YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$GL_{q,j}(1/1)$ KUANTUM SÜPER GRUBUNUN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Matematikçi Ergün YAŞAR

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 08 Ocak 2010
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Metin ARIK (Boğaziçi Üniv.)
Prof. Dr. Emanullah HIZEL (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (Y.T.Ü.)
Doç. Dr. Salim YÜCE (Y.T.Ü.)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

d	Dış diferansiyel operatörü
$\deg(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$D_{q,j}(T)$	T nin kuantum süper determinantı
$GL_{q,j}(1/1)$	Z_3-dereceli kuantum süper grubu
$R_q(1/1)$	İki boyutlu kuantum süper düzlem üzerindeki polinomlar cebiri
$R_{q,j}^{*}(1/1)$	$R_q(1/1)$ cebirinin duali
$S_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-ters operatörü
$\Delta_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-çarpım operatörü
$\varepsilon_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-birim operatörü
$\otimes$	Tensör çarpım
$\dot{\otimes}$	Matris-tensörel çarpım
∂	Kısmi türev operatörü
$[\ ,\ ]$	Lie parantezi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında, tez konusunu bana veren, çalışmalarım esnasında gerekli uyarılarda bulunan ve beni yönlendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK' e teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim. Bunun yanında, tez izleme komisyon üyelerim olan sayın Prof. Dr. Metin ARIK ve sayın Prof. Dr. Emanullah HIZEL' e ayrıca teşekkür ederim.

ÖZET

Bu tezde, $(2+2)$ boyutlu $GL(1/1)$ kuantum süper grubunun Z_3-dereceli diferansiyel geometrisi inşa edilmiştir. Grup üzerine diferansiyel hesap, grubun özelliklerinden çıkarılmaktadır ve o, grup üzerindeki fonksiyonları, onların diferansiyellerini, diferansiyel formları ve türevleri içermektedir. İlk olarak, $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubu tanıtılmış ve bu grubun bir süper Hopf Cebiri olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun süper diferansiyel cebiri bulunmuş ve bu yapının bir sol kovaryant diferansiyel hesap olduğu gösterilmiştir. Sonrasında, bu süper grup üzerindeki Cartan-Maurer formlar tanımlanmış ve bu formların sol invaryant olduğu gözlemlenmiştir. Böylece, $GL_{q,j}(1/1)$ in geometrik şeması ortaya konmuştur. Son olarak ise, kısmi türev operatörlerinden faydalanılarak bu süper grubun kuantum süper Lie cebiri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Z_3-dereceli kuantum süper düzlem, q-deformasyon, Hopf Cebiri, Z_3-dereceli kuantum süper grup, diferansiyel hesap, kuantum süper Lie cebiri.

ABSTRACT

In this thesis, we constructed the differential geometry of $(2+2)$ dimensional Z_3-graded quantum supergroup. The differential calculus on a group is obtained from its properties. This calculus includes the coordinate functions on this group, its differentials, differential forms and derivatives. Firstly, we introduced the supergroup $GL_{q,j}(1/1)$ and it was shown that it is a super Hopf algebra. Then, we obtained the super differential algebra of this group and it was shown that this algebra is a left covariant differential calculus. After that, we introduced the Cartan-Maurer forms on this supergroup, which is a left invariant structure. Hence, the geometric schema of this supergroup $GL_{q,j}(1/1)$ is found out. Finally, we obtained the quantum super Lie algebra of this supergroup by using the partial derivative operators.

Key Words: Z_3-graded quantum superplane, q-deformation, Hopf Algebra, Z_3-graded quantum supergroup, differential calculus, quantum super Lie algebra.

1. GİRİŞ

Geçtiğimiz yıllarda Drinfeld (1986), adına kuantum grubu dediği ve daha sonra kuantum süper gruba genelleştirilen yeni bir matematiksel konu inşa etmiştir. Sonra, Faddeev vd. (1987) bu konuyu Lie grup ve Lie cebiri teorisine sistematik bir şekilde adapte etmişlerdir.

Esas itibariyle Drinfeld iki ranklı bir kuantum grubunu oluştururken $SL(2)$ özel lineer grubunun Lie cebirinden hareketle, daha sonra deformasyon parametresi olarak adlandıracağı bir $q=e^{-\tau}$ kompleks sayısıyla $SL(2)$ deki bir matrisin matris elemanlarını birer koordinat fonksiyonu olarak düşünerek onlar arasında sağlanan bağıntıları örneğin $ab=q^{-1}ba$, vb. şeklinde ortaya koymuştur. Dolayısıyla matris elemanları ancak q nun özel değer(ler)i için değişmeli olabilmektedir.

Şunu açıkça belirtelim ki, kuantum grupları bilinen manada bir grup değildir. Kuantum grupları, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha tam olarak bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonu olarak düşünülmüştür. Deformasyon parametresinin özel değerleri için klasik duruma dönülmektedir. Daha sonra, Woronowicz (1987) ve Manin (1988) bu konuya değişik yorumlar getirmiştir.

Manin, bir kuantum matris grubunu elde ederken, grubun elemanlarını uygun uzaya etki ettirmiştir. Bu uzayın elemanları yine q parametresine bağlı bağıntılar sağlamaktadır. Manin bu şekildeki uzayları kuantum (süper) uzaylar olarak adlandırmıştır.

Son zamanlarda, kuantum (süper) uzay üzerindeki diferansiyel hesap hem matematikçiler hem de matematiksel fizikçiler tarafından yoğun şekilde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Kuantum gruplarının diferansiyel geometrisi de şüphesiz söz konusu olmuştur ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır. Woronowicz (1989), Schmidke vd. (1990), Wess ve Zumino (1990), Soni (1991), Brzezinski vd. (1992), Celik (2000) bu çalışmalardan bazılarını gerçekleştiren yazarlardır.

Değişmeli olmayan geometriye yön veren temel yapı bir birleşmeli cebir üzerindeki bir diferansiyel hesaptır. Woronowicz (1989) kuantum gruplarının değişmeli olmayan geometrisini takdim ederken; kuantum grubu temel değişmeli olmayan uzay olarak almış ve grup üzerindeki diferansiyel hesabı grubun özelliklerinden faydalanarak elde etmiştir.

Bir diğer yaklaşım, kuantum uzaylar üzerine Manin'in vurgusunu takip eden Wess ve Zumino tarafından başlatılmıştır. Wess ve Zumino'nun ortaya koyduğu teknik kullanılarak kuantum uzaylar üzerine diferansiyel hesap, süper uzaylar olarak adlandırılan Z_2-dereceli uzaylara genelleştirilmiştir (Soni, 1991; Celik, 1998b). Daha sonra Z_2-dereceli kuantum uzayı üzerine yapılan diferansiyel hesap da Z_3-dereceli kuantum uzaylara genelleştirilmiştir (Chung, 1994; Kerner, 1996; Le Roy, 1996; Kerner ve Abramov, 1999; Abramov ve Bazunova, 2002; Celik, 2002b; El Baz vd., 2004).

Bu çalışma, $(2+2)$ boyutlu $GL(1/1)$ kuantum süper grubunun Z_3-dereceli diferansiyel geometrisi üzerine olacaktır. Çalışmamızın çıkış noktası Celik (2002a) tarafından yapılan " Differential geometry of the Z_3- graded quantum superplane " isimli makaledir. Bu makalede, $(1+1)$ boyutlu kuantum süper düzlemin Z_3 dereceli yapısı bulunmuş ve çalışmada görülmüştür ki bu yapı, adı geçen süper düzleme etki eden $GL(1/1)$ süper grubuna da aynen genişletilebilir. Bizim çalışmamız da bu fikir üzerinden yola çıkılarak başlamıştır.

Bu çalışma, aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır:

- Çalışmamızın başlangıç noktası Çelik (2002a) de bulunan sayfa 4267 de yer alan bağıntıların yorumlarıdır. O kısımda, $GL(1/1)$ deki bir matrisin, matris elemanları arasında sağlanan Z_3 dereceli komutasyon bağıntıları elde edilmiştir. Biz bu bağıntıları kullanarak önce Z_3 dereceli $GL(1/1)$ (bundan sonra yazarın notasyonu ile $GL_{q,j}(1/1)$ ile göstereceğiz) süper grubunun bir süper Hopf Cebiri olduğunu göstereceğiz. Bu elde ettiğimiz Hopf Cebir yapısı, ilerleyen kısımlarda önümüzü açacaktır.

- $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubundaki bir matrisin matris elemanları birer koordinat fonksiyonudur ve dolayısıyla bu elemanların diferansiyellerinden bahsedilebilir. Çalışmamızda ikinci olarak, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri ile olan bağıntıları belli kriterlere uyum sağlayacak şekilde elde edilecektir. Amaç, $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun süper diferansiyel cebir yapısını tam olarak bulmaktır ve bu yapının bir sol kovaryant diferansiyel hesap olduğunu ortaya koymaktır.

- Çalışmada üçüncü olarak, süper grup üzerindeki Cartan-Maurer formları tanımlanacak ve ilgili yapılar ortaya konacaktır. Ayrıca, bu tanımlanan formların sol invaryant olduklari belirtilecektir. Neticede, $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun geometrik şeması ortaya çıkmış olacaktır.

- Çalışmada dördüncü olarak, koordinat fonksiyonlarının kısmi türev operatörleri göz önüne alınacak ve ilgili yapılar elde edilecektir. Amacımız $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun kuantum süper cebirini bulmaktır. Gerekli işlemler yapılarak süper cebiri elde edilecek ve bu cebirin bir Lie cebiri olduğu belirtilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı önemli kavramlar açıklanmaktadır.

2.1 Cebir, Ko-cebir ve Hopf Cebiri

Bu kısımda, mevcut çalışmanın daha iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla, tezin omurgasını oluşturacak bazı temel kavramlardan bahsedeceğiz. Bu kavramlar, tanımlar şeklinde aşağıda verilmektedir.

2.1.1 Tanım Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir halka denir:

1. $(R,+)$ bir değişmeli grup,
2. Her $a,b,c \in R$ için $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b)c = a.c + b.c$,
3. Her $a \in R$ için $a.1 = 1.a$ olacak şekilde $1 \in R$ elamanı mevcut,
4. Her $a,b,c \in R$ için $a.(b.c) = (a.b).c$.

Eğer her $a,b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa R ’ ye değişmeli halka denir.

2.1.2 Tanım $(M,+)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi : R\text{x}M \to M,\ (a,x) \mapsto a.x,\quad (\varphi : M\text{x}R \to M,\ (x,a) \mapsto x.a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M ’ye bir sol (sağ) R-modül**,** kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R - modül M ’nin yapı tasviri adı verilir:

$\forall a,b \in R$ ve $\forall x,y \in M$ için,

i) $a(x+y) = ax + ay,\quad ((x+y)a = xa + ya)$

ii) $(a+b)x = ax + bx,\quad (x(a+b) = xa + xb)$

iii) $(a.b)x = a(bx),\quad (x\,(a.b) = (xa)b)$

iv) $1_R x = x,\quad (x1_R = x)$

Eğer M hem sağ hem sol R-modül ise M ’ye kısaca modül denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne vektör uzayı veya bir lineer uzay denir.

2.1.3 Tanım $V\; ve\, W$, bir K cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$T : V \mapsto W$

tasviri, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$T\,(a\,v_1 + b\,v_2) = a\,T\,(v_1) + b\,T\,(v_2)$

şartını sağlarsa**,** bir lineer tasvir adını alır.

2.1.4 Tanım U, V ve W, bir K cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi : U \times V \to W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir iki-lineer tasvir denir.

$u, u' \in U;\, v, v' \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

i) $\varphi(\lambda\, u + \mu\, u', v) = \lambda\, \varphi(u, v) + \mu\, \varphi(u', v),$

ii) $\varphi(u, \lambda\, v + \mu\, v') = \lambda\, \varphi(u, v) + \mu\, \varphi(u, v').$

Kabul edelim ki U, $m-$boyutlu ve V, $n-$boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{m}$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^{n}$, V nin taban elemanlarının kümesidir. Bu takdirde $1 \le i \le m$ ve $1 \le j \le n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri W daki bir $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m,n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca, $\varphi : U \times V \to W$ tasvirini $\vec{x} = x^i \overrightarrow{u_i}$ ve $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$ olmak üzere

$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i\, y^j\, \overrightarrow{w_{ij}}$

şeklinde tanımlarız. Aşikâr olarak φ, bir iki-lineer tasvirdir ve $\varphi(U \times V) \subseteq W$ (görüntü) kümesi, $\{\overrightarrow{w_{ij}}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla φ, W uzayını gerer.

Sonuç olarak, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanırsa W ya, U ve V uzaylarının tensör çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir:

i) $\varphi(U \times V)$, W yı gerer.

ii) $\Psi : U \times V \to W'$ herhangi bir lineer tasvir ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir

$\Phi : W \to W^{'}$ lineer tasvir mevcuttur.

2.1.5 Tanım $T_1 : U_1 \to V_1$, $T_2 : U_2 \to V_2$, birer lineer tasvir olsun. Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi : U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2 \ , \ \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki Φ ’ye T_1 ve T_2 ’nin tensör çarpımı denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

2.1.6 Tanım L , bir vektör uzayı olmak üzere eğer,

$$[\ ,\ ] : L \times L \mapsto L$$

iki-lineer tasviri aşağıdaki iki şartı sağlarsa L ’ye bir Lie cebiri denir:

i) $[x , y] = -[y , x]$,

ii) $[x ,[y , z]] + [z ,[x , y]] + [y ,[z , x]] = 0, \ \forall x, y, z \in L.$

2.1.7 Tanım G bir grup ve K bir cisim olsun. A ile G ’den K ’ya olan fonksiyonların kümesini gösterelim. Yani

$$A = Map(G, K) = \{ f \mid f : G \to K \}$$

olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa, A ’ya bir K **-**cebiri denir:

1) $(\alpha \ f)(x) = \alpha \ f(x)$,

2) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

3) $(f \ g)(x) = f(x) g(x), \ f, g \in A, \ \alpha \in K, \ x \in G$.

Eğer bir lineer $T : A \to A$ tasviri

$$T(f.g) = T(f).T(g)$$

eşitliğini de sağlarsa, T ’ye bir lineer homomorfizm veya cebir homomorfizmi denir.

Bir $K-$cebirini (basitlik için sadece cebir diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K-vektör uzayı olarak düşünülür:

$\mu : A \otimes A \to A,\ \mu(a \otimes b) = a.b$,
$\eta : K \to A,\ \eta(k) = k.I.$

Burada I , A'nın birim elamanıdır. Bu tasvirler için

$$\begin{aligned} &\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{Ass}) \\ &\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{Uni}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ *çarpma* tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, $\eta(1)$'in A'nın hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A,μ,η) üçlüsüne bir cebir diyeceğiz.

Eğer $A \otimes A = Map(G \times G, K)$ ve $A = Map(G, K)$ olduğunu kabul edersek, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz: Her $x, y \in G$ için

$\Delta : A \to A \otimes A,\ \Delta f(x \otimes y) = f(x.y),$

$\varepsilon : A \to K,\ \varepsilon(f) = f(e).$

Burada e, G nin birim elamanıdır. Δ'ya cebirin bir ko-çarpması ve ε tasvirine de cebirin ko-birimi denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için verilen (Ass) ve (Uni) özelliklerine (denklem (2.1)) dual olan özelliklere sahiptir. Yani

$$\begin{aligned} &(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \quad (\mathrm{coass}) \\ &\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\mathrm{counit}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dır. Genel olarak, K üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ K-lineer tasvirleriyle birlikte bir K-ko-cebir (kısaca ko-cebir) ve A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ K-lineer tasvirleriyle birlikte bir K-bicebir (kısaca bicebir) denir. Ek olarak, $f \in A,\ x \in G$ için

$S : A \to A,\ Sf(x) = f(x^{-1})$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \mathrm{id})\Delta \tag{2.3}$$

özelliğini sağlayan bir S cebir anti-homomorfizm ile $(A,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ altılısına bir Hopf Cebiri denir (Abe, 1977). Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf Cebiri için,

$(A,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ altılısını değil sadece A yı kullanacağız.

2.1.8 Tanım C, bir ko-cebir olsun. Eğer bir lineer M uzayı ve bir lineer

$$\Psi : M \to M \otimes C$$

tasviri için aşağıdaki diyagramlar komutatif ise (M,Ψ) ikilisine bir sağ $C-$ko-modül denir. Bir sol $C-$ko-modül de benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{tikzcd}
M\otimes K & M\otimes C \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"'] \\
 & M \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M\otimes C\otimes C & M\otimes C \arrow[l, "\psi\otimes\mathrm{id}"'] \\
M\otimes C \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & M \arrow[l, "\psi"] \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Bir bimodülün tanımı için aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

$B,$ bir bicebir ve M de

$$\varphi_M : M\otimes B \to M, \ \varphi_M(m\otimes x) = mx$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte bir sağ $B-$modül olsun. Bu durumda,

$$\varphi_{M\otimes B} : (M\otimes B)\otimes B \to M\otimes B,$$
$$\varphi_{M\otimes B}\left(m\otimes x\otimes y\right) = \sum_{(y)} my_{(1)}\otimes xy_{(2)}, \ m\otimes x \in M\otimes B$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte, $M\otimes B$ de bir sağ B-modül olur. Buna ek olarak,

$$\Psi_M : M \to M\otimes B$$

K - lineer yapı dönüşümü ile birlikte M bir B-ko-modül ise,

$$\Psi_{M\otimes B}: \ M\otimes B \to \ (M\otimes B)\otimes B,$$
$$\Psi_{M\otimes B}(m\otimes x) = \sum_{(m)(x)} m_{(0)}\otimes x_{(1)}\otimes m_{(1)}x_{(2)}, \ m\otimes x \in M\otimes B$$

şeklinde tanımlanan K-lineer yapı dönüşümüyle birlikte $M\otimes B$ bir B-ko-modül olur.

Bu durumda bir bimodülün tanımını şu şekilde verebiliriz:

2.1.9 Tanım Eğer M , hem sağ B -modül ve hem de B -ko-modül olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa M 'ye bir B **-**bimodül denir:

- φ_M 'nin bir sağ B -ko-modül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Ψ_M 'nin bir sağ B -modül homomorfizmi olmasıdır.

2.2 Süper Matrislerin Grubu

Süper matrislerin grubunu elde ederken süper düzlemden faydalanacağız. Bu nedenle önce süper düzlemi kısaca tanıtarak işe başlayalım.

Süper düzlemi, x bir çift koordinat fonksiyonu ve θ da bir tek koordinat fonksiyonu olmak üzere

$$x\theta = \theta x, \quad \theta^2 = 0$$

şartlarını sağlayan bir birleşmeli cebir olarak tanımlarız (buradaki çift ve tek fonksiyon kavramına, aşağıda $T \in GL(1/1)$ süper matrisi tanımlandıktan sonra kısaca değinilmektedir). Bu tanımladığımız cebiri $R(1/1)$ ile gösterelim:

$$R(1/1) \ni \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x\theta = \theta x, \quad \theta^2 = 0.$$

Bu cebirin dualini de $R^*(1/1)$ ile gösterirsek, sembollerle

$$R^*(1/1) \ni \begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi y = y\varphi, \quad \varphi^2 = 0$$

yazarız. Şimdi, bir T lineer transformasyonu süper düzlem ve dualine etki etsin. Bu takdirde,

$$T : R(1/1) \rightarrow R(1/1),$$
$$T : R^*(1/1) \rightarrow R^*(1/1).$$

olacaktır. Diğer taraftan, her lineer tasvir bir matris temsiline sahip olduğundan T yi bir 2×2 matris olarak düşünebiliriz. Böyle matrislerin bir grup oluşturacağını göstermek zor değildir. Böyle bir gruba bir süper grup denmektedir. Bu grup, matris elemanlarının ikisi çift ve ikisi de tek olan 2×2 tipindeki süper matrislerin grubudur ve $GL(1/1)$ ile gösterilmektedir. Bu grup hakkındaki özet bilgiler aşağıda verilmiştir. $T \in GL(1/1)$ olsun. Bu takdirde T süper matrisi

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada a ve d (latin harfleri) T nin çift olan matris elemanlarıdır ki bunlar T nin diğer bütün elemanları ile komutatiftir; β ve γ (yunan harfleri) T nin tek olan matris elemanlarıdır ve bu elemanlar kendi aralarında anti-komutatif ve T nin diğer matris elemanları (yani a ve d) ile komutatiftir. Yani $T \in GL(1/1)$ ise, T nin matris elemanları

$$\begin{array}{ll} a\beta = \beta a, & d\beta = \beta d, \\ a\gamma = \gamma a, & d\gamma = \gamma d, \\ ad - da = 0, & \beta\gamma + \gamma\beta = 0, \\ \beta^2 = 0, & \gamma^2 = 0 \end{array}$$

şeklindeki (anti)-komutasyon bağıntılarını sağlar. T matrisinin süper determinantı

$$sD(T) = a d^{-1} - \beta d^{-1} \gamma d^{-1}$$

olarak tanımlanmıştır (Berezin, 1987). T matrisinin süper tersi ise, uzunca işlemler yapıldığında

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} & -a^{-1}\beta d^{-1} \\ -d^{-1}\gamma a^{-1} & d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunmuştur. Burada T nin a ve d matris elemanlarının terslerinin mevcut oldukları kabul edilmiştir.

2.3 Z_3-Dereceli Cebir

Bu kısımda çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için Z_3-dereceli yapıyı biraz detaylandırmakta fayda görülmektedir. z, Z_3-dereceli bir değişken olsun. O takdirde, z değişkeninin

$$z^3 = 0$$

bağıntısını sağladığını söyleyebiliriz. z değişkenine bağlı olarak $f(z)$; a_0, a_2, ve a_1

dereceleri sırasıyla $\deg(a_0)=0$, $\deg(a_2)=1$ ve $\deg(a_1)=2$ olan sabit sayılar olmak üzere

z değişkenine bağlı ikinci dereceden bir polinom olur. Yani $f(z)$ yi

$$f(z)= a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

şeklinde yazarız.

