

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BELİRSİZ BİR KONTROL FONKSİYONLU PARABOLİK
TERS PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Abdullah Said ERDOĞAN

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 17.06.2010

Tez Danışmanları : Prof. Dr. Ayşe KARA (Yıldız T.Ü.)
Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV (Fatih Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (Yıldız T.Ü.)
: Prof. Dr. Ömer GÖK (Yıldız T.Ü.)
: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR (Fatih Ü.)
: Doç. Dr. Yaşar SÖZEN (Fatih Ü.)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BANACH UZAYINA GENEL BAKIŞ	15
2.1. Banach Uzayları ve Operatörler	15
2.1.1 Banach uzayı	15
2.1.2 Bazı Banach uzaylarında norm.....	16
2.1.3 Lineer operatörler	16
2.2 Kuvvetli Pozitif Operatörler ve Kesirli Operatörler	17
3. PARABOLİK DENKLEM İÇİN LOKAL OLMAYAN KOŞULLU SAĞ TARAF ÖZDEŞLEME PROBLEMİ VE ÇOK BOYUTLU PARABOLİK DENKLEMLER	27
3.1. Diferensiyel Durum	27
3.2. Fark Şeması Durumu	38
4. İKİNCİ DERECEDEDEN KARARLILIKLI FARK ŞEMASI.....	54
5. SAYISAL SONUÇLAR	67
5.1. Lokal Olmayan Koşullu Parabolik Denklem	67
5.1.1 Fark şemaları	67
5.1.1.1 Birinci dereceden kararlılık fark şeması.....	67
5.1.1.2 Crank-Nicholson fark şeması	70
5.1.2 Hata analizi.....	75
6. BİR BOYUTLU DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK TERS PROBLEM .	77
6.1. Kontrol Parametresinin Yaklaşık Değerinin Hesaplanması.....	77
6.2 Fark Şemaları ve Sayısal Analiz.....	80
7. UYGULAMA.....	87

7.1.	Sonuçlar ve Değerlendirme.....	88
KAYNAKLAR.....		93
EKLER.....		95
Ek 1	Rothe fark şeması (5.2)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı.....	96
Ek 2	CNFŞ (5.7)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı.....	98
Ek 3	Rothe fark şeması (6.7)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı.....	100
Ek 4	C.N.F.Ş. (6.8)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı.....	101
ÖZGEÇMİŞ.....		102

SİMGE LİSTESİ

- $C(E)$ $C(E) = C([0,1], E)$, değerleri E Banach uzayından olan ve $[0,1]$ aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı.
- $C_\tau(E)$ $C(\tau, E) = C(E(\tau))$ ağ fonksiyonları uzayında $\varphi^\tau \in E(\tau)$ için $\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_E$ normu ile verilen Banach uzayı.
- E_α $0 < \alpha < 1$ ve A kuvvetli pozitif bir operatör olmak üzere
 $\|v\|_{E_\alpha} = \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^{1-\alpha} A \exp(-\lambda A) v\|_E + \|v\|_E$
normu sonlu olan bütün $v \in E$ elemanlarının oluşturduğu kesirli uzay.
- E_α' $0 < \alpha < 1$ ve A kuvvetli pozitif bir operatör olmak üzere
 $\|v\|_{E_\alpha'} = \sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha \|A(\lambda + A)^{-1} v\|_E + \|v\|_E$
normu sonlu olan bütün $v \in E$ elemanlarının oluşturduğu kesirli uzay.
- $\mathbf{F}\{u\}$ u fonksiyonunun Fourier dönüşümü.
- $\phi(A)$ Kuvvetli pozitif A operatörünün spektral açısı.
- Gamma $\text{Gamma}(\alpha) = \int_0^\infty t^{(1-\alpha)} e^{-t^2} dt$.
- Γ $S_1(\phi) = \{\rho e^{i\phi} : 0 \leq \rho \leq \infty\}$, $S_2(\phi) = \{\rho e^{-i\phi} : 0 \leq \rho \leq \infty\}$ ışınları ve r yarıçaplı çember yayı ile oluşturulan çevrel çizgi.
- $L(u)$ u fonksiyonunun Laplace dönüşümü.
- Ω $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\}$ ile verilen açık birim küp. S , bu küpün sınırları ve $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$.
- Ω^+ $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n\}$ ile verilen açık küme. S^+ , bu kümenin sınırları ve $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$.
- $\sigma(A)$ A operatörünün spektrumu.

KISALTIMA LİSTESİ

BDKFŞ	Birinci dereceden kararlılıklı fark şeması
İDKFŞ	İkinci dereceden kararlılıklı fark şeması
CNFŞ	Crank-Nicholson fark şeması

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Spektrum açısı ve Γ çevrel çizgisi	22
---	----

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 5.1 $p(t)$ için hata analizi	75
Çizelge 5.2 Ağ noktalarındaki yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata analizi	76
Çizelge 6.1 $p(t)$ için hata analizi	84
Çizelge 6.2 Ağ noktalarındaki yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata analizi	84
Çizelge 6.3 $\gamma(t_k)$ ve $u_{\left[\frac{t_k}{h}\right]}^k$ arasındaki hata analizi	85
Çizelge 6.4 $p(t)$ için hata analizi	85
Çizelge 6.5 Ağ noktalarındaki yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata analizi	86
Çizelge 6.6 $\gamma(t_k)$ ve $u_{\left[\frac{t_k}{h}\right]}^k$ arasındaki hata analizi	86
Çizelge 7.1 Kontrol parametresi için hata analizi.....	89
Çizelge 7.2 Sıcaklık alanı için hata analizi	89

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması sırasında yaptığı değerli katkılar için, benden hiç bir yardımı esirgemeyen, değerli tavsiyeleriyle akademik hayatımda sürekli yol gösterici olan danışman hocam Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev'e sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında desteklerini esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Ayşe Kara'ya, maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Düzgün fonksiyonlar uzayında, lokal olmayan sınır koşullu bir boyutlu parabolik denklemin ve $2m$. mertebeden çok boyutlu parabolik denklemin sağ tarafının rekonstrüksiyonu ters probleminin iyi konumlanmışlığı ispatlanmıştır. Bu problemlerin sayısal çözümleri için, birinci ve ikinci mertebeden kararlılık fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemalarının çözümleri için koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Fark şemalarının çözümleri için verilen teorik ifadeler, tek boyutlu parabolik denklem için ele alınan sayısal uygulamanın sonuçları ile desteklenmiştir.

Anahtar kelimeler: Lokal olmayan parabolik problem, ters problem, özdeşleme problemi, yarı grup, kuvvetli pozitif operatörler, fark şemaları, koersif kararlılık, birinci basamaktan doğruluk, ikinci basamaktan doğruluk, iyi konumlanmışlık.

ABSTRACT

The well-posedness of inverse problem of reconstruction of right side of the one-dimensional parabolic equation with nonlocal boundary conditions and multidimensional $2m$ -th order parabolic equations is established in the space of smooth functions. For the numerical solution of these problems, the first and second order of accuracy difference schemes are presented. The coercive stability estimates for the solution of these difference schemes are obtained. The theoretical statements for the solution of these difference schemes for one-dimensional parabolic equation are supported by the results of numerical experiments.

Keywords: Nonlocal parabolic problem, inverse problem, identification problem, semigroup, strongly positive operators, difference schemes, coercive stability, first order accuracy, second order accuracy, well-posedness.

1. GİRİŞ

Genellikle bilimin birçok dalında ve matematikte, ele alınan modelin bazı parametrelerinin değerlerinin gözlemlenen bilgiye göre elde edilmesini ele alan problemlere ters problem denir. Datayı modele ait parametreye dönüştürme fiziksel sistemle ilişkinin bir sonucu olarak gelişir. Ters problemler örneğin geofizik, tıpta görüntü işleme, uzaktan algılama, okyanus akustiği tomografisi, astronomi ve tahribatsız muayene gibi bilimin alt alanlarında ortaya çıkmaktadır. Dehghan tarafından sıcaklığın aşırı tanımlamasında (overspecification) (Dehghan, 2001), Kimura ve Suzuki tarafından kimyada bir sıvı içinde solüsyon şeklindeki farklı maddeleri ayırma işleminde (kromatografide) (Kimura ve Suzuki, 1993), Gryazin, Klibanov ve Lucas tarafından fizikte optiksel tomografi alanında örnekler sunulmuştur (Gryazin, Klibanov ve Lucas, 1999).

Ters problemlerde optimal overdeterminasyon (aşırı belirleme) bazı klasik sınır koşullarında ve/veya bir noktadaki benzer koşullarda analize edilmektedir. Literatür taraması (Cannon, Yin, 1990)'da verilmiştir. Bazı ters sınır değerleri problemlerine (Belov, 2002)'de ve lokal olmayan koşullar, integral koşulları ve son nokta aşırı belirleme koşulları gibi genelleştirilmiş aşırı belirleme koşullarına (Prilepko ve Kostin, 1992), (Dehghan, 1999), (Dehghan, 2003a) ve (Dehghan, 2006)'da rastlanmaktadır. Etkili ve kararlı yöntemlere sahip sayısal çözüm metotları geliştirmek için Cannon, Lin ve Xu (Cannon, Lin ve Xu,), Chao-rong Ye ve Zhi-zhong Sun (Chao-rong Ye ve Zhi-zhong Sun, 2007) ve Dehghan (Dehghan, 2003b) gibi bir çok araştırmacı tarafından önemli gayretler gösterilmiştir. Bir çok nümerik metotta, doğrusal olmama hali (nonlinearity) doğrusallaştırma ile yok edilebilse de kötü konumlanmışlığa (ill-posedness) bağlı olarak ters problemin çözümü gene de kolay olmamaktadır.

Model parametreleri veya malzeme özellikleri bilinen bir fiziksel durumun modellenmesi genel olarak iyi konumlanmış (well-posed) bir problem olmasına karşın ters problemler tipik olarak kötü konumlanmıştır. Jacques Hadamard tarafından ortaya atılan iyi konumlanmış bir problemin sağlaması gereken üç şarttan (varlık, teklik, çözümün veya çözümlerin kararlılığı) çoğunlukla kararlılık koşulu çığnemektedir. Genellikle ters problemler sonsuz boyutlu uzaylarda formüle edilirken, ölçülerin sonlu bir sayı ile limitlenmesi ve pratik düşüncede sonlu sayıda bilinmeyen parametrenin belirlenebilmesi, problemlerin ayrık formda tekrar düzenlenmesine yol açmaktadır. Bu durumda ise ters problemler tipik olarak kötü koşullu (ill-conditioned) olur. Bu gibi durumlarda, regülarizasyon çözüm üzerinde yumuşak (mild) kabuller sunar ve aşırı kabullerden

(overfitting) korur. Regülerize ters problemlerin bir çok örneği Bayesian çıkarsamasının özel bir hali olarak yorumlanabilir.

Cannon, Lin, ve Wang (Cannon, Lin ve Wang, 1991) bazı kesin kabuller altında (u, p) global çözüm çiftinin varlığı ve tekliği için bazı yaklaşımlar vermişlerdir. Isı denklemindeki sabit terimin rekonstrüksiyonu (yeniden oluşturulması) konusunda başlangıç koşulu üzerindeki bazı kısıtlarla çözümün varlığı ve tekliği Ivanchov'un makalesinde (Ivanchov, 1995) elde edilmiştir. Difüzyon parametreleri için lineer ters problemlerin jenerik (soysal) iyi konumlanmışlığı (Choulli ve Yamamoto, 1999)'da çalışılmış ve belirsiz kontrol fonksiyonu uzay değişkeni olan ters problemin Hölder uzayında iyi konumlanmışlığı (Ashyralyev, 2010) ve jenerik lokal iyi konumlanmışlığı (Choulli ve Yamamoto, 1996)'da ispat edilmiştir.

Ters problemler öncelikli olarak katsayıların ve/veya koşulların eksikliğine göre karakterize edilmektedirler. (Samarskii ve Vabishchevich, 2007)'de katsayı ters problemleri katsayısı ve/veya sağ tarafı bilinmeyen denklemler olarak ayırt edilmektedir. Katsayı ters problemlerine tipik bir örnek olarak $(u(t, x), k(x))$ çözüm çiftine sahip olan

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) + p(t) q(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad (1.1)$$

ve

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(t, x^*) &= \rho(t), \quad 0 < x^* < l, \quad 0 < t \leq T \end{aligned}$$

parabolik denklemi verilmektedir. Aynı koşullar altında $(u(t, x), p(t))$ çözüm çiftine sahip olan (1.1) parabolik denklem ise sağ taraf özdeşleme problemi olmaktadır. Ayrıca (Demirdağ, 2010)'da $(u(t, x), q(x))$ global çözüm çiftine sahip

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(t^*, x) &= \rho(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t^* < T \end{aligned}$$

koşullarını taşıyan (1.1) problemi ele alınmaktadır. Bir diğer tip ise örneğin iç bölgede yapılan

ölçümlerle eksik sınır koşulunun belirlenebildiği sınır değer ters problemleridir. Örnek olarak

$$\begin{aligned}u(t, 0) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\u(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\u(t, x^*) &= \rho(t), \quad 0 < x^* < l, \quad 0 < t \leq T\end{aligned}$$

koşullarını taşıyan (1.1) parabolik denklemi verilebilir. Bu durumda ise belirsiz çözüm çiftimiz $\left(u(t, x), k(x) \frac{\partial u(t, l)}{\partial x}\right)$ olmaktadır.

Evrimsel ters problemler başlangıç koşulunun tanımlandığı problemler olup,

$$\begin{aligned}u(t, 0) = u(t, l) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\u(T, x) &= \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\u(t, x^*) &= \rho(t), \quad 0 < x^* < l, \quad 0 \leq t < T\end{aligned}$$

koşullarını taşıyan (1.1) parabolik denklemi örnek olarak verilebilir.

Ters problemlerin önemli bir sınıfı da denklemin belirsiz sağ tarafının tanımlanması problemidir. Bu gibi problemlerde, çözüm için ek bilgi ya hesaplamalar sırasında elde edilir yada problemin tanım bölgesinin belirli bir kısmından belirlenir. (Borukhov ve Vabishchevich, 2000) ve (Samarskii ve Vabishchevich, 2007)'de parabolik denklemin dağıtılmış sağ tarafının rekonstrüksiyonu ters problemini çözmek için sayısal algoritmalar üzerine çalışılmıştır. Bu makalelerde, özdeşleme (ayırt edim) problemlerinin sayısal çözümü ve algoritmaların iyi konumlanmışlığı sunulmaktadır. $p(t)$ bilinmeyen fonksiyonlu, $f(t, x) = p(t)q(x)$ sağ taraf fonksiyonunun rekonstrüksiyonu için, $\eta(t) = \int_0^t p(s) ds$ olmak üzere çözüm $u(t, x) = \eta(t)q(x) + w(t, x)$ formunda gözlenmiştir. O zaman $w(t, x)$ 'in tahmini tam kapalı fark şeması ile verilmektedir. Fark şeması ile oluşturulan sistemin çözümü, k bir iç nokta olmak üzere

$$w_i^{n+1} = y_i + w_k^{n+1} z_i, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

formunda araştırılmış ve algoritmanın iyi konumlanmışlığı için maksimum prensibine dayalı

$$\max_{0 \leq i \leq M} |z_i| \leq \tau \max_{0 < i < M} \left| \frac{1}{\psi_k} (a\psi_{\bar{x}})_{x,i} \right|$$

önsel (apriori) kestirimi verilmektedir. Böylece, (Borukhov ve Vabishchevich, 2000)'de yeterince küçük $\tau = O(1)$ değerinde $|z_i| < 1$ olur. Başka bir deyişle, yeterince küçük zaman adımları kullanmak gerekmektedir.

Bu tezde, biz lokal olmayan koşullu parabolik denklemlerin sağ taraf rekonstrüksiyonu ters problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \sigma u(t,x) + p(t)q(x) + f(t,x), \\ 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(t,0) = u(t,l), u_x(t,0) = u_x(t,l), 0 \leq t \leq T, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(t,x^*) = \rho(t), \quad 0 \leq x^* \leq l, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.2)$$

nin iyi konumlanmışlığını inceleyeceğiz. Bu denklemde $u(t,x)$ ve $p(t)$ bilinmeyen fonksiyonlar, $a(x) \geq \delta > 0$ ve $\sigma > 0$ yeterince büyük sayılardır ve

- a) $q(x)$ yeterince düzgün (smooth) fonksiyon,
- b) $q(x)$ ve $q'(x)$ l uzunluklu periyodik fonksiyon,
- c) $q(x^*) \neq 0$

olarak kabul edilmektedir.

(Choulli ve Yamamoto, 1996)'in aksine bizim problemimizde bilinmeyen kontrol fonksiyonu zaman değişkenine bağlıdır. (Borukhov ve Vabishchevich, 2000) ile karşılaştırıldığında, biz iyi konumlanmışlığı diferensiyel durumda lokal olmayan problemin çözümü için vermekteyiz.

Parabolik denklemler için sağ taraf özdeşleme problemi Fourier serisi metodu, Laplace dönüşümü metodu veya Fourier dönüşümü metoduyla çözülebilir. Şimdi bu üç analitik metodun gösterimi için örnekler alalım.

Örnek 1.1.

İlk olarak

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - u(t,x) + p(t) \sin x + (e^{-t} - t^2 - 1) \sin x, & 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0,x) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, \frac{\pi}{2}) = e^{-t}, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.3)$$

parabolik denklemini ele alalım.

(1.3) probleminin çözümünü bulmak için değişkenlerine ayırma yöntemini kullanabiliriz. Problemi çözmek için $u(t,x)$ fonksiyonunu $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ şeklinde iki kısma ayıralım. Şöyle ki,

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} - v(t,x), & 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ v(0,x) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (1.4)$$

ve

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} - w(t,x) + p(t) \sin x + (e^{-t} - t^2 - 1) \sin x, & 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ w(0,x) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (1.5)$$

olur. Burada önce problem (1.4)'ün çözümünü bulmalıyız. Değişkenlerine ayırma yöntemi gereğince $v(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$ olarak kabul edelim. Kısmi türevleri alıp, (1.4) denklemde yerine yazarsak

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = 0$$

veya

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 1 = \lambda - 1$$

elde ederiz.

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

olduğu için,

$$X_k(x) = \sin \sqrt{-\lambda_k} x, \quad \lambda_k = -k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

yazılabilir. $T(t)$ 'nin çözümü için Cauchy formülünü kullanırsak,

$$T'(t) = -(k^2 + 1)T(t) \Rightarrow T_k(t) = A_k e^{-(k^2+1)t}$$

olacaktır. Üstüne koyma (superposition) prensibini kullanarak,

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k^2+1)t} \sin kx$$

elde ederiz. Başlangıç koşulunu kullanırsak,

$$v(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = \sin x,$$

$$A_k = 0, \quad k \neq 1, \quad A_1 = 1$$

olur ve dolayısıyla

$$v(t, x) = e^{-2t} \sin x$$

sonucuna ulaşırız. İkinci olarak, (1.5)'in çözümü için

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx$$

olarak kabul edelim. Denklemden yerine yerleştirerek ve başlangıç koşulunu kullanarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k'(t) + (k^2 + 1)A_k(t)] \sin kx = (p(t) + e^{-t} - t^2 - 1) \sin x$$

ve

$$A_k(0) = 0, k = 1, 2, \dots$$

elde edilir ve buradan da

$$A_k'(t) + (k^2 + 1)A_k(t) = 0, A_k(0) = 0, k \neq 1$$

ve

$$A_1'(t) + 2A_1(t) = p(t) + e^{-t} - t^2 - 1, A_1(0) = 0$$

denklemleri ortaya çıkar. Cauchy formülünü kullanarak,

$$A_k(t) = 0, k \neq 1, A_1(t) = \int_0^t e^{-2(t-s)} (p(s) + e^{-s} - s^2 - 1) ds$$

ve

$$w(t, x) = \left(\int_0^t e^{-2(t-s)} (p(s) + e^{-s} - s^2 - 1) ds \right) \sin x$$

elde edilir. Dolayısıyla, (1.2) denkleminin çözümü

$$u(t, x) = e^{-2t} \sin x + \left(\int_0^t e^{-2(t-s)} (p(s) + e^{-s} - s^2 - 1) ds \right) \sin x$$

olur. $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki aşırı belirleme koşulunu kullanarak,

$$u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = e^{-2t} + \left(\int_0^t e^{-2(t-s)} (p(s) + e^{-s} - s^2 - 1) ds \right) = e^{-t}$$

veya

$$\int_0^t e^{2s} (p(s) + e^{-s} - s^2 - 1) ds = e^t - 1$$

yazabiliriz. Son denklemde her iki tarafında t 'ye göre türevini alırsak

$$e^{2t}(p(t) + e^{-t} - t^2 - 1) = e^t$$

olur ve dolayısıyla bilinmeyen fonksiyonlar

$$p(t) = t^2 + 1$$

ve

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x$$

elde edilir.

Benzer mantığı kullanarak,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{|r|=2m} \alpha_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(t, x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta u(t, x) = f(t, x) + p(t)q(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < T, |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, \quad 0 < t < T, x \in S, \\ u(t, x^*) = \omega(t), 0 \leq t \leq T, x^* \in \Omega \end{cases}$$

çok boyutlu parabolik denkleminin çözümü elde edilebilir. Burada $\Omega, S, \bar{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırları verilen n -boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^n (0 < x_m < 1, 1 \leq m \leq n)$ 'de birim açık küp, ve $q(x), \alpha_r(x) (x \in \Omega), \varphi(x), \psi(x) (x \in \bar{\Omega}), \omega(t) (t \in [0, T])$ ve $f(t, x) (t \in (0, T), x \in \Omega)$ verilen düzgün fonksiyonlar, $u(t, x)$ ve $p(t)$ belirsiz fonksiyonlar ve $\alpha_r(x) \geq a > 0$ 'dır.

Bununla beraber, değişkenlerine ayırma yöntemi, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Oysaki fark şemaları yöntemi kısmi türevli diferensiyel denklemleri çözmek için, katsayıların t 'de veya uzay değişkenlerinde tanımlandığı durumlarda

da kullanılabilen etkinliği iyi bilinen bir yöntemdir.

Örnek 1.2.

Parabolik denklemler için özdeşleme problemlerine bir başka örnek aşağıda ele alınmaktadır.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - u(t,x) + p(t) \sin x + (e^{-t} - t^2 - 1) \sin x, & 0 < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(t,0) = 0, \quad u_x(t,0) = e^{-t}, & 0 < t < T, \\ u(0,x) = \sin x, & 0 < x < \infty, \\ u(t, \frac{\pi}{2}) = e^{-t}, & 0 < t < T \end{cases}$$

problemini ele alalım. Bu problem (x 'e göre) Laplace dönüşümü yardımı ile çözülebilir.

$\mathbf{L}\{u(t,x)\} = U(t,s)$ olarak gösterelim. Diferensiyel denklemin her iki tarafının da Laplace dönüşümünü alırsak

$$\mathbf{L}\{u_t(t,x)\} = \mathbf{L}\{u_{xx}(t,x)\} - \mathbf{L}\{u(t,x)\} + (p(t) + e^{-t} - t^2 - 1)\mathbf{L}\{\sin x\}$$

veya

$$U_t(t,s) = s^2 U(t,s) - sU(t,0) - U_x(t,0) - U(t,s) + \frac{(p(t) + e^{-t} - t^2 - 1)}{s^2 + 1}$$

yazabiliriz. Verilen koşulları yerine yazdığımızda, problem

$$U_t(t,s) - (s^2 - 1)U(t,s) = -e^{-t} + \frac{(p(t) + e^{-t} - t^2 - 1)}{s^2 + 1}$$

haline dönüşür. Cauchy formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned} U(t,s) &= \frac{e^{(s^2-1)t}}{s^2 + 1} + \int_0^t e^{(s^2-1)(t-\tau)} \left[-e^{-\tau} + \frac{(p(\tau) + e^{-\tau} - \tau^2 - 1)}{s^2 + 1} \right] d\tau \\ &= \frac{e^{-t}}{s^2 + 1} + \frac{e^{(s^2-1)t}}{s^2 + 1} \int_0^t e^{-(s^2-1)\tau} (p(\tau) - \tau^2 - 1) d\tau \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yüzden ters Laplace dönüşümü uygulanınca

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x + \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{(s^2-1)t}}{s^2+1} \int_0^t e^{-(s^2-1)\tau} (p(\tau) - \tau^2 - 1) d\tau \right\}$$

elde edilir. Aşırı belirtme koşulunu kullanınca,

$$u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = e^{-t} + \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{(s^2-1)t}}{s^2+1} \int_0^t e^{-(s^2-1)\tau} (p(\tau) - \tau^2 - 1) d\tau \right\} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e^{-t}$$

olur ve bu da

$$p(t) = t^2 + 1$$

ve

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x$$

sonuçlarını çıkarsamamızı sağlar.

