

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BAZI RASYONEL
FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN
KARARLILIĞI, PERİYODİKLİĞİ ve SINIRLILIĞI
ÜZERİNE**

Yüksek Matematikçi Meseret Tuba GÜLPINAR

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 11 Ocak 2010
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (Fatih Üniversitesi)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (Yıldız Teknik Üniversitesi)
: Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU (İstanbul Üniversitesi)
: Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ (Yıldız Teknik Üniversitesi)
: Prof. Dr. Emanullah HIZEL (İstanbul Teknik Üniversitesi)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SEMBOL LİSTESİ	ii
ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	5
2.1 Temel Tanımlar	5
2.2 Lineerleştirilmiş Kararlılık Analizi.....	7
2.3 Yarı Dönme Analizi.....	11
3. $x_{n+1} = F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3})$ DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ.....	13
3.1 $x_{n+1} = F(x_n; x_n; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	14
3.2 $x_{n+1} = F(x_n; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi.....	27
3.3 $x_{n+1} = F(x_{n-1}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	38
3.4 $x_{n+1} = F(x_{n-1}; x_{n-1}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	43
3.5 $x_{n+1} = F(x_{n-1}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	54
3.6 $x_{n+1} = F(x_{n-2}; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	60
3.7 $x_{n+1} = F(x_{n-2}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	71
3.8 $x_{n+1} = F(x_{n-3}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi	79
4. SONUÇLAR.....	90
KAYNAKLAR.....	92
ÖZGEÇMİŞ.....	94

SEMBOL LİSTESİ

$F_{jk}(x_{n-j}, x_{n-k}, x_{n-3})$	$F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{00}(x_n, x_{n-3})$	$F(x_n; x_n; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{01}(x_n, x_{n-1}, x_{n-3})$	$F(x_0; x_{n-1}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$	$F(x_n; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{03}(x_n, x_{n-3})$	$F(x_n; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{11}(x_{n-1}, x_{n-3})$	$F(x_{n-1}; x_{n-1}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{12}(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$	$F(x_{n-1}; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{13}(x_{n-1}, x_{n-3})$	$F(x_{n-1}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{22}(x_{n-2}, x_{n-3})$	$F(x_{n-2}; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{23}(x_{n-2}, x_{n-3})$	$F(x_{n-2}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fonksiyonu
$F_{33}(x_{n-3})$	$F(x_{n-3}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fonksiyonu

ÖNSÖZ

Fen ve mühendislik bilimlerinin birçok alanında karşılaşılan fark denklemleri, üzerinde çok çalışma yapılmış olmasına rağmen hala çok güncel ve araştırmalara açık bir konudur. Özellikle dördüncü mertebeden rasyonel fark denklemleri, hakkında çok az araştırma yapılmış bir alandır. Tezde, dördüncü mertebeden lineer olmayan rasyonel denklemlerin bir grubunun global özellikleri belirlenerek bu alana katkı yapılmaya çalışılmıştır. İncelenen denklemlerin aşıkâr çözümlerinin varlığı, yarı dönme analizi ve kararlılık analizi yapıp elde edilen bulgular belirtilmiştir.

Bu çalışmaların her aşamasında bana sabırla yol gösteren tez danışmanım Prof.Dr. Mustafa Bayram'a, fikir ve görüşleriyle bana yardımcı olan Prof.Dr. Mehmet Ahlatçioğlu'na, Prof.Dr.Müfit Giresunlu'ya ve Doç.Dr. Cengiz Çınar'a, desteğini hiç esirgemeyen eşim Caner Gülpınar'a, aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Rasyonel fark denklemleri, pozitif bilimlerin birçok alanında bu denklemlerle karşılaşılmasından dolayı, araştırmaların yoğunlaşarak sürdüğü çok geniş bir alandır. Üzerinde çalışılması gereken oldukça çok sayıda açık problem olması bu alanı cazip hale getirmektedir. Rasyonel fark denklemlerini çözebilmek her zaman mümkün olmamakta, çözümlerinin kesin olarak belirlenebilmesi için başlangıç koşullarına ihtiyaç duyulmaktadır. Genel olarak ele alınan fark denkleminin başlangıç koşullarına göre global davranışları belirlenerek, hangi koşullar altında bu özellikleri sağladığı araştırılmaktadır. Bu tezde, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere dördüncü mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemlerinin bir grubunun global özellikleri incelenmiştir. Bu gruptaki denklemler iki parametreye bağlı olup, bu parametrelerin farklı değerlerine göre 10 fark denklemi üretmektedir ve incelenen denklemler başlangıç koşullarının seçimine göre farklı özellikler göstermektedir. Tezde, birinci bölümde fark denklemleri hakkında genel bir bilgi verilmiş, ikinci bölümde ise konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde de üretilen denklemlerin global özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla, ele alınan denklemlerin denge noktaları belirlenmiş ve hangi başlangıç koşulları altında aşıkâr çözüme sahip olduğu, salınımlı olduğu ve denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşulların neler olduğu incelenmiştir. Tezden, incelenen denklemlerin yarı dönme analizleri hakkında detaylı bir bilgiye ulaşmak mümkündür. Ek olarak, kararlılık analizi kapsamında, denklemlerin global çekici ve yerel asimptotik kararlı olmaları için gereken koşullar saptanmış ve bunların ispatlarına geniş bir şekilde yer verilmiştir. Ayrıca genel halde verilen denklemin özel bir alt grubunun aynı salınımlılık yapısına sahip olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemi, Global Asimptotik Kararlılık, Yarı Dönme, Salınımlılık, Denge Noktası.

ABSTRACT

Rational difference equations are a large field of study that needs intensive research due to encountering such kind of equations in many branches of positive science. Having many open problems to investigate getting this area intriguing. In many cases, solving rational difference equations is not possible, the initial conditions are needed to determine the exact solutions of these equations. In general, global behaviours with respect to the initial conditions of handled difference equation is elaborated and it has been studied under which circumstances that the solutions of the equation verify these properties. In this work, we examined the global properties of some nonlinear rational fourth order difference equations with initial conditions which are positive real numbers. The chosen difference equations with two parameters generate ten difference equations according to different values of these parameters and these equations represent different properties with respect to the choices of initial conditions. In thesis, it has been mentioned about the general information concerning difference equations in the first section, the basic definitions and theorems which take places in the thesis are enrolled in the second section. In third section, the global properties of the generated difference equations are researched. To this end, the equilibrium point of these equations has been determined and it has been investigated under which circumstances that the difference equations have trivial solutions, oscillatory property and the necessary and sufficient conditions of the equilibrium point to be globally asymptotically stable. It is quite possible to reach information about the semicycle analysis of the observed equations in depth. Moreover, the conditions to ensure the difference equations globally attractive and locally asymptotically stable are assigned and their proofs are worked out in details in the sense of stability analysis. Furthermore, having the same oscillatory structure of a special subgroup of the equation given in general is a pointing out detection.

Key Words: Difference Equations, Global Asimptotic Stability, Semicycle, Oscillatory, Equilibrium Point.

1. GİRİŞ

Fark denklemlerinin belirleyici özellikleri hakkındaki çalışmalar, bu tip denklemlerle pozitif bilimlerin birçok alanında karşılaşılmışından dolayı günümüzde ilgi odağı olmuştur. En popüler fark denklemlerinden biri başlangıç koşulları $x_0 = 1$ ve $x_{-1} = 1$ olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

şeklindeki Fibonacci dizisidir. Benzer bir bakış açısıyla iterasyon fonksiyonları da fark denklemleridir. Bir fonksiyonun değerini, köklerini veya bir diferensiyel denkleminin çözümünü yaklaşık olarak belirlemek için kullandığımız Sonlu Farklar Metodu, Newton Metodu gibi iterasyon fonksiyonu oluşturarak çözüm yapılan yöntemlerde aslında problemin fark denklemleri oluşturulmaktadır. Günümüzde, yaygın bir şekilde, fark denklemlerinin başlangıç koşullarının seçimine göre global davranışları belirlenmeye çalışılmaktadır. Özellikle rasyonel fark denklemleri hakkındaki çalışmalar çok yetersizdir.

Mertebesi birden büyük lineer olmayan fark denklemlerinin global davranışlarının temel teorisinin geliştirilebilmesi için bazı ön çalışmaların rasyonel fark denklemlerinin sonuçlarından elde edilmesinden dolayı, mertebesi birden büyük rasyonel fark denklemleri üzerinde çalışması gereken bir konudur. Buna rağmen bu fark denklemlerinin global davranışlarıyla bağlantılı genel etkin bir yöntem henüz bulunamamıştır. Her denklem (denklem grubu) için o denkleme (denklem grubuna) özgün teoremler geliştirilmeye çalışılmaktadır.

Rasyonel fark denklemleri ile ilgili olarak, öncelikle G. Ladas ve arkadaşları $\alpha \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

denkleminin global özelliklerini incelemiştir (Amleh vd., 1999). Bu denklem, 2004 yılında J. Feuer (2004) tarafından $\alpha \in (0, 1)$ koşulu altında yeniden çalışılmıştır. M.R. Kulenovic ve arkadaşları α, β, A, B, C negatif olmayan parametreler ve x_{-1}, x_0 negatif olmayan başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin global davranışlarını incelemiştir (Cunningham vd., 2001).

(1.1) denkleminin genelleştirilmiş hali olan

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n^k}, k \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemi ise A.E.Hamza ve A.Morsy (2009) tarafından incelenmiştir. 2004 yılında

$$x_{n+1} = \frac{p + x_{n-2}}{x_n} \quad (1.4)$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemi hakkında çalışılmıştır (Camouzis vd., 2004). Aynı yıl

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + b x_n x_{n-1}} \quad (1.5)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin global özelliklerini C.Çınar (2004) incelemiştir. Bir yıl sonra ise

$$x_{n+1} = \frac{a x_n + b x_{n-1}}{c + d x_n x_{n-1}} \quad (1.6)$$

denkleminin çözümlerinin özellikleri X.Yang ve çalışma arkadaşları tarafından belirlenmiştir (Yang vd., 2005).

İkinci ve üçüncü mertebeden fark denklemleri ile ilgili yayınlar daha da arttırılabilir (Ragheb ve Sarris, 2000; Camouzis ve Ladas, 2002; Gibbons vd., 2002; Kulenovic vd., 2003; Kalabusic ve Kulenovic, 2004; Amleh vd., 2007). Hem payı hem de paydası lineer olan ikinci ve üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemleri hakkındaki çalışmalr sırasıyla 2002 ve 2007 yıllarında yazılan kitaplarda toplanmıştır (Kulenovic ve Ladas, 2002; Camouzis ve Ladas, 2007). Bu tipteki denklemler hakkında en detaylı bilgiye bu kaynaklardan ulaşılabilir.

Dördüncü mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemleri hakkındaki çalışmalar henüz yeni yeni gelişmektedir. Bu konudaki yayın sayısı, ikinci veya üçüncü mertebeden fark denklemleri hakkındaki yayın sayısıyla kıyaslandığında yok denecek kadar azdır. Bunlardan biri yine G. Ladas ve arkadaşları tarafından hazırlanan

$$x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}} \quad (1.7)$$

denkleminin çözümlerinin global özelliklerinin araştırıldığı yayındır (Camouzis vd., 2007). 2005 yılında ise dördüncü mertebeden hem payı hem de paydası lineer olmayan

$$x_{n+1} = \frac{x_n^b x_{n-2} + x_{n-3}^b + a}{x_n^b + x_{n-2} x_{n-3}^b + a} \quad (1.8)$$

fark denklemi, $a, b \in [0, \infty)$ ve pozitif başlangıç koşulları altında irdelenmiştir (Li ve Zhu, 2005). Daha sonra X. Li

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3} + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-1} x_{n-2} + x_{n-1} x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$$

denklemini ve

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} x_{n-3} + x_n + x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-1} + x_n x_{n-3} + x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$$

denklemini incelemiştir (Li, 2005a;2005b). Yukarıdaki denklemlere ek olarak D.Li ve arkadaşları yukarıdaki denklemlerden daha genel olan bir denklem üzerinde de çalışmışlardır (Li vd., 2008).

Bu tezde, en genel hali

$$x_{n+1} = \frac{F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})}{G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})}, \quad n = 0, 1, \dots$$

olan dördüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerinin bir alt grubunun global özellikleri belirlenmiştir. Bu denklem sınıfını biraz özelleştirerek incelenen denklemleri $j, k = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere

$$F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3}) = \frac{x_{n-j} x_{n-k} x_{n-3} + x_{n-j} + x_{n-k} + x_{n-3} + a}{x_{n-j} x_{n-k} + x_{n-j} x_{n-3} + x_{n-k} x_{n-3} + 1 + a} \quad (1.9)$$

ile ifade edebiliriz. Burada denklemlerden,

$$x_{n+1} = F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3})$$

şeklinde parametrik bir gösterilişe söz edilmektedir. Ayrıca yazımı kolaylaştırmak için

$F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3}) = F_{jk}$ ile gösterilmiştir. F_{jk} ile F_{kj} aynı fonksiyonu belirttiği aşıkardır, dolayısıyla bu fonksiyonlardan sadece bir tanesi ele alınmıştır. j ve k 'nın değerleri yukarıdaki dördüncü mertebeden rasyonel fark denkleminde yerine yazıldığında 10 farklı denklem türetilir. Bu denklemlerin listesi ve detaylı incelemesi üçüncü bölümde yer almaktadır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu kısımda, fark denklemleri ile genel bir bilgiye, tezde adı geçen temel tanımlara ve kullanılan teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili yer alan tanımlar ve teoremler “Dynamics of Second-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures” ve “Dynamics of Third-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures” isimli kaynaklardan alınmıştır (Kulenovic ve Ladas, 2002; Camouzis ve Ladas, 2007).

2.1 Temel Tanımlar

I kümesi genellikle bir reel sayı aralığı, aralıkların birleşimi veya tam sayılar kümesi gibi kesikli bir küme olsun. F , I^{k+1} 'i I 'ya dönüştüren herhangi bir fonksiyon olmak üzere, $(k+1)$. mertebeden **fark denklemi**, en genel hali ile

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.1)$$

ile gösterilir.

Fark denklemlerinin çözümü ise, her $n \geq 0$ değeri için (2.1) denklemini sağlayan $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ şeklinde bir dizi oluşturacaktır.

Bazı özel fark denklemleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Riccati Fark Denklemi, a, b, c, d verilen reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n},$$

şeklindedir. **Lyness' Denklemi** ise, $n = 0, 1, \dots$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_{n-1}},$$

ile ifade edilebilir. **Todd's Denklemi**, $n = 0, 1, \dots$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n + x_{n-1}}{x_{n-2}},$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.1:

n ve k pozitif doğal sayı olmak üzere, bütün $n \geq -k$ değerleri için (2.1) denkleminin sabit bir çözümü vardır. Bu çözüme (2.1) denkleminin **denge çözümü** denir. Eğer her $n \geq -k$ için

$$x_n = \bar{x}$$

(2.1) denkleminin bir denge çözümü ise, \bar{x} noktasına (2.1) denkleminin bir **denge noktasıdır (equilibrium point)** denir veya kısaca (2.1) denkleminin bir **denge** denir.