Z_3 devirli grubu, 1 in küp kökleri ile temsil edilebilir. $j=e^{2\pi i/3}$ $\left(i^2=-1\right)$ olsun. O takdirde,

$$j^3=1 \qquad ve \qquad j^2+j+1=0$$

dır. Z_3-dereceli $[U,V]$ komutatörünü, $\deg(U)=u$ ve $\deg(V)=v$ olmak üzere

$$[U,V]_{Z_3} = UV - j^{uv}\, VU$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Eğer U ve V, j-değişmeli iseler, o takdirde

$$UV = j^{uv}\, VU$$

eşitliğine sahip oluruz.

3. Z_3-DERECELİ KUANTUM SÜPER DÜZLEME BİR BAKIŞ

Bu bölümde, öncelikle Z_3-dereceli kuantum süper düzlem üzerindeki fonksiyonların oluşturduğu cebire bir göz atılacaktır. Daha sonra incelenen bu cebirin Hopf Cebir yapısı kısaca aktarılacaktır. Son olarak da, Z_3-dereceli h-deformasyona kısaca değinilecektir.

3.1 Z_3-Dereceli Kuantum Süper Düzlem Üzerindeki Fonksiyonların Cebiri

Manin (1988), Z_2-dereceli kuantum süper düzlemi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

3.1.1 Tanım Z_2-dereceli kuantum düzlem ya da kısaca kuantum süper düzlem, x bir çift koordinat fonksiyonu ve θ da bir tek koordinat fonksiyonu olmak üzere

$$x\theta = q\theta x, \quad \theta^2 = 0$$

şartlarını sağlayan bir birleşmeli cebir olarak tanımlanır. Burada q, sıfırdan farklı bir kompleks deformasyon parametresidir.

Celik (2002a) da yaptığı çalışmada, Manin'in vurgusundan yola çıkarak Z_3-dereceli süper düzlemi incelemiş ve bu düzlemin diferansiyel geometrisini inşa etmiştir. Bunu yaparken, Z_2-dereceli kuantum süper düzlemi genelleştirmek için, onun tek olan jeneratörünün nilpotentlik derecesini artırmıştır. Böylece, uygun bir genelleştirme, x ve θ koordinat fonksiyonları ile

$$x\theta = q\theta x, \quad \theta^3 = 0 \tag{3.1}$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir birleşmeli, birimli cebir olarak tanımlanmıştır. Bu ifadede, Z_3-dereceye göre x koordinat fonksiyonunun derecesi 0 ve Z_3-dereceye göre θ koordinat fonksiyonunun derecesi 1 dir. Kompleks sayılar kümesi üzerinde tanımlanan bu birleşmeli cebir, kuantum süper düzlemi üzerindeki polinomların cebiri olarak bilinir. Bu tanımlanan cebiri $R_q(1/1)$ ile göstereceğiz:

$$R_q(1/1) \ni \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x\theta = q\theta x, \quad \theta^3 = 0.$$

$q \to 1$ limitinde bu cebir, değişmeli olur ve iki boyutlu süper düzlem üzerindeki $\mathbb{C}[x,\theta]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür. Eğer bu cebirin dualini $R^*_{q,j}(1/1)$ (kuantum diferansiyel yapısı oluşturulurken j parametresi gelecek) ile gösterirsek,

$$R^*_{q,j}(1/1) \ni \begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi y = q\, j\, y \varphi, \quad \varphi^3 = 0 \tag{3.2}$$

elde ederiz. Burada,

$$\left[R_q(1/1)\right]^* = R^*_{q,j}(1/1)$$

olarak tanımlanmıştır. $R_q(1/1)$ cebirine, birim elemanı ve x^{-1} elemanını

$$x\, x^{-1} = 1 = x^{-1}\, x$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde ekleyerek, kuantum süper düzlemi genişletilmiş bir cebir olarak düşünebiliriz. Bu genişletilmiş cebiri $\mathcal{A} \equiv Fun\left(R_q(1/1)\right)$ ile göstereceğiz.

3.2 $\mathcal{A}$ Cebiri Üzerine Hopf Cebir Yapısı

Kısım 2.1 den, verilen bir cebir yapısının hangi şartlar altında bir Hopf Cebir yapısına sahip olacağını biliyoruz. Burada amaç, $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters operatörlerini tanıtmaktır.

1) Ko-çarpım operatörü $\Delta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}}(x) &= x \otimes x, \\ \Delta_{\mathcal{A}}(\theta) &= x \otimes \theta + \theta \otimes x, \\ \Delta_{\mathcal{A}}(1) &= 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

ile tanımlı bir cebir homomorfizmidir.

2) Ko-birim operatörü $\varepsilon_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= 1, \\ \varepsilon(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

ile tanımlı bir cebir homomorfizmidir.

3) Ko-ters operatörü $S_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$,

$$S_{\mathcal{A}}(x) = x^{-1},$$
$$S_{\mathcal{A}}(\theta) = -x^{-1}\,\theta\, x^{-1}$$

ile tanımlı bir cebir anti-homomorfizmidir.

$\mathcal{A}$ cebirinin tanımlanan ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters operatörleriyle bir Hopf Cebir yapısına sahip olduğunu biliyoruz. Bu tanımlanan operatörlerin (2.2) ve (2.3) de verilen özdeşlikleri sağladıkları kolaylıkla görülebilir. Daha detaylı bilgiler (Celik, 2002a) da bulunabilir.

3.3 Z_3-Dereceli h-Deformasyona Bir Bakış

Z_3-dereceli kuantum süper düzleminin, x' ve θ' koordinat fonksiyonları arasında

$$x'\theta' - q\,\theta' x' = 0, \qquad \theta'^3 = 0 \tag{3.3}$$

formunda komutasyon bağıntısı olduğunu biliyoruz (h-deformasyona geçileceği için üslü harfler kullanılmıştır).

Amacımız, Aghamohammadi vd. (1995) de kuantum düzlem için yapılana benzer bir süngüler benzerlik transformasyonu kullanarak, süper düzlemin h-deforme yapısını ortaya koymaktır. Bunun için, tersi mevcut bir g matrisini

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{h}{q-1} & 1 \end{pmatrix}$$

olarak alalım ve

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

diyelim. Bu takdirde, yeni x ve θ koordinatları

$$x = x', \qquad \theta = \theta' - \frac{h}{q-1}x'$$

şeklinde yazılır. Şimdi, x ve θ koordinatları arasında sağlanan bağıntıyı elde etmek için (3.3) deki ilk bağıntıyı kullanırsak,

$$x\theta = q\theta x + hx^2$$

bağıntısına ulaşırız. h parametresi x koordinatı ile değişmelidir. Ayrıca θ' Grassman koordinatı

$$\theta'^3 = 0$$

eşitliğini sağladığından,

$$\theta h = qjh\theta, \qquad h^3 = 0$$

olmak şartıyla

$$\theta^3 = 0$$

eşitliği elde edilir. $q \to 1$ limitinde Z_3-dereceli h-süper düzlemi tanımlayan aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$x\theta = \theta x + hx^2, \qquad \theta^3 = 0, \quad h^3 = 0. \tag{3.4}$$

Elde edilen bu yapı kullanılarak, Z_3-dereceli h-süper grubu tanımlamak mümkün olabilir. Bu da, ayrı bir çalışma konusu olabilir.

4. Z_3-DERECELİ KUANTUM SÜPER GRUBU

Bu bölümde, ilk olarak Z_3-dereceli süper uzaya etki eden kuantum matrisler incelenecek ve matris elemanlarının sağladığı Z_3-dereceli (q, j)-komutasyon bağıntıları bulunacaktır. Daha sonra Z_3-dereceli bir süper matrisin süper tersi ve süper determinantı, bazı yeni tanımlamalarla elde edilecek ve Z_3-dereceli kuantum süper grubu elde edilecektir. Son olarak, elde edilen Z_3-dereceli kuantum süper grubun bir Hopf Cebir yapısına sahip olduğu gösterilecektir.

4.1 Z_3-Dereceli Süper Uzaya Etki Eden Kuantum Matrisler

Bu kısımda, Z_3-dereceli 2×2-tipindeki kuantum süper matrislerin yapısını inceleyeceğiz. Kısım 3.1 de değindiğimiz üzere, Z_3-dereceli kuantum süper düzlemin, x ve θ koordinat fonksiyonları yardımıyla (3.1) deki komutasyon bağıntıları ile üretildiğini biliyoruz. Aynı kısımda, Z_3-dereceli dual kuantum süper düzlemin de φ ve y koordinat fonksiyonları yardımıyla (3.2) deki komutasyon bağıntılarını sağlayacak şekilde üretildiğini biliyoruz.

Z_3-dereceli uzaydaki 2×2-tipindeki bir süper matrisi

$$T=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu matriste yer alan elemanların her biri birer koordinat fonksiyonu olmak üzere, Z_3-dereceye göre dereceleri, a ile d nin 0 ve β ile γ nın da sırasıyla 2 ve 1 dir. Burada, T nin bütün matris elemanlarının sağladığı deforme edilmiş komutasyon bağıntıları elde edilecektir. Bu nedenle, T nin a ve d matris elemanlarının $R_q(1/1)$ ve $R^*_{q,j}(1/1)$ süper düzlemlerinin (bütün) koordinatları ile komutatif ve β ile γ nın da x ve y ile komutatif, θ ve φ ile de j-komutatif oldukları yani,

$$\begin{aligned} &[u,x]=[u,y]=[u,\theta]=[u,\varphi]=0, && u\in\{a,d\} \\ &[v,x]=[v,y]=0,\ [\theta,v]_{Z_3}=[\varphi,v]_{Z_3}=0, && v\in\{\beta,\gamma\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

bağıntılarının sağlandığı kabul edilecektir. Bu kabuller altında, aşağıdaki özellikleriyle iki lineer dönüşüm göz önüne alalım:

$$T:R_q(1/1) \to R_q(1/1),$$
$$T:R^*_{q,j}(1/1) \to R^*_{q,j}(1/1). \tag{4.3}$$

Üstteki lineer dönüşümün sonucu olarak

$$\hat{x} = a\,x + \beta\,\theta, \qquad \hat{\theta} = \gamma\,x + d\,\theta \tag{4.4}$$

koordinat fonksiyonları (3.1) bağıntılarını sağlamalıdır. Bu bağıntıları kullanarak aşağıdaki komutasyon bağıntılarına ulaşabiliriz:

$$a\,\gamma = q\,\gamma\,a, \quad d\,\gamma = q\,\gamma\,d,$$
$$d\,\beta = q^{-1}\,j\,\beta\,d, \quad \gamma^3 = 0.$$

Benzer şekilde,

$$\hat{\varphi} = a\,\varphi + j^2\,\beta\,y, \qquad \hat{y} = j\,\gamma\,\varphi + d\,y \tag{4.5}$$

koordinat fonksiyonları da (3.2) bağıntılarını sağlamalıdır. Bu bağıntıları da kullanırsak

$$a\,\beta = q^{-1}\,j^{-1}\,\beta\,a, \quad \beta^3 = 0$$

komutasyon bağıntılarını elde ederiz. Ayrıca, Celik (2002a) da yer alan

$$\hat{x}\,\hat{y} = q\,\hat{y}\,\hat{x} + (j^2 - 1)\,\hat{\varphi}\,\hat{\theta}$$

bağıntısı da kullanılarak,

$$a\,d = d\,a + q^{-1}(1 - j)\,\beta\,\gamma, \quad \beta\,\gamma = q^2\,\gamma\,\beta$$

komutasyon bağıntıları elde edilir.

Sonuç olarak, T matrisinin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları Celik (2002a) da da verildiği üzere, toplu halde

$$\begin{aligned}
&a\,\beta = q^{-1}\,j^{-1}\,\beta\,a,\\
&d\,\beta = q^{-1}\,j\,\beta\,d,\\
&a\,\gamma = q\,\gamma\,a,\\
&d\,\gamma = q\,\gamma\,d,\\
&a\,d = d\,a + q^{-1}(1 - j)\,\beta\,\gamma,\\
&\beta\,\gamma = q^2\,\gamma\,\beta,\\
&\beta^3 = 0, \quad \gamma^3 = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklindedir.

Kısım 4.2 de, matris elemanları bu bağıntıları sağlayan matrislerin bir kuantum grubu oluşturduğu ilave bilgilerle ortaya konacaktır. O kısma geçmeden önce, T matrisinin süper tersi ve determinantı hesaplanırken kullanılacak olan bazı bağıntıları verelim. Eğer T matrisinin a ve d matris elemanlarının terslerinin mevcut (invertible) olduğu kabul edilirse, (4.6) dan

$$\begin{aligned}
&a^{-1}\beta = q\,j\,\beta\,a^{-1},\\
&d^{-1}\beta = q\,j^2\,\beta\,d^{-1},\\
&a^{-1}\gamma = q^{-1}\gamma\,a^{-1},\\
&d^{-1}\gamma = q^{-1}\gamma\,d^{-1},\\
&a^{-1}d = d\,a^{-1} + q(j-1)a^{-1}\gamma\,\beta\,a^{-1},\\
&d^{-1}a = a\,d^{-1} + q(1-j)d^{-1}\gamma\,\beta\,d^{-1},\\
&a^{-1}d^{-1} = d^{-1}a^{-1} + q(1-j)a^{-1}d^{-1}\gamma\,\beta\,d^{-1}a^{-1}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

bağıntıları elde edilir.

4.2 Z_3-Dereceli Bir Süper Matrisin Süper Tersi ve Süper Determinantı

İlk olarak, 2×2-tipinde Z_3-dereceli bir T süper matrisinin süper tersini elde edeceğiz. Bunun için işlemleri kısaltmak amacıyla,

$$D_1 = a\,d - q^{-1}\beta\gamma \tag{4.8}$$

$$D_2 = d\,a - q\,j\,\gamma\,\beta \tag{4.9}$$

diyelim. Bu halde, matris elemanları (4.6) bağıntılarını sağlayan T matrisinin sağ tersi,

$$T\,T_R^{-1} = I$$

eşitliğini sağlamalıdır. Buradan, gerekli işlemleri yaptığımızda, T_R^{-1} (ters) matrisini

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} d\,D_1^{-1} & -q\,j\,\beta\,D_2^{-1} \\ -q^{-1}\gamma\,D_1^{-1} & a\,D_2^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

olarak buluruz. D_1 ve D_2 ile T nin matris elemanları arasında sağlanan bağıntılar ise, şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&D_1\, d = d\, D_1\,, && D_2\, a = a\, D_2\,, \\
&D_k\, \beta = q^{-2}\, \beta\, D_k\,, && D_k\, \gamma = q^2\, \gamma\, D_k\,, \quad k=1,2 \\
&\beta\, D_2^{-1} = q^{-2}\, D_2^{-1}\,, && \gamma\, D_1^{-1} = q^2\, D_1^{-1}\, \gamma.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Bu bağıntıların doğruluğu, (4.6) ve (4.7) bağıntıları kullanılarak kolayca kontrol edilebilir. Gerçekten, örneğin, (4.6) dan

$$
\begin{aligned}
D_1\, \beta &= (a\, d - q^{-1}\, \beta\, \gamma)\, \beta \\
&= q^{-2}\, \beta\, a\, d - q^{-3}\, \beta\, \beta\, \gamma \\
&= q^{-2}\, \beta\, D_1
\end{aligned}
$$

ve (4.7) den

$$
\begin{aligned}
\gamma\, D_1^{-1} &= \gamma\, (d^{-1}\, a^{-1} + d^{-1}\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1} + d^{-1}\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\,) \\
&= q^2\, d^{-1}\, a^{-1}\, \gamma + q^2\, d^{-1}\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \gamma + q^2\, d^{-1}\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \gamma \\
&= q^2\, D_1^{-1}\, \gamma
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
a\, D_2^{-1} &= d^{-1} + d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1} + d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1} \\
d\, D_1^{-1} &= a^{-1} + a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1} + a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

olduklarını göstermek oldukça kolaydır. Örneğin,

$$
\begin{aligned}
a\, D_2^{-1} &= a\, (d\, a - q\, j\, \gamma\, \beta)^{-1} \\
&= a\, (a^{-1}\, d^{-1} + a^{-1}\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1} + a^{-1}\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}) \\
&= d^{-1} + d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1} + d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}\, \gamma\, a^{-1}\, \beta\, d^{-1}
\end{aligned}
$$

dir.

T_R^{-1} yi iki matrisin çarpımı şeklinde yazmak, yani (4.10) daki matrisi ikiye ayırmak için onu

$$
T_R^{-1} = \begin{pmatrix} d^{-1}\, (d^2\, D_1^{-1}) & -q\, j\, \beta\, D_2^{-1} \\ -q^{-1}\, \gamma\, D_1^{-1} & a^{-1}\, (a^2\, D_2^{-1}) \end{pmatrix}
\tag{4.13}
$$

olarak yazalım. Bu durumda

$$
T_R^{-1} = \begin{pmatrix} d^{-1} & -a^{-1}\, \beta\, a^{-1} \\ -d^{-1}\, \gamma\, d^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2\, D_1^{-1} & 0 \\ 0 & a^2\, D_2^{-1} \end{pmatrix}
\tag{4.14}
$$

olacaktır. O halde T nin Z_3-dereceli kuantum süper determinantı

$$D_{q,j}(T)=a^2\,D_2^{-1}=D_2^{-1}\,a^2 \tag{4.15}$$

olarak tanımlanabilir. Buradaki $a^2\,D_2^{-1}$ ifadesi açık olarak yazılır ve düzenlenirse, T nin kuantum süper determinantı

$$D_{q,j}\left(T\right)=a\,d^{-1}+a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}+a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1} \tag{4.16}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer düşünceyle , T nin sol tersi T_L^{-1} de

$$T_L^{-1}\,T=I$$

olması gerçeğinden hareketle

$$T_L^{-1}=\begin{pmatrix} D_1^{-1}\,d & -q^{-1}\,j^2\,D_1^{-1}\,\beta \\ -q\,D_2^{-1}\,\gamma & D_2^{-1}\,a \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. O aşikardır ki (4.11) bağıntıları,

$$T_R^{-1}=T^{-1}=T_L^{-1}$$

olduğunu ortaya koymaktadır.

Not olarak, T süper matrisinin süper tersi, (4.1) deki T matrisinin, Crout redaksiyonu kullanılarak

$$T=\begin{pmatrix} a & 0 \\ \gamma & d-\gamma\,a^{-1}\,\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\,\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

şeklinde yazılmasıyla da elde edilebilir. Gerçekten,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \gamma & d-\gamma\,a^{-1}\,\beta \end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}-d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} & d^{-1}+d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}+d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -q^{-1}\,\gamma\,D_1^{-1} & a\,D_2^{-1} \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduklarından

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ \gamma & d-\gamma a^{-1}\beta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{-1}+a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}+a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} & -a^{-1}\beta d^{-1}-a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \\ -d^{-1}\gamma a^{-1}-d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} & d^{-1}+d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}+d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= T_R^{-1}$$

çıkar. Bu durumda Z_3-dereceli kuantum süper determinant

$$D_{q,j}(T) = a\left(d-\gamma a^{-1}\beta\right)^{-1}$$

şeklindedir ki bu ifade açılıp düzenlendiğinde (4.16) ile aynı olur.

4.3 $GL_{q,j}(1/1)$ Süper Grubu

Bu kısımda, üstte elde ettiğimiz süper ters ve süper determinanta ilaveten, Z_3-dereceli uzaya etki eden iki matrisin çarpımını inceleyeceğiz. Amacımız, kapalılık özelliğinin de sağlandığını gösterip Z_3-dereceli grup yapısını ortaya koymaktır.

O nedenle kabul edelim ki

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

her ikisi de birer Z_3-dereceli kuantum süper matristir. Eğer T_1 ve T_2 nin matris elemanları için; dereceleri 0 olanlar diğerleri ile değişmeli ve geri kalanlar arasında

$$\beta_1\gamma_2 = j\gamma_2\beta_1, \qquad \beta_1\beta_2 = j^2\beta_2\beta_1,$$
$$\gamma_1\beta_2 = j\beta_2\gamma_1, \qquad \gamma_1\gamma_2 = j^2\gamma_2\gamma_1$$

şeklindeki komutasyon bağıntıları varsa, beklendiği üzere T_1T_2 nin matris elemanları (4.6) bağıntılarını gerçekler.

Bu kısımdan sonra (4.6) komutasyon bağıntılarını sağlayan a, β, γ ve d ile oluşturulmuş Z_3-dereceli kuantum süper grubu $GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ile göstereceğiz.

Not 1: Z_2-dereceli kuantum süper determinant, Z_2-dereceli iki parametreli kuantum süper grubun merkezi elemanı olmasına rağmen (Dabrowski ve Wang, 1991), Z_3-dereceli kuantum süper determinant, Z_3-dereceli kuantum süper grubun merkezi elemanı değildir.

Not 2: $T \in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ matrisinin süper transpozesi

$$T^{st} = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ j\beta & d \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Böylece, (4.3) dönüşümleriyle birlikte

$$\begin{aligned} T^{st} : R_q\left(1/1\right) &\rightarrow R_q\left(1/1\right), \\ T^{st} : R^*_{q,j}\left(1/1\right) &\rightarrow R^*_{q,j}\left(1/1\right) \end{aligned}$$

dönüşümlerinin de (4.6) bağıntılarını vereceği kolayca kontrol edilebilir.

Not 3: Eğer $T \in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ise $T^{-1} \in GL_{q^{-1},j^{-1}}\left(1/1\right)$ dir.

