t) = 0 \quad i=1, 2, 4$$

bulunur. Daha önce yaptığımız gibi

$w_{1k}^- = \underline{I}_k^- \underline{U}_1^-$ tanımını yapalım. Bu durumda (3.5.26) denkleminden formel çözüm

$$w_{13}^- = w_{13}^- \left(t - \frac{x}{c_2} \right); (c_2; A_0^- \text{ nin özdeğeridir}) \quad (3.5.27)$$

elde edilir.

$$\underline{L}^- = \begin{bmatrix} \underline{I}_3^- \\ \underline{I}_4^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 & 1 \\ c_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.28)$$

tanımını kullanarak

$\underline{w}_1^- = \underline{L}^- \underline{u}_1^-$ yazılır. ve $\det \underline{L}^- = -(c_2 + c_2) \neq 0$ olduğundan $\underline{L}^{-1}$ mevcut olup, bunun sütun vektörleri $\underline{n}_3^-$ ve $\underline{n}_4^-$ ise

$$\underline{u}_1^- = w_{13}^- \underline{n}_3^- + w_{14}^- \underline{n}_4^- \quad (w_{1j}; w_{1j}^- \text{ in bileşenleridir}) \quad (3.5.29)$$

bulunur. Burada $\underline{n}_k^-$ vektörleri

$$\underline{n}_k^- = \underline{n}_k^- / \underline{l}_k^- \underline{n}_k^- \quad (3.5.30)$$

şeklindedir. O halde

$$\underline{n}_3^- = \frac{1}{2c_2} \begin{bmatrix} 1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \quad \underline{n}_4^- = \frac{1}{2c_2} \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi bulunan bu genel çözümden faydalanarak verilen sınır şartlarını sağlayan çözümü arayalım. Verilen sınır şartına karşı gelen öz değer

$$\lambda_1^- = c_2 \quad \text{dir.} \quad \xi = t - \frac{x}{c_2}; \quad \eta = \frac{x}{c_2} + t \quad (3.5.31)$$

koordinatların seçip (3.5.29) ve sınır şartı kullanılırsa

$$\underline{u}_1^- = w_{13}^- (\xi) \underline{n}_3^- \quad \xi > 0 \quad (3.5.32)$$

olduğu açıktır. Bu sınır şartı ve basit dalga çözümü kullanılarak

$$\underline{u}_1^- = \begin{cases} F(\xi) \underline{r}_3^- & \xi > 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases} \quad (3.5.33)$$

(3.5.32) den

$$w_{13}^- = F(\xi) (\underline{l}_3^- \underline{r}_3^-) \quad (3.5.34)$$

elde edilir. (3.5.33) kullanılırsa (3.5.25-b) denklemi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A_0^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \underline{U}_1^+ = -\underline{B}_1^+ \frac{\partial}{\partial x} \underline{U}_1^- = -\underline{B}_1^+ \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} r_3^- \quad (3.5.35)$$

haline gelir. Fakat

$$\underline{B}_1^+ = \underline{U}_1^- (\nabla_u - B^+)_{\circ} ; \quad \underline{B}_1^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\nabla_u - B^+)_{\circ} = \left(\frac{\partial}{\partial u_3} \underline{B}_1^+ + \frac{\partial}{\partial u_4} \underline{B}_1^+\right)_{\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\underline{B}_1^+ = F(\xi) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde (3.5.35) denklemi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A_0^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \underline{U}_1^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2^*/2c_2 \end{bmatrix} \frac{\partial F^2(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.5.36)$$

biçimindedir. Bu denklemin

$$\underline{U}_1^+ = \frac{1}{2} (A_0^+ - \lambda_3 I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2^* & 0 \end{bmatrix} F^2(\xi) r_3 + \underline{G}^*(2, t) \quad (3.5.37)$$

biçiminde formel çözümünü arayalım. Bunu (3.5.36) denkleminde yerine koyarsak G için