Benzer bir mantıkla,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{|r|=2m} \alpha_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(t, x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta u(t, x) = f(t, x) + p(t)q(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^+, \quad 0 < t < T, \quad |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), x \in \overline{\Omega^+}, \\ \frac{\partial u^\gamma(t, x)}{\partial x_m} = 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 2m-1, x_m = 0, 1 \leq m \leq n, \quad 0 < t < T, \\ u(t, x^*) = \omega(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x^* \in \Omega^+ \end{array} \right.$$

çok boyutlu parabolik denklemin çözümü elde edilebilir. Burada $\Omega^+ = \{x_1, \dots, x_n\} : 0 < x_m < \infty, 1 \leq m \leq n\}$ ve sınırları $S, \overline{\Omega^+} = \Omega^+ \cup S$ 'tir. Ayrıca $q(x), \alpha_r(x) (x \in \Omega^+), \varphi(x), \psi(x) (x \in \overline{\Omega^+}), \omega(t) (t \in [0, T])$ ve $f(t, x) (t \in (0, T), x \in \Omega^+)$ verilen düzgün fonksiyonlar, $u(t, x)$ ve $p(t)$ belirsiz fonksiyonlar ve $\alpha_r(x) \geq a > 0$ 'dir.

Laplace dönüşümü metodu, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda

kullanılabilir. Oysaki fark şemaları yöntemi kısmi türevli diferensiyel denklemleri çözmek için, katsayıların t 'de veya uzay değişkenlerinde tanımlandığı durumlarda da kullanılabilen etkinliği iyi bilinen bir yöntemdir.

Örnek 1.3.

Son olarak, Fourier dönüşümü metodunun uygulanacağı aşağıdaki özdeşleme problemini ele alalım.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - u(t,x) + p(t) \sin x + (e^{-t} - t^2 - 1) \sin x, & -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(0,x) = \sin x, & -\infty < x < \infty, \\ u(t, \frac{\pi}{2}) = e^{-t}, & 0 < t < T. \end{cases}$$

$\mathbf{F}\{u(t,x)\} = U(t,s)$ olarak gösterelim. Her iki tarafın Fourier dönüşümünü alırsak,

$$\mathbf{F}\{u_t(t,x)\} = \mathbf{F}\{u_{xx}(t,x)\} - \mathbf{F}\{u(t,x)\} + (p(t) + e^{-t} - t^2 - 1)\mathbf{F}\{\sin x\}$$

elde ederiz. O zaman, son ifadeyi düzenlersek

$$U_t(t,s) + (s^2 + 1)U(t,s) = (p(t) + e^{-t} - t^2 - 1)\mathbf{F}\{\sin x\}$$

denklemine ulaşırız ve Cauchy formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} U(t,s) &= e^{-(s^2+1)t}\mathbf{F}\{\sin x\} + \int_0^t e^{-(s^2+1)(t-\tau)} [-e^{-\tau} + (p(\tau) + e^{-\tau} - \tau^2 - 1)\mathbf{F}\{\sin x\}] d\tau \\ &= e^{-t}\mathbf{F}\{\sin x\} + \int_0^t e^{-(s^2+1)(t-\tau)} (p(\tau) - \tau^2 - 1)\mathbf{F}\{\sin x\} d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ters Fourier dönüşümü uygulanınca,

$$u(t,x) = e^{-t} \sin x + \mathbf{F}^{-1} \left\{ \int_0^t e^{-(s^2+1)(t-\tau)} (p(\tau) - \tau^2 - 1)\mathbf{F}\{\sin x\} d\tau \right\}$$

sonucuna ulaşılır. Aşırı belirleme koşulunu kullanarak,

$$u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = e^{-t} + \mathbf{F}^{-1} \left\{ \int_0^t e^{-(s^2+1)(t-\tau)} (p(\tau) - \tau^2 - 1) \mathbf{F}\{\sin x\} d\tau \right\} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e^{-t}$$

ulaşırız ve bu da

$$p(t) = t^2 + 1$$

ve

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x$$

sonuçlarını ortaya çıkarır. Benzer bir şekilde,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{|r|=2m} \alpha_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(t, x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta u(t, x) = f(t, x) + p(t)q(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \quad 0 < t < T, \quad |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), x \in R^n, \\ u(t, x^*) = \omega(t), 0 \leq t \leq T, x^* \in \Omega \subset R^n \end{cases}$$

çok boyutlu parabolik denklemin çözümü elde edilebilir. Burada $q(x), \alpha_r(x), \varphi(x) (x \in R^n), \omega(t)$ ($t \in [0, T]$) ve $f(t, x)$ ($t \in (0, T), x \in \Omega$) verilen düzgün fonksiyonlar, $u(t, x)$ ve $p(t)$ belirsiz fonksiyonlar, $\alpha_r(x) \geq a > 0$ ve $\delta > 0$ yeterince büyük bir sayıdır.

Öte yandan, Fourier dönüşümü metodu, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Oysaki fark şemaları yöntemi kısmi türevli diferensiyel denklemleri çözmek için, katsayıların t 'de veya uzay değişkenlerinde tanımlandığı durumlarda da kullanılabilen etkinliği iyi bilinen bir yöntemdir.

Bu çalışmada lokal olmayan sınır değer koşullu bir boyutlu parabolik denklem ve çok boyutlu parabolik denklem için sağ taraf özdeşleme probleminin iyi konumlanmışlığı elde edilmiştir. Bu problemlerin sayısal çözümü için birinci ve ikinci dereceden kararlılıklı fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemalarının uygulanabilirlik koşulları altında iyi konumlanmışlığı incelenmiştir. Kısaca tezin bölümlerindeki içeriği incelersek, tez sekiz bölümden ve eklerden

oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde bu çalışma sırasında ihtiyaç duyacağımız Banach uzayına ait temel bilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise parabolik denklemlerde sağ taraf özdeşleme problemi (1.2) için

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{C([0,T],\dot{C}^{2\alpha}[0,l])} + \|u\|_{C([0,T],\dot{C}^{2\alpha+2}[0,l])} \leq M(x^*,q)\|\rho'\|_{C[0,T]} \\ & + M(a,\delta,\sigma,\alpha,x^*,q,T) \left(\|\varphi\|_{\dot{C}^{2\alpha+2}[0,l]} + \|f\|_{C([0,T],\dot{C}^{2\alpha}[0,l])} + \|\rho\|_{C[0,T]} \right) \end{aligned}$$

koersif kestirimi elde edilmektedir.

Ayrıca (1.2) problemine yaklaşık çözüm elde etmek için Rothe fark şeması kurulmuş ve yaklaşık çözüm için de

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \left\| \left\{ D_h^2 u_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} \leq M(q,s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0,T]_\tau} \\ & + M(\tilde{a},\phi,\alpha,T) \left(\|D_h^2 \varphi^h\|_{\dot{C}_h^{2\alpha}} + \left\| \left\{ f^h(t_k) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C[0,T]_\tau} \right) \end{aligned}$$

koersif kestirimi ispat edilmektedir.

Dördüncü bölümde (1.2) problemine yaklaşık çözüm elde etmek için ikinci dereceden kararlılık fark şeması kurulmuş ve yaklaşık çözüm için

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \left\| \left\{ D_h^2 u_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} \leq M(q,s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0,T]_\tau} \\ & + M(\tilde{b},\phi,\alpha,T) \left(\|D_h^2 \varphi^h\|_{\dot{C}_h^{2\alpha}} + \left\| \left\{ f^h(t_k) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C[0,T]_\tau} \right), \end{aligned}$$

koersif kestirimi ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde lokal olmayan koşullu parabolik denklem için sayısal örnek üzerinde birinci ve

ikinci mertebeden kararlılık fark şemaları kurulmuş ve hata analizi verilmiştir.

Altıncı bölümde doğrusal olmayan parabolik ters problem ele alınmıştır.

Yedinci bölüm sağ taraf özdeşleme probleminin uygulamasını içermektedir.

Sekizinci bölümde ise sonuçlar derlenmiştir.

Ekler kısmında Matlab programları sunulmaktadır.

2. BANACH UZAYINA GENEL BAKIŞ

Bu bölümde lineer sistemler (Votruba ve Boron, 1972), normlu lineer sistem, Banach uzayı, lineer fonksiyoneller (Krein, 1971), bazı Banach uzaylarında norm (Votruba ve Boron, 1972), (Kreyzig, 1989), kuvvetli pozitif operatörler ve kesirli operatörler (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994) ile ilgili tanım ve bilgiler verilmektedir.

2.1. Banach Uzayları ve Operatörler

2.1.1 Banach uzayı

Bir E kümesi, herhangi iki elemanı x ve y için, toplam işlemi olarak ifade edilen $x + y$ elemanını da içeriyorsa, herhangi bir reel (kompleks) λ sayısı için, çarpım işlemi olarak ifade edilen λx elemanı da E kümesinin elemanı ise ve ayrıca toplam ve çarpım işlemleri de

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
2. $x + y = y + x$,
3. $\exists \theta \in E, 0x = \theta, \forall x \in E$,
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$,
7. $1x = x$

koşullarını (aksiyomlar) sağlıyorsa o zaman E kümesi reel (kompleks) lineer sistem olarak adlandırılır.

Bir E lineer sistemi, eğer her bir $x \in E$ elemanına karşılık x elemanının normu olarak adlandırılan atanmış bir reel $\|x\| \geq 0$ sayısına sahipse ve

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \tilde{0}$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$

özellikleri sağlanıyorsa, normlu lineer uzay olarak adlandırılır.

$\|x - y\|$ sayısına x ve y elemanları arasındaki uzaklık denir ve bir metriğin özelliklerine sahiptir. Bununla bağlantılı olarak, $x_n \in E$ dizisinin $n \rightarrow \infty$, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olacak şekilde bir x elemanına yakınsadığı ifade edilebilir ve $x \in E : x_n \rightarrow x$ olarak gösterilir. Ayrıca bu konseptle ilgili olarak, kümelerin limit noktaları, E 'nin açık, kapalı ve kompakt kümelerinin tanımlarını vermek mümkündür.

$x_n \in E$ dizisi için eğer $m, n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise, o zaman temel (veya Cauchy) olarak adlandırılır. Bir yakınsak dizi temeldir. Eğer E uzayındaki her temel dizi yakınsıyorsa, o zaman uzay tamdır (complete). Bir tam normlu uzay ise Banach uzayı olarak adlandırılır.

Her normlu lineer uzay Banach uzayına tamamlanabilir.

2.1.2 Bazı Banach uzaylarında norm

$C[0, T]$ **uzayı**. Bu uzay elemanları sürekli ve $[0, T]$ kapalı aralığında sınırlı olan bir uzaydır.

$C[0, T]$ 'de $x(t)$ 'nin normu

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$$

formülü ile verilmektedir.

$C(E) = C([0, T], E)$ **uzayı**. $[0, T]$ aralığından E 'ye tanımlı bütün $x(t)$ sürekli fonksiyonlarının oluşturduğu Banach uzayı olup, norm

$$\|x\|_{C(E)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|_E$$

formülüyle hesaplanır.

2.1.3 Lineer operatörler

E Banach uzayında tanımlı bir Ax fonksiyoneli eğer homojense ve toplamsal ise ve c sabiti x değişkeninden bağımsız olmak üzere,

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \quad x \in E \quad (2.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa lineer denir. (2.1) eşitsizliğinde en küçük mümkün olabilecek sabite lineer operatörün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir. Aşağıdaki formülde geçerlidir:

$$\|A\| = \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

2.2 Kuvvetli Pozitif Operatörler ve Kesirli Operatörler

E keyfi bir Banach uzayı ve $A \in E$ 'de $D(A)$ tanım kümesinde yoğun bir lineer operatör olsun.

Tanım 2.1. Bir E Banach uzayında etkiyen A operatörünün $\sigma(A)$ spektrumu $\phi, 0 < 2\phi < \pi$, açısının belirlediği bölge içinde kalıyorsa, reel eksene göre simetrik ise ve bu bölgenin uç noktalarında $S_1(\phi) = \{\rho e^{i\phi} : 0 \leq \rho < \infty\}$, $S_2(\phi) = \{\rho e^{-i\phi} : 0 \leq \rho < \infty\}$ ve bölgenin dışında $(\lambda I - A)^{-1}$ rezolvent operatörünün normu,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{1 + |\lambda|} \quad (2.2)$$

eşitsizliğini tarafından sınırlandırılıyorsa, bu A operatörüne *kuvvetli pozitif operatör* denir.

Bu şekildeki ϕ açılarının infimumuna, kuvvetli *pozitif* A operatörünün *spektral açısı* denir ve $\phi(A)$ veya $\phi(A, E)$ ile gösterilir.

Spektrum $\sigma(A)$ kapalı bir küme olduğu için $S_1(\phi(A))$ ve $S_2(\phi(A))$ ışınlarının oluşturduğu bölgenin içinde kalır ve bu sektörün tepe noktasının $\sigma(A)$ spektrumunu kesmeyen komşulukları mutlaka vardır. $S_1(\phi)$, $S_2(\phi)$ ışınları ve merkezi orijinde olan r yarıçaplı çemberin bir yayı ile oluşan $\Gamma = \Gamma(\phi, r)$ çevrel çizgisini göz önüne alırsak; ϕ ve $r \phi(A) < |\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde seçilebilir ve r yarıçaplı çemberin yayı A operatörünün $\sigma(A)$ rezolvent kümesinin içerisinde yer alır.

Γ çevrel çizgisi ile sınırlı kümede $f(z)$ analitik bir fonksiyon olsun ve f 'in

$$|f(z)| \leq M|z|^{-\varepsilon}$$

kestirimini bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için sağladığını kabul edelim. O zaman Cauchy-Riesz integral operatörü

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z - A)^{-1} dz \quad (2.3)$$

operatör normunda yakınsaktır ve A kuvvetli pozitif operatörünün bir fonksiyonu olan sınırlı lineer $f(A)$ operatörünü tanımlar. Eğer $f(z)$ orijinin komşuluğunda sürekli ise, o zaman (2.3)'te $r = 0$ durumunu dikkate alabiliriz. Başka bir deyişle $\Gamma = S_1(\phi) \cup S_2(\phi)$ olur.

A sınırlı bir operatör olması halinde ise $f(A)$ integrali, $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu bölgede Γ çevrel çizgisinin seçiminden bağımsızdır. Ayrıca, eğer $f(z)$ fonksiyonu lineer ise $f(A)$ operatörü de lineerdir ve $f(z)$ fonksiyonu çarpansal ise $f(A)$ operatörü de çarpansaldır.

$f(z) = z^{-\alpha}$ fonksiyonu $\alpha > 0$ olduğu zaman $A^{-\alpha}$ sınırlı operatörünü tanımlar. Burada Γ çevrel çizgisi $r > 0$ koşuluyla seçilir. Kuvvetli pozitif A operatörünün herhangi bir kuvveti için çarpansallık özelliği $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\beta}A^{-\alpha}$ vardır ve sadece negatif değerler için değildir. Bu özellikten ($\alpha + \beta$ tamsayı iken) $A^{-\alpha}x = 0$ denkleminin $x = 0$ tek çözümüne sahip olduğu görülür. Dolayısıyla, kuvvetli pozitif operatörün pozitif kuvvetleri de tanımlanmış olur. Eğer A sınırsız ise, A^{α} ($\alpha > 0$) operatörleri de sınırsızdır, $D(A^{\alpha})$ tanım kümeleri yoğundur ve $\beta < \alpha$ ise $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$ sürekli gömülü olur.

Operatörlerin kesirli kuvvetleri teorisi pozitif operatörlerin geniş bir kısmı için yapılabilir. Bu tip operatörler için (2.2) kestirimi sadece $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığı için değil, daha geniş bir aralık olan $[0, \pi)$ aralığındandır.

Şimdi $f(z) = e^{-tz}$ fonksiyonunu ele alalım. Herhangi $t > 0$ için bu fonksiyon $|z| \rightarrow \infty$ iken $z^{-\alpha}$ fonksiyonundan çok daha hızlı sifıra gider ve değerleri Γ tarafından çevrelenmiş herhangi bir

bölgenin içinde yer alır. Bu nedenle, (2.3) formülü, kuvvetli pozitif bir A operatöründen $\exp\{-tA\}$ fonksiyonu tanımlamak için kullanılabilir. Çarpımsallık özelliğinden, yarı grup özelliği sağlanır:

$$\exp\{-(t_1 + t_2)A\} = \exp\{-t_1A\} \exp\{-t_2A\}, \quad t_1, t_2 > 0.$$

Bazı $\alpha > 0$ ve $t > 0$ için $\Psi(z) = z^\alpha e^{-tz}$ fonksiyonunu ele alalım. $|z| \rightarrow \infty$ iken $\Psi(z)$ sifıra z 'in negatif kuvvetleri daha hızlı şekilde yaklaştığından, $\Psi(z)$

$$\Psi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^\alpha e^{-tz} (z - A)^{-1} dz \quad (2.4)$$

operatör fonksiyonunu tanımlar.

$\exp\{-tA\}$ operatörünün E uzayını $D(A^\alpha)$ ya eşlediğini ve $A^\alpha \exp\{-tA\} = \Psi(A)$ olduğunu gösterelim. x , E uzayının herhangi bir elemanı olsun. Çarpımsallık özelliğinden ve (2.4) denkleminde dolayı

$$A^{-\alpha} \Psi(A) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-tz} (z - A)^{-1} x dz = \exp\{-tA\} x$$

elde edilir ve bu da bizim iddiamızı ispatlar. Buradan da

$$A^\alpha \exp\{-tA\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^\alpha e^{-tz} (z - A)^{-1} dz \quad (2.5)$$

formülüne ulaşırız. Yukarıdaki ispatta, Γ çevrel çizgisinin r yarıçaplı yayı içerdiğini kabul etmemiz gerekmektedir çünkü $z^{-\alpha}$ fonksiyonuna karşılık gelen $A^{-\alpha}$ operatörünü uygulanmıştır.

Bu son formül (2.5) bütün küçük $r > 0$ değerleri için geçerlidir. (2.5) denklemindeki integrand $z = 0$ noktasında sürekli olduğundan, $z \rightarrow 0$ iken, bazı $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ için

$$A^\alpha \exp\{-tA\} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\infty}^0 \rho^\alpha e^{i\alpha\phi} e^{-t\rho e^{i\phi}} (\rho e^{i\phi} - A)^{-1} d\rho + \int_0^{\infty} \rho^\alpha e^{-i\alpha\phi} e^{-t\rho e^{-i\phi}} (\rho e^{-i\phi} - A)^{-1} d\rho \right]$$

formülüne ulaşabiliriz. Buradan ve (2.2) kestiriminden

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} e^{-t\rho \cos \phi} d\rho = \frac{M(\phi) \Gamma(\alpha)}{\pi (\cos \phi)^\alpha} t^{-\alpha} \quad (2.6)$$

formülüne ulaşırız ve özel durum olarak

$$\|\exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{\pi} \quad (2.7)$$

elde edilir. Şimdi (2.6) kestiriminin $t \rightarrow +\infty$ iken üstel olarak azalan bir çarpanla keskinleştirilebileceğimiz gösterelim.

A kuvvetli pozitif bir operatör olsun. Yeterince küçük bir $\delta > 0$ için $A - \delta$ operatörünün de kuvvetli pozitif olduğunu ve $\phi(A - \delta) = \phi(A)$ olduğunu iddia edelim. Gerçekten, $\lambda \in \Gamma(\phi)$ olsun. Rastgele bir $y \in E$ için $\lambda x - (A - \delta)x = y$ denklemini ele alalım. $\lambda x - Ax = z$ yer değiştirmesi denklemi $z + \delta(\lambda - A)^{-1}z = y$ haline getirir. Eğer $\lambda \in \Gamma(\phi)$ ise $\|\delta(\lambda - A)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \delta M(\phi)$ olduğundan, $\delta \leq [2M(\phi)]^{-1}$ için z için yazılan denklemin tek çözümü olduğunu gözlemleriz ve $\|x\| \leq M(\phi)[|\lambda| + 1]^{-1} \|z\| \leq 2M(\phi)[|\lambda| + 1]^{-1} \|y\|$ olur. Bu da $0 < \delta \leq [2M(\phi)]^{-1}$ için $\lambda - (A + \delta)$ operatörünün sınırlı tersinin olduğunu ve

$$\|[\lambda(A - \delta)]^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq 2M(\phi)[|\lambda| + 1]^{-1}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $A - \delta$ operatörünün de kuvvetli pozitif operatör olduğunu gösterdik. Buradan (2.7)'yi kullanarak,

$$\|\exp\{-(A - \delta)t\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{2M(\phi)}{\pi}$$

kestirimini verebiliriz. Bu da $\delta = [2M(\phi)]^{-1}$ olarak seçilebilmek üzere açıkça

$$\|\exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{2M(\phi)}{\pi} e^{-\delta t} \quad (2.8)$$

kestirimine ulaştırır.

$t > 1$ olsun. O zaman, yarı grup özelliđini kullanarak

$$\exp\{-tA\} = \exp\{-A\} \exp\{-(t-1)A\}$$

yazabiliriz. (2.6) kestirimini $t = 1$ ile ve (2.8)' i kullanarak

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{\pi(\cos\phi)^\alpha} \frac{2M(\phi)}{\pi} e^{-\delta(t-1)}$$

elde edebiliriz. Dolayısıyla, $t > 1$ için

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq M_1(\phi) e^{-\delta t}$$

kestirimi vardır. Eğer $0 < t \leq 1$ ise, o zaman (2.6) kestirimi geçerli olup, bu iki kestirimi

birleştirirsek bazı $\tilde{M}(\phi) > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \tilde{M}(\phi) e^{-\delta t} t^{-\alpha} \quad (2.9)$$

sonucuna ulaşılır.

Daha ötesi, (2.3) formülü $\exp\{-tA\}$ operatör değerli fonksiyonunun operatör normunda türevlenebilir olduğunu elde etmemizi sağlar ve

$$\frac{d}{dt} \exp\{-tA\} = -A \exp\{-tA\} \quad (2.10)$$

olur.

Özellikle, bu $\exp\{-tA\}$ ' nın operatör normunda sürekli olduğunu ifade eder. Yarı grup özelliğini kullanarak, $t > 0$ için $\exp\{-tA\}$ ' nın türevinin de operatör normunda sürekli olduğu çıkarılabilir.

Son olarak, (2.10) formülü operatör değerli $\exp\{-tA\}$ fonksiyonunun $t > 0$ için operatör normunda keyfi mertebeden türevleri olabileceđini gösterir.

şimdi $x \in D(A)$ olsun. O zaman (E -değerli) $\exp\{-tA\}x$ fonksiyonunun $t > 0$ için türevi vardır ve (2.10) ile,

$$\frac{d}{dt} \exp\{-tA\}x = -\exp\{-tA\}Ax \quad (2.11)$$

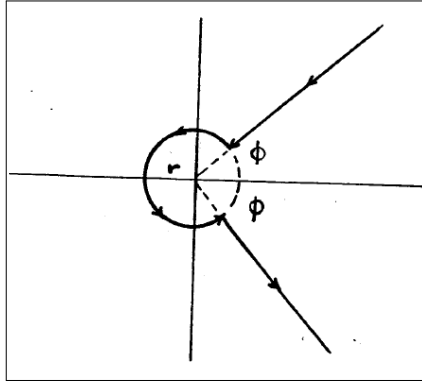
şeklinde yazılır. Yukarıdaki ifadedden, x için

$$(z - A)^{-1}x = z^{-1}x + z^{-1}(z - A)^{-1}Ax$$

formülünü yazabiliriz ve (2.3) formülünü kullanarak,

$$\exp\{-tA\}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-tz} [z^{-1}x + z^{-1}(z - A)^{-1}Ax] dz$$

elde ederiz. Burada çevrel çizgi Γ Şekil 2.1'deki formdadır.