İspat: Eğer (4.13) deki T^{-1} matrisi

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilirse, T^{-1} matrisinin matris elemanlarının

$$\begin{aligned} &AB = q\,j\,BA, \\ &DB = q\,j^2\,BD, \\ &AC = q^{-1}\,CA, \\ &DC = q^{-1}\,CD, \\ &BC = q^{-2}\,CB, \\ &B^3 = 0 = C^3, \\ &AD = DA + q^{-1}\left(1-j\right)CB \end{aligned} \qquad (4.18)$$

bağıntılarını sağladığı kolayca gösterilebilir. Gerçekten, örneğin

$$
\begin{aligned}
AC &= \left(d\, D_1^{-1}\right)\left(-q^{-1}\,\gamma\, D_1^{-1}\right) \\
&= -q^{-1}\, d\, D_1^{-1}\,\gamma\, D_1^{-1} \\
&= -q^{-3}\, d\,\gamma\, D_1^{-1}\, D_1^{-1} \\
&= -q^{-2}\,\gamma\, d\, D_1^{-1}\, D_1^{-1} \\
&= q^{-1}\left(-q^{-1}\,\gamma\, D_1^{-1}\right)\left(d\, D_1^{-1}\right) \\
&= q^{-1}\, C\, A
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
D\,B &= \left(a\, D_2^{-1}\right)\left(-q\, j\;\beta\, D_2^{-1}\right) \\
&= -q^{3}\; j\; a\;\beta\, D_2^{-1}\, D_2^{-1} \\
&= q\, j^{2}\left(-q\, j\;\beta\, D_2^{-1}\right)\left(a\, D_2^{-1}\right) \\
&= q\, j^{2}\, B\, D
\end{aligned}
$$

dir. Netice itibariyle, $T^{-1}\in GL_{q^{-1},\,j^{-1}}\left(1/1\right)$ olduğunu görüyoruz.

4.4 Z_3-Dereceli $GL_{q,j}\left(1/1\right)$ Kuantum Süper Grubunun Hopf Cebir Yapısı

Bu kısımda, Z_3-dereceli $GL_{q,j}\left(1/1\right)$ kuantum süper grubunun bir süper Hopf Cebir olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $GL_{q,j}\left(1/1\right)$ kuantum süper grubu üzerinde, süper düzlem üzerinde de tanımladığımız gibi, isimleri sırasıyla ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters olan ve Δ, ε ve S ile göstereceğimiz üç tane operatör tanımlayacağız.

Ko-çarpım operatörü olan Δ operatörü,

$$\Delta : GL_{q,j}\left(1/1\right) \to GL_{q,j}\left(1/1\right) \otimes GL_{q,j}\left(1/1\right),$$

$$\Delta\left(T\right) = T\,\dot{\otimes}\,T$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buradaki $\dot{\otimes}$ sembolü matris-tensörel çarpma işlemini göstermektedir. Yani, normal matris çarpımı gibi yapılacak ancak araya tensör işareti konacaktır (bak (4.20)). Δ, yine (coass) aksiyomunu sağlamaktadır. Burada Z_3-dereceli çarpma

$$\left(A\otimes B\right)\left(C\otimes D\right) = j^{\deg\left(B\right)\deg\left(C\right)}\, AC\otimes BD \tag{4.19}$$

kuralı ile verilmektedir. Δ ko-çarpımının, $GL_{q,j}\left(1/1\right)$ grubunun matris elemanları üzerine etkisi, (4.18) den

$$\begin{aligned}&\Delta\left(a\right)=a\otimes a+\beta\otimes\gamma, \qquad \Delta\left(\beta\right)=a\otimes\beta+\beta\otimes d,\\&\Delta\left(\gamma\right)=\gamma\otimes a+d\otimes\gamma, \qquad \Delta\left(d\right)=\gamma\otimes\beta+d\otimes d\end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak yazılır. Burada, Δ ko-çarpımının (4.6) bağıntılarını invaryant bıraktığını göstermek zor değildir. Bir örnek olması bakımından, (4.6) daki ilk bağıntıya Δ yı uygulayalım. Bu takdirde, Δ nın bir cebir homomorfizmi olması gerçeği ve (4.20) de tanımlamalar kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta\left(a\beta\right)&=\Delta\left(a\right)\Delta\left(\beta\right)=\left(a\otimes a+\beta\otimes\gamma\right)\left(a\otimes\beta+\beta\otimes d\right)\\&=a^2\otimes a\beta+a\beta\otimes a d+\beta a\otimes\gamma\beta+j^2\beta^2\otimes\gamma d\\&=q^{-1}j^2\left\{\left(a\otimes\beta+\beta\otimes d\right)\left(a\otimes a+\beta\otimes\gamma\right)\right\}\\&=q^{-1}j^2\Delta\left(\beta\right)\Delta\left(a\right)=\Delta\left(q^{-1}j^2\beta a\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Ko-birim operatörü olan ε operatörü de

$$\varepsilon:GL_{q,j}\left(1/1\right)\rightarrow\mathbb{C},$$

$$\varepsilon\left(T\right)=I$$

şeklinde tanımlanmıştır. ε ko-biriminin, $T\in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ matrisinin matris elemanları üzerine etkisi

$$\varepsilon\left(a\right)=1, \qquad \varepsilon\left(\beta\right)=0, \qquad \varepsilon\left(\gamma\right)=0, \qquad \varepsilon\left(d\right)=1 \tag{4.21}$$

şeklindedir. Ko-birim operatörü bilindiği gibi,

$$\mu\circ\left(\varepsilon\otimes id\right)\circ\Delta=\mu'\circ\left(id\otimes\varepsilon\right)\circ\Delta$$

olacak şekilde bir cebir homomorfizmidir. Bu eşitlikte yer alan μ ve μ' tasvirleri kanonik olarak izomorf olup,

$$\mu:\mathbb{C}\otimes GL_{q,j}\left(1/1\right)\rightarrow GL_{q,j}\left(1/1\right), \qquad \mu':GL_{q,j}\left(1/1\right)\otimes\mathbb{C}\rightarrow GL_{q,j}\left(1/1\right),$$

$$\mu\left(c\otimes a\right)=c\,a=\mu'\left(a\otimes c\right), \qquad \forall\, a\in GL_{q,j}\left(1/1\right), \qquad \forall\, c\in\mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

Böylece, $GL_{q,j}(1/1)$ grubunun aşağıda tanımlanan m çarpmasıyla bir ikili cebir yapısına sahip olduğunu göstermiş olduk. m çarpma tasviri,

$$m(a \otimes b) = ab$$

ile

$$m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$$

şeklinde tanımlanmış birleşme aksiyomunu sağlayan bir tasvirdir.

Ko-ters operatörü olan S operatörü,

$$S : GL_{q,j}(1/1) \rightarrow GL_{q,j}(1/1),$$

$$S(T) = T^{-1} \tag{4.22}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

S ko-ters operatörü de,

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta$$

bağıntısını sağlayan bir cebir anti-homomorfizmidir.

Sonraki kısımda $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubu üzerine bir diferansiyel hesap kuracağız. Şimdi, yukarıda elde ettiğimiz $GL_{q,j}(1/1)$ Hopf Cebiri üzerindeki fonksiyonların cebirini $\mathcal{A}$ ile gösterelim.[1]

---

[1] Bu kısım, Celik ve Yasar (2008) de verilmiştir..

5. Z_3-DERECELİ $GL_{q,j}(1/1)$ SÜPER GRUBU ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde, Z_3-dereceli $\mathcal{A}$ cebiri [$GL_{q,j}(1/1)$ kuantum süper grubu üzerindeki fonksiyonların cebiri] üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap inşa edeceğiz. Bu hesap, $\mathcal{A}$ nın elemanlarını, bunların diferansiyellerini ve diferansiyel formları içerecek.

5.1 d Dış Diferansiyel Operatörü

Bu kısıma dış diferansiyel operatörün özelliklerini sıralayarak başlayalım. d dış diferansiyel operaratörü, Z_3-dereceli $\mathcal{A}$ cebirinin jenaratörlerini diferansiyellerine tasvir eden bir operatördür:

$$\mathsf{d}: \mathcal{A} \to \mathsf{d}\mathcal{A}$$
$$u \mapsto \mathsf{d}u, \quad u \in \{a, \beta, \gamma, d\}.$$

d dış diferansiyelinin aşağıdaki iki özelliği sağlamasını talep ediyoruz:

$\mathsf{d}^3 = 0$ (nilpotentlik özelliği) (5.1)

ve

$\mathsf{d}(f\,g) = (\mathsf{d}f)g + j^{\deg(f)} f(\mathsf{d}g)$. ($Z_3$-derece Leibniz kuralı) (5.2)

Klasik diferansiyel hesapta fonksiyonların diferansiyelleri ile değişmeli oldukları bilinir. Cebirsel bir bakış açısıyla, 1-formların uzayı, birinci mertebeden diferansiyeller tarafından üretilmiş düzgün fonksiyonlar cebiri üzerine bir serbest, sonlu bi-modüldür ve değişmelilik, onun sağ ve sol yapısının nasıl birbirine bağlı olduğunu gösterir.

Biz Bölüm 4 den, $\mathcal{A}$ cebirinin (4.6) bağıntıları ile (4.1) in matris elemanları tarafından üretilen bir birleşmeli cebir (esasen bir dereceli-Hopf Cebiri) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki bir diferansiyel cebir, (5.1)-(5.2) bağıntılarıyla verilen bir lineer d operatörü ile donatılmış bir Z_3-dereceli birleşmeli cebirdir.

Aşağıdaki önermeyi vermeden önce, d operatörünün $\mathcal{A}$ nın jeneratörlerine etki etmesi halinde nasıl derecelendiğini açıklamak gerekmektedir.

Lineer d operatörü a koordinat fonksiyonuna uygulandığında Z_3-dereceye göre derecesi 1 olan bir 1-form üretir. Benzer şekilde d, β ya uygulandığında Z_3-derecesi 0; γ ya uygulandığında Z_3-derecesi 2 ve d ye uygulandığında Z_3-derecesi 1 olan 1-formları elde ederiz. Elde ettiğimiz 1-formları sırasıyla $\mathsf{d}a$, $\mathsf{d}\beta$, $\mathsf{d}\gamma$ ve $\mathsf{d}d$ ile göstereceğiz. d lineer operatörü $\mathsf{d}a$ ya uygulandığında (veya a ya iki defa uygulandığında), Z_3-derecesi 2 olan bir 1-form elde ederiz. Bunu $\mathsf{d}^2 a$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde, $\mathsf{d}\beta$ ya uygulandığında $\mathsf{d}^2\beta$ ile göstereceğimiz ve Z_3-derecesi 1 olan bir 1-form, $\mathsf{d}\gamma$ ya uygulandığında $\mathsf{d}^2\gamma$ ile göstereceğimiz ve Z_3-derecesi 0 olan bir 1-form ve $\mathsf{d}d$ ye uygulandığında $\mathsf{d}^2 d$ ile göstereceğimiz ve Z_3-derecesi 2 olan bir 1-form üretilmiş olacaktır.

5.2 Koordinat Fonksiyonları ve Onların Birinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörleri olan $T \in GL_{q,j}(1/1)$ matrisinin matris elemanları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan bağıntılar aşağıdaki önerme ile verilmektedir. Önermenin ispatı yapılırken, Celik (1998a) deki teknik kullanılmaktadır.

5.2.1 Önerme Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
& a\,\mathsf{d}a = j^2\,\mathsf{d}a\,a, \\
& a\,\mathsf{d}\gamma = q\,\mathsf{d}\gamma\,a + \left(j^2 - 1\right)\mathsf{d}a\,\gamma, \\
& \gamma\,\mathsf{d}a = q^{-1} j\,\mathsf{d}a\,\gamma, \\
& \gamma\,\mathsf{d}\gamma = j\,\mathsf{d}\gamma\,\gamma, \\
& a\,\mathsf{d}\beta = q^{-1} j^2\,\mathsf{d}\beta\,a + \left(j^2 - 1\right)\mathsf{d}a\,\beta, \\
& \beta\,\mathsf{d}a = q\,j\,\mathsf{d}a\,\beta, \\
& \beta\,\mathsf{d}\beta = \mathsf{d}\beta\,\beta, \\
& \gamma\,\mathsf{d}\beta = q^{-2} j^2\,\mathsf{d}\beta\,\gamma + q^{-1}(j - j^2)\,\mathsf{d}a\,d, \\
& \beta\,\mathsf{d}\gamma = q^2 j\,\mathsf{d}\gamma\,\beta + q(1-j)\,\mathsf{d}a\,d, \\
& d\,\mathsf{d}\gamma = q\,j^2\,\mathsf{d}\gamma\,d, \\
& \gamma\,\mathsf{d}d = q^{-1} j^2\,\mathsf{d}d\,\gamma + (j - j^2)\mathsf{d}\gamma\,d, \\
& d\,\mathsf{d}d = j^2\,\mathsf{d}d\,d, \\
& \beta\,\mathsf{d}d = q\,\mathsf{d}d\,\beta + (1-j)\,\mathsf{d}\beta\,d, \\
& d\,\mathsf{d}\beta = q^{-1}\,\mathsf{d}\beta\,d, \\
& d\,\mathsf{d}a = \mathsf{d}a\,d, \qquad\qquad (5.3) \\
& a\,\mathsf{d}d = \mathsf{d}d\,a + (j-1)(1-j^2)\,\mathsf{d}a\,d + q(1-j)\,\mathsf{d}\gamma\,\beta + q^{-1}(1-j)\,\mathsf{d}\beta\,\gamma
\end{aligned}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, Z_3-dereceli kuantum grubundaki bir matrisin matris elemanları ile onların diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel aşağıdaki bağıntıları yazarak başlayalım.

$$\begin{aligned}
&a\,\mathrm{d}a = X_1\,\mathrm{d}a\,a,\\
&a\,\mathrm{d}\gamma = F_{11}\,\mathrm{d}\gamma\,a + F_{12}\,\mathrm{d}a\,\gamma,\\
&\gamma\,\mathrm{d}a = F_{21}\,\mathrm{d}a\,\gamma + F_{22}\,\mathrm{d}\gamma\,a,\\
&\gamma\,\mathrm{d}\gamma = X_2\,\mathrm{d}\gamma\,\gamma,\\
&a\,\mathrm{d}\beta = K_{11}\,\mathrm{d}\beta\,a + K_{12}\,\mathrm{d}a\,\beta,\\
&\beta\,\mathrm{d}a = K_{21}\,\mathrm{d}a\,\beta + K_{22}\,\mathrm{d}\beta\,a,\\
&\beta\,\mathrm{d}\beta = X_3\,\mathrm{d}\beta\,\beta,\\
&\gamma\,\mathrm{d}\beta = L_{11}\,\mathrm{d}\beta\,\gamma + L_{12}\,\mathrm{d}\gamma\,\beta + L_{13}\mathrm{d}a\,d + L_{14}\,\mathrm{d}d\,a,\\
&\beta\,\mathrm{d}\gamma = L_{21}\,\mathrm{d}\gamma\,\beta + L_{22}\,\mathrm{d}\beta\,\gamma + L_{23}\mathrm{d}a\,d + L_{24}\,\mathrm{d}d\,a,\\
&d\,\mathrm{d}\gamma = M_{11}\,\mathrm{d}\gamma\,d + M_{12}\,\mathrm{d}d\,\gamma,\\
&\gamma\,\mathrm{d}d = M_{21}\,\mathrm{d}d\,\gamma + M_{22}\,\mathrm{d}\gamma\,d,\\
&d\,\mathrm{d}d = X_4\,\mathrm{d}d\,d,\\
&\beta\,\mathrm{d}d = N_{11}\,\mathrm{d}d\,\beta + N_{12}\,\mathrm{d}\beta\,d,\\
&d\,\mathrm{d}\beta = N_{21}\,\mathrm{d}\beta\,d + N_{22}\,\mathrm{d}d\,\beta,\\
&a\,\mathrm{d}d = R_{11}\,\mathrm{d}d\,a + R_{12}\,\mathrm{d}a\,d + R_{13}\,\mathrm{d}\gamma\,\beta + R_{14}\,\mathrm{d}\beta\,\gamma,\\
&d\,\mathrm{d}a = R_{21}\,\mathrm{d}a\,d + R_{22}\,\mathrm{d}d\,a + R_{23}\,\mathrm{d}\gamma\,\beta + R_{24}\,\mathrm{d}\beta\,\gamma.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Yukarıda, muhtemelen q ve j parametrelerine bağlı 36 adet sabit bulunmaktadır. Amacımız bu bağıntılarda yer alan $X_1, X_2, X_3, X_4, F_{ij}, K_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}, R_{ij}$ katsayılarını bulmaktır.

Aşağıda a, γ ve onların diferansiyelleri göz önüne alınarak (5.4) deki ilk dört bağıntı açıkça elde edilecektir. Öyleyse,

$$a\gamma = q\gamma a, \qquad \gamma^3 = 0$$

bağıntılarıyla oluşturulan cebiri $\mathcal{A}_{a\gamma}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{A}_{a\gamma}$ cebirinin diferansiyel cebiri olan $\mathrm{d}\mathcal{A}_{a\gamma}$ cebirinin jenaratörleri $\mathrm{d}a$ ve $\mathrm{d}\gamma$ olup, $\mathcal{A}_{a\gamma} \cup \mathrm{d}\mathcal{A}_{a\gamma}$ cebirinin jeneratörleri arasında sağlanması muhtemel komutasyon bağıntıları [(5.4) deki ilk dört bağıntı]

$$a\,\mathrm{d}a = X_1\,\mathrm{d}a\,a, \tag{5.5}$$

$$a\,\mathrm{d}\gamma = F_{11}\,\mathrm{d}\gamma\,a + F_{12}\,\mathrm{d}a\,\gamma, \tag{5.6}$$

$$\gamma\,\mathrm{d}a = F_{21}\,\mathrm{d}a\,\gamma + F_{22}\,\mathrm{d}\gamma\,a, \tag{5.7}$$

$$\gamma\,\mathrm{d}\gamma = X_2\,\mathrm{d}\gamma\,\gamma \tag{5.8}$$

şeklindedir. Buradaki X_i $(i=1,2)$ ve F_{ij} $(i,j=1,2)$ katsayılarını bulmak için değişmeli olmayan hesabın kovaryantlığını kullanacağız (Celik, 2002a). O nedenle önce, kısaca kovaryantlıktan bahsedelim.

$\Omega(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde $\{a,\beta,\gamma,d,\mathrm{d}a,\mathrm{d}\beta,\mathrm{d}\gamma,\mathrm{d}d,\mathrm{d}^2a,\mathrm{d}^2\beta,\mathrm{d}^2\gamma,\mathrm{d}^2d\}$ kümesinin elemanları ile oluşturulmuş, bir sonlu sol modül olsun. Bu $\Omega(\mathcal{A})$ modülü, eğer (3.1) ve (5.4) bağıntılarıyla $\Omega(\mathcal{A})$ üzerinde bir çarpma kuralı tanımlanırsa, bir birimli, birleşmeli cebir olur.

Şimdi, bir

$$\phi_L : \Omega(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \otimes \Omega(\mathcal{A}) \tag{5.9}$$

tasvirini

$$\phi_L \circ \mathrm{d} = (\tau \otimes \mathrm{d}) \circ \Delta \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\tau : \Omega(\mathcal{A}) \to \Omega(\mathcal{A})$ tasviri

$$\tau(u) = j^{\deg(u)}\, u, \qquad \forall u \in \Omega(\mathcal{A}) \tag{5.11}$$

şeklinde tanımlanan derecesi sıfır olan bir lineer tasvirdir. Bu tanımlamalar ışığı altında aşağıdaki ifadelere sahip oluruz:

$$\phi_L(\mathrm{d}a) = a \otimes \mathrm{d}a + j^2\,\beta \otimes \mathrm{d}\gamma, \qquad \phi_L(\mathrm{d}\gamma) = j\,\gamma \otimes \mathrm{d}a + d \otimes \mathrm{d}\gamma. \tag{5.12}$$

Şimdi de, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir Δ_L tasviri göz önüne alalım:

$$\Delta_L(u_1\,\mathrm{d}v_1 + \mathrm{d}v_2\,u_2) = \Delta(u_1)\,\phi_L(\mathrm{d}v_1) + \phi_L(\mathrm{d}v_2)\,\Delta(u_2). \tag{5.13}$$

Bu bilgiler doğrultusunda önermemizin ispatına kaldığımız yerden devam edelim. Eğer, bu Δ_L lineer tasvirini (5.5) bağıntısına uygularsak,

$$\begin{aligned}
\Delta_L(a\,\mathrm{d}a) &= \Delta(a)\,\phi_L(\mathrm{d}a)\\
&= (a\otimes a + \beta\otimes\gamma)(a\otimes \mathrm{d}a + j^2\,\beta\otimes\mathrm{d}\gamma)\\
&= a^2\otimes a\,\mathrm{d}a + j^2\,a\,\beta\otimes a\,\mathrm{d}\gamma + \beta\,a\otimes\gamma\,\mathrm{d}a + j\,\beta^2\otimes\gamma\,\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X_1\, a^2 \otimes \mathrm{d}a\, a + j^2\, F_{11}\, a\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a + j^2\, F_{12}\, a\, \beta \otimes \mathrm{d}a\, \gamma + q\, j\, F_{21}\, a\, \beta \otimes \mathrm{d}a\, \gamma \\
&\qquad + q\, j\, F_{22}\, a\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a + j\, X_2\, \beta^2 \otimes \mathrm{d}\gamma\, \gamma \\
&= X_1 \left(a^2 \otimes \mathrm{d}a\, a + j^2\, a\, \beta \otimes a\, \mathrm{d}\gamma + q\, a\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a + \beta^2 \otimes \mathrm{d}\gamma\, \gamma \right) \\
&\qquad + \left(j^2\, F_{12} + q\, j\, F_{21} - j^2\, X_1 \right) a\, \beta \otimes \mathrm{d}a\, \gamma \\
&\qquad + \left(j^2\, F_{11} + q\, j\, F_{22} - q\, X_1 \right) a\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a + \left(j\, X_2 - X_1 \right) \beta^2 \otimes \mathrm{d}\gamma\, \gamma \\
&= X_1\, \Delta_L \left(\mathrm{d}a\, a \right) + \left(j^2\, F_{12} + q\, j\, F_{21} - j^2\, X_1 \right) a\, \beta \otimes \mathrm{d}a\, \gamma \\
&\qquad + \left(j^2\, F_{11} + q\, j\, F_{22} - q\, X_1 \right) a\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a + \left(j\, X_2 - X_1 \right) \beta^2 \otimes \mathrm{d}\gamma\, \gamma
\end{aligned}
$$

yazarız. Öyleyse, son üç terimdeki parantez içindeki ifadeler sıfır olmalıdır:

$$
j^2\, F_{12} + q\, j\, F_{21} - j^2\, X_1 = 0, \qquad j^2\, F_{11} + q\, j\, F_{22} - q\, X_1 = 0, \qquad j\, X_2 - X_1 = 0 \tag{5.14}
$$