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \underline{G}}{\partial x} = 0 \quad (3.5.38)$$

denklemini ortaya çıkar. Bu denklemin çözümü ise

$$w_j^+ = l_j^+ \underline{G}^* \text{ ve } w_j^+ = w_j^+ \left(t - \frac{x}{\lambda_i}\right) \quad j=1,2 \text{ olmak üzere}$$

$$\underline{G}^* = w_1^+ \frac{r_0^+}{l_0^+ r_0^+} + w_2^+ \frac{r_1^+}{l_1^+ r_1^+} \quad (3.5.39)$$

formunda olacağı kolayca görülebilir. O halde,

$$G = \frac{1}{2c_1} \{ w_1^+ (t - \frac{x}{c_1}) \begin{bmatrix} 1 \\ -c_1 \end{bmatrix} + w_2^+ (t + \frac{x}{c_1}) \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \end{bmatrix} \} \quad (3.5.40)$$

dır. Böylece

$$\underline{u}_1^+ = \frac{1}{2} (A_o^+ - c_2 I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \\ -B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ F^2(\xi) \\ -c_2 \end{matrix} + \frac{1}{2c_1} (w_1^+ \underline{r}_o^+ + w_2^+ \underline{r}_2^+) \quad (3.5.41)$$

bulunur. $\xi < 0$ için $\underline{u}_1 = 0$ olduğundan $\underline{u}_1^+ = 0$ ve $F(\xi) = 0$ olmalıdır. Ayrıca $\underline{r}_o^+$ ve $\underline{r}_1^+$ lineer bağımsız olduğundan $w_1^+ = w_2^+ = 0$ olacaktır. Aslında sınır şartıda $\underline{u}$ vektörünün bileşenlerinden biri üzerinde verilmediğinden λ_1, λ_2 özdeğerlerinden hiç biri ile yayılma söz konusu değildir. Dolayısıyla $\xi > 0$ da bütün $w_j^+ = 0$ olur. Bu yüzden $G = 0$ olur ki bu

$$\underline{u}_1^+ = \frac{1}{2} (A_o^+ - c_2 I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \\ -B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ F^2(\xi) \\ -c_2 \end{bmatrix} = \frac{B_2^* F^2(\xi)}{2(c_2^2 - c_1^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \quad (3.5.42)$$

olması demektir. $\underline{u}_1^+$ ve $\underline{u}_1^-$ nun çözümleri (3.5.25-c)'de yerine konur

$$\underline{a}_1^- = \underline{u}_1^+ (V_{u^+} A^-)_o = \frac{B_2^* F^2(\xi)}{2(c_2^2 - c_1^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.43)$$

olduğuna dikkat edilirse

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A_o^- \frac{\partial}{\partial x} \right) \underline{u}_2^- = \frac{F_2^2(\xi)}{2c_2(c_2^2 - c_1^2)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{F^2}{c_2(c_2^2 - c_1^2)} \\ -B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{2c_2^3} \\ B_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -A_2^* \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \quad (3.5.44)$$

elde edilir. Bunun iki yanının 1_k^- ile çarpıp ξ, n koordinatlarında yazarsak

$w_{2k}^- = l_k^- U_2^-$ olmak üzere

$$2 \frac{\partial}{\partial \eta} w_{23}^- = \frac{B_2^{*2}}{2c_2(c_2^2 - c_1^2)} F^2(\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{A_2^*}{c_2^3} \frac{\partial^3 F(\xi)}{\partial \xi^3} \quad (3.5.45)$$

elde edilecektir. Bunuda η ye göre integre edersek,

$$2w_{23}^- = - \left[\frac{B_2^{*2}}{2c_2(c_2^2 - c_1^2)} F^2(\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{A_2^*}{c_2^3} \frac{\partial^3 F(\xi)}{\partial \xi^3} \right] \eta + F^-(\xi) \quad (3.5.46)$$

bulunur. Burada $x=0$ iken $\xi=\eta=zt$ olduğu düşünülürse ayrıca $U_2^-(\xi, \xi)=0$ dır. (3.5.45) dikkate alınır