Tanım 2.1.2:

$\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (2.1) denkleminin aşikar çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün denklemin denge çözümü olmasıdır.

Tanım 2.1.3:

\bar{x} , (2.1) denkleminin bir denge noktası olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (2.1) denkleminin

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir çözümü iken

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ varsa, \bar{x} denge noktasına **yerel kararlı (locally stable)** denir.

Tanım 2.1.4:

Eğer \bar{x} yerel kararlı ve $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \gamma$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

olacak şekilde en az bir $\gamma > 0$ sayısı var ise \bar{x} denge noktasına **yerel asimptotik kararlı (locally asymptotically stable)** denir.

Tanım 2.1.5:

(2.1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

oluyorsa \bar{x} denge noktasına **global çekici (global attractor)** denir.

Tezde \bar{x} denge noktasının global çekici olduğunu göstermek için aşağıdaki teoremlerden yararlanılmıştır.

Teorem 2.1.1:

Monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizi yakınsaktır (Wrede ve Spiegel, 2002).

Teorem 2.1.2:

Monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi yakınsaktır (Wrede ve Spiegel, 2002).

Tanım 2.1.6:

Eğer (2.1) denkleminin \bar{x} denge noktası hem yerel kararlı hem de global çekici ise \bar{x} denge noktasına **global asimptotik kararlı (globally asymptotically stable)** denir.

Eğer \bar{x} denge noktası yerel kararlı değilse **kararsızdır (unstable)** denir.

Tanım 2.1.7:

Eğer $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < r$ iken $|x_n - \bar{x}| > r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı bulunabiliyorsa \bar{x} denge noktasına **kaynak (repeller)** denir.

2.2 Lineerleştirilmiş Kararlılık Analizi

F fonksiyonunun \bar{x} denge noktasının bazı açık komşuluklarında sürekli türevlenebilir olduğu kabul edilsin. $F(u_0, u_1, \dots, u_k)$ fonksiyonunun $i = 0, 1, 2, \dots, k$ için u_i değişkenine göre kısmi türevinin \bar{x} denge noktasındaki değeri de

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (2.2)$$

ile gösterilsin. Bu takdirde $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + \dots + q_k y_{n-k} \quad (2.3)$$

denklemine de \bar{x} denge noktası civarındaki (2.1) denkleminin **lineerleştirilmiş denklemi (linearized equation)** denir ve q_i 'ler (2.2) ifadesinden elde edilmek üzere

$$\lambda^{k+1} - q_0 \lambda^k - q_1 \lambda^{k-1} - \dots - q_{k-1} \lambda - q_k = 0 \quad (2.4)$$

denkleminin (2.3) denkleminin \bar{x} noktası civarındaki *karakteristik denklemi (characteristic equation)* adı verilir.

Teorem 2.2.1: Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi

F fonksiyonunun \bar{x} denge noktasının bazı açık komşuluklarında sürekli türevlenebilir olduğunu kabul edilsin. Bu takdirde

- i) (2.4) denkleminin bütün köklerinin mutlak değeri birden küçük ise (2.1) denkleminin \bar{x} denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.
- ii) (2.4) denkleminin en az bir kökünün mutlak değeri birden büyük ise (2.1) denkleminin \bar{x} denge noktası kararsızdır.

Tanım 2.2.1:

Eğer karakteristik denklemin her bir kökünün mutlak değeri birden farklıysa \bar{x} denge noktasına *hiperboliktir (hyperbolic)* denir.

Eğer karakteristik denklemin mutlak değeri bir olan bir kökü varsa \bar{x} denge noktasına *nonhiperboliktir (nonhyperbolic)* denir.

Tanım 2.2.2:

Eğer \bar{x} denge noktası hiperbolik ve (2.4) denkleminin en az bir kökünün mutlak değeri birden küçükken, mutlak değeri birden büyük olan başka bir kökü varsa, \bar{x} denge noktasına *eyer noktası (saddle point)* denir.

Tanım 2.2.3:

Eğer karakteristik denklemin bütün köklerinin mutlak değeri birden büyükse \bar{x} denge noktasına *kaynak (repeller)* denir.

Tanım 2.2.4:

Bütün $n > -k$ sayıları için, p tam sayı olmak üzere

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde en az bir $p \geq 1$ sayısı var ise (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü *periyodiktir (periodic)* denir ve periyodu da p 'dir.

Eğer p , (2.4) denklemini sağlayan en küçük pozitif tam sayı ise, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü ***p asal periyotlu(periodic with prime period p)***dur.

Bu durumda, bir $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p})$ p-lisine (2.1) denkleminin bir ***p-döngüsü (p-cycle)*** denir.

Tanım 2.2.5:

Orijine uzaklığı 1'den küçük olan noktalar kümesine ***açık birim disk(open unit disc)*** denir ve

$$D = \{x : |x| < 1\}$$

ile ifade edilebilir. Benzer şekilde

$D = \{x : |x| \leq 1\}$ bölgesine ***kapalı birim disk(closed unit disc)*** denir (Adams, 2006).

Teorem 2.2.2:

a_1 ve a_0 reel sayılar olmak üzere

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

karakteristik denkleminin bütün köklerinin birim disk içinde yer alması için yeter ve gerek koşul

$$|a_1| < 1 + a_0 < 2$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.3:

a_2 , a_1 ve a_0 'ın reel sayılar olduğu kabul edilsin.. Bu takdirde

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

karakteristik denkleminin bütün köklerinin, birim disk içinde yer alması için yeter ve gerek koşul

$$|a_2 + a_0| < 1 + a_1,$$

$$|a_2 - 3a_0| < 3 - a_1,$$

ve

$$a_0^2 + a_1 - a_0 a_2 < 1$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.4:

a_3, a_2, a_1 ve a_0 reel sayılar olmak üzere

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

karakteristik denkleminin bütün köklerinin birim disk içinde yer alması için yeter ve gerek koşul

$$|a_1 + a_3| < 1 + a_0 + a_2,$$

$$|a_1 - a_3| < 2(1 - a_0),$$

$$a_2 - 3a_0 < 3$$

ve

$$a_0 + a_2 + a_0^2 + a_1^2 + a_0^2 a_2 + a_0 a_3^2 < 1 + 2a_0 a_2 + a_1 a_3 + a_0 a_1 a_3 + a_0^3$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.5:

q_0, q_1, \dots, q_k sayılarının

$$|q_0| + |q_1| + \dots + |q_k| < 1$$

koşulunu sağlayan reel sayılar olduğunu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\lambda^{k+1} - q_0 \lambda^k - q_1 \lambda^{k-1} - \dots - q_{k-1} \lambda - q_k = 0$$

denkleminin bütün kökleri birim disk içinde yer alır.

2.3 Yarı Dönme Analizi

Tanım 2.3.1:

\bar{x} , (2.1) denkleminin bir denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ da denklemin bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir *pozitif yarı dönmesi(positive semicycle)*, bütün elemanları denge noktasından büyük veya eşit olan ve $l \geq -k$ ve $m < \infty$ olmak üzere

$l = -k$ ya da $l > -k$ olduğunda

$$x_{l-1} < \bar{x}$$

ve $m = \infty$ ya da $m < \infty$ olduğunda

$$x_{m+1} < \bar{x}$$

koşullarını sağlayan bütün terimlerin oluşturduğu, $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ şeklinde bir terim dizisidir.

$(m-l+1)^+$ ise eleman sayısını göstermektedir.

Tanım 2.3.2:

\bar{x} , (2.1) denkleminin bir denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ da denklemin bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir *negatif yarı dönmesi(negative semicycle)*, bütün elemanları denge noktasından küçük olan ve $l \geq -k$ ve $m < \infty$ olmak üzere

$l = -k$ ya da $l > -k$ olduğunda

$$x_{l-1} \geq \bar{x}$$

ve $m = \infty$ ya da $m < \infty$ olduğunda

$$x_{m+1} \geq \bar{x}$$

koşullarını sağlayan bütün terimlerin oluşturduğu, $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ şeklinde bir terim dizisidir.

$(m-l+1)^-$ ise eleman sayısını göstermektedir.

Tanım 2.3.3:

$\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer bütün $n \geq N$ için

$$x_n > \bar{x}$$

veya

$$x_n < \bar{x}$$

olacak şekilde en az bir $N \geq -k$ sayısı varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü \bar{x} civarında **salınımsızdır** (*nonoscillatory*) veya kısaca salınımsızdır denir. Aksi takdirde çözüm \bar{x} civarında **salınımlıdır** (*oscillatory*) veya kısaca salınımlıdır denir.

3. $x_{n+1} = F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3})$ DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Bu tezde $a \in [0, \infty)$, başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ ve $j, k = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-j}x_{n-k}x_{n-3} + x_{n-j} + x_{n-k} + x_{n-3} + a}{x_{n-j}x_{n-k} + x_{n-j}x_{n-3} + x_{n-k}x_{n-3} + 1 + a} \quad (3.1)$$

tipindeki dördüncü mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemleri ele alınmıştır ve bu denklem, j ve k 'nin aldığı değerlere göre 10 farklı denklem üretmektedir. Bunlar :

1. $j = 0$ ve $k = 0$ iken $x_{n+1} = \frac{x_n^2 x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
2. $j = 0$ ve $k = 1$ iken $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} x_{n-3} + x_n + x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-1} + x_n x_{n-3} + x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
3. $j = 0$ ve $k = 2$ iken $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2} x_{n-3} + x_n + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
4. $j = 0$ ve $k = 3$ iken $x_{n+1} = \frac{x_{n-3}^2 x_n + x_n + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
5. $j = 1$ ve $k = 1$ iken $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}^2 x_{n-3} + 2x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
6. $j = 1$ ve $k = 2$ iken $x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3} + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-1} x_{n-2} + x_{n-1} x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
7. $j = 1$ ve $k = 3$ iken $x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-3}^2 + x_{n-1} + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
8. $j = 2$ ve $k = 2$ iken $x_{n+1} = \frac{x_{n-2}^2 x_{n-3} + 2x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi
9. $j = 2$ ve $k = 3$ iken $x_{n+1} = \frac{x_{n-2} x_{n-3}^2 + x_{n-2} + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$ fark denklemi

$$10. \quad j = 3 \text{ ve } k = 3 \text{ iken } x_{n+1} = \frac{x_{n-3}^3 + 3x_{n-3} + a}{3x_{n-3}^2 + 1 + a} \text{ fark denklemi}$$

şeklinde listelenebilir.

Bu tezde yukarıdaki fark denklemlerinin çözümlerinin global davranışları araştırılmıştır. İncelemeler sırasında denklemlerin hangi koşullar altında aşikar çözümünün olduğu, aşikar olmayan çözümlerinin salınımlılığı ve global asimptotik kararlılığı araştırılmıştır. (3.1) denkleminin denge noktaları x_n yerine \bar{x} yazılarak elde edilen

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}^3 + 3\bar{x} + a}{3\bar{x}^2 + 1 + a}$$

denkleminin kökleridir ve bu denklemi düzenlersek

$$\frac{2\bar{x}^3 + (a-2)\bar{x} - a}{3\bar{x}^2 + 1 + a} = 0$$

ve

$$\frac{(\bar{x}-1)(2\bar{x}^2 + 2\bar{x} + a)}{3\bar{x}^2 + 1 + a} = 0$$

elde edilir. Böylece denkleminin tek pozitif denge noktası ise $\bar{x} = 1$ 'dir. Yukarıdaki grupta bulunan 2 ve 6 numaralı denklemlerin global özellikleri Xianyi Li tarafından belirlenmiştir (Li, 2005a; 2005b).

Şimdi verilecek alt bölümlerde ise yukarıda listelenen rasyonel fark denklemlerinin hangi koşullar altında aşikar çözümü olduğu, salınımlı olduğu ve çözümlerinin $\bar{x} = 1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olup olmadığı araştırılmıştır.

3.1 $x_{n+1} = F(x_n; x_n; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

İlk olarak $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, (3.1) denkleminde $j = k = 0$ alındığında elde edilen

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} \quad (3.2)$$

dördüncü mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemini ele alalım. Bu denklem metin

içinde $x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ ile gösterilmiştir. $x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ fark denkleminin bütün çözümlerinin tek pozitif denge noktası olan $\bar{x} = 1$ noktasındaki global özelliklerini inceleyeceğiz. Şimdi, (3.2) denkleminin bahsedilen özelliklerini belirleyebilmek için gerekli olan bazı lemma ve teoremleri verebiliriz.

Lemma 3.1.1:

$x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması yani aşikar çözüm olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.3)$$

olmasıdır.

İspat:

Lemmanın olmayanı ergi yönteminden faydalanarak ispatı yapılırken, öncelikle gereklilik koşulunun sağlandığı kabul ederek yeterlilik koşulunun sağlandığı gösterilmiştir. Buna göre keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-1}^2 x_{N-4} + 2x_{N-1} + x_{N-4} + a}{x_{N-1}^2 + 2x_{N-1} x_{N-4} + 1 + a} = 1$$

dir. Burada bazı düzenlemeler yapılırsa $(x_{N-4} - 1)(x_{N-1} - 1)^2 = 0$ olması gerekliliği ortaya çıkar. Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

Şimdi de $(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$ olduğunu kabul ederek gereklilik koşulunun sağlandığını göstermeye çalışalım. $(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$ alındığında 4 durum söz konusu olur. Yani $x_{-3} = 1$ veya $x_{-2} = 1$ veya $x_{-1} = 1$ veya $x_0 = 1$ durumlarından bir tanesi geçerlidir. Buna göre;

- i) $x_{-3} = 1$ ise bütün çözümlerin aşikar çözüm olduğu gösterilmelidir. Bu ise tümevarım ile kolaylıkla gösterilebilir.

$$x_1 = \frac{x_0^2 x_{-3} + 2x_0 + x_{-3} + a}{x_0^2 + 2x_0 x_{-3} + 1 + a} = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1 + a}{x_0^2 + 2x_0 + 1 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 x_{-2} + 2x_1 + x_{-2} + a}{x_1^2 + 2x_1 x_{-2} + 1 + a} = \frac{x_1^2 + 2x_1 + 1 + a}{x_1^2 + 2x_1 + 1 + a} = 1$$

ve $x_{n-1} = 1$ olduğu kabul edilirse

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 x_{n-4} + 2x_{n-1} + x_{n-4} + a}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} x_{n-4} + 1 + a} = 1$$

bulunur. Böylelikle tümevarımla $n \geq 1$ için $x_n = 1$ olduğu ispatlanmış olur.

ii) $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 2$ için $x_n = 1$ olduğunu gösterelim.

$$x_1 = \frac{x_0^2 x_{-3} + 2x_0 + x_{-3} + a}{x_0^2 + 2x_0 x_{-3} + 1 + a}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1^2 x_{-2} + 2x_1 + x_{-2} + a}{x_1^2 + 2x_1 x_{-2} + 1 + a} \\ &= \frac{x_1^2 + 2x_1 + 1 + a}{x_1^2 + 2x_1 + 1 + a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve $x_{n-1} = 1$ olduğu kabul edilirse

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 x_{n-4} + 2x_{n-1} + x_{n-4} + a}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} x_{n-4} + 1 + a} = 1$$

bulunur. Böylelikle tümevarımla $n \geq 2$ için $x_n = 1$ olduğu ispatlanmış olur.