Δ_L nin (5.6) bağıntısına uygulanması neticesi –gerekli kısaltmalar yapılınca-

$$
\begin{aligned}
\Delta_L \left(a\, \mathrm{d}\gamma \right) &= \Delta(a)\, \phi_L \left(\mathrm{d}\gamma \right) \\
&= F_{11}\, \Delta_L \left(\mathrm{d}\gamma\, a \right) + F_{12}\, \Delta_L \left(\mathrm{d}a\, \gamma \right) + \left(j\, X_1 - q^{-1}\, j\, F_{11} - j\, F_{12} \right) a\, \gamma \otimes \mathrm{d}a\, a \\
&\qquad + \left(q^2\, j^2\, F_{21} - F_{11} \right) \gamma\, \beta \otimes \mathrm{d}a\, \gamma \\
&\qquad + \left(q(1-j) F_{11} + q^2\, j^2\, F_{22} - q^2\, j\, F_{12} \right) \gamma\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a \\
&\qquad + \left(X_2 - q^{-1}\, j^2\, F_{11} - j^2\, F_{12} \right) \beta\, d \otimes \mathrm{d}\gamma\, \gamma
\end{aligned}
$$

elde edilir ki buradan,

$$
\begin{aligned}
& j\, X_1 - q^{-1}\, j\, F_{11} - j\, F_{12} = 0, \qquad q^2\, j^2\, F_{21} - F_{11} = 0, \\
& q(1-j) F_{11} + q^2\, j^2\, F_{22} - q^2\, j\, F_{12} = 0
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

olması gerektiğini anlıyoruz. Δ_L yi (5.7) bağıntısına uygulayınca

$$
\begin{aligned}
\Delta_L \left(\gamma\, \mathrm{d}a \right) &= \Delta(\gamma)\, \phi_L \left(\mathrm{d}a \right) \\
&= F_{21}\, \Delta_L \left(\mathrm{d}a\, \gamma \right) + F_{22}\, \Delta_L \left(\mathrm{d}\gamma\, a \right) + \left(X_1 - q\, j\, F_{21} - j\, F_{22} \right) \gamma\, a \otimes \mathrm{d}a\, a \\
&\qquad + \left(j^2\, F_{11} - q^2\, j\, F_{21} \right) \gamma\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, a \\
&\qquad + \left(j^2\, F_{12} - q(1-j) F_{21} + F_{22} \right) \gamma\, \beta \otimes \mathrm{d}a\, \gamma \\
&\qquad + \left(j\, X_2 - q\, j\, F_{21} - j\, F_{22} \right) d\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\, \gamma
\end{aligned}
$$

çıkar ki bu durumda

$$
X_1 - q\, j\, F_{21} - j\, F_{22} = 0, \qquad j^2\, F_{12} - q(1-j) F_{21} + F_{22} = 0 \tag{5.16}
$$

olmalıdır. Son olarak, Δ_L yi (5.8) bağıntısına uygulayınca

$$\begin{aligned}\Delta_L(\gamma\,\mathsf{d}\gamma) &= \Delta(\gamma)\phi_L(\mathsf{d}\gamma)\\ &= X_2\,\Delta_L(\mathsf{d}\gamma\,\gamma)+\left(j\,X_1-j^2\,X_2\right)\gamma^2\otimes\mathsf{d}a\,a\\ &\qquad +\left(F_{11}+q\,j^2\,F_{22}-q\,j^2\,X_2\right)\gamma\,d\otimes\mathsf{d}\gamma\,a\\ &\qquad +\left(F_{12}+q\,j^2\,F_{21}-j\,X_2\right)\gamma\,d\otimes\mathsf{d}a\,\gamma\end{aligned}$$

elde ederiz ki, buradan yeni bir denklem gelmez.

Netice itibariyle, yukarıda elde ettiğimiz son bağıntılardan görüldüğü üzere, sol kovaryantlığa sahip olmak için $F_{22}=0$ olmalıdır. Bu durumda, eğer X_2 katsayısını keyfi alırsak, diğer katsayılar

$$\begin{aligned}&F_{11}=q\,j^2\,X_2, &&F_{12}=\left(j-j^2\right)X_2\\ &F_{21}=q^{-1}\,X_2, &&X_1=j\,X_2\end{aligned} \tag{5.17}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, d dış diferansiyel operatörünün $\gamma^3=0$ ifadesine etkisiyle

$$1+j\,X_2+j^2\,X_2{}^2=0$$

elde edilir. Bu denklem, X_2 için iki çözüm verir:

1. $X_2=1$ olabilir. Ancak bunu istemiyoruz. Zira bu durumda, (5.4) deki bağıntılara d operatörünü uyguladığımızda [ki bu durumda (5.21) deki bağıntıları bulacağız] homojen yapıyı bozan ifadeler ortaya çıkmaktadır. Biz ise, bunu istemiyoruz.

2. $X_2=j$ olabilir.

Buradan devam edersek,

$$\begin{aligned}&F_{11}=q, &&F_{12}=j^2-1\\ &F_{21}=q^{-1}\,j, &&X_1=j^2\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, (5.3) deki ilk dört bağıntıyı elde etmiş oluyoruz. Benzer işlemler yapılarak, (5.3) de verilen diğer bağıntılar için katsayılar da kolayca bulunabilir.

5.3 Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, üstteki kısımda tanımladığımız değişmeli olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlığını kullanarak (bak sayfa 29), birinci mertebe diferansiyeller arasında sağlanan bağıntıları aşağıdaki önerme ile veriyoruz.

5.3.1 Önerme Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri arasında

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma = q\, j\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\beta = q^{-1} j\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}\gamma = q\, j\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}d, \\
&\mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}\beta = q^{-1}\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}d, \\
&\mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\gamma = q^{2}\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\beta + q(1-j)\, \mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}d = j^{2}\, \mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a = 0, \\
&\mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}d = 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

şeklindeki (q, j)-komutasyon bağıntıları geçerlidir.

İspat: Z_3-dereceli kuantum süper grubundaki bir matrisin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel bağıntılar

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma = E_1\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\beta = E_2\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}\gamma = E_3\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}d, \\
&\mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}\beta = E_4\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}d, \\
&\mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\gamma = E_5\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\beta + E_6\, \mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}a, \\
&\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}d = E_7\, \mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}a + E_8\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\beta
\end{aligned} \tag{5.19}$$

şeklindedir. Öyleyse amacımız, muhtemelen q ve j parametrelerine bağlı olan E_i $(i = 1, 2, ..., 8)$ sabitlerini (katsayılarını) bulmak olacaktır. Bu katsayıları bulmak için, Önerme 5.2.1 de de yaptığımız üzere değişmeli olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlığını kullanacağız.

Aşağıda, (5.19) daki ilk bağıntı elde edilmekte ve dolayısıyla E_1 katsayısı bulunmaktadır. Benzer işlemlerle diğer katsayılar da kolaylıkla hesaplanabilir. Önerme 5.2.1 de tanımladığımız Δ_L lineer tasvirini (5.19) daki ilk bağıntıya uygulayalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\Delta_L(\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma) &= \Delta_L(\mathrm{d}a)\Delta_L(\mathrm{d}\gamma) \\
&= \left(a \otimes \mathrm{d}a + j^2\, \beta \otimes \mathrm{d}\gamma\right)\left(j\,\gamma \otimes \mathrm{d}a + d \otimes \mathrm{d}\gamma\right) \\
&= j^2\, a\,\gamma \otimes \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a + a\, d \otimes \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma + j^2\, \beta\,\gamma \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a + j^2\, \beta\, d \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma \\
&= q\, j^2\, \gamma\, a \otimes \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a + E_1\, d\, a \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a + q(1-j)E_1\,\gamma\,\beta \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a \\
&\qquad + q^2\, j^2\, \gamma\,\beta \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a + j^2\, \beta\, d \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma \\
&= E_1\, \Delta_L(\mathrm{d}\gamma)\Delta_L(\mathrm{d}a) + \left(q\, j^2 - j\, E_1\right)\gamma\, a \otimes \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a + \left(j^2 - q^{-1} j\, E_1\right)\beta\, d \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \left[q(1-j)E_1 + q^2\, j^2 - j^2\, E_1^2\right]\gamma\,\beta \otimes \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
& q\, j^2 - j\, E_1 = 0, \\
& j^2 - q^{-1} j\, E_1 = 0, \\
& q(1-j)E_1 + q^2\, j^2 - j^2\, E_1^2 = 0
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

olması gerektiğini anlıyoruz. Aslında -elde edilen bağıntılardan- ortada iki denklem vardır ve tek çözüm $E_1 = q\, j$ dır.

5.4 Koordinat Fonksiyonları ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörleri olan $T \in GL_{q,j}(1/1)$ matrisinin matris elemanları ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan bağıntılar Z_3-dereceli Leibniz kuralı kullanılarak aşağıdaki önerme ile verilecektir.

5.4.1 Önerme Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanları ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
& a\,\mathrm{d}^2 a = j^2\, \mathrm{d}^2 a\, a, \\
& a\,\mathrm{d}^2 \gamma = q\,\mathrm{d}^2 \gamma\, a + (j^2 - 1)\,\mathrm{d}^2 a\,\gamma, \\
& \gamma\,\mathrm{d}^2 a = q^{-1}\mathrm{d}^2 a\,\gamma, \\
& \gamma\,\mathrm{d}^2 \gamma = \mathrm{d}^2 \gamma\,\gamma, \\
& a\,\mathrm{d}^2 \beta = q^{-1} j^2\, \mathrm{d}^2 \beta\, a + (j^2 - 1)\,\mathrm{d}^2 a\,\beta, \\
& \beta\,\mathrm{d}^2 a = q\, j^2\, \mathrm{d}^2 a\,\beta, \\
& \beta\,\mathrm{d}^2 \beta = j\,\mathrm{d}^2 \beta\,\beta, \\
& \gamma\,\mathrm{d}^2 \beta = q^{-2} j\,\mathrm{d}^2 \beta\,\gamma + q^{-1}(1-j)\,\mathrm{d}^2 a\, d, \\
& \beta\,\mathrm{d}^2 \gamma = q^2 j^2\, \mathrm{d}^2 \gamma\,\beta + q\left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a\, d, \\
& d\,\mathrm{d}^2 \gamma = q\, j^2\, \mathrm{d}^2 \gamma\, d,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma\,\mathrm{d}^2 d = q^{-1} j\,\mathrm{d}^2 d\,\gamma + (1-j)\,\mathrm{d}^2\gamma\, d,\\
&d\,\mathrm{d}^2 d = j^2\,\mathrm{d}^2 d\, d,\\
&\beta\,\mathrm{d}^2 d = q\, j\,\mathrm{d}^2 d\,\beta + \left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2\beta\, d,\\
&d\,\mathrm{d}^2\beta = q^{-1}\mathrm{d}^2\beta\, d,\\
&d\,\mathrm{d}^2 a = \mathrm{d}^2 a\, d,\\
&a\,\mathrm{d}^2 d = \mathrm{d}^2 d\, a + (j-1)(1-j^2)\mathrm{d}^2 a\, d + q(1-j)\,\mathrm{d}^2\gamma\,\beta + q^{-1}\left(1-j\right)\mathrm{d}^2\beta\,\gamma.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, (5.3) deki bağıntılara Z_3-dereceli Leibniz kuralını uygulayacağız. Aşağıda, keyfi olarak seçtiğimiz iki bağıntının nasıl elde edildiği açıkça ortaya konmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer işlemlerle kolayca elde edilebilir. Şimdi,

$$
a\,\mathrm{d}\gamma = q\,\mathrm{d}\gamma\, a + \left(j^2 - 1\right)\mathrm{d}a\,\gamma \tag{5.22}
$$

bağıntısını göz önüne alarak d operatörünü uygulayalım. Bu takdirde sol taraf

$$
\mathrm{d}\left(a\,\mathrm{d}\gamma\right) = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma + a\,\mathrm{d}^2\gamma
$$

ve sağ taraf

$$
\mathrm{d}\left(q\,\mathrm{d}\gamma\, a + \left(j^2-1\right)\mathrm{d}a\,\gamma\right) = q\,\mathrm{d}^2\gamma\, a + q\, j^2\,\mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a + \left(j^2-1\right)\mathrm{d}^2 a\,\gamma + \left(1-j\right)\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma
$$

şeklini alır. Elde edilen bu iki ifadeyi eşitler ve (5.18) bağıntılarını da kullanarak düzenlersek, son eşitliği

$$
a\,\mathrm{d}^2\gamma = q\,\mathrm{d}^2\gamma\, a + (j^2-1)\,\mathrm{d}^2 a\,\gamma
$$

şeklinde yazarız. Bu, (5.21) deki ikinci bağıntıdır. Benzer şekilde,

$$
\beta\,\mathrm{d}\gamma = q^2 j\,\mathrm{d}\gamma\,\beta + q(1-j)\,\mathrm{d}a\, d
$$

bağıntısının her iki tarafına d operatörünü uygularsak,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(\beta\,\mathrm{d}\gamma\right) = \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\gamma + j^2\,\beta\,\mathrm{d}^2\gamma\\
&\mathrm{d}\left(q^2 j\,\mathrm{d}\gamma\,\beta + q(1-j)\,\mathrm{d}a\, d\right) = q^2 j\,\mathrm{d}^2\gamma\,\beta + q(1-j)\,\mathrm{d}^2 a\, d + q^2\,\mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\beta + q\left(j - j^2\right)\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}d
\end{aligned}
$$

olup, (5.18) bağıntılarının kullanımı ile,

$$
\beta\,\mathrm{d}^2\gamma = q^2 j^2\,\mathrm{d}^2\gamma\,\beta + q\left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a\, d
$$

yazarız. Bu da, (5.21) deki dokuzuncu bağıntıdır.

5.5 Birinci ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda da, Z_3-dereceli Leibniz kuralından faydalanılarak, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörlerinin birinci ve ikinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

5.5.1 Önerme Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile ikinci mertebe diferansiyelleri arasında

$$\begin{aligned}
&\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}^2 a = j\,\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}a,\\
&\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}^2 \beta = q^{-1}\,\mathsf{d}^2\beta \wedge \mathsf{d}a + \left(j - j^2\right)\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}\beta,\\
&\mathsf{d}\beta \wedge \mathsf{d}^2 a = q\,j\,\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}\beta,\\
&\mathsf{d}\beta \wedge \mathsf{d}^2\beta = j^2\,\mathsf{d}^2\beta \wedge \mathsf{d}\beta,\\
&\mathsf{d}\gamma \wedge \mathsf{d}^2 a = q^{-1}\,j^2\,\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}\gamma,\\
&\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}^2\gamma = q\,\mathsf{d}^2\gamma \wedge \mathsf{d}a + \left(j - j^2\right)\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}\gamma,\\
&\mathsf{d}\gamma \wedge \mathsf{d}^2\gamma = \mathsf{d}^2\gamma \wedge \mathsf{d}\gamma,\\
&\mathsf{d}\beta \wedge \mathsf{d}^2\gamma = q^2\,j^2\,\mathsf{d}^2\gamma \wedge \mathsf{d}\beta + q(1-j)\,\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}d \wedge \mathsf{d}^2\gamma = q\,j^2\,\mathsf{d}^2\gamma \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}\gamma \wedge \mathsf{d}^2\beta = q^{-2}\,j^2\,\mathsf{d}^2\beta \wedge \mathsf{d}\gamma + q^{-1}\left(j^2 - 1\right)\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}d \wedge \mathsf{d}^2 d = j\,\mathsf{d}^2 d \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}\gamma \wedge \mathsf{d}^2 d = q^{-1}\,\mathsf{d}^2 d \wedge \mathsf{d}\gamma + (1-j)\,\mathsf{d}^2\gamma \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}d \wedge \mathsf{d}^2\beta = q^{-1}\,j\,\mathsf{d}^2\beta \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}\beta \wedge \mathsf{d}^2 d = q\,\mathsf{d}^2 d \wedge \mathsf{d}\beta + \left(j^2 - 1\right)\mathsf{d}^2\beta \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}d \wedge \mathsf{d}^2 a = j^2\,\mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}d,\\
&\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}^2 d = j^2\,\mathsf{d}^2 d \wedge \mathsf{d}a + \left(1 - j^2\right)^2 \mathsf{d}^2 a \wedge \mathsf{d}d + q(1-j)\,\mathsf{d}^2\gamma \wedge \mathsf{d}\beta + q^{-1}\left(j - j^2\right)\mathsf{d}^2\beta \wedge \mathsf{d}\gamma
\end{aligned} \tag{5.23}$$

şeklindeki (q, j)-komutasyon bağıntıları sağlanır.

İspat: Önermede verilen bağıntılar, (5.21) deki bağıntılara Z_3-dereceli Leibniz kuralı uygulanarak elde edilebilmektedir. Aşağıda, keyfi olarak seçtiğimiz iki bağıntının nasıl elde edildiği açıkça ortaya konmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer işlemlerle kolaylıkla gösterilebilir. İlk önce,

$$a\,\mathsf{d}^2\beta = q^{-1} j^2\,\mathsf{d}^2\beta\, a + (j^2 - 1)\,\mathsf{d}^2 a\,\beta$$

bağıntısını göz önüne alalım. Bu bağıntıya $\mathrm{d}^3=0$ olduğunu göz önüne alarak d diferansiyel operatörünü uygularsak doğrudan

$$\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}^2\beta=q^{-1}\,\mathrm{d}^2\beta\wedge\mathrm{d}a+\left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}\beta$$

eşitliğine ulaşırız. Şimdi de,

$$\beta\,\mathrm{d}^2\gamma=q^2j^2\,\mathrm{d}^2\gamma\,\beta+q\left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2a\,d$$

bağıntısına d yi uygulayalım. Bu halde,

$$\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}^2\gamma=q^2j^2\,\mathrm{d}^2\gamma\wedge\mathrm{d}\beta+q\left(1-j\right)\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}d$$

çıkar.

5.6 İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Diferansiyel şemayı tamamlamak için geriye, T nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını ortaya koymak kaldı ki, o bağıntılar da aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

5.6.1 Önerme Eğer $T\in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ise T nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki $\left(q,j\right)$-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}^2\beta=q^{-1}\,\mathrm{d}^2\beta\wedge\mathrm{d}^2a,\\
&\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}^2\gamma=q\,j^2\,\mathrm{d}^2\gamma\wedge\mathrm{d}^2a,\\
&\mathrm{d}^2\beta\wedge\mathrm{d}^2d=q\,j\,\mathrm{d}^2d\wedge\mathrm{d}^2\beta,\\
&\mathrm{d}^2d\wedge\mathrm{d}^2\gamma=q\,j^2\,\mathrm{d}^2\gamma\wedge\mathrm{d}^2d,\\
&\mathrm{d}^2\beta\wedge\mathrm{d}^2\gamma=q^2\,j^2\,\mathrm{d}^2\gamma\wedge\mathrm{d}^2\beta+q\left(j^2-1\right)\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}^2d,\\
&\mathrm{d}^2\gamma\wedge\mathrm{d}^2\beta=q^{-2}\,\mathrm{d}^2\beta\wedge\mathrm{d}^2\gamma+q^{-1}\left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}^2d,\\
&\mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}^2d=j^2\,\mathrm{d}^2d\wedge\mathrm{d}^2a.
\end{aligned}\tag{5.24}$$

İspat: Bu önermenin ispatı da son iki önermede olduğu gibi Z_3-dereceli Leibniz kuralı kullanılarak yapılacaktır. (5.23) deki bağıntılara $\mathrm{d}^3=0$ olduğu göz önüne alınarak d diferansiyel operatörünün uygulanmasıyla (5.24) bağıntıları kolaylıkla elde edilebilir. O halde, (5.23) den keyfi olarak seçilen bir bağıntıya diferansiyel operatörünü uygulayarak sonuca ulaşalım. Kalan bağıntıların da benzer şekilde elde edileceği açıktır. Şimdi,

$$\mathsf{d}\beta\wedge\mathsf{d}^2 d = q\,\mathsf{d}^2 d\wedge\mathsf{d}\beta + \left(j^2-1\right)\mathsf{d}^2\beta\wedge\mathsf{d}d$$

bağıntısını göz önüne alalım. O halde,

$$\mathsf{d}\left(\mathsf{d}\beta\wedge\mathsf{d}^2 d\right) = \mathsf{d}\left[q\,\mathsf{d}^2 d\wedge\mathsf{d}\beta + \left(j^2-1\right)\mathsf{d}^2\beta\wedge\mathsf{d}d\right]$$
$$\mathsf{d}^2\beta\wedge\mathsf{d}^2 d = q\,j^2\,\mathsf{d}^2 d\wedge\mathsf{d}^2\beta + \left(1-j\right)\mathsf{d}^2\beta\wedge\mathsf{d}^2 d$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse,

$$\mathsf{d}^2\beta\wedge\mathsf{d}^2 d = q\,j\,\mathsf{d}^2 d\wedge\mathsf{d}^2\beta$$

ile ispat tamamlanmış olur.

Özet: Şimdi, 5. Bölüm başlığı altında buraya kadar yapmış olduğumuz çalışmayı, elde ettiğimiz veriler doğrultusunda kısaca özetleyelim.