$$w_{23}^- = w_{23}^-(\xi, \xi) = 0 \quad (3.5.47)$$

bulunur. Böylece (3.5.47) den

$$F^-(\xi) = - \left[\frac{B_2^{*2}}{2c_2(c_2^2 - c_1^2)} F^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{A_2^*}{c_2^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right] \xi$$

bulunur. $f(\xi)$ in değeri (3.5.46)'da yerine koyarsak

$$2w_{23}^- = \left[\frac{-B_2^{*2}}{2c_2(c_2^2 - c_1^2)} F^2(\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{A_2^*}{c_2^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right] (\xi - \eta) \quad (3.5.48)$$

bulunur. Burada $\xi - \eta = -\frac{2x}{c_2}$ olduğuna dikkat edersek

$$U_2^- = \left[\frac{1}{2c_2^2} \frac{B_2^{*2}}{2c_2(c_2^2 - c_1^2)} F^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{A_2^*}{c_2^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right] x \begin{bmatrix} 1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \quad (3.5.49)$$

U^- nun bu yaklaşım mertebesinde formal çözümü

$$U^- = \epsilon F(\xi) + \epsilon^3 \left[\frac{B_2^{*2}}{4c_2^3(c_2^2 - c_1^2)} F^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{A_2^*}{2c_2^5} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right] x \begin{bmatrix} 1 \\ -c_2 \end{bmatrix} + O(\epsilon^5) \quad (3.5.50)$$

olarak bulunur. Buradan $x=0(\epsilon^{-2})$ için ϵU_1^- ve $\epsilon^3 U_2^-$ nin aynı etkiye sahip olacakları görülmektedir. Sonuç olarak x in bu mertebede formel asimtotik çözümün üniform geçerliliğini kaybedeceği söylenebilir. Bu bakımdan buradaki sekülerite

$x_0=x, x_2=\epsilon^2 x, t_0=t$ seçerek esas denklemimizi $U(x,t)=\hat{U}(x_0, x_2, t)$ ile değiştirerek

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \hat{U} + \hat{A} \frac{\partial}{\partial x} \hat{U} + \epsilon^2 \hat{A} \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{U} + \epsilon^2 \left[\sum_{\alpha=1}^3 K_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \hat{U} = 0 \quad (3.5.51)$$

elde ederiz. Bunun $D = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} (\hat{U}_0^+ + \epsilon^2 \hat{U}_1^+) + (A_0^+ + \epsilon^2 A_1^+) D (\hat{U}_0^+ + \epsilon^2 \hat{U}_1^+) + (\epsilon B_1^- + \epsilon^3 B_2^-) D (\hat{U}_1^- + \epsilon^3 \hat{U}_2^-) + \\ + \epsilon^2 K^+ D^3 (\hat{U}_1^+) = 0 \end{aligned} \quad (3.5.52-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} (\epsilon \hat{U}_1^- + \epsilon^3 \hat{U}_2^-) + (\epsilon B_1^+ + \epsilon^2 B_2^+) D (\hat{U}_0^+ + \epsilon^2 \hat{U}_1^+) + (A_0^- + \epsilon^2 A_1^-) D (\epsilon \hat{U}_1^- + \epsilon^3 \hat{U}_2^-) + \\ + \epsilon^2 K^- D^3 (\epsilon \hat{U}_1^- + \epsilon^3 \hat{U}_2^-) = 0 \end{aligned} \quad (3.5.52-b)$$

şeklinde ikiye ayırırız. Bu iki denkleminde ϵ nin kuvvetlerine göre düzenlersek

ϵ için

$$\frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial t_0} + A_0^- \frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial x_0} = 0 \quad (3.5.53-a)$$

ϵ^2 için

$$\frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial t_0} + A_0^+ \frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial x_0} + B_1^- \frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial x_0} = 0 \quad (3.5.53-b)$$