Diğer iki durum da incelendiğinde

iii) $x_{-1} = 1$ ise $n \geq 3$ için $x_n = 1$,

iv) $x_0 = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$,

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu sonuçlar, (i) ve (ii) koşullarındaki benzer şekilde işlemler yapılarak elde edilmiştir ve burada bu işlemlerin detaylarına değinilmeyecektir.

Eğer (3.2) denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.3) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.1.2:

$\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$\text{i) } (x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$$

$$\text{ii) } (x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$$

$$\text{iii) } (x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$$

İspat:

Yukarıdaki üç maddenin ispatı aşağıdaki gibi yapılmıştır:

i) (3.2) denkleminde 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n^2 x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} - 1 = \frac{(x_n - 1)^2 (x_{n-3} - 1)}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$ olduğu açıkça görülür.

ii) (3.2) denkleminde x_n çıkartılırsa

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n^2 x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} - x_n \\ &= -\frac{(x_n - 1)[(x_n + x_{n-3})(x_n + 1) + a]}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{(x_n + x_{n-3})(x_n + 1) + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$ ifadesi pozitifdir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1} - x_n)$ ile

$(x_n - 1)$ ters işaretli olmalıdır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ olur.

Diğer koşul da (ii) maddesinin ispatına benzer bir yaklaşımla gösterilebilir.

Teorem 3.1.1:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$, veya $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ şeklindedir.

İspat:

(3.2) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ olmak üzere 4 durum söz konusudur:

- i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1$
- ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$
- iii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$
- iv) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1$.

Görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 3 olabilir. Lemma 3.1.2(i) kullanılarak sırasıyla her durum için belirleyelim.

- i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} > 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} > 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} > 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1, x_{p+16} > 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} > 1, x_{p+21} > 1, \dots$

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri görüldüğü gibi $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ kuralını izlemektedir.

- ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} < 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} < 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1, x_{p+16} < 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} < 1, x_{p+21} > 1, x_{p+22} < 1, x_{p+23} > 1, \dots$

olarak hesaplanır. Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin kuralının ise $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ olduğu görülür.

Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.1.2:

$x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin $\bar{x} = 1$ pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında (3.2) denkleminin lineerleştirilmiş denklemini oluşturarak Teorem 2.2.1'deki kararlılık teoreminden yararlanılmıştır. Teoreme göre (3.2) denkleminin lineerleştirilmiş

$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. Burada ki q_i katsayıları ise,

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_0^2 u_3 + 2u_0 + u_3 + a}{u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a}$$
 denkleminin i .indise göre türevinin denge noktasındaki

değeridir. Buna göre, $x_{n+1} = F_{00}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin lineerleştirilmiş denkleminin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = \frac{2u_0^2 u_3 + 2}{u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0^2 u_3 + 2u_0 + u_3 + a)(2u_0 + 2u_3)}{(u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{4}{4+a} - \frac{(4+a).4}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{u_0^2 + 1}{u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0^2 u_3 + 2u_0 + u_3 + a).2u_0}{(u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a)2}{(4+a)^2} = 0$$

Lineerleştirilmiş denklem ise

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0.y_n + 0.y_{n-1} + 0.y_{n-2} + 0.y_{n-3} = 0$$

olarak bulunur. Her $|q_i| < 1$ olduğundan $\bar{x} = 1$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

Şimdi ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$ olduğu gösterilmelidir.

Çözümün limitinin 1 olduğunu iki adımda gösterelim:

1) Eğer başlangıç koşulları (3.3) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.3) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.1.2'den dolayı monotonik ve sınırlıdır. Dolayısıyla yakınsaktır yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.2) denkleminin her iki yanının n sonsuza

giderken limiti alınırsa $L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$ elde edilir ve bu denklem çözülürse $L = 1$

bulunur. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1$ 'dir.

b) Eğer çözüm salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ veya

$\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$

şeklindedir.

Öncelikle pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$, kuralı

ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+3}\}^-$

negatif yarı dönmeyi gösterebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}\}^+ \text{ ve } \{x_{p+4n+3}\}^-$$

şeklinde alınabilir. Buna göre Lemma 3.1.2 de kullanılarak

$$\text{i) } x_{p+4n+2} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n};$$

$$\text{ii) } x_{p+4n+3} < x_{p+4n+2}; x_{p+4n+4} > x_{p+4n+3}$$

$$\text{iii) } x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+2} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve

üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\{x_{p+4n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ 'nin limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M \text{ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$$

olacaktır. Burada x_{p+4n+4} hesaplanır ve her iki tarafın n sonsuza giderken limiti alınırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve

$$L = \frac{M^2 .L + 2M + L + a}{M^2 + 2M .L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

elde edilir. Hem L hem de M pozitif sayılar olduğundan yukarıdaki eşitliğin sıfır olabilmesi için $L=1$ olmalıdır. Benzer işlemler M 'yi belirleyebilmek için de yapılırsa yani

$$x_{p+4n+7} = \frac{x_{p+4n+6}^2 x_{p+4n+3} + 2x_{p+4n+6} x_{p+4n+3} + x_{p+4n+3} + a}{x_{p+4n+6}^2 + 2x_{p+4n+6} x_{p+4n+3} + 1 + a}$$

denkleminin her iki tarafının da limiti alınırsa

$$M = \frac{M.L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M.L + 1 + a}$$

elde edilir. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1)+a]=0$ ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ kuralını sağladığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ pozitif yarı dönmeyi, $\{x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ negatif yarı dönmeleri gösterebiliriz.

Periyodik olarak devam ettiği için $n=0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+4n}\}^+, \{x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre Lemma 3.1.2 de kullanılarak

$$\text{i) } x_{p+4n+1} < x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3};$$

$$\text{ii) } x_{p+4n+3} < x_{p+4n+4}; x_{p+4n} > x_{p+4n+1}$$

$$\text{iii) } x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; x_{p+4n+1} < x_{p+4n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

alınırsa $x_{p+4n+4} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+1} < x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, yani yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve limit alınırsa

$$L = \frac{M^2 \cdot L + 2M + L + a}{M^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L = 1$ bulunur.

Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+5} = \frac{x_{p+4n+4}^2 x_{p+4n+1} + 2x_{p+4n+4} x_{p+4n+1} + x_{p+4n+1} + a}{x_{p+4n+4}^2 + 2x_{p+4n+4} x_{p+4n+1} + 1 + a}$$

denkleminin her iki tarafının limiti alınırsa

$$M = \frac{M \cdot L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

elde edilir. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ bulunur ve buradan da $M = 1$ olarak hesaplanır. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ kuralını sağlasın. Pozitif yarı dönmeler $\{x_p, x_{p+1}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler de $\{x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ ile temsil edilebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise $\{x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$ ile gösterilebilir. Buna göre Lemma 3.1.2'den dolayı

$$\text{i) } x_{p+4n+2} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n} ; x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3} < x_{p+4n+4} ;$$

$$\text{ii) } x_{p+4n+4} < x_{p+4n} ; x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}$$

$$\text{iii) } x_{p+4n+2} < x_{p+4n+6} ; x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+2}\}_{n=0}^{\infty}$

artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla dizi yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = M$

olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve her iki tarafının n sonsuza giderken limiti alınırsa

$$L = \frac{M^2.L + 2M + L + a}{M^2 + 2M.L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L = 1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirleyebilmek için

$$x_{p+4n+6} = \frac{x_{p+4n+5}^2 x_{p+4n+2} + 2x_{p+4n+5} + x_{p+4n+2} + a}{x_{p+4n+5}^2 + 2x_{p+4n+5} x_{p+4n+2} + 1 + a}$$

denkleminin her iki tarafının limitini aldığımızda

$$M = \frac{M.L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M.L + 1 + a}$$

elde edilir. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ bulunur ve buradan da $M = 1$ olduğu görülür. $M = L = 1$ olduğu açıktır yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Son olarak da $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ kuralının sağlandığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ ile pozitif, $\{x_{p+1}\}^-$ ile de negatif yarı dönme temsil edilsin. Periyodik olarak

devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+2n}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise

$\{x_{p+2n+1}\}^-$ ile gösterilsin. Buna göre Lemma 3.1.2'den dolayı

$$\text{i) } x_{p+2n+1} < x_{p+2n} ; x_{p+2n+1} < x_{p+2n+2}$$

$$\text{ii) } x_{p+2n+3} < x_{p+2n+2} ; x_{p+2n+3} < x_{p+2n+4}$$

$$\text{iii) } x_{p+2n+4} < x_{p+2n} ; x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+2n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n} = L$ olsun.

Benzer şekilde $\{x_{p+2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla limiti vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+1} = M$ olsun. Burada x_{p+2n+4} aşağıdaki gibi hesaplanırsa

$$x_{p+2n+4} = \frac{x_{p+2n+3}^2 x_{p+2n} + 2x_{p+2n+3} x_{p+2n} + x_{p+2n} + a}{x_{p+2n+3}^2 + 2x_{p+2n+3} x_{p+2n} + 1 + a}$$

ve eşliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$L = \frac{M^2 \cdot L + 2M + L + a}{M^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+2n+5} = \frac{x_{p+2n+4}^2 x_{p+2n+1} + 2x_{p+2n+4} x_{p+2n+1} + x_{p+2n+1} + a}{x_{p+2n+4}^2 + 2x_{p+2n+4} x_{p+2n+1} + 1 + a}$$

denkleminin limitinden

$$M = \frac{M \cdot L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

elde edilir. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ dir. Böylelikle her koşulda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.2 $x_{n+1} = F(x_n; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

Bu kısımda $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, (3.1) denkleminde $j = 0$, $k = 2$ alınarak elde edilen

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2} x_{n-3} + x_n + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a} \quad (3.4)$$

dördüncü mertebeden fark denklemini incelenmiştir (Gülpınar ve Bayram, 2009). Yukarıdaki $x_{n+1} = F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin tek pozitif denge noktası $\bar{x} = 1$ noktasıdır.

Lemma 3.2.1:

(3.4) denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.5)$$

olmasıdır.

İspat:

$N \geq 1$ keyfi bir sayı olmak üzere $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-1} x_{N-3} x_{N-4} + x_{N-1} + x_{N-3} + x_{N-4} + a}{x_{N-1} x_{N-3} + x_{N-1} x_{N-4} + x_{N-3} x_{N-4} + 1 + a} = 1$$

dir. Bu denklemde içler dışlar çarpımı yapılır ve denklem düzenlenirse $(x_{N-4} - 1)(x_{N-3} - 1)(x_{N-1} - 1) = 0$ olması gerekir. Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$ olsun. Bu takdirde her çarpanın tek tek sıfıra eşit olmaları durumları söz konusudur. Yani

i) $x_{-3} = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_0 x_{-2} x_{-3} + x_0 + x_{-2} + x_{-3} + a}{x_0 x_{-2} + x_0 x_{-3} + x_{-2} x_{-3} + 1 + a} = \frac{x_0 x_{-2} + x_0 + x_{-2} + 1 + a}{x_0 x_{-2} + x_0 + x_{-2} + 1 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 x_{-1} x_{-2} + x_1 + x_{-1} + x_{-2} + a}{x_1 x_{-1} + x_1 x_{-2} + x_{-1} x_{-2} + 1 + a} = \frac{x_{-1} x_{-2} + 1 + x_{-1} + x_{-2} + a}{x_{-1} + x_{-2} + x_{-1} x_{-2} + 1 + a} = 1$$

dir ve tümevarımla $x_{n-1} = 1$ olduğu kabul edilirse

$$x_n = \frac{x_{n-1}x_{n-3}x_{n-4} + x_{n-1} + x_{n-3} + x_{n-4} + a}{x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}x_{n-4} + 1 + a} = 1$$

$n \geq 1$ için $x_n = 1$ bulunur. Diğer maddeler için de benzer şekilde işlemler yapılarak

ii) $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$,

iii) $x_{-1} = 1$ ise $n \geq 2$ için $x_n = 1$,

iv) $x_0 = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$,

elde edilir.

Eğer (3.4) denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.5) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.2.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, (3.4) denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$

ii) $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$

iii) $(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n-2} - 1) < 0$

iv) $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$

İspat:

i) $x_{n+1} = F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminde 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n x_{n-2} x_{n-3} + x_n + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a} - 1 = \frac{(x_n - 1)(x_{n-2} - 1)(x_{n-3} - 1)}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$ olacaktır.

ii) $x_{n+1} = F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminde x_n çıkartılırsa

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n x_{n-2} x_{n-3} + x_n + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a} - x_n \\ &= - \frac{(x_n - 1)[x_{n-2}(x_n + 1) + x_{n-3}(x_n + 1) + a]}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{[x_{n-2}(x_n + 1) + x_{n-3}(x_n + 1) + a]}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi

$(x_{n+1} - x_n)$ ile $(x_n - 1)$ ters işaretlidir. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ olmalıdır.

Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.1:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, \dots$ veya $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, \dots$ veya $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ kuralını sağlar.

İspat:

(3.4) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ olmak üzere 4 durum söz konusudur.

i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1$

ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$

iii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$

iv) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1$

görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 3 olabilir. Lemma 3.2.2(i) kullanılarak sırasıyla her durumu inceleyelim.

i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1, x_{p+1} < 1, x_{p+2} > 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} > 1,$
 $x_{p+6} > 1, x_{p+7} < 1, x_{p+8} > 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} > 1, x_{p+13} < 1, x_{p+14} > 1,$
 $x_{p+15} > 1, x_{p+16} < 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} > 1, x_{p+19} < 1, x_{p+20} > 1, x_{p+21} > 1, \dots$

elde edilir. Görüldüğü gibi pozitif ve negatif yarı dönmeler $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ olarak hesaplanır.