Yukarıda verilen beş önermede geçen bağıntıları Δ_L lineer tasvirinin invaryant bıraktığını kontrol etmek zor değildir. Ayrıca aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı da kontrol edilebilir:

$$\left(id\otimes\Delta_L\right)\circ\Delta_L = \left(\Delta\otimes id\right)\circ\Delta_L, \qquad m\circ\left(\varepsilon\otimes id\right)\circ\Delta_L = id. \tag{5.25}$$

Δ_L lineer tasvirini sol ko-etki olarak adlandırıyoruz. Δ_L tasviri $\Omega(\mathcal{A})$ cebirini bir $\mathcal{A}$-modül yapar. Böylece, $\left(\Omega(\mathcal{A}),\Delta_L\right)$ çifti $\mathcal{A}$ Hopf Cebiri üzerinde bir sol kovaryant sol $\mathcal{A}$ modüldür. Bununla birlikte, $\left(\Omega(\mathcal{A}),\mathsf{d}\right)$ çifti $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir diferansiyel hesaptır ve d operatörü bir sol ko-modül tasviridir, yani her $u\in\mathcal{A}$ için

$$\left(\Gamma\otimes\mathsf{d}\right)\circ\Delta(u) = \Delta_L\left(\mathsf{d}u\right) \tag{5.26}$$

olur.

Sonuç olarak, $\left(\Omega(\mathcal{A}),\mathsf{d},\Delta_L\right)$ üçlüsü $\mathcal{A}$ Hopf cebiri üzerinde bir sol kovaryant diferansiyel hesaptır.

5.7 Ters Matrisin Matris Elemanları ile Diferansiyel Hesap

Bu kısımda, sonraki kısıma ışık tutması açısından $T\in GL_{q,j}(1/1)$ iken T^{-1} matrisinin matris elemanları ve onların diferansiyelleri arasında sağlanan bağıntıları, toplu halde bir önerme olarak ortaya koyacağız. Kısım 4.2 den eğer $T\in GL_{q,j}(1/1)$ ise $T^{-1}\in GL_{q^{-1},j^{-1}}(1/1)$ olduğunu biliyoruz. Burada, ilk olarak T^{-1} nin matris elemanlarının kendi aralarında sağlanan komutasyon bağıntılarını kısaca hatırlayalım.

Eğer, $T \in GL_{q,j}(1/1)$ için T nin tersini

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarsak, T^{-1} matrisinin matris elemanlarının

$$\begin{aligned}
&AB = q\,j\,BA, \\
&DB = q\,j^2\,BD, \\
&AC = q^{-1}\,CA, \\
&DC = q^{-1}\,CD, \\
&BC = q^{-2}\,CB, \\
&B^3 = 0 = C^3, \\
&AD = DA + q^{-1}(1-j)CB
\end{aligned}$$

bağıntılarını sağladığını biliyoruz.

Şimdi üstte tanımlanan d dış diferansiyel operatörü yardımıyla T^{-1} ters matrisinin elemanları ile bir diferansiyel şema oluşturacağız. Elde edeceğimiz diferansiyel şemayı, Önerme 5.7.1 altında fazlaca ayrıntıya girmeden ve bazı kısa bilgiler ile vereceğiz. Ayrıntılı ispatları, üstte verdiğimiz önermelerin ispatlarına benzer şekilde yapılabilir.

5.7.1 Önerme Kabul edelim ki $T \in GL_{q,j}(1/1)$ dir. Bu takdirde:

a) T^{-1} nin matris elemanları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$\begin{aligned}
&A\,\mathsf{d}A = j^2\,\mathsf{d}A\,A, \\
&A\,\mathsf{d}B = q\,j\,\mathsf{d}B\,A + (j^2-1)\,\mathsf{d}A\,B, \\
&B\,\mathsf{d}A = q^{-1}\,j^2\,\mathsf{d}A\,B, \\
&B\,\mathsf{d}B = \mathsf{d}B\,B, \\
&C\,\mathsf{d}A = q\,j\,\mathsf{d}A\,C, \\
&A\,\mathsf{d}C = q^{-1}\,\mathsf{d}C\,A + (j^2-1)\,\mathsf{d}A\,C, \\
&C\,\mathsf{d}C = j\,\mathsf{d}C\,C,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&C\,\mathrm{d}B = q^{2}\, j^{2}\,\mathrm{d}B\,C + \left(j - j^{2}\right)\mathrm{d}C\,B,\\
&B\,\mathrm{d}C = q^{-2}\,\mathrm{d}C\,B,\\
&D\,\mathrm{d}B = q\, j^{2}\,\mathrm{d}B\,D + \left(j^{2} - 1\right)\mathrm{d}D\,B,\\
&B\,\mathrm{d}D = q^{-1}\, j\,\mathrm{d}D\,B,\\
&C\,\mathrm{d}D = q\, j^{2}\,\mathrm{d}D\,C + \left(j - j^{2}\right)\mathrm{d}C\,D,\\
&D\,\mathrm{d}D = j^{2}\,\mathrm{d}D\,D,\\
&D\,\mathrm{d}C = q^{-1}\, j^{2}\,\mathrm{d}C\,D,\\
&A\,\mathrm{d}D = j^{2}\,\mathrm{d}D\,A + q^{-1}\left(j^{2} - 1\right)\mathrm{d}C\,B + q\left(1 - j\right)\mathrm{d}B\,C,\\
&D\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}A\,D + \left(j^{2} - 1\right)\mathrm{d}D\,A + q^{-1}\left(j - 1\right)\mathrm{d}C\,B + q\left(j^{2} - j\right)\mathrm{d}B\,C.
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

b) T^{-1} nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}B = q\,\mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}A,\\
&\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}C = q^{-1}\, j\,\mathrm{d}C \wedge \mathrm{d}A,\\
&\mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}C = q^{-2}\, j^{2}\,\mathrm{d}C \wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}D = q^{-1}\, j^{2}\,\mathrm{d}D \wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}C \wedge \mathrm{d}D = q\, j^{2}\,\mathrm{d}D \wedge \mathrm{d}C,\\
&\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}D = \mathrm{d}D \wedge \mathrm{d}A + q^{-1}\left(j - 1\right)\mathrm{d}C \wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}A = 0,\\
&\mathrm{d}D \wedge \mathrm{d}D \wedge \mathrm{d}D = 0.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

c) T^{-1} nin matris elemanları ile ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&A\,\mathrm{d}^{2}A = j^{2}\,\mathrm{d}^{2}A\;A,\\
&A\,\mathrm{d}^{2}B = q\, j\,\mathrm{d}^{2}B\;A + \left(j^{2} - 1\right)\mathrm{d}^{2}A\;B,\\
&B\,\mathrm{d}^{2}A = q^{-1}\,\mathrm{d}^{2}A\;B,\\
&B\,\mathrm{d}^{2}B = j\,\mathrm{d}^{2}B\;B,\\
&C\,\mathrm{d}^{2}A = q\,\mathrm{d}^{2}A\;C,\\
&A\,\mathrm{d}^{2}C = q^{-1}\,\mathrm{d}^{2}C\;A + \left(j^{2} - 1\right)\mathrm{d}^{2}A\;C,\\
&C\,\mathrm{d}^{2}C = \mathrm{d}^{2}C\;C,\\
&C\,\mathrm{d}^{2}B = q^{2}\, j\,\mathrm{d}^{2}B\;C + \left(1 - j\right)\mathrm{d}^{2}C\;B,\\
&B\,\mathrm{d}^{2}C = q^{-2}\, j\,\mathrm{d}^{2}C\;B,\\
&C\,\mathrm{d}^{2}D = q\, j\,\mathrm{d}^{2}D\;C + \left(1 - j\right)\mathrm{d}^{2}C\;D,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\,\mathrm{d}^2C = q^{-1}\, j^2\, \mathrm{d}^2C\; D,\\
&D\,\mathrm{d}^2D = j^2\, \mathrm{d}^2D\; D,\\
&B\,\mathrm{d}^2D = q^{-1}\, j^2\, \mathrm{d}^2D\; B,\\
&D\,\mathrm{d}^2B = q\, j^2\, \mathrm{d}^2B\; D + \left(j^2-1\right)\mathrm{d}^2D\; B,\\
&A\,\mathrm{d}^2D = j^2\, \mathrm{d}^2D\; A + q^{-1}\left(j^2-1\right)\mathrm{d}^2C\; B + q\left(1-j\right)\mathrm{d}^2B\; C,\\
&D\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2A\; D + \left(j^2-1\right)\mathrm{d}^2D\; A + q^{-1}\left(j-1\right)\mathrm{d}^2C\; B + q\left(j^2-j\right)\mathrm{d}^2B\; C.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

d) T^{-1} nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}A\wedge \mathrm{d}^2A = j\,\mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}A,\\
&\mathrm{d}A\wedge \mathrm{d}^2B = q\, j^2\, \mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}A + \left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}B\wedge \mathrm{d}^2A = q^{-1} j^2\, \mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}B\wedge \mathrm{d}^2B = j^2\, \mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}C\wedge \mathrm{d}^2A = q\, j^2\, \mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}C,\\
&\mathrm{d}A\wedge \mathrm{d}^2C = q^{-1}\, \mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}A + \left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}C,\\
&\mathrm{d}C\wedge \mathrm{d}^2C = \mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}C,\\
&\mathrm{d}C\wedge \mathrm{d}^2B = q^2\, j^2\, \mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}C + \left(1-j\right)\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}B\wedge \mathrm{d}^2C = q^{-2}\, j\,\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}C\wedge \mathrm{d}^2D = q\, \mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}C + \left(1-j\right)\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}D,\\
&\mathrm{d}D\wedge \mathrm{d}^2C = q^{-1}\, j^2\, \mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}D,\\
&\mathrm{d}D\wedge \mathrm{d}^2D = j\,\mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}D,\\
&\mathrm{d}B\wedge \mathrm{d}^2D = q^{-1}\, j\,\mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}D\wedge \mathrm{d}^2B = q\, \mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}D + \left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}B,\\
&\mathrm{d}A\wedge \mathrm{d}^2D = j\,\mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}A + q^{-1}\left(j^2-1\right)\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}B + q\left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}C,\\
&\mathrm{d}D\wedge \mathrm{d}^2A = j^2\, \mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}D + \left(j-j^2\right)\mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}A + q^{-1}\left(j-1\right)\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}B + q\left(1-j^2\right)\mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}C.
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

e) T^{-1} nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}^2B = q\, j^2\, \mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}^2A,\\
&\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}^2A = q\, j\,\mathrm{d}^2A\wedge \mathrm{d}^2C,\\
&\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}^2B = q^2\, j^2\, \mathrm{d}^2B\wedge \mathrm{d}^2C,\\
&\mathrm{d}^2C\wedge \mathrm{d}^2D = q\, j\,\mathrm{d}^2D\wedge \mathrm{d}^2C,
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{d}^2 B \wedge \mathsf{d}^2 D = q^{-1}\, \mathsf{d}^2 D \wedge \mathsf{d}^2 B,$$
$$\mathsf{d}^2 A \wedge \mathsf{d}^2 D = \mathsf{d}^2 D \wedge \mathsf{d}^2 A + q\left(j-1\right) \mathsf{d}^2 B \wedge \mathsf{d}^2 C. \qquad (5.31)$$

Şimdi, önermenin (a) kısmı için bazı açıklamalar yapalım. Bunun için, T^{-1} nin matris elemanları ile onların diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel bağıntıları yazarak başlayalım. Bunlar

$$\begin{aligned}
&A\,\mathsf{d}A = Y_1\, \mathsf{d}A\, A,\\
&A\,\mathsf{d}B = K_{11}\, \mathsf{d}B\, A + K_{12}\, \mathsf{d}A\, B,\\
&B\,\mathsf{d}A = K_{21}\, \mathsf{d}A\, B + K_{22}\, \mathsf{d}B\, A,\\
&B\,\mathsf{d}B = Y_2\, \mathsf{d}B\, B,\\
&A\,\mathsf{d}C = L_{11}\, \mathsf{d}C\, A + L_{12}\, \mathsf{d}A\, C,\\
&C\,\mathsf{d}A = L_{21}\, \mathsf{d}A\, C + L_{22}\, \mathsf{d}C\, A,\\
&C\,\mathsf{d}C = Y_3\, \mathsf{d}C\, C,\\
&B\,\mathsf{d}C = R_{11}\, \mathsf{d}C\, B + R_{12}\, \mathsf{d}B\, C + R_{13}\, \mathsf{d}A\, D + R_{14}\, \mathsf{d}D\, A,\\
&C\,\mathsf{d}B = R_{21}\, \mathsf{d}B\, C + R_{22}\, \mathsf{d}C\, B + R_{23}\, \mathsf{d}A\, D + R_{24}\, \mathsf{d}D\, A,\\
&D\,\mathsf{d}C = M_{11}\, \mathsf{d}C\, D + M_{12}\, \mathsf{d}D\, C,\\
&C\,\mathsf{d}D = M_{21}\, \mathsf{d}D\, C + M_{22}\, \mathsf{d}C\, D,\\
&D\,\mathsf{d}D = Y_4\, \mathsf{d}D\, D,\\
&B\,\mathsf{d}D = T_{11}\, \mathsf{d}D\, B + T_{12}\, \mathsf{d}B\, D,\\
&D\,\mathsf{d}B = T_{21}\, \mathsf{d}B\, D + T_{22}\, \mathsf{d}D\, B,\\
&A\,\mathsf{d}D = N_{11}\, \mathsf{d}D\, A + N_{12}\, \mathsf{d}A\, D + N_{13}\, \mathsf{d}C\, B + N_{14}\, \mathsf{d}B\, C,\\
&D\,\mathsf{d}A = N_{21} \mathsf{d}A\, D + N_{22}\, \mathsf{d}D\, A + N_{23}\, \mathsf{d}C\, B + N_{24}\, \mathsf{d}B\, C
\end{aligned} \qquad (5.32)$$

şeklindedir. Burada, muhtemelen q ve j parametrelerine bağlı 36 adet sabit bulunmaktadır. Amacımız bu bağıntılarda yer alan $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, K_{ij}, L_{ij}, R_{ij}, M_{ij}, T_{ij}, N_{ij}$ katsayılarını bulmaktır.

Aşağıda A, B ve onların diferansiyelleri göz önüne alınarak (5.32) deki ilk dört bağıntıya bir yön verilecektir. Fakat işlemler sonuna kadar götürülmeyip, ayrıntıya girilmeyecektir. Şüphesiz, aşağıda anlatılan yolla diğer bağıntılarda ortaya çıkan katsayılar da kolayca elde edilebilir. Şimdi, A ve B elemanlarını göz önüne alarak

$$A\,B = q\, j\, B\, A, \qquad B^3 = 0$$

bağıntılarıyla oluşturulan cebiri $\mathcal{A}_{\mathcal{AB}}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{A}_{\mathcal{AB}}$ cebirinin diferansiyel cebiri olan $\mathsf{d}\mathcal{A}_{\mathcal{AB}}$ cebirinin jenaratörleri $\mathsf{d}A$ ve $\mathsf{d}B$ olup, $\mathcal{A}_{\mathcal{AB}} \cup \mathsf{d}\mathcal{A}_{\mathcal{AB}}$ cebirinin jeneratörleri arasında sağlanan muhtemel komutasyon bağıntıları [(5.32) deki ilk dört bağıntı]

$$
\begin{aligned}
&A\,\mathrm{d}A = Y_1\,\mathrm{d}A\,A,\\
&A\,\mathrm{d}B = K_{11}\,\mathrm{d}B\,A + K_{12}\,\mathrm{d}A\,B,\\
&B\,\mathrm{d}A = K_{21}\,\mathrm{d}A\,B + K_{22}\,\mathrm{d}B\,A,\\
&B\,\mathrm{d}B = Y_2\,\mathrm{d}B\,B
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buradaki $Y_i\,(i=1,2)$ ve $K_{i,j}\,(i,j=1,2)$ katsayılarını bulmak için Hesabın Tutarlılığını kullanacağız (Wess ve Zumino, 1990). Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(A\,B - q\,j\,B\,A) = 0,\\
&(A\,B - q\,j\,B\,A)\,\mathrm{d}A = 0,\\
&(A\,B - q\,j\,B\,A)\,\mathrm{d}B = 0
\end{aligned}
$$

bağıntılarını göz önüne alıp, gerekli işlemler yapıldıktan sonra Y_1, Y_2, K_{ij} katsayılarının uygun kabuller altında

$$
\begin{aligned}
&Y_1 = j^2, \qquad && K_{11} = q\,j, \qquad && K_{12} = j^2 - 1,\\
&K_{21} = q^{-1}\,j^2, && K_{22} = 0, && Y_2 = 1
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunabileceği görülecek ve ele alınan bağıntılar elde edilmiş olacaktır.

5.8 Cartan-Maurer Formları

Klasik diferansiyel geometride bir Lie grubu üzerinde tanımlanmış sol-invaryant 1-formlar ile

$$
W = \mathrm{d}T\;T^{-1} \tag{5.33}
$$

olacak şekilde bir matris değerli W formunu oluşturabiliriz. Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ matrisinin tersini Kısım 4.3 de olduğu gibi

$$
T^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}
$$

şeklinde yazarsak, elde edilen W formunun matris elemanlarını aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
&w_1 = \mathrm{d}a\,A + \mathrm{d}\beta\,C,\\
&u = \mathrm{d}a\,B + \mathrm{d}\beta\,D,\\
&v = \mathrm{d}\gamma\,A + \mathrm{d}d\,C,\\
&w_2 = \mathrm{d}d\,D + \mathrm{d}\gamma\,B.
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

Bu kısımdaki amacımız, ele alınan bu formlar arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını bulup, bu formların sol-invaryant olduklarını göstermektir.

Üstte verilen formlar arasındaki bağıntıları bulabilmek için bazı bağıntılara sahip olmamız gerekmektedir. Bu bağıntıları, lemmalar halinde, nasıl elde edildiklerini de ispatlayarak aşağıda sunuyoruz.

5.8.1 Lemma Eğer $T\in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanları ile T^{-1} in matris elemanları aşağıdaki (q,j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$\begin{aligned}
&a\,A=j^2\,A a+1-j^2,\\
&a\,B=q^{-1}\,j^2\,B\,a,\\
&a\,C=q\,C\,a,\\
&a\,D=D\,a,\\
&\beta\,A=q^{-1}\,j^2\,A\beta,\\
&\beta\,B=q^{-2}\,B\,\beta,\\
&\beta\,C=C\,\beta,\\
&\beta\,D=q^{-1}\,j\,D\,\beta,\\
&\gamma\,A=q\,\gamma\,A,\\
&\gamma\,B=B\,\gamma,\\
&\gamma\,C=q^2\,C\,\gamma,\\
&\gamma\,D=q\,D\,\gamma,\\
&d\,A=A\,d,\\
&d\,B=q^{-1}\,j\,B\,d,\\
&d\,C=q\,C\,d,\\
&d\,D=j\,D\,d+1-j.
\end{aligned}\tag{5.35}$$

İspat: Kısım 4.1 ve Kısım 4.3 de elde edilen (4.6) ve (4.13) bağıntıları kullanılarak yukarıda verilen bağıntılar kolayca elde edilebilir. Aşağıda, ilk ve son bağıntının nasıl çıktığı açık bir şekilde ortaya konacaktır. Kalan bağıntılar ise benzer şekilde bulunabilir.

$$\begin{aligned}
a\,A&=a\left(a^{-1}+a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}+a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\right)\\
&=a^{-1}\,a+q^{-1}\,j^2\,a^{-1}\,\beta\,a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}+q^{-1}\,j^2\,a^{-1}\,\beta\,a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&=a^{-1}\,a+q^{-1}\,j^2\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,a\,\gamma\,a^{-1}+\left(1-j^2\right)a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,a\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&\qquad+q^{-1}\,j^2\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,a\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&=a^{-1}\,a+j^2\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,a+q^{-1}\left(j^2-j\right)a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&\qquad+q^{-1}\,j\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{-1}a + j^2 a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}a + \left(j^2 - j\right)a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}a \\
&\qquad + j\,a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}a \\
&= j^2 a^{-1}a + j^2 a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}a + j^2 a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}a + a^{-1}a - j^2 a^{-1}a \\
&= j^2 A a + 1 - j^2
\end{aligned}
$$

ile ilk bağıntıyı,

$$
\begin{aligned}
d\,D &= d\left(d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\right) \\
&= d^{-1}d + q\,d^{-1}\gamma d\,a^{-1}\beta d^{-1} + q\,d^{-1}\gamma d\,a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \\
&= d^{-1}d + q\,d^{-1}\gamma a^{-1}d\,\beta d^{-1} + (1-j)d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d\,\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \\
&\qquad + q\,d^{-1}\gamma a^{-1}d\,\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \\
&= d^{-1}d + j\,d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d + q(1-j)d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma d\,a^{-1}\beta d^{-1} \\
&\qquad + j\,d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d\,\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \\
&= d^{-1}d + j\,d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d + \left(j - j^2\right)d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d \\
&\qquad + j^2 d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d \\
&= j\,d^{-1}d + j\,d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d + j\,d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}d + d^{-1}d - j\,d^{-1}d \\
&= j\,D\,d + 1 - j
\end{aligned}
$$

ile son bağıntıyı elde ederiz.