ϵ^3 için

$$\frac{\partial \hat{U}_2^-}{\partial t_0} A_0^- \frac{\partial \hat{U}_2^-}{\partial x_0} A_0^- \frac{\hat{U}_1^-}{x_2} A_1^- \frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial x_0} B_1 \frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial x_0} K^- \frac{\partial^3}{\partial x_0^3} \hat{U}_1^- = 0 \quad (3.5.53-c)$$

ϵ^4 için

$$\frac{\partial \hat{U}_2^+}{\partial t_0} + A_0^+ \frac{\partial \hat{U}_2^+}{\partial x_0} + A_0^+ \frac{\partial \hat{U}_1^+}{\partial x_2} + B_1^- \frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial x_2} + B_1^- \frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial x_0} + B_2^- \frac{\partial \hat{U}_1^-}{\partial x_0} + K^+ \frac{\partial^3 \hat{U}_1^+}{\partial x_0^3} = 0 \quad (3.5.53-d)$$

elde edilir. (3.5.53-a) için

$$\xi_0 = t_0 - \frac{x_0}{\lambda_3} = t_0 - \frac{x_0}{c_x} ; \quad \eta_0 = t_0 + \frac{x_0}{c_2}$$

olmak üzere

$$\hat{U}_1^- = u_1^{(3)}(\xi_0, x_2) r_3^-$$

biçiminde çözüm bulunur. (3.5.53-b) denklemi ξ_0, η_0 koordinatlarında yazarsak ve $\hat{U}_1^+ = \hat{U}_1^+(\xi_0, x_2)$ olduğuna dikkat edersek, ayrıca

$$B_1^- = \hat{U}_1^- (\nabla_u - B^-)_0 = u_1^{(3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_2^* & 0 \end{bmatrix} (u_i^{(j)}, \hat{U}_i \text{ nin } j \text{ ci bileşimidir})$$

düşünürsek

$$(c_2 I - A_0^+) \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \xi_0} = u_1^{(3)} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2^* \end{bmatrix} \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial \xi_0} \quad (3.5.54)$$

elde edilir.

$$\det (c_2 I - A_0^+) \neq 0$$

$$(c_2 I - A_0^+)^{-1} = \frac{1}{c_2^2 - c_1^2} \begin{bmatrix} c_2 & 1 \\ c_1^2 & c_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan (3.5.54) integre edilirse

$$\hat{u}_1^+ = \frac{B_2}{2(c_2^2 - c_1^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \end{bmatrix} (u_1^{(3)})^2 \quad (3.5.55)$$

Bu değerler (3.5.53-c) de yerine koyar; $u_2^- = u_2^-(\xi_0, x_2)$ olduğuna dikkat ederek

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + A_0^- \frac{\partial}{\partial x_0} \right) u_2^- &= \begin{bmatrix} -c_2 \\ 2 \\ c_2 \end{bmatrix} \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x_2} + \frac{3B_2^{*2}}{2(c_1^2 - c_2^2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_1^{(3)})^2 \\ \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x_0} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^* \end{bmatrix} \frac{\partial^3 u_1^{(3)}}{\partial x_0^3} &= M(\xi_0, x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin formel çözümü

$$u_2^- = \{ [1_3^- M(\xi_0, x_2) \eta_0] + h(\xi_0, x_2) \} r_3^- / 21_3^- r_3^- \quad (3.5.56)$$

görüldüğü gibi burada yine sekülerite vardır. Bu

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)} 1_3^- M(\xi_0, x_2) = 0 \quad (3.5.57)$$

sekülerite şartı ile yok edebiliriz. Böylece bu şartın ışığı altında $u_1^{(3)}$ ün

$$2c_2^2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x_2} + \frac{3B_2^{*2}}{2(c_1^2 - c_2^2)} (u_1^{(3)})^2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x_0} + A_2^* \frac{\partial^3 u_1^{(3)}}{\partial x_0^3} = 0 \quad (3.5.58)$$

lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem elde edilir. Bu MkDV denklemdir. Böyle devam ederek istenilen mertebeye kadar asimptotik çözümler bulunabilir.