Diğer maddeler de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.2:

$x_{n+1} = F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x}=1$ denge noktası civarında (3.4) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_0 u_2 u_3 + u_0 + u_2 + u_3 + a}{u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = \frac{u_2 u_3 + 1}{u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0 u_2 u_3 + u_0 + u_2 + u_3 + a)(u_2 + u_3)}{(u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a)2}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{u_0 u_3 + 1}{u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0 u_2 u_3 + u_0 + u_2 + u_3 + a)(u_0 + u_3)}{(u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a)2}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{u_0 u_2 + 1}{u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0 u_2 u_3 + u_0 + u_2 + u_3 + a)(u_0 + u_2)}{(u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_2 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a)2}{(4+a)^2} = 0$$

olarak elde edilir. (3.4) denkleminin lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0 \cdot y_n + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2} + 0 \cdot y_{n-3} = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\bar{x}=1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise denge noktasının

global çekici olduğunu, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

eşitliğini sağladığını göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim:

1) Eğer başlangıç koşulları (3.5) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.5) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.2.2'den dolayı artan veya azalan bir yapıdadır ve sınırlıdır. Dolayısıyla yakınsaktır yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.4) denkleminin her iki yanının limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözüldüğünde ise } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

b) Eğer çözüm kesin salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$$, \dots, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, \dots, \text{ veya } \dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots \text{ veya}$$

$$\dots, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots \text{ şeklindedir.}$$

Öncelikle pozitif ve negatif yarı dönmelerin $, \dots, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, \dots,$

kuralı ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri,

$\{x_{p+3}, x_{p+4}, x_{p+5}\}^-$ negatif yarı dönmeleri gösterebiliriz. Periyodik olarak devam

ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+6n}, x_{p+6n+1}, x_{p+6n+2}\}^+, \quad \{x_{p+6n+3}, x_{p+6n+4}, x_{p+6n+5}\}^-$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre Lemma 3.2.2 de kullanılarak

$$\text{i) } x_{p+6n+2} < x_{p+6n+1} < x_{p+6n}; \quad x_{p+6n+3} < x_{p+6n+4} < x_{p+6n+5}$$

$$\text{ii) } x_{p+6n+6} < x_{p+6n+2}; \quad x_{p+6n+9} > x_{p+6n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan ise

$$x_{p+6n+6} < x_{p+6n+2} < x_{p+6n+1} < x_{p+6n} \text{ ve } x_{p+6n+3} < x_{p+6n+4} < x_{p+6n+5} < x_{p+6n+9}$$

elde edilir. $x_{p+6n+6} < x_{p+6n+2} < x_{p+6n+1} < x_{p+6n}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+6n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+6n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+6n+3} < x_{p+6n+4} < x_{p+6n+5} < x_{p+6n+9}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+6n+1} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+6n+2} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+6n+3} < x_{p+6n+4} < x_{p+6n+5} < x_{p+6n+9}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+6n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+6n+3} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+6n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+6n+5} = M \text{ olacaktır.}$$

Burada x_{p+6n+6}

$$x_{p+6n+6} = \frac{x_{p+6n+5}x_{p+6n+3}x_{p+6n+2} + x_{p+6n+5} + x_{p+6n+3} + x_{p+6n+2} + a}{x_{p+6n+5}x_{p+6n+3} + x_{p+6n+5}x_{p+6n+2} + x_{p+6n+3}x_{p+6n+2} + 1 + a}$$

olarak hesaplanır ve her iki tarafının limiti alınırsa

$$L = \frac{M.M.L + M + M + L + a}{M.M + M.L + M.L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

bulunur. Hem L hem de M pozitif sayılar olduğundan yukarıdaki eşitliğin sıfır olabilmesi için $L=1$ olmalıdır. Benzer şekilde $1 \leq x_{p+6n+1} < x_{p+6n+2}$ olduğundan M 'yi belirleyebilmek için

$$x_{p+6n+5} = \frac{x_{p+6n+4}x_{p+6n+2}x_{p+6n+1} + x_{p+6n+4} + x_{p+6n+2} + x_{p+6n+1} + a}{x_{p+6n+4}x_{p+6n+2} + x_{p+6n+4}x_{p+6n+1} + x_{p+6n+2}x_{p+6n+1} + 1 + a}$$

olarak alınır, limiti

$$M = \frac{M.L.L + M + L + L + a}{M.L + M.L + L.L + 1 + a}$$

olarak hesaplanır. Denklem düzenlenince $(M - 1)[2L(M + 1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ olduğundan çözümün limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Şimdi de pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ kuralı ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+2}\}^-$ negatif yarı dönmeleri gösterebiliriz. Periyodik olarak devam ettiğinden pozitif ve negatif yarı dönmeler $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+3n}, x_{p+3n+1}\}^+, \{x_{p+3n+2}\}^-$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre Lemma 3.2.2 de kullanılarak

- i) $x_{p+3n} > x_{p+3n+1}; x_{p+3n} > x_{p+3n+3}; x_{p+3n} > x_{p+3n+4}; x_{p+3n+1} > x_{p+3n+4}$
- ii) $x_{p+3n+5} > x_{p+3n+2}$

elde edilir. Bu bağıntılardan ilkinden

$$x_{p+3n} > x_{p+3n+1} > x_{p+3n+4} \text{ ve } x_{p+3n+3} > x_{p+3n+4} \text{ elde edilir ve bu eşitsizliklerden dolayı}$$

$\{x_{p+3n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n} = L$$

olsun.

Yine $x_{p+3n} > x_{p+3n+1} > x_{p+3n+4}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+1} = L, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+3} = L, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+4} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+3n+5} > x_{p+3n+2}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla limiti vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+2} = M$ olsun.

Yukarıdakine benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+8} = M$ olacaktır.

Burada

$$x_{p+3n+6} = \frac{x_{p+3n+5}x_{p+3n+3}x_{p+3n+2} + x_{p+3n+5} + x_{p+3n+3} + x_{p+3n+2} + a}{x_{p+3n+5}x_{p+3n+3} + x_{p+3n+5}x_{p+3n+2} + x_{p+3n+3}x_{p+3n+2} + 1 + a}$$

hesaplanır ve limiti alınırsa

$$L = \frac{M.M.L + M + M + L + a}{M.L + M.M + M.L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. $1 \leq x_{p+3n+5} < x_{p+3n+2}$ olduğu kullanılarak M 'yi belirlemek için x_{p+3n+5} 'i oluşturulursa

$$x_{p+3n+5} = \frac{x_{p+3n+4}x_{p+3n+2}x_{p+3n+1} + x_{p+3n+4} + x_{p+3n+2} + x_{p+3n+1} + a}{x_{p+3n+4}x_{p+3n+2} + x_{p+3n+4}x_{p+3n+1} + x_{p+3n+2}x_{p+3n+1} + 1 + a}$$

ve limiti alınırsa

$$M = \frac{M.L.L + L + M + L + a}{M.L + L.L + M.L + 1 + a}$$

elde edilir. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 'dir.

Şimdi de pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, \dots$ kuralı ile oluştuğunu kabul edelim. Negatif yarı dönmeler $\{x_p, x_{p+1}\}^-$ ile, pozitif yarı dönme ise $\{x_{p+2}\}^+$ ile gösterilsin. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+3n}, x_{p+3n+1}\}^-, \{x_{p+3n+2}\}^+$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.2.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+3n} < x_{p+3n+1}; \quad x_{p+3n} < x_{p+3n+3}; \quad x_{p+3n} < x_{p+3n+4}; \quad x_{p+3n+1} < x_{p+3n+4}$$

$$ii) \quad x_{p+3n+5} < x_{p+3n+2}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan ilkinden

$x_{p+3n} < x_{p+3n+1} < x_{p+3n+4}$ ve $x_{p+3n+3} < x_{p+3n+4}$ elde edilir ve bu eşitsizliklerden dolayı

$\{x_{p+3n}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+3n} < x_{p+3n+1} < x_{p+3n+4}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+1} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+3} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+4} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+3n+5} < x_{p+3n+2}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve

alttan 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+2} = M$ olsun. Yukarıdakine

benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+8} = M$ olacaktır.

Burada

$$x_{p+3n+6} = \frac{x_{p+3n+5}x_{p+3n+3}x_{p+3n+2} + x_{p+3n+5} + x_{p+3n+3} + x_{p+3n+2} + a}{x_{p+3n+5}x_{p+3n+3} + x_{p+3n+5}x_{p+3n+2} + x_{p+3n+3}x_{p+3n+2} + 1 + a}$$

teriminin limiti alınırsa

$$L = \frac{M.M.L + M + M + L + a}{M.L + M.M + M.L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. $1 \leq x_{p+3n+5} < x_{p+3n+2}$ olduğu kullanılarak, M 'yi belirlemek için x_{p+3n+5} terimi

$$x_{p+3n+5} = \frac{x_{p+3n+4}x_{p+3n+2}x_{p+3n+1} + x_{p+3n+4} + x_{p+3n+2} + x_{p+3n+1} + a}{x_{p+3n+4}x_{p+3n+2} + x_{p+3n+4}x_{p+3n+1} + x_{p+3n+2}x_{p+3n+1} + 1 + a}$$

şeklinde yazılır ve her iki tarafının n sonsuza giderken limiti alınırsa

$$M = \frac{M.L.L + L + M + L + a}{M.L + L.L + M.L + 1 + a}$$

elde edilir. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Son olarak da pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$

kuralı ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+1}\}^-$ negatif yarı dönmeleri gösterebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden $n=0,1,\dots$ için

$$\{x_{p+2n}\}^+, \{x_{p+2n+1}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.2.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+2n+4} < x_{p+2n}; \quad x_{p+2n+6} < x_{p+2n+2}$$

$$ii) \quad x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5}; \quad x_{p+2n+7} > x_{p+2n+3}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan ise

$$x_{p+2n+4} < x_{p+2n} \quad \text{ve} \quad x_{p+2n+6} < x_{p+2n+2}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\{x_{p+2n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n} = L$$

olsun. Yine yukarıdaki eşitsizliklerinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+2} = L, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+4} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5}$ ve $x_{p+2n+7} > x_{p+2n+3}$ eşitsizliklerinden dolayı

$\{x_{p+2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+1} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+5} = M \text{ olacaktır.}$$

Burada

$$x_{p+2n+4} = \frac{x_{p+2n+3}x_{p+2n+1}x_{p+2n} + x_{p+2n+3} + x_{p+2n+1} + x_{p+2n} + a}{x_{p+2n+3}x_{p+2n+1} + x_{p+2n+3}x_{p+2n} + x_{p+2n+1}x_{p+2n} + 1 + a}$$

hesaplanır ve ifadenin her iki tarafının limiti alınırsa

$$L = \frac{M.M.L + M + M + L + a}{M.M + M.L + M.L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+2n+5} = \frac{x_{p+2n+4}x_{p+2n+2}x_{p+2n+1} + x_{p+2n+4} + x_{p+2n+2} + x_{p+2n+1} + a}{x_{p+2n+4}x_{p+2n+2} + x_{p+2n+4}x_{p+2n+1} + x_{p+2n+2}x_{p+2n+1} + 1 + a}$$

ve iki tarafının da n sonsuza giderken limiti alınırsa

$$M = \frac{M.L.L + M + L + L + a}{M.L + M.L + L.L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1)+a]=0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Yani $x_{n+1} = F_{02}(x_n, x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.3 $x_{n+1} = F(x_n; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

Bu kısımda, $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, (3.1) denkleminde $j=0$, $k=3$ alındığında elde edilen

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}^2 x_n + x_n + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} \quad (3.6)$$

dördüncü mertebeden fark denkleminin global davranışları incelenmiştir. $x_{n+1} = F_{03}(x_n, x_{n-3})$ denklemin tek pozitif denge noktası $\bar{x} = 1$ noktasıdır.

Lemma 3.3.1:

(3.6) denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.7)$$

olmasıdır.

İspat:

Keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-1} x_{N-4}^2 + x_{N-1} + 2x_{N-4} + a}{x_{N-4}^2 + 2x_{N-1} x_{N-4} + 1 + a} = 1$$

dir. Burada içler dışlar çarpımı yapıp düzenlenirse $(x_{N-1} - 1)(x_{N-4} - 1)^2 = 0$ olması gerekir.

Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3}-1)(x_{-2}-1)(x_{-1}-1)(x_0-1) = 0$ olsun. Bu takdirde 4 durum söz konusudur.

i) $x_{-3} = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_0 x_{-3}^2 + x_0 + 2x_{-3} + a}{x_{-3}^2 + 2x_0 x_{-3} + 1 + a} = \frac{x_0 + x_0 + 2 + a}{1 + 2x_0 + 1 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 x_{-2}^2 + x_1 + 2x_{-2} + a}{x_{-2}^2 + 2x_1 x_{-2} + 1 + a} = \frac{x_{-2}^2 + 2x_{-2} + 1 + a}{x_{-2}^2 + 2x_{-2} + 1 + a} = 1$$

ve benzer şekilde devam edilirse tümevarımla $n \geq 1$ için $x_n = 1$ bulunur. Diğer terimler için de benzer şekilde işlemler yapılarak

ii) $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 2$ için $x_n = 1$,

iii) $x_{-1} = 1$ ise $n \geq 3$ için $x_n = 1$,

iv) $x_0 = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$,

elde edilir.

Eğer $x_{n+1} = F_{03}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.7) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.3.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{03}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1) > 0$

ii) $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$

iii) $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$

İspat:

i) (3.6) denkleminde 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n-3}^2 x_n + x_n + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} - 1 = \frac{(x_n - 1)(x_{n-3} - 1)^2}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1) > 0$ olacaktır.

ii) (3.6) denkleminde x_n çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n-3}^2 x_n + x_n + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} - x_n = -\frac{(x_n - 1)[2x_{n-3}(x_n + 1) + a]}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. $\frac{2x_{n-3}(x_n + 1) + a}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1} - x_n)$ ile $(x_n - 1)$

ters işaretli olmalıdır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ olur.

Diğeri de (ii) maddesine benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.1:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{03}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin salınımsız bir çözümüdür.

İspat:

Lemma 3.3.2(i)'ye bakılarak (3.6) denkleminin sadece pozitif yarı dönmelere veya sadece negatif yarı dönmelere sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Burada $p \geq 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur. $(x_{n+1} - 1)$ ile $(x_n - 1)$ aynı işaretli olduğundan ya ikisi birden pozitif ya da ikisi birden negatif olacaktır. Yani

$$\begin{aligned} x_{p-3} > 1, x_{p-2} > 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} > 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} > 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} > 1, \\ x_{p+7} > 1, x_{p+8} > 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} > 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} > 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} > 1, x_{p+15} > 1, \\ x_{p+16} > 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} > 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} > 1, x_{p+21} > 1, \dots \end{aligned}$$

ya da

$$x_{p-3} < 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1, x_{p+1} < 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} < 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} < 1, x_{p+6} < 1,$$

$$x_{p+7} < 1, x_{p+8} < 1, x_{p+9} < 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} < 1, x_{p+12} < 1, x_{p+13} < 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} < 1, \\ x_{p+16} < 1, x_{p+17} < 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} < 1, x_{p+20} < 1, x_{p+21} < 1, x_{p+22} < 1, x_{p+23} < 1, \dots$$

olur.

Teorem 3.3.2:

$x_{n+1} = F_{03}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin $\bar{x} = 1$ pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında (3.6) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ belirlenmelidir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_0 u_3^2 + u_0 + 2u_3 + a}{u_3^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = \frac{u_3^2 + 1}{u_3^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0 u_3^2 + u_0 + 2u_3 + a) \cdot 2u_3}{(u_3^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a)2}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{2u_0 u_3 + 2}{u_3^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0 u_3^2 + u_0 + 2u_3 + a) \cdot (2u_3 + 2u_0)}{(u_3^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{4}{4+a} - \frac{(4+a)4}{(4+a)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0 \cdot y_n + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2} + 0 \cdot y_{n-3} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\bar{x} = 1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim.