5.8.2 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T^{-1} nin matris elemanları ile T nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki (q,j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&A\,\mathrm{d}a = j\,\mathrm{d}a\,A, \\
&A\,\mathrm{d}\beta = q\,j\,\mathrm{d}\beta\,A, \\
&A\,\mathrm{d}\gamma = q^{-1}\,\mathrm{d}\gamma\,A, \\
&A\,\mathrm{d}d = \mathrm{d}d\,A, \\
&B\,\mathrm{d}a = q\,j^2\,\mathrm{d}a\,B, \\
&B\,\mathrm{d}\gamma = j^2\,\mathrm{d}\gamma\,B + \left(1 - j^2\right)\mathrm{d}a\,A, \\
&B\,\mathrm{d}\beta = q^2\,j\,\mathrm{d}\beta\,B, \\
&B\,\mathrm{d}d = q\,j\,\mathrm{d}d\,B + q\left(1 - j^2\right)\mathrm{d}\beta\,A, \\
&C\,\mathrm{d}a = q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,C, \\
&C\,\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\beta\,C + \left(1 - j^2\right)\mathrm{d}a\,A, \\
&C\,\mathrm{d}\gamma = q^{-2}\,j^2\,\mathrm{d}\gamma\,C, \\
&C\,\mathrm{d}d = q^{-1}\,\mathrm{d}d\,C + q^{-1}\left(1 - j^2\right)\mathrm{d}\gamma\,A,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\,\mathrm{d}a = \mathrm{d}a\,D,\\
&D\,\mathrm{d}\beta = q\,\mathrm{d}\beta\,D + q\left(1-j^2\right)\mathrm{d}a\,B,\\
&D\,\mathrm{d}\gamma = q^{-1}\,j\,\mathrm{d}\gamma\,D + q^{-1}\left(j-1\right)\mathrm{d}a\,C,\\
&D\,\mathrm{d}d = j\,\mathrm{d}d\,D + \left(j-1\right)\mathrm{d}\gamma\,B + \left(j^2-j\right)\mathrm{d}\beta\,C + \left(1-j\right)^2\mathrm{d}a\,A.
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (4.13) ve (5.3) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda birinci ve dokuzuncu bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. İlk olarak birinci bağıntıyı

$$
\begin{aligned}
A\,\mathrm{d}a &= \left(a^{-1} + a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} + a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\right)\mathrm{d}a\\
&= j\,\mathrm{d}a\,a^{-1} + j\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,\mathrm{d}a\,a^{-1} + j\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,\mathrm{d}a\,a^{-1}\\
&= j\,\mathrm{d}a\,a^{-1} + q^{-1}\,j^2\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\mathrm{d}a\,\gamma\,a^{-1} + q^{-1}\,j^2\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\mathrm{d}a\,\gamma\,a^{-1}\\
&= j\,\mathrm{d}a\,a^{-1} + a^{-1}\,\mathrm{d}a\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} + a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\mathrm{d}a\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= j\,\mathrm{d}a\,a^{-1} + j\,\mathrm{d}a\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} + j\,\mathrm{d}a\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= j\,\mathrm{d}a\,A.
\end{aligned}
$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi de $C\,\mathrm{d}a = q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,C$ bağıntısını ele alalım.

$$
\begin{aligned}
C\,\mathrm{d}a &= \left(-\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\right)\mathrm{d}a\\
&= -\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\mathrm{d}a - d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\mathrm{d}a\\
&= -\,j\,d^{-1}\,\gamma\,\mathrm{d}a\,a^{-1} - j\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,\mathrm{d}a\,a^{-1}\\
&= -q^{-1}\,j^2\,d^{-1}\,\mathrm{d}a\,\gamma\,a^{-1} - q^{-1}\,j^2\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\mathrm{d}a\,\gamma\,a^{-1}\\
&= -q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - q^{-1}\,j^2\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= -q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\mathrm{d}a\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= -q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - j\,d^{-1}\,\gamma\,\mathrm{d}a\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= -q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - q^{-1}\,j^2\,d^{-1}\,\mathrm{d}a\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= -q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\\
&= q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\left(-\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\right)\\
&= q^{-1}\,j^2\,\mathrm{d}a\,C.
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki önermenin ispatı da, (5.21) bağıntıları kullanılarak Lemma 5.8.2 deki ispata benzer şekilde yapılabilir. Bu yüzden, ispat verilmeyecektir.

5.8.3 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ise T^{-1} nin matris elemanları ile T nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki $\left(q, j\right)$-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&A\,\mathrm{d}^2 a = j\,\mathrm{d}^2 a\, A,\\
&A\,\mathrm{d}^2 \beta = q\, j\,\mathrm{d}^2 \beta\, A,\\
&A\,\mathrm{d}^2 \gamma = q^{-1}\,\mathrm{d}^2 \gamma\, A,\\
&A\,\mathrm{d}^2 d = \mathrm{d}^2 d\, A,\\
&B\,\mathrm{d}^2 a = q\,\mathrm{d}^2 a\, B,\\
&B\,\mathrm{d}^2 \gamma = \mathrm{d}^2 \gamma\, B + (j-1)\,\mathrm{d}^2 a\, A,\\
&B\,\mathrm{d}^2 \beta = q^2\, j^2\,\mathrm{d}^2 \beta\, B,\\
&B\,\mathrm{d}^2 d = q\,\mathrm{d}^2 d\, B + q\left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 \beta\, A,\\
&C\,\mathrm{d}^2 a = q^{-1}\, j\,\mathrm{d}^2 a\, C,\\
&C\,\mathrm{d}^2 \beta = j^2\,\mathrm{d}^2 \beta\, C + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 a\, A,\\
&C\,\mathrm{d}^2 \gamma = q^{-2}\, j\,\mathrm{d}^2 \gamma\, C,\\
&C\,\mathrm{d}^2 d = q^{-1}\, j^2\,\mathrm{d}^2 d\, C + q^{-1}\left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 \gamma\, A,\\
&D\,\mathrm{d}^2 a = \mathrm{d}^2 a\, D,\\
&D\,\mathrm{d}^2 \beta = q\,\mathrm{d}^2 \beta\, D + q\left(1 - j^2\right)\mathrm{d}^2 a\, B,\\
&D\,\mathrm{d}^2 \gamma = q^{-1}\, j\,\mathrm{d}^2 \gamma\, D + q^{-1}(j-1)\,\mathrm{d}^2 a\, C, \qquad\qquad (5.37)\\
&D\,\mathrm{d}^2 d = j\,\mathrm{d}^2 d\, D + (j-1)\,\mathrm{d}^2 \gamma\, B + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 \beta\, C + (1-j)^2\,\mathrm{d}^2 a\, A.
\end{aligned}
$$

5.8.4 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanları ile W nın matris elemanları

$$
\begin{aligned}
&a\, w_1 = j^2\, w_1\, a,\\
&a\, v = q\, v\, a + q(1-j)\, w_1\, \gamma,\\
&a\, u = q^{-1}\, j^2\, u\, a,\\
&a\, w_2 = w_2\, a + \left(1 - j^2\right) w_1\, a + (1-j)\left(1 - j^2\right) u\, \gamma,\\
&\beta\, w_1 = w_1\, \beta,\\
&\beta\, v = q\, v\, \beta + q(1-j)\, w_1\, d,\\
&\beta\, u = q^{-1}\, j\, u\, \beta,\\
&\beta\, w_2 = j\, w_2\, \beta + (1-j)^2\, w_1\, \beta + (1-j)\, u\, d,\\
&\gamma\, w_1 = j^2\, w_1\, \gamma,\\
&\gamma\, u = q^{-1}\, j\, u\, \gamma + q^{-1}\left(j - j^2\right) w_1\, a,\\
&\gamma\, v = q\, j^2\, v\, \gamma,\\
&\gamma\, w_2 = j\, w_2\, \gamma + \left(j - j^2\right) v\, a,\\
&d\, w_1 = w_1\, d,\\
&d\, u = q^{-1}\, u\, d + q^{-1}(1-j)\, w_1\, \beta,
\end{aligned}
$$

$$d\,v = q\,j^2\,v\,d,$$
$$d\,w_2 = j^2\,w_2\,d + \left(j^2 - 1\right) v\,\beta \tag{5.38}$$

şeklindeki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat: Yukarıda verilen bağıntıları elde etmek için (5.3), (5.33), (5.34) ve (5.35) bağıntılarından faydalanacağız. Aşağıda birinci ve sekizinci bağıntının nasıl çıkarıldıkları açık bir şekilde ortaya konmaktadır. Diğerleri de benzer şekilde elde edilebilir. Birinci bağıntı için

$$\begin{aligned}
a\,w_1 &= a\left(\mathsf{d}a\,A + \mathsf{d}\beta\,C\right)\\
&= j^2\,\mathsf{d}a\,a\,A + q^{-1}\,j^2\,\mathsf{d}\beta\,a\,C + \left(j^2-1\right)\mathsf{d}a\,\beta\,C\\
&= j\,\mathsf{d}a\,A\,a + \left(j^2 - j\right)\mathsf{d}a + j^2\,\mathsf{d}\beta\,C\,a + \left(j^2-1\right)\mathsf{d}a\,C\,\beta\\
&= j^2\left(\mathsf{d}a\,A + \mathsf{d}\beta\,C\right)a + \mathsf{d}a\left[\left(j - j^2\right)A\,a + \left(j^2 - j\right) + \left(j^2-1\right)C\,\beta\right]\\
&= j^2\,w_1\,a + \mathsf{d}a\left[\left(j - j^2\right)A\,a + \left(j^2 - j\right) + \left(j^2-1\right)C\,\beta\right]
\end{aligned}$$

buluruz. O halde istenileni gerçekleştirmek için sağ taraftaki ikinci ifadenin sıfır olduğunu göstermek gerekir. Bunu ise, aşağıdaki gibi düzenleyerek kolayca görebiliriz. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
A\,a &= 1 + a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma + a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma,\\
C\,\beta &= -d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta - d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\left(j^2-1\right)a\,A + \left(j - j^2\right)(1-j) + \left(j^2 - j\right) + \left(j^2-1\right)\beta\,C &= \left(j^2 - j\right) + \left(j - j^2\right)(1-j)\\
&\quad + \left(j^2-1\right)\left[1 + \beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} + \beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\right]\\
&\quad + \left(j^2-1\right)\left[-\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1} - \beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\,\beta\,d^{-1}\,\gamma\,a^{-1}\right] = 0
\end{aligned}$$

dır. Şimdi de $\beta\,w_2 = j\,w_2\,\beta + (1-j)^2\,w_1\,\beta + (1-j)\,u\,d$ bağıntısını elde edelim.

$$\begin{aligned}
\beta\,w_2 &= \beta\left(\mathsf{d}d\,D + \mathsf{d}\gamma\,B\right)\\
&= q\,\mathsf{d}d\,\beta\,D + (1-j)\,\mathsf{d}\beta\,d\,D + q^2\,j\,\mathsf{d}\gamma\,\beta\,B + q(1-j)\,\mathsf{d}a\,d\,B\\
&= j\,\mathsf{d}d\,D\,\beta + j\,\mathsf{d}\gamma\,B\,\beta + \left(j - j^2\right)\mathsf{d}\beta\,D\,d + (1-j)^2\,\mathsf{d}\beta + \left(j - j^2\right)\mathsf{d}a\,B\,d\\
&= j\left(\mathsf{d}d\,D + \mathsf{d}\gamma\,B\right)\beta + \left(j - j^2\right)\left(\mathsf{d}\beta\,D + \mathsf{d}a\,B\right)d + (1-j)^2\,\mathsf{d}\beta\\
&= j\,w_2\,\beta + \left(j - j^2\right)u\,d + (1-j)^2\,\mathsf{d}\beta
\end{aligned}$$

buluruz. Şimdi, istenileni gerçekleştirmek için son eşitlikteki $\mathsf{d}\beta$ ifadesine bir yön verelim.

(5.33) den $\mathrm{d}\beta = w_1\,\beta + u\,d$ olduğunu biliyoruz. O halde kaldığımız yerden devam edersek

$$
\begin{aligned}
\beta\, w_2 &= j\, w_2\, \beta + \left(j - j^2\right) u\, d + \left(1-j\right)^2 \left(w_1\, \beta + u\, d\right) \\
&= j\, w_2\, \beta + \left(1-j\right)^2 w_1\, \beta + \left(1-j\right) u\, d
\end{aligned}
$$

ile istenilen eşitliğe ulaşılır.

5.8.5 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ise T nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile W in matris elemanları aşağıdaki $\left(q, j\right)$-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
& w_1 \wedge \mathrm{d}a = j\, \mathrm{d}a \wedge w_1, \\
& w_1 \wedge \mathrm{d}\gamma = j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge w_1 + q^{-1}\left(1-j\right) \mathrm{d}a \wedge v, \\
& w_1 \wedge \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\beta \wedge w_1, \\
& w_1 \wedge \mathrm{d}d = j^2\, \mathrm{d}d \wedge w_1 + q^{-1}\left(1-j^2\right) \mathrm{d}\beta \wedge v, \\
& u \wedge \mathrm{d}a = q\, j^2\, \mathrm{d}a \wedge u, \\
& u \wedge \mathrm{d}\gamma = q\, j\, \mathrm{d}\gamma \wedge u + \left(1-j^2\right) \mathrm{d}a \wedge w_1 + \left(j^2 - 1\right) \mathrm{d}a \wedge w_2, \\
& u \wedge \mathrm{d}\beta = q\, \mathrm{d}\beta \wedge u, \\
& u \wedge \mathrm{d}d = q\, \mathrm{d}d \wedge u + \left(j^2 - j\right) \mathrm{d}\beta \wedge w_1 + \left(j - 1\right) \mathrm{d}\beta \wedge w_2, \\
& v \wedge \mathrm{d}a = q^{-1}\, \mathrm{d}a \wedge v, \\
& v \wedge \mathrm{d}\gamma = q^{-1}\, \mathrm{d}\gamma \wedge v, \\
& v \wedge \mathrm{d}\beta = q^{-1}\, j\, \mathrm{d}\beta \wedge v + \left(1-j\right) \mathrm{d}d \wedge w_1, \\
& v \wedge \mathrm{d}d = q^{-1}\, \mathrm{d}d \wedge v, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}a = j\, \mathrm{d}a \wedge w_2, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}\gamma = j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge w_2 + q^{-1}\left(j^2 - j\right) \mathrm{d}a \wedge v, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}\beta = j\, \mathrm{d}\beta \wedge w_2 + q\left(1-j\right) \mathrm{d}d \wedge u, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}d = j\, \mathrm{d}d \wedge w_2 + q^{-1}\left(1-j^2\right) \mathrm{d}\beta \wedge v + 3\, j^2\, \mathrm{d}d \wedge w_1.
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (5.36) ve (5.18) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda ilk ve on dördüncü bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
w_1 \wedge \mathrm{d}a &= \left(\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C\right) \wedge \mathrm{d}a \\
&= j\, \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a\, A + q^{-1}\, j^2\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}a\, C \\
&= j\, \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}a\, A + j\, \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\beta\, C \\
&= j\, \mathrm{d}a \wedge w_1.
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
w_2 \wedge \mathrm{d}\gamma &= (\mathrm{d}d\, D + \mathrm{d}\gamma\, B) \wedge \mathrm{d}\gamma \\
&= q^{-1}\, j\, \mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}\gamma\, D + q^{-1}(j-1)\mathrm{d}d \wedge \mathrm{d}a\, C + j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma\, B + (1-j^2)\mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}a\, A \\
&= j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}d\, D + j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma\, B + q^{-1}(j^2 - j)\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}d\, C + q^{-1}(j^2 - j)\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\gamma\, A \\
&= j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge (\mathrm{d}d\, D + \mathrm{d}\gamma\, B) + q^{-1}(j^2 - j)\mathrm{d}a \wedge (\mathrm{d}d\, C + \mathrm{d}\gamma\, A) \\
&= j^2\, \mathrm{d}\gamma \wedge w_2 + q^{-1}(j^2 - j)\mathrm{d}a \wedge v.
\end{aligned}
$$

on dördüncü bağıntıyı elde etmiş oluruz.

5.8.6 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri ile W in matris elemanları aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
& w_1 \wedge \mathrm{d}^2 a = j^2\, \mathrm{d}^2 a \wedge w_1, \\
& w_1 \wedge \mathrm{d}^2 \gamma = \mathrm{d}^2 \gamma \wedge w_1 + q^{-1}(j - j^2)\mathrm{d}^2 a \wedge v, \\
& w_1 \wedge \mathrm{d}^2 \beta = j\, \mathrm{d}^2 \beta \wedge w_1, \\
& w_1 \wedge \mathrm{d}^2 d = j^2\, \mathrm{d}^2 d \wedge w_1 + q^{-1}(j - j^2)\mathrm{d}^2 \beta \wedge v, \\
& u \wedge \mathrm{d}^2 a = q\, j\, \mathrm{d}^2 a \wedge u, \\
& u \wedge \mathrm{d}^2 \gamma = q\, \mathrm{d}^2 \gamma \wedge u + (j^2 - j)\mathrm{d}^2 a \wedge w_1 + (j - j^2)\mathrm{d}^2 a \wedge w_2, \\
& u \wedge \mathrm{d}^2 \beta = q\, j^2\, \mathrm{d}^2 \beta \wedge u, \\
& v \wedge \mathrm{d}^2 a = q^{-1}\, \mathrm{d}^2 a \wedge v, \\
& v \wedge \mathrm{d}^2 \gamma = q^{-1}\, \mathrm{d}^2 \gamma \wedge v, \\
& v \wedge \mathrm{d}^2 \beta = q^{-1}\, \mathrm{d}^2 \beta \wedge v, \\
& v \wedge \mathrm{d}^2 d = q^{-1}\, \mathrm{d}^2 d \wedge v, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}^2 a = j^2\, \mathrm{d}^2 a \wedge w_2, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}^2 \gamma = \mathrm{d}^2 \gamma \wedge w_2 + q^{-1}(1 - j^2)\mathrm{d}^2 a \wedge v, \\
& w_2 \wedge \mathrm{d}^2 \beta = j\, \mathrm{d}^2 \beta \wedge w_2.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (5.23), (5.34) ve (5.37) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda birinci ve altıncı bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. Birinci bağıntı için

$$
\begin{aligned}
w_1 \wedge \mathrm{d}^2 a &= (\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C) \wedge \mathrm{d}^2 a \\
&= j\, \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}^2 a\, A + q^{-1}\, j\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}^2 a\, C \\
&= j^2\, \mathrm{d}^2 a \wedge \mathrm{d}a\, A + j^2\, \mathrm{d}^2 a \wedge \mathrm{d}\beta\, C \\
&= j^2\, \mathrm{d}^2 a \wedge (\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C) \\
&= j^2\, \mathrm{d}^2 a \wedge w_1
\end{aligned}
$$

ile istenileni buluruz. $u \wedge \mathrm{d}^2\gamma = q\,\mathrm{d}^2\gamma \wedge u + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 a \wedge w_1 + \left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a \wedge w_2$ bağıntısını da aşağıdaki şekilde elde etmek zor değildir.

$$
\begin{aligned}
u \wedge \mathrm{d}^2\gamma &= \left(\mathrm{d}a\, B + \mathrm{d}\beta\, D\right) \wedge \mathrm{d}^2\gamma \\
&= \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}^2\gamma\, B + \left(j-1\right)\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}^2 a\, A + q^{-1}\, j\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}^2\gamma\, D + q^{-1}\left(j-1\right)\mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}^2 a\, C \\
&= q\,\mathrm{d}^2\gamma \wedge \mathrm{d}a\, B + \left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a \wedge \mathrm{d}\gamma\, B + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 a \wedge \mathrm{d}a\, A + q\,\mathrm{d}^2\gamma \wedge \mathrm{d}\beta\, D \\
&\qquad\qquad + \left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a \wedge \mathrm{d}d\, D + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 a \wedge \mathrm{d}\beta\, C \\
&= q\,\mathrm{d}^2\gamma \wedge \left(\mathrm{d}a\, B + \mathrm{d}\beta\, D\right) + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 a \wedge \left(\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C\right) + \left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a \wedge \left(\mathrm{d}d\, D + \mathrm{d}\gamma\, B\right) \\
&= q\,\mathrm{d}^2\gamma \wedge u + \left(j^2 - j\right)\mathrm{d}^2 a \wedge w_1 + \left(j - j^2\right)\mathrm{d}^2 a \wedge w_2.
\end{aligned}
$$

5.8.7 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ise T^{-1} nin matris elemanları ile W in matris elemanları aşağıdaki $\left(q, j\right)$-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
& w_1\, A = j^2\, A\, w_1, \\
& w_1\, B = j^2\, B\, w_1, \\
& w_1\, C = C\, w_1, \\
& w_1\, D = D\, w_1, \\
& u\, A = q^{-1}\, j^2\, A u + q^{-1}\left(j - j^2\right) B\, w_1, \\
& u\, B = q^{-1}\, j\, B u, \\
& u\, C = q^{-1}\, j\, C\, u + q^{-1}\left(1 - j\right) D\, w_1, \\
& u\, D = q^{-1}\, D u, \\
& v\, A = q\, A v, \\
& v\, B = q\, j^2\, B v + q\left(1 - j\right) A\, w_1, \\
& v\, C = q\, C\, v, \\
& v\, D = q\, j^2\, D v + q\left(1 - j\right) C\, w_1, \\
& w_2\, A = A\, w_2 + \left(j - j^2\right)^2 A\, w_1 + \left(j - j^2\right) B\, v, \\
& w_2\, B = j\, B\, w_2 + \left(j^2 - 1\right) A u, \\
& w_2\, C = j\, C\, w_2 + \left(1 - j\right)^2 C\, w_1 + \left(j^2 - 1\right) D\, v, \\
& w_2\, D = j^2\, D\, w_2 + \left(j - j^2\right) D\, w_1 + \left(1 - j\right) C u.
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (4.18), (5.34) ve (5.36) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda birinci ve on dördüncü bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. Birinci bağıntı

$$
\begin{aligned}
w_1\, A &= \left(\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C\right) A = \mathrm{d}a\, A\, A + \mathrm{d}\beta\, C\, A \\
&= \mathrm{d}a\, A\, A + q\, \mathrm{d}\beta\, A C = j^2\, A \mathrm{d}a\, A + j^2\, A \mathrm{d}\beta\, C \\
&= j^2\, A\left(\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C\right) = j^2\, A\, w_1
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Şimdi, $w_2\, B = j\, B\, w_2 + \left(j^2 - 1\right) A u$ bağıntısını aşağıda elde edelim.

$$
\begin{aligned}
w_2\, B &= \left(\mathrm{d}d\, D + \mathrm{d}\gamma\, B\right) B \\
&= q\, j^2\, \mathrm{d}d\, B\, D + \mathrm{d}\gamma\, B\, B \\
&= j\, B\, \mathrm{d}d\, D + q(1 - j)\, \mathrm{d}\beta\, A D + j\, B\, \mathrm{d}\gamma\, B + (1 - j)\, \mathrm{d}a\, A B \\
&= j\, B\left(\mathrm{d}d\, D + \mathrm{d}\gamma\, B\right) + \left(j^2 - 1\right) A\left(\mathrm{d}\beta\, D + \mathrm{d}a\, B\right) \\
&= j\, B\, w_2 + \left(j^2 - 1\right) A u.
\end{aligned}
$$