EK: NOTASYONLAR VE MATEMATİKSEL SÖZLÜK

A: $m \times n$ Matris

u: $n \times 1$ sütun matris

$$\psi_{ixx} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} ; \psi_{ix} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x}$$

Sonlu boyutlu lineer uzay: reel sayılar comlesi olsun

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i \in E\}$$

ile n boyutlu Euclid uzayı tarif edilir. Bu uzayın lineer olması demek

i) $u, v \in E^n$ ve $\alpha, \beta \in E$ olmak üzere $u+v = v+u$

ii) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

iii) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

olması demektir.

E^n uzayından Inner (iç) çarpım: $u, v \in E^n$ olmak üzere u ile v 'nin Scaler çarpımı

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

şeklinde tarif edilir. Şayet $\phi_1, \phi_2 \in L$ (karesi integre edilebilen fonksiyonlar uzayı) ise bunların scaler çarpımı

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx$$

şeklinde tarif edilir. Şayet $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$ ise ϕ_1 ile ϕ_2 ortogonal'dır denir. Pozitif tariflenmiş matris: $A = (n \times n)$, $x = (n \times 1)$, $y = (n \times 1)$ şeklinde tarif edilen matrisler olmak üzere

$$\langle \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{Ax} \rangle = \langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{Ay} \rangle$$

ise A matrisi simetriktir denir. Burada $\langle \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{Ax} \rangle = \underset{\sim}{y} \bar{A} \underset{\sim}{x}$ şeklinde tarif edilmiştir ($\underset{\sim}{y}^T \equiv \underset{\sim}{y}$ 'nin transpozu)

Eğer

$$x=0 \text{ iken } \langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{Ax} \rangle = 0$$

$$x \neq 0 \text{ iken } \langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{Ax} \rangle \neq 0$$

ise A matrisi pozitif tariflenmiş matristir denir.

Lineer operatör: L operatör u,v fonksiyonlar, α, β da scaler sayılar olmak üzere

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

ise L operatörü lineerdir diyoruz.

Simetrik operatör: u,v fonksiyonlar L de operatör olmak üzere

$$\langle u, Lv \rangle = \langle u, L^* v \rangle + \int_{\partial S} [F(V)G(u) - F(u)G(v)] \, ds$$

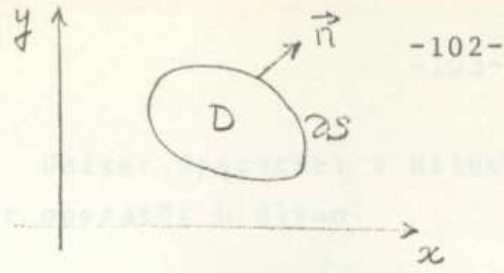
ise buradaki L^*, L 'nin adjointidir

Eğer $L=L^*$ ise L operatörü self adjoint (kendine eş) dir. pozitif tariflenmiş operatör: L operatörü kendine eş olsun eğer

$$i) u=0 \text{ ise } \langle u, Lu \rangle = 0$$

$$ii) u \neq 0 \text{ ise } \langle u, Lu \rangle \neq 0$$

şartlarını sağlıyorsa L operatörüne pozitif tariflenmiş operatör diyeceğiz.



D içinde $-\nabla^2 u = f$

∂S üzerinde $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$

($\alpha = sb$ $f = \text{belli}$) şeklinde tanımlanan "Poissons" denklemini düşünelim.

Burada $L = -\nabla^2$

olup bu operatörün pozitif tariflenmiş olduğu gösterilebilir.