- 1) Eğer başlangıç koşulları (3.7) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

- 2) Başlangıç koşulları (3.7) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

Çözüm denge noktası civarında salınımsızdır. Çözüm, Lemma 3.3.2(ii)'den dolayı $(x_{n-1} - 1) > 0$ ise $x_{n-1} > x_n$ dir. Yani monoton azalandır ve alttan sınırlıdır. Dolayısıyla limit vardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.6) denkleminin her iki yanının limiti alınır

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözümlerse } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

$(x_{n-1} - 1) < 0$ ise $x_{n-1} < x_n$ dir. Yani monoton artandır ve üstten sınırlıdır. Dolayısıyla limit vardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır. $x_{n+1} = F_{03}(x_n, x_{n-3})$ denkleminin her iki yanının n

$$\text{sonsuz} \text{ giderken limiti alınır} \text{ } M = \frac{M^3 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem}$$

çözümlerse $M = 1$ bulunur. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M = 1 \text{ 'dir.}$$

Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.4 $x_{n+1} = F(x_{n-1}; x_{n-1}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

$a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, (3.1) denkleminde $j = k = 1$ alınarak üretilen

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}^2 x_{n-3} + 2x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a} \quad (3.8)$$

dördüncü mertebeden fark denkleminin global davranışlarını inceleyelim. Bilindiği gibi $x_{n+1} = F_{11}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin tek pozitif denge noktası $\bar{x} = 1$ noktasıdır.

Lemma 3.4.1:

(3.8) denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-1} - 1) = 0 \wedge (x_{-2} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.9)$$

olmasıdır.

İspat:

Keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-2}^2 x_{N-4} + 2x_{N-2} + x_{N-4} + a}{x_{N-2}^2 + 2x_{N-2} x_{N-4} + 1 + a} = 1$$

dir. Burada içler dışlar çarpımı yapıp düzenlenirse $(x_{N-4} - 1)(x_{N-2} - 1)^2 = 0$ olması gerekir.

Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3} - 1)(x_{-1} - 1) = 0 \wedge (x_{-2} - 1)(x_0 - 1) = 0$ olsun. Bu takdirde 4 durum söz konusudur.

i) $x_{-3} = 1 \wedge x_{-2} = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_{-1}^2 x_{-3} + 2x_{-1} + x_{-3} + a}{x_{-1}^2 + 2x_{-1} x_{-3} + 1 + a} = \frac{x_{-1}^2 + 2x_{-1} + 1 + a}{x_{-1}^2 + 2x_{-1} + 1 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_0^2 x_{-2} + 2x_0 + x_{-2} + a}{x_0^2 + 2x_0 x_{-2} + 1 + a} = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1 + a}{x_0^2 + 2x_0 + 1 + a} = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse tümevarımla $n \geq 1$ için $x_n = 1$ bulunur ve açıkça

görüldüğü gibi $x_{-3} = 1$ koşulu tek indisli çözümlerin, $x_{-2} = 1$ koşulu ise çift indisli çözümlerin aşikar çözüm olmasını sağlamaktadır. Diğer terimler için de benzer şekilde işlemler yapılarak

$$\text{ii) } x_{-3} = 1 \wedge x_0 = 1 \text{ ise } n \geq 1 \text{ için } x_n = 1,$$

$$\text{iii) } x_{-1} = 1 \wedge x_{-2} = 1 \text{ ise } n \geq 1 \text{ için } x_n = 1,$$

$$\text{iv) } x_{-1} = 1 \wedge x_0 = 1 \text{ ise } n \geq 1 \text{ için } x_n = 1$$

olduğu gösterilebilir.

Eğer $x_{n+1} = F_{11}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.9) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.4.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{11}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$\text{i) } (x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$$

$$\text{ii) } (x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n-1} - 1) < 0$$

$$\text{iii) } (x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$$

İspat:

i) (3.8) denklemden 1 çıkartarak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n^2 x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} - 1 = \frac{(x_n - 1)^2 (x_{n-3} - 1)}{x_n x_{n-2} + x_n x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$ olacaktır.

ii) (3.8) denklemden x_n çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a} - x_n = -\frac{(x_n - 1)[(x_n + x_{n-3})(x_n + 1) + a]}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. Burada $\frac{(x_n + x_{n-3})(x_n + 1) + a}{x_n^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1} - x_n)$ ile $(x_n - 1)$ ters işaretlidir. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ olur.

Diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.4.1:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{11}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$, veya $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ şeklindedir.

İspat:

(3.8) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ olmak üzere 4 durum söz konusudur.

- i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1$
- ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$
- iii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$
- iv) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1$

görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 3 olabilir. Lemma 3.4.2(i)'yi kullanarak sırasıyla her durum için belirleyelim.

- i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} > 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} > 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} > 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1, x_{p+16} > 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} > 1, x_{p+21} > 1, \dots$

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri görüldüğü gibi $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ kuralını izlemektedir.

- ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} < 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} < 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1,$

$$x_{p+15} > 1, x_{p+16} < 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} < 1, x_{p+21} > 1, \dots,$$

olarak hesaplanır. Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin kuralının ise $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ olduğu görülür.

Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.4.2:

$x_{n+1} = F_{11}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında (3.8) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_0^2 u_3 + 2u_0 + u_3 + a}{u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = \frac{2u_0^2 u_3 + 2}{u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0^2 u_3 + 2u_0 + u_3 + a)(2u_0 + 2u_3)}{(u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{4}{4+a} - \frac{(4+a) \cdot 4}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{u_0^2 + 1}{u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_0^2 u_3 + 2u_0 + u_3 + a) \cdot 2u_0}{(u_0^2 + 2u_0 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a) \cdot 2}{(4+a)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0 \cdot y_n + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2} + 0 \cdot y_{n-3} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\bar{x} = 1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim.

1) Eğer başlangıç koşulları (3.9) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.9) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.4.2'den dolayı monoton artan veya azalandır ve aynı zamanda sınırlıdır. Dolayısıyla limiti vardır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.8) denkleminin her iki yanının limiti alınır

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözümlerse } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

b) Eğer çözüm kesin salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$$\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots \text{ veya}$$

$$\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$$

şeklindedir.

Öncelikle pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$, kuralı

ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+3}\}^-$

negatif yarı dönmeyi gösterebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}\}^+, \{x_{p+4n+3}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.4.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+4n+2} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n};$$

$$ii) \quad x_{p+4n+3} < x_{p+4n+2}; \quad x_{p+4n+4} > x_{p+4n+3}$$

$$\text{iii)} \quad x_{p+4n+4} < x_{p+4n} ; x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+2} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$ olsun. Yukarıdakine

benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$ olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve limiti alınırsa

$$L = \frac{M^2 \cdot L + 2M + L + a}{M^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

bulunur. Hem L hem de M pozitif sayılar olduğundan yukarıdaki eşitliğin sıfır olabilmesi için $L=1$ olmalıdır. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+7} = \frac{x_{p+4n+6}^2 x_{p+4n+3} + 2x_{p+4n+6} x_{p+4n+3} + x_{p+4n+3} + a}{x_{p+4n+6}^2 + 2x_{p+4n+6} x_{p+4n+3} + 1 + a}$$

ve limiti alınırsa

$$M = \frac{M.L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M.L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M - 1)[2L(M + 1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Şimdi de çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ kuralını sağladığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ pozitif yarı dönmeyi, $\{x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ negatif yarı dönmeleri gösterebiliriz.

Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+4n}\}^+, \{x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.4.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+4n+1} < x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3};$$

$$ii) \quad x_{p+4n+3} < x_{p+4n+4}; \quad x_{p+4n} > x_{p+4n+1}$$

$$iii) \quad x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; \quad x_{p+4n+1} < x_{p+4n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+4} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+1} < x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = M$ olsun.

Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve her iki tarafının limiti alınırsa

$$L = \frac{M^2 \cdot L + 2M + L + a}{M^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L = 1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+5} = \frac{x_{p+4n+4}^2 x_{p+4n+1} + 2x_{p+4n+4} x_{p+4n+1} + x_{p+4n+1} + a}{x_{p+4n+4}^2 + 2x_{p+4n+4} x_{p+4n+1} + 1 + a}$$

ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$M = \frac{M \cdot L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da

$M = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ kuralını sağlasın. $\{x_p, x_{p+1}\}^+$ ile pozitif, $\{x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ ile de negatif yarı dönmeleri temsil etsin. Periyodik olarak devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise $\{x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$ ile temsil edilsin.

Buna göre Lemma 3.4.2'den dolayı

$$i) \quad x_{p+4n+2} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}; \quad x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3} < x_{p+4n+4};$$

$$ii) \quad x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; \quad x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}$$

$$iii) \quad x_{p+4n+2} < x_{p+4n+6}; \quad x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+2} < x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = M$ olsun.

Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n} + 1 + a}$$

elde edilir ve x_{p+4n+4} 'ün her iki tarafının limiti alınır

$$L = \frac{M^2.L + 2M + L + a}{M^2 + 2M.L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+6} = \frac{x_{p+4n+5}^2 x_{p+4n+2} + 2x_{p+4n+5} + x_{p+4n+2} + a}{x_{p+4n+5}^2 + 2x_{p+4n+5} x_{p+4n+2} + 1 + a}$$

eşitliğin her iki tarafının limiti alınır

$$M = \frac{M.L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M.L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Ve son olarak da $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ kuralını sağlandığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ ile pozitif, $\{x_{p+1}\}^-$ ile de negatif yarı dönmeyi temsil edelim. Periyodik

olarak devam ettiği için pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+2n}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler

ise $\{x_{p+2n+1}\}^-$ ile temsil edelim. Buna göre Lemma 3.4.2'den dolayı

$$i) \quad x_{p+2n+1} < x_{p+2n} ; x_{p+2n+1} < x_{p+2n+2}$$

$$ii) \quad x_{p+2n+3} < x_{p+2n+2} ; x_{p+2n+3} < x_{p+2n+4}$$

$$iii) \quad x_{p+2n+4} < x_{p+2n} ; x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+2n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n} = L$ olsun.

Benzer şekilde $\{x_{p+2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+1} = M$ olsun.

Burada x_{p+2n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+2n+4} = \frac{x_{p+2n+3}^2 x_{p+2n} + 2x_{p+2n+3} x_{p+2n} + x_{p+2n} + a}{x_{p+2n+3}^2 + 2x_{p+2n+3} x_{p+2n} + 1 + a}$$

ve her iki tarafının limiti alınır

$$L = \frac{M^2 \cdot L + 2M + L + a}{M^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+2n+5} = \frac{x_{p+2n+4}^2 x_{p+2n+1} + 2x_{p+2n+4} x_{p+2n+1} + x_{p+2n+1} + a}{x_{p+2n+4}^2 + 2x_{p+2n+4} x_{p+2n+1} + 1 + a}$$

ve her iki tarafının limiti alınır

$$M = \frac{M \cdot L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir. Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunur. Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.5 $x_{n+1} = F(x_{n-1}; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

Şimdi de $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere ve (3.1) denkleminde $j=1, k=3$ alınarak oluşturulan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n-3}^2 + 2x_{n-3} + x_{n-1} + a}{2x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a} \quad (3.10)$$

dördüncü mertebeden fark denklemini ele alınsın, bu denklem kısaca $x_{n+1} = F_{13}(x_{n-1}, x_{n-3})$ ile gösterilecektir. Bu denklemin de tek pozitif denge noktası $\bar{x}=1$ noktasıdır ve bu nokta civarındaki global özellikleri irdelenecektir.

Lemma 3.5.1:

$x_{n+1} = F_{13}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-1} - 1) = 0 \wedge (x_{-2} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.11)$$

olmasıdır.

İspat:

Keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-2}x_{N-4}^2 + 2x_{N-4} + x_{N-2} + a}{x_{N-4}^2 + 2x_{N-2}x_{N-4} + 1 + a} = 1$$

dir. Bu denklemde içler dışlar çarpımı yapılırsa $(x_{N-2} - 1)(x_{N-4} - 1)^2 = 0$ olması gerekir. Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3} - 1)(x_{-1} - 1) = 0 \wedge (x_{-2} - 1)(x_0 - 1) = 0$ olsun. Bu takdirde 4 durum söz konusudur.

i) $x_{-3} = 1$ ve $x_{-2} = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_{-1}x_{-3}^2 + 2x_{-3} + x_{-1} + a}{2x_{-1}x_{-3} + x_{-3}^2 + 1 + a} = \frac{2x_{-1} + 2 + a}{2x_{-1} + 2 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_0 x_{-2}^2 + 2x_{-2} + x_0 + a}{2x_0 x_{-2} + x_{-2}^2 + 1 + a} = \frac{2x_0 + 2 + a}{2x_0 + 2 + a} = 1$$

elde edilir ve benzer şekilde devam edilirse tüm $n \geq 1$ için $x_n = 1$ elde edilir.

ii) $x_{-3} = 1$ ve $x_0 = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_{-1} x_{-3}^2 + 2x_{-3} + x_{-1} + a}{2x_{-1} x_{-3} + x_{-3}^2 + 1 + a} = \frac{2x_{-1} + 2 + a}{2x_{-1} + 2 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_0 x_{-2}^2 + 2x_{-2} + x_0 + a}{2x_0 x_{-2} + x_{-2}^2 + 1 + a} = \frac{x_{-2}^2 + 2x_{-2} + 1 + a}{2x_{-2} + x_{-2}^2 + 1 + a} = 1$$

elde edilir. Diğer değerler için yapıldığında tüm $n \geq 1$ için $x_n = 1$ olduğu açıktır.

iii) $x_{-1} = 1$ ve $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$

iv) $x_{-1} = 1$ ve $x_0 = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$

elde edilir.

(iii) ve (iv) maddelerin ispatları yukarıdakilere benzer şekilde yapılabilir.

Eğer (3.10) denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.11) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.5.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{13}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(x_{n+1} - 1)(x_{n-1} - 1) > 0$

ii) $(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n-1} - 1) < 0$

iii) $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$

İspat:

i) (3.10) denkleminde 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n-1}x_{n-3}^2 + 2x_{n-3} + x_{n-1} + a}{2x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a} - 1 = \frac{(x_{n-3} - 1)^2(x_{n-1} - 1)}{2x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_{n-1} - 1) > 0$ olacaktır.

ii) (3.10) denkleminde x_{n-1} çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}x_{n-3}^2 + 2x_{n-3} + x_{n-1} + a}{2x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a} - x_{n-1} = -\frac{(x_{n-2} - 1)[2x_{n-3}(x_{n-1} + 1) + a]}{2x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a}$$

elde edilir. $\frac{[2x_{n-3}(x_{n-1} + 1) + a]}{2x_{n-1}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1} - x_{n-1})$ ile

$(x_{n-1} - 1)$ ters işaretlidir. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n-1} - 1) < 0$ olur.

Diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.5.1:

$\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{13}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ şeklindedir.