5.8.8 Önerme W nın matris elemanları aşağıdaki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
& w_1 \wedge u = u \wedge w_1, \\
& w_1 \wedge v = v \wedge w_1, \\
& w_2 \wedge u = j^2\, u \wedge w_2 + (1 - j)\, w_1 \wedge u, \\
& w_2 \wedge v = j\, v \wedge w_2 + \left(j^2 - j\right) w_1 \wedge v, \\
& w_1 \wedge w_2 = j^2\; w_2 \wedge w_1 + \left(j^2 - j\right) u \wedge v + \left(1 - j^2\right)(1 - j)\, w_1 \wedge w_1, \\
& v \wedge u = u \wedge v + \left(j - j^2\right) u \wedge w_1 + (1 - j)\, w_2 \wedge w_1.
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (5.18), (5.34), (5.39) ve (5.41) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda, üçüncü bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
w_2 \wedge u &= w_2 \wedge \left(\mathrm{d}a\, B + \mathrm{d}\beta\, D\right) \\
&= j\, \mathrm{d}a \wedge w_2\, B + j\, \mathrm{d}\beta \wedge w_2\, D + q(1 - j)\, \mathrm{d}d \wedge u\, D \\
&= j^2\, \mathrm{d}a\, B\, w_2 + (1 - j)\, \mathrm{d}a\, A u + \mathrm{d}\beta\, D\, w_2 + \left(j^2 - 1\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_1 \\
&\qquad + \left(j - j^2\right) \mathrm{d}\beta\, C\, u + (1 - j)\, \mathrm{d}d\, D u \\
&= j^2 \left(\mathrm{d}a\, B + \mathrm{d}\beta\, D\right) \wedge w_2 + \left(1 - j^2\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_2 + (1 - j)\left(\mathrm{d}a\, A + \mathrm{d}\beta\, C\right) \wedge u \\
&\qquad\qquad + 3\, j\, \mathrm{d}\beta\, C\, u + \left(j^2 - 1\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_1 + (1 - j)\, \mathrm{d}d\, D u \\
&= j^2\, u \wedge w_2 + (1 - j)\, w_1 \wedge u + \left(1 - j^2\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_2 + 3\, j\, \mathrm{d}\beta\, C\, u + \left(j^2 - 1\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_1 + (1 - j)\, \mathrm{d}d\, D u.
\end{aligned}
$$

Şimdi, istenileni elde etmek için son eşitlikte yer alan

$$
\left(1 - j^2\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_2 + 3\, j\, \mathrm{d}\beta\, C\, u + \left(j^2 - 1\right) \mathrm{d}\beta\, D\, w_1 + (1 - j)\, \mathrm{d}d\, D u
$$

ifadesinin 0 a eşit olduğunu görebilmek için, bu ifadede yer alan Cartan formlarını (5.34) deki bağıntıları kullanarak aşağıdaki gibi açık olarak yazarak düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\beta\, D\, w_2+3\, j\,\mathrm{d}\beta\, C\, u+\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\, D\, w_1+\left(1-j\right)\mathrm{d}d\, D\, u\\
&\quad=\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\beta\, D\left(\mathrm{d}d\, D+\mathrm{d}\gamma\, B\right)+3\, j\,\mathrm{d}\beta\, C\left(\mathrm{d}a\, B+\mathrm{d}\beta\, D\right)\\
&\qquad\quad+\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\, D\left(\mathrm{d}a\, A+\mathrm{d}\beta\, C\right)+\left(1-j\right)\mathrm{d}d\, D\left(\mathrm{d}a\, B+\mathrm{d}\beta\, D\right)\\
&\quad=\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\beta\, D\,\mathrm{d}d\, D+\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\beta\, D\,\mathrm{d}\gamma\, B+3\, j\,\mathrm{d}\beta\, C\,\mathrm{d}a\, B\\
&\qquad\quad+3\, j\,\mathrm{d}\beta\, C\,\mathrm{d}\beta\, D+\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\, D\,\mathrm{d}a\, A+\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\, D\,\mathrm{d}\beta\, C\\
&\qquad\quad+\left(1-j\right)\mathrm{d}d\, D\,\mathrm{d}a\, B+\left(1-j\right)\mathrm{d}d\, D\,\mathrm{d}\beta\, D.
\end{aligned}$$

Şimdi de, (5.41) bağıntılarından yararlanarak üstte yer alan ifadeyi bir kez daha düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\beta\, D\, w_2+3\, j\,\mathrm{d}\beta\, C\, u+\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\, D\, w_1+\left(1-j\right)\mathrm{d}d\, D\, u\\
&\quad=\left(j-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}d\, D^2+\left(1-j^2\right)\left(j-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\gamma B\, D+\left(1-j^2\right)\left(j^2-j\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\beta CD\\
&\qquad+\left(1-j^2\right)\left(1-j\right)^2\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}a\, A D+q^{-1}\left(j-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\gamma D\, B+q^{-1}\left(1-j^2\right)\left(j-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}a C\, B\\
&\qquad+3q^{-1}\,\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}a\, C\, B+3\, j\,\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\beta\, C\, D+3\left(j-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}a\, A D+\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}a\, D\, A\\
&\qquad+q\left(j^2-1\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\beta\, D C+q\left(j^2-1\right)\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}a\, B C+\left(1-j\right)\mathrm{d}d\wedge\mathrm{d}a\, D\, B\\
&\qquad+q\left(1-j\right)\mathrm{d}d\wedge\mathrm{d}\beta\, D^2+q\left(1-j\right)\left(1-j^2\right)\mathrm{d}d\wedge\mathrm{d}a\, B\, D.
\end{aligned}$$

Son olarak, son eşitliği (5.18) bağıntılarını kullanarak tekrar düzenlersek istenilenin elde edildiğini kolayca görebiliriz.

Şüphesiz, elde ettiğimiz bu yapıların sonucunda, Cartan-Maurer formlarının, uzunca işlemler sonucunda sol-invaryant oldukları kontrol edilebilir.

6. Z_3-DERECELİ KUANTUM SÜPER LIE CEBİRİ

Bu bölümde, Lie cebir jeneratörlerinin deforme süper Lie cebirini elde edeceğiz. İlk olarak (5.33) de tanımladığımız Cartan-Maurer formlarını

$$\mathsf{d}T = W\,T$$

şeklinde düzenleyerek, matris elemanları cinsinden

$$\begin{pmatrix} \mathsf{d}a & \mathsf{d}\beta \\ \mathsf{d}\gamma & \mathsf{d}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & u \\ v & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$$

olarak yazalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \mathsf{d}a &= w_1\,a + u\,\gamma, \\ \mathsf{d}\beta &= w_1\,\beta + u\,d, \\ \mathsf{d}\gamma &= v\,a + w_2\,\gamma, \\ \mathsf{d}d &= v\,\beta + w_2\,d \end{aligned} \tag{6.1}$$

formlarına sahip oluruz. Şimdi, kuantum süper cebirini elde etmek için d dış diferansiyel operatörünü aşağıdaki formda yazalım:

$$\mathsf{d}\,f = \left(w_1\,T_1 + u\nabla_+ + v\nabla_- + w_2\,T_2\right) f. \tag{6.2}$$

Burada T_1, ∇_+, ∇_- ve T_2 Lie cebir jeneratörleridir. Kuantum süper cebirini elde ederken, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörlerinin kısmi türevlerinden faydalanacağız. Kuantum süper cebirini Kısım 6.5 de yer alan Önerme 6.5.1 ile vereceğiz. Fakat öncesinde, bu cebiri elde ederken kullanacağımız lemmaları alt başlıklar altında aşağıda sunuyoruz.

6.1 Koordinat Fonksiyonları ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

İlk olarak, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörleri ile onların kısmi türevleri arasındaki komutasyon bağıntılarını ortaya koyalım.

6.1.1 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanları ile onların kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \partial_a\,a &= 1 + j^2\,a\,\partial_a + \left(j^2 - 1\right)\beta\,\partial_\beta + \left(j^2 - 1\right)\gamma\,\partial_\gamma + \left(j - 1\right)\left(1 - j^2\right) d\,\partial_d, \\ \partial_\beta\,a &= q^{-1}\,j^2\,a\,\partial_\beta + q^{-1}\left(1 - j\right)\gamma\,\partial_d, \\ \partial_\gamma\,a &= q\,a\,\partial_\gamma + q\left(1 - j\right)\beta\,\partial_d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_d\, a = a\,\partial_d,\\
&\partial_a\, \beta = q\,\beta\,\partial_a + q\left(j^2-1\right) d\,\partial_\gamma,\\
&\partial_\beta\, \beta = 1 + j^2\,\beta\,\partial_\beta + \left(j^2-1\right) d\,\partial_d,\\
&\partial_\gamma\, \beta = q^2\,\beta\,\partial_\gamma,\\
&\partial_d\, \beta = q\, j^2\,\beta\,\partial_d,\\
&\partial_a\, \gamma = q^{-1}\, j^2\,\gamma\,\partial_a + q^{-1}\left(j^2-1\right) d\,\partial_\beta,\\
&\partial_\beta\, \gamma = q^{-2}\,\gamma\,\partial_\beta,\\
&\partial_\gamma\, \gamma = 1 + j^2\,\gamma\,\partial_\gamma + \left(j^2-1\right) d\,\partial_d,\\
&\partial_d\, \gamma = q^{-1}\,\gamma\,\partial_d,\\
&\partial_a\, d = d\,\partial_a,\\
&\partial_\beta\, d = q^{-1}\, d\,\partial_\beta,\\
&\partial_\gamma\, d = q\, j^2\, d\,\partial_\gamma,\\
&\partial_d\, d = 1 + j^2\, d\,\partial_d
\end{aligned} \tag{6.3}$$

şeklindeki (q, j)-komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, Kısım 5.1 de tanımladığımız d dış diferansiyel operaratörünü

$$\mathsf{d}\, f = \left(\mathsf{d}a\,\partial_a + \mathsf{d}\beta\,\partial_\beta + \mathsf{d}\gamma\,\partial_\gamma + \mathsf{d}d\,\partial_d\right) f \tag{6.4}$$

şeklinde yazalım. T nin matris elemanlarını bu eşitliğin iki yanına etki ettirirsek istenilen bağıntıları kolayca elde ederiz. Aşağıda sadece a jeneratörü kullanılarak $\partial_a a$, $\partial_\beta a$, $\partial_\gamma a$ ve $\partial_d a$ bağıntılarının nasıl çıktığı açıkça ortaya konacaktır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde β, γ ve d jeneratörleri kullanılarak kolayca elde edilebilir. (6.4) ün sol tarafında f yerine $a\, f$ yazarak (5.3) bağıntılarını kullanırsak

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(a\, f) &= \mathsf{d}a\, f + a\left(\mathsf{d}a\,\partial_a + \mathsf{d}\beta\,\partial_\beta + \mathsf{d}\gamma\,\partial_\gamma + \mathsf{d}d\,\partial_d\right) f\\
&= \mathsf{d}a\, f + j^2\,\mathsf{d}a\, a\,\partial_a\, f + q^{-1}\, j^2\,\mathsf{d}\beta\, a\,\partial_\beta\, f + \left(j^2-1\right)\mathsf{d}a\,\beta\, f\\
&\qquad + q\,\mathsf{d}\gamma\, a\,\partial_\gamma\, f + \left(j^2-1\right)\mathsf{d}a\,\gamma\,\partial_\gamma\, f + \mathsf{d}d\, a\,\partial_d\, f + (j-1)\left(1-j^2\right)\mathsf{d}a\, d\,\partial_d\, f\\
&\qquad + q(1-j)\,\mathsf{d}\gamma\,\beta\,\partial_d\, f + q^{-1}(1-j)\,\mathsf{d}\beta\,\gamma\,\partial_d\, f\\
&= \mathsf{d}a\left(1 + j^2\, a\,\partial_a + \left(j^2-1\right)\beta + \left(j^2-1\right)\gamma\,\partial_\gamma + (j-1)\left(1-j^2\right) d\,\partial_d\right) f\\
&\qquad + \mathsf{d}\beta\left(q^{-1}\, j^2\, a\,\partial_\beta + q^{-1}(1-j)\,\gamma\,\partial_d\right) f + \mathsf{d}\gamma\left(q\, a\,\partial_\gamma + q(1-j)\,\beta\,\partial_d\right) f\\
&\qquad + \mathsf{d}d\left(a\,\partial_d\right) f
\end{aligned} \tag{6.5}$$

buluruz. Şimdi de (6.4) ün sağ tarafında f yerine $a\,f$ yazarsak

$$\begin{aligned}\left(\mathsf{d}a\,\partial_a+\mathsf{d}\beta\,\partial_\beta+\mathsf{d}\gamma\,\partial_\gamma+\mathsf{d}d\,\partial_d\right)(a\,f)=\mathsf{d}a\left(\partial_a\,a\right)f+\mathsf{d}\beta\left(\partial_\beta\,a\right)f\\+\mathsf{d}\gamma\left(\partial_\gamma\,a\right)f+\mathsf{d}d\left(\partial_d\,a\right)f\end{aligned}\tag{6.6}$$

olur. Böylece, (6.4) deki eşitliği gerçekleştirmek için (6.5) ve (6.6) de elde edilen bağıntıları birbirine eşitlersek

$$\begin{aligned}&\partial_a\,a=1+j^2\,a\,\partial_a+\left(j^2-1\right)\beta\,\partial_\beta+\left(j^2-1\right)\gamma\,\partial_\gamma+\left(j-1\right)\left(1-j^2\right)d\,\partial_d,\\&\partial_\beta\,a=q^{-1}\,j^2\,a\,\partial_\beta+q^{-1}\left(1-j\right)\gamma\,\partial_d,\\&\partial_\gamma\,a=q\,a\,\partial_\gamma+q\left(1-j\right)\beta\,\partial_d,\\&\partial_d\,a=a\,\partial_d\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu, (6.3) de elde etmek istediğimiz ilk dört bağıntıdır.

6.2 Kısmi Türevlerin Kendi Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörlerinin kısmi türevlerinin kendi arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını aşağıdaki lemma ile ortaya koyuyoruz.

6.2.1 Lemma Eğer $T\in GL_{q,j}\left(1/1\right)$ ise T nin matris elemanlarının kısmi türevleri arasında

$$\begin{aligned}&\partial_a\,\partial_\beta=q^{-1}\,\partial_\beta\,\partial_a,\\&\partial_a\,\partial_\gamma=q\,j\,\partial_\gamma\,\partial_a,\\&\partial_\beta\,\partial_d=q\,\partial_d\,\partial_\beta,\\&\partial_\gamma\,\partial_\beta=q^{-2}\,j\,\partial_\beta\,\partial_\gamma+q^{-1}\left(j-j^2\right)\partial_d\,\partial_a,\\&\partial_d\,\partial_\gamma=q\,j^2\,\partial_\gamma\,\partial_d,\\&\partial_d\,\partial_a=j^2\,\partial_a\,\partial_d,\\&\left(\partial_\beta\right)^3=0,\\&\left(\partial_\gamma\right)=0\end{aligned}\tag{6.7}$$

şeklinde (q,j)-komutasyon bağıntıları vardır.

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, Kısım 5.1 de yer alan d dış diferansiyel operatörünün nilpotentlik özelliğinden yararlanacağız. Fakat, bu bağıntıların elde edilişi oldukça uzun olduğundan ayrıntıya girilmeden elde ediliş yolu anlatılacaktır. İlk olarak, (6.4) de tanımladığımız eşitliğin her iki yanına d dış diferansiyel operatörünü $\mathsf{d}^3=0$ olacak şekilde etki ettiririz. Sonrasında (5.18), (5.23) ve (5.24) bağıntılarından yararlanarak elde edeceğimiz ifadeyi düzenlersek istenilen sonuçlara ulaşmış oluruz.

6.3 Kısmi Türevler ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörlerinin kısmi türevleri ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntıları ortaya koyuyoruz.

6.3.1 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise T nin matris elemanlarının kısmi türevleri ile birinci mertebe diferansiyelleri arasında

$$\begin{aligned}
&\partial_a \,\mathrm{d}a = j\,\mathrm{d}a\,\partial_a, \\
&\partial_a \,\mathrm{d}\beta = q\,j\,\mathrm{d}\beta\,\partial_a, \\
&\partial_a \,\mathrm{d}\gamma = q^{-1}\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_a, \\
&\partial_a \,\mathrm{d}d = \mathrm{d}d\,\partial_a, \\
&\partial_\beta \,\mathrm{d}a = q^{-1} j^2\,\mathrm{d}a\,\partial_\beta, \\
&\partial_\beta \,\mathrm{d}\beta = \left(1-j^2\right)\mathrm{d}a\,\partial_a + \mathrm{d}\beta\,\partial_\beta, \\
&\partial_\beta \,\mathrm{d}\gamma = q^{-2} j^2\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\beta, \\
&\partial_\beta \,\mathrm{d}d = q^{-1}\,\mathrm{d}d\,\partial_\beta + q^{-1}\left(1-j^2\right)\mathrm{d}\gamma\,\partial_a, \\
&\partial_\gamma \,\mathrm{d}a = q\,j^2\,\mathrm{d}a\,\partial_\gamma, \\
&\partial_\gamma \,\mathrm{d}\beta = q^2\,j\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\gamma, \\
&\partial_\gamma \,\mathrm{d}\gamma = \left(j^2-j\right)\mathrm{d}a\,\partial_a + j^2\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma, \\
&\partial_\gamma \,\mathrm{d}d = q\,j\,\mathrm{d}d\,\partial_\gamma + q\left(j^2-j\right)\mathrm{d}\beta\,\partial_a, \\
&\partial_d \,\mathrm{d}a = \mathrm{d}a\,\partial_d, \\
&\partial_d \,\mathrm{d}\beta = q\,\mathrm{d}\beta\,\partial_d + q\left(1-j^2\right)\mathrm{d}a\,\partial_\gamma, \\
&\partial_d \,\mathrm{d}\gamma = q^{-1} j\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_d + q^{-1}\left(j^2-j\right)\mathrm{d}a\,\partial_\beta, \\
&\partial_d \,\mathrm{d}d = (j-1)\left(j^2-j\right)\mathrm{d}a\,\partial_a + (j-1)\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\beta + (j-1)\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma + j\,\mathrm{d}d\,\partial_d
\end{aligned} \tag{6.8}$$

şeklinde (q, j)-komutasyon bağıntıları vardır.

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, Z_3-dereceli kuantum grubundaki bir matrisin matris elemanlarının kısmi türevleri ile birinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel aşağıdaki bağıntıları yazarak başlayalım.

$$\begin{aligned}
&\partial_a \,\mathrm{d}a = B_1\,\mathrm{d}a\,\partial_a + B_2\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\beta + B_3\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma + B_4\,\mathrm{d}d\,\partial_d, \\
&\partial_a \,\mathrm{d}\beta = B_5\,\mathrm{d}\beta\,\partial_a + B_6\,\mathrm{d}a\,\partial_\beta + B_7\,\mathrm{d}d\,\partial_\gamma + B_8\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_d,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_a\, \mathrm{d}\gamma = B_9\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_a + B_{10}\, \mathrm{d}a\, \partial_\gamma + B_{11}\, \mathrm{d}d\, \partial_\beta + B_{12}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_d\,,\\
&\partial_a\, \mathrm{d}d = B_{13}\, \mathrm{d}d\, \partial_a + B_{14}\, \mathrm{d}a\, \partial_d + B_{15}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\gamma + B_{16}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\beta,\\
&\partial_\beta\, \mathrm{d}a = B_{17}\, \mathrm{d}a\, \partial_\beta + B_{18}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_a + B_{19}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_d + B_{20}\, \mathrm{d}d\, \partial_\gamma,\\
&\partial_\beta\, \mathrm{d}\beta = B_{21}\, \mathrm{d}a\, \partial_a + B_{22}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\beta + B_{23}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\gamma + B_{24}\, \mathrm{d}d\, \partial_d\,,\\
&\partial_\beta\, \mathrm{d}\gamma = B_{25}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\beta + B_{26}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\gamma + B_{27}\, \mathrm{d}a\, \partial_d + B_{28}\, \mathrm{d}d\, \partial_a,\\
&\partial_\beta\, \mathrm{d}d = B_{29}\, \mathrm{d}d\, \partial_\beta + B_{30}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_d + B_{31}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_a + B_{32}\, \mathrm{d}a\, \partial_\gamma,\\
&\partial_\gamma\, \mathrm{d}a = B_{33}\, \mathrm{d}a\, \partial_\gamma + B_{34}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_a + B_{35}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_d + B_{36}\, \mathrm{d}d\, \partial_\beta,\\
&\partial_\gamma\, \mathrm{d}\beta = B_{37}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\gamma + B_{38}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\beta + B_{39}\, \mathrm{d}a\, \partial_d + B_{40}\, \mathrm{d}d\, \partial_a,\\
&\partial_\gamma\, \mathrm{d}\gamma = B_{41}\, \mathrm{d}a\, \partial_a + B_{42}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\beta + B_{43}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\gamma + B_{44}\, \mathrm{d}d\, \partial_d\,,\\
&\partial_\gamma\, \mathrm{d}d = B_{45}\, \mathrm{d}d\, \partial_\gamma + B_{46}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_d + B_{47}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_a + B_{48}\, \mathrm{d}a\, \partial_\beta,\\
&\partial_d\, \mathrm{d}a = B_{49}\, \mathrm{d}a\, \partial_d + B_{50}\, \mathrm{d}d\ \partial_a + B_{51}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\gamma + B_{52}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\beta,\\
&\partial_d\, \mathrm{d}\beta = B_{53}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_d + B_{54}\, \mathrm{d}d\ \partial_\beta + B_{55}\, \mathrm{d}a\, \partial_\gamma + B_{56}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_a,\\
&\partial_d\, \mathrm{d}\gamma = B_{57}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_d + B_{58}\, \mathrm{d}d\ \partial_\gamma + B_{59}\, \mathrm{d}a\, \partial_\beta + B_{60}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_a,\\
&\partial_d\, \mathrm{d}d = B_{61}\, \mathrm{d}a\, \partial_a + B_{62}\, \mathrm{d}\beta\, \partial_\beta + B_{63}\, \mathrm{d}\gamma\, \partial_\gamma + B_{64}\, \mathrm{d}d\, \partial_d\,.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Yukarıda, muhtemelen q ve j parametrelerine bağlı 64 adet sabit bulunmaktadır. Amacımız bu bağıntılarda yer alan $B_i\,(i=1,2,...64)$ katsayılarını bulmaktır. Bunun için, (5.3) bağıntılarından faydalanacağız. (5.3) de yer alan bağıntılara ∂_a, ∂_β, ∂_γ ve ∂_d kısmi türevlerini soldan etki ettirirsek tüm katsayıları elde etmiş oluruz. Aşağıda ilk bağıntı açık şekilde elde edilecektir. Ancak, bunu yaparken aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

d dış diferansiyel operatörü ile (6.7) bağıntılarından faydalanarak

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\partial_a) = j^2\, \partial_a\, \mathrm{d},\\
&\mathrm{d}(\partial_\beta) = \partial_\beta\, \mathrm{d},\\
&\mathrm{d}(\partial_\gamma) = j\, \partial_\gamma\, \mathrm{d},\\
&\mathrm{d}(\partial_d) = j^2\, \partial_d\, \mathrm{d}
\end{aligned}
$$

bağıntılarını elde ederiz. Ayrıca, kısmi türev operatörünün tanımından

$$\partial_i\left(X^j\, \mathrm{d}X^k\right) = \delta_j^i\, \delta_l^k\, \mathrm{d}X^k$$

bağıntısına sahibiz.

İlk bağıntı elde edildikten sonra, kalan bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. (6.8) deki birinci bağıntı için (5.3) deki ilk bağıntıyı kullanarak

$$
\begin{aligned}
\partial_a\left(a\,\mathrm{d}a - j^2\,\mathrm{d}a\,a\right) &= \left(\partial_a\,a\right)\mathrm{d}a - j^2\left(\partial_a\,\mathrm{d}a\right)a \\
&= \mathrm{d}a - j^2\left(B_1\,\mathrm{d}a\,\partial_a + B_2\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\beta + B_3\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma + B_4\,\mathrm{d}d\,\partial_d\right)a \\
&= \mathrm{d}a - j^2\,B_1\,\mathrm{d}a \\
&= \left(1 - j^2\,B_1\right)\mathrm{d}a
\end{aligned}
$$

yazarız. Burada, $a\,\mathrm{d}a - j^2\,\mathrm{d}a\,a = 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitlik ancak ve ancak $1 - j^2\,B_1 = 0$ olduğunda gerçeklenir. Buradan $B_1 = j$ buluruz. Benzer şekilde (5.3) deki altıncı bağıntıdan

$$
\begin{aligned}
\partial_a\left(\beta\,\mathrm{d}a - q\,j\,\mathrm{d}a\,\beta\right) &= \left(\partial_a\,\beta\right)\mathrm{d}a - q\,j\left(\partial_a\,\mathrm{d}a\right)\beta \\
&= -q\,j\left(B_1\,\mathrm{d}a\,\partial_a + B_2\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\beta + B_3\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma + B_4\,\mathrm{d}d\,\partial_d\right)\beta \\
&= -q\,j\,B_2\,\mathrm{d}\beta = 0
\end{aligned}
$$

eşitliğini buluruz ki, bu eşitlikten $B_2 = 0$ çıkar. Şimdi, (5.3) deki üçüncü bağıntıyı kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\partial_a\left(\gamma\,\mathrm{d}a - q^{-1}j\,\mathrm{d}a\,\gamma\right) &= \left(\partial_a\,\gamma\right)\mathrm{d}a - q^{-1}\,j\left(\partial_a\,\mathrm{d}a\right)\gamma \\
&= -q^{-1}\,j\left(B_1\,\mathrm{d}a\,\partial_a + B_2\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\beta + B_3\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma + B_4\,\mathrm{d}d\,\partial_d\right)\gamma \\
&= -q^{-1}\,j\,B_3\,\mathrm{d}\gamma = 0
\end{aligned}
$$

buluruz ki, buradan $B_3 = 0$ çıkar. (6.9) deki ilk bağıntıda yer alan son katsayıyı bulmak için (5.3) deki on beşinci bağıntıyı kullanıyoruz. Böyle yapınca,

$$
\begin{aligned}
\partial_a\left(d\,\mathrm{d}a - \mathrm{d}a\,d\right) &= \left(\partial_a\,d\right)\mathrm{d}a - \left(\partial_a\,\mathrm{d}a\right)d \\
&= -\left(B_1\,\mathrm{d}a\,\partial_a + B_2\,\mathrm{d}\beta\,\partial_\beta + B_3\,\mathrm{d}\gamma\,\partial_\gamma + B_4\,\mathrm{d}d\,\partial_d\right)d \\
&= -B_4\,\mathrm{d}d = 0
\end{aligned}
$$

eşitliğinden $B_4 = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak, (6.8) deki ilk bağıntı olan $\partial_a\,\mathrm{d}a = j\,\mathrm{d}a\,\partial_a$ bağıntısını elde etmiş oluruz.

6.4 Süper Lie Cebir Jeneratörleri ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, $GL_{q,j}(1/1)$ nin süper Lie cebir jeneratörleriyle $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörleri arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını ortaya koyuyoruz.

Önce, süper Lie cebir jeneratörlerinin kısmi türevlerle arasındaki ilişkiden kısaca bahsedelim. (6.2) ve (6.4) de d dış diferansiyel operatörünü Cartan-Maurer formları ve kısmi türevlerle bağlantılı olarak ayrı ayrı tanımlamıştık. Şimdi, (6.1) de verilen diferansiyel formları (6.4) de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} f &= \left(\mathrm{d}a\, \partial_a + \mathrm{d}\beta\, \partial_\beta + \mathrm{d}\gamma\, \partial_\gamma + \mathrm{d}d\, \partial_d \right) f \\
&= \left[\left(w_1\, a + u\, \gamma \right) \partial_a + \left(w_1\, \beta + u\, d \right) \partial_\beta + \left(v\, a + w_2\, \gamma \right) \partial_\gamma + \left(v\, \beta + w_2\, d \right) \partial_d \right] f \\
&= w_1 \left(a\, \partial_a + \beta\, \partial_\beta \right) f + u \left(\gamma\, \partial_a + d\, \partial_\beta \right) f + v \left(a\, \partial_\gamma + \beta\, \partial_d \right) f + w_2 \left(\gamma\, \partial_\gamma + d\, \partial_d \right) f
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bu, (6.2) de verilen ifadeye eşitlendiğinde, yani

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} f &= w_1 \left(a\, \partial_a + \beta\, \partial_\beta \right) f + u \left(\gamma\, \partial_a + d\, \partial_\beta \right) f + v \left(a\, \partial_\gamma + \beta\, \partial_d \right) f + w_2 \left(\gamma\, \partial_\gamma + d\, \partial_d \right) f \\
&= w_1\, T_1 + u\, \nabla_+ + v\, \nabla_- + w_2\, T_2
\end{aligned}
$$

yazıldığında, süper Lie cebirinin jeneratörleri,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= a\, \partial_a + \beta\, \partial_\beta, \\
\nabla_+ &= \gamma\, \partial_a + d\, \partial_\beta, \\
\nabla_- &= a\, \partial_\gamma + \beta\, \partial_d, \\
T_2 &= \gamma\, \partial_\gamma + d\, \partial_d
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

şeklinde bulunur.

6.4.1 Lemma Eğer $T \in GL_{q,j}(1/1)$ ise $GL_{q,j}(1/1)$ nin süper Lie cebir jeneratörleriyle T nin matris elemanları arasında

$$
\begin{aligned}
T_1\, a &= a + j^2\, a\, T_1 + q(1-j)\, \gamma\, \nabla_- + (j-1)(1-j^2)\, a\, T_2, \\
T_1\, \beta &= \beta + j^2\, \beta\, T_1 + q(j^2-1)\, d\, \nabla_- + (j-1)(1-j^2)\, \beta\, T_2, \\
T_1\, \gamma &= \gamma\, T_1 + q^{-1}(j^2-1)\, a\, \nabla_+, \\
T_1\, d &= d\, T_1 + q^{-1}(1-j)\, \beta\, \nabla_+, \\
\nabla_+\, a &= \gamma + q^{-1}\, j^2\, a\, \nabla_+ + (j^2-1)\, \gamma\, T_2, \\
\nabla_+\, \beta &= d + q^{-1}\, \beta\, \nabla_+ + (j^2-1)\, d\, T_2, \\
\nabla_+\, \gamma &= q^{-1}\, j^2\, \gamma\, \nabla_+, \\
\nabla_+\, d &= q^{-1}\, d\, \nabla_+, \\
\nabla_-\, a &= q\, a\, \nabla_-, \\
\nabla_-\, \beta &= q\, j^2\, \beta\, \nabla_-, \\
\nabla_-\, \gamma &= a + q\, \gamma\, \nabla_- + (j^2-1)\, a\, T_2, \\
\nabla_-\, d &= \beta + q\, j^2\, d\, \nabla_- + (j^2-1)\, \beta\, T_2, \\
T_2\, a &= a\, T_2, \\
T_2\, \beta &= \beta\, T_2,
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

$$T_2\,\gamma = \gamma + j^2\,\gamma\,T_2,$$
$$T_2\,d = d + j^2\,d\,T_2$$

şeklinde (q, j)-komutasyon bağıntıları vardır.

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (4.6), (6.3) ve (6.10) bağıntılarından yararlanacağız. Aşağıda, birinci ve altıncı bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde verilecektir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. Birinci bağıntı için

$$\begin{aligned}
T_1\,a &= \left(a\,\partial_a + \beta\,\partial_\beta\right)a \\
&= a\left(\partial_a\,a\right) + \beta\left(\partial_\beta\,a\right) \\
&= a\left\{1 + j^2\,a\,\partial_a + \left(j^2-1\right)\beta\,\partial_\beta + \left(j^2-1\right)\gamma\,\partial_\gamma + \left(j-1\right)\left(1-j^2\right)d\,\partial_d\right\} \\
&\qquad\qquad + \beta\left\{q^{-1}\,j^2\,a\,\partial_\beta + q^{-1}\left(1-j\right)\gamma\,\partial_d\right\} \\
&= a + j^2\,a^2\,\partial_a + \left(j^2-1\right)a\,\beta\,\partial_\beta + \left(j^2-1\right)a\,\gamma\,\partial_\gamma + \left(j-1\right)\left(1-j^2\right)a\,d\,\partial_d \\
&\qquad\qquad + q^{-1}\,j^2\,\beta\,a\,\partial_\beta + q^{-1}\left(1-j\right)\beta\,\gamma\,\partial_d \\
&= a + j^2\,a\left(a\,\partial_a\right) + j^2\,a\left(\beta\,\partial_\beta\right) + q\left(j^2-1\right)\gamma\left(a\,\partial_\gamma\right) + q\left(1-j\right)\gamma\left(\beta\,\partial_d\right) \\
&\qquad\qquad + \left(j-1\right)\left(1-j^2\right)a\left(d\,\partial_d\right) \\
&= a + j^2\,a\left(a\,\partial_a + \beta\,\partial_\beta\right) + q\left(1-j\right)\gamma\left(a\,\partial_\gamma + \beta\,\partial_d\right) + \left(j-1\right)\left(1-j^2\right)a\left(\gamma\,\partial_\gamma + d\,\partial_d\right) \\
&= a + j^2\,a\,T_1 + q\left(1-j\right)\gamma\,\nabla_- + \left(j-1\right)\left(1-j^2\right)a\,T_2
\end{aligned}$$

çıkar. Benzer şekilde altıncı bağıntıyı

$$\begin{aligned}
\nabla_+\,\beta &= \left(\gamma\,\partial_a + d\,\partial_\beta\right)\beta \\
&= \gamma\left(\partial_a\,\beta\right) + d\left(\partial_\beta\,\beta\right) \\
&= \gamma\left\{q\,\beta\,\partial_a + q\left(j^2-1\right)d\,\partial_\gamma\right\} + d\left\{1 + j^2\,\beta\,\partial_\beta + \left(j^2-1\right)d\,\partial_d\right\} \\
&= q\,\gamma\,\beta\,\partial_a + q\left(j^2-1\right)\gamma\,d\,\partial_\gamma + d + j^2\,d\,\beta\,\partial_\beta + \left(j^2-1\right)d^2\,\partial_d \\
&= d + q^{-1}\,\beta\left(\gamma\,\partial_a\right) + q^{-1}\,\beta\left(d\,\partial_\beta\right) + \left(j^2-1\right)d\left(\gamma\,\partial_\gamma\right) + \left(j^2-1\right)d\left(d\,\partial_d\right) \\
&= d + q^{-1}\,\beta\left(\gamma\,\partial_a + d\,\partial_\beta\right) + \left(j^2-1\right)d\left(\gamma\,\partial_\gamma + d\,\partial_d\right) \\
&= d + q^{-1}\,\beta\,\nabla_+ + \left(j^2-1\right)d\,T_2
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

6.5 Süper Lie Cebir Jeneratörlerinin Kendi Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, deforme kuantum süper cebirini aşağıdaki önerme ile ortaya koyuyoruz.

6.5.1 Önerme $GL_{q,j}(1/1)$ nin süper Lie cebir jeneratörlerinin kendi arasında

$$\begin{aligned}
&[T_1,\nabla_+]=(1-j^2)\nabla_+ T_2-\nabla_+,\\
&[T_1,\nabla_-]=(1-j)\nabla_- T_2+j\nabla_-,\\
&[T_1,T_2]=0,\\
&[\nabla_+,\nabla_-]=(j-1)\nabla_-\nabla_+ +(1-j)T_2{}^2+jT_2-jT_1,\\
&[\nabla_+,T_2]=(j-1)T_2\nabla_+-j\nabla_+,\\
&[\nabla_-,T_2]=(j^2-1)T_2\nabla_-+\nabla_-
\end{aligned} \tag{6.12}$$

şeklinde j -komutasyon bağıntıları vardır.

İspat: Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, ilk olarak (6.10) da elde ettiğimiz bağıntılardan faydalanacağız. Aşağıda (6.12) deki ikinci bağıntının elde edilişi ayrıntılı olarak verilecektir. Kalan bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. (6.10) daki birinci ve üçüncü bağıntıyı, (6.3) bağıntılarını da kullanarak düzenlersek

$$\begin{aligned}
T_1\nabla_- &=(a\partial_a+\beta\partial_\beta)(a\partial_\gamma+\beta\partial_d)\\
&=a\partial_a a\partial_\gamma+a\partial_a\beta\partial_d+\beta\partial_\beta a\partial_\gamma+\beta\partial_\beta\beta\partial_d\\
&=a\partial_\gamma+\beta\partial_d+j^2 a a\partial_a\partial_\gamma+(j^2-1)a\gamma\partial_\gamma\partial_\gamma+(j^2-1)ad\partial_d\partial_\gamma\\
&\quad +j^2 a\beta\partial_\beta\partial_\gamma+qa\beta\partial_a\partial_d+q^{-1}(1-j)\beta\gamma\partial_d\partial_\gamma\\
&\quad +j^2\beta\beta\partial_\beta\partial_d+(j^2-1)\beta d\partial_d\partial_d
\end{aligned}$$

buluruz. Şimdi, (6.7) bağıntılarını da kullanarak düzenlemeye devam edersek

$$\begin{aligned}
T_1\nabla_- =\,&a\partial_\gamma+\beta\partial_d+qaa\partial_\gamma\partial_a+(j^2-1)a\gamma\partial_\gamma\partial_\gamma\\
&+q(j-j^2)ad\partial_\gamma\partial_d+qj^2\beta\beta\partial_d\partial_\beta\\
&+(j^2-1)\beta d\partial_d\partial_d+qja\beta\partial_\gamma\partial_\beta+(j^2-j+1)\beta a\partial_d\partial_a\\
&+q^{-1}(1-j)\beta\gamma\partial_d\partial_\gamma
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. Son ifadeyi de (6.3) ve (6.7) ile tekrar düzenlersek

$$\begin{aligned}
T_1\nabla_- =\,&a\partial_\gamma+\beta\partial_d+a\partial_\gamma a\partial_a+(1-j)a\partial_\gamma\gamma\partial_\gamma+(1-j)\beta\partial_d\gamma\partial_\gamma\\
&+\beta\partial_d\beta\partial_\beta+(1-j)\beta\partial_d d\partial_d+(j-1)\beta\partial_d+(j-1)a\partial_\gamma\\
&+(1-j)a\partial_\gamma d\partial_d+(1-j)\beta\partial_d a\partial_a+\beta\partial_d a\partial_a\\
&+(q^{-1}-j+1)a\partial_\gamma\beta\partial_\beta
\end{aligned}$$

çıkar. Son elde edilen ifadeden gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde istenilen sonucun bulunduğu kolayca görülebilir.

Not: Elde edilen kuantum süper cebirinin, Tanım 2.1.6 ya göre bir süper Lie cebiri olduğu görülmektedir.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, $(2+2)$ boyutlu $GL(1/1)$ kuantum süper grubunun Z_3-dereceli diferansiyel geometrisi üzerinde çalışıldı. $(1+1)$ boyutlu kuantum süper düzlemin Z_3 dereceli yapısı 2002 yılında Celik tarafından incelenmişti. Bu çalışmada, incelenen bu yapının adı geçen süper düzleme etki eden $GL(1/1)$ süper grubuna da aynen genişletilebildiği gösterildi. Z_3 dereceli $GL(1/1)$ yani $GL_{q,j}(1/1)$ ile gösterdiğimiz süper grubun bir süper Hopf Cebiri olduğu elde edildi. $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun süper diferansiyel cebir yapısı bulundu ve bu yapının bir sol kovaryant diferansiyel hesap olduğu ortaya kondu. $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubu üzerindeki Cartan-Maurer formların sol invaryant olduğu gözlemlendi. Neticede, $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun geometrik şeması ortaya çıkartıldı. Ayrıca, $GL_{q,j}(1/1)$ süper grubunun kuantum süper cebiri bulundu. Elde edilen kuantum süper cebirin bir Lie cebiri olduğu sonucuna varıldı.

KAYNAKLAR

Abe, E., (1977), Hopf Algebras, Cambridge University Press, Cambridge.

Abramov, V. ve Bazunova, N., (2002), "Algebra of differential forms with exterior differential $\mathrm{d}^3 = 0$ in dimension one", Proceedings of the Sixth International Wigner Symposium, 2: 603-609.

Aghamohammadi, A., Khorromi, M. ve Shariati, A., (1995), "h-Deformation as a Contraction of q-Deformation", Journal of Physics A, 28: L225.

Berezin, F.A., (1987), Introduction to Superanalysis, D. Reidel Pub. Comp., Dordrecht-Holland.

Brzezinski, T., Dabrowski, H. ve Rembienski, J., (1992), "On the quantum differential calculus and the quantum holomorphicity", Journal of Mathematical Physics, 33: 19-24.

Celik, S. ve Celik, S.A., (1998a), "On the differential geometry of $GL_q(1/1)$", Journal of Physics A: Mathematical and General, 31: 9685-9694.

Celik, S., (1998b), "Differential geometry of the q- superplane", Journal of Physics A: Mathematical and General, 31: 9695-9701.

Celik, S. ve Celik, S.A., (2000), "Differential geometry of the q-plane", Int. J. Modern Phys. A, 15: 3237-3243.

Celik, S., (2002a), " Differential geometry of the Z_3-graded quantum superplane", Journal of Physics A: Mathematical and General, 35: 4257-4268.

Celik, S., (2002b), "Z_3-graded differential geometry of the quantum plane", Journal of Physics A: Mathematical and General, 35: 6307-6318.

Celik, S., ve Yasar, E., (2008), "The Hopf algebra structure of the Z_3-graded quantum supergroup $GL_{q,j}(1/1)$", Journal of Mathematical Physics, 49: 023511.

Chung, W.S., (1994), "Quantum Z_3-graded space", Journal of Mathematical Physics, 35: 2497-2504.

Dabrowski, L. ve Wang, L., (1991) "Two parametric quantum deformation of GL(1|1)", Phys. Lett. B 266: 51-54.

Drinfeld, V. G., (1986), "Quantum groups", Proc. ICM, Berkeley, 798-820.

El Baz, M., El Hassouni, A., Hassouni, Y. ve Zakkari, E.H., (2004), "$\mathrm{d}^3 = 0, \mathrm{d}^2 = 0$ differential calculi on certain noncommutative (super) spaces", Journal of Mathematical Physics, 45: 2314-2322.

Faddeev, L., Reshetikhin, N. ve Takhtajan, L., (1987), "Quantisation of Lie groups and Lie algebras", Preprint LOMI.

Kerner, R., (1996), "Z_3-graded exterior differential calculus and gauge theories of higer order", Letters in Mathematical Physics, 36: 441-454.

Kerner, R. ve Abramov, V., (1999), “On certain realizations of q-deformed exterior differential calculus”, Reports on Mathematical Physics, 43: 179-194.

Le Roy B., (1996), “A Z_3-graded generalization of supermatrices”, Journal of Mathematical Physics, 37: 474-483.

Manin, Yu I., (1988), “Quantum groups and noncommutative geometry”, Montreal University Preprint CRM-1561.

Schmidke, B., Vokos, S. ve Zumino, B., (1990), “Differential geometry of the quantum supergroup $GL_q(1/1)$”, Zeitschrift Für Physik C, 48: 249-255.

Soni, S.K., (1991), “Differential calculus on the quantum superplane”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 24: 619-624.

Wess, J., ve Zumino, B., (1990), “Covariant differential calculus on the quantum hyperplane”, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 18: 302-312.

Woronowicz, S.L., (1987), “Compact matrix pseudogroups”, Communications in Mathematical Physics, 111: 613-665.

Woronowicz, S.L., (1989), “Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)”, Communications in Mathematical Physics, 122: 125-170.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	03.05.1979	
Doğum yeri	Uşak	
Lise	1993-1997	Manisa Lisesi
Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2001-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	2004-2009	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

2002-Devam ediyor YTÜ Araştırma Görevlisi