Şekil 2.1 Spektrum açısı ve Γ çevrel çizgisi

Cauchy teoremini kullanarak,

$$\exp\{-tA\}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-tz} z^{-1} (z - A)^{-1} Ax dz + x$$

olur. (2.2) kestirimi bize $t \rightarrow +0$ integral işareti altında limite geçilebilir. Dolayısıyla, E 'nin normunda

$$\lim_{t \rightarrow +0} \exp\{-tA\}x = x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-1} (z - A)^{-1} Ax dz$$

vardır. Cauchy teoremine göre, bazı $\sigma > 0$ için integral

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-1} (z - A)^{-1} A x dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} z^{-1} (z - A)^{-1} A x dz$$

olur. Buradan (2.2) ile,

$$\|\mathfrak{S}\|_E \leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sigma^2 + t^2} \|Ax\|_E$$

'dir. \mathfrak{S} σ 'ya bağlı olmadığına göre $\mathfrak{S} \equiv 0$ olur ve herhangi $x \in D(A)$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \exp\{-tA\} x = x \quad (2.12)$$

olduğunu ispat etmiş oluruz. $\|\exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E}$ normu $t > 0$ için düzgün sınırlı olduğundan ve $t = 0$ 'da $U(0) = I$ olduğu bilindiğinden, kuvvetli sürekli bir yarı grup elde ederiz. (2.9) ($\alpha = 0$ ile) kestiriminden, yarı grubun analitik olduğu çıkartılır. Son olarak, üretcinin $U'(0) = -A$ olduğunu gösterelim. (2.11)'den ve (2.8) kestiriminden $x \in D(A)$ için,

$$U(t)x - x = - \int_0^t U(s) A x ds$$

özdeşliğini çıkartabiliriz. $U(t)$, $t = 0$ noktasının solunda kuvvetli sürekli olduğundan, buradan $x \in D(U'(0))$ ve $U'(0)x = -Ax$ çıkarsamasını yapabiliriz. Dolayısıyla, $U'(0) = -A$ operatörünün uzantısıdır. (2.8) kestiriminden, herhangi $\lambda < 0$ için $U'(0) + \lambda$ operatörü ve $-A + \lambda$ sınırlı terslere sahiptirler. Buradan, $U'(0) = -A$ 'dır. $-A$ üretçeli, üstsel azalan norma sahip $\exp\{-tA\}$ operatör değerli fonksiyonu analitik yarı gruptur. Bu gibi yarı grupları üreten $-A$ operatörüne kuvvetli pozitif operatör denir.

A kuvvetli bir pozitif operatör olsun. A 'nın yardımı ile her $v \in E'$ 'yi içeren

$$\|v\|'_{\alpha,q} = \left(\int_0^{\infty} \|\lambda^{\alpha} A(\lambda + A)^{-1} v\|_E^q \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ eger } 1 \leq q < \infty, \quad (2.13)$$

$$\|v\|'_{\alpha} = \|v\|'_{\alpha,\infty} = \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^{\alpha} A(\lambda + A)^{-1} v\|_E$$

sonlu normlu $E'_{\alpha,q}$ (E, A), $0 < \alpha < 1$ kesirli uzayını ifade edelim.

Ayrıca (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994)'in 1. bölümünün 4. kısmında, A 'nın yardımıyla ile her $v \in E$ 'yi içeren

$$\|v\|_{E_{\alpha,q}} = \left(\int_0^{\infty} \|\tau^{1-\alpha} A \exp\{-\tau A\} v\|_E^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ eger } 1 \leq q < \infty, \quad (2.14)$$

$$\|v\|_{E_{\alpha,\infty}} = \sup_{\tau > 0} \tau^{1-\alpha} \|A \exp\{-\tau A\} v\|_E$$

sonlu normlu $E_{\alpha,q}$, $0 < \alpha < 1$, kesirli uzayını ifade edilmektedir.

Teorem 2.1. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994) Her $0 < \alpha < 1$ için, $E'_{\alpha} = E_{\alpha}$ 'dir .

İspat. Her $k \geq 2$ için,

$$(I + \tau A)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} \exp\{-\tau t A\} dt \quad (2.15)$$

'dir. Buradan,

$$\lambda^{\alpha} A(\lambda + A)^{-1} = \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda t} A \exp\{-tA\} dt$$

çıkartılır. $v \in E_{\alpha}$ olsun. O zaman

$$\|\lambda^{\alpha} A(\lambda + A)^{-1} v\|_E \leq \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda t}}{t^{1-\alpha}} dt \|v\|_{\alpha}$$

olur.

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda t}}{t^{1-\alpha}} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{1-\alpha}} dt = \Gamma(\alpha) \leq \frac{M}{\alpha}$$

olduğundan, her $\lambda > 0$ için

$$\| \lambda^\alpha A(\lambda + A)^{-1} v \|_E \leq \frac{M}{\alpha} \|v\|_\alpha$$

çıkar. Bu da bize $v \in E'_\alpha$ olduğunu ve

$$\|v\|'_\alpha \leq \frac{M}{\alpha} \|v\|_\alpha$$

olduğunu gösterir. Ardından, Cauchy-Riesz temsil formülünden

$$t^{1-\alpha} A \exp\{-tA\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} t^{1-\alpha} e^{-tz} A(z - A)^{-1} dz$$

elde ederiz. Şimdi $v \in E'_\alpha$ olsun. $|\phi| \leq \pi/2$ ile $z = \rho e^{\pm i\phi}$ olgularını kullanarak ve

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{1 + |\lambda|}$$

kestirimden,

$$\begin{aligned} \|t^{1-\alpha} A \exp\{-tA\} v\|_E &\leq M \int_0^{\infty} t^{1-\alpha} e^{-tp \cos \phi} \|A(p + A)^{-1} v\|_E dp \\ &\leq M \int_0^{\infty} t^{1-\alpha} e^{-tp \cos \phi} p^{-\alpha} dp \|v\|'_\alpha \end{aligned}$$

eşitsizliğini çıkarsarız.

$$\int_0^{\infty} t^{1-\alpha} e^{-tp \cos \phi} p^{-\alpha} dp = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau \cos \phi}}{\tau^\alpha} dt = \frac{1}{(\cos \phi)^{1-\alpha}} \int_0^{\infty} s^{(1-\alpha)-1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\cos \phi)^{1-\alpha}} \leq \frac{M(\phi)}{1-\alpha}$$

olduğundan ötürü, her $t > 0$ için

$$\|t^{1-\alpha} A \exp\{-tA\}v\|_E \leq \frac{M(\phi)}{1-\alpha} \|v\|'_\alpha$$

olur. Bu da $v \in E_\alpha$ ve

$$\|v\|_\alpha \leq \frac{M(\phi)}{1-\alpha} \|v\|'_\alpha$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$(1-\alpha)m(\phi)\|v\|_\alpha \leq \|v\|'_\alpha \leq \frac{M(\phi)}{\alpha}\|v\|_\alpha, 0 < \alpha < 1$$

eşitsizliklerini ispatlanır ve bu da teoremin ispatını tamamlar.

3. PARABOLİK DENKLEM İÇİN LOKAL OLMAYAN KOŞULLU SAĞ TARAF ÖZDEŞLEME PROBLEMİ VE ÇOK BOYUTLU PARABOLİK DENKLEMLER

3.1. Diferensiyel Durum

Lokal olmayan koşullu

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \sigma u(t,x) + p(t)q(x) + f(t,x), \\ 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(t,0) = u(t,l), u_x(t,0) = u_x(t,l), 0 \leq t \leq T, \\ u(0,x) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \\ u(t,x^*) = \rho(t), 0 \leq x^* \leq l, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.1)$$

parabolik denkleminin, sağ taraf fonksiyonunun rekonstrüksiyonu ters problemini ele alacağız.

Burada $u(t,x)$ ve $p(t)$ belirsiz fonksiyonlar, $a(x) \geq \delta > 0$ verilen bir fonksiyon ve $\sigma > 0$ yeterince büyük bir sayıdır.

- $q(x)$ 'in yeterince düzgün fonksiyon olduğunu
- $q(x)$ ve $q'(x)$ 'in l uzunluklu periyodik fonksiyonlar olduğunu ,
- $q(x^*) \neq 0$ olduğunu

kabul edelim. Bu tezde, zamana bağlı olarak değişkenlik gösterebilecek pozitif sabitler M ile belirtilmiştir. Öte yandan, $M(\alpha, \beta, \dots)$ ifadesi ile sabitin sadece α, β, \dots değişkenlerine bağlı olduğuna dikkat çekilmek istenmektedir.

Sonuçlarımızı formüle etmek için, $\phi(0) = \phi(l)$ ve Hölder koşullarını taşıyan $[0, l]$ aralığında tanımlı,

$$\|\phi\|_{\dot{C}^\alpha[0,l]} = \|\phi\|_{C[0,l]} + \sup_{0 < x < x+h < l} \frac{|\phi(x+h) - \phi(x)|}{h^\alpha},$$

$$\|\phi\|_{C[0,l]} = \max_{0 \leq x \leq l} |\phi(x)|$$

sonlu normuna sahip bütün sürekli $\phi(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\dot{C}^\alpha[0, l]$, $\alpha \in (0, 1)$,

Banach uzayını tanıtalım.

O zaman, (3.1) probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine olan aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1. $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}^{2\alpha+2}[0, l]$, $\rho'(t) \in C[0, T]$ ve $f(t, x) \in C\left([0, T], \overset{\circ}{C}^{2\alpha}[0, l]\right)$ olsun. O zaman, (3.1) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{C([0, T], \overset{\circ}{C}^{2\alpha}[0, l])} + \|u\|_{C([0, T], \overset{\circ}{C}^{2\alpha+2}[0, l])} \leq M(x^*, q) \|\rho'\|_{C[0, T]} \\ & + M(a, \delta, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \left(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}^{2\alpha+2}[0, l]} + \|f\|_{C([0, T], \overset{\circ}{C}^{2\alpha}[0, l])} + \|\rho\|_{C[0, T]} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \|p\|_{C[0, T]} \leq M(x^*, q) \|\rho'\|_{C[0, T]} \\ & + M(a, \delta, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \left[\|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}^{2\alpha+2}[0, l]} + \|f\|_{C([0, T], \overset{\circ}{C}^{2\alpha}[0, l])} + \|\rho\|_{C[0, T]} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

koersif kararlılık kestirimlerini sağlar.

İspat. Ters problemin çözümünü,

$$\eta(t) = \int_0^t p(s) ds \quad (3.4)$$

olmak üzere

$$u(t, x) = \eta(t)q(x) + w(t, x) \quad (3.5)$$

formunda araştıralım. (3.5)'ten türev aldığımız zaman

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = p(t)q(x) + \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}$$

ve

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \eta(t) \frac{d^2 q(x)}{dx^2} + \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2}$$

denklemlerini elde ederiz. Buna ilaveten, eğer (3.5)'te $x = x^*$ yer değiştirmesini yaparsak

$$u(t, x^*) = \eta(t)q(x^*) + w(t, x^*) = \rho(t)$$

ve

$$\eta(t) = \frac{\rho(t) - w(t, x^*)}{q(x^*)} \quad (3.6)$$

sonuçlarına ulaşırız. Son denklemde her iki tarafın türevini aldığımızda

$$p(t) = \frac{\rho'(t) - w_t(t, x^*)}{q(x^*)} \quad (3.7)$$

olur ve üçgen eşitsizliğinden dolayı, herhangi $t \in [0, T]$ için

$$\begin{aligned} |p(t)| &= \left| \frac{\rho'(t) - w_t(t, x^*)}{q(x^*)} \right| \leq M(x^*, q)(|\rho'(t)| + |w_t(t, x^*)|) \\ &\leq M(x^*, q) \left(\max_{0 \leq t \leq T} |\rho'(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} \max_{0 \leq x^* \leq l} |w_t(t, x^*)| \right) \\ &\leq M(x^*, q) \left(\max_{0 \leq t \leq T} |\rho'(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} \|w_t(t)\|_{C^{\circ 2\alpha}_{[0, l]}} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitsizlikleri çıkarsanır. Burada, (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerini ve $q(x)$ üzerindeki kabulleri kullanarak, $w(t, x)$ 'in

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + a(x) \frac{\rho(t) - w(t, x^*)}{q(x^*)} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \\ -\sigma \frac{\rho(t) - w(t, x^*)}{q(x^*)} q(x) - \sigma w(t, x) + f(t, x), 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ w(t, 0) = w(t, l), w_x(t, 0) = w_x(t, l), 0 \leq t \leq T, \\ w(0, x) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.9)$$

probleminin bir çözümü olduğunun gösterilmesi mümkündür. Dolayısıyla, Teorem 3.1'in ispatının sonu (3.8) eşitsizliğine ve aşağıda verilen teoreme dayanır.

Teorem 3.2. (3.9) probleminin çözümü için

$$\|w_t\|_{C([0, T], C^{\circ 2\alpha}_{[0, l]})} \leq M(a, \delta, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \left(\|\varphi\|_{C^{\circ 2\alpha}_{[0, l]}} + \|f\|_{C([0, T], C^{\circ 2\alpha}_{[0, l]})} + \|\rho\|_{C[0, T]} \right) \quad (3.10)$$

koersif eşitsizliği vardır.

İspat. $E = \overset{\circ}{C} [0, l]$, Banach uzayında

$$Au = -a(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \sigma u,$$

$$D(A) = \left\{ u(x) : u, u', u'' \in C[0, l], u(0) = u(l), u_x(0) = u_x(l) \right\}$$

olarak tanımlı A pozitif operatörü ile (3.9) problemini

$$\begin{cases} w_t + Aw = (aq'' - \sigma q) \frac{\rho(t) - w(t, x^*)}{q(x^*)} + f(t), 0 < t \leq T, \\ w(0) = \varphi \end{cases} \quad (3.11)$$

abstrakt formunda yazabiliriz. Burada, $[0, T]$ 'de tanımlı, $E = \overset{\circ}{C}[0, l]$ -değerli $f(t) = f(t, x)$ ve $w(t) = w(t, x)$ belirli ve belirsiz abstrakt fonksiyonlar, $w(t, x^*)$ $[0, T]$ 'de tanımlı belirsiz skaler fonksiyon, $q = q(x)$, $q'' = q''(x)$, $\varphi = \varphi(x)$ ve $a = a(x)$, $E = \overset{\circ}{C} [0, l]$ 'de elemanlar ve $q(x^*)$ ise bir sayıdır.

Cauchy formülü ile çözümümüz

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{-tA} \varphi - \int_0^t e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w(s, x^*) ds \\ &+ \int_0^t e^{-(t-s)A} \frac{\rho(s)(aq'' - \sigma q)}{q^*} ds + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. Her iki tarafın türevini alırsak,

$$\begin{aligned} w_t(t) &= -Ae^{-tA} \varphi + \int_0^t Ae^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w(s, x^*) ds - \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w(t, x^*) \\ &- \int_0^t Ae^{-(t-s)A} \frac{\rho(s)(aq'' - \sigma q)}{q^*} ds + \frac{(aq'' - \sigma q)}{q^*} \rho(t) - \int_0^t Ae^{-(t-s)A} f(s) ds + f(t) \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w(s, x^*) ds = \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \int_0^s w_z(z, x^*) dz ds$$

$$+ \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \varphi(x^*) ds$$

formülünü uygulayarak ve integrasyonun sınırlarını değiştirerek

$$\int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w(s, x^*) ds = \int_0^t \int_z^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w_z(z, x^*) ds dz$$

$$+ \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \varphi(x^*) ds$$

elde ederiz. O zaman (3.9) probleminin çözümü

$$w_t(t) = A e^{-tA} \varphi + \int_0^t \int_z^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w_z(z, x^*) ds dz$$

$$+ \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \varphi(x^*) ds - \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{\rho(s)(aq'' - \sigma q)}{q^*} ds$$

$$- \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds + \frac{(aq'' - \sigma q)}{q^*} (\rho(t) - w(t, x^*)) + f(t) = \sum_{k=1}^6 G_k(t)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$G_1(t) = A e^{-tA} \varphi,$$

$$G_2(t) = \int_0^t \int_z^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w_z(z, x^*) ds dz,$$

$$G_3(t) = \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \varphi(x^*) ds,$$

$$G_4(t) = - \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{\rho(s)(aq'' - \sigma q)}{q^*} ds,$$

$$G_5(t) = - \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds,$$

$$G_6(t) = \frac{(aq'' - \sigma q)}{q^*}(\rho(t) - w(t, x^*)) + f(t)$$

olur. $R, \exp\{-\lambda A\}$ ve A operatörlerinin değişmesi olgusundan, iyi bilinmektedir ki

$$\|R\|_{E_\alpha \rightarrow E_\alpha} \leq \|R\|_{E \rightarrow E} \quad (3.13)$$

eşitsizliği çıkarsanabilir. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994). Şimdi, herhangi $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $G_k(t)$ 'lerin kestirimini ayrı ayrı verelim. E_α uzayının normunun tanımından ve (3.13)'ten ötürü

$$\|G_1(t)\|_{E_\alpha} = \|Ae^{-tA}\varphi\|_{E_\alpha} \leq \|e^{-tA}\|_{E_\alpha \rightarrow E_\alpha} \|A\varphi\|_{E_\alpha} \leq \|e^{-tA}\|_{E \rightarrow E} \|A\varphi\|_{E_\alpha}$$

kestirimi elde edilir. (2.8) kestirimini kullanırsak, herhangi $t \in [0, T]$ için

$$\|G_1(t)\|_{E_\alpha} \leq M_1 \|A\varphi\|_{E_\alpha} \quad (3.14)$$

elde ederiz. Şimdi $G_2(t)$ için kestirimimizi verelim.

$$\begin{aligned} \|G_2(t)\|_{E_\alpha} &= \left\| \int_0^t \int_z^t Ae^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} w_z(z, x^*) ds dz \right\|_{E_\alpha} \\ &\leq \int_0^t \int_z^t \left\| Ae^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} ds |w_z(z, x^*)| dz \end{aligned}$$

'tir. (2.14)'ü kullanırsak,

$$\begin{aligned} \int_z^t \left\| Ae^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} ds &= \int_z^t \left\| Ae^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds \\ + \sup_{\lambda > 0} \int_z^t \left\| \lambda^{1-\alpha} Ae^{-\lambda A} Ae^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds \end{aligned}$$

yazabiliriz ve E_α uzaylarında normun tanımından ötürü,

$$\begin{aligned}
& \int_z^t \left\| A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds = \int_z^t (t-s)^{\alpha-1} \left\| (t-s)^{1-\alpha} A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds \\
& \leq \int_z^t (t-s)^{\alpha-1} ds \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} = \left(-\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} \Big|_z^t \right) \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} \\
& \leq \frac{T^\alpha}{\alpha} \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} = M_2(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T)
\end{aligned}$$

olur. (2.9) kestiriminden,

$$\begin{aligned}
& \int_z^t \left\| \lambda^{1-\alpha} A e^{-\lambda A} A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds \\
& \leq \int_z^t \frac{2^{2-\alpha} \lambda^{1-\alpha}}{(\lambda+t-s)^{2-\alpha}} ds \left\| \frac{\lambda+t-s}{2} A e^{-\frac{\lambda+t-s}{2}A} \right\|_{E \rightarrow E} \left\| \left(\frac{\lambda+t-s}{2} \right)^{1-\alpha} A e^{-\frac{\lambda+t-s}{2}A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds \\
& \leq M_3(\alpha) \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} \int_z^t \frac{\lambda^{1-\alpha}}{(\lambda+t-s)^{2-\alpha}} ds \\
& = M_3(\alpha) \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} \left(\frac{\lambda^{1-\alpha}}{(\alpha-1)(\lambda+t-s)^{1-\alpha}} \Big|_z^t \right) \\
& \leq M_3(\alpha) \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} \left(\frac{\lambda^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(\lambda+t-z)^{1-\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

herhangi $\lambda > 0$ için yukarıdaki eşitsizliği veririz. O zaman,

$$\begin{aligned}
& \sup_{\lambda > 0} \int_z^t \left\| \lambda^{1-\alpha} A e^{-\lambda A} A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_E ds \\
& \leq M_3(\alpha) \left\| \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} \frac{1}{(1-\alpha)} = M_4(a, \sigma, \alpha, x^*, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da herhangi s , $0 \leq z \leq s \leq t$ için

$$\int_z^t \left\| A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \right\|_{E_\alpha} ds \leq M_5(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \quad (3.15)$$

ve

$$\begin{aligned}
\|G_2(t)\|_{E_\alpha} &\leq M_6(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \int_0^t |w_z(z, x^*)| dz \\
&\leq M_6(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \int_0^t \max_{0 \leq x \leq l} |w_z(z, x)| dz \leq M_6(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \int_0^t \|w_z\|_{E_\alpha} dz
\end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $G_3(t)$ 'ün kestirimini ise şu şekilde elde ederiz.

$$\|G_3(t)\|_{E_\alpha} = \left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} \varphi(x^*) ds \right\|_{E_\alpha} \leq \left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A} \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} ds \right\|_{E_\alpha} |\varphi(x^*)|$$

'tir.

$$|\varphi(x^*)| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_E \leq \|\varphi\|_{E_\alpha} \leq \|A^{-1}\|_{E_\alpha \rightarrow E_\alpha} \|A\varphi\|_{E_\alpha} \leq M \|A\varphi\|_{E_\alpha} \tag{3.17}$$

olduğundan ve $z = 0$ için (3.15) kestirimini kullanırsak, herhangi $t \in [0, T]$ için

$$\|G_3(t)\|_{E_\alpha} \leq M_7(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \|A\varphi\|_{E_\alpha} \tag{3.18}$$

olur. (3.15) kestiriminden $G_4(t)$ için,

$$\|G_4(t)\|_{E_\alpha} = \left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A} \rho(s) \frac{aq'' - \sigma q}{q^*} ds \right\|_{E_\alpha} \leq M_8(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \|\rho\|_{C[0, T]} \tag{3.19}$$

kestirimi kolayca görülmektedir. Şimdi $G_5(t)$ 'nin kestirimini verelim. E_α uzaylarında normun tanımından dolayı

$$\begin{aligned}
\|G_5(t)\|_{E_\alpha} &= \left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_{E_\alpha} = \left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_E \\
&+ \sup_{\lambda > 0} \lambda^{1-\alpha} \left\| A e^{-\lambda A} \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_E
\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.14) kestirimini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_E \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\| (t-s)^{1-\alpha} A e^{-(t-s)A} f(s) \right\|_E ds \\
& \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \|f\|_{C(E_\alpha)} = \|f\|_{C(E_\alpha)} \left(-\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^t \right) \\
& = \frac{t^\alpha}{\alpha} \|f\|_{C(E_\alpha)} \leq M_9(\alpha, T) \|f\|_{C(E_\alpha)} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

ifadeleri yazılır. Şimdi, ikinci terimi ele alalım. (2.14) denkleminde herhangi $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \lambda^{1-\alpha} \left\| A e^{-\lambda A} \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_E \leq \lambda^{1-\alpha} \int_0^t \left\| A e^{-\frac{t-s+\lambda}{2}A} \right\|_{E \rightarrow E} \left\| A e^{-\frac{t-s+\lambda}{2}A} f(s) \right\|_E ds \\
& = \lambda^{1-\alpha} \int_0^t \left(\frac{t-s+\lambda}{2} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{t-s+\lambda}{2} \right)^{-1} \left\| \frac{t-s+\lambda}{2} A e^{-\frac{t-s+\lambda}{2}A} \right\|_{E \rightarrow E} \left\| \left(\frac{t-s+\lambda}{2} \right)^{1-\alpha} A e^{-\frac{t-s+\lambda}{2}A} f(s) \right\|_E ds \\
& \leq M_{10} \lambda^{1-\alpha} \int_0^t \left(\frac{t-s+\lambda}{2} \right)^{\alpha-2} \|f\|_{E_\alpha} ds \\
& \leq M_{10} \lambda^{1-\alpha} \int_0^t \left(\frac{t-s+\lambda}{2} \right)^{\alpha-2} ds \|f\|_{C(E_\alpha)} = M_{10} \|f\|_{C(E_\alpha)} \left(\frac{\left(\frac{t-s+\lambda}{2} \right)^{\alpha-1}}{1-\alpha} \Big|_0^t \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman,

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^{1-\alpha} \left\| A e^{-\lambda A} \int_0^t A e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_E \leq M_{10} \|f\|_{C(E_\alpha)} \left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \leq M_{11}(\alpha) \|f\|_{C(E_\alpha)} \tag{3.21}$$

olur. (3.20) ve (3.21) kestirimlerini birleştirirsek,

$$\|G_5(t)\|_{E_\alpha} \leq M_{12}(\alpha, T) \|f\|_{C(E_\alpha)} \tag{3.22}$$

olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $G_6(t)$ için inceleyelim.

$$\|G_6(t)\|_{E_\alpha} = \left\| \frac{(aq'' - \sigma q)}{q^*} (\rho(t) - w(t, x^*)) + f(t) \right\|_{E_\alpha}$$

'dir.

$$w(t, x^*) = w(0, x^*) + \int_0^t w_z(z, x^*) dz = \varphi(x^*) + \int_0^t w_z(z, x^*) dz$$

formülünü, E_α uzaylarında normun tanımını ve (3.17) kestirimini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|G_6(t)\|_{E_\alpha} &\leq \left\| \frac{(aq'' - \sigma q)}{q^*} \right\|_{E_\alpha} \left(\|\rho\|_{C[0,T]} + M_{13} \|A\varphi\|_{E_\alpha} + \int_0^t \|w_z\|_{E_\alpha} dz \right) + \|f\|_{C(E_\alpha)} \\ &= M_{14}(a, \delta, \sigma, x^*, q) \left(\|\rho\|_{C[0,T]} + \|A\varphi\|_{E_\alpha} + \int_0^t \|w_z\|_{E_\alpha} dz \right) + \|f\|_{C(E_\alpha)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

kestirimini elde ederiz.