İspat:

(3.10) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ olmak üzere 2 durum söz konusudur.

i) $x_{p-2} > 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$

ii) $x_{p-2} > 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$

görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 2 olabilir. Lemma 3.6.2(i) kullanılarak sırasıyla her durum için belirleyelim.

i) $x_{p-2} > 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1,$
 $x_{p+7} > 1, x_{p+8} < 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} < 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1,$

$$x_{p+15} > 1, x_{p+16} < 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} < 1, \dots$$

olarak hesaplanır. Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin kuralının ise $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ olduğu görülür.

Diğer madde incelendiğinde de pozitif ve negatif yarı dönmeleri yukarıdaki gibi $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ kuralını sağlar.

Teorem 3.5.2:

$x_{n+1} = F_{13}(x_{n-1}, x_{n-3})$ denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik karardır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında (3.10) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1 u_3^2 + u_1 + 2u_3 + a}{2u_1 u_3 + u_3^2 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{u_3^2 + 1}{2u_1 u_3 + u_3^2 + 1 + a} - \frac{(u_1 u_3^2 + u_1 + 2u_3 + a) \cdot 2u_3}{(2u_1 u_3 + u_3^2 + 1 + a)^2}$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a) \cdot 2}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{2u_1 u_3 + 2}{2u_1 u_3 + u_3^2 + 1 + a} - \frac{(u_1 u_3^2 + u_1 + 2u_3 + a)(2u_1 + 2u_3)}{(2u_1 u_3 + u_3^2 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{4}{4+a} - \frac{(4+a) \cdot 4}{(4+a)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0 \cdot y_n + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2} + 0 \cdot y_{n-3} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\bar{x} = 1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise global çekici olduğunu yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim:

1) Eğer başlangıç koşulları (3.11) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.11) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.5.2'den dolayı monoton ve sınırlıdır. Dolayısıyla limit vardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.10) denkleminin her iki yanının limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözümlerse } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

b) Eğer çözüm kesin salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$$\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots \text{ şeklindedir.}$$

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$

kuralını sağlandığını kabul edelim. $\{x_p\}^+$ ile pozitif, $\{x_{p+1}\}^-$ ile de negatif yarı

dönmeler temsil edilsin. Periyodik olarak devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler

$\{x_{p+2n}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise $\{x_{p+2n+1}\}^-$ ile temsil edilebilir. Buna göre

Lemma 3.5.2'den dolayı

$$\text{i) } x_{p+2n+2} < x_{p+2n}; x_{p+2n+4} < x_{p+2n+2}$$

$$\text{ii) } x_{p+2n+3} > x_{p+2n+1}; x_{p+2n+3} < x_{p+2n+5}$$

$$\text{iii) } x_{p+2n+4} < x_{p+2n}; x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+2n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n} = L$ olsun.

Benzer şekilde $\{x_{p+2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+1} = M$ olsun.

Burada x_{p+2n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+2n+4} = \frac{x_{p+2n}^2 x_{p+2n+2} + 2x_{p+2n} x_{p+2n+2} + x_{p+2n+2} + a}{x_{p+2n}^2 + 2x_{p+2n+2} x_{p+2n} + 1 + a}$$

ve limiti alınır

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+2n+5} = \frac{x_{p+2n+1}^2 x_{p+2n+3} + 2x_{p+2n+1} x_{p+2n+3} + x_{p+2n+3} + a}{x_{p+2n+1}^2 + 2x_{p+2n+3} x_{p+2n+1} + 1 + a}$$

ifadesinin her iki tarafının limiti alınır

$$M = \frac{M^3 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2M(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir. Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.6 $x_{n+1} = F(x_{n-2}; x_{n-2}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

$a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, $j = k = 2$ yazılarak elde edilen

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}^2 x_{n-3} + 2x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a} \quad (3.12)$$

dördüncü mertebeden fark denklemini inceleyelim. $x_{n+1} = F_{22}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin tek pozitif denge noktası $\bar{x} = 1$ noktasıdır.

Lemma 3.6.1:

$x_{n+1} = F_{22}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.13)$$

olmasıdır.

İspat:

Keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-3}^2 x_{N-4} + 2x_{N-3} + x_{N-4} + a}{x_{N-3}^2 + 2x_{N-3} x_{N-4} + 1 + a} = 1$$

dir. Bu denklemden içler dışlar çarpımı yapıp düzenlenirse $(x_{N-4} - 1)(x_{N-3} - 1)^2 = 0$ olması gerekir. Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$ olsun. Bu takdirde 4 durum söz konusudur.

i) $x_{-3} = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_{-2}^2 x_{-3} + 2x_{-2} + x_{-3} + a}{x_{-2}^2 + 2x_{-2} x_{-3} + 1 + a} = \frac{x_{-2}^2 + 2x_{-2} + 1 + a}{x_{-2}^2 + 2x_{-2} + 1 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_{-1}^2 x_{-2} + 2x_{-1} + x_{-2} + a}{x_{-1}^2 + 2x_{-1}x_{-2} + 1 + a}$$

$$x_3 = \frac{x_0^2 x_{-1} + 2x_0 + x_{-1} + a}{x_0^2 + 2x_0x_{-1} + 1 + a}$$

$$x_4 = \frac{x_1^2 x_0 + 2x_1 + x_0 + a}{x_1^2 + 2x_1x_0 + 1 + a} = \frac{2x_0 + 2 + a}{2x_0 + 2 + a} = 1$$

Benzer şekilde devam edilirse tümevarımla $n \geq 8$ için $x_n = 1$ bulunur. Diğer terimler için de benzer şekilde işlemler yapılarak

ii) $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 8$ için $x_n = 1$,

iii) $x_{-1} = 1$ ise $n \geq 5$ için $x_n = 1$,

iv) $x_0 = 1$ ise $n \geq 6$ için $x_n = 1$,

elde edilir.

Eğer (3.12) denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.13) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.6.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{22}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$

ii) $(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n-2} - 1) < 0$

iii) $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$

İspat:

i) (3.12) denkleminde 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n-2}^2 x_{n-3} + 2x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}x_{n-3} + 1 + a} - 1 = \frac{(x_{n-2} - 1)^2 (x_{n-3} - 1)}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1}-1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1}-1)(x_{n-3}-1) > 0$ olacaktır.

ii) (3.12) denkleminden x_{n-2} çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_{n-2} = \frac{x_{n-2}^2 x_{n-3} + 2x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}x_{n-3} + 1 + a} - x_{n-2} = -\frac{(x_{n-2}-1)[(x_{n-2}+x_{n-3})(x_{n-2}+1)+a]}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}x_{n-3} + 1 + a}$$

elde edilir. $\frac{(x_{n-2}+x_{n-3})(x_{n-2}+1)+a}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}x_{n-3} + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1}-x_{n-2})$ ile $(x_{n-2}-1)$ ters işaretlidir. Dolayısıyla $(x_{n+1}-x_{n-2})(x_{n-2}-1) < 0$ olur.

Diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.6.1:

$\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{22}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$, veya $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ şeklindedir.

İspat:

(3.12) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ olmak üzere 4 durum söz konusudur.

i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1$

ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$

iii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$

iv) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1$

görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 3 olabilir. Lemma 3.6.2(i) kullanılarak sırasıyla her durum için belirleyelim.

i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} > 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} > 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} > 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1,$

$$x_{p+16} > 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} > 1, x_{p+21} > 1, \dots$$

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri görüldüğü gibi $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ kuralını izlemektedir.

$$\text{ii) } x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, \\ x_{p+7} > 1, x_{p+8} < 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} < 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1, \\ x_{p+16} < 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} < 1, x_{p+21} > 1, x_{p+22} < 1, x_{p+23} > 1, \dots$$

olarak hesaplanır. Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin kuralının ise $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ olduğu görülür.

Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.6.2:

$x_{n+1} = F_{22}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik karardır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik karardır hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında (3.11) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_2^2 u_3 + 2u_2 + u_3 + a}{u_2^2 + 2u_2 u_3 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{2u_2^2 u_3 + 2}{u_2^2 + 2u_2 u_3 + 1 + a} - \frac{(u_2^2 u_3 + 2u_2 + u_3 + a)(2u_2 + 2u_3)}{(u_2^2 + 2u_2 u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{4}{4+a} - \frac{(4+a) \cdot 4}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{u_2^2 + 1}{u_2^2 + 2u_2u_3 + 1 + a} - \frac{(u_2^2u_3 + 2u_2 + u_3 + a).2u_2}{(u_2^2 + 2u_2u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4 + a} - \frac{(4 + a)2}{(4 + a)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0 \cdot y_n + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2} + 0 \cdot y_{n-3} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\bar{x} = 1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim.

1) Eğer başlangıç koşulları (3.13) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.13) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.6.2'den dolayı monoton ve sınırlıdır. Dolayısıyla limit vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.12) denkleminin her iki yanının limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözümlerse } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

b) Eğer çözüm kesin salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$$\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots \text{ veya}$$

$$\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$$

şeklindedir.

Öncelikle pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$, kuralı

ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+3}\}^-$

negatif yarı dönmeyi gösterebiliriz. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\left\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}\right\}^+, \left\{x_{p+4n+3}\right\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.6.2 de kullanılarak

$$\text{i) } x_{p+4n+3} < x_{p+4n}; x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1}$$

$$\text{ii) } x_{p+4n+3} < x_{p+4n}; x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$ olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+1}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+1} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+1}^2 + 2x_{p+4n+1} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{2L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+7} = \frac{x_{p+4n+4}^2 x_{p+4n+3} + 2x_{p+4n+4} + x_{p+4n+3} + a}{x_{p+4n+4}^2 + 2x_{p+4n+4} x_{p+4n+3} + 1 + a}$$

oluşturulur ve limiti alınır

$$M = \frac{M.L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M.L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M - 1)[2L(M + 1) + a] = 0$ elde edilir ve hem L hem de M pozitif sayılar olduğundan yukarıdaki eşitliğin sıfır olabilmesi için $M = 1$ olmalıdır. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün diğer pozitif ve negatif yarı dönmeleri de incelendiğinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunmuş olur.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ kuralını sağladığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ pozitif yarı dönmeyi, $\{x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ negatif yarı dönmeleri gösterebiliriz.

Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+4n}\}^+, \{x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.6.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+4n+1} < x_{p+4n+4}; \quad x_{p+4n+2} < x_{p+4n+5}; \quad x_{p+4n+3} < x_{p+4n+6}$$

$$ii) \quad x_{p+4n+3} < x_{p+4n+6}; \quad x_{p+4n+4} < x_{p+4n+7}$$

$$\text{iii) } x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; x_{p+4n+1} < x_{p+4n+5}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+4} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde (i) ve (ii) eşitsizliklerinden dolayı $\{x_{p+4n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer

şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+1}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+1} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+1}^2 + 2x_{p+4n+1} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve limiti alınırsa

$$L = \frac{M^2 \cdot L + 2M + L + a}{M^2 + 2M \cdot L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1)+a]=0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+5} = \frac{x_{p+4n+2}^2 x_{p+4n+1} + 2x_{p+4n+2} x_{p+4n+1} + a}{x_{p+4n+2}^2 + 2x_{p+4n+2} x_{p+4n+1} + 1 + a}$$

ifadesinin limiti alınır

$$M = \frac{M^2 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M - 1)[2M(M + 1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ kuralını sağlasın. $\{x_p, x_{p+1}\}^+$ pozitif, $\{x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ de negatif yarı dönmeleri temsil etsin. Periyodik olarak devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise $\{x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$ ile temsil edilebilir. Buna göre Lemma 3.6.2'den dolayı

- i) $x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; x_{p+4n+4} < x_{p+4n+1}; x_{p+4n+1} < x_{p+4n+5};$
- ii) $x_{p+4n+2} < x_{p+4n+5}; x_{p+4n+2} < x_{p+4n+6}$
- iii) $x_{p+4n+3} < x_{p+4n+6}; x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine (i) eşitsizliklerinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde (ii) ve (iii) eşitsizliklerinden dolayı $\{x_{p+4n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer

şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} ifadesi hesaplanıp, limiti alınırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n+1}^2 x_{p+4n} + 2x_{p+4n+1} x_{p+4n} + x_{p+4n} + a}{x_{p+4n+1}^2 + 2x_{p+4n+1} x_{p+4n} + 1 + a}$$

ve

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirleyebilmek için

$$x_{p+4n+6} = \frac{x_{p+4n+3}^2 x_{p+4n+2} + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n+2} + a}{x_{p+4n+3}^2 + 2x_{p+4n+3} x_{p+4n+2} + 1 + a}$$

eşitliğinin limiti alınırsa

$$M = \frac{M^3 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2M(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da

$M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi bu salınım kuralı için de $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Son olarak da $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ kuralını sağlandığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ ile pozitif, $\{x_{p+1}\}^-$ ile de negatif yarı dönmeyi temsil edilsin. Periyodik

olarak devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+2n}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler

ise $\{x_{p+2n+1}\}^-$ ile gösterilsin. Buna göre Lemma 3.6.2'den dolayı

$$\text{i) } x_{p+2n+4} < x_{p+2n} ; x_{p+2n+6} < x_{p+2n+2}$$

$$\text{ii) } x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5} ; x_{p+2n+3} < x_{p+2n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+2n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n} = L$$

olsun.

Benzer şekilde $\{x_{p+2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+1} = M$ olsun.

Burada x_{p+2n+4} hesaplanır, ve limiti alınırsa

$$x_{p+2n+4} = \frac{x_{p+2n+1}^2 x_{p+2n} + 2x_{p+2n+1} + x_{p+2n} + a}{x_{p+2n+1}^2 + 2x_{p+2n+1} x_{p+2n} + 1 + a}$$

ve

$$L = \frac{M^2 . L + 2M + L + a}{M^2 + 2M . L + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2M(L+1)+a]=0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+2n+5} = \frac{x_{p+2n+2}^2 x_{p+2n+1} + 2x_{p+2n+2} + x_{p+2n+1} + a}{x_{p+2n+2}^2 + 2x_{p+2n+2} x_{p+2n+1} + 1 + a}$$

ifadesinin limiti

$$M = \frac{M . L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M . L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1)+a]=0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir. Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.7 $x_{n+1} = F(x_{n-2}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

Bu kısımda $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, $j=2$, $k=3$ alınarak elde edilen

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}x_{n-3}^2 + x_{n-2} + 2x_{n-3} + a}{2x_{n-2}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a} \quad (3.14)$$

dördüncü mertebeden fark denklemini incelenerek global özellikleri araştırılmıştır.

$x_{n+1} = F_{23}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin tek pozitif denge noktası $\bar{x} = 1$ noktasıdır.

Lemma 3.7.1:

$x_{n+1} = F_{23}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1)(x_{-2} - 1)(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0 \quad (3.15)$$

olmasıdır.