Invariant alt uzay: F cismi üzerinde tariflenmiş V vektör uzayında Q lineer bir transformasyon olsun. V, V'nin alt uzayı ise ve

$$Q: V_1 + Q(V_1) \subseteq V_1$$

ise V_1 , Q transformasyonu altında invarianttır denir. V'nin her lineer transformasyon altında değişmez kalacağı aşıkardır.

Dejenerasyon: $A = n \times n$) şeklinde tarif edilmiş karmatris λ_i , m_i katlı özdeğer ise

$N = n - \text{Rank}(A - \lambda_i I) = m_i$ oluyor ise λ_i ye karşılık m_i tane lineer bağımsız özvektör bulunabilir. Gayet tabidir ki $m=1$ ise $N=1$ olacak ve Dejenerasyon sözkonusu olmayacaktır. Şayet $N \neq m_i$ ise λ_i özdeğeri için Dejenerasyon vardır diyeceğiz.

Hilbet Uzayı: Tam uzayda Inner çarpım (iç çarpım) tarif edilmişse tam uzayımıza HILBERT uzayı diyeceğiz.

Uniter Operatör: V Hilbert uzayındaki sınırlı, lineer operatör U olsun.

- (i) Range $U=V$
- (ii) $\forall v, w \in V$ için $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$

ise U operatörüne uniter diyeceğiz.

Uniter eşdeğer operatörler: L, L^* kendine eş operatörler verildiğinde

$$U^{-1}LU = L^*$$

olacak şekilde U uniter operatörünü bulmak mümkünse L ile L^* uniter eşdeğerdir diyoruz.

Anti simetrik operatör, L operatörünün adjointi L olsun şayet $L^* = -L$ ise L anti simetriktir denir.

Tanım bölgeleri, V Hilbert uzayının yoğun alt kümesi olan operatörlere V içinde "yoğun olarak tanımlanmışlardır" denir.



S O N U Ç L A R

Bu tez çalışmasında Korteweg-de Vries kısmi türevli lineer olmayan diferensiyel denklemi türündeki denklemlerin inverse scattering (Ters saçınım) transformu ile çözülebilirliği araştırılmıştır.

Bilindiği gibi lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözüm metodları, lineer denklemler kadar gelişmiş değildir. Bu bakımdan çalışmanın ayrı bir yeri olduğu kanısındayım.

Ayrıca direct çözüm yanında asimptotik bir yaklaşımla (KdV) türündeki denklemlerin, analitik çözümü bilinen denklemlere indirgenebilmesi incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] M.J. Ablowitz, Lectures on the Inverse Scattering Transform, Studies in Applied Math. 38, p. 17-94 (1973).
- [2] M.J. Ablowitz, R.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, Methods for Solving the Sinh-Gordon Equation, Phys. Rev. Lett. 30, p. 1202-1204 (1973).

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Atilla AŞKAR'a, Sayın Prof. Dr. Yavuz NUTKU'ya ve tez yöneticim Sayın

- [3] M.J. Ablowitz, R.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, The Inverse Scattering Transform, Studies in Applied Math. 38, p. 149-174 (1973).

Teşekkürlerimi bu vesileyle sunmak isterim.

- [4] M.J. Ablowitz, H. Segur, Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation, Studies Appl. Math. 1977, p. 120-144 (1977).

- [5] T. D. Benjamin, J. E. Egger, J. E. Mead, Model equations for long waves in nonlinear dispersive media, Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 272, p. 17-39 (1973).

- [6] P. van der Pijl, Some results of the theory of the Korteweg-de Vries equation, Studies Appl. Math. 1977, p. 145-164 (1977).



KAYNAKLAR

- [1] M.J. Ablowitz, Lectures on the inverse scattering transform. Studies in Applied Math. 58.p. 17-94 (1978).
- [2] M.J. Ablowitz, D.J.Kaup, A.C. Newell, H.Segur, Method for solving the Sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett 30, p.1262-1264 (1973).
- [3] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C.Newell, H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, Phys, Rev. Letters 31 p.125-127 (1973).
- [4] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H.Segur, The inverse scattering transform-Fourier Analysis for Non-linear problems. Studies in Applied Math. 53. P.249-314 (1974).
- [5] M.J. Ablowitz, H. Segur, Asymptatic solutions of the Korteweg de Vries equation. Studies Appl. Math, LVII, p.13-44 (1977).
- [6] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Phil. Trans. Roy. Soc. London A.272, p.47-78 (1972).
- [7] F.van der Blij, Some details of the history of the Kortewegde Vries equation. Nieuw Archief voor Wiskunda XXVI, No.1 p.54-64 (1978).



- |8| F. Calogero, A. Degasperis, Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform associated to the matrix Schrödinger equation. Solitons, Lect. Notes in Physica, Springer (1978).
- |9| B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov, Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, Finite-zone linear operators, and Abelian Varieties, Russian Math. Surveys 31, p.59-146 (1976).
- |10| C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Method for solving the Korteweg-De Vries equation. Phys. Rev. Lett, 19 p. 1095-1097 (1967).
- |11| C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura Korteweg-de Vries Equation and generalizations VI. Comm. Pure Appl. Math. 27, p.97-133 (1974).
- |12| I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, On the determination of a differential equation from its spectral function, Izvest. Akad. Nauk, 15, p.309-360 (1951), AMST 1, p.253-309 (1955).
- |13| D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long Waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Philosoph. Magazine Vol. XXXIX, p.422-443 (1895).
- |14| M. Kruskal, Nonlinear Wave equations. In: Dynamical Systems and Applications, I. Moser Ed. Springer Lecture Notes in Physics 38, p.310-354 (1975).
- |15| P.D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure App. Math. 21, p.467-490 (1968).



- | 16 | R.M. Miura, The Korteweg-de Vries equation and generalizations I.J. Math. Phys. 9, p.1202-1204 (1968).
- | 17 | M. Wadati and M.Toda, The exact N-soliton solution of the korteweg-de Vries equation. J.Phys. Soc. Jap. 32, pp. 1403-1411 (1972).
- | 18 | G.B. Whitham, linear and nonlinear waves. John Wiley (1974).
- | 19 | V.E. Zakharov and A.B. Shabat, Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non-linear media. Soviet Phys. JETP, pp. 62-69 (1972).
- | 20 | A. Jeffrey and T.Kakutani, Siam Review 14,582 (1972).
- | 21 | A. Aşkar Proc. Roy. Soc. London A334, 83 (1973).
- | 22 | M. Teymur and E.S. Suhubi J. Inst. Maths. Applies 21,25 (1978).
- | 23 | M. Duffi H. Rabitz, A. Aşkar, A.S. Çakmak and M. Ablowitz J. Chem. Phys. 72 1543 (1980).
- | 24 | Allan P. Fordy and John Gibbons J. Math. Phys. 22(6) June 1981.
- | 25 | V.E. Zakharov and A.B.Shabat, Fune. Anal. Appl. 8,226 (1974).
- | 26 | M. Wadati J. Phys. Soc. Jpn. 38, 673, 681 (1975).
- | 27 | Huang Qun-Cheng J.Phys. A: Math. 15(1982) 3367-3372.
- | 28 | Whitham G.B. Non-linear dispersivewaves (Proc. Roy. Soc. A. Vol. 283,1965 p.238-261).

- | 29 | Tosiya Taniuti and Chan-Chin Wei Journal of the Phys. Society of Japan, Vol. 24 No.4 April 1968.
- | 30 | N.J. Zabusky and M.D. Kruskal: Phys. Rev. Letters 15 (1965) 240.
- | 31 | Ryogo Hirota J. Math. Phys. Vol. No.7 July 1973.
- | 32 | G.L. Lamb Jr. Rev. Mod. Phys. 43. 99 (1971).
- | 33 | P. Deift C. Tomei, and E. Trubowitz. Communications on Pure and applied Math. Vol. XXXV, 567-628 (1982).
- | 34 | Ryoga Hirota. J. Math. Phys. Vol. 14 No.7 July 1973.
- | 35 | Miki Wadati and Morikazu Toda J.Phys. Soc. Jap. 32 1403 (1972).
- | 36 | F. Calogero, A. Degasperis J. Math. Phys. Vol. 22 No.1 January 1981.
- | 37 | Allan P. Fordy and John Gibbons J. Moth. Phys. 91(10) October 1980.
- | 38 | Hedley C. Morris Journal of Moth. Phys. Vol.17 No.10 Octobek 1976.
- | 39 | E.W. Laedke and K.H. Spatschek J. Math. Phys. 20(9) Sebtember 1979.
- | 40 | P. Gatigonal Quarterly of Appl. Math. October, 1977 pp. 357-374.
- | 41 | T. Taniuti and N. Yajima Porturbation method for a nonlinear wave modulation J. Math. Phys. 10. 1369-1372 (1969).



- | 42 | R.M. Miura Korteweg-de Vries equation and generalizations J. Math. Phys. 9.1202-1204 (1968).
- | 43 | Metin Gürses and Yavuz Nutku J. Math. Phys. 22(7) July 1981.
- | 44 | Kakutani, T., Ono, H., Taniuti, T., Wei, C.C.: Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation II: Application to hydromagnetic waves in cold plasma J. Phy. Soc. Japan 24, 1159-1166, 1968.
- | 45 | J. Burgers: A Mathematical model illustrating the theory of turbulence Advances in Applied mechanics vol, Academic press 1948.
- | 46 | T.Taniuti- Wei, C.C.: Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation I. J. Phys. Soc. Japan 24, 941-946 (1968).
- | 47 | Teymur, Mevlüt Dissipatif veya dispersif Nonlinear ortamlarda dalga yayılması Doktora tezi 1975.
- | 48 | A. Jeffrey, T. Kakutani: Weak Nonlinear Dispersive waves. A discussion Centered around the Korteweg-de Vries equation Siam Review Vol. 14. p.p. 582-643 1972.
- | 49 | A. Demirel: Lineer olmayan denklem sistemlerinin KdV denklemine indirgenmesi. Yeterlik çalışması 1981.
- | 50 | C.H. Su and C.S. Gardner, KdV equation and generalization III: Derivation of the KdV equation and Burgers equation J. Math Phys. 10 (1969) p.p. 536-539.
- | 51 | J. Scott-Russel, Report on waves. Proc. Royal Soc. Edinburgh 1844.
- | 52 | H. Lamb Hydrodynamics Sixth Edition by Dover Publ. 1932.

- [53] R.M. Miura Korteweg-de Vries equation A survey of results Siam Review 18 N.3. p.412-459 (1976).
- [54] E. Schrodinger Proc. R.I.A. 46A (1940) 9.
- [55] E. Schrodinger Proc. R.I.A. 47A (1941) 53.

| 54 | E. Schrodinger Proc. R.I.A. 46A (1940) 9.

[55] E. Schrodinger Proc. R.I.A. 47A (1941) 53.

Özgeçmişı

Alemdar Demirel, 1945 yılında Artvin ilinin Ardanuç kazasında doğmuş. Orta öğretimini Giresun lisesinde tamamlamış 1966 yılında İst. Üniversitesi Matematik-Fizik bölümünü bitirmiştir.

Aynı yıl Giresun lisesine Matematik öğretmeni olarak atanmış, 1969 yılına kadar bu görevde kalmıştır.

1969 yılından 1977 yılına kadar Işık Müh. ve Galatasaray Mühendislik Yüksek okulunda part-time görev yaptıktan sonra 1977 yılında Kocaeli Mühendislik ve Mimarlık Akademisinde Asistan olarak göreve başlamış, 1981 yılında Boğaziçi Üniversitesinde Lisans Üstünü tamamlamış aynı yıl öğretim görevlisi olmuştur.

Halen Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesinde öğretim görevlisi olarak çalışmasına devam etmektedir.