(3.14), (3.16), (3.18), (3.19), (3.22) ve (3.23) kestirimlerini birleştirince,

$$\begin{aligned} \|w_t\|_{E_\alpha} &\leq M_1 \|A\varphi\|_{E_\alpha} + M_6(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \int_0^t \|w_z\|_{E_\alpha} dz \\ &+ M_7(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \|A\varphi\|_{E_\alpha} + M_8(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \|\rho\|_{C[0,T]} + M_{12}(\alpha, T) \|f\|_{C(E_\alpha)} \\ &+ M_{14}(a, \delta, \sigma, x^*, q) \left(\|\rho\|_{C[0,T]} + \|A\varphi\|_{E_\alpha} + \int_0^t \|w_z\|_{E_\alpha} dz \right) + \|f\|_{C(E_\alpha)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

olduğunu göstermiş oluruz. (3.24)'te Gronwall integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|w_t\|_{E_\alpha} &\leq e^{M_6(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) + M_{14}(a, \sigma, x^*, q)} \left[M_1 \|A\varphi\|_{E_\alpha} \right. \\ &+ M_7(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \|A\varphi\|_{E_\alpha} + M_8(a, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \|\rho\|_{C[0,T]} \\ &\left. M_{14}(a, \delta, \sigma, x^*, q) (\|\rho\|_{C[0,T]} + \|A\varphi\|_{E_\alpha}) + (M_{12}(\alpha, T) + 1) \|f\|_{C(E_\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

olduğunu ispatlarız. Sıradaki teorem Teorem 3.2.'nin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3. (Ashyralyev, 2007) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $E_\alpha(C[0, l], A)$ ve $C^{2\alpha}[0, l]$ uzaylarının normları denktir.

Benzer tarzda, $q(x)$ üzerindeki bazı kısıtlarla çok boyutlu parabolik denklem içinde sağ taraf rekonstrüksiyonu ters probleminin iyi konumlanmışlığını elde edilebileceğini not edelim.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(t, x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} - \sigma u(t, x) + p(t)q(x) \\ + f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T, |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.26)$$

çok boyutlu parabolik denklemini ele alalım. Burada $u(t,x)$ ve $p(t)$ belirsiz fonksiyonlar, $a_r(x) \geq \delta > 0$ yeterince düzgün fonksiyon ve $\sigma > 0$ yeterince büyük sayı olsun. Ayrıca, $q(x)$ yeterince düzgün ve sınırlı fonksiyon ve $q(x^*) \neq 0$ olsun.

\mathbb{R}^n uzayında tanımlı fonksiyonlar üzerine etki eden

$$B^x = \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}}$$

formundaki diferensiyel operatörünün

$$B^x(\xi) = \sum_{|r|=2m} a_r(x) (i\xi_1)^{r_1} \cdots (i\xi_n)^{r_n}, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

sembolünün $\xi \neq 0$ için,

$$0 < M_1 |\xi|^{2m} \leq (-1)^m B^x(\xi) \leq M_2 |\xi|^{2m} < \infty$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. O zaman, (3.26) probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine aşağıda verilecek teorem vardır.

Önce, sonuçlarımızı formüle etmek için, Hölder koşullarını taşıyan \mathbb{R}^n 'de tanımlı,

$$\|\phi\|_{\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| + \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n, x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

normuna sahip bütün sürekli $\phi(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in (0, 1)$, Banach uzayını tanıtalım.

Teorem 3.4. $\varphi(x) \in \dot{C}^{2\alpha+2}(\mathbb{R}^n)$, $\rho'(t) \in C[0, T]$ ve $f(t, x) \in C\left([0, T], \dot{C}^{2\alpha}(\mathbb{R}^n)\right)$ olsun. O zaman, (3.27) probleminin çözümü için,

$$\|u_t\|_{C([0,T],C^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{C([0,T],C^{\circ 2\alpha+2m}(\mathbb{R}^n))} \leq M(x^*, q) \|\rho'\|_{C[0,T]}$$

$$+ M(a, \delta, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \left(\|\varphi\|_{C^{\circ 2\alpha+2m}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{C([0,T],C^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}^n))} + \|\rho\|_{C[0,T]} \right),$$

$$\|p\|_{C[0,T]} \leq M(x^*, q) \|\rho'\|_{C[0,T]}$$

$$+ M(a, \delta, \sigma, \alpha, x^*, q, T) \left[\|\varphi\|_{C^{\circ 2\alpha+2m}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{C([0,T],C^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}^n))} + \|\rho\|_{C[0,T]} \right]$$

koersif kararlılık kestirimleri vardır.

Teorem 3.4'ün ispatı Teorem 3.1'in ispatının şemasını izler ve aşağıdaki teoremlere dayanır.

Teorem 3.5. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994) $0 < \alpha < \frac{1}{2m}$ ve $\mu \in (0,1)$ belirteci (indicator) için, $E_\alpha(C^\mu(\mathbb{R}^n), A)$ ve $C^{\mu+2m\alpha}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının normları denktir.

Teorem 3.6. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994)

$$\sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} - \sigma u(x) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

eliptik probleminin çözümü

$$\sum_{|r|=2m} \left\| \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \leq M(\mu) \|f\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)}$$

koersif eşitsizliğine uyar.

3.2. Fark Şeması Durumu

(3.1) probleminin yaklaşık çözümü için,

$$\begin{cases}
\frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{\tau} = a(x_n) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - \sigma u_n^k + p^k q_n + f(t_k, x_n), \\
p^k = p(t_k), q_n = q(x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\
1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\
u_0^k = u_M^k, -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
u_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M, \\
u_{\lfloor \frac{x_s}{h} \rfloor}^k = u_s^k = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, 0 \leq s \leq M
\end{cases} \quad (3.27)$$

Rothe fark şeması kurulur. Burada, $q_s \neq 0, q_0 = q_M, -3q_0 + 4q_1 - q_2 = q_{M-2} - 4q_{M-1} + 3q_M$ kabul edilmektedir.

Sonuçlarımızı formüle etmek için, $\phi_0 = \phi_M$ ile $[0, l]_h = \{x_n : x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = l\}$ üzerinde tanımlı,

$$\|\phi_h\|_{\dot{C}_h^\alpha} = \max_{1 \leq n \leq M} |\phi_n| + \sup_{1 \leq n < n+r \leq M} |\phi_{n+r} - \phi_n| (rh)^{-\alpha}$$

normuna sahip tüm $\phi^h = \{\phi_n\}_{n=1}^{M-1}$ ağ fonksiyonlarının oluşturduğu $\dot{C}_h^\alpha = \dot{C}^\alpha [0, l]_h, \alpha \in (0, 1)$ Banach uzayını tanıtalım.

Buna ilaveten, $[0, T]_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N, Nh = T\}$ 'da tanımlı E -değerli,

$$\|\phi^\tau\|_{C_\tau(E)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|\phi(t_k)\|_E$$

normlu, bütün $\phi^\tau = \{\phi(t_k)\}_{k=1}^{N-1}$ ağ fonksiyonlarının uzayı da $C_\tau(E) = C([0, T]_\tau, E)$ Banach uzayıdır.

O zaman, (3.27) probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.7. (3.27) probleminin çözümü için

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\{ \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \left\| \{D_h^2 u_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} \leq M(q, s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C([0, T]_\tau)} \\
& + M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left(\left\| D_h^2 \varphi^h \right\|_{\dot{C}_h^{2\alpha}} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C([0, T]_\tau)} \right),
\end{aligned}$$

$$\|p^\tau\|_{C[0,T]_\tau} \leq M(q,s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0,T]_\tau} \\ + M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left[\|D_h^2 \varphi^h\|_{\dot{C}_h^{2\alpha}} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C[0,T]_\tau} \right]$$

koersif kararlılık kestirimleri vardır. Burada, $f^h(t_k) = \{f(t_k, x_n)\}_{n=1}^{M-1}$, $\varphi^h = \{\varphi(x_n)\}_{n=1}^{M-1}$, $\rho^\tau = \{\rho(t_k)\}_{k=0}^N$, $D_h^2 u^h = \left\{ \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \right\}_{n=1}^{M-1}$ ve $\tilde{a} = \frac{1}{q_s} (aD_h^2 q^h - \sigma q^h)$ 'dir.

İspat. (3.27) probleminin çözümünü

$$u_n^k = \eta^k q_n + w_n^k \quad (3.28)$$

formunda arayalım. Burada,

$$\eta^k = \sum_{i=1}^k p^i \tau, 1 \leq k \leq N, \eta^0 = 0 \quad (3.29)$$

'tir. (3.28)'den fark türevlerini alırsak, herhangi $n, 1 \leq n \leq M-1$ için

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{\eta^k - \eta^{k-1}}{\tau} q_n + \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau} = p^k q_n + \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau}$$

ve

$$\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = \eta^k \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} + \frac{w_{n+1}^k - 2w_n^k + w_{n-1}^k}{h^2}$$

elde edilir. Buna ilaveten, u_s^k iç ağ noktasını kullanırsak,

$$u_s^k = \eta^k q_s + w_s^k = \rho(t_k)$$

ve

$$\eta^k = \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{q_s} \quad (3.30)$$

bulunur. Son eşitlikten fark türevi aldığımızda,

$$p^k = \frac{1}{q_s} \left(\frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} - \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} \right) \quad (3.31)$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden, herhangi $k, 1 \leq k \leq N$ için

$$\begin{aligned} |p^k| &\leq M(q, s) \left(\left| \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right| + \left| \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} \right| \right) \\ &\leq M(q, s) \left(\max_{1 \leq k \leq N} \left| \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right| + \max_{1 \leq k \leq N} \max_{0 \leq s \leq M} \left| \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} \right| \right) \\ &\leq M(q, s) \left(\max_{1 \leq k \leq N} \left| \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right| + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{C_h^{\circ 2\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada, $\{w_k^h\}_{k=0}^N$

$$\begin{cases} \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau} = a(x_n) \frac{w_{n+1}^k - 2w_n^k + w_{n-1}^k}{h^2} + a(x_n) \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{q_s} \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} \\ -\sigma \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{q_s} q_n - \sigma w_n^k + f(t_k, x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\ 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\ w_0^k = w_M^k, -3w_0^k + 4w_1^k - w_2^k = w_{M-2}^k - 4w_{M-1}^k + 3w_M^k, 0 \leq k \leq N, \\ w_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M \end{cases} \quad (3.33)$$

fark şemasının çözümü olur. Dolayısıyla, Teorem 3.7'nin ispatı (3.32) eşitsizliğine ve takip eden teoreme dayanmaktadır.

Teorem 3.8. (3.33) probleminin çözümü için,

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(C_h^{\circ 2\alpha})} \\ &\leq M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left(\|\varphi^h\|_{C_h^{\circ 2\alpha}} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(C_h^{\circ 2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right) \end{aligned}$$

koersif kararlılık kestirimi vardır.

İspat. (3.33) fark şemasını $E = \overset{\circ}{C}[0, l]_h$ Banach uzayında, u^h üzerinde etki eden ve $u_0 = u_M, -3u_0 + 4u_1 - u_2 = u_{M-2} - 4u_{M-1} + 3u_M$ koşulunu sağlayan

$$A_h^x u^h = \left\{ -a(x_n) \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \sigma u \right\}_{n=1}^{M-1} \quad (3.34)$$

olarak tanımlı A_h^x pozitif operatörü yardımıyla

$$\begin{cases} \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} + A_h^x w_k^h = \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{q_s} \\ + f^h(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ w_0^h = \varphi^h \end{cases} \quad (3.35)$$

abstrakt formunda yazabiliriz.

$R = (I + \tau A_h^x)^{-1}$ olarak ifade edelim. (3.35)'te $\forall k, 1 \leq k \leq N$ için

$$w_k^h = R w_{k-1}^h + R\tau \left(\left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{q_s} + f^h(t_k) \right)$$

eşitliğine vardır. Yineleme bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned} w_k^h &= R^k \varphi^h + \sum_{m=1}^k R^{k-m+1} \frac{\tau}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_m) \\ &- \sum_{m=1}^k R^{k-m+1} \frac{\tau}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) w_s^m + \sum_{m=1}^k R^{k-m+1} \tau f^h(t_m) \end{aligned}$$

olur ve her iki tarafın türevini aldığımız zaman

$$\begin{aligned} \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} &= \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h + \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_k) \\ &+ \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_m) \\ &- \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) w_s^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) w_s^m \\
& + f^h(t_k) + \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) f^h(t_m)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) w_s^m = \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \varphi(x_s) \\
& + \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \sum_{j=1}^m \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \tau
\end{aligned}$$

formülünü uygularsak ve toplam sembolünün sırasını değiştirirsek,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) w_s^m = \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \varphi(x_s) \\
& + \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \tau
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde ederiz. O zaman, (3.33) için

$$\begin{aligned}
& \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} = \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h + \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_k) \\
& + \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_m) \\
& - \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) w_s^k \\
& - \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \varphi(x_s) \\
& - \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \tau \\
& + f^h(t_k) + \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) f^h(t_m) = \sum_{k=1}^6 J_k
\end{aligned}$$

formülasyonu elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
J_1^k &= \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h, \\
J_2^k &= \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_m), \\
J_3^k &= -\sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \varphi(x_s), \\
J_4^k &= -\sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^k (R^{k-j+1} - R^{k-j}) \frac{\tau}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{w_s^m - w_s^{m-1}}{\tau}, \\
J_5^k &= \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) f^h(t_m), \\
J_6^k &= \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) (\rho(t_k) - w_s^k) + f^h(t_k)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi herhangi bir $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için J_r^k 'nin kestirimini ayrı ayrı verelim. J_1^k ile başlayalım.

$$J_1^k = \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h = R^k \frac{I - R^{-1}}{\tau} \varphi^h = R^k A_h^x \varphi^h \quad (3.37)$$

'tir. Dolayısıyla, E'_α uzayının normunun tanımını uygulayarak ve (3.37) faydalanarak

$$\|J_1^k\|_{E'_\alpha} = \|R^k A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \leq \|R^k\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \leq \|R^k\|_{E \rightarrow E} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha}$$

elde edilir.

$$\|R^k\|_{E \rightarrow E} \leq M \quad (3.38)$$

kestirimini kullanarak, herhangi $k, 1 \leq k \leq N$ için

$$\|J_1^k\|_{E'_\alpha} \leq M_1 \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \quad (3.39)$$

elde ederiz. Şimdi, J_2^k için kestirim verelim.

$$\begin{aligned} \|J_2^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \rho(t_m) \right\|_{E'_\alpha} \\ &= \left\| \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \tilde{a} \rho(t_m) \right\|_{E'_\alpha} \leq \max_{1 \leq m \leq N} \rho(t_m) \sum_{m=1}^k \|(R^{k-m+1} - R^{k-m}) \tilde{a}\|_{E'_\alpha} \end{aligned}$$

'tir.

$$R^{k-m+1} - R^{k-m} = R^{k-m+1} (I - R^{-1}) = -R^{k-m+1} A_h^x \tau \quad (3.40)$$

eşitliğini ve E'_α uzaylarında normun tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \tilde{a} \right\|_{E'_\alpha} &\leq \sum_{m=1}^k \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \\ + \sup_{\lambda > 0} \sum_{m=1}^k &\|\lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \end{aligned}$$

olur. Terimleri tek tek ele alalım. Birinci terimi iki parçaya ayıracağız.

$$\sum_{m=1}^k \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E = \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E + \|R A_h^x \tau \tilde{a}\|_E$$

olur. İlk parça için, E'_α uzaylarında normun tanımını ve (2.15) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau}{(k-m)!} \int_0^\infty \frac{t^{k-m}}{(\tau t)^{1-\alpha}} e^{-t} \|(\tau t)^{1-\alpha} A_h^x e^{-\tau t A} \tilde{a}\|_E dt \\ &\leq \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau}{(k-m)!} \int_0^\infty \frac{t^{k-m}}{(\tau t)^{1-\alpha}} e^{-t} dt = \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)!} \int_0^\infty t^{k-m-1+\alpha} e^{-t} dt \\ &= \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)!} \int_0^\infty t^{(k-m-1)\alpha+\alpha} e^{-\alpha t} t^{(k-m-1)(1-\alpha)} e^{-(1-\alpha)t} dt \end{aligned}$$

elde ederiz.

$p = \frac{1}{\alpha}, q = \frac{1}{1-\alpha}$ için Hölder eşitsizliğini kullanırsak ve Gamma fonksiyonunun tanımından yararlanırsak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \leq \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)!} \left(\int_0^\infty (t^{(k-m-1)\alpha+\alpha} e^{-\alpha t})^{\frac{1}{\alpha}} dt \right)^\alpha \\
& \times \left(\int_0^\infty (t^{(k-m-1)(1-\alpha)} e^{-(1-\alpha)t})^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \right)^{1-\alpha} \\
& = \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)!} \left(\int_0^\infty t^{k-m} e^{-t} dt \right)^\alpha \left(\int_0^\infty t^{k-m-1} e^{-t} dt \right)^{1-\alpha} \\
& = \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)!} (\Gamma(k-m+1))^\alpha (\Gamma(k-m))^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

çıkarsanır. $\Gamma(n) = (n-1)!$ ve $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \leq \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)!} (k-m)^\alpha \Gamma(k-m) \\
& = \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau^\alpha}{(k-m)^{1-\alpha}} = \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tau}{((k-m)\tau)^{1-\alpha}} \\
& \leq M_2 \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \int_0^{k\tau} \frac{1}{(k\tau-s)^{1-\alpha}} ds = M_2 \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \left(-\frac{(k\tau-s)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^{k\tau} \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \leq M_2 \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \frac{(k\tau)^\alpha}{\alpha} \leq M_3(\alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \quad (3.41)$$

olur. İkinci kısımda ise

$$\|R A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \leq \|R A_h^x \tau\|_{E \rightarrow E} \|\tilde{a}\|_E \leq M_4 \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \quad (3.42)$$

eşitsizliği vardır. (3.41) ve (3.42) kestirimlerini birleştirirsek

$$\sum_{m=1}^k \|R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a}\|_E \leq M_5(\alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \quad (3.43)$$

elde ederiz.

Şimdi ikinci terimin kestirimini verelim. Cauchy-Riesz formülünü (2.3) kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} \sum_{m=1}^k \frac{z}{(1+z)^{k-m+1}} \frac{\lambda^\alpha}{\lambda + z\tau^{-1}} A_h^x (z - \tau A_h^x)^{-1} \tilde{a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} \sum_{m=1}^k \frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^{-\alpha}}{(1+z)^{k-m+1}} \frac{\lambda^\alpha}{\lambda\tau + z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^\alpha A_h^x \left(\frac{z}{\tau} - A_h^x\right)^{-1} \tilde{a} dz \end{aligned}$$

elde ederiz. $z = \rho e^{\pm i\phi}$, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ olması dolayısıyla, (2.2) kestirimi

$$\left\| \left(\frac{z}{\tau}\right)^\alpha A_h^x \left(\frac{z}{\tau} - A_h^x\right)^{-1} \tilde{a} \right\|_E \leq M_6 \left\| \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^\alpha A_h^x \left(\frac{\rho}{\tau} + A_h^x\right)^{-1} \tilde{a} \right\|_E, \frac{1}{|\lambda\tau + z|} \leq \frac{M_6}{\lambda\tau + \rho}$$

çıkarsamasını sağlar. Dolayısıyla

$$\left\| \sum_{m=1}^k \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a} \right\|_E \leq M_6 \int_0^\infty \sum_{m=1}^k \frac{\rho^{1-\alpha}}{[1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2]^{\frac{k-m+1}{2}}} \frac{(\lambda\tau)^\alpha d\rho}{\lambda\tau + \rho} \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha}$$

'dır. Geometrik seriyi toplarsak,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^k \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a} \right\|_E &\leq M_6 \int_0^\infty \sum_{m=1}^k \frac{\rho^{1-\alpha}}{[1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \left(1 - \frac{1}{[1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2]^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \frac{(\lambda\tau)^\alpha d\rho}{\lambda\tau + \rho} \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \leq M_6 \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^\alpha \varkappa(\rho) d\rho}{(\lambda\tau + \rho) \rho^\alpha} \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\varkappa(\rho) = \frac{\rho}{[1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2]^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{1 + [1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2]^{\frac{1}{2}}}{2 \cos \phi + \rho}$$

Fonksiyonu $\rho \geq 0$ için artan olmadığından, her $\rho > 0$ için, $\varkappa(0) = \frac{1}{\cos \phi} \geq \varkappa(\rho)$ 'dır.

Buradan da herhangi $\lambda > 0$ için

$$\left\| \sum_{m=1}^k \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a} \right\|_E \leq \frac{M_6}{\cos \phi} \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^\alpha d\rho}{(\lambda\tau + \rho) \rho^\alpha} \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sup_{\lambda > 0} \left\| \sum_{m=1}^k \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m+1} A_h^x \tau \tilde{a} \right\|_E \leq M_7 (\phi, \alpha) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.43) ve (3.44) kestirimlerini kullanarak

$$\left\| \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \tilde{a} \right\|_{E'_\alpha} \leq M_8 (\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \quad (3.45)$$

ve

$$\|J_2^k\|_{E'_\alpha} \leq \max_{1 \leq m \leq N} \rho(t_m) M_8 (\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \quad (3.46)$$

'ya ulaşılır. Şimdi J_3^k için kestirim verelim.

$$\begin{aligned} \|J_3^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \varphi(x_s) \right\|_{E'_\alpha} \\ &\leq \sum_{m=1}^k \left\| (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \right\|_{E'_\alpha} |\varphi(x_s)| \end{aligned}$$

'tir.

$$\begin{aligned} |\varphi(x_s)| &\leq \max_{0 \leq s \leq M} |\varphi(x_s)| = \|\varphi^h\|_E \leq \|\varphi^h\|_{E'_\alpha} \\ &\leq \|(A_h^x)^{-1}\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \leq M \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \end{aligned} \quad (3.47)$$

olması dolayısıyla ve (3.45) kestiriminden

$$\|J_3^k\|_{E'_\alpha} \leq M_9 (\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \quad (3.48)$$

elde edilir.

J_4^k için kestirim şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \|J_4^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \\ &\leq \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^k \left\| (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \right\|_{E'_\alpha} \left| \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right| \tau \end{aligned}$$

'tir. (3.45) kestirimini kullanarak, herhangi j , $1 \leq j \leq m \leq k$ için

$$\|J_4^k\|_{E'_\alpha} \leq M_8(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \left| \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right| \tau \leq M_8(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \max_{0 \leq s \leq M} \left| \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right| \tau$$

elde edilebilir ve buradan da

$$\|J_4^k\|_{E'_\alpha} \leq M_8(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \quad (3.49)$$

kestirimi vardır.

J_5^k için kestirim, E'_α uzaylarında normun tanımı ve (3.45) denklemi kullanılarak

$$\|J_5^k\|_{E'_\alpha} = \left\| \sum_{m=1}^k (R^{k-m+1} - R^{k-m}) f^h(t_m) \right\|_{E'_\alpha} \leq M_{10}(\phi, \alpha, T) \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \quad (3.50)$$

elde edilir.

J_6^k için kestirimi verelim.

$$\|J_6^k\|_{E'_\alpha} = \left\| \frac{1}{q_s} \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) (\rho(t_k) - w_s^k) + f^h(t_k) \right\|_{E'_\alpha}$$

'dır.

$$w_s^k = w_s^0 + \sum_{j=1}^k \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \tau = \varphi(x_s) + \sum_{j=1}^k \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \tau \quad (3.51)$$

formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} \|J_6^k\|_{E'_\alpha} &\leq \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{11} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \right) \\ &+ \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

kestirimi yazılır. (3.39), (3.46), (3.48), (3.49), (3.50) ve (3.52) kestirimlerini birleştirirsek

$$\begin{aligned} \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} &\leq M_1 \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \max_{1 \leq m \leq N} \rho(t_m) M_8(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \\ &+ M_9(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \|A_h^x \varphi\|_{E'_\alpha} + M_8(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \\ &+ (M_{10}(\phi, \alpha, T) + 1) \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \\ &+ \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{11} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \right) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} &\leq (1 - (1 + M_8(\phi, \alpha, T)) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \tau)^{-1} \left[M_1 \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \right. \\ &+ \max_{1 \leq m \leq N} |\rho(t_m)| M_8(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} + M_9(\phi, \alpha, T) \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \|A_h^x \varphi\|_{E'_\alpha} \left. \right) \\ &+ (M_{10}(\phi, \alpha, T) + 1) \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{11} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \right) \\ &+ \|\tilde{a}\|_{E'_\alpha} (1 + M_8(\phi, \alpha, T)) \sum_{j=1}^{k-1} \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliği ve Gronwall eşitsizliğinin ayrık analogunu kullanarak her k ,

$1 \leq k \leq N$ için

$$\begin{aligned} \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} &\leq e^{M_{12}(\tilde{a}, \phi, \alpha, T)} \left[M_{13}(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + M_{13}(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right. \\ &+ M_{14}(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left. \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \right] \end{aligned}$$

olur. O zaman,

$$\left\| \left\{ \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \leq M_{15}(\tilde{\alpha}, \phi, \alpha, T) \left(\|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right)$$

'dir. Sıradaki teorem Teorem 3.8.'in ispatını tamamlar.

Teorem 3. 9. (Ashyralyev, 2007) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için, $E'_\alpha(C[0, l]_h, A_h^x)$ ve $C^{2\alpha}[0, l]_h$ uzaylarının normları denktir.

Not edelim ki, (3.26) çok boyutlu parabolik denkleminin sağ tarafının rekonstrüksiyonunun ters problemi için kurulan fark şemasının da iyi konumlanmışlığı benzer şekilde çalışılabilir.

(3.26) probleminin diskritizasyonu iki adımda gerçekleştirilir. Birinci adımda \mathbb{R}^n Öklit uzayında, koordinatları

$$x_n = s_n h, \quad s_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 1, \dots, m$$

formülü ile verilen bütün noktaların kümesi olan \mathbb{R}_h^n ($0 < h \leq h_0$) ağ uzayı tanımlanır.

$$B_h^x = h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} b_s^x \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \dots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}}$$

operatörü bütün \mathbb{R}_h^n uzayında tanımlı bütün fonksiyonlara etki eder. Burada, e_k x_k ekseninin birim vektörü olmak üzere, $s \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\Delta_{k\pm} f^h(x) = \pm (f^h(x \pm e_k h) - f^h(x))$$

negatif olmayan tamsayı koordinatlarına sahip vektördür.

$A^x(\xi h, h)$ fonksiyonu $\Delta_{k\pm}$ operatörünün $\pm(\exp\{\pm i\xi_k h\} - 1)$ ifadesi ile değiştirilmesi ile elde edilir ve B_h^x fark operatörünün sembolü olarak adlandırılır.

$|\xi_k h| \leq \pi$ ve sabit x için $B_h^x = A_h^x - \sigma I_h$ operatörünün $A^x(\xi h, h)$ sembolünün

$$(-1)^m A^x(\xi h, h) \geq M |\xi|^{2m}, |\arg A^x(\xi h, h)| \leq \phi < \phi_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

eşitsizliğini sağladığı varsayılacaktır. $B_h^x = A_h^x - \sigma I_h$ operatörünün b_s^x katsayısının sınırlı olduğu ve $\varepsilon \in (0, 1]$ sabit noktası için

$$|b_s^{x+e_k h} - b_s^x| \leq Mh^\varepsilon, x \in \mathbb{R}_h^n$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim.

İkinci adımda, (3.26) problemi yerine

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} = h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} b_s^x \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-1}^{s_{n-1}} \Delta_{n+}^{s_n} u_k^h(x) - \sigma u_k^h(x) \\ + p^k q^h(x) + f^h(t_k, x), x \in \mathbb{R}_h^n, p^k = p(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ u_n^0 = \varphi^h(x), x \in \mathbb{R}_h^n, \\ u^k(y) = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, y = \left\lfloor \frac{x^*}{h} \right\rfloor h \in \Omega \subset \mathbb{R}_h^n \end{cases} \quad (3.53)$$

fark şemasına konacaktır.

Sonuçlarımızı formüle etmek için, \mathbb{R}_h^n 'de tanımlı,

$$\|\phi^h\|_{C^\alpha(\mathbb{R}_h^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}_h^n} |\phi^h(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}_h^n \\ x \neq y}} \frac{|\phi^h(y) - \phi^h(x)|}{|y - x|^\alpha}$$

normuna sahip bütün sınırlı $\phi^h(x)$ ağ fonksiyonlarının oluşturduğu $\overset{\circ}{C}^\alpha(\mathbb{R}_h^n)$, $\alpha \in (0, 1)$,

Banach uzayını tanıtalım.

(3.53) probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine sıradaki teorem vardır.

Teorem 3.10. (3.53) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\overset{\circ}{C}^{2\alpha}(\mathbb{R}_h^n))} + \left\| \left\{ h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-1}^{s_{n-1}} \Delta_{n+}^{s_n} u_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\overset{\circ}{C}_h^{2\alpha}(\mathbb{R}_h^n))} \\ & \leq M(q, s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0, T]_\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left[\left\| h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} \varphi^h \right\|_{C^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}_h^n)} \right. \\
& \left. + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau \left(C_h^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}_h^n) \right)} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right], \\
\|p^\tau\|_{C[0, T]_\tau} & \leq M(q, s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0, T]_\tau} \\
& +M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left[\left\| h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} \varphi^h \right\|_{C^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}_h^n)} \right. \\
& \left. + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau \left(C_h^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}_h^n) \right)} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right]
\end{aligned}$$

koersif kararlılık kestirimlerini sağlar.

Teorem 3.10'un ispatı Teorem 3.7'nin ispatının izlediği şemayı izler ve aşağıda verilen teoremlere dayanır.

Teorem 3.11. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994) $0 < \alpha < \frac{1}{2m}$ ve $\mu \in (0, 1)$ belirteci için $E_\alpha(C^\mu(\mathbb{R}_h^n), A)$ ve $C^{\mu+2m\alpha}(\mathbb{R}_h^n)$ uzaylarının normları denktir.

Teorem 3.12. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994)

$$h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} b_s^x \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} u^h(x) - \sigma u^h(x) = \varphi^h(x), x \in \mathbb{R}_h^n$$

eliptik probleminin çözümü

$$\sum_{2m \leq |s| \leq S} \left\| h^{-2m} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} u^h \right\|_{C^\mu(\mathbb{R}_h^n)} \leq M(\mu) \|\varphi^h\|_{C^\mu(\mathbb{R}_h^n)}$$

koersif eşitsizliğini sağlar.

4. İKİNCİ DERECEDEKİ KARARLILIKLI FARK ŞEMASI

(3.1) probleminin yaklaşık çözümü için,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{a(x_n)}{2} \left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) \\
 -\sigma \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} + \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q_n + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
 p^k = p(t_k), q_n = q(x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\
 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\
 u_0^k = u_M^k, -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
 u_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M, \\
 u_s^k + \frac{u_{s+1}^k - u_s^k}{h} (x^* - sh) = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, 0 \leq s = \left\lfloor \frac{x^*}{h} \right\rfloor \leq M
 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$q_s, q_{s+1} \neq 0, q_0 = q_M$ ve $-3q_0 + 4q_1 - q_2 = q_{M-2} - 4q_{M-1} + 3q_M$ kabul edilmek üzere, Crank-Nicholson fark şemasını kuralım. O zaman, (4.1) probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 4.1. (4.1) probleminin çözümü için

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left\{ \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \left\| \{D_h^2 u_k^h\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} \leq M(q, s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0, T]_\tau} \\
 & + M(\tilde{b}, \phi, \alpha, T) \left(\left\| D_h^2 \varphi^h \right\|_{\dot{C}_h^{2\alpha}} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right), \\
 & \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \leq M(q, s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0, T]_\tau} \\
 & + M(\tilde{b}, \phi, \alpha, T) \left[\left\| D_h^2 \varphi^h \right\|_{\dot{C}_h^{2\alpha}} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\dot{C}_h^{2\alpha})} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right]
 \end{aligned}$$

koersif kararlılık kestirimleri vardır. Burada, $f^h(t_k) = \{f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n)\}_{n=1}^{M-1}$,

$\varphi^h = \{\varphi(x_n)\}_{n=1}^{M-1}$ ve $\rho^\tau = \{\rho(t_k)\}_{k=0}^N$ 'tir.

İspat. (4.1)'in çözümünü

$$\eta^k = \sum_{i=1}^k \frac{p^i + p^{i-1}}{2} \tau, 1 \leq k \leq N, \eta^0 = 0$$

olmak üzere,

$$u_n^k = \eta^k q_n + w_n^k \quad (4.2)$$

formunda arayacağız. (4.2)'den fark türevleri alınca, herhangi $k, 1 \leq k \leq N$ ve $n, 1 \leq n \leq M - 1$ için

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{\eta^k - \eta^{k-1}}{2\tau} q_n + \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau} = \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q_n + \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau}$$

ve

$$\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = \eta^k \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} + \frac{w_{n+1}^k - 2w_n^k + w_{n-1}^k}{h^2}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$u_s^k + \frac{u_{s+1}^k - u_s^k}{h} (x^* - sh) = \eta^k \left(\left(1 - \frac{x^* - sh}{h} \right) q_s + \frac{x^* - sh}{h} q_{s+1} \right) \\ + \left(1 - \frac{x^* - sh}{h} \right) w_s^k + \frac{x^* - sh}{h} w_{s+1}^k = \rho(t_k)$$

'tir. $y = \frac{x^* - sh}{h} = \frac{x^*}{h} - \left\lfloor \frac{x^*}{h} \right\rfloor$ olarak ifade edelim. Tamdeğer fonksiyonunun tanımından,

$0 \leq y < 1$ 'dir. O zaman,

$$\eta^k = \frac{\rho(t_k) - (1-y)w_s^k - yw_{s+1}^k}{(1-y)q_s + yq_{s+1}}$$

yazabiliriz. Son eşitlikten, fark türevi alınınca

$$p^k = \frac{\frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} - (1-y) \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} - y \frac{w_{s+1}^k - w_{s+1}^{k-1}}{\tau}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} \quad (4.3)$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak, herhangi $k, 1 \leq k \leq N$ için

$$\begin{aligned} |p^k| &\leq M_1(q, s) \left(\left| \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right| + \left| \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} \right| + \left| \frac{w_{s+1}^k - w_{s+1}^{k-1}}{\tau} \right| \right) \\ &\leq M_2(q, s) \left(\max_{1 \leq k \leq N} \left| \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right| + \max_{1 \leq k \leq N} \max_{0 \leq s \leq M} \left| \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} \right| \right) \\ &\leq M_2(q, s) \left(\max_{1 \leq k \leq N} \left| \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right| + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{C_h^{\circ 2\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde ederiz. Burada, $\{w_k^h\}_{k=0}^N$

$$\begin{cases} \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau} = \frac{a(x_n)}{2} \left(\frac{w_{n+1}^k - 2w_n^k + w_{n-1}^k}{h^2} + \frac{w_{n+1}^{k-1} - 2w_n^{k-1} + w_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) \\ + \frac{a(x_n)}{2} \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} \left(\frac{\rho(t_k) - (1-y)w_s^k - yw_{s+1}^k}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} + \frac{\rho(t_{k-1}) - (1-y)w_s^{k-1} - yw_{s+1}^{k-1}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} \right) \\ - \frac{\sigma q_n}{2} \left(\frac{\rho(t_k) - (1-y)w_s^k - yw_{s+1}^k}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} + \frac{\rho(t_{k-1}) - (1-y)w_s^{k-1} - yw_{s+1}^{k-1}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} \right) - \sigma \frac{w_n^k + w_n^{k-1}}{2} \\ + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\ w_0^k = w_M^k, -3w_0^k + 4w_1^k - w_2^k = w_{M-2}^k - 4w_{M-1}^k + 3w_M^k, 0 \leq k \leq N, \\ w_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M \end{cases} \quad (4.5)$$

fark şemasının çözümüdür. Dolayısıyla Teorem 4.1'in ispatının sonu, (4.4) kestirimine ve takip eden teoreme dayanmaktadır.

Teorem 4.2. (4.5) probleminin çözümü için,

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau \left(C_h^{\circ 2\alpha} \right)} \\ &\leq M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left(\left\| \varphi^h \right\|_{C_h^{\circ 2\alpha}} + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau \left(C_h^{\circ 2\alpha} \right)} + \left\| \rho^\tau \right\|_{C[0, T]_\tau} \right) \end{aligned}$$

koersif kararlılık kestirimi vardır.

İspat. (4.5) fark şemasını $E = \overset{\circ}{C}[0, l]_h$ Banach uzayında, (3.35)'te tanımlanan A_h^x pozitif operatörünün yardımıyla,

$$\mu_s^k = \frac{\rho(t_k) - (1-y)w_s^k - yw_{s+1}^k}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} + \frac{\rho(t_{k-1}) - (1-y)w_s^{k-1} - yw_{s+1}^{k-1}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}}$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} + A_h^x \left(\frac{w_k^h + w_{k-1}^h}{2} \right) = \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\mu_s^k}{2} \\ + f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ w_0^h = \varphi^h \end{cases} \quad (4.6)$$

abstrakt halinde yazmak mümkündür.

$R = (I + \frac{\tau}{2} A_h^x)^{-1} (I - \frac{\tau}{2} A_h^x)$ ve $C = (I + \frac{\tau}{2} A_h^x)^{-1}$ olarak ifade edelim. O zaman, $\forall k, 1 \leq k \leq N$ için (4.6)'dan

$$w_k^h = R w_{k-1}^h + C \tau \left(\left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\mu_s^k}{2} + f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right),$$

olur ve yineleme bağıntısı ile

$$w_k^h = R^k \varphi^h + \sum_{m=1}^k R^{k-m} C \tau \left(\left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\mu_s^m}{2} + f^h \left(t_m - \frac{\tau}{2} \right) \right)$$

elde edilir. Her iki tarafında fark türevini alınca

$$\begin{aligned} \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} &= \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h + C \left(\left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\mu_s^k}{2} + f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right) \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(\left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\mu_s^m}{2} + f^h \left(t_m - \frac{\tau}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. μ_s^k 'i

$$\mu_s^k = \frac{\rho(t_k) + \rho(t_{k-1})}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} - \frac{(1-y)w_s^k + yw_{s+1}^k + (1-y)w_s^{k-1} + yw_{s+1}^{k-1}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}}$$

ifadesi ile yer değiştirince ve (3.36) formülünü uygulayınca, (4.5) problemi için

$$\begin{aligned} \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} &= \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h + Cf^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \\ &+ C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_k) + \rho(t_{k-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\ &- C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{(1-y)w_s^k + yw_{s+1}^k + (1-y)w_s^{k-1} + yw_{s+1}^{k-1}}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_m) + \rho(t_{m-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\ &- \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\varphi(x_s)}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\ &- \sum_{j=m=j}^{k-1} \sum_{m=j}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \\ &\times \frac{(1-y)(w_s^j - w_s^{j-1}) + y(w_{s+1}^j - w_{s+1}^{j-1}) + (1-y)(w_s^{j-1} - w_s^{j-2}) + y(w_{s+1}^{j-1} - w_{s+1}^{j-2})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) Cf^h \left(t_m - \frac{\tau}{2} \right) = \sum_{k=1}^6 J_k \end{aligned}$$

gösterilişini elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned} J_1^k &= \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h, \\ J_2^k &= \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_m) + \rho(t_{m-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})}, \\ J_3^k &= - \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\varphi(x_s)}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})}, \\ J_4^k &= - \sum_{j=m=j}^{k-1} \sum_{m=j}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \\ &\times \frac{(1-y)(w_s^j - w_s^{j-1}) + y(w_{s+1}^j - w_{s+1}^{j-1}) + (1-y)(w_s^{j-1} - w_s^{j-2}) + y(w_{s+1}^{j-1} - w_{s+1}^{j-2})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_5^k &= \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) Cf^h \left(t_m - \frac{\tau}{2} \right), \\
J_6^k &= C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_k) + \rho(t_{k-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\
&\quad - C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{(1-y)w_s^k + yw_{s+1}^k + (1-y)w_s^{k-1} + yw_{s+1}^{k-1}}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \\
&\quad + Cf^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right)
\end{aligned}$$

'tir. Şimdi, herhangi $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için J_r^k 'in kestirimlerini ayrı ayrı yapalım. Öncelikle, ispatlarımız sırasında ihtiyaç duyacağımız kestirimleri verelim. (Ashyralyev, Sobolevskii, 2004).

$$\|R^k\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \leq \|R^k\|_{E \rightarrow E} \leq M, 1 \leq k \leq N, \quad (4.7)$$

$$\|R^k C\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \leq \|R^k C\|_{E_\alpha \rightarrow E_\alpha} \leq M, 0 \leq k \leq N, \quad (4.8)$$

$$\|AR^k C^2\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M}{k\tau}, 1 \leq k \leq N \quad (4.9)$$

'dir. J_1^k ile başlayalım.

$$R^{k-m+1} - R^{k-m} = R^{k-m} (R - I) = R^{k-m} CA_h^x \tau \quad (4.10)$$

olduğunu biliyoruz. O zaman, E'_α uzaylarında normun tanımını ve (4.8) ve (4.10) kestirimlerini kullanarak, herhangi $k, 1 \leq k \leq N$ için

$$\begin{aligned}
\|J_1^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| \frac{R^k - R^{k-1}}{\tau} \varphi^h \right\|_{E'_\alpha} = \|R^{k-1} CA_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \\
&\leq \|R^{k-1} C\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \leq M_1 \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha}
\end{aligned} \quad (4.11)$$

elde ederiz. Şimdi J_2^k için kestirimimizi verelim. (4.10)'u kullanarak

$$\begin{aligned}
\|J_2^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_m) + \rho(t_{m-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right\|_{E'_\alpha} \\
&= \left\| \sum_{m=1}^{k-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_m) + \rho(t_{m-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right\|_{E'_\alpha} \\
&\leq \frac{\max_{1 \leq m \leq N} |\rho(t_m)|}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \sum_{m=1}^k \left\| R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \right\|_{E'_\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{b} = a \frac{q_{n+1}-2q_n+q_{n-1}}{h^2} - \sigma q$ olarak atayalım. E'_α uzaylarının normunun tanımını kullanarak,

$$\left\| \sum_{m=1}^{k-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b} \right\|_{E'_\alpha} \leq \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b}\|_E + \sup_{\lambda>0} \sum_{m=1}^{k-1} \|\lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b}\|_E$$

elde ederiz. Şimdi her terim için tek tek kestirimleri oluşturalım. (4.9)'u kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b}\|_E &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m} (A_h^x)^{1-\alpha} C^2\|_{E \rightarrow E} \|(A_h^x)^\alpha \tilde{b}\|_E \tau \\ &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{M}{(k-m)^{(1-\alpha)} \tau} \|(A_h^x)^\alpha \tilde{b}\|_E \leq M_2 \|(A_h^x)^\alpha \tilde{b}\|_E \end{aligned}$$

olur. (Ashyralyev, 2009)'de verilen

$$A^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} (sI + A)^{-1} f(x) ds$$

formülünü uygularsak,

$$\begin{aligned} A^{\frac{\alpha}{2}} u &= A A^{-(1-\frac{\alpha}{2})} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-(1-\frac{\alpha}{2})} s^{-\alpha} s^\alpha A (sI + A)^{-1} u ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_1^\infty \frac{1}{s^{1-\frac{\alpha}{2}}} s^\alpha A (sI + A)^{-1} u ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{s^{1-\frac{\alpha}{2}}} A (sI + A)^{-1} u ds \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\|A^{\frac{\alpha}{2}} u\|_E \leq M(\alpha) \int_1^\infty \frac{1}{s^{1-\frac{\alpha}{2}}} ds \|u\|_{E_\alpha} + M(\alpha) \int_0^1 \frac{1}{s^{1-\frac{\alpha}{2}}} ds \|u\|_E \leq M \|u\|_{E_\alpha}$$

'dir. Son eşitsizliği kullanarak,

$$\sum_{m=1}^{k-1} \|R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b}\|_E \leq M_3 \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \quad (4.12)$$

yazılır. Şimdi ikinci terime bakalım. Cauchy-Riesz formülünü (2.3) kullanarak

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{k-1} \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{k-m} \frac{2z}{(1+z)^2} \frac{\lambda^\alpha}{\left(z + \frac{\lambda\tau}{2}\right)} \left(\frac{2z}{\tau} - A_h^x \right)^{-1} A_h^x \tilde{b} dz \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, $z = \rho e^{\pm i\phi}$, $|\phi| = \text{sabit} \leq \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq \rho < \infty$ 'tir. Ayrıca

$$\frac{1}{\left|z + \frac{\lambda\tau}{2}\right|} \leq \frac{M}{\rho + \frac{\lambda\tau}{2}}, \quad \left(\left| \frac{1-z}{1+z} \right| \right)^{k-m} = \left(\frac{1 - 2\rho \cos \phi + \rho^2}{1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2} \right)^{\frac{k-m}{2}}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{m=1}^{k-1} \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b} \right\|_E \\ & \leq M_3 \int_0^\infty \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1 - 2\rho \cos \phi + \rho^2}{1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2} \right)^{\frac{k-m}{2}} \frac{\rho^{1-\alpha}}{1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2} \frac{\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)^\alpha d\rho}{\left(\rho + \frac{\lambda\tau}{2}\right) \rho^\alpha} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Geometrik diziyi toplarsak,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{m=1}^{k-1} \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b} \right\|_E \leq M_4 \int_0^\infty \sum_{m=1}^k \frac{\rho^{1-\alpha}}{1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2} \\ & \times \left(1 - \frac{1}{\left[1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \frac{(\lambda\tau)^\alpha d\rho}{\left(\rho + \frac{\lambda\tau}{2}\right) \rho^\alpha} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı da herhangi $\lambda > 0$ için

$$\left\| \sum_{m=1}^{k-1} \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b} \right\|_E \leq \frac{M_5}{\alpha(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^\alpha \varkappa(\rho) d\rho}{\left(\rho + \frac{\lambda\tau}{2}\right) \rho^\alpha} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha}$$

'tir. Dolayısıyla,

$$\sup_{\lambda > 0} \left\| \sum_{m=1}^{k-1} \lambda^\alpha A_h^x (\lambda + A_h^x)^{-1} R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b} \right\|_E \leq \frac{M_5}{\alpha(1-\alpha)} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \quad (4.13)$$

olur. (4.12) ve (4.13)'ü kullanarak,

$$\sum_{m=1}^k \|R^{k-m} A_h^x C^2 \tau \tilde{b}\|_{E'_\alpha} \leq M_6(\alpha) \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha}, \quad (4.14)$$

$$\|J_2^k\|_{E'_\alpha} \leq \frac{\max_{1 \leq m \leq N} |\rho(t_m)|}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} M_6(\alpha) \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \quad (4.15)$$

elde ederiz.

Şimdi, J_3^k 'yi inceleyelim.

$$\begin{aligned} \|J_3^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\varphi(x_s)}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right\|_{E'_\alpha} \\ &\leq \sum_{m=1}^k \left\| (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \tilde{b} \right\|_{E'_\alpha} \frac{|\varphi(x_s)|}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \end{aligned}$$

'tir. (3.47) ve (4.14)'ü kullanarak,

$$\|J_3\|_{E'_\alpha} \leq \frac{M_7(\alpha)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \quad (4.16)$$

elde ederiz. J_4^k 'ün kestirimini ise şu şekilde verebiliriz:

$$\begin{aligned} J_4^k &= \left\| \sum_{j=m=j}^{k-1} \sum_{m=j}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(1-y) \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \quad \tau + y \frac{w_{s+1}^j - w_{s+1}^{j-1}}{\tau} \quad \tau + (1-y) \frac{w_s^{j-1} - w_s^{j-2}}{\tau} \quad \tau + y \frac{w_{s+1}^{j-1} - w_{s+1}^{j-2}}{\tau}}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right\|_{E'_\alpha} \\ &\leq \frac{M_8(y)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^k \left\| (R^{k-m+1} - R^{k-m}) \tilde{b} \right\|_{E'_\alpha} \left| \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right| \tau \end{aligned}$$

'tir. (3.45) denklemini kullanırsak, herhangi i , $1 \leq j \leq m \leq k$ için

$$\begin{aligned} \|J_4^k\|_{E'_\alpha} &\leq \frac{M_9(\alpha, y)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \left| \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right| \tau \\ &\leq \frac{M_9(\alpha, y)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \max_{0 \leq s \leq M} \left| \frac{w_s^j - w_s^{j-1}}{\tau} \right| \tau \end{aligned}$$

olur. Buradan da,

$$\|J_4^k\|_{E'_\alpha} \leq \frac{M_9(\alpha, y)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \quad (4.17)$$

elde edilir.

Şimdi E'_α uzaylarında normun tanımını ve (3.45) denklemini kullanarak, J_5^k için

$$\|J_5^k\|_{E'_\alpha} = \left\| \sum_{m=1}^{k-1} (R^{k-m} - R^{k-m-1}) C f^h \left(t_m - \frac{\tau}{2} \right) \right\|_{E'_\alpha} \leq M_{10}(\alpha) \left\| \left\{ f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \quad (4.18)$$

kestirimini verebiliriz.

J_6^k 'nin kestirimini verelim.

$$\begin{aligned} \|J_6^k\|_{E'_\alpha} &= \left\| C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{\rho(t_k) + \rho(t_{k-1})}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right. \\ &\quad \left. - C \left(a \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} - \sigma q \right) \frac{(1-y)w_s^k + yw_{s+1}^k + (1-y)w_s^{k-1} + yw_{s+1}^{k-1}}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} + C f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right\|_{E'_\alpha} \end{aligned}$$

'tir. (3.51) formülünü kullanarak,

$$\begin{aligned} \|J_6^k\|_{E'_\alpha} &\leq \frac{M_{11}}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|C\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \\ &\times \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{12} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \right) \\ &+ \|C\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \left\| \left\{ f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)}. \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da,

$$\begin{aligned} \|J_6^k\|_{E'_\alpha} &\leq \frac{M_{11} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha}}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{12} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \right) \\ &+ \left\| \left\{ f^h(t_k) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

olur.

(4.11), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) ve (4.19) kestirimlerini birleştirince

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \leq M_1 \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \frac{\max_{1 \leq m \leq N} |\rho(t_m)|}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} M_6(\alpha) \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \\
& + \frac{M_7(\alpha)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \frac{M_9(\alpha, y)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \\
& + (1 + M_{10}(\alpha)) \left\| \left\{ f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \\
& + \frac{M_{11} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha}}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{12} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \sum_{j=1}^k \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \right)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \leq \left(1 - \left(\frac{M_9(\alpha, y)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} + \frac{M_{11}}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \right) \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \tau \right)^{-1} \left[M_1 \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \right. \\
& + \left. \frac{\max_{1 \leq m \leq N} |\rho(t_m)|}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} M_6(\alpha) \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} + \frac{M_7(\alpha)}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \right) \\
& + (1 + M_{10}(\alpha)) \left\| \left\{ f^h \left(t_k - \frac{\tau}{2} \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \\
& + \frac{M_{11} \|\tilde{b}\|_{E'_\alpha}}{\min\{|q_s|, |q_{s+1}|\}} \left(\max_{1 \leq k \leq N} |\rho(t_k)| + M_{12} \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} \sum_{j=1}^{k-1} \left\| \frac{w_j^h - w_{j-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \tau \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliği ve Gronwall eşitsizliğinin ayrık analogunu kullanıldığında, her k , $1 \leq k \leq N$ için

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{E'_\alpha} \leq e^{M_{13}(\tilde{b}, \phi, \alpha, T)} \left[M_{14}(\tilde{b}, \phi, \alpha, T) \|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + M_{14}(\tilde{b}, \phi, \alpha, T) \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right. \\
& \left. + M_{15}(\tilde{b}, \phi, \alpha, T) \left\| \left\{ f^h(t_k) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \right]
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\{ \frac{w_k^h - w_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \leq M_{16}(\tilde{b}, \phi, \alpha, T) \\
& \times \left(\|A_h^x \varphi^h\|_{E'_\alpha} + \left\| \left\{ f^h(t_k) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right)
\end{aligned}$$

ispat edilmiş olur. Teorem 3.9, Teorem 4.2.'nin ispatını tamamlar.

(3.26) çok boyutlu parabolik denkleminin sağ tarafının rekonstrüksiyonunun ters problemi için kurulan fark şemasının da iyi konumlanmışlığı benzer şekilde çalışılabilir.

(3.26) probleminin diskritizasyonu iki adımda gerçekleştirilir. Birinci adımda, bir önceki bölümde tanımlanmış olan \mathbb{R}_h^n ($0 < h \leq h_0$) ağ uzayı ifade edilir.

İkinci adımda ise, (3.26) probleminin yerine

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} = h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} b_s^x \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} \frac{u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{2} \\ -\sigma \frac{u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{2} + \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q^h(x) + f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), x \in \mathbb{R}_h^n, \\ p^k = p(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ u_n^0 = \varphi^h(x), x \in \mathbb{R}_h^n, \\ u^k(y) + \frac{u^k(y+h) - u^k(y)}{h} (x^* - y) = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, \\ y = \lfloor \frac{x^*}{h} \rfloor h \in \Omega \subset \mathbb{R}_h^n \end{array} \right. \quad (4.20)$$

fark şeması ele alınır.

(4.20) probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine sıradaki teorem vardır.

Teorem 4.4. (4.20) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\overset{\circ}{C}^{2\alpha}(\mathbb{R}_h^n))} + \left\| \left\{ h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} u_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\overset{\circ}{C}_h^{2\alpha}(\mathbb{R}_h^n))} \\ & \leq M(q, s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0, T]_\tau} \\ & + M(\tilde{\alpha}, \phi, \alpha, T) \left[\left\| h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} \varphi^h \right\|_{\overset{\circ}{C}^{2\alpha}(\mathbb{R}_h^n)} \right. \\ & \left. + \left\| \left\{ f^h(t_k) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\overset{\circ}{C}_h^{2\alpha}(\mathbb{R}_h^n))} + \|\rho^\tau\|_{C[0, T]_\tau} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|p^\tau\|_{C[0,T]_\tau} \leq M(q,s) \left\| \left\{ \frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} \right\}_{k=1}^N \right\|_{C[0,T]_\tau} \\
& + M(\tilde{a}, \phi, \alpha, T) \left[\left\| h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \dots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} \varphi^h \right\|_{C^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}_h^n)} \right. \\
& \left. + \left\| \{f^h(t_k)\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau(\mathring{C}_h^{\circ 2\alpha}(\mathbb{R}_h^n))} + \|\rho^\tau\|_{C[0,T]_\tau} \right]
\end{aligned}$$

koersif kararlılık kestirimlerini sağlar.

Teorem 4.4'ün ispatı Teorem 4.1'in ispatının şemasını izler ve Teorem 3.11 ve 3.12'ye dayanmaktadır.

5. SAYISAL SONUÇLAR

5.1. Lokal Olmayan Koşullu Parabolik Denklem

Kararlılık eşitsizliklerinde ortaya çıkan katsayılar için kati kestirimler yapmamız mümkün olamamaktadır. Bu yüzden,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - u(t,x) + p(t) \cos(2x) + f(t,x), \\ f(t,x) = (4e^{-t} - t^2 - 1) \cos(2x), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0,1], \\ u(0,x) = \cos(2x), \quad x \in [0, \pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi), \quad u_x(t,0) = u_x(t,\pi), \quad t \in [0,1], \\ u(t, \frac{1}{4}) = \cos(\frac{1}{2})e^{-t} \end{cases} \quad (5.1)$$

problemini ele alarak, bu örnek üzerinden sayısal deney ile sonuçları ele alacağız. (5.1)

probleminin gerçek çözümü $u(t,x) = e^{-t} \cos(2x)$ ve kontrol parametresi $p(t)$ de $1 + t^2$ 'dir.

5.1.1 Fark şemaları

5.1.1.1 Birinci dereceden kararlılıklı fark şeması

(5.1)'in yaklaşık çözümü için, Rothe fark şeması (3.27)'nin uygulanması ile

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k + p^k q_n + f(t_k, x_n), \\ f(t_k, x_n) = (4e^{-t_k} - t_k^2 - 1) \cos 2x_n, \\ p^k = p(t_k), q_n = \cos(2x_n), x_n = nh, \quad t_k = k\tau, \\ 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = \pi, N\tau = T, \\ u_n^0 = \cos(2x_n), \quad 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_M^k, -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k, 0 \leq k \leq N, \\ u_s^k = \rho(t_k), \rho(t_k) = \cos(\frac{1}{2})e^{-t_k}, 0 \leq k \leq N, s = \lceil \frac{1}{4h} \rceil \end{cases} \quad (5.2)$$

fark şeması kurulur.

Ağ noktalarındaki $p(t_k)$ değerleri, (3.31) denklemini yardımıyla

$$p^k = \frac{1}{\cos(2x_s)} \left(\frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} - \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} \right), 1 \leq k \leq N, \quad (5.3)$$

elde edilir. Burada $w_s^r, r = k, k-1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau} = \frac{w_{n+1}^k - 2w_n^k + w_{n-1}^k}{h^2} + \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{\cos(2x_s)} \frac{\cos(2x_{n+1}) - 2\cos(2x_n) + \cos(2x_{n-1})}{h^2} \\ - \frac{\rho(t_k) - w_s^k}{\cos(2x_s)} \cos(2x_n) - w_n^k + f(t_k, x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\ 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\ w_0^k = w_M^k, -3w_0^k + 4w_1^k - w_2^k = 3w_{M-2}^k - 4w_{M-1}^k + w_M^k, 0 \leq k \leq N, \\ w_n^0 = \cos(2x_n), 0 \leq n \leq M \end{array} \right. \quad (5.4)$$

fark şemasının çözümünden elde edilmektedir. (5.4) fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{h^2} \right) w_{n+1}^k + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) w_n^k + \left(-\frac{1}{h^2} \right) w_{n-1}^k + \left(-\frac{1}{\tau} \right) w_n^{k-1} \\ + \left(\frac{\cos(2x_{n+1}) - 2\cos(2x_n) + \cos(2x_{n-1})}{\cos(2x_s)h^2} - \frac{\cos(2x_n)}{\cos(2x_s)} \right) w_s^k \\ = \frac{\rho(t_k)}{\cos(2x_s)} \frac{\cos(2x_{n+1}) - 2\cos(2x_n) + \cos(2x_{n-1})}{h^2} - \frac{\rho(t_k)}{\cos(2x_s)} \cos(2x_n) + f(t_k, x_n), \\ \rho(t_k) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)e^{-t_k}, f(t_k, x_n) = (4e^{-t_k} - t_k^2 - 1)\cos 2x_n, \\ x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\ w_0^k = w_M^k, -3w_0^k + 4w_1^k - w_2^k = w_{M-2}^k - 4w_{M-1}^k + 3w_M^k, 0 \leq k \leq N, \\ w_n^0 = \cos(x_n), 0 \leq n \leq M \end{array} \right.$$

şeklinde düzenlenebilir. İlk olarak, (5.4) fark şemasını uygulayarak, $(M+1) \times (M+1)$ boyutunda lineer denklem sistemi elde ederiz ve

$$Aw^k + Bw^{k-1} = D\varphi^k, \quad 1 \leq k \leq N, w^0 = \{\cos 2x_n\}_{n=0}^M \quad (5.5)$$

matris formunda yazabiliriz. Burada,

$$x = -\frac{1}{h^2}, \quad y = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1, \quad v = -\frac{1}{\tau},$$

$$z_c = \frac{\cos(2x_{c+1}) - 2\cos(2x_c) + \cos(2x_{c-1})}{\cos(2x_s)h^2} - \frac{\cos(2x_c)}{\cos(2x_s)}, \quad (s+1). \text{ sütunda}$$

olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & -1 \\ x & y & x & 0 & \cdot & z_1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & x & \cdot & z_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & z_{n-1} & \cdot & x & y & x \\ -3 & 4 & -1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$w^r = \begin{bmatrix} w_0^r \\ \vdots \\ w_M^r \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1} \quad r = k + 1, k, \text{ için,}$$

$$\varphi^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1^k \\ \vdots \\ \phi_{M-1}^k \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1},$$

$$\phi_n^k = \frac{\rho(t_k)}{\cos(2x_s)} \frac{\cos(2x_{n+1}) - 2\cos(2x_n) + \cos(2x_{n-1})}{h^2} - \frac{\rho(t_k)}{\cos(2x_s)} \cos(2x_n) + f(t_k, x_n)$$

'dir ve $D (M + 1) \times (M + 1)$ 'lik birim matristir. (5.5)'i kullanarak

$$w^k = A^{-1} (D\varphi^k - Bw^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad w^0 = \{\cos 2x_n\}_{n=0}^M \quad (5.6)$$

yazılabilir. Buradan da $w_n^k, 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M$ çözümlerine ulaşılır. Ardından, birinci

dereceden kararlılık fark şeması (5.2)'yi ve (5.3)'ü kullanarak, tekrar $(M + 1) \times (M + 1)$

boyutunda yeni bir lineer denklem sistemine ulaşırız ve bu sistemi matris formunda

$$A_2 u^k + B_2 u^{k-1} = D\varphi^k, 1 \leq k \leq N, u^0 = \{\cos 2x_n\}_{n=0}^M$$

olarak yazabiliriz. Burada da x, y ve v aynı katsayılar olmak üzere, benzer şekilde

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -1 \\ x & y & x & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & x & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & x & y & x \\ -3 & 4 & -1 & 0 & \cdot & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$u^r = \begin{bmatrix} u_0^r \\ \vdots \\ u_M^r \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, r = k + 1, k, \text{ için}$$

$$\varphi^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1^k \\ \vdots \\ \phi_{M-1}^k \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1},$$

$$\phi_n^k = p^k q_n + f(t_k, x_n)$$

olur. Oluşan fark denklemini çözmek için, yine (5.6)'da verilen iteratif metot uygulanır.

5.1.1.2 Crank-Nicholson fark şeması

(5.1) probleminin yaklaşık çözümü için Crank-Nicholson fark şeması (4.1)'i uygulayarak,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{2h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{2h^2} - \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} + \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q_n \\
+f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), f(t_k, x_n) = (4e^{-t_k} - t_k^2 - 1) \cos 2x_n, \\
p^k = p(t_k), q_n = \cos(2x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\
1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = \pi, N\tau = T, \\
u_n^0 = \cos(2x_n), 0 \leq n \leq M, \\
u_0^k = u_M^k, -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
u_s^k + \frac{u_{s+1}^k - u_s^k}{h} (x^* - sh) = \rho(t_k), \rho(t_k) = \cos(\frac{1}{2})e^{-t_k}, 0 \leq k \leq N, s = \lfloor \frac{1}{4h} \rfloor
\end{array} \right. \quad (5.7)$$

kurulur.

(5.7)'de ağ noktalarında $p(t_k)$ değerleri (4.3) denklemi sayesinde

$$p^k = \frac{\frac{\rho(t_k) - \rho(t_{k-1})}{\tau} - (1-y) \frac{w_s^k - w_s^{k-1}}{\tau} - y \frac{w_{s+1}^k - w_{s+1}^{k-1}}{\tau}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}}, 1 \leq k \leq N \quad (5.8)$$

formülü ile elde edilir. Burada $y = \frac{x^* - sh}{h}$ 'dir ve

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{w_n^k - w_n^{k-1}}{\tau} = \frac{w_{n+1}^k - 2w_n^k + w_{n-1}^k}{2h^2} + \frac{w_{n+1}^{k-1} - 2w_n^{k-1} + w_{n-1}^{k-1}}{2h^2} \\
+ \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{2h^2} \left(\frac{\rho(t_k) - (1-y)w_s^k - yw_{s+1}^k}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} + \frac{\rho(t_{k-1}) - (1-y)w_s^{k-1} - yw_{s+1}^{k-1}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} \right) \\
- \frac{q_n}{2} \left(\frac{\rho(t_k) - (1-y)w_s^k - yw_{s+1}^k}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} + \frac{\rho(t_{k-1}) - (1-y)w_s^{k-1} - yw_{s+1}^{k-1}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} \right) - \frac{w_n^k + w_n^{k-1}}{2} \\
+f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\
w_0^k = w_M^k, -3w_0^k + 4w_1^k - w_2^k = 3w_{M-2}^k - 4w_{M-1}^k + w_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
w_n^0 = \cos(2x_n), 0 \leq n \leq M.
\end{array} \right. \quad (5.9)$$

fark şemasının çözümünden elde edilir. (5.9) fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(-\frac{1}{2h^2}\right)w_{n+1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)w_n^{k-1} + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)w_{n-1}^{k-1} \\
+ \left(-\frac{1}{2h^2}\right)w_{n+1}^k + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)w_n^k + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)w_{n-1}^k \\
+ \left(\frac{(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})(1-y)}{2h^2((1-y)q_s+yq_{s+1})} + \frac{q_n(1-y)}{2((1-y)q_s+yq_{s+1})}\right)w_s^k + \left(\frac{(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})y}{2h^2((1-y)q_s+yq_{s+1})} + \frac{q_n y}{2((1-y)q_s+yq_{s+1})}\right)w_{s+1}^k \\
+ \left(\frac{(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})(1-y)}{2h^2((1-y)q_s+yq_{s+1})} + \frac{q_n(1-y)}{2((1-y)q_s+yq_{s+1})}\right)w_s^{k-1} + \left(\frac{(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})y}{2h^2((1-y)q_s+yq_{s+1})} + \frac{q_n y}{2((1-y)q_s+yq_{s+1})}\right)w_{s+1}^{k-1} \\
= \frac{\frac{(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})}{2h^2} - \frac{q_n}{((1-y)q_s+yq_{s+1})}}{2}(\rho(t_k) + \rho(t_{k-1})) + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
\rho(t_k) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)e^{-t_k}, f(t_k, x_n) = (4e^{-t_k} - t_k^2 - 1)\cos 2x_n, \\
x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\
w_0^k = w_M^k, -3w_0^k + 4w_1^k - w_2^k = w_{M-2}^k - 4w_{M-1}^k + 3w_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
w_n^0 = \cos(x_n), 0 \leq n \leq M.
\end{array} \right.$$

şeklinde düzenlenebilir ve ilk olarak ikinci dereceden kararlılıklı fark şeması (5.9)'u çözmek istersek, $(M+1) \times (M+1)$ boyutunda lineer denklem sistemi elde ederiz ve bu sistemi

$$Aw^k + Bw^{k-1} = D\varphi^k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad w^0 = \{\cos 2x_n\}_{n=0}^M$$

matris formunda yazabiliriz. Burada,

$$a = -\frac{1}{2h^2}, \quad b = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2},$$

$$z_n = \left(\frac{(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})(1-y)}{2h^2((1-y)q_s + yq_{s+1})} + \frac{q_n(1-y)}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right), \quad (s+1). \text{ sütunda,}$$

$$j_n = \left(\frac{(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})y}{2h^2((1-y)q_s + yq_{s+1})} + \frac{q_n y}{2((1-y)q_s + yq_{s+1})} \right), \quad (s+2). \text{ sütunda}$$

olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -1 \\ a & b & a & 0 & \cdot & z_1 & \dot{j}_1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \cdot & z_2 & \dot{j}_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & z_{n-1} & \dot{j}_{n-1} & \cdot & a & b & a \\ -3 & 4 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a & v & a & \cdot & z_1 & \dot{j}_1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdot & z_2 & \dot{j}_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & z_{n-1} & \dot{j}_{n-1} & \cdot & a & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$w^r = \begin{bmatrix} w_0^r \\ \vdots \\ w_M^r \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, r = k + 1, k \text{ için},$$

$$\varphi^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1^k \\ \vdots \\ \phi_{M-1}^k \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1},$$

$$\phi_n^k = \frac{(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - \frac{q_n}{2}}{(1-y)q_s + yq_{s+1}} (\rho(t_k) + \rho(t_{k-1})) + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right),$$

$$\rho(t_k) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)e^{-t_k}, f(t_k, x_n) = (4e^{-t_k} - t_k^2 - 1) \cos 2x_n,$$

olup, D ise $(M+1) \times (M+1)$ 'lik birim matristir. (5.6)'da verilen iteratif metot sayesinde $w_n^k, 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M$ çözümüne ulaşabiliriz. İkinci dereceden kararlılıklı fark şeması

(5.7) ve (5.8) denklemini kullanarak, $(M + 1) \times (M + 1)$ boyutunda yeni bir denklem sistemine ulaşılır ve bu sistem de

$$A_2 u^k + B_2 u^{k-1} = D\varphi^k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u^0 = \{\cos 2x_n\}_{n=0}^M$$

matris formunda yazılabilir. a, b ve c aynı katsayılar olmak üzere,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -1 \\ a & b & a & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a & b & a \\ -3 & 4 & -1 & 0 & \cdot & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a & c & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$u^r = \begin{bmatrix} u_0^r \\ \vdots \\ u_M^r \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad r = k + 1, k \text{ için},$$

$$\varphi^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1^k \\ \vdots \\ \phi_{M-1}^k \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1},$$

$$\phi_n^k = \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q_n + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \quad f(t_k, x_n) = (4e^{-t_k} - t_k^2 - 1) \cos 2x_n$$

'dir. (5.6) denklemini $u_n^k, 0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq M$ sonucuna ulaştırır.

5.1.2 Hata analizi

Çizelge 5.1'de $p(t)$ 'nin gerçek çözümlü ile Rothe ve Crank Nicholson fark şemasının uygulanması için yapılan sayısal işlemler sonucunda elde edilen çözümlü karşılaştırılmaktadır.

Hata

$$E_p = \max_{1 \leq k \leq N} |p(t_k) - p_k| \quad (5.10)$$

formülü ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 5.1 $p(t)$ için hata analizi

	N=30	N=60	N=90
BDKFŞ	0,3201	0,1451	0,0810
CNFŞ	0,0943	0,0228	0,0066

Çizelge 5.2'de gerçek çözümlü ile birinci dereceden kararlılık fark şemaları (BDKFŞ) ve Crank Nicholson fark şeması (CNFŞ) kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlü arasında hata analizi yapılmıştır. Çizelge 5.2'de sırayla $N = M = 30, 60$ ve 90 değerleri alınmıştır. Karşılaştırma için, hata

$$E = \max_{\substack{1 \leq k \leq N \\ 1 \leq n \leq M}} |u(t_k, x_n) - u_n^k| \quad (5.11)$$

formülüyle hesaplanmıştır.

Çizelge 5.2 Ağ noktalarındaki yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata analizi

Metot	$N = M = 30$	$N = M = 60$	$N = M = 90$
BDKFŞ	0,0628	0,0345	0,0214
CNFŞ	$1,3240.10^{-4}$	$4,2111.10^{-5}$	$1,2088.10^{-5}$

Bu sonuçlardan, CNFŞ ile elde edilen sonuçların BDKFŞ ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldığında, beklenen şekilde daha hassas olduğu gözlenmektedir.

6. BİR BOYUTLU DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK TERS PROBLEM

Doğrusal olmayan kontrol parametrelili

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + p(t)v(t,x) + f(t,x), \\ x \in (0, L), t \in (0, T], \\ v(0, x) = \varphi(x), x \in [0, L], \\ v(t, 0) = \alpha(t), v(t, L) = \beta(t), t \in [0, T], \\ v(t, x^*) = \gamma(t), t \in [0, T], x^* \in (0, L) \end{cases} \quad (6.1)$$

parabolik problemini ele alalım. Burada, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $f(t,x)$ ve $\varphi(x)$ verilen yeterince düzgün fonksiyonlar ve $v(t,x)$ ve $p(t)$ 'de belirsiz fonksiyonlar olsun.

(Isakov, 1998)'de doğrusal olmayan ters problemlerin çözümü için sıklıkla kullanılan sayısal metotlar (doğrusallaştırma, Cauchy probleminin varyasyonel regülarizasyonu, relaksasyon metodu, tabaka bölüştürme ve ayırık metodu) özetlenmektedir. Birçok uygulanabilir sayısal çözümde, doğrusal olmama halinin sabit bir katsayı etrafında doğrusallaştırma ile yok edildiği görülmektedir.

Bu bölümde kararlı fark şemalarını kullanarak yaklaşık çözüm elde edeceğiz. Bu şemaların çözümü için iyileştirilmiş Gauss yoketme metodu kullanılacaktır. Bu bölümden elde edilen sonuçlar, (Ashyralyev, Erdoğan ve Demirci, 2009)'da yayınlanmıştır.

6.1. Kontrol Parametresinin Yaklaşık Değerinin Hesaplanması

İlk olarak (6.1) parabolik denklemini kullanırsak,

$$u_{t_{xx}}(t,x) = u_{xxxx}(t,x) + p(t)u_{xx}(t,x) + f_{xx}(t,x), \quad (6.2)$$

$$u_{t_{xxxx}}(t,x) = u_{xxxxxx}(t,x) + p(t)u_{xxxx}(t,x) + f_{xxxx}(t,x) \quad (6.3)$$

elde ederiz. (6.2) ve (6.3) denklemlerini kullanarak,

$$p(t) = \frac{u_t(t,x)}{u(t,x)} - \frac{u_{xx}(t,x)}{u(t,x)} - \frac{f(t,x)}{u(t,x)},$$

$$\begin{aligned}
p'(t) &= \frac{u_{tt}(t,x)u(t,x) - u_t^2(t,x)}{u^2(t,x)} - \frac{u(t,x)(u_{xxxx}(t,x) + p(t)u_{xx}(t,x) + f_{xx}(t,x))}{u^2(t,x)} \\
&+ \frac{u_{xx}(t,x)u_t(t,x) - f_t(t,x)u(t,x) + f(t,x)u_t(t,x)}{u^2(t,x)}, \\
p''(t) &= \frac{u_{ttt}(t,x)u(t,x) - u_{tt}(t,x)u_t(t,x)}{u^2(t,x)} \\
&- \frac{u_t(t,x)(u_{xxxx}(t,x) + p(t)u_{xx}(t,x) + f_{xx}(t,x))}{u^2(t,x)} \\
&- \frac{u_{xxxxx}(t,x) + p(t)u_{xxxx}(t,x) + f_{xxxx}(t,x) - p_t(t)u_{xx}(t,x)}{u(t,x)} \\
&+ \frac{p(t)(u_{xxxx}(t,x) + p(t)u_{xx}(t,x) + f_{xx}(t,x)) + f_{txx}(t,x)}{u(t,x)} \\
&+ \frac{(u_{xxxx}(t,x) + p(t)u_{xx}(t,x) + f_{xx}(t,x))u_t(t,x)}{u^2(t,x)} \\
&+ \frac{u_{xx}(t,x)u_{tt}(t,x) - f_{tt}(t,x)u(t,x) + f(t,x)u_{tt}(t,x)}{u^2(t,x)} - \frac{2(u_{tt}(t,x)u(t,x) - u_t^2(t,x))}{u^3(t,x)} \\
&- \frac{2u(t,x)(u_{xxxx}(t,x) + p(t)u_{xx}(t,x) + f_{xx}(t,x))}{u^3(t,x)} \\
&+ \frac{2(u_{xx}(t,x)u_t(t,x) - f_t(t,x)u(t,x) + f(t,x)u_t(t,x))}{u^3(t,x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu formüllerde $x = x^*$, $t = 0$ koyarsak, o zaman

$$\begin{aligned}
p(0) &= \frac{\gamma_t(0)}{\varphi(x^*)} - \frac{\varphi_{xx}(x^*)}{\varphi(x^*)} - \frac{f(0,x^*)}{\varphi(x^*)}, \\
p'(0) &= \frac{\gamma_{tt}(0)\varphi(x^*) - \gamma_t^2(0)}{\varphi^2(x^*)} - \frac{\varphi(x^*)(\varphi_{xxxx}(x^*) + p(0)\varphi_{xx}(x^*) + f_{xx}(0,x^*))}{\varphi^2(x^*)} \\
&+ \frac{\varphi_{xx}(x^*)\gamma_t(0) - f_t(0,x^*)\varphi(x^*) + f(0,x^*)\gamma_t(0)}{\varphi^2(x^*)}, \\
p''(0) &= \frac{\gamma_{ttt}(0)\varphi(x^*) - \gamma_{tt}(0)\gamma_t(0)}{\varphi^2(x^*)} - \frac{\gamma_t(0)(\varphi_{xxxx}(x^*) + p(0)\varphi_{xx}(x^*) + f_{xx}(0,x^*))}{\varphi^2(x^*)} \\
&- \frac{\varphi_{xxxxx}(x^*) + p(0)\varphi_{xxxx}(x^*) + f_{xxxx}(0,x^*) - p_t(0)\varphi_{xx}(x^*)}{\varphi(x^*)} \\
&+ \frac{p(0)(\varphi_{xxxx}(x^*) + p(0)\varphi_{xx}(x^*) + f_{xx}(0,x^*)) + f_{txx}(0,x^*)}{\varphi(x^*)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\varphi_{xxxx}(x^*) + p(0)\varphi_{xx}(x^*) + f_{xx}(0, x^*))\gamma_t(0)}{\varphi^2(x^*)} \\
& + \frac{\varphi_{xx}(x^*)\gamma_{tt}(0) + f_{tt}(0, x^*)\varphi(x^*) - f(0, x^*)\gamma_{tt}(0)}{\varphi^2(x^*)} - \frac{2(\gamma_{tt}(0)\varphi(x^*) - \gamma_t^2(0))}{\varphi^3(x^*)} \\
& - \frac{2\varphi(x^*)(\varphi_{xxxx}(x^*) + p(0)\varphi_{xx}(x^*) + f_{xx}(0, x^*))}{\varphi^3(x^*)} \\
& + \frac{2(\varphi_{xx}(x^*)\gamma_t(0) - f_t(0, x^*)\varphi(x^*) + f(0, x^*)\gamma_t(0))}{\varphi^3(x^*)}
\end{aligned}$$

olur. İkinci olarak, $p(t_k)$, $t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \dots$ 'nin hesaplanması için yaklaşık formülleri kuralım. $p(\tau)$ için elde ettiğimiz $p(0)$, $p'(0)$ ve $p''(0)$ değerlerini kullanarak,

$$p(\tau) = p(0) + p'(0)\tau + p''(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^3)$$

hesaplamasını yapabiliriz. $p(2\tau)$ ise

$$p(2\tau) = -3p(0) + 4p(\tau) - 2\tau p'(0) + o(\tau^3) \quad (6.4)$$

formülü kullanılarak elde edilebilir. $p(t_k)$, $k \geq 3$ değerleri

$$\begin{aligned}
p(t_k) &= (p(t_{k-3}) - 3p(t_{k-2}) + 3p(t_{k-1}))(1 + \tau^4) + o(\tau^3), \\
t_k &= k\tau, \quad k = \overline{3, N}, \quad N\tau = T
\end{aligned} \quad (6.5)$$

iterasyonu yardımıyla bulunabilecektir.

(6.4) ve (6.5) formüllerinin ispatı belirsiz katsayılar metoduna dayanmaktadır. Son küçük terimleri ihmal ettiğimiz zaman, $p(t)$ 'nin yaklaşık değerlerini hesaplamak için

$$\begin{cases} p_0 = p(0), \\ p_1 = p(0) + p'(0)\tau + p''(0)\frac{\tau^2}{2}, \\ p_2 = -3p(0) + 4p_1 - 2\tau p'(0), \\ p_k = (p_{k-3} - 3p_{k-2} + 3p_{k-1})(1 + \tau^4), \quad 3 \leq k \leq N \end{cases} \quad (6.6)$$

formülünü elde ederiz.

6.2 Fark Şemaları ve Sayısal Analiz

(6.1) probleminin yaklaşık çözümü için, kararlı birinci dereceden kararlılık

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - p_k u_n^k = \varphi_n^k, \\ \varphi_n^k = f(t_k, x_n), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ x_n = nh, 1 \leq n \leq M-1, Mh = L, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), x_n = nh, 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = \alpha(t_k), u_M^k = \beta(t_k), t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (6.7)$$

ve ikinci dereceden kararlılık

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{2h^2} - \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{2h^2} - \frac{p_k u_n^k + p_{k-1} u_n^{k-1}}{2} = \varphi_n^k, \\ \varphi_n^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ x_n = nh, 1 \leq n \leq M-1, Mh = L, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), x_n = nh, 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = \alpha(t_k), u_M^k = \beta(t_k), t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (6.8)$$

fark şemasını kuralım. Elde ettiğimiz algoritmanın sayısal sonuçlarını görmek için,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t)u(t,x) + (\pi^2 - (t+1)^2)e^{-t^2} \sin \pi x, x \in (0,1), t \in (0,1], \\ u(0,x) = \sin \pi x, x \in [0,1], \\ u(t,0) = 0, u(t,1) = 0, u(t, \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t^2}, t \in [0,1] \end{cases}$$

problemini ele alacağız. Bu problemin gerçek çözümü $u(t,x) = e^{-t^2} \sin \pi x$ 'tir ve kontrol parametresi de $1 + t^2$ 'dir.

İlk olarak, $p(t)$ kontrol parametresinin yaklaşık değerini hesaplayalım. Sayısal prosesimizde $t = 0$ ve $x = \frac{1}{4}$ değerlerini yerine koyarak,

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) = 2$$

değerlerini elde ederiz. O zaman, (6.6) formülünü kullanarak, bütün p_k , $k = \overline{0, N}$ değerlerine ulaşırız.

İkinci olarak, (6.7) fark şemasını uygulayarak $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutunda bir lineer denklem sistemini oluşturup, bu sistemi

$$AU_{n-1} + BU_n + CU_{n+1} = R\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M - 1, \quad U_0 = U_M = \tilde{0} \quad (6.9)$$

matris formunda yazmamız mümkün olacaktır. Burada,

$$x = -\frac{1}{h^2}, \quad v = -\frac{1}{\tau}, \quad y_k = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} - p_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

olmak üzere

$$C = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ v & y_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & y_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & v & y_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & v & y_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \dots \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, s = n+1, n, n-1 \text{ için,}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi(t_0) \\ \dots \\ \varphi(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \varphi_n = \begin{bmatrix} \sin \pi x_n \\ \varphi_n^1 \\ \dots \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

'dir. Dolayısıyla n 'e bağlı olarak ikinci dereceden fark denklemlerini elde etmiş oluruz. Bu lineer denklem sisteminin çözümü iyileştirilmiş Gauss yoketme metodu ile elde edilebilir. Biz çözümü $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}$, $n = M-1, \dots, 2, 1$

formunda arayacağız. Burada, denklemde verilen koşula bağlı olarak

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \text{ ve } \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olacaktır ve α_k ve β_k 'lar

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1}A,$$

$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1}(R\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, \dots, M-1$$

formülü ile hesaplanmaktadır. α_j 'leri ve β_j 'leri hesapladıktan sonra, U_n çözümleri $x = 1$ noktasında verilen sınır koşulundan faydalanarak,

$$\begin{cases} U_M = \tilde{0}, \\ U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1 \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile elde edilir.

Son olarak, (6.8)'de verilen ikinci dereceden kararlılık fark şemasını uygulayarak, yeni bir $(N+1) \times (N+1)$ 'lik lineer denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi de

$$C = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ q & q & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & q & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & q & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & q & q \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & g_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & g_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & z_{N-1} & g_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & z_N & g_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$q = -\frac{1}{2h^2}, z_k = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} - p_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq N, g_k = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} - p_k, \quad 1 \leq k \leq N,$$

olmak üzere (6.9) matris formunda yazmak mümkün olacaktır.

(6.8) fark şemasının çözümüne ulaşabilmek için de, tekrar iyileştirilmiş Gauss yoketme metodu ve MATLAB programı kullanırız.

Şimdi sayısal analizin sonuçlarını verelim. Farklı N ve M değerleri için sayısal sonuçlar hesaba alınmıştır ve u_n^k fark şemalarının (t_k, x_n) noktalarındaki sayısal sonuçlarını temsil eder.

Çizelge 6.1'de $p(t)$ 'nin gerçek değerleri ile (6.6) sayısal prosesi sonucunda elde edilen değerleri karşılaştırılmaktadır. Hata (5.10) formülüyle hesaplanır.

Çizelge 6.1 $p(t)$ için hata analizi

	N=20	N=40	N=60
Maksimum hata	0,0083	0,0044	0,0022

Çizelge 6.2’de gerçek çözüm ile fark şemaları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm arasında hata analizi yapılmıştır. Çizelge 6.2’de sırayla $N = M = 20, 40$ ve 60 değerleri alınmıştır. Karşılaştırma için, hata (5.11) formülüyle hesaplanmıştır.

Çizelge 6.2 Ağ noktalarındaki yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata analizi

Metot	$N = M = 30$	$N = M = 60$	$N = M = 90$
BDKFŞ	0,0048	0,0030	0,0016
İDKFŞ	0,0026	0,0006	0,0002

$p(t)$ kontrol parametresini bulmak için, $t = 0$ için $u(t, x^*) = \gamma(t)$ eşitliğinden ve $\gamma(t)$ ’nin t ’ye göre birinci ve ikinci türevlerinin değerlerinden ve düzgünlüğünden faydalanılmaktadır. Dolayısıyla, $\gamma(t_k)$ ve $u_{\left[\frac{x^*}{h}\right]}^k$ arasındaki hatada ele alınmıştır. Çizelge 6.3 sırasıyla $N = M = 20, 40$ ve 60 değerleri için maksimum hatayı vermektedir.

Çizelge 6.3 $\gamma(t_k)$ ve $u_{\left[\frac{x^*}{h}\right]}^k$ arasındaki hata analizi

Metot	$N = M = 30$	$N = M = 60$	$N = M = 90$
BDKFŞ	0,0034	0,0021	0,0011
İDKFŞ	0,0018	$4,5662 \cdot 10^{-4}$	$1,1529 \cdot 10^{-4}$

Dolayısıyla, ikinci dereceden kararlılıklı fark şeması birinci dereceden kararlılıklı fark şemasına kıyasla daha hassastır.

Açıklama 6.1. (6.5)'te, $p = 4, 5, 6$ için $1 + \tau^p$ çarpanını koyabiliriz. Bununla beraber, $1 + \tau^p$ olmadan da,

$$p(t_k) = p(t_{k-3}) - 3p(t_{k-2}) + 3p(t_{k-1}) + o(\tau^3),$$

$$t_k = k\tau, k = \overline{3, N}, N\tau = T$$

ifadesini kullanmak mümkün olup, son terimleri ihmal ettiğimizde p_k 'nin elde edilmesi için bir algoritma oluşur. Bu algoritma ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir.

Çizelge 6.4 $p(t)$ için hata analizi

	N=20	N=40	N=60
Maksimum hata	$1,2212 \cdot 10^{-14}$	$4,7695 \cdot 10^{-13}$	$8,3393 \cdot 10^{-13}$

Çizelge 6.5 Ağ noktalarındaki yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata analizi

Metot	$N = M = 30$	$N = M = 60$	$N = M = 90$
BDKFŞ	0,0049	0,0030	0,0016
İDKFŞ	0,0026	0,0006	0,0002

Çizelge 6.6 $\gamma(t_k)$ ve $u_{\left[\frac{x}{h}\right]}^k$ arasındaki hata analizi

Metot	$N = M = 30$	$N = M = 60$	$N = M = 90$
BDKFŞ	0,0034	0,0021	0,0011
İDKFŞ	0,0018	$4,5333 \cdot 10^{-4}$	$1,1327 \cdot 10^{-4}$

Çizelge 6.4'ten de görüldüğü üzere, hata çok küçük olmasına rağmen, kontrol parametresi $p(t)$ 'nin yaklaşık çözümünün hesaplanmasında sonuç kararsızdır. Çizelge 6.5 ve 6.6'da elde edilen hata sonuçları da neredeyse Çizelge 6.2 ve 6.3 ile aynıdır. Not edelim ki, biz $(1 + \tau^4)$ çarpım faktörünü deneysel olarak bulduk ve kontrol parametresi $p(t)$ 'nin yaklaşık çözümüne kararlı yaklaşabilmek için (6.6)'da kullandık.

Kontrol parametresini elde etmek için geliştirmiş olduğumuz bu yeni yolu, Chao-rong Ye ve Zhi-zhong Sun'ın çalışmasındaki sonuçlarla (Chao-rong Ye ve Zhi-zhong Sun, 2007) ve M. Dehghan'ın makalesinde (Dehghan, 2001) $h=1/50$ ve $s=1/4$ için verilen hata değerleri ile karşılaştırdığımızda, daha hassas sonuçlara ulaşmamızı sağladığı gözlenmektedir.

Yüksek kararlılıklı fark şemaları (Ashyralyev, Sobolevskii, 2004)'de verilen operatör teorisi yardımıyla kurulabilir.

7. UYGULAMA

Bu bölümde sağ taraf özdeşleme problemlerinin uygulamasına örnek olarak, belirsiz bir ısı kaynağı dağılımının yaklaşık hesaplandığı ters ısı transferi problemini ele alalım. Ters ısı iletimi problemleri, örneğin (sıcaklık veya ısı akışında) sınır koşullarının belirlenmesi, içsel enerji kaynakları, termal iletkenlik, hacimsel ısı kapasitesi gibi önemli parametrelerin belirlenmesi analiziyle ilgilenir. Bir çok dizayn ve üretim probleminde, özellikle yüzey koşullarının ölçümünün direkt mümkün olmadığı durumlarda yaygın şekilde kullanılır. Sayısal yöntemlerde sistemin cevabını hesaplamak için, ters problem sonlu fark, sonlu elemanlar veya sınır elemanlar metodu ile formüle edilir. Belirsiz koşulları elde edebilmek için, bu metotlar bir önceki bölümde de değinildiği gibi genellikle regülarizasyon tekniği, dizisel regülarizasyon tekniği, Davidon-Fletcher-Powell metodu, genetik algoritma ve çok boyutlu simpleks metodu gibi optimizasyon algoritmaları ile beraber kullanılmaktadır.

Sabit termal özelliklere sahip, l kalınlığında, sınırları izole edilmiş homojen bir tabaka, $x = x^*$ belirli bir iç noktasında yerleştirilmiş $p(t)$ ısı kaynağı tarafından ısıtılmakta olup, boyutsuz formda

$$\begin{cases} \beta \rho C \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \rho C \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t) \delta(x - x^*), 0 < x < l, t > 0, \\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l, \\ -k \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = -k \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = 0, t > 0, \\ u(0,x) = u_0, 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

olarak formüle edilmiştir (Lin, Yang, 2007). Burada, $u(t,x)$ sıcaklık alanı, k termal iletkenlik katsayısı, ρC hacim başına düşen ısı kapasitesi, negatif olmayan β değeri eski hale geri dönme süresi (relaksasyon) ve δ ise Dirac delta fonksiyonudur. Relaksasyon süresi $\beta = 0$ olduğu zaman, (Liu, 2008) ve (Yang, 1998) makalelerinde verilen

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t) \delta(x - x^*), 0 < x < 1, t > 0, \\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = 0, t > 0, \\ u(0,x) = 0, 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.1)$$

formülüne ulaşırız. (7.1) problemindeki belirsiz kaynağının gücü $p(t)$ 'yi ve $u(t,x)$ sıcaklık

alanını makalelerdeki gibi zamanı $0 < t \leq 1,8$ olarak yaklaşık olarak hesaplayabilmek için fark şemaları uygulanabilir.

Benzer bir uygulama 2008 yılında Yang ve arkadaşlarının ele aldığı (Yan, Fu ve Yang, 2008) makalede ve içinde verilen referanslarda da göze çarpmaktadır. Bu makalede ele alınan bir örneği inceleyeceğiz.

Örnek 7.1. $f(t)$ zamana bağlı bilinmeyen ısı kaynağı, $u(t,x)$ bilinmeyen ısı kaynağı olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t), 0 < x < 1, 0 < t \leq 1, \\ u(0,x) = \sin x + \frac{1}{4}x^4, 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = 0, u(t,1) = e^{-t} \sin 1 + 3t + \frac{1}{4}, 0 \leq t \leq 1, \\ u\left(t, \frac{1}{2}\right) = e^{-t} \sin \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t + \frac{1}{64}, 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (7.2)$$

parabolik denkleminin gerçek çözüm çifti $u(t,x) = e^{-t} \sin x + 3tx^2 + \frac{1}{4}x^2$ ve $f(t) = -6t$ olur.

7.1. Sonuçlar ve Değerlendirme

Rothe ve Crank Nicholson fark şemalarını uygulayarak, belirsiz ısı kaynağı ve sıcaklık alanının yaklaşık değerleri bulundu. Çizelge 7.1'de $f(t)$ fonksiyonunun gerçek ve yaklaşık değerleri arasındaki ve Çizelge 7.2'de $u(t,x)$ fonksiyonunun gerçek ve yaklaşık değerleri arasındaki maksimum hata incelemesi sunulmaktadır. Hatalar sırasıyla (5.10) ve (5.11) formülleri ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 7.1 Kontrol parametresi için hata analizi

	N=30	N=60	N=90
BDKFŞ	0,1425	0,0712	0,0366
CNFŞ	0,1740	0,0423	0,0102

Çizelge 7.2 Sıcaklık alanı için hata analizi

	N=30	N=60	N=90
BDKFŞ	0,0148	0,0080	0,0042
İDKFŞ	0,0047	0,0011	0,0003

Çizelgelere göre, kurmuş olduğumuz fark şemalarının etkin olarak çalıştığını ve CNFŞ ile gerçek çözüme daha yakın sonuçlara ulaşabildiğimizi söylemek mümkün olacaktır.

8. SONUÇLAR

Bu çalışma parabolik denklemlerde sağ taraf fonksiyonunun özdeşleşmesi ters probleminin iyi konumlanmışlığını incelemeye adanmıştır. Çalışma sonucunda çıkan orijinal sonuçlar maddeler halinde verilmektedir.

- $C\left([0, T], C^{\circ 2\alpha}[0, l]\right)$ 'de lokal olmayan koşullu parabolik denklemin sağ tarafının rekonstrüksiyonu ters problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \sigma u(t, x) + p(t)q(x) + f(t, x), \\ 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(t, 0) = u(t, l), u_x(t, 0) = u_x(t, l), 0 \leq t \leq T, \\ u(0, x) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \\ u(t, x^*) = \rho(t), 0 \leq x^* \leq l, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (8.1)$$

'nin iyi konumlanmışlığı ispatlanmıştır.

- $C\left([0, T], C^{2m\alpha}(\mathbb{R}^n)\right)$ 'de

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(t, x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} - \sigma u(t, x) + p(t)q(x) \\ + f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T, |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t, x^*) = \rho(t), 0 \leq t \leq T, x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (8.2)$$

çok boyutlu parabolik denkleminin sağ tarafının rekonstrüksiyonu ters probleminin iyi konumlanmışlığı üzerine teorem elde edilmiştir.

- (8.1) probleminin yaklaşık çözümü için,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = a(x_n) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - \sigma u_n^k + p^k q_n + f(t_k, x_n), \\
p^k = p(t_k), q_n = q(x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\
1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\
u_0^k = u_M^k, -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
u_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M, \\
u_{\left[\frac{x^*}{h}\right]}^k = u_s^k = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, 0 \leq s \leq M
\end{array} \right. \quad (8.3)$$

Rothe fark şeması sunulmuştur. (8.3) problemi için koersif kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

- Çok boyutlu parabolik denklemin sağ taraf rekonstrüksiyonunun ters problemi (8.2)'nin yaklaşık çözümü için kurulan

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} = h^{-2m} \sum_{2m \leq |s_1| \leq S} b_s^x \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \cdots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} u_k^h(x) - \sigma u_k^h(x) \\
+ p^k q^h(x) + f^h(t_k, x), x \in \mathbb{R}_h^n, p^k = p(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\
u_n^0 = \varphi^h(x), x \in \mathbb{R}_h^n, \\
u^k(y) = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, y = \left[\frac{x^*}{h}\right] h \in \Omega \subset \mathbb{R}_h^n
\end{array} \right.$$

birinci dereceden kararlılıklı fark şemasının iyi konumlanmışlığı gösterilmiştir.

•

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} = \frac{a(x_n)}{2} \left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) \\
- \sigma \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} + \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q_n + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
p^k = p(t_k), q_n = q(x_n), x_n = nh, t_k = k\tau, \\
1 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1, Mh = l, N\tau = T, \\
u_0^k = u_M^k, -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k, 0 \leq k \leq N, \\
u_n^0 = \varphi(x_n), 0 \leq n \leq M, \\
u_s^k + \frac{u_{s+1}^k - u_s^k}{h} (x^* - sh) = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, 0 \leq s = \left[\frac{x^*}{h}\right] \leq M
\end{array} \right. \quad (8.4)$$

Crank-Nicholson fark şeması kurulmuştur. (8.4) problemi için, koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

- Çok boyutlu parabolik denklemin sağ taraf rekonstrüksiyonunun ters problemi (8.2)'nin yaklaşık çözümü için kurulan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} = h^{-2m} \sum_{2m \leq |s| \leq S} b_s^x \Delta_{1-}^{s_1} \Delta_{1+}^{s_2} \dots \Delta_{n-}^{s_{2n-1}} \Delta_{n+}^{s_{2n}} \frac{u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{2} \\ -\sigma \frac{u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{2} + \frac{p^k + p^{k-1}}{2} q^h(x) + f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), x \in \mathbb{R}_h^n, \\ p^k = p(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = T, \\ u_n^0 = \varphi^h(x), x \in \mathbb{R}_h^n, \\ u^k(y) + \frac{u^k(y+h) - u^k(y)}{h} (x^* - y) = \rho(t_k), 0 \leq k \leq N, \\ y = \left\lfloor \frac{x^*}{h} \right\rfloor h \in \Omega \subset \mathbb{R}_h^n \end{array} \right.$$

ikinci dereceden kararlılıklı fark şemasının iyi konumlanmışlığı gösterilmiştir.

- Fark şemalarının çözümü için verilen teorik ifadeler sayısal örneklerin sonuçları ile desteklenmiştir.
- Doğrusal olmayan parabolik ters probleminin sayısal çözümlenmesi ele alınmıştır.
- Bir ters ısı transfer probleminde belirsiz ısı kaynağı dağılımının kestirimi incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Ashyralyev A., (2007) "Fractional spaces generated by positive differential and difference operators in a Banach space", PISMME, Springer, 13-22.
- Ashyralyev A., (2009) "A note on fractional derivatives and fractional powers of operators", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 357,232-236.
- Ashyralyev A., (2010) "On a problem of determining the parameter of a parabolic equation", Ukrainian Mathematical Journal, 9,1-11.
- Ashyralyev A., Erdogan A.S. ve Demirci E., (2009) "Numerical solution of a one-dimensional parabolic inverse problem", 6th International ISAAC Congress Ankara, Ankara/Turkey, Aug. 2007, Further progress in analysis: Proceedings of the 6th International ISAAC Congress Ankara, World Scientific, 654-663.
- Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (1994) Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- Ashyralyev A. ve Sobolevskii P.E., (2004) New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- Belov Yu. Ya., (2002) Inverse problems for partial differential equations, Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP.
- Borukhov V.T. ve Vabishchevich P.N., (2000) "Numerical solution of the inverse problem of reconstructing a distributed right-hand side of a parabolic equation", Computer Physics Communications, 126, 32-36.
- Cannon J.R., Lin Yanping ve Wang Shingmin, (1991) "Determination of a control parameter in a parabolic differential equation", J. Austral. Math. Soc., Ser. B., 33, 149-163.
- Cannon J.R., Lin Y.L. ve Xu S., (1994) "Numerical procedures for the determination of an unknown coefficient in semi-linear parabolic differential equations", Inverse Problems,10, 227-243.
- Cannon J.R. ve Yin Hong-Ming, (1990) "Numerical solutions of some parabolic inverse problems", Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2, 177-191.
- Choulli M. ve Yamamoto M., (1996) "Generic well-posedness of an inverse parabolic problem - the Hölder- space approach", Inverse problems, 12, 195-205.
- Choulli M. ve Yamamoto M., (1999) "Generic well-posedness of a linear inverse parabolic problem with diffusion parameter", J.Inv. Ill-Posed Problems, 7, 3, 241-254.
- Dehghan M., (1999) "Fully implicit finite difference methods for two-dimensional diffusion with a nonlocal boundary condition", Journal of Computational and Applied Mathematics, 106, 255-269.
- Dehghan M., (2001) "Determination of a control parameter in the two dimensional diffusion equation", Appl. Numer. Math, 124,17-27.

- Dehghan M., (2003a) "Numerical solution of a parabolic equation with non-local boundary specifications", *Applied Mathematics and Computation*, 145, 185-194.
- Dehghan M., (2003b) "Finding a control parameter in one-dimensional parabolic equations", *Applied Mathematics and Computation*, 135, 491-503.
- Dehghan M., (2006) "A computational study of the one-dimensional parabolic equation subject to nonclassical boundary specifications", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 22, No. 1, 220-257.
- Demirdağ Ö., (2010) "The boundary value problems for parabolic equations with a parameter", *Yüksek Lisans Tezi, Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul*.
- Ivancho N.I., (1995) "On the determination of unknown source in the heat equation with nonlocal boundary conditions", *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 47, No.10.
- Isakov V., (1998) *Inverse problems for partial differential equations*, *Applied Mathematical Sciences* Vol.127, Springer.
- Kimura T. ve Suzuki T., (1993) "A parabolic inverse problem arising in a mathematical model for chromatography", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53, 6, 1747-1761.
- Krein S.G., (1971) *Linear Differential Equations in Banach Space*, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society.
- Kreyzig E., (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons.
- Lin David T.W. ve Yang Ching-yu, (2007) "The estimation of the strength of the heat source in the heat conduction problems", *Applied Mathematical Modelling*, 31, 2696-2710.
- Liu Fung-Bao, (2008) "A modified genetic algorithm for solving the inverse heat transfer problem of estimating plan heat source", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51, 3745-3752.
- Prilepko A.I. ve Kostin A. B., (1992) "Some inverse problems for parabolic equations with final and integral observation", *Mat. Sb.*, 183, No. 4, 49-68.
- Samarskii A.A. ve Vabishchevich P.N., (2007) *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*, Inverse and Ill-posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin, Newyork.
- Yan L., Fu Chu-Li ve Yang , (2008) "The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32, 216-222.
- Yang Ching-Yu, (1998) "A sequential method to estimate the strength of the heat source based on symbolic computation", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41, 14, 2245-2252.
- Ye Chao-rong ve Sun Zhi-zhong, (2007) "On the stability and convergence of a difference scheme for an one-dimensional parabolic inverse problem", *Applied Mathematics and Computation*, 188, 1, 214-225.
- Votruba G.F. ve Boron L.F. (English Edition Editors), (1972) *Functional Analysis*, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netherlands.

EKLER

- Ek 1 Rothe fark şeması (5.2)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı
- Ek 2 C.N.F.Ş. (5.7)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı
- Ek 3 Rothe fark şeması (6.7)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı
- Ek 4 C.N.F.Ş. (6.8)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı

Ek 1 Rothe fark şeması (5.2)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı

```
function firstorderaccuracy(N,M)
if nargin<1; N=20; M=20; end;
h=pi/M; tau=1/N; s=floor(1/(4*h));
A=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    A(n+1,n)=-1/h^2; A(n+1,n+1)=1/tau+2/h^2+1; A(n+1,n+2)=-1/h^2;
end;
for c=1:M-1;
    A(c+1,s)=A(c+1,s)+(cos(2*(c+1)*h)-2*cos(2*c*h)+cos(2*(c-1)*h))/(cos(2*s*h)*h^2)-cos(2*c*h)/cos(2*s*h);
end
A(1,1)=1; A(1,M+1)=-1;
A(M+1,1)=-3; A(M+1,2)=4; A(M+1,3)=-1;
A(M+1,M-1)=-1; A(M+1,M)=4; A(M+1,M+1)=-3;
B=zeros(M+1,M+1);
for n=2:M;
    B(n,n)=-1/tau;
end;
fii=zeros(M+1,M+1);
for k=1:M+1;
    fii(1,k)=0;
    fii(M+1,k)=0;
for n=2:M;
    t=(k-1)*tau;
    x=(n-1)*h;
    fii(n,k)=f(x,t,h,s);
end;
end;
G=inv(A);
for n=1:M+1;
    U(n,1)=cos(2*(n-1)*h);
end;
for k=2:N+1
    U(:,k)=G*fii(:,k)-G*B*U(:,k-1);
end;
for k=1:N,
    t=(k-1)*tau;
    p(k)=(cos(1/2)*(exp(-t)-exp(-t+tau))-(U(s,k+1)-U(s,k)))/(tau*cos(2*s*h));
end
%Exact P
for k=1:N+1;
    t=(k-1)*tau;
    ep(k)=1+t^2;
end;
plot(p), hold, plot(ep)
A1=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    A1(n+1,n)=-1/h^2; A1(n+1,n+1)=1/tau+2/h^2+1; A1(n+1,n+2)=-1/h^2;
end;
A1(1,1)=1; A1(1,M+1)=-1;
A1(M+1,1)=-3; A1(M+1,2)=4; A1(M+1,3)=-1;
A1(M+1,M-1)=-1; A1(M+1,M)=4; A1(M+1,M+1)=-3;
B1=zeros(M+1,M+1);
for n=2:M;
```

```

    B1(n,n)=-1/tau ;
end;
fii1=zeros(M+1,M+1) ;
for k=1:M;
    fii1(1,k)=0 ;
    fii1(M+1,k)=0 ;
for n=2:M;
    t=(k-1)*tau;
    x=(n-1)*h ;
    fii1(n,k)=f1(x,t)+p(k)*cos(2*x);
end;
end;
G1=inv(A1) ;
for n=1:M+1 ;
    U1(n,1)=cos(2*(n-1)*h) ;
end;
for k=2:N+1
    U1(:,k)=G1*fii1(:,k)-G1*B1*U1(:,k-1);
end;
%'EXACT SOLUTION OF PDE' ;
for k=1:M+1;
for j=1:M+1 ;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(j,k) = exact(x,t);
end;
end;
%'ERROR ANALYSIS' ;
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(U1)) ;
maxerror=abs(maxes-maxapp);
relativeerror=maxerror/maxapp;
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
%' ABSOLUTE DIFFERENCES ;
max(max(abs(es-U1)))
%'GRAPH OF THE SOLUTION ;
figure; surf(U1); title('first order accuracy'); rotate3d ;
figure; surf(es); title('exact solution'); rotate3d ;
%'FUNCTIONS ;
function estx=exact(x,t);
estx=exp(-t)*cos(2*x);
function ftx=f(x,t,h,s) ;
ftx=cos(1/2)*exp(-t)*((cos(2*(x+h))-2*cos(2*x)+cos(2*(x-h)))/h^2-cos(2*x))/cos(2*s*h)+(4*exp(-t)-t^2-1)*cos(2*x) ;
function ftx1=f1(x,t,k);
ftx1=(4*exp(-t)-t^2-1)*cos(2*x) ;

```

Ek 2 CNFŞ (5.7)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı

```

function secondorderaccuracy(N,M)
if nargin<1; N=20; M=20; end;
h=pi/M; tau=1/N; s=floor(1/(4*h)); y=(1/4-s*h)/h;
A=zeros(M+1,M+1) ;
for n=1:M-1;
    A(n+1,n)=-1/(2*h^2); A(n+1,n+1)=1/tau+1/h^2+1/2 ; A(n+1,n+2)= -1/(2*h^2);
end;
for c=1:M-1;
A(c+1,s)=A(c+1,s)+(cos(2*(c+1)*h)-2*cos(2*c*h)+cos(2*(c-1)*h))*(1-y)/(2*h^2*((1-
y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)))+(cos(2*c*h)*(1-y))/(2*((1-y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)));
A(c+1,s+1)=A(c+1,s+1)+(cos(2*(c+1)*h)-2*cos(2*c*h)+cos(2*(c-1)*h))*y/(2*h^2*((1-
y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)))+(cos(2*c*h)*y)/(2*((1-y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)));
end
A(1,1)=1 ; A(1,M+1)=-1 ;
A(M+1,1)=-3 ; A(M+1,2)=4 ; A(M+1,3)=-1 ;
A(M+1,M-1)=-1 ; A(M+1,M)=4 ; A(M+1,M+1)=-3 ;
B=zeros(M+1,M+1) ;
for n=2:M;
B(n,n-1)=-1/(2*h^2) ; B(n,n)=1/tau+1/h^2+1/2 ; B(n,n+1)=-1/(2*h^2) ;
end;
for c=1:M-1;
B(c+1,s)=B(c+1,s)+(cos(2*(c+1)*h)-2*cos(2*c*h)+cos(2*(c-1)*h))*(1-y)/(2*h^2*((1-
y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)))+(cos(2*c*h)*(1-y))/(2*((1-y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)));
B(c+1,s+1)=B(c+1,s+1)+(cos(2*(c+1)*h)-2*cos(2*c*h)+cos(2*(c-1)*h))*y/(2*h^2*((1-
y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)))+(cos(2*c*h)*y)/(2*((1-y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)));
end
fii=zeros(M+1,M+1) ;
for k=1:M+1;
    fii(1,k)=0 ; fii(M+1,k)=0 ;
for n=2:M;
t=(k-1)*tau-tau/2; x=(n-1)*h ; fii(n,k)=f(x,t,h,s,y,tau);
end; end;
G=inv(A) ;
for n=1:M+1 ;
    U(n,1)=cos(2*(n-1)*h) ;
end;
for k=2:N+1
    U(:,k)=G*fii(:,k)-G*B*U(:,k-1);
end;
for k=1:N,
    t=(k-1)*tau;
    p(k)=((cos(1/2)*(exp(-t)-exp(-t-tau)))-(((1-y)*(U(s,k+1)-U(s,k)))+y*(U(s+1,k+1)-U(s+1,k))))/(tau*((1-
y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h)));
end
%Exact P
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau; ep(k)=1+t^2; end;
plot(0:tau:(N-1)*tau,p,'b'),
hold,
plot(0:tau:N*tau,ep,'r'), legend
A1=zeros(M+1,M+1) ;
for n=1:M-1;
    A1(n+1,n)=-1/(2*h^2); A1(n+1,n+1)=1/tau+1/h^2+1/2 ; A1(n+1,n+2)= -1/(2*h^2);
end;

```

```

A1(1,1)=1 ; A1(1,M+1)=-1 ; A1(M+1,1)=-3 ; A1(M+1,2)=4 ; A1(M+1,3)=-1 ;
A1(M+1,M-1)=-1 ; A1(M+1,M)=4 ; A1(M+1,M+1)=-3 ;
B1=zeros(M+1,M+1) ;
for n=2:M;
B1(n,n-1)=-1/(2*h^2) ; B1(n,n)=-1/tau+1/h^2+1/2 ; B1(n,n+1)=-1/(2*h^2) ;
end;
fii1=zeros(M+1,M+1) ;
for k=1:M-1;
fii1(1,k)=0 ; fii1(M+1,k)=0 ;
for n=2:M;
t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h ; fii1(n,k)=f1(x,t-tau/2)+(p(k)+p(k+1))/2*cos(2*x);
end; end;
G1=inv(A1) ;
for n=1:M+1 ;
U1(n,1)=cos(2*(n-1)*h) ;
end;
for k=2:N+1
U1(:,k)=G1*fii1(:,k)-G1*B1*U1(:,k-1);
end;
%'EXACT SOLUTION OF PDE' ;
for k=1:M+1;
for j=1:M+1 ;
t=(k-1)*tau; x=(j-1)*h; es(j,k) = exact(x,t);
end;
end;
%'ERROR ANALYSIS' ;
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(U1)) ;
maxerror=abs(maxes-maxapp);
relativeerror=maxerror/maxapp;
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
% ABSOLUTE DIFFERENCES ;
max(max(abs(es-U1)))
%GRAPH OF THE SOLUTION ;
figure; surf(U1); title('second order accuracy'); rotate3d ;
figure; surf(es); title('exact solution'); rotate3d ;

%FUNCTIONS ;
function estx=exact(x,t);
estx=exp(-t)*cos(2*x);
function ftx=f(x,t,h,s,y,tau) ;
ftx=cos(1/2)*(exp(-t+tau/2)+exp(-t-tau/2))*((cos(2*(x+h))-2*cos(2*x)+cos(2*(x-h)))/(2*h^2)-cos(2*x)/2)/((1-y)*cos(2*s*h)+y*cos(2*(s+1)*h))+4*exp(-t)-t^2-1)*cos(2*x) ;
function ftx1=f1(x,t,k);
ftx1=(4*exp(-t)-t^2-1)*cos(2*x) ;

```

Ek 3 Rothe fark şeması (6.7)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı

```

function controlparameter(N,M)
if nargin<1; N=20; M=20; end;
h=1/M; tau=1/N;
P(1)=1; PF=2; PS=0; P(2)=P(1)+PF*tau+PS*tau^2/2; P(3)=-3*P(1)+4*P(2)-2*tau*PF;
for k=4:N+1;
    P(k)=(P(k-3)-3*P(k-2)+3*P(k-1))*(1+tau^3);
end;
A=zeros(N+1,N+1);
for k=2:N+1;
    A(k,k)=-1/h^2;
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N;
    B(k+1,k)=-1/tau; B(k+1,k+1)=1/tau+2/h^2-P(k);
end;
B(1,1)=1; C=A;
for i=1:N+1;
    D(i,i)=1 ;
end;
fii=zeros(N+1,N+1) ;
for n=1:M+1;
    fii(1,n)=sin(pi*(n-1)*h);
for k=2:N+1;
    t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h ; fii(k,n)=f(t,x);
end;
end;
alpha{2} = zeros(N+1,N+1) ;
beta{2}=zeros(N+1,1) ;
for n=3:M+1;
    alpha{n}=-inv(B+C*alpha{n-1})*A;
    beta{n}=inv(B+C*alpha{n-1})*(D*(fii(:,n-1))-C*beta{n-1});
end;
for k=1:N+1;
    U(k,M+1)=0;
end;
for n=M:-1:2;
    U(:,n)=alpha{n+1}*U(:,n+1)+beta{n+1};
end;
%'EXACT SOLUTION OF PDE' ;
for k=1:N+1; for n=1:M+1 ;
    t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h; es(k,n) = exact(t,x);
end;
end;
%'ERROR ANALYSIS' ;
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(U)) ;
maxerror=max(max(abs(es-U)));
relativeerror=max(max((abs(es-U))))/max(max(abs(U)) );
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
figure ; surf(es) ; rotate3d ; axis tight; title 'EXACT SOLUTION';
figure ; surf(U) ; rotate3d ; title 'DIFFERENCE SCHEMES SOLUTION'; axis tight;
function estx=exact(t,x); estx=exp(-t^2)*sin(pi*x);
function ftx=f(t,x) ; ftx=(pi^2-(t+1)^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);

```

Ek 4 C.N.F.Ş. (6.8)'nin uygulanması için yazılan Matlab programı

```

function controlparameter(N,M)
if nargin<1; N=20; M=20; end;
h=1/M; tau=1/N;
P(1)=1; PF=2; PS=4*pi^2-pi^4; P(2)=P(1)+PF*tau+PS*tau^2/2; P(3)=-3*P(1)+4*P(2)-2*tau*PF;
for k=4:N+1;
    P(k)=(P(k-3)-3*P(k-2)+3*P(k-1))*(1+tau^3);
end;
A=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N;
    A(k+1,k)=-1/(2*h^2); A(k+1,k+1)=-1/(2*h^2);
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N;
    B(k+1,k)=-1/tau-P(k)/2+1/h^2; B(k+1,k+1)=1/tau-P(k+1)/2+1/h^2;
end;
B(1,1)=1; C=A;
for i=1:N+1;
    D(i,i)=1 ;
end;
fii=zeros(N+1,N+1) ;
for n=1:M+1;
    fii(1,n)=sin(pi*(n-1)*h);
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h ; fii(k,n)=f(t-tau/2,x);
end;
end;
alpha{2} = zeros(N+1,N+1) ;
beta{2}=zeros(N+1,1) ;
for n=3:M+1;
    alpha{n}=-inv(B+C*alpha{n-1})*A;
    beta{n}=inv(B+C*alpha{n-1})*(D*(fii(:,n-1))-C*beta{n-1});
end;
for k=1:N+1;
    U(k,M+1)=0;
end;
for n=M:-1:2;
    U(:,n)=alpha{n+1}*U(:,n+1)+beta{n+1};
end;
%EXACT SOLUTION OF PDE' ;
for k=1:N+1; for n=1:M+1 ;
t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h; es(k,n) = exact(t,x);
end; end;
% 'ERROR ANALYSIS' ;
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(U)) ;
maxerror=max(max(abs(es-U)));
relativeerror=max(max((abs(es-U)))/max(max(abs(U))));
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
figure ; surf(es) ; rotate3d ; axis tight; title 'EXACT SOLUTION';
figure ; surf(U) ; rotate3d ; title 'DIFFERENCE SCHEMES SOLUTION'; axis tight;
function estx=exact(t,x);
estx=exp(-t^2)*sin(pi*x);
function ftx=f(t,x) ;
ftx=(pi^2-(t+1)^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);

```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 19.10.1980

Doğum yeri İzmir

Lise 1995-1998 İzmir Özel Yamanlar Lisesi

Lisans 1998-2003 Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak.
Makine Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2004-2007 Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Doktora 2007-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurum(lar)

2006-2008 Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma
Görevlisi

2008-Devam ediyor Fatih Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim
Görevlisi