İspat:

Keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-3}x_{N-4}^2 + x_{N-3} + 2x_{N-4} + a}{2x_{N-3}x_{N-4} + x_{N-4}^2 + 1 + a} = 1$$

dir. Bu denklemde içler dışlar çarpımı yapılırsa $(x_{N-3} - 1)(x_{N-4} - 1)^2 = 0$ olması gerektiği

kolaylıkla görülebilir. Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3}-1)(x_{-2}-1)(x_{-1}-1)(x_0-1) = 0$ olsun. Bu takdirde 4 durum söz konusudur.

i) $x_{-3} = 1$ ise

$$x_1 = \frac{x_{-2}x_{-3}^2 + x_{-2} + 2x_{-3} + a}{2x_{-2}x_{-3} + x_{-3}^2 + 1 + a} = \frac{2x_{-2} + 2 + a}{2x_{-2} + 2 + a} = 1$$

olur. Diğer başlangıç koşulları bilinmediğinden x_2 , x_3 ve x_6 çözümleri 1'den farklıdır.

Diğer çözümler ise 1 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla fark denkleminin indisi 6'dan büyük çözümleri aşikar çözümdür. Yani $n \geq 7$ için $x_n = 1$

ii) $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 4$ için $x_n = 1$,

iii) $x_{-1} = 1$ ise $n \geq 5$ için $x_n = 1$,

iv) $x_0 = 1$ ise $n \geq 6$ için $x_n = 1$,

olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Eğer (3.14) denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.15) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.7.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{23}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(x_{n+1} - 1)(x_{n-2} - 1) > 0$

ii) $(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n-2} - 1) < 0$

iii) $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$

İspat:

i) (3.14) denkleminde 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n-2}x_{n-3}^2 + x_{n-2} + 2x_{n-3} + a}{2x_{n-2}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a} - 1 = \frac{(x_{n-2} - 1)(x_{n-3} - 1)^2}{2x_{n-2}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_{n-2} - 1) > 0$ olacaktır.

ii) (3.14) denkleminde x_{n-2} çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_{n-2} = \frac{x_{n-2}x_{n-3}^2 + x_{n-2} + 2x_{n-3} + a}{2x_{n-2}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a} - x_{n-2} = -\frac{(x_{n-2} - 1)[2x_{n-3}(x_{n-2} + 1) + a]}{2x_{n-2}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a}$$

elde edilir. $\frac{2x_{n-3}(x_{n-2} + 1) + a}{2x_{n-2}x_{n-3} + x_{n-3}^2 + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1} - x_{n-2})$ ile

$(x_{n-2} - 1)$ ters işaretlidir. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n-2} - 1) < 0$ olur.

Diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.7.1:

$\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{23}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, \dots$ şeklindedir.

İspat:

(3.14) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ olmak üzere 3 durum söz konusudur.

i) $x_{p-2} > 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$

ii) $x_{p-2} > 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1$

iii) $x_{p-2} > 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$

görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 2 olabilir. Lemma 3.7.2(i) kullanılarak sırasıyla her durum için belirleyelim.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & x_{p-2} > 1, \quad x_{p-1} < 1, \quad x_p > 1, \quad x_{p+1} > 1, \quad x_{p+2} < 1, \quad x_{p+3} > 1, \quad x_{p+4} > 1, \quad x_{p+5} < 1, \quad x_{p+6} > 1, \\ & x_{p+7} > 1, \quad x_{p+8} < 1, \quad x_{p+9} > 1, \quad x_{p+10} > 1, \quad x_{p+11} < 1, \quad x_{p+12} > 1, \quad x_{p+13} > 1, \quad x_{p+14} < 1, \\ & x_{p+15} > 1, \quad x_{p+16} > 1, \quad x_{p+17} < 1, \quad x_{p+18} > 1, \quad x_{p+19} > 1, \quad x_{p+20} < 1, \quad x_{p+21} > 1, \dots \end{aligned}$$

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri görüldüğü gibi $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ kuralını izlemektedir.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & x_{p-2} > 1, \quad x_{p-1} < 1, \quad x_p < 1, \quad x_{p+1} > 1, \quad x_{p+2} < 1, \quad x_{p+3} < 1, \quad x_{p+4} > 1, \quad x_{p+5} < 1, \quad x_{p+6} < 1, \\ & x_{p+7} > 1, \quad x_{p+8} < 1, \quad x_{p+9} < 1, \quad x_{p+10} > 1, \quad x_{p+11} < 1, \quad x_{p+12} < 1, \quad x_{p+13} > 1, \quad x_{p+14} < 1, \\ & x_{p+15} < 1, \quad x_{p+16} > 1, \quad x_{p+17} < 1, \quad x_{p+18} < 1, \quad x_{p+19} > 1, \quad x_{p+20} < 1, \quad x_{p+21} < 1, \dots \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin kuralının ise $\dots, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, \dots$ olduğu görülür.

Diğer durum da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.7.2:

$x_{n+1} = F_{23}(x_{n-2}, x_{n-3})$ denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında (3.14) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_2 u_3^2 + u_2 + 2u_3 + a}{2u_2 u_3 + u_3^2 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{u_3^2 + 1}{u_3^2 + 2u_2u_3 + 1 + a} - \frac{(u_3^2u_2 + u_2 + 2u_3 + a).2u_3}{(u_3^2 + 2u_2u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{2}{4+a} - \frac{(4+a)2}{(4+a)^2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{2u_3^2u_2 + 2}{u_3^2 + 2u_2u_3 + 1 + a} - \frac{(u_3^2u_2 + u_2 + 2u_3 + a)(2u_2 + 2u_3)}{(u_3^2 + 2u_2u_3 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{4}{4+a} - \frac{(4+a).4}{(4+a)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

$$y_{n+1} = q_0y_n + q_1y_{n-1} + q_2y_{n-2} + q_3y_{n-3} = 0.y_n + 0.y_{n-1} + 0.y_{n-2} + 0.y_{n-3} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\bar{x} = 1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim.

1) Eğer başlangıç koşulları (3.15) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.15) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.7.2'den dolayı monoton ve sınırlıdır. Dolayısıyla limit vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.14) denkleminin her iki yanının limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözümlerse } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

b) Eğer çözüm kesin salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$$\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, \dots$$

şeklindedir.

Öncelikle pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ kuralı ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+2}\}^-$ negatif yarı dönmeyi gösterebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+3n}, x_{p+3n+1}\}^+, \{x_{p+3n+2}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.7.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+3n+3} < x_{p+3n+2} ; x_{p+3n+4} < x_{p+3n+3}$$

$$ii) \quad x_{p+3n+4} < x_{p+3n+1} ; x_{p+3n+5} < x_{p+3n+2}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+3n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n} = L$$

olsun. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+1} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+3n+2} < x_{p+3n+1}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+2} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+8} = M$ olacaktır.

Burada x_{p+3n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+3n+4} = \frac{x_{p+3n}^2 x_{p+3n+1} + x_{p+3n+1} + 2x_{p+3n} + a}{x_{p+3n}^2 + 2x_{p+3n+1} x_{p+3n} + 1 + a}$$

bulunur ve bu ifadenin limiti alınır

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1)+a]=0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+3n+8} = \frac{x_{p+3n+4}^2 x_{p+3n+5} + x_{p+3n+5} + 2x_{p+3n+4} + a}{x_{p+3n+4}^2 + 2x_{p+3n+5} x_{p+3n+4} + 1 + a}$$

ve

$$M = \frac{M.L^2 + 2L + M + a}{L^2 + 2M.L + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2L(M+1)+a]=0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Şimdi de pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, \dots$ kuralı ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+1}, x_{p+2}\}^-$ negatif yarı dönmeyi gösterebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden $n=0,1,\dots$ için

$$\{x_{p+3n}\}^+, \{x_{p+3n+1}, x_{p+3n+2}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.7.2 de kullanılarak

- i) $x_{p+3n+6} < x_{p+3n+3} < x_{p+3n}$
- ii) $x_{p+3n+4} > x_{p+3n+1}; x_{p+3n+5} > x_{p+3n+2}$
- iii) $x_{p+3n+5} > x_{p+3n+2}$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+3n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n} = L$$

olsun. Aynı zamanda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+6} = L$ 'dir.

Benzer şekilde $x_{p+3n+4} < x_{p+3n+1}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+3n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+1} = M$ olsun. Ayrıca $x_{p+3n+5} > x_{p+3n+1}$ ve $x_{p+3n+5} > x_{p+3n+2}$ eşitsizliklerinden dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+2} = M$ olacaktır. Yukarıdakine benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+3n+5} = M$ olacaktır.

Burada x_{p+3n+6} hesaplanırsa

$$x_{p+3n+6} = \frac{x_{p+3n+2}^2 x_{p+3n+3} + x_{p+3n+3} + 2x_{p+3n+2} + a}{x_{p+3n+2}^2 + 2x_{p+3n+3} x_{p+3n+2} + 1 + a}$$

elde edilir ve bu ifadenin limiti ise

$$L = \frac{LM^2 + L + 2M + a}{L^2 + 2ML + 1 + a}$$

şekindedir. Bu denklem düzenlenirse $(L-1)[2M(L+1)+a]=0$ dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+3n+5} = \frac{x_{p+3n+1}^2 x_{p+3n+2} + x_{p+3n+2} + 2x_{p+3n+1} + a}{x_{p+3n+1}^2 + 2x_{p+3n+2} x_{p+3n+1} + 1 + a}$$

ifadesinin her iki tarafının limiti alınır

$$M = \frac{M^3 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2M(M+1)+a]=0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir. Böylelikle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$ olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.8 $x_{n+1} = F(x_{n-3}; x_{n-3}; x_{n-3})$ Fark Denkleminin Global Davranışlarının İncelenmesi

$a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, (3.1) denkleminde $j = k = 3$ alınarak oluşturulan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}^3 + 3x_{n-3} + a}{3x_{n-3}^2 + 1 + a} \quad (3.16)$$

dördüncü mertebeden fark denkleminin global özelliklerini belirleyelim. $x_{n+1} = F_{33}(x_{n-3})$ denkleminin tek pozitif denge noktası $\bar{x} = 1$ dir.

Lemma 3.8.1:

$x_{n+1} = F_{33}(x_{n-3})$ denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ pozitif çözümünün 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-3} - 1) = 0 \wedge (x_{-2} - 1) = 0 \wedge (x_{-1} - 1) = 0 \wedge (x_0 - 1) = 0 \quad (3.17)$$

olmasıdır.

İspat:

Keyfi bir $N \geq 1$ sayısı için $x_N = 1$ ve $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ olsun.

$$x_N = \frac{x_{N-4}^3 + 3x_{N-4} + a}{3x_{N-4}^2 + 1 + a} = 1$$

dir. Yukarıdaki denklemden içler dışlar çarpımı yapıp düzenlenirse $(x_{N-4} - 1)^3 = 0$ olması gerekir. Bu da $-3 \leq n \leq N-1$ için $x_n \neq 1$ ile çelişki oluşturur.

$(x_{-3} - 1) = 0 \wedge (x_{-2} - 1) = 0 \wedge (x_{-1} - 1) = 0 \wedge (x_0 - 1) = 0$ olsun. Bu takdirde tek durum yani her başlangıç koşulunun 1 olması söz konusudur. Buna göre

$$x_1 = \frac{x_{-3}^3 + 3x_{-3} + a}{3x_{-3}^2 + 1 + a} = \frac{4 + a}{4 + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_{-2}^3 + 3x_{-2} + a}{3x_{-2}^2 + 1 + a} = \frac{4 + a}{4 + a} = 1$$

$$x_3 = \frac{x_{-1}^3 + 3x_{-1} + a}{3x_{-1}^2 + 1 + a} = \frac{4 + a}{4 + a} = 1$$

$$x_4 = \frac{x_0^3 + 3x_0 + a}{3x_0^2 + 1 + a} = \frac{4 + a}{4 + a} = 1$$

olur. Açıkça görüldüğü gibi her $n \geq 1$ için $x_n = 1$ olacaktır.

Eğer (3.16) denkleminin hiçbir başlangıç koşulu (3.17) denklemini sağlamıyorsa herhangi bir $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü için $x_n \neq 1$ 'dir. Yani aşikar olmayan çözümü vardır.

Lemma 3.8.2:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{33}(x_{n-3})$ denkleminin aşikar olmayan pozitif çözümü olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- i) $(x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$
- ii) $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$

İspat:

- i) (3.16) denkleminden 1 çıkartırsak

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n-3}^3 + 3x_{n-3} + a}{3x_{n-3}^2 + 1 + a} - 1 = \frac{(x_{n-3} - 1)^3}{3x_{n-3}^2 + 1 + a}$$

elde edilir. Burada payda pozitif olduğundan payın işareti ile $(x_{n+1} - 1)$ 'in işareti aynı olacaktır. Dolayısıyla $(x_{n+1} - 1)(x_{n-3} - 1) > 0$ olacaktır.

- ii) (3.16) denkleminden x_{n-3} çıkartılırsa

$$x_{n+1} - x_{n-3} = \frac{x_{n-3}^3 + 3x_{n-3} + a}{3x_{n-3}^2 + 1 + a} - x_{n-3} = -\frac{(x_{n-3} - 1)[2x_{n-3}(x_{n-3} + 1) + a]}{3x_{n-3}^2 + 1 + a}$$

elde edilir. $\frac{[2x_{n-3}(x_{n-3} + 1) + a]}{3x_{n-3}^2 + 1 + a}$ ifadesi pozitiftir. Görüldüğü gibi $(x_{n+1} - x_{n-3})$ ile $(x_{n-3} - 1)$

ters işaretlidir. Dolayısıyla $(x_{n+1} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0$ olur.

Teorem 3.8.1:

$\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$, $x_{n+1} = F_{33}(x_{n-3})$ denkleminin kesin salınımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ veya $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ veya $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ şeklindedir.

İspat:

(3.16) denkleminin kesin salınımlı olması için $p \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere 4 durum söz konusudur:

- i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1$
- ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1$
- iii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p > 1$
- iv) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} < 1, x_p < 1$

Görüldüğü gibi pozitif veya negatif yarı dönmelerin sayısı en fazla 3 olabilir. Lemma 3.8.2(i) kullanılarak sırasıyla her durum için belirleyelim.

- i) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p > 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} > 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} > 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} > 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1, x_{p+16} > 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} > 1, x_{p+21} > 1, \dots$

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri görüldüğü gibi $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ kuralını izlemektedir.

- ii) $x_{p-3} > 1, x_{p-2} < 1, x_{p-1} > 1, x_p < 1, x_{p+1} > 1, x_{p+2} < 1, x_{p+3} > 1, x_{p+4} < 1, x_{p+5} > 1, x_{p+6} < 1, x_{p+7} > 1, x_{p+8} < 1, x_{p+9} > 1, x_{p+10} < 1, x_{p+11} > 1, x_{p+12} < 1, x_{p+13} > 1, x_{p+14} < 1, x_{p+15} > 1, x_{p+16} < 1, x_{p+17} > 1, x_{p+18} < 1, x_{p+19} > 1, x_{p+20} < 1, x_{p+21} > 1, x_{p+22} < 1, x_{p+23} > 1, \dots$

olarak hesaplanır. Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin kuralının ise $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ olduğu görülür.

Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.8.2:

$x_{n+1} = F_{33}(x_{n-3})$ denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat:

Burada ispat için denge noktasının hem yerel asimptotik kararlı hem de global çekici olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\bar{x}=1$ denge noktası civarında (3.16) denkleminin lineerleştirilmiş $y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3}$ şeklindedir. q_i 'ler ise

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_3^3 + 3u_3 + a}{3u_3^2 + 1 + a} \text{ denkleminde}$$

$$q_0 = \frac{\partial F}{\partial u_0} = 0$$

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{3u_3^2 + 3}{3u_3^2 + 1 + a} - \frac{(u_3^3 + 3u_3 + a).6u_3}{(3u_3^2 + 1 + a)^2}$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = \frac{6}{4+a} - \frac{(4+a).6}{(4+a)^2} = 0$$

olarak elde edilir.

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2} + q_3 y_{n-3} = 0.y_n + 0.y_{n-1} + 0.y_{n-2} + 0.y_{n-3} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\bar{x}=1$ yerel asimptotik kararlıdır. Şimdi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu iki adımda gösterelim.

- 1) Eğer başlangıç koşulları (3.17) denklemini sağlıyorsa, $x_n = 1$ 'dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \text{ sağlanır.}$$

2) Başlangıç koşulları (3.17) denklemini sağlamıyorsa $n \geq -3$ için bir $x_n \neq 1$ vardır.

a) Eğer çözüm denge noktası civarında salınımsız ise Lemma 3.8.2'den dolayı monoton ve sınırlıdır. Dolayısıyla limit vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. (3.16) denkleminin her iki yanının limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a} \text{ elde edilir ve bu denklem çözümlerse } L = 1 \text{ bulunur. Yani}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = 1 \text{ 'dir.}$$

b) Eğer çözüm kesin salınımlı ise pozitif ve negatif yarı dönmeleri

$$\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, \dots \text{ veya}$$

$$\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots \text{ veya } \dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$$

şeklindedir.

Öncelikle pozitif ve negatif yarı dönmelerin $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$ kuralı

ile oluştuğunu kabul edelim. $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}^+$ pozitif yarı dönmeleri, $\{x_{p+3}\}^-$

negatif yarı dönmeyi gösterebiliriz. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}\}^+, \{x_{p+4n+3}\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.8.2 de kullanılarak

$$i) \quad x_{p+4n+4} < x_{p+4n}; \quad x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1}; \quad x_{p+4n+6} < x_{p+4n+2}; \quad x_{p+4n+8} < x_{p+4n+4}$$

$$ii) \quad x_{p+4n} > x_{p+4n+4} > x_{p+4n+8} > 1$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$ olsun. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = L$$

olur.

Benzer şekilde $x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$ eşitsizliğinden dolayı $\{x_{p+4n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$ olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n}^3 + 3x_{p+4n} + a}{3x_{p+4n}^2 + 1 + a}$$

ve limiti alınır

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{2L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L = 1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+7} = \frac{x_{p+4n+3}^3 + 3x_{p+4n+3} + a}{3x_{p+4n+3}^2 + 1 + a}$$

eşitliğinin limiti alınır

$$M = \frac{M^2 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2M(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmelerinin $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$

kuralını sağladığını kabul edelim. $\{x_p\}^+$ pozitif yarı dönmeyi, $\{x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$

negatif yarı dönmeleri gösterebilir. Periyodik olarak devam ettiğinden $n = 0, 1, \dots$ için

$$\left\{ x_{p+4n} \right\}^+, \left\{ x_{p+4n+1}, x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3} \right\}^-$$

şeklinde olacaktır. Buna göre Lemma 3.8.2 de kullanılarak

- i) $x_{p+4n+8} < x_{p+4n+4} < x_{p+4n}$;
- ii) $x_{p+4n+1} < x_{p+4n+5} < x_{p+4n+9}$;
- iii) $x_{p+4n+2} < x_{p+4n+6}$; $x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\left\{ x_{p+4n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine $x_{p+4n+4} < x_{p+4n}$ eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde (ii) ve (iii) eşitsizliklerinden dolayı $\left\{ x_{p+4n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer

şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n}^3 + 3x_{p+4n} + a}{3x_{p+4n}^2 + 1 + a}$$

ve n sonsuza giderken limiti

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$$

ifadesine eşit olur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1)+a]=0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+5} = \frac{x_{p+4n+1}^3 + 3x_{p+4n+1} + a}{3x_{p+4n+1}^2 + 1 + a}$$

ifadesinin limiti alınır

$$M = \frac{M^2 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2M(M+1)+a]=0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Çözümün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ kuralını sağlasın. $\{x_p, x_{p+1}\}^+$ pozitif, $\{x_{p+2}, x_{p+3}\}^-$ de negatif yarı dönmeleri temsil etsin. Periyodik olarak devam ettiği için pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+4n}, x_{p+4n+1}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise $\{x_{p+4n+2}, x_{p+4n+3}\}^-$ ile temsil edilebilir. Buna göre Lemma 3.8.2'den dolayı

$$\text{i) } x_{p+4n+8} < x_{p+4n+4} < x_{p+4n} ; x_{p+4n+5} < x_{p+4n+1}$$

$$\text{ii) } x_{p+4n+2} < x_{p+4n+6} ; x_{p+4n+3} < x_{p+4n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+4n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n} = L$$

olsun. Yine (i) eşitsizliklerinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+4} = L,$$

olur.

Benzer şekilde (ii) eşitsizliklerinden dolayı $\{x_{p+4n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+2} = M$ olsun. Yukarıdakine benzer şekilde burada da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+4n+7} = M$$

olacaktır.

Burada x_{p+4n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+4n+4} = \frac{x_{p+4n}^3 + 3x_{p+4n} + a}{3x_{p+4n}^2 + 1 + a}$$

ve bu denklemin limiti

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L=1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+4n+6} = \frac{x_{p+4n+2}^3 + 3x_{p+4n+2} + a}{3x_{p+4n+2}^2 + 1 + a}$$

ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$M = \frac{M^3 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M-1)[2M(M+1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M=1$ bulunur. Görüldüğü gibi bu salınım kuralı için de $M=L=1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dir.

Son olarak da $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ kuralının sağlandığını kabul edelim.

$\{x_p\}^+$ ile pozitif, $\{x_{p+1}\}^-$ ile de negatif yarı dönme temsil edilsin. Periyodik olarak devam ettiğinden pozitif yarı dönmeler $\{x_{p+2n}\}^+$ ile, negatif yarı dönmeler ise $\{x_{p+2n+1}\}^-$ ile temsil edilebilir. Buna göre Lemma 3.8.2'den dolayı

$$i) \quad x_{p+2n+4} < x_{p+2n}; \quad x_{p+2n+6} < x_{p+2n+2}$$

$$ii) \quad x_{p+2n+1} < x_{p+2n+5}; \quad x_{p+2n+3} < x_{p+2n+7}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan dolayı $\{x_{p+2n}\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Dolayısıyla limiti vardır ve sonludur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n} = L$$

olsun.

Benzer şekilde $\{x_{p+2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+2n+1} = M$ olsun.

Burada x_{p+2n+4} hesaplanırsa

$$x_{p+2n+4} = \frac{x_{p+2n}^3 + 3x_{p+2n} + a}{3x_{p+2n}^2 + 1 + a}$$

ve limiti alınırsa

$$L = \frac{L^3 + 3L + a}{3L^2 + 1 + a}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$(L-1)[2L(L+1) + a] = 0$$

dolayısıyla $L = 1$ bulunur. Benzer şekilde M 'yi belirlemek için

$$x_{p+2n+5} = \frac{x_{p+2n+1}^3 + 3x_{p+2n+1} + a}{3x_{p+2n+1}^2 + 1 + a}$$

ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$M = \frac{M^3 + 3M + a}{3M^2 + 1 + a}$$

olur. Denklem düzenlenince $(M - 1)[2M(M + 1) + a] = 0$ elde edilir ve buradan da $M = 1$ bulunur. Görüldüğü gibi bu salınım kuralı için de $M = L = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \text{ dir.}$$

Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1$$

olduğu bulunmuş olur.

Dolayısıyla denge noktası global asimptotik kararlıdır.

4. SONUÇLAR

En genel hali ile $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-j}x_{n-k}x_{n-3} + x_{n-j} + x_{n-k} + x_{n-3} + a}{x_{n-j}x_{n-k} + x_{n-j}x_{n-3} + x_{n-k}x_{n-3} + 1 + a} \quad j, k = 0, 1, 2, 3$$

dördüncü mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemlerinin global özellikleri incelenmiştir. Bu denklemlerin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümlerinin hangi gerek ve yeter koşullar altında aşikar çözümlerinin olduğu belirlenmiştir. Ayrıca her denklemin yarı dönme analizleri yapılmış bu analizlerin sonuçları incelendiğinde

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-j}^2x_{n-3} + 2x_{n-j} + x_{n-3} + a}{x_{n-j}^2 + 2x_{n-j}x_{n-3} + 1 + a}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

tipindeki fark denklemlerinin benzer özellikler gösterdiği gözlenmiştir. Bu denklemden üretilen 4 fark denklemi de, başlangıç koşullarının seçimine bağlı olarak, aynı salınımlılık özelliklerine sahiptir.

Ek olarak bu denklemlerin kararlılık analizi de yapılarak hangi gerek ve yeter koşullar altında global asimptotik kararlı oldukları, üretilen her denklem için ayrı ayrı saptanmıştır. Elde edilen temel sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$x_{n+1} = F(x_{n-j}; x_{n-k}; x_{n-3})$	Yarı Dönme Analizi Sonuçları	Kararlılık Analizi Sonuçları
$x_{n+1} = \frac{x_n^2x_{n-3} + 2x_n + x_{n-3} + a}{x_n^2 + 2x_nx_{n-3} + 1 + a}$	$\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.
$x_{n+1} = \frac{x_nx_{n-2}x_{n-3} + x_n + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_nx_{n-2} + x_nx_{n-3} + x_{n-2}x_{n-3} + 1 + a}$	$\dots, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, 3^+, 3^-, \dots$ $\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-3}^2 + x_n + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_n x_{n-3} + 1 + a}$	Denklemin tüm çözümleri salınımsızdır.	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.
$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}^2 x_{n-3} + 2x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$	$\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.
$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-3}^2 + x_{n-1} + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$	$\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.
$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}^2 x_{n-3} + 2x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-2}^2 + 2x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$	$\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.
$x_{n+1} = \frac{x_{n-2} x_{n-3}^2 + x_{n-2} + 2x_{n-3} + a}{x_{n-3}^2 + 2x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}$	$\dots, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, 2^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.
$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}^3 + 3x_{n-3} + a}{3x_{n-3}^2 + 1 + a}$	$\dots, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, \dots$ $\dots, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, 2^+, 2^-, \dots$ $\dots, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, 1^+, 3^-, \dots$ $\dots, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, 3^+, 1^-, \dots$	$\bar{x} = 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

KAYNAKLAR

Abu-Sarris, R. M., (2000), "Characterization of Rational Periodic Sequences", Journal of Difference Equations and Applications, 6:233-242.

Adams, R.A.; (2006), Calculus: A Complete Course (Sixth Edition), Pearson Education Canada Inc., Toronto

Amleh, A.M., Grove, E.A., Ladas, G., (1999), "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ ", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233:790-798.

Amleh A.M., Camouzis, E., Ladas, G., (2007), " On Second-Order Rational Difference Equations, Part 1", Journal of Difference Equations and Applications, 13(11):969-1004.

Camouzis E., Ladas, G., (2002), "Three Trichotomy Conjectures", Journal of Difference Equations and Applications, 8(5):495-500.

Camouzis, E., DeVault, R., Komsala, W., (2004), "On the Period Five Trichotomy of All Positive Solutions of $x_{n+1} = \frac{p + x_{n-2}}{x_n}$ ", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 291:40-49.

Camouzis, E., Chatterjee, E., Ladas, G., (2007), "On the Dynamics of $x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}}$ ", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 331:230-239.

Camouzis, E., Ladas, G., (2002), Dynamics of the Third Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures, Taylor & Francis Inc., New York.

Cunningham, K., Kulenovic, M.R.S., Ladas, G., Valicenti, S.V., (2001), "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{Bx_n + Cx_{n-1}}$ ", Nonlinear Analysis, 47 : 4603-4614.

Çınar, C., (2004), "On the positive Solutions of the Difference Equation $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + bx_n x_{n-1}}$ ", Applied Mathematics and Computation, 156(2):587-590.

Feuer, J., (2004), "On the Behavior of Solutions of $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ ", Applicable Analysis, 83(6):599-606.

Gibbons, C.H., Kulenovic, M.R.S., Ladas, G., Voulov, H.D., (2002), "On the Trichotomy Character of $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}$ ", Journal of Difference Equations and Applications, 8(1):75-92.

Gülpınar, M.T., Bayram, M., (2009), "Global Asymptotic Stability for a Fourth-Order Rational Difference Equation", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2009, Article ID 616982.

- Hamza, A.E., Morsy, A., (2009), "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n^k}$ ", Applied Mathematics Letters, 22:91-95.
- Kalabusic, S., Kulenovic, M.R.S., (2004), "Rate of Convergence of Solutions of Rational Difference Equation of Second Order", Advances in Difference Equations, 2004(2):121-139.
- Kulenovic, M.R.S., Ladas, G., (2002), Dynamics of the Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures, Taylor & Francis Inc., New York.
- Kulenovic, M.R.S., Ladas, G., Martins L.F., Rodrigues, I.W., (2003), "The Dynamics of $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}$ Facts and Conjectures", Computers and Mathematics with Applications, 45:1087-1099.
- Li, X., Zhu, D., (2005), "The Rule of Semicycle and Global Asymptotic Stability for a Fourth Order Rational Difference Equation", Computers and Mathematics with Applications, 49:723-730.
- Li, X., (2005a), "Qualitative Properties for a Fourth Order Rational Difference Equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311:103-111.
- Li, X., (2005b), "Global Behavior of a Fourth Order Rational Difference Equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 312:555-563.
- Li, D., Li, P., Li, X., (2008), "Dynamical Properties for a Class of a Fourth-Order Nonlinear Difference Equations", Advances in Difference Equations, 2008, ID: 678402.
- Wrede R.C., Spiegel M., (2002), Schaum's Outlines: Advanced Calculus (Second Edition), Mc Graw Hill Companies.
- Yang, X., Su, W., Chen, B., Megson, G.M., Evans, D.J., (2005), "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{ax_n + bx_{n-1}}{c + dx_n x_{n-1}}$ ", Applied Mathematics and Computation, 162(3):1485-1497.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 18.05.1978

Doğum yeri Gaziantep

Lise 1989-1994 Gaziantep Anadolu Lisesi

1994-1996 Vefa Anadolu Lisesi

Lisans 1997-2001 Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fak.

Matematik Eğitimi Bölümü

Yüksek Lisans 2001-2004 Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Uyg. Matematik Programı

Doktora 2004-2009 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurumlar

2001-2005 M.E.B Cemal Artüz İlköğretim Okulu

2005-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi