

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖN GERİLMELİ TABAKALARLA ÖRTÜLÜ ÖN  
GERİLMELİ YARI DÜZLEME SABİT HIZLA  
HAREKET EDEN YÜKÜN DİNAMİK ETKİSİ**

**Mat. Yük. Müh. Ebru DİNÇSOY ABDULLAHOĞLU**

**F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında  
Hazırlanan**

**DOKTORA TEZİ**

**Tez Savunma Tarihi** : 22.12.2009  
**Tez Danışmanı** : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)  
**Jüri Üyeleri** : Prof. Dr. Adnan MAZMANOĞLU (BEYKENT Ü.)  
: Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU (YTÜ)  
: Prof. Dr. Emanullah HIZEL(İTÜ)  
: Yrd. Doç. Dr. Reşat KÖŞKER(YTÜ)  
**İkinci Tez Danışmanı** : Yrd. Doç. Dr. Coşkun GÜLER

İSTANBUL, 2009

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ .....	iv
ŞEKİL LİSTESİ .....	v
ÇİZELGE LİSTESİ .....	viii
ÖNSÖZ .....	ix
ÖZET .....	x
ABSTRACT .....	xi
1. GİRİŞ .....	1
1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler .....	1
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti .....	3
1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği .....	6
1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları .....	6
2. ÖN GERİLMELİ TABAKA VE ÖN GERİLMELİ YARI DÜZLEMEN OLUŞMUŞ SİSTEME ETKİ EDEN SABİT HIZLA HAREKET EDEN DOĞRUSAL TEKİL VE DOĞRUSAL ŞERİT YÜKÜN DİNAMİĞİ .....	8
2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu .....	8
2.2 Problemin Çözüm Yöntemi .....	11
2.3 Hesaplama Algoritması .....	20
2.4 Tekil Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar .....	22
2.5 Yayılı Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar .....	28
3. ÖN GERİLMELİ İKİ KATLI TABAKA İLE ÖN GERİLMELİ YARI DÜZLEMEN OLUŞMUŞ SİSTEME ETKİ EDEN SABİT HIZLA HAREKET EDEN DOĞRUSAL TEKİL VE DOĞRUSAL ŞERİT YÜKÜN DİNAMİĞİ.....	37
3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu .....	37
3.2 Problemin Çözüm Yöntemi .....	41
3.3 Hesaplama Algoritması .....	50
3.4 Tekil Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar .....	52
3.5 Yayılı Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar .....	59
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME .....	65
KAYNAKLAR .....	67
EKLER .....	72

Ek 1.....	72
Ek 2.....	74
Ek 3.....	76
Ek 4.....	79
ÖZGEÇMİŞ.....	82

## SİMGE LİSTESİ

$p_0$	$Ox_2$ ekseninde etki eden hareketli tekil kuvvetin yoğunluğu
$x_1, x_2, x_3$	Boyutlu global Lagrange koordinatları
$h_m$	Örtük levhadaki $m$ ( $m = 1, 2$ ) indisli katın kalınlığı
$\delta_1^j$	Kronecker sembolü
$u_i^{(m)}$	$m$ indisli malzemeye ait yerdeğiştirme vektörü bileşenleri
$\sigma_{ij}^{(m)}$	$m$ indisli malzemeye ait gerilme tansörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(m)}$	$m$ indisli malzemeye ait şekil değiştirme tansörü bileşenleri
$\theta^{(m)}$	Düzlem şekil değiştirme durumunda hacimsel yer değiştirme
$\rho^{(m)}$	( $m = 1, 2, 3$ ) $m$ . malzemenin yoğunluğu
$E^{(m)}$	( $m = 1, 2, 3$ ) $m$ . malzemenin elastisite (Young) modülü
$\lambda^{(m)}$	( $m = 1, 2, 3$ ) $m$ . malzemenin Lamé sabiti
$\mu^{(m)}$	( $m = 1, 2, 3$ ) $m$ . malzemenin kayma modülü
$\nu^{(m)}$	( $m = 1, 2, 3$ ) $m$ . malzemenin Poisson oranı
$c_2^{(m)}$	( $m = 1, 2, 3$ ) $m$ . malzemedeki enine dalga hızı
$V$	Hareketli tekil (yayılı) yükün hareket hızı
$V_{cr}$	Hareketli tekil (yayılı) yükün kritik hız değeri
$V_R$	Örtük plaka malzemesinde Rayleigh dalga yayılım hızı

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2. 1	Ön gerilmeli plakayla kaplı ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sistemin geometrisi ve yükleme durumu.....	8
Şekil 2. 2	Ön gerilmeli plakayla kaplı ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sistemin geometrisi ve yükleme durumu.....	8
Şekil 2. 3	$\bar{V} (=V/C_2^{(1)})$ ve $sh$ arasındaki bağımlılık türleri .....	24
Şekil 2. 4	Farklı $e$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	24
Şekil 2. 5	$a/h = 0.05$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi....	29
Şekil 2. 6	$a/h = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	29
Şekil 2. 7	$a/h = 3$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	30
Şekil 2. 8	$a/h = 3$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 5$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	30
Şekil 2. 9	$a/h = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 5$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	31
Şekil 2. 10	$a/h = 0.05$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 5$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	31
Şekil 2. 11	$a/h = 0.05$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 10$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	32
Şekil 2. 12	$a/h = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 10$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	32
Şekil 2. 13	$a/h = 3$ , $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 10$ için, farklı $v$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	33
Şekil 2. 14	$a/h = 0.05$ , $\eta_1 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ , $v = 0.05$ için, farklı $\eta_2$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = (\sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0})/p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	34
Şekil 2. 15	$a/h = 1$ , $\eta_1 = 0$ , $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$ , $v = 0.05$ için, farklı $\eta_2$ değerlerine göre ara	

	yüzeyde $\psi_{22} = \left( \sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0} \right) / p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	34
Şekil 2. 16	$a/h = 3, \eta_1 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_2$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = \left( \sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0} \right) / p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	35
Şekil 2. 17	$a/h = 0.05, \eta_2 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_1$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = \left( \sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0} \right) / p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	35
Şekil 2. 18	$a/h = 1, \eta_2 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_1$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = \left( \sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0} \right) / p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	36
Şekil 2. 19	$a/h = 3, \eta_2 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_1$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = \left( \sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0} \right) / p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi.....	36
Şekil 3. 1	Ön gerilmeli iki katlı plakayla kaplı, ön gerilmeli yarı düzlemin geometrisi ve yükleme durumu .....	37
Şekil 3. 2	Ön gerilmeli iki katlı plakayla kaplı, ön gerilmeli yarı düzlemin geometrisi ve yükleme durumu .....	37
Şekil 3. 3	Farklı $H = h_2/h_1$ değerleri için, ideal (a) ve ideal olmayan (b) temas koşullarında $\nu$ ve $sh_1$ arasındaki bağımlılık .....	55
Şekil 3. 4	Farklı $e_1$ değerleri için $e_2 = 1, H = 1.0$ olmak üzere $\nu$ ve $sh_1$ arasındaki bağımlılık .....	56
Şekil 3. 5	Farklı $H$ değerleri için, $e_1 = e_2 < 1 (e_1 = e_2 = 0.1)$ olmak üzere, ideal (a) ve ideal olmayan (b) temas koşullarında $\nu$ ve $sh_1$ arasındaki bağımlılık.....	56
Şekil 3. 6	Farklı $\eta_1 (= \sigma_{11}^{(1)0} / \mu^{(1)})$ değerlerinde, ideal temas koşulları için (3. 7), $\sigma_{22}^{(1)} h_1   P_0  _{x_2=-h_1}$ (a) ve $\sigma_{22}^{(2)} h_2   P_0  _{x_2=-(h_1+h_2)}$ (b) dağılımı ile $x_1/h$ arasındaki bağımlılık .....	57
Şekil 3. 7	$a/h = 0.05, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5$ için, farklı $\nu$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	60
Şekil 3. 8	$a/h = 1, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5$ için, farklı $\nu$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	60
Şekil 3. 9	$a/h = 1, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 5, E^{(3)}/E^{(2)} = 2$ için, farklı $\nu$ değerlerine	

	göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	61
Şekil 3. 10	$a/h = 1, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 10, E^{(3)}/E^{(2)} = 2$ için, farklı $\nu$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	61
Şekil 3. 11	$a/h = 3, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5$ için, farklı $\nu$ değerlerine göre ara yüzeyde $\sigma_{22}(x_1)$ ile $x_1/h$ ilişkisi .....	62
Şekil 3. 12	$a/h = 3, \eta_1 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_2$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = (\sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0})/p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi...	62
Şekil 3. 13	$a/h = 1, \eta_1 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_2$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = (\sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0})/p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi...	63
Şekil 3. 14	$a/h = 0.05, \eta_1 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_2$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = (\sigma_{22} _{\eta_2=0} - \sigma_{22} _{\eta_2>0})/p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi...	63
Şekil 3. 15	$a/h = 3, \eta_2 = \eta_3 = 0, E^{(1)}/E^{(2)} = 2, E^{(3)}/E^{(2)} = 5, \nu = 0.05$ için, farklı $\eta_1$ değerlerine göre ara yüzeyde $\psi_{22} = (\sigma_{22} _{\eta_1=0} - \sigma_{22} _{\eta_1>0})/p_0$ ile $x_1/h$ ilişkisi ...	64

## ÇİZELGE LİSTESİ

Tablo 2. 1	$\eta_2 = 0$ ve $v_{12} = 1$ durumunda farklı $\eta_1$ değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri ..... 25
Tablo 2. 2	$\eta_1 = 0$ ve $v_{12} = 1$ durumunda farklı $\eta_2$ değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri ..... 25
Tablo 2. 3	$\eta_1 = 0$ ve $v_{12} = 1$ durumunda farklı $\eta_2$ basınç değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri ..... 25
Tablo 2. 4	$v_{12} = \sqrt{0.5e}$ durumunda $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$ için ideal ve ideal olmayan temas koşullarında kritik hız değerleri ( $v_{cr}$ ) ..... 26
Tablo 2. 5	$\eta_1 = 0$ ve $v_{12} = \sqrt{0.5e}$ durumunda farklı $\eta_2$ değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri .... 26
Tablo 2. 6	$\eta_2 = 0$ ve $v_{12} = \sqrt{0.5e}$ durumunda farklı $\eta_1$ değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri .... 26
Tablo 2. 7	$\eta_1 = 0$ ve $v_{12} = \sqrt{0.5e}$ durumunda farklı $\eta_2$ basınç değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri ..... 27
Tablo 3. 1	Farklı $e_1, e_2$ ve $H$ değerlerinde ideal (üstteki sayı) ve ideal olmayan (alttaki sayı) temas koşullarında kritik hız ( $v_{cr}$ ) değerleri ..... 57
Tablo 3. 2	Farklı $e_1$ değerleri için iki katlı plaka ya da yarı düzlem konumuna geçmiş orta plaka durumu için ideal (üstteki sayı) ve ideal olmayan (alttaki sayı) temas koşullarında kritik hız ( $v_{cr}$ ) değerleri ..... 58
Tablo 3. 3	Farklı $e_1, e_2$ değerlerinde $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ ; $H=1.0$ için ideal (üstteki sayı) ve ideal olmayan (alttaki sayı) temas koşullarında kritik hız ( $v_{cr}$ ) değerleri ..... 58
Tablo 3. 4	$e_1 = 2, e_2 = 5, H = 1$ durumu için, sistem bileşenlerine uygulanan farklı değerlerdeki ön gerilmelerin kritik hıza ( $v_{cr}$ ) etkisi ..... 59

## ÖNSÖZ

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmanın hazırlanmasında benden yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a, ayrıca çalışma süresince bana destek olan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun GÜLER'e teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman yanımda olan, sevgisiyle bana güç veren değerli eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ebru DİNÇSOY ABDULLAHOĞLU

Aralık 2009

# ÖN GERİLMELİ TABAKALARLA ÖRTÜLÜ ÖN GERİLMELİ YARI DÜZLEMDE SABİT HIZLA HAREKET EDEN YÜKÜN DİNAMİK ETKİSİ

## ÖZET

Bu çalışmada, öngerilmeli yarı düzlem ve onu kaplayan plakalardan oluşan sistemin hareketli yüke dinamik tepkisi, parçalı homojen cisim çerçevesinde, ön gerilmeli sistemlerdeki ÜDEDT (üç boyutlu doğrusallaştırılmış dalga yayılım teorisi) kullanılarak incelenmiştir. Sistemi oluşturan malzemelerin izotrop ve homojen olduğu kabul edilmiştir. Aynı zamanda örtük plaka üzerinde hareket eden yükün hızı da sabit kabul edilmiştir. Araştırma düzlem gerilme durumunda, hareketli yükün sesten yavaş durumu için, iki tip temas koşulunda gerçekleştirilmiştir, sırasıyla: ideal ve ideal olmayan temas koşulu. Çeşitli problem parametreleri için, nümerik kritik hız sonuçları elde edilmiştir. Çok sayıda yeni sayısal sonuçları elde etmek için gerekli algoritma ve programlar MATLAB'da tarafımızdan yapılmıştır. Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümü sırasıyla; tez konusuna ait genel bilgiler, tez konusuna ait araştırmaların kısa özeti, konunun gerekliliği ve güncelliği, yapılan araştırmaların amaçları olmak üzere dört kısımdan oluşmaktadır.

İkinci bölümde, iki farklı durum incelenmiştir. Birinci durumda ön gerilmeli tabakayla örtülü ön gerilmeli yarı düzleme etki eden sabit hızlı doğrusal tekil yükün dinamik etkisi ideal ve ideal olmayan temas koşulları için incelenmiştir. İkinci durumda ise ön gerilmeli tabakayla örtülü ön gerilmeli yarı düzleme etki eden sabit hızlı düzgün yayılı yükün dinamik etkisi ideal ve ideal olmayan temas koşulları için incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise ön gerilmeli iki katlı tabaka ile ön gerilmeli yarı düzlemde oluşmuş sisteme etki eden sabit hızla hareket eden doğrusal tekil ve düzgün yayılı yükün dinamik etkisi ideal ve ideal olmayan temas koşulları için incelenmiştir.

Dördüncü bölüm elde edilen sayısal sonuçların yorumlarından oluşmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Hareketli yük, kritik hız, ön gerilme, dinamik etki, plakayla kaplı yarı düzlem, orta plaka, üst plaka, yarı düzlem.

# DYNAMICAL RESPONSE TO THE MOVING LOAD OF A PRE-STRAINED SYSTEM COMPRISING SUBSTRATE AND COVERING LAYERS

## ABSTRACT

In the present study, within the framework of the piecewise homogeneous body model by the use of the TLTEWISB (Three-dimensional Linearized Theory of Elastic Waves in the Initially Stressed Bodies) the dynamical response of the system consisting of the pre-stretched covering layers and pre-strained half-plane to the lineal located moving load is investigated. It is assumed that the materials of the constituents are isotropic and homogeneous. It is also assumed that the velocity of the moving load which acts on the covering layer is constant. The investigations carried out for the plane-strain state under subsonic velocity of the moving load for two types of contact conditions. For various values of the problem parameters the numerical results on the critical velocity are presented and discussed. The algorithm and programmes which are used for obtaining numerous new numerical results are composed by the author in MATLAB. This study consisting of four main sections.

The first section, the beginning part of the study, consisting of the four sections, namely: the general information of the present study, the review of the papers related to the present study, the importance of the present study and the purposes of the present investigation.

The second section consisting of the two different cases, first case is the dynamical response to the line-located moving load of a pre-strained system comprising substrate and covering layers has been investigated for two types of contact conditions, namely: complete and incomplete. Second case is the dynamical response to the distributed (uniform) moving load of a pre-strained system comprising substrate and covering layers has been investigated for two types of contact conditions, namely: complete and incomplete.

In the third section consisting of the two different cases, first case is the dynamical response to the line-located moving load of a pre-strained system comprising substrate, bond and covering layers has been investigated for two types of contact conditions, namely: complete and incomplete. Second case is the dynamical response to the distributed (uniform) moving load of a pre-strained system comprising substrate, bond and covering layers has been investigated for two types of contact conditions, namely: complete and incomplete.

The fourth chapter includes the comments of the conclusions that have been carried out for the present problems.

**Key words:** Moving load, critical velocity, initial stress, dynamical response, layered half-plane, bond layer, covering layer, substrate.

## 1. GİRİŞ

### 1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler

Çok katlı ortamlara etki eden hareketli yüklerin dinamiğine ait problemlerin matematik modellenmesi ve teorik açıdan incelenmesi, birçok mühendislik dalları için çok büyük önem taşımaktadır. Bu araştırmaların sonuçları, hızlı tren, karayolu yapımı, yüksek hızlı metal kesimleri, manyetik disklere veri kaydı, uçak pistlerinin tasarımı gibi birçok çağdaş mühendislik dallarında uygulanabilmektedir. Söz konusu araştırmaların önemli bir kısmı yarı düzlem ve örtülü tabakadan oluşan sisteme etki eden hareketli yükün dinamiğine aittir. Yarı düzlem ve örtük tabakadan oluşmuş sistemler, hareketli objelerin etkisine maruz kalmış birçok araç taşıyıcı yolların simülasyonu gibi ele alınabilmektedir. Bu alandaki ilk teorik incelemeler Achenbach v. d. tarafından (1967)' de ki makale ve bu makalede gösterilen diğer araştırmalarla başlamıştır. Zaman ilerledikçe bu araştırmalar geliştirilmiş ve sürekli olarak pekiştirilmiştir. Bu yöndeki son çalışmalara örnek olarak, Aursech (2006), Karlström (2006), Bespalova (2007), Madshus, Kaynia (2000), Degrande, Schillemans (2001) ve diğerleri gösterilebilir.

Yukarıda adı verilen araştırmalar birkaç açıdan sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmanın en önemlilerinden birisi  $G_l/G_h$  ve  $c_{2l}/c_{2h}$  orantılarına göre yapılmaktadır. Burada  $G_l(G_h)$  örtük tabakanın(yarı düzlemin) kayma elastisite modülüdür ,  $c_{2l}(c_{2h})$  örtük tabaka(yarı düzlem) malzemesindeki enine dalga yayılımı hızıdır.  $G_l/G_h > 1$  ve  $c_{2l}/c_{2h} \geq 1$  durumlarına karşı gelen sistemlere sert tabaka ve esnek yarı düzlemden oluşmuş sistem denir.  $G_l/G_h < 1$  ve  $c_{2l}/c_{2h} < 1$  durumlarına karşı gelen sistemlere ise esnek tabaka ve sert yarı düzlemden oluşmuş sistem denir. Örneğin uçak pistlerinin modellenmesi sert örtük tabaka ve esnek zeminden oluşmuş sisteme aittir. Esnek tabaka ve sert yarı düzlemden oluşan sistemlere ise sert zemin üzerine yapılmış asfalt yolların modellenmesi (simülasyonu) örnek gösterilebilir. Bahsedilen iki sisteme yani sert tabaka ve esnek yarı düzlem ile esnek tabaka ve sert yarı düzlemden oluşmuş sistemlere etki eden hareketli yükün dinamikası nitelik ve nicelik bakımından birbirinden farklıdır.

Sert tabaka ve esnek yarı düzlemden oluşmuş sistemlere ait araştırmalarda iki önemli soruyla karşılaşılır: 1. hareketli yükün kritik hızının belirlenmesi; 2. hareketli yükten dolayı oluşmuş gerilme ve yer değiştirme durumunun belirlenmesi. Uygun araştırmalar göstermektedir ki hareketli yükün hızı kritik hıza eşit olduğunda rezonans tipli olay oluşmaktadır. Esnek tabaka

sert yarı düzlemden oluşmuş sistemlere ait araştırmalarda ise sadece yukarıda sıralanan 2. soruyla karşılaşılır. Bu nedenden dolayı sert tabaka ve esnek zemine ait araştırmalar uygulama ve mühendislik tasarımı açısından daha önemli bulunmaktadır.

Yukarıdaki araştırmaların bir diğer sınıflandırılması ise bu araştırmalarda uygulanan teorilerin hassasiyeti açısından yapılmaktadır. Bu araştırmaların hemen hemen hepsi klasik lineer elastodinamik teorisi çerçevesinde yapılmış ve örtük tabakanın hareket denklemleri yazıldığında Kirchoff ya da Timoshenko teorileri, yarı düzlemin hareket denklemlerinin yazılmasında ise doğrusal elastik dalgaların hareket denklemleri kullanılmıştır. Örneğin Hussein, Kunt (2006), Chen, Huang (2000), Suiker v.d. (1998), Accenbach v.d. (1967) v.s. çalışmalarında olduğu gibi. Çağdaş yüksek hızlı araçlara ait mühendislik, söz konusu araştırmaların daha hassas teorilerle yapılmasını ve bu sistemlerin başlangıç konum özelliklerinin-bu özelliklerden en önemlisi olan ön gerilmelerin- göz önüne alınmasını gerekmektedir. Ön gerilmeler, örtük tabaka ve yarı düzlemden (yarı uzay) oluşmuş sistemlerin yapım teknolojisi sonucunda oluşabilmektedir ve oluşan bu ön gerilmelerin değeri hareketli yükün dinamiğine etki edecek derecede büyük değerlere ulaşabilmektedir. Bundan başka, söz konusu ön gerilmeler çevre koşullarının (özellikle ısının) keskin bir biçimde değişimi sonucunda da ortaya çıkar. Bu tür ısı değişimleri demir yollarında, uçak pistlerinde, kara yollarında v.s. önemli büyüklüklere ulaşan gerilmeler oluşturabilmektedir. Arnold (1983) makalesinde gösterildiği gibi söz konusu sisteme etki eden bu gerilmeler, hareketli yüklerden oluşan gerilmelere göre ön gerilme gibi modellenebilmektedir.

Belirli koşullar çerçevesinde hareketli yükün dinamiğine ait yukarıda söylenen tip problemleri Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) çerçevesinde incelemek mümkündür. ÜDEDYT'nin alan denklemlerinin oluşturulması ve dalga yayılımına (dispersiyonuna) uygulanması sırasıyla; Gren v. d. (1952), Biot (1965), Truestell ve Noll (1965), Guz A. N. (1986a, 1986b, 2004), Akbarov ve Özışık (2003, 2004), Zhuk ve Guz I. A. (2006, 2007), Akbarov, Guz (2004), Eringen, Şuhubi (1975a), Ozisik (2003), Ozisik, Akbarov (2003) kaynaklarında verilmektedir. Bundan başka tabakalı öngerilmeli ortamlarda zamana göre harmonik gerilme durumlarının ÜDEDYT ile incelenmesi Akbarov (2006a, b, c, d, 2007a, b), Yahnioğlu (2007), Akbarov, Ozaydin (2001a, b), Akbarov v. d. (2004, 2005), Akbarov, Guler (2005), Akbarov v. d. (2005), Emiroğlu v. d. (2004), Guler, Akbarov (2004), Koshman (1980a, b), Tasci v. d. (2005) kaynaklarında verilmektedir. Bu araştırmaların özeti ise Guz A. N. (2002) ve Akbarov (2007b) makalelerinde yer almaktadır. Yukarıdaki özet makalelerden görüldüğu gibi şimdiye kadar ÜDEDYT çerçevesinde, ön gerilmeli tabakalı

ortamlarda ki dalga yayılımları (dispersiyonu) ve zamana göre harmonik gerilme yayılımlarına ait sonlu sayıda araştırmalar gerçekleştirilmiş ve bunların sonuçları yorumlanmıştır. ÜDEDTYT çerçevesinde tez konusuna ait, yani ön gerilmeli tabakalı ortamlara etki eden hareketli yükün dinamiğine ait ise çok az sayıda araştırma yapılmıştır. şimdi bu araştırmaların kısa özetini ele alalım.

## 1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti

Tezin konusu, ön gerilmeli sert örtük tabaka (veya tabakalar) ve ön gerilmeli esnek yarı düzlemden oluşmuş sistemlere etki eden hareketli yükün dinamik etkisinin, ÜDEDTYT teorisi uygulanarak, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmesine aittir. İlk önce ön gerilmesiz tabakalı(örtüklü) yarı düzlemler için yapılmış uygun araştırmaların kısa özetini ele alalım. Bu özete plaka ve yarı düzlemden oluşan sistemin, hareketli yüke dinamik tepkisinin incelendiği Achenbach v. d. (1967) ile başlayalım. Burada plakaya ait hareket denklemleri Timoshenko teorisi çerçevesinde ele alınmış, yarı düzleme ait hareket denklemleri ise elastodinamiğin tam doğrusal teorisi çerçevesinde oluşturulmuştur. Düzlem gerilme durumu incelenmiş ve hareketli yükün, hareket doğrultusu boyunca sinüsoidal biçimde değişim gösterdiği durum ele alınmıştır. Bununla beraber doğrusal yük incelenmiş, hareketli yükün hızının sabit olduğu kabul edilmiştir. Sinüsoidal biçimde değişen hareketli yükün etkisindeki sistemde, yükün kesin dalga boyu hızı, aynı dalga boyunun serbest dalgalarının hızına eşit olduğu durumda, rezonans tipli hareket meydana gelmektedir. Çünkü sinusoidal olarak değişen yükleme için aranan değerler  $(\Delta(c))^{-1}$  şeklinde ifade edilir. Burada  $\Delta(c) = 0$  ifadesi,  $c$  dalga yayılım hızı olmak üzere, bahsi geçen dalgaların dispersion denklemdir. Halbuki hareketli doğrusal yükün etkisi altında aranan değerler  $\int_0^{+\infty} (\bullet)(\Delta(x))^{-1} dx$  şeklinde ifade edilmiştir, rezonans tipteki etkinin varlığı nedeniyle yayılım denklemi  $\Delta(x) = 0$ , çift gerçek köke sahip olmalıdır, dolayısı ile bu kökler,  $\Delta(x) = 0$  ve  $d\Delta(x)/dx = 0$  ifadelerini aynı anda sağlamalıdır. Genelde böyle durumlarda faz hızının minimumu mevcuttur ve kritik hız olarak adlandırılır. Açıktır ki bahsedilen faz hızı grup hızına eşittir. Doğrusal yük için nümerik inceleme izafi olarak yumuşak plaka (yani,  $(G_1/\rho_1)/(G/\rho) < 1.0$  durumu için  $G_1(G)$  ve  $\rho_1(\rho)$  sırasıyla plakanın (yarı düzlemin) kayma modülü ve yoğunluğudur) ve izafi olarak sert palaka yani  $(G_1/\rho_1)/(G/\rho) > 1.0$  durumu için yapılmıştır. Bahsedilen durumlar için görölmüştür ki kritik hız yalnızca izafi olarak sert plaka durumunda yani

$(G_1/\rho_1)/(G/\rho) > 1.0$  olduğunda meydana gelmektedir.

Achenbach v. d. (1967) ile başlayan araştırma bugüne kadar sürekli olarak geliştirilmiştir, bu gelişim içindeki en son çalışmalar içinde bizim çalışmamıza yakın konular Dieterman v. d.(1997) ve Metrikine v.d. (2000) makalelerinde ve bu makalelerdeki kaynaklarda yer alan diğer çalışmalarda görülmektedir. Belirtilmelidir ki Dieterman v. d.(1997)'deki çalışmada sert temele dayalı plakanın serbest yüzeyinde, harmonik olarak değişen noktasal yerleştirilmiş, sabit hareket eden yükün kritik hızı incelenmiştir. Plakanın hareketi Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) kullanılarak tanımlanmıştır. Kritik hız grup hızına eşit olan hız olarak hesaplanmıştır. Bundan başka Dieterman v. d.(1997)'da, elastik tabakaya rayları destekleyen çakıl taşları model olarak gösterilirken, harmonik olarak değişen noktasal yerleştirilmiş hareketli yüke, tren-travers arasındaki etki model olarak gösterilmiştir. Uygun sınır değer problemi uzaysal koordinatlarda üstel Fourier dönüşümü kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçların analizine göre hareketli yükteki harmonik değişim biri daha düşük değerde, diğeri tabaka materyalindeki Rayleigh dalga hızından daha büyük olmak üzere iki kritik hıza sebep olmaktadır.

Metrikine v.d. (2000)'de iki boyutta zemin yüzey titreşimleri düşük viskoziteye sahip elastik plaka ve yarı düzlemin plakanın iç yüzeyinde olduğu durumlar için incelenmiştir. Tabaka ve yarı düzlemin yatay doğrultuda sonsuz uzunlukta olduğu ve sert zemine bağlı olduğu kabul edilmiştir. Yarı düzlemin hareketi Euler-Bernoulli modeli çerçevesinde yazılmıştır. Yapının hareketinin sabit şekilde yarı düzlem boyunca hareket eden ve üç farklı şeklinden bahsedilen(sabit, harmonik olarak değişen ve hareketsiz rasgele yük) noktasal yüklemeye kaynaklandığı kabul edilmiştir. Metrikine v.d. (2000)'de gerçekleştirilen araştırmalar aynı zamanda, Vesnitskii v.d. (1991, 1993)'te "kinematik invaryant" olarak adlandırılan, düz doğruların dispersiya eğrileri ile kesişiminden hesaplanan kritik hız bilgilerine dayanmaktadır. Belirtilmelidir ki yüzeydeki harmonik olarak değişen yükün etkisi altında bahsedilen yayılım grafiği, pozitif ve negatif dalga sayılarıyla çizilir, çünkü harmonik olarak değişen yük negatif fazlı hız ile yayılan dalgalar da meydana getirebilir. Aynı zamanda yukarıda bahsedilen yüzey yer değiştirme araştırmalarının hepsinin gerçekleştirildiğini belirtmek gerekir. Fakat bahsedilen sistemin bileşenlerinde ki gerilme yayılımı ve ara yüzeyde gerçekleşen gerilmeler henüz incelenmemiştir. Yukarıda bahsedilen kaynaklarda, bahsedilen sisteme ait bileşenlerin ön gerilmeli durumları hesaba katılmamıştır. Hareketli yükün kritik hız civarındaki değerlerinde, ön gerilmeleri göz önüne almaya yönelik ilk girişim, buzdan plaka ve sudan yarı düzlem bileşenlerinden oluşmuş sistemi model alan Kerr v. d. (1983) 'te gerçekleştirilmiştir.

Bu durum için plakanın hareket denklemleri Kirchhoff teorisi çerçevesinde ele alınmış ve ön çekme(basınç), kritik hız değeri üzerinde artmaya (azalmaya) yol açmıştır.

Açıktır ki, ön gerilmeli sistemlerle alakalı problemler, daha doğru ve kesin sonuç elde etmek için Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) çerçevesinde ele alınabilir. ÜDEDYT alan denklemlerinin yapısı ve bunların dalga yayılımına uygulanması Green v.d.(1952) ve Zhuk v.d.(2007)' de, ÜDEDYT'nin plakalı ön gerilmeli sistemlerde ki zaman-harmonik gerilme alanlarına uygulanması Akbarov (2006a, c)'te, bu araştırmalara dair daha detaylı bilgiler Guz (2002) ve Akbarov (2007a, b)'de yer almaktadır.

Buna rağmen, ÜDEDYT çerçevesinde ön gerilmeli plaka, yarı düzlemdeki hareketli yükün dinamik etkisinin incelenmesiyle ilgili çok az sayıda çalışma gerçekleştirilmiştir

Bu araştırmalar esasen Babich v. d. (1986, 1988, 2008a, b) makalelerinde yapılmıştır. Şimdi bu makalelerde elde edilen sonuçları kısaca özetleyelim. Babich v. d. (1986) makalesinde, ön gerilmeli yarı düzlem ve ön gerilmemiş örtük tabakadan oluşmuş bir sistemde sabit hızla hareket eden tekil yükün dinamik etkisinin incelenmesi ele alınmıştır. Bu makalede yarı düzlemin hareket denklemleri ÜDEDYT ile yazılmış örtük tabakanın hareket denklemleri ise Timoshenko teorisi uygulanarak ele alınmıştır. Araştırmalar düzlem şekil değiştirme durumunda yapılmış, yarı düzlem malzemesi sıkışabilir malzeme kabul edilmiş ve onun elastisite bağıntıları harmonik potansiyel yardımıyla verilmiştir. Yarı düzlemin ön şekil değiştirmeleri sonlu kabul edilmiştir. Örtük tabakanın elastisite modülü yarı düzlemin elastisite modülünden daha büyük olduğu farz edilmiştir, yani sert tabaka ve esnek zemin sistemi ele alınmıştır. İncelemelere karşı gelen sınır değer problemi Fourier integral dönüşümü yardımıyla çözülmüştür. Sayısal sonuçlar sesten yavaş durumlarda (yani yükün hareket hızının, örtük tabaka malzemesinde ve yarı düzlem malzemesindeki enine dalga hızlarından küçük olduğu durumlarda) sadece kritik hızlar için elde edilmiştir. Babich v.d. (1988) makalesinde ise söz konusu araştırmalar ÜDEDYT'nin kompleks potansiyelleri uygulanarak tekrar ele alınmıştır.

Babbich v. d. (2008a) makalesinde, Babich v. d. (1986) makalesinde ki araştırmalar yarı düzlem malzemesinin sıkışmaz malzeme olduğu durumlar için geliştirilmiş ve sayısal sonuçlar Bartenev-Hazanovich potansiyeli için elde edilmiştir. Bu makalede sadece sesten yavaş durumlar değil, sesten hızlı durumlar da ele alınarak kritik hız ve gerilme yayılımlarına ait sayısal sonuçlar verilmiştir.

Babbich v. d.(2008b)'de Babbich v. d.(1986)'da ki problem tekrar ele alınmış ve sesten hızlı

durumlar için de gerilme yayılımlarına ait sonuçlar elde edilmiştir.

Yukarıdaki özetlemeden görüldüğü gibi, şimdiye kadar tez konusu ile ilgili yapılan araştırmalarda örtük tabakadaki ön gerilmeler göz önüne alınmamış ve bu tabakanın (örtük levhanın) hareket denklemleri Timoshenko teorisi çerçevesinde ele alınmıştır. Bu kısıtlamalar ve kabuller ele alınan problemlerin matematiksel açıdan incelenmesini kolaylaştırırsa da birçok gerçek durumun matematiksel açıdan doğru modellenmesine ve teorik olarak incelenmesine imkan vermemektedir. Yapılan araştırmalardan farklı olarak tez kapsamında sadece yarı düzlemde değil, örtük tabaka veya tabakalarda (levhalarda) da ön gerilmelerin var olduğu kabul edilmiş ve tabakaların hareket denklemleri de ÜDEDYT teorisi uygulanarak ele alınmıştır. Söylenen anlamlarda tezde yapılan araştırmalar sadece ÜDEDYT teorisi çerçevesinde değil, klasik elastik dalga yayılımı teorisi çerçevesinde de ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

### 1.3 Konunun Gerekliği ve Güncelliği

Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu doğrusallaştırılmış dalga yayılımı teorisi (ÜDEDYT) uygulanarak ön gerilmeli tek ve ön gerilmeli çift tabaka ile örtülü ön gerilmeli yarı düzlemde sabit hızla hareket eden tekil ve düzgün yayılı şerit yükün dinamiği “sesten yavaş” durumlar için incelenmiştir. İncelemelerde düzlem şekil değiştirme durumu ele alınmıştır. Tabaka ve yarı düzlem malzemeleri lineer elastik ve izotrop kabul edilmiştir. Hareket eden objelere ait çağdaş endüstrinin birçok alanında uygun durumların rastlanması, tez konusunu hem teorik, hem de pratik açıdan gerekli ve güncel kılmaktadır.

### 1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları

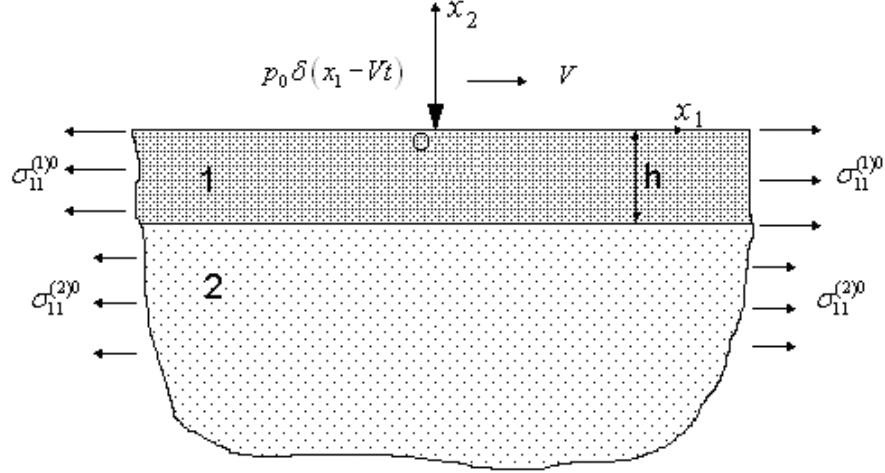
Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları;

1. Parçalı homojen cismin modeli çerçevesinde, üç boyutlu doğrusallaştırılmış dalga yayılımı teorisi (ÜDEDYT) uygulanarak ön gerilmeli tek ve ön gerilmeli çift tabakalarla örtülü ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sisteme etki gösteren, sabit hareketli tekil ve düzgün yayılı şerit yükün kritik hız değerlerinin belirlenmesi ve bu değerlere problem parametrelerinin, özellikle örtük tabakalarda ki ön gerilmelerin etkisinin incelenmesi,
2. Uygun sınır değer problemlerinin matematiksel formülasyonu ve bu problemlerin analitik-sayısal çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi,

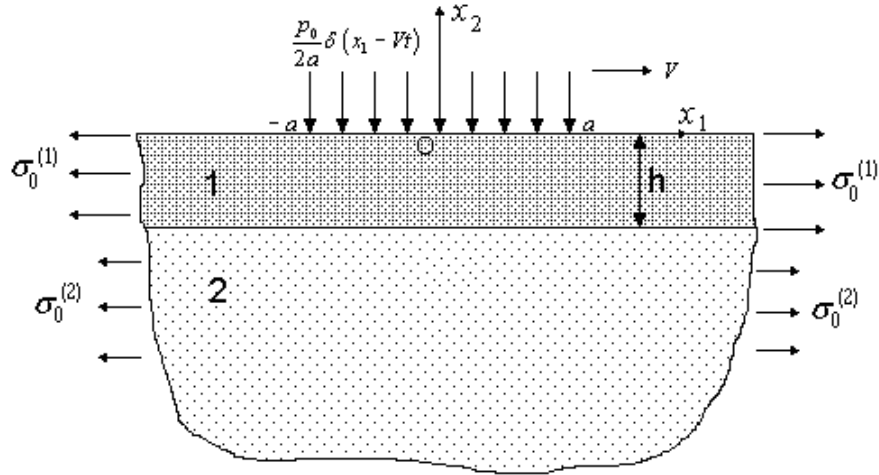
3. Ele alınan çok-katlı ortamlarda hareketli yük etkisinden oluşan gerilme yayılımlarının ve bu yayılımlara ön gerilmelerin etkisinin incelenmesi,
4. Kritik hız ve gerilme yayılımlarına ait sayısal sonuçların yorumlanması, olarak özetlenebilir.

## 2. ÖN GERİLMELİ TABAKA VE ÖN GERİLMELİ YARI DÜZLEMDEN OLUŞMUŞ SİSTEME ETKİ EDEN SABİT HIZLA HAREKET EDEN DOĞRUSAL TEKİL VE DOĞRUSAL ŞERİT YÜKÜN DİNAMİĞİ

### 2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu



Şekil 2. 1 Ön gerilmeli plakayla kaplı ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sistemin geometrisi ve yükleme durumu



Şekil 2. 2 Ön gerilmeli plakayla kaplı ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sistemin geometrisi ve yükleme durumu

Açıklamaların kolaylığı için problemin matematiksel formülasyonu, ön gerilmeli tabakayla örtülü ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sisteme etki eden doğrusal tekil kuvvet

dinamiğine ait problemin matematiksel formülasyonu olarak ele alınacak olursa, öncelikle söz konusu sistemin şematik görünümü Şekil 2. 1’de yer almaktadır. Şekil 2. 1’de gösterildiği gibi  $Ox_1x_2x_3$  koordinat takımında örtük tabaka ve yarı düzlemin parçacıklarının konumu, bu koordinat takımında Lagrange koordinatlarıyla belirtilirse, örtük tabaka ve yarı düzlem sırasıyla  $\{-\infty < x_1 < +\infty, -h \leq x_2 \leq 0, -\infty < x_3 < +\infty\}$  ve  $\{-\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 \leq -h, -\infty < x_3 < +\infty\}$  alanlarını kapsamaktadır. Şekilden görüldüğü gibi  $Ox_3$  eksenini şekil düzlemine dik yönde olduğu için şekil üzerinde görülmemektedir.

Örtük tabaka ve yarı düzlemin birleştirilmeden önce  $Ox_1$  eksenini yönünde sonsuzda uniform yayılı yüklerle etki ettirilerek ön gerilmelerin oluşturulduğu ve daha sonra örtük tabaka ve yarı düzlemin birleştirildiği farz edilirse, bu yüklemenin (ön gerilmeyi oluşturan yüklemeler) ileride araştırılacak olayın oluştuğu süre boyunca etki edeceği kabul edilmektedir. Matematiksel ifadelerde örtük tabaka ve yarı düzleme ait olan gerilmeler, şekil değiştirmeler ve yer değiştirmeler sırasıyla üst (1) ve üst (2) indeksleri ile ifade edilecektir. Bundan başka ön gerilmelere ait büyüklükler ek olarak üst (0) indisiyle belirtilecektir.

Örtük tabaka ve yarı düzlem malzemelerinin birbirinden farklı doğrusal elastik, izotrop malzemeler olduğu, bununla beraber tabaka ve yarı düzlem malzemelerinin yeterli derecede sert olduğu ve ön yüklemelerden dolayı oluşan şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılarak ön gerilmeler Klasik Lineer Elastisite teorisi çerçevesinde belirlenecektir. Bilindiği üzere bu ve benzeri durumlarda ön gerilmeli ortamlardaki dinamik olayların incelenmesine ÜDEYD’ın ikinci versiyon küçük şekil değiştirme teorisi uygulanmaktadır (Guz, (2004)). Açık ki söz konusu durumda ele alınan sistemde oluşan ön gerilmeler aşağıda ki biçimde belirlenir.

$$\sigma_{11}^{(m)0} = \text{sabit}_m, \sigma_{ij}^{(m)0} = 0 ; j \neq 1 \text{ için} \quad (2. 1)$$

Söz konusu durumda ön şekil değiştirmeler küçük olduğundan tabaka ve yarı düzlemin doğal ve ön gerilmeli durumlarındaki konumlarının (koordinatları) aynı olduğu kabul edilecektir.

Yukarıda söylenenler çerçevesinde ele alınan sistemin örtük tabakasının serbest yüzeyine  $Ox_1$  eksenini yönünde sabit  $V$  hızıyla hareket eden doğrusal tekil  $P$  kuvveti etki etmektedir.  $V$  hızının,

$$V < \min(C_2^{(1)}, C_2^{(2)}), C_2^{(m)} = \sqrt{\mu^{(m)} / \rho^{(m)}} ; m = 1, 2. \quad (2. 2)$$

koşulunu sağladığı varsayılmaktadır. (2. 2)'de  $C_2^{(m)}$ ,  $\mu^{(m)}$  ve  $\rho^{(m)}$  sırasıyla  $m$ . malzemedeki enine dalga hızı, kayma modülü ve malzeme yoğunluğudur. (2. 2) koşulunun bir diğer anlamı ise yükün hareket hızının sistemi oluşturan malzemelerdeki ses hızından küçük olmasıdır.

Hareketli yükten dolayı sistem dinamiğinin ÜDEDYT uygulanarak,  $Ox_1x_2$  düzlemindeki düzlem şekil değiştirme durumunda incelenmesi söz konusudur. Bu incelemeler parçalı homojen cisim çerçevesinde yapılacaktır. Bu durumda hem örtük tabakanın kapsadığı alanda ve hemde yarı düzlemin kapsadığı alanda ÜDEDYT'nin aşağıdaki hareket denklemleri sağlanmaktadır.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(m)}}{\partial x_i} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_j^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_j^{(m)}}{\partial t^2} \quad (2. 3)$$

(2. 3)'te  $\sigma_{ij}^{(m)}$ ,  $u_j^{(m)}$  sırasıyla  $m$ . malzemedeki gerilme tansörü ve yer değiştirme vektörü bileşenlerini göstermektedir. Örtük tabaka ve yarı düzlemin malzemeleri lineer ve elastik kabul edildiğinden, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları genelleştirilmiş Hooke kanununa tabi tutularak aşağıdaki biçimde ele alınır.

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda^{(m)} \theta^{(m)} \delta_i^j + 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \quad (2. 4)$$

Burada

$$\theta^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} \right) \quad (2. 5)$$

(2. 4) ve (2. 5)'te aşağıda ki işaretlemeler kabul edilir.

Burada  $i; j; m = 1, 2$ ,  $\lambda^{(m)}$ ,  $\mu^{(m)}$  Lamé's sabitleridir.  $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ 'ler şekil değiştirme tansörü bileşenlerini,  $\theta^{(m)}$  ise düzlem şekil değiştirme durumunda hacimsel yer değiştirmeyi gösterir.

Yukarıda söylenenlerden görüldüğü gibi örtük tabakanın üst serbest yüzeyinde aşağıdaki sınır koşulları sağlanmaktadır.

$$\sigma_{12}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = -p\delta(x_1 - Vt) \quad (2. 6)$$

Burada  $\delta(x)$ , Delta Dirac fonksiyonunu göstermektedir. Babich v. d. (1986, 1988, 2008a, b) araştırmalarında olduğu gibi örtük tabaka ve yarı düzlem arasında iki tür temas koşullarının oluştuğu varsayılacaktır. Birinci tür temas koşulları ideal temas koşullardır ve bunlar

$$\sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=-h} = \sigma_{i2}^{(2)} \Big|_{x_2=-h}, \quad u_i^{(1)} \Big|_{x_2=-h} = u_i^{(2)} \Big|_{x_2=-h}, \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

biçiminde verilmektedir. İkinci tip temas koşulları ise ideal olmayan temas koşulları olarak adlandırılır ve

$$\sigma_{12}^{(1)} \Big|_{x_2=-h} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} \Big|_{x_2=-h} = 0, \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_2=-h} = u_2^{(2)} \Big|_{x_2=-h}, \quad \sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=-h} = \sigma_{22}^{(2)} \Big|_{x_2=-h} \quad (2.8)$$

şeklinde verilir. Bunlardan başka yükün hareket hızı ses hızından yavaş olduğundan

$$|u_i^{(2)}|, |\sigma_{ij}^{(2)}| \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow -\infty \quad \text{için} \quad (2.9)$$

sönüm koşullarının sağlandığı varsayılacaktır. Böylece problemin matematiksel formülasyonunun yazılımı tamamlanmış olup ele alınan fiziksel olayın incelenmesi, (2. 3)-(2. 5) denklem takımının (2. 6) - (2. 9) sınır koşulları ve (2. 7) veya (2. 8) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine (çözülmesine) getirilmiştir. Belirtilmelidir ki (2. 3) denklemlerinde  $\sigma_{11}^{(m),0} = 0$  kabul edilirse, incelenecek problemin klasik lineer elastodinamik teorisi çerçevesindeki (ön gerilmesiz durum için) matematiksel formülasyonu elde edilmiş olur.

(2. 6) sınır koşulu tekil doğrusal kuvvet etki ettiği durum için verilmektedir. Doğrusal şerit yüklemesi durumunda ise (2. 6) koşullarında ikincisi aşağıdaki ile yer değiştirecektir.

$$\sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \begin{cases} -p_0 = \frac{-P}{2a}, & -a \leq x_1 - Vt \leq a \\ 0, & |x_1 - Vt| > a \end{cases} \quad (2.10)$$

## 2.2 Problemin Çözüm Yöntemi

(2. 3)-(2. 5) denklemlerinden, yer değiştirmeler cinsinden aşağıda verilen hareket denklemleri elde edilir.

$$\left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \mu^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_2^2} + \left( \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} \right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

$$\left(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m)0}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} + \left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2}$$

Yükle birlikte hareket eden koordinat sistemi dönüşümü, yani

$$x_2' = x_2, \quad x_1' = x_1 - Vt \quad (2.12)$$

dönüşümü kullanıldığında (2.11) denklemini

$$\left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 2 + \frac{\sigma_{11}^{(m)0}}{\mu^{(m)}} - \frac{V^2}{(C_2^{(m)})^2}\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 1\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 1\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \frac{\sigma_{11}^{(m)0}}{\mu^{(m)}} - \frac{V^2}{(C_2^{(m)})^2}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 2\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.13)$$

formuna dönüşür. Bu durumda sırasıyla tekil ve yayılı yüke ait olan (2.6) ve (2.10)'da verilen sınır koşulları,

$$\sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = -p\delta(x_1), \quad \sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \begin{cases} -p_0 = \frac{-p}{2a} & , \quad -a \leq x_1 \leq a \\ 0 & , \quad |x_1| > a \end{cases} \quad (2.14)$$

ifadeleriyle yer değiştirir. (2.6)-(2.9)'daki diğer koşullar, yeni koordinatlar için de geçerlidir.

(2.13) denklem sisteminin çözümünü ele alalım. Bu amaçla  $x_1$  koordinatı için tanımlı üstel Fourier dönüşümü kullanılacaktır, yani,

$$f_F(s, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-isx_1} dx_1. \quad (2.15)$$

Bu dönüşümün sonucu olarak (2.13)'ten,

$$-s^2 \left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m)0} - \rho^{(m)}V^2\right) u_{1F}^{(m)} + \mu^{(m)} u_{1F,22}^{(m)} - is \left(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}\right) u_{2F,2}^{(m)} = 0$$

$$-s^2 \left(\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m)0} - \rho^{(m)}V^2\right) u_{2F}^{(m)} + \left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}\right) u_{2F,22}^{(m)} - is \left(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}\right) u_{1F,2}^{(m)} = 0 \quad (2.16)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki ifadede

$$\begin{aligned}
a_1^{(m)} &= \mu^{(m)}, b_1^{(m)} = -is(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}), c_1^{(m)} = -s^2(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} - \rho^{(m)}V^2) \\
a_2^{(m)} &= (\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}), b_2^{(m)} = -is(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}), c_2^{(m)} = -s^2(\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} - \rho^{(m)}V^2)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

işaretlemeleri kabul edildiğinde,(2.16) denklemleri

$$\begin{aligned}
a_1^{(m)} \frac{d^2 u_{1F}^{(m)}}{dx_2^2} + b_1^{(m)} \frac{du_{2F}^{(m)}}{dx_2} + c_1^{(m)} u_{1F}^{(m)} &= 0 \\
a_2^{(m)} \frac{d^2 u_{2F}^{(m)}}{dx_2^2} + b_2^{(m)} \frac{du_{1F}^{(m)}}{dx_2} + c_2^{(m)} u_{2F}^{(m)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir.  $D = \frac{d}{dx_2}$  ve  $D^2 = \frac{d^2}{dx_2^2}$  olacak şekilde düzenlenirse, (2.18)'in aşağıdaki

formu elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_1^{(m)} D^2 u_{1F}^{(m)} + b_1^{(m)} D u_{2F}^{(m)} + c_1^{(m)} u_{1F}^{(m)} &= 0 \\
a_2^{(m)} D^2 u_{2F}^{(m)} + b_2^{(m)} D u_{1F}^{(m)} + c_2^{(m)} u_{2F}^{(m)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Daha sade bir şekilde;

$$\begin{aligned}
(a_1^{(m)} D^2 + c_1^{(m)}) u_{1F}^{(m)} + b_1^{(m)} D u_{2F}^{(m)} &= 0 \\
b_2^{(m)} D u_{1F}^{(m)} + (a_2^{(m)} D^2 + c_2^{(m)}) u_{2F}^{(m)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada ki sistemin çözümü için operatörler yöntemine uygun gereken işlemler yapılacak olursa;

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_1^{(m)} D^2 + c_1^{(m)} & b_1^{(m)} D \\ b_2^{(m)} D & a_2^{(m)} D^2 + c_2^{(m)} \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

$$\Lambda = a_1^{(m)} a_2^{(m)} D^4 + (a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)}) D^2 + c_1^{(m)} c_2^{(m)} \tag{2.22}$$

$$\Lambda u_{1F}^{(m)} = 0, \quad \Lambda u_{2F}^{(m)} = 0; \tag{2.23}$$

bağıntıları yazılır. (2. 21)-(2. 23)'deki eşitliklerden yararlanılarak

$$a_1^{(m)} a_2^{(m)} r^4 + \left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) r^2 + c_1^{(m)} c_2^{(m)} = 0 \quad (2.24)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $r^2 = q$  dönüşümü yapıldığında (2.24);

$$a_1^{(m)} a_2^{(m)} q^2 + \left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) q + c_1^{(m)} c_2^{(m)} = 0 \quad (2.25)$$

formuna dönüşür, buradan  $q_1$ ,  $q_2$  bulunur.

$$\begin{aligned} r^2 &= q_1 & , & & r^2 &= q_2 \\ r_{1,2} &= \mp \sqrt{q_1} & , & & r_{3,4} &= \mp \sqrt{q_2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26) yardımıyla aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$u_{1F}^{(m)} = \alpha_1^{(m)} e^{r_1^{(m)} x_2} + \alpha_2^{(m)} e^{r_2^{(m)} x_2} + \alpha_3^{(m)} e^{r_3^{(m)} x_2} + \alpha_4^{(m)} e^{r_4^{(m)} x_2} \quad (2.27)$$

Burada  $\alpha_1^{(m)}(s), \alpha_2^{(m)}(s), \alpha_3^{(m)}(s)$  ve  $\alpha_4^{(m)}(s)$  bilinmeyen ve Fourier integral dönüşüm parametresi  $s$ 'den bağımlı katsayılarıdır. (2.26)'da ki eşitlikler yardımıyla (2.27);

$$u_{1F}^{(m)} = \alpha_1^{(m)} e^{-\sqrt{q_1^{(m)}} x_2} + \alpha_2^{(m)} e^{\sqrt{q_1^{(m)}} x_2} + \alpha_3^{(m)} e^{-\sqrt{q_2^{(m)}} x_2} + \alpha_4^{(m)} e^{\sqrt{q_2^{(m)}} x_2} \quad (2.28)$$

şeklinde yazılır.  $q_1$ ,  $q_2$  için (2.25) denkleminde faydalanarak;

$$q_{1,2}^{(m)} = \frac{-\left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) \mp \sqrt{\left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right)^2 - 4 a_1^{(m)} a_2^{(m)} c_1^{(m)} c_2^{(m)}}}{2 a_1^{(m)} a_2^{(m)}} \quad (2.29)$$

eşitliği yazılır. (2.20)'de ki bağıntıdan faydalanarak  $u_{2F}^{(m)}$  hesaplanır.

$$\begin{aligned} u_{2F}^{(m)} &= -\frac{1}{b_1} \left[ \left( -\frac{a_1^{(m)} q_1^{(m)} \alpha_1^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} - \frac{c_1^{(m)} \alpha_1^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} \right) e^{-\sqrt{q_1^{(m)}} x_2} + \left( \frac{a_1^{(m)} q_1^{(m)} \alpha_2^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} + \frac{c_1^{(m)} \alpha_2^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} \right) e^{\sqrt{q_1^{(m)}} x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{a_1^{(m)} q_2^{(m)} \alpha_3^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} - \frac{c_1^{(m)} \alpha_3^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} \right) e^{-\sqrt{q_2^{(m)}} x_2} + \left( \frac{a_1^{(m)} q_2^{(m)} \alpha_4^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} + \frac{c_1^{(m)} \alpha_4^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} \right) e^{\sqrt{q_2^{(m)}} x_2} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

(2.4), (2.5) ve (2.16) ifadelerinden yararlanarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\sigma_{12F}^{(m)} = \mu^{(m)} \left( u_{1F,2}^{(m)} - i s u_{2F}^{(m)} \right) \quad (2.31)$$

$$\sigma_{22F}^{(m)} = -i s \lambda^{(m)} u_{1F}^{(m)} + \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right) u_{2F,2}^{(m)} \quad (2.32)$$

$m=1$  (örtük plaka) için elde edilen bağıntılar düzenlenecek olursa, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$u_{1F}^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \quad (2.33)$$

$$u_{2F}^{(1)} = \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} - \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} - \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (2.34)$$

$$\sigma_{12F}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) i s + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) i s + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{11F}^{(1)} = - \left[ i s \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) + \lambda^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} \right) \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \left[ i s \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) + \lambda^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} \right) \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (2.36)$$

$$\sigma_{22F}^{(1)} = - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + i s \lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + i s \lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (2.37)$$

$m=2$  (yarı düzlem) için elde edilen bağıntılar düzenlenecek olursa, (2. 9) koşuluna göre  $\alpha_3^{(2)} = \alpha_4^{(2)} = 0$  olmalıdır ve aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$u_{1F}^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}x_2} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}x_2} \quad (2.38)$$

$$u_{2F}^{(2)} = \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}x_2} + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}x_2} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12F}^{(2)} = & -\mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}x_2} \\ & - \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}x_2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\sigma_{11F}^{(2)} = - \left[ is(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) + \lambda^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} \right) \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}x_2} + \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}}x_2} \right) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22F}^{(2)} = & - \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}x_2} \\ & - \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}x_2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

bağıntıları elde edilir. (2.33)-(2.42) ifadelerinden yararlanarak (2.7)'deki ideal temas koşullarını aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} 1. & - \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] (\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) - \\ & \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] (\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)}) = -p_0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$2. \quad \mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) + \mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] (-\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)}) = 0$$

$$3. \quad \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1^{(1)}}} \right) (\alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} - \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h}) + \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2^{(1)}}} \right) (\alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} - \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h}) -$$

$$\left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h} - \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h} = 0$$

$$\begin{aligned}
4. & - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1}h} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1}h} \right) - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2}h} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2}h} \right) = \\
& - \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1}h} - \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2}h} \\
5. & \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h} + \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h} = \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h} \\
6. & \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right) \left( -\alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h} \right) + \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right) \left( -\alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h} \right) + \\
& \mu^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h} + \mu^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h} = 0
\end{aligned}$$

(2. 8)'de verilen ideal olmayan temas koşullarında da elde edilen bağıntılar yerlerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}
1. & - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) - \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = -p_0 \tag{2. 44} \\
2. & \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1 \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \\
& \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1 \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = 0 \\
3. & \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1 \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} \right) + \\
& \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1 \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & -\mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h} \\
& -\mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h} = 0 \\
5. \quad & \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h} - \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h} \right) + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h} - \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h} \right) = \\
& \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h} + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h} \\
6. \quad & \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h} \right) + \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h} \right) = \\
& \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h} + \mu^{(1)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Doğrusal şerit yüklemesi durumu için ideal temas koşulları göz önüne alındığında;

$$\begin{aligned}
1. \quad & - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) - \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = - \frac{p \operatorname{Sinsa}}{a \quad s} \tag{2.45} \\
2. \quad & \mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = 0 \\
3. \quad & \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h} - \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h} \right) + \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h} - \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h} \right) - \\
& \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} h} - \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} h} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}h} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}h}} \right) - \\
4. & \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}h} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}h}} \right) = \\
& - \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}h} - \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}h}} \\
5. & \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}h} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}h} + \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}h} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}h} = \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}h} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}h}} \\
6. & \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right) \left( -\alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}h} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}h}} \right) + \\
& \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right) \left( -\alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}h} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}h}} \right) + \\
& \mu^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}h} + \mu^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}h} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Doğrusal şerit yüklemesi durumunda ideal olmayan temas koşulları için aşağıdaki eşitlikler kullanılır.

$$\begin{aligned}
1. & - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \\
& - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = -\frac{p}{a} \frac{\text{Sinsa}}{s} \tag{2.46} \\
2. & \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \\
& \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_2^{(1)}} + \frac{c_2^{(1)}}{b_2^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = 0 \\
3. & \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}h} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}h}} \right) + \\
& \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_2^{(1)}} + \frac{c_2^{(1)}}{b_2^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}h} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}h}} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & -\mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h} - \\
& \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_2^{(2)}} + \frac{c_2^{(2)}}{b_2^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h} = 0 \\
5. \quad & \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h} - \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h} \right) + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_2^{(1)}} + \frac{c_2^{(1)}}{b_2^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h} - \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h} \right) = \\
& \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h} + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_2^{(2)}} + \frac{c_2^{(2)}}{b_2^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h} \\
6. \quad & \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h} \right) + \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_2^{(1)}}{b_2^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h} \right) = \\
& \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h} + \mu^{(1)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_2^{(2)}}{b_2^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h}
\end{aligned}$$

Elde edilen denklem sistemlerinin çözümleriyle, bilinmeyen  $\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s), \alpha_1^{(2)}(s), \alpha_2^{(2)}(s)$  katsayıları bulunur. Bu katsayılar  $u_{iF}^{(m)}$  ve  $\sigma_{ijF}^{(m)}$  Fourier dönüşümlerinin ifadelerinde yerine yazılarak,  $u_{iF}^{(m)}$ ,  $\sigma_{ijF}^{(m)}$ 'lerin analitik ifadeleri belirlenmiş olur. Daha sonra bu ifadelerin ters (invers) Fourier dönüşümlerinin elde edilmesi işlemlerine geçilir. Bu işlemlerin analitik yapılmasının imkansız olduğu açıktır. Bu nedenden dolayı ters dönüşümler sayısal hesaplanmak zorundadır. Şimdi bu hesaplamaların yapılmasına imkan sağlayan algoritmanın açıklamasını ele alalım.

### 2.3 Hesaplama Algoritması

Aranan büyüklüklerin sayısal değerlerinin elde edilmesi ters Fourier dönüşümüne karşı gelen

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(s, x_2) e^{isx_1} ds \quad (2.47)$$

improper integralinin hesaplanmasına indirgenir. Fiziksel ve geometrik simetrisler dikkate alınarak (2.47) integrali,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f_F(s, x_2) \cos(sx_1) ds, \quad u_{2F}^{(m)}, \sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{11}^{(m)}, \varepsilon_{22}^{(m)}, \varepsilon_{11}^{(m)} \text{ için}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f_F(s, x_2) \sin(sx_1) ds, \quad u_{1F}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}, \varepsilon_{12}^{(m)} \text{ için} \quad (2.48)$$

integrallerine dönüştürülür. Çözüm sırasında kullanılacak nümerik yöntem için improper integraller aşağıdaki belirli integrallerle yer değiştirir.

$$\int_0^{\infty} (\cdot) ds \approx \int_0^{S_*} (\cdot) ds \quad (2.49)$$

olarak kabul edilir. Burada ki  $S_*$  değeri integrallerin sayısal yakınsama kriterinden hesaplanır.

Nümerik hesaplamalar göstermiştir ki, genelde problem parametrelerinin belirli değerlerinde her bir  $V$  hızı için,  $u_{iF}^{(m)}, \sigma_{ijF}^{(m)}$  fonksiyonları  $sh$  'a bağlı olarak tekil noktalara sahiptir. Bilinmeyen  $\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s), \alpha_1^{(2)}(s), \alpha_2^{(2)}(s)$  ifadeleri, (2. 43), (2. 44), (2. 45) ve (2. 46)'dan cebirsel işlemler yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} (\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s), \alpha_1^{(2)}(s), \alpha_2^{(2)}(s)) &= \frac{1}{\det \|A_{nm}(s)\|} \left( \det \|\beta_{nm}^{\alpha_1^{(1)}(s)}(s)\|, \dots, \right. \\ &\left. \det \|\beta_{nm}^{\alpha_4^{(1)}(s)}(s)\|, \det \|\beta_{nm}^{\alpha_1^{(2)}(s)}(s)\|, \det \|\beta_{nm}^{\alpha_2^{(2)}(s)}(s)\| \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$A_{nm}(s)$  'lerin ifadeleri ideal ve ideal olmayan temas koşulları için sırasıyla Ek 1 ve Ek 2'de verilmektedir. Burada denklem  $s$  'e bağlıdır ve cebirsel denklem sistemindeki bilinmeyenlerin katsayıları  $A_{nm}(s)$  'tir. (2. 50)' deki  $\det \|\beta_{nm}^{\alpha_1^{(1)}(s)}(s)\|, \dots, \det \|\beta_{nm}^{\alpha_4^{(1)}(s)}(s)\|, \det \|\beta_{nm}^{\alpha_1^{(2)}(s)}(s)\|, \det \|\beta_{nm}^{\alpha_2^{(2)}(s)}(s)\|$  matrisleri, sırasıyla  $\|A_{nm}(s)\|$  matrisinden  $\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s), \alpha_1^{(2)}(s), \alpha_2^{(2)}(s)$  bilinmeyenlerine karşılık gelen kolonların (2. 43), (2. 44), (2. 45), (2. 46) ifadelerinin sağ tarafları ile yer değiştirmesinden elde edilir.

Açıktır ki, yukarıda bahsi geçen integral altı ifadelerin tekil noktaları

$$\det \|A_{nm}(s)\| = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.51)$$

denklemini sağlayan  $s$ 'lerdir.

Sonuç olarak, integre edilen değerlerin tekil noktaları, (2. 51) denkleminin kökleriyle çakışır. Açıkta ki bu köklerin mertebesi (bunu  $r$  ile gösterirsek)  $0 \leq r < 1$  durumu için, integralin hesaplanmasında bilinen algoritmalar kullanılabilir.  $r=1$  durumunda (2. 49) numaralı integral Cauchy'nin temel değer prensibi kullanılarak hesaplanabilir. Fakat  $r > 1$  durumunda integral hiçbir anlam ifade etmez ve bu duruma karşılık gelen hız 'kritik hız' olarak adlandırılır. Belirtilmelidir ki kritik hız altında rezonans tipli durum gerçekleşmektedir.

Bu tanıma göre kritik hız, (2.51) ifadesini sağlayan  $V = V(sh)$  fonksiyonunun yerel minimum (ya da maksimum) noktasına karşı gelmektedir. Plakayla kaplı malzemelerde ki hareketli yük problemlerinde sesten yavaş durum (2. 2) için önemli sorulardan biri  $v_{cr}$  ile gösterilen kritik hızın hesaplanması ve problem parametrelerinin bu hız değerleri üzerindeki etkisinin incelenmesidir.

#### 2.4 Tekil Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

$$v = \frac{V}{c_2^{(1)}}, \quad v_{12} = v \frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}, \quad e = \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}, \quad \eta_1 = \frac{\sigma_{11}^{(1)0}}{E^{(1)}}, \quad \eta_2 = \frac{\sigma_{11}^{(2)0}}{E^{(2)}}, \quad \text{notasyonları ve}$$

$\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$  olduğu kabul edilmiştir.  $E^{(m)}$  ve  $\nu^{(m)}$  ise sırasıyla  $m$ . materyalin Young modülü ve Poisson oranıdır. Öncelikle  $v_{12} = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  durumu ele alınarak, (2. 51) denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlarla oluşturulmuş  $v = v(sh)$  grafikleri analiz edilmiştir. Belirtilmelidir ki, burada yer verilmeyen  $e < 1$  durumunda elde edilen  $v = v(sh)$  grafiklerinde görülmüştür ki  $dv/d(sh) = 0$  için minimum yoktur. Yalnızca  $e > 1$  durumunda minimum ortaya çıkmaktadır. Şekil 2. 3, çeşitli  $e$  değerleri için  $v = v(sh)$  ilişkisini gösteren grafikler verilmektedir. Bu grafiklerde minimumlar açıkça görülmektedir. Burada düz (kesikli) çizgiler, ideal (ideal olmayan) temas koşulları için bulunan sayısal sonuçları göstermektedir. Bu grafikten anlaşılacağı gibi  $v_{cr}$  değeri  $e$ 'nin artmasıyla azalmaktadır.

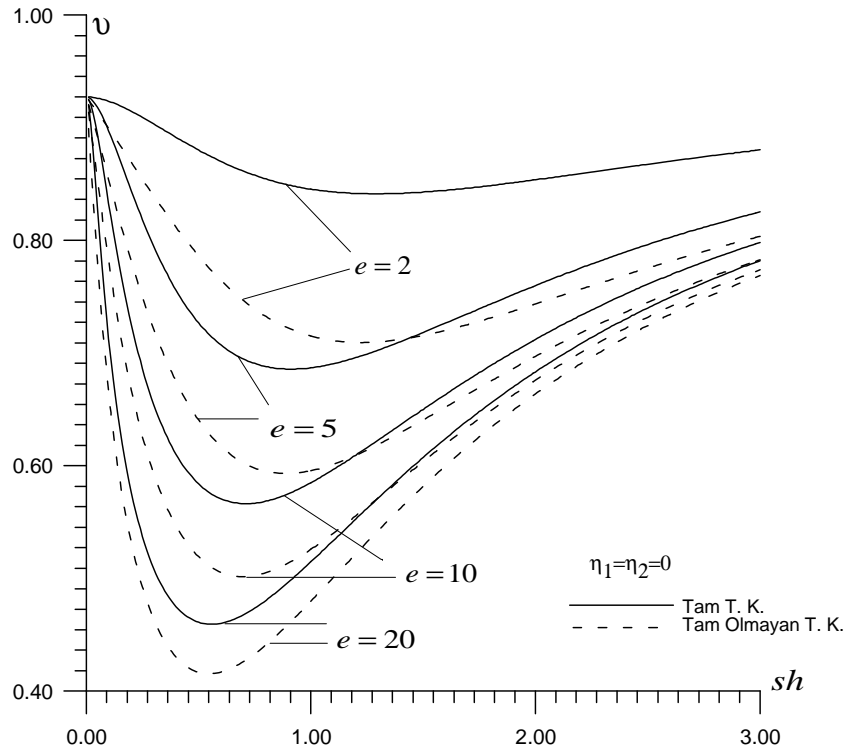
Plaka ve yarı düzlemde ki ön gerilmenin  $v_{cr}$  değerine etkisi ( $\eta_1$  ve  $\eta_2$  parametrelerinin etkisi). Tablo 2. 1, 2. 2 ve 2. 3'te verilmiştir. Bu tablolarda sayısal sonuçlara bakıldığında plaka ve yarı düzleme etki eden ön gerilme (çekme) değeri arttıkça  $v_{cr}$  değeri de artmaktadır. Bununla beraber ön gerilme (basınç) değerleri arttıkça  $v_{cr}$  değeri de azalmaktadır.

$v_{12} = \sqrt{0.5e}$  için,  $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0.5$  durumunu ele alırsak, öncelikle bu durumun Babich v.d. (1986)'da incelendiğini belirtmek gerekir. Yapılan incelemede  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  durumu için elde edilen sonuçların bu çalışmada ki sonuçlara uyması gerekmektedir. Tablo 2. 4'te çeşitli  $e$  değerleri için verilen sonuçlar, kullanılan nümerik yaklaşımın ve hazırlanan programın doğruluğunu kanıtlamaktadır.

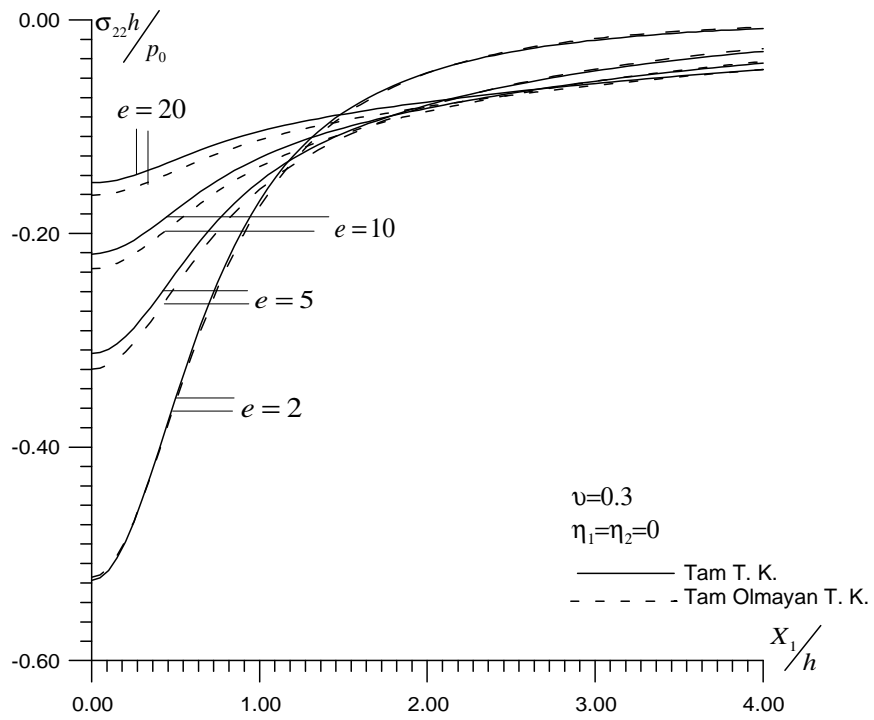
Tablo 2. 5, 2. 6 ve 2. 7'de  $v_{12} = \sqrt{0.5e}$  durumun için, ön gerilmenin  $v_{cr}$  değerine etkisi verilmektedir. Bu tablolardan  $\eta_1$  ve  $\eta_2$ 'nin,  $v_{cr}$  üzerindeki etkisinin,  $v_{12}=1$  durumundaki etkiyle aynı olduğu anlaşılmaktadır.

$\sigma_{22}(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(x_1, -h) = \sigma_{22}^{(2)}(x_1, -h)$  ifadesinde,  $(0, v_{cr})$  aralığında ve  $|\sigma_{22}| \rightarrow \infty, v \rightarrow v_{cr}$  için  $v$ 'nin artmasıyla  $\sigma_{22}(x_1)$ 'in kesin değerlerinin de monoton olarak arttığını belirtmek gerekir.  $\sigma_{22}(x_1)$ 'in  $x_1$ 'e bağlı kesin maksimumu,  $x_1/h = 0.0$ 'da meydana gelir.

$v_{12} = \sqrt{0.5e}$  durumunda,  $x_1/h$ 'a bağlı  $\sigma_{22}(x_1)$  yayılımına ait bazı örnekleri ele alalım. Şekil 2. 4 te verilen çeşitli  $e$  değerleri için  $\eta_1 = \eta_2 = 0.0$  durumunda elde edilen sonuçlar yer almaktadır. Burada düz(kesikli) çizgi ideal (ideal olmayan) temas koşullarını göstermektedir. Burada  $e$  değerlerinin artmasıyla  $|\sigma_{22}|$  değerlerinin azaldığı görülmektedir. İdeal olmayan temas koşulları için elde edilen  $|\sigma_{22}|$  değerlerinin, aynı parametrelerde elde edilen temas koşullarındaki değerlerden daha büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 2. 3  $\bar{V} (=V/C_2^{(1)})$  ve  $sh$  arasındaki bağımlılık türleri



Şekil 2. 4 Farklı  $e$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi

Tablo 2. 1  $\eta_2 = 0$  ve  $v_{12} = 1$  durumunda farklı  $\eta_1$  değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri

$e \backslash \eta_1$	0	0.005	0.01	0.03
2	$\frac{0.8414}{0.7093}$	$\frac{0.8468}{0.7154}$	$\frac{0.8521}{0.7214}$	$\frac{0.8723}{0.7442}$
10	$\frac{0.5664}{0.5016}$	$\frac{0.5764}{0.5126}$	$\frac{0.5863}{0.5233}$	$\frac{0.6240}{0.5640}$

Tablo 2. 2  $\eta_1 = 0$  ve  $v_{12} = 1$  durumunda farklı  $\eta_2$  değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri

$e \backslash \eta_2$	0	0.005	0.01	0.03
2	$\frac{0.8414}{0.7093}$	$\frac{0.8437}{0.7123}$	$\frac{0.8454}{0.7153}$	$\frac{0.8540}{0.7266}$
10	$\frac{0.5664}{0.5016}$	$\frac{0.5677}{0.5034}$	$\frac{0.5690}{0.5052}$	$\frac{0.5741}{0.5121}$

Tablo 2. 3  $\eta_1 = 0$  ve  $v_{12} = 1$  durumunda farklı  $\eta_2$  basınç değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri

$e \backslash \eta_2$	0	-0.005	-0.01	-0.03
2	$\frac{0.8414}{0.7093}$	$\frac{0.8391}{0.7062}$	$\frac{0.8367}{0.7031}$	$\frac{0.8263}{0.6898}$
10	$\frac{0.5664}{0.5016}$	$\frac{0.5650}{0.4998}$	$\frac{0.5637}{0.4979}$	$\frac{0.5580}{0.4900}$

Tablo 2. 4  $v_{12} = \sqrt{0.5e}$  durumunda  $\eta_1=0, \eta_2 =0$  için ideal ve ideal olmayan temas koşullarında kritik hız değerleri ( $v_{cr}$ )

$e$	İdeal temas koşulları	İdeal olmayan temas koşulları
2	$\frac{0.841(\text{Bu çalışmada})}{0.839(\text{Babich vd}(1986))}$	$\frac{0.709(\text{Bu çalışmada})}{0.719(\text{Babich vd}(1986))}$
10	$\frac{0.428(\text{Bu çalışmada})}{0.427(\text{Babich vd}(1986))}$	$\frac{0.373(\text{Bu çalışmada})}{0.372(\text{Babich vd}(1986))}$

Tablo 2. 5  $\eta_1 =0$  ve  $v_{12} = \sqrt{0.5e}$  durumunda farklı  $\eta_2$  değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri

$e \backslash \eta_2$	0	0.005	0.01	0.03
2	$\frac{0.8414}{0.7093}$	$\frac{0.8437}{0.7123}$	$\frac{0.8454}{0.7153}$	$\frac{0.8541}{0.7266}$
10	$\frac{0.4284}{0.3730}$	$\frac{0.4307}{0.3754}$	$\frac{0.4329}{0.3777}$	$\frac{0.4415}{0.3868}$

Tablo 2. 6  $\eta_2 =0$  ve  $v_{12} = \sqrt{0.5e}$  durumunda farklı  $\eta_1$  değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas(alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri

$e \backslash \eta_1$	0	0.005	0.01	0.03
2	$\frac{0.8414}{0.7093}$	$\frac{0.8468}{0.7154}$	$\frac{0.8521}{0.7214}$	$\frac{0.8723}{0.7442}$
10	$\frac{0.4284}{0.3730}$	$\frac{0.4319}{0.3784}$	$\frac{0.4348}{0.3833}$	$\frac{0.4358}{0.3995}$

Tablo 2. 7  $\eta_1 = 0$  ve  $v_{12} = \sqrt{0.5e}$  durumunda farklı  $\eta_2$  basınç değerleri için ideal temas (üstteki sayı) ve ideal olmayan temas (alttaki sayı) koşullarında kritik hız değerleri

$e \backslash \eta_2$	0	-0.005	-0.01	-0.03
2	$\frac{0.8414}{0.7093}$	$\frac{0.8391}{0.7062}$	$\frac{0.8367}{0.7031}$	$\frac{0.8263}{0.6898}$
10	$\frac{0.4284}{0.3730}$	$\frac{0.4261}{0.3706}$	$\frac{0.4238}{0.3682}$	$\frac{0.4141}{0.3582}$

Bu bölümde ön gerilmeli tabaka ile örtülü ön gerilmeli yarı düzleme etki eden hareketli yükün dinamiği parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ÜDETYT kullanılarak incelenmiştir. Örtük plakanın serbest yüzeyinde hareket eden doğrusal yükün hızının sabit olduğu kabul edilmiştir. İnceleme düzlem gerilme durumunda, sestem yavaş hız için ideal (2. 7) ve ideal olmayan (2. 8) temas koşulları olmak üzere iki temas koşulu göz önünde bulundurulmuş ve yapılmıştır. Algoritma hareketli yükün kritik hız değerlerinin hesaplanması için geliştirilmiştir.

Nümerik hesaplamalar göstermiştir ki; kritik hız yalnızca örtük plaka (yarı düzlem) Young modüllerinin  $e > 1$  ( $e = E^{(1)}/E^{(2)}$ ), olduğu durumda meydana gelmektedir. Diğer bir deyişle kritik hız ‘sert tabaka+yumuşak yarı düzlem’ durumunda meydana gelmektedir. Kritik hız değeri,  $e$  değeri arttıkça azalmaktadır. Örtük plaka ve yarı düzlemdeki ön gerilme değeri arttıkça kritik hız değeri de artmaktadır. Yarı düzlemde ki ön basınç değeri arttıkça kritik hız değeri azalmaktadır ve ideal temas koşulları için elde edilen kritik hız ideal olmayan temas koşulları için elde edilen kritik hızdan daha büyüktür.

Ayrıca örtük plaka ve yarı düzlem arasındaki ara yüzeyde bulunan gerilme dağılımı da nümerik hesaplarda göz önünde bulundurulmuştur.

Bu sonuçlar bahsedilen sistemdeki bileşenlerin ön gerilmemiş olduğu durumda doğrusal elastodinamik teorisi için de önemlidir.

Bu incelemenin en önemli özelliği ön gerilmeli örtük tabakadaki hareket denklemlerinin ÜDETYT kullanılarak tanımlanmasıdır.

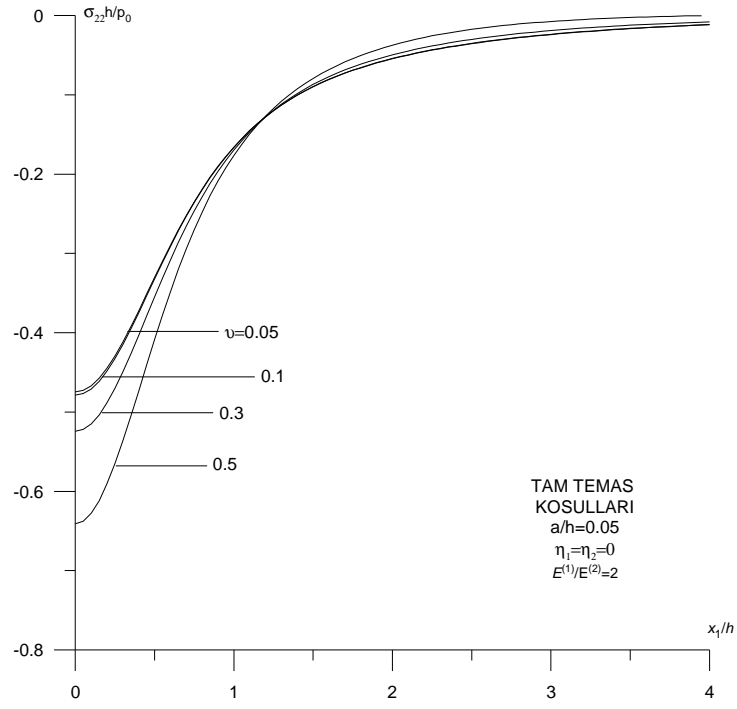
## 2.5 Yayılı Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

Açıktır ki yayılı yük durumunda da kritik hız değerleri bir önceki durumda elde edilen kritik hız değerleriyle çakışacaktır. Bu nedenden dolayı bu alt bölümde kritik hız araştırmasına gerek kalmamıştır.

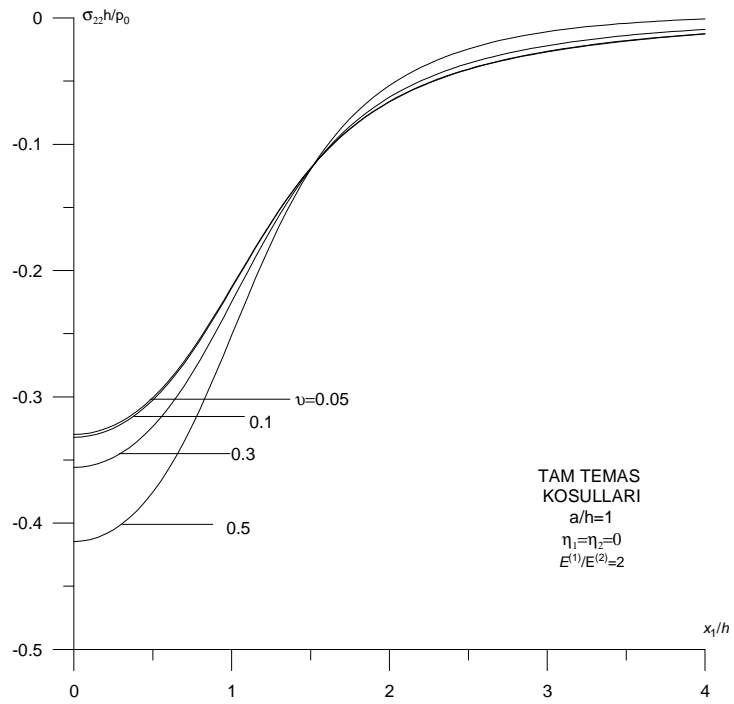
Fiziksel ve mekaniksel öngörülere göre  $a$  (şerit uzunluğu) büyüdükçe  $\sigma_{22}$  değerleri küçülmelidir. Bu öngörünün kanıtlanması için aşağıdaki sayısal sonuçları inceleyelim.

Şekil 2. 5, 2. 6 ve 2. 7  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$  durumu, Şekil 2. 8, 2. 9 ve 2. 10  $E^{(1)}/E^{(2)} = 5$  durumu, Şekil 2. 11, 2. 12 ve 2. 13'de  $E^{(1)}/E^{(2)} = 10$  durumunun farklı hızlarda sırasıyla  $a/h = 0.005, 1.0, 3.0$  değerlerinde  $\eta_1 = \eta_2 = 0.0$  için  $\sigma_{22}h/p_0$ 'ın  $x_1/h$ 'a göre yayılım grafikleri verilmektedir.

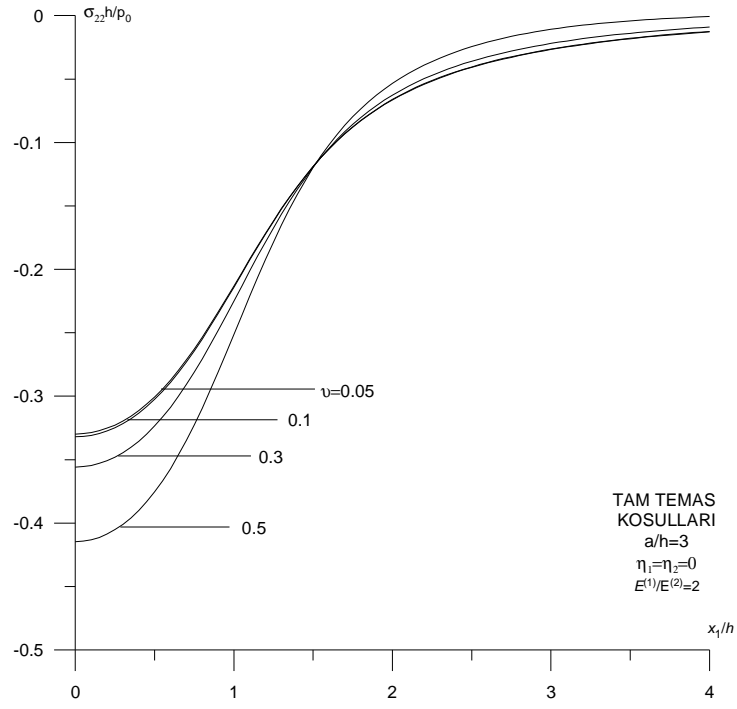
Bu sonuçlar karşılaştırıldığında yukarıda söylenen ön görünün kanıtlandığı görülmektedir. Ayrıca bu sonuçların  $a/h \rightarrow 0$  koşulunda, bir önceki alt bölümde elde edilen sonuçlarla yakınlaştığı görülmektedir. Bu durum tekrar elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu ve mekaniksel görüşlere uygun olduğunu göstermektedir.



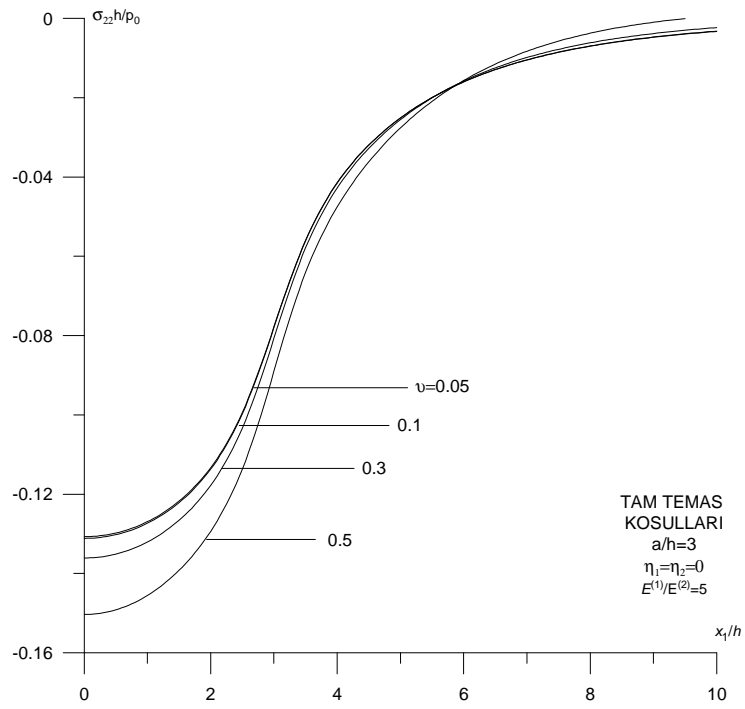
Şekil 2.5  $a/h = 0.05$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



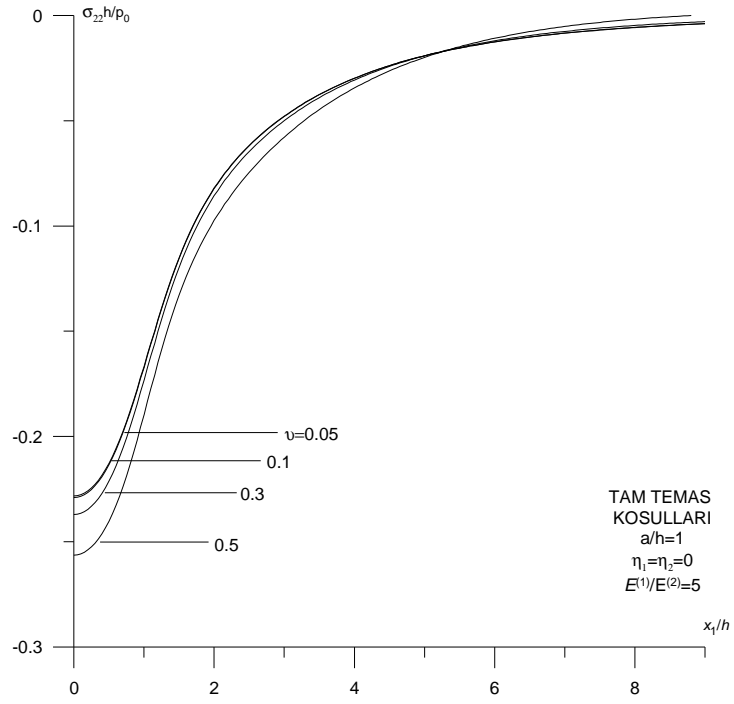
Şekil 2.6  $a/h = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



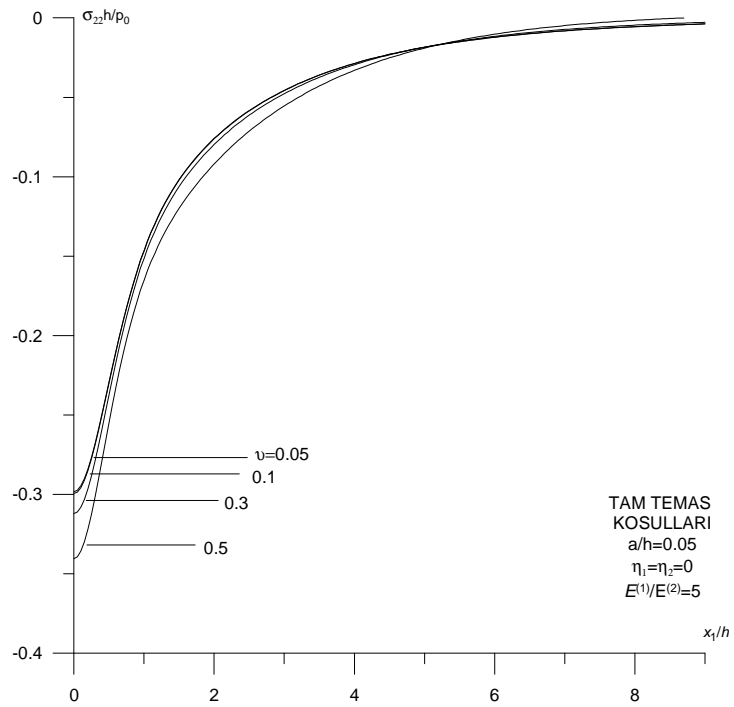
Şekil 2.7  $a/h=3$ ,  $\eta_1=\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



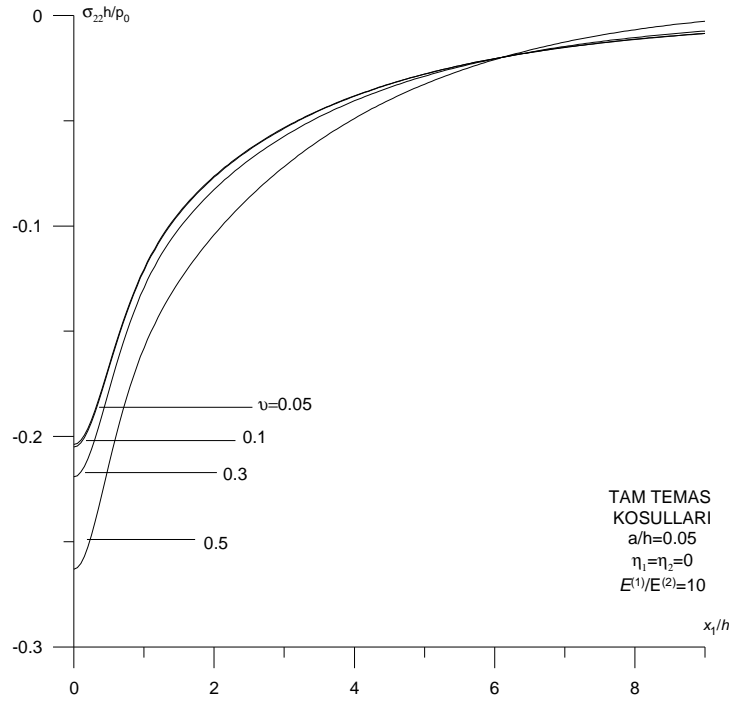
Şekil 2.8  $a/h=3$ ,  $\eta_1=\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=5$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



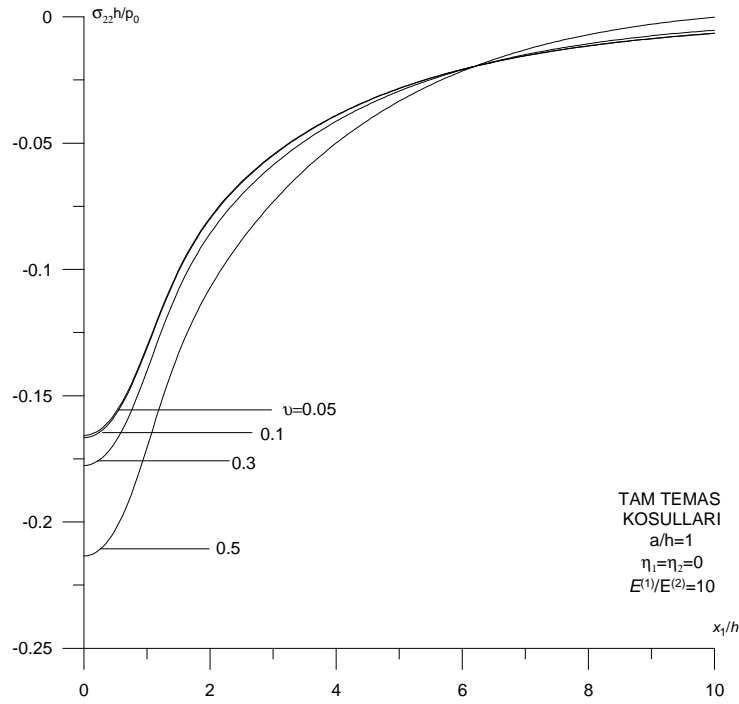
Şekil 2. 9  $a/h=1$ ,  $\eta_1=\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=5$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



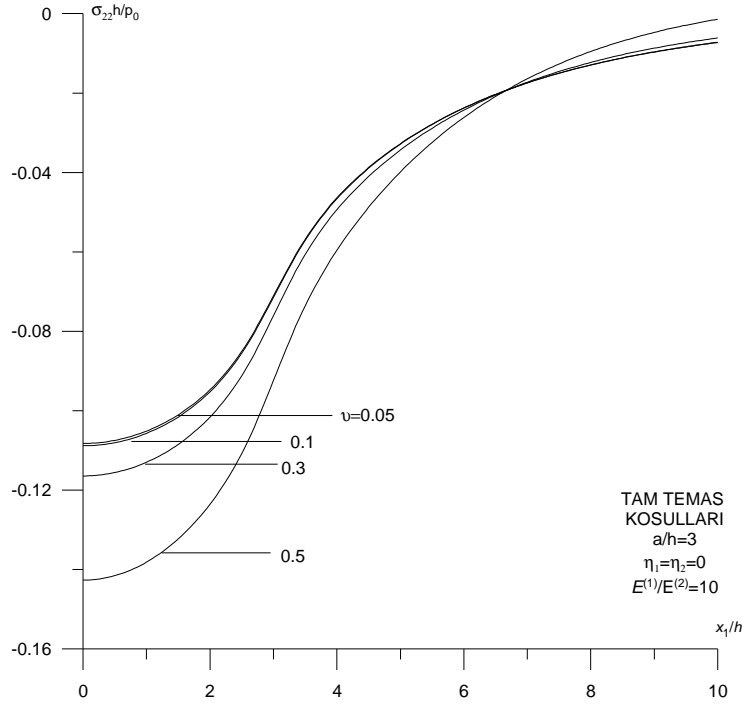
Şekil 2. 10  $a/h=0.05$ ,  $\eta_1=\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=5$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



Şekil 2. 11  $a/h=0.05$ ,  $\eta_1=\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=10$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



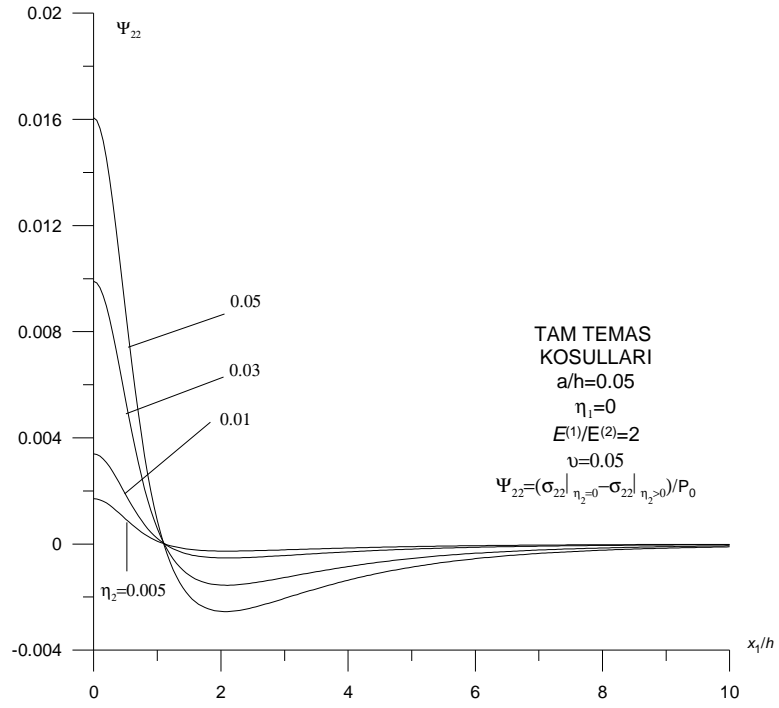
Şekil 2. 12  $a/h=1$ ,  $\eta_1=\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=10$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



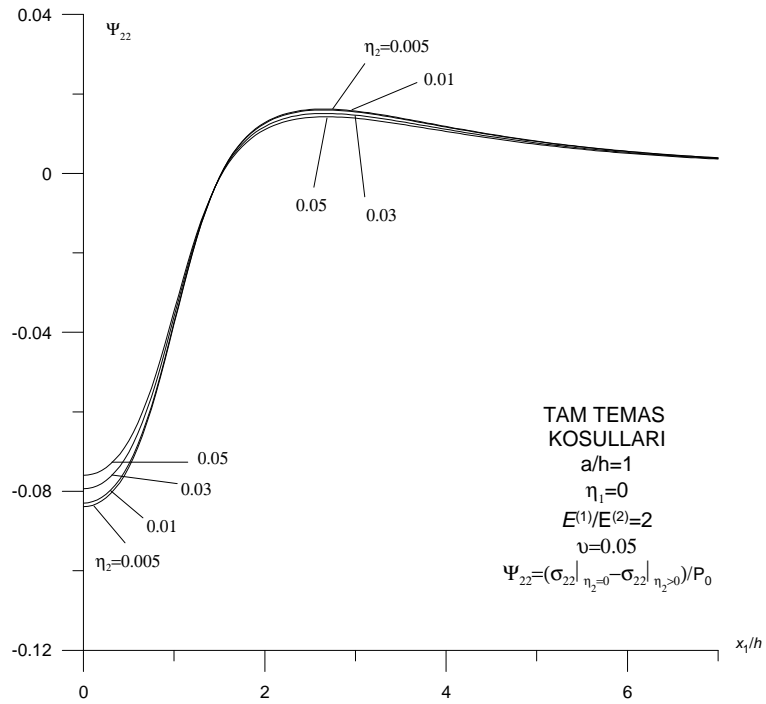
Şekil 2. 13  $a/h = 3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)} = 10$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi

Şimdi sistemi oluşturan tabaka ve yarı düzlemdeki ön gerilmelerin söz konusu gerilme yayılımına etkisini gösteren sayısal sonuçları ele alalım. Bu sonuçlar Şekil 2. 14, 2. 15, 2. 16, 2. 17, 2. 18 ve 2. 19'da verilmiştir.

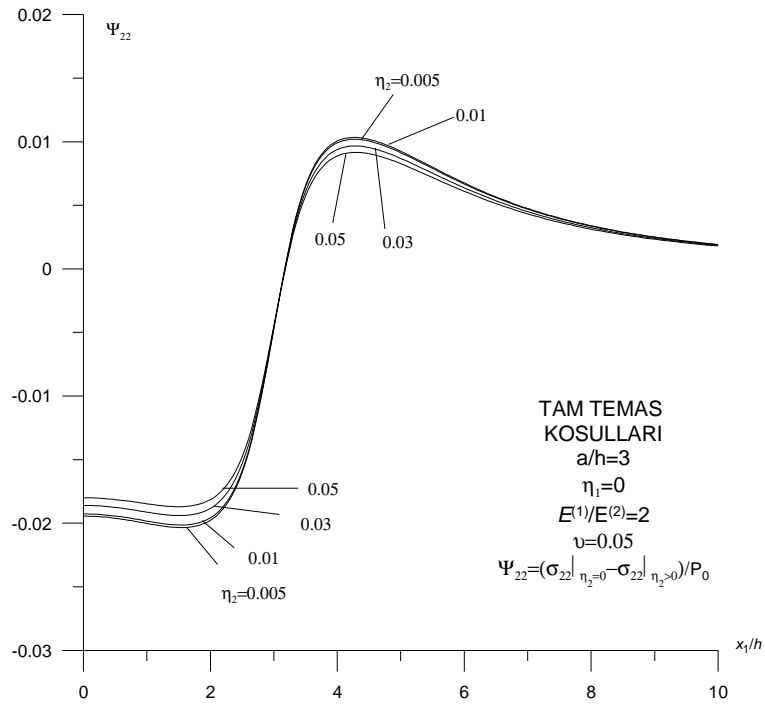
Görüldüğü üzere  $a/h$  değerlerinin değişimi ön gerilmelerin etkisini sadece sayısal açıdan değil nicelik açısından da değiştirmektedir.



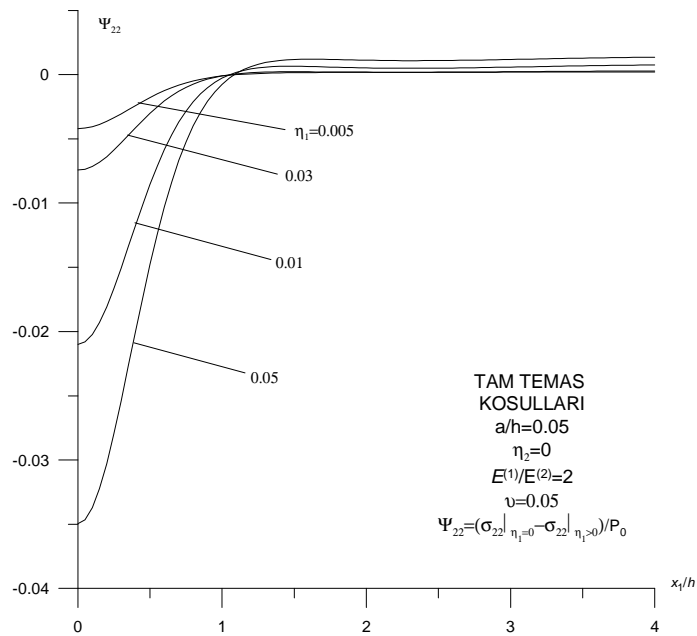
Şekil 2. 14  $a/h=0.05$ ,  $\eta_1=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_2$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



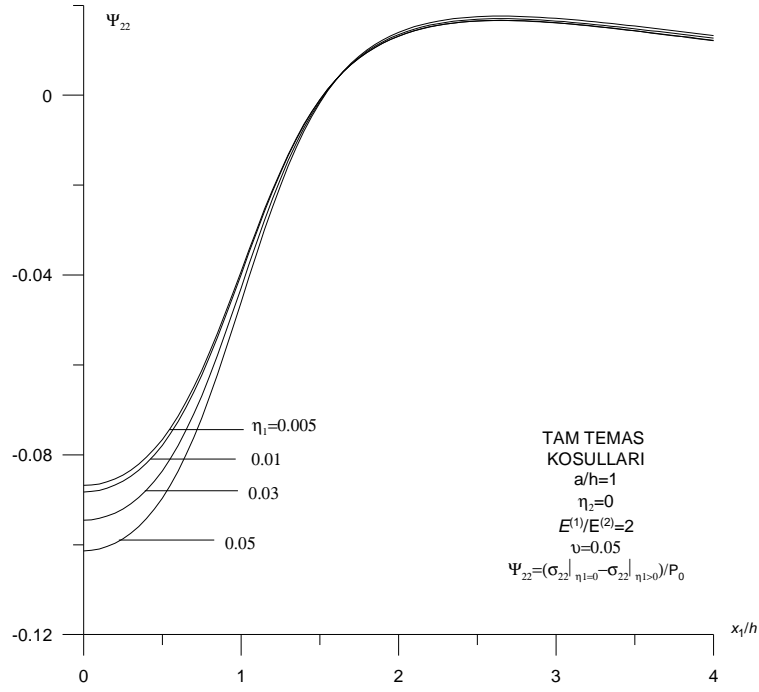
Şekil 2. 15  $a/h=1$ ,  $\eta_1=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_2$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



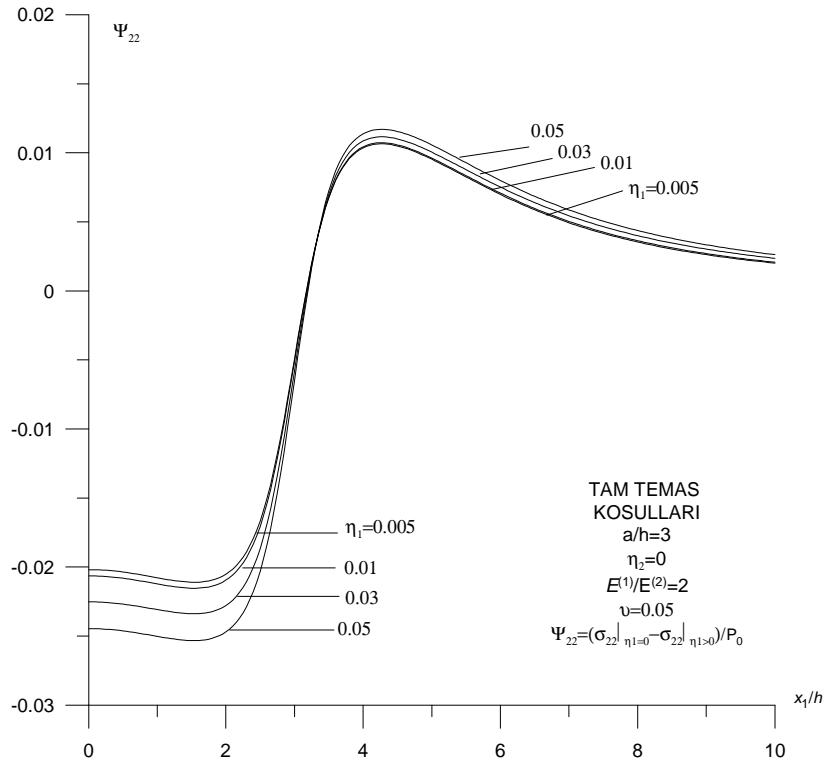
Şekil 2. 16  $a/h=3$ ,  $\eta_1=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_2$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



Şekil 2. 17  $a/h=0.05$ ,  $\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_1$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



Şekil 2. 18  $a/h=1$ ,  $\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_1$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi

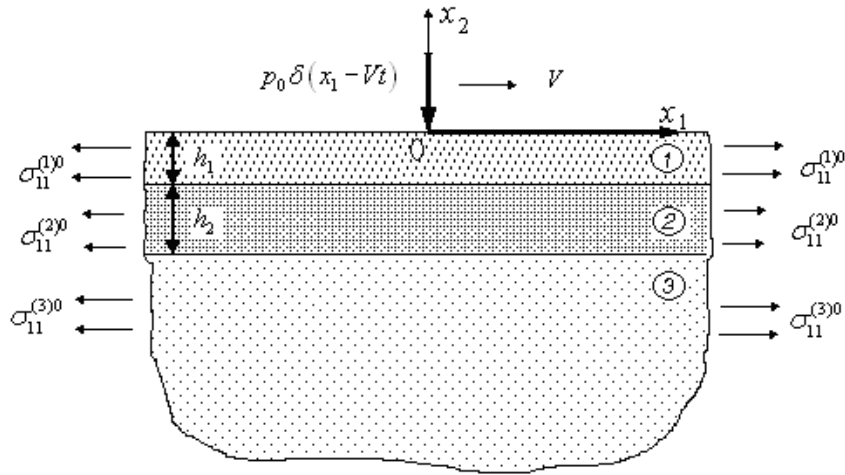


Şekil 2. 19  $a/h=3$ ,  $\eta_2=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_1$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi

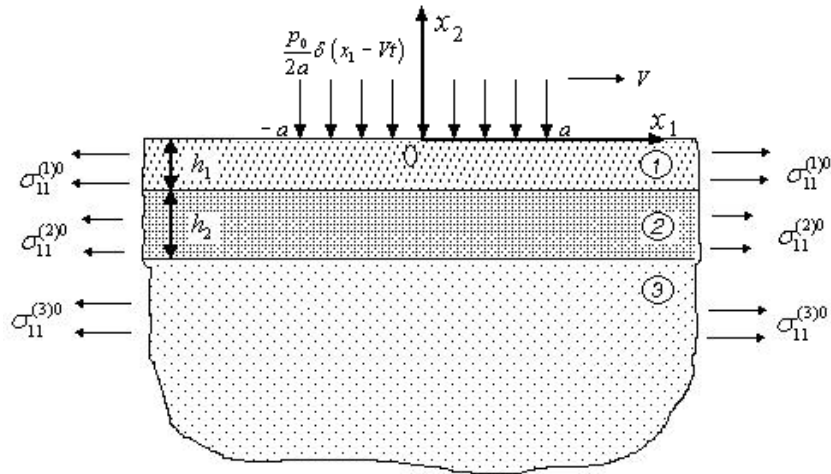
### 3. ÖN GERİLMELİ İKİ KATLI TABAKA İLE ÖN GERİLMELİ YARI DÜZLEM DEN OLUŞMUŞ SİSTEME ETKİ EDEN SABİT HIZLA HAREKET EDEN DOĞRUSAL TEKİL VE DOĞRUSAL ŞERİT YÜKÜN DİNAMİĞİ

Bu bölümde, bir önceki bölümde incelenen problemden farklı olarak indis (2) ile gösterilen ikinci bir plakanın varlığı söz konusudur. Önceki bölümde uygulanan çözüm yöntemlerinin aynısı bu bölüm için de geçerlidir. Okuma kolaylığı açısından önceki bölümde verilen ana denklemler burada da verilecek, çözüm yöntemi ayrıntılı olarak aynı şekilde ifade edilecektir.

#### 3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu



Şekil 3. 1 Ön gerilmeli iki katlı plakayla kaplı, ön gerilmeli yarı düzlemin geometrisi ve yükleme durumu



Şekil 3. 2 Ön gerilmeli iki katlı plakayla kaplı, ön gerilmeli yarı düzlemin geometrisi ve yükleme durumu

Açıklamaların kolaylığı için problemin formülasyonu, ön gerilmeli iki katlı tabaka ve ön gerilmeli yarı düzlemden oluşmuş sisteme etki eden doğrusal tekil kuvvetin dinamiğine ait problemin matematiksel formülasyonu olarak ele alınır, söz konusu sistemin şematik görünümü Şekil 3. 1'deki gibidir. Şeki 3.1'de gösterildiği gibi  $Ox_1x_2x_3$  koordinat takımında, iki katlı tabaka ve yarı düzlemi oluşturan parçacıkların konumu Lagrange koordinatlarıyla belirtilirse, üst plaka, ara plaka ve yarı düzlem sırasıyla  $\{-\infty < x_1 < +\infty, -h_1 < x_2 < 0, -\infty < x_3 < +\infty\}, \{-\infty < x_1 < +\infty, -(h_1 + h_2) < x_2 < h_1, -\infty < x_3 < +\infty\}$  ve  $\{-\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < -(h_1 + h_2), -\infty < x_3 < +\infty\}$  bölgelerini kapsar. Şekilden de anlaşılacağı gibi  $Ox_3$  eksenini şekil düzlemine dik yönde olduğu için görülmemektedir.

Örtük tabakalar ve yarı düzleme birleştirilmeden önce  $Ox_1$  eksenini yönünde sonsuzda uniform yayılı yük etki ettirilerek ön gerilmelerin oluşturulduğu, daha sonra örtük tabakalar ve yarı düzlemin birleştirildiği varsayılırsa, bu yüklemenin (ön gerilmeyi oluşturan yüklemeler) inceleme boyunca sürekli olarak etki ettiği kabul edilecektir. Matematiksel ifadeleri kolaylaştırmak için üst ve orta tabaka ile yarı düzleme ait olan gerilmeler, şekil değiştirmeler ve yer değiştirmeler sırasıyla üst (1), üst (2) ve üst (3) indeksleri ile ifade edilecektir. Bundan başka ön gerilmelere ait büyüklükler ek olarak üst  $(m)0$  indeksiyle belirlenecektir  $(m = 1,2,3)$ .

Örtük tabakalar ve yarı düzlem malzemelerinin yeteri derecede sert, homojen ve izotrop malzemeler olduğu ve ön yüklemelerden dolayı oluşan şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılarak ön gerilmeler Klasik Lineer Elastisite teorisi çerçevesinde belirlenecektir. Bilindiği üzere bu ve benzeri durumlarda ön gerilmeli ortamlarda ki dinamik olayların incelenmesinde ÜDEDT'nin ikinci mertebeye küçük şekil değiştirme teorisi uygulanmaktadır (Guz, 2004). Açık ki, söz konusu durumda ele alınan sistemde oluşan ön gerilmeler aşağıda ki biçimde belirlenir.

$$\sigma_{ij}^{(m)0} = const_m, m = 1,2,3, \sigma_{ij}^{(m)0} = 0 \text{ at } ij \neq 11. \quad (3.1)$$

Ayrıca bu durumda ön şekil değiştirmeler küçük olduğundan tabakalar ve yarı düzlemin doğal ve ön gerilmeli durumlarında ki konumlarının (koordinatları) aynı olduğu kabul edilecektir.

Yukarıda söylenenler çerçevesinde ele alınan sistemin üst örtük tabakasının serbest yüzeyine  $Ox_1$  eksenini yönünde sabit  $V$  hızıyla hareket eden doğrusal tekil  $P$  kuvveti etki etmektedir.  $V$  hızının;

$$V < \min\{c_2^{(1)}, c_2^{(2)}, c_2^{(3)}\}, \quad C_2^{(m)} = \sqrt{\mu^{(m)}/\rho^{(m)}}, \quad m=1,2,3. \quad (3.2)$$

koşulunu sağladığı varsayılmaktadır. (3. 2)'de  $C_2^{(m)}$ ,  $\mu^{(m)}$  ve  $\rho^{(m)}$  sırasıyla  $m$ . malzemedeki enine dalga hızını, kayma modülü ve malzeme yoğunluğunu göstermektedir. (3. 2) koşulunun bir diğer anlamı ise yükün hareket hızının sistemi oluşturan malzemelerdeki ses hızından küçük olmasıdır.

Bu hareketli yükten dolayı sistemin dinamiğinin ÜDEDT uygulanarak  $Ox_1x_2$  düzlemindeki düzlem şekil değiştirme durumunda incelenmesine getirilir. Bu incelemeler parçalı homojen cisim çerçevesinde yapılacaktır. Bu durumda hem örtük tabakanın kapsadığı alanda hemde yarı düzlemin kapsadığı alanda ÜDEDT'nin aşağıdaki hareket denklemleri sağlanmaktadır. İnceleme kolaylığı açısından bir önceki bölümde verilen temel denklemler burada tekrar verilmiştir.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(m)}}{\partial x_1} + \sigma_{11}^{(m)0} \frac{\partial^2 u_j^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_j^{(m)}}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

(3. 3)'te  $\sigma_{ij}^{(m)}$ ,  $u_j^{(m)}$  sırasıyla  $m$ . malzemedeki gerilme tansörü ve yer değiştirme vektörü bileşenlerini göstermektedir. Örtük tabakaların ve yarı düzlemin malzemeleri lineer ve elastik kabul edildiğinden, yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları genelleştirilmiş Hooke kanununa tabi tutularak aşağıdaki biçimde ele alınır.

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda^{(m)} \theta^{(m)} \delta_i^j + 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m)}, \quad (3.4)$$

Burada

$$\theta^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

dir. (3. 4) ve (3. 5)'te  $i, j=1,2; m=1,2,3$ ,  $\lambda^{(m)}$ ,  $\mu^{(m)}$  Lamé's sabitleridir.  $\varepsilon_{ij}^{(m)}$  ler şekil değiştirme tansörü bileşenlerini,  $\theta^{(m)}$  ise düzlem şekil değiştirme durumunda hacimsel şekil değiştirmeyi gösterir.

Yukarıda söylenenlerden görüldüğü gibi üst örtük tabakanın üst serbest yüzeyinde aşağıdaki sınır koşulları sağlanmaktadır.

$$\sigma_{12}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = -p\delta(x_1 - Vt) \quad (3.6)$$

Burada  $\delta(x)$ , Delta Dirac fonksiyonunu göstermektedir. Babich v. d. (1986, 1988, 2008a, b) araştırmalarında olduğu gibi üst örtük tabaka ile alt örtük tabaka arasında ve alt örtük tabaka ile yarı düzlem arasında iki tür temas koşullarının oluştuğu varsayılmıştır. Birinci tür temas koşulları ideal temas koşullardır ve bunlar

$$\begin{aligned} \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=-h_1} &= \sigma_{i2}^{(2)} \Big|_{x_2=-h_1}, \quad u_i^{(1)} \Big|_{x_2=-h_1} = u_i^{(2)} \Big|_{x_2=-h_1}, \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)} = \sigma_{i2}^{(2)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)}, \\ u_i^{(1)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)} &= u_i^{(2)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

biçiminde verilmektedir. İkinci tip temas koşulları ise ideal olmayan temas koşulları olarak adlandırılır ve

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=-h_1} &= \sigma_{22}^{(2)} \Big|_{x_2=-h_1}, \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_2=-h_1} = u_2^{(2)} \Big|_{x_2=-h_1}, \quad \sigma_{12}^{(1)} \Big|_{x_2=-h_1} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} \Big|_{x_2=-h_1} = 0, \\ \sigma_{22}^{(2)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)} &= \sigma_{22}^{(3)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)}, \quad u_2^{(2)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)} = u_2^{(3)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)}, \\ \sigma_{12}^{(2)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)} &= 0, \quad \sigma_{12}^{(3)} \Big|_{x_2=-(h_1+h_2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde verilir. Bunlardan başka yükün hareket hızı ses hızından yavaş olduğundan

$$\left| u_i^{(3)} \right|, \left| \sigma_{ij}^{(3)} \right| \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow -\infty \text{ için.} \quad (3.9)$$

sönüm koşullarının da sağlandığı varsayılacaktır. Verilenlerle problemin matematiksel formülasyonu tamamlanmış olur. Böylece ele alınan fiziksel olayın incelenmesi (3.3)-(3.5) denklem takımının, (3.6), (3.9) sınır koşulları ve (3.7) veya (3.8) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine (çözülmesine) indirgenmiştir. Belirtmelidir ki (3.3) denklemlerinde  $\sigma_{11}^{(m),0} = 0$ , ( $m = 1, 2, 3$ ) kabul edilirse incelenecek problemin klasik lineer elastodinamik teorisi çerçevesindeki (ön gerilmesiz durum için) matematiksel formülasyonu elde edilmiş olur.

### 3.2 Problemin Çözüm Yöntemi

Bir önceki bölümde de verildiği gibi, (3. 3)-(3. 5) denklemlerinden, yer değiştirmeler  $u_i^{(m)}$  cinsinden aşağıda verilen hareket denklemleri elde edilir.

$$\left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m)0}\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \mu^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_2^2} + \left(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2}, \quad (3. 10)$$

$$\left(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m)0}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} + \left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2}.$$

Yükle birlikte hareket eden koordinat sistemi dönüşümü, yani

$$x'_2 = x_2, \quad x'_1 = x_1 - Vt, \quad (3. 11)$$

dönüşümü kullanıldığında (3. 10) denklemleri

$$\left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 2 + \frac{\sigma_{11}^{(m)0}}{\mu^{(m)}} - \frac{V^2}{(c_2^{(m)})^2}\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 1\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (3. 12)$$

$$\left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 1\right) \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \frac{\sigma_{11}^{(m)0}}{\mu^{(m)}} - \frac{V^2}{(c_2^{(m)})^2}\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} + 2\right) \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} = 0,$$

formuna dönüşür. Bu durumda (3. 6)'daki ikinci sınır koşulu,

$$\sigma_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = P\delta(x_1). \quad (3. 13)$$

ifadesiyle yer değiştirir. (3. 6)-(3. 9)'daki diğer koşullar, yeni koordinatlar için de geçerlidir.

(3. 12) denklem sisteminin çözümünü ele alalım. Bu amaçla  $x_1$  koordinatı için tanımlı üstel Fourier dönüşümü kullanılacaktır.

$$f_F(s, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-isx_1} dx_1 \quad (3. 14)$$

Bu dönüşümün sonucu olarak (3. 12)'den,

$$\begin{aligned}
& -s^2 \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} - \rho^{(m)}V^2 \right) u_{1F}^{(m)} + \mu^{(m)} u_{1F,22}^{(m)} - is \left( \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} \right) u_{2F,2}^{(m)} = 0 \\
& -s^2 \left( \mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} - \rho^{(m)}V^2 \right) u_{2F}^{(m)} + \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right) u_{2F,22}^{(m)} - is \left( \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} \right) u_{1F,2}^{(m)} = 0, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki ifadede

$$\begin{aligned}
& a_1^{(m)} = \mu^{(m)}, b_1^{(m)} = -is \left( \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} \right), c_1^{(m)} = -s^2 \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} - \rho^{(m)}V^2 \right) \\
& a_2^{(m)} = \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right), b_2^{(m)} = -is \left( \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} \right), c_2^{(m)} = -s^2 \left( \mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} - \rho^{(m)}V^2 \right) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

işaretlemeleri kabul edildiğinde,

$$a_1^{(m)} \frac{d^2 u_{1F}^{(m)}}{dx_2^2} + b_1^{(m)} \frac{du_{2F}^{(m)}}{dx_2} + c_1^{(m)} u_{1F}^{(m)} = 0 \tag{3.17}$$

$$a_2^{(m)} \frac{d^2 u_{2F}^{(m)}}{dx_2^2} + b_2^{(m)} \frac{du_{1F}^{(m)}}{dx_2} + c_2^{(m)} u_{2F}^{(m)} = 0$$

şeklinde yazılabilir.  $D = \frac{d}{dx_2}$  ve  $D^2 = \frac{d^2}{dx_2^2}$  olacak şekilde düzenlenirse aşağıdaki form elde edilir.

$$\begin{aligned}
& a_1^{(m)} D^2 u_{1F}^{(m)} + b_1^{(m)} D u_{2F}^{(m)} + c_1^{(m)} u_{1F}^{(m)} = 0 \\
& a_2^{(m)} D^2 u_{2F}^{(m)} + b_2^{(m)} D u_{1F}^{(m)} + c_2^{(m)} u_{2F}^{(m)} = 0 \tag{3.18}
\end{aligned}$$

(3.18) daha sade bir şekilde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left( a_1^{(m)} D^2 + c_1^{(m)} \right) u_{1F}^{(m)} + b_1^{(m)} D u_{2F}^{(m)} = 0 \\
& b_2^{(m)} D u_{1F}^{(m)} + \left( a_2^{(m)} D^2 + c_2^{(m)} \right) u_{2F}^{(m)} = 0 \tag{3.19}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada ki sistemin çözümü için operatörler yöntemine uygun gereken işlemler yapılacak olursa;

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_1^{(m)} D^2 + c_1^{(m)} & b_1^{(m)} D \\ b_2^{(m)} D & a_2^{(m)} D^2 + c_2^{(m)} \end{vmatrix}, \tag{3.20}$$

$$\Lambda = a_1^{(m)} a_2^{(m)} D^4 + \left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) D^2 + c_1^{(m)} c_2^{(m)}, \quad (3.21)$$

$$\Lambda u_{1F}^{(m)} = 0, \quad \Lambda u_{2F}^{(m)} = 0 \quad (3.22)$$

bağıntıları yazılır. (3.20)-(3.22)'deki eşitliklerden yararlanarak

$$a_1^{(m)} a_2^{(m)} r^4 + \left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) r^2 + c_1^{(m)} c_2^{(m)} = 0 \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $r^2 = q$  dönüşümü yapılırsa (3.23);

$$a_1^{(m)} a_2^{(m)} q^2 + \left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) q + c_1^{(m)} c_2^{(m)} = 0 \quad (3.24)$$

formuna dönüşür, buradan  $q_1, q_2$  belirlenir.

$$\begin{aligned} r^2 &= q_1, & r^2 &= q_2 \\ r_{1,2} &= \mp \sqrt{q_1}, & r_{3,4} &= \mp \sqrt{q_2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Olduğuna göre aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$u_{2F}^{(m)} = \alpha_1^{(m)} e^{r_1^{(m)} x_2} + \alpha_2^{(m)} e^{r_2^{(m)} x_2} + \alpha_3^{(m)} e^{r_3^{(m)} x_2} + \alpha_4^{(m)} e^{r_4^{(m)} x_2}, \quad m = 1, 2,$$

$$u_{2F}^{(3)} = \alpha_1^{(3)} e^{r_1^{(3)} x_2} + \alpha_3^{(3)}(s) e^{r_3^{(3)} x_2} \quad (3.26)$$

Burada  $\alpha_1^{(m)}(s), \alpha_2^{(m)}(s), \alpha_3^{(m)}(s), \alpha_4^{(m)}(s)$  ve  $\alpha_1^{(3)}(s)$  bilinmeyen ve Fourier integral dönüşüm parametresi  $s$ 'den bağımlı katsayılardır. (3.25)'te ki eşitlikler yardımıyla (3.26);

$$u_{2F}^{(m)} = \alpha_1^{(m)} e^{-\sqrt{t_1^{(m)}} x_2} + \alpha_2^{(m)} e^{\sqrt{t_1^{(m)}} x_2} + \alpha_3^{(m)} e^{-\sqrt{t_2^{(m)}} x_2} + \alpha_4^{(m)} e^{\sqrt{t_2^{(m)}} x_2} \quad (3.27)$$

$$u_{2F}^{(3)} = \alpha_1^{(3)} e^{-\sqrt{t_1^{(3)}} x_2} + \alpha_3^{(3)}(s) e^{-\sqrt{t_2^{(3)}} x_2}$$

şeklinde yazılır.  $q_1, q_2$  için (3.24)'denkleminde faydalanarak;

$$q_{1,2} = \frac{-\left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right) \mp \sqrt{\left( a_1^{(m)} c_2^{(m)} + a_2^{(m)} c_1^{(m)} - b_1^{(m)} b_2^{(m)} \right)^2 - 4 a_1^{(m)} a_2^{(m)} c_1^{(m)} c_2^{(m)}}}{2 a_1^{(m)} a_2^{(m)}} \quad (3.28)$$

eşitliği yazılır.(3. 19)'da ki bağıntılardan faydalanılarak  $u_{2F}^{(m)}$  hesaplanır.

$$u_{2F}^{(m)} = -\frac{1}{b_1^{(m)}} \left[ \left( -\frac{a_1^{(m)} q_1^{(m)} \alpha_1^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} - \frac{c_1^{(m)} \alpha_1^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} \right) e^{-\sqrt{q_1^{(m)}} x_2} + \left( \frac{a_1^{(m)} q_1^{(m)} \alpha_2^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} + \frac{c_1^{(m)} \alpha_2^{(m)}}{\sqrt{q_1^{(m)}}} \right) e^{\sqrt{q_1^{(m)}} x_2} + \left( -\frac{a_1^{(m)} q_2^{(m)} \alpha_3^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} - \frac{c_1^{(m)} \alpha_3^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} \right) e^{-\sqrt{q_2^{(m)}} x_2} + \left( \frac{a_1^{(m)} q_2^{(m)} \alpha_4^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} + \frac{c_1^{(m)} \alpha_4^{(m)}}{\sqrt{q_2^{(m)}}} \right) e^{\sqrt{q_2^{(m)}} x_2} \right] \quad (2. 29)$$

(3. 4), (3. 5) ve (3. 14) ifadelerinden yararlanarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\sigma_{12F}^{(m)} = \mu^{(m)} \left( u_{1F,2}^{(m)} - i s u_{2F}^{(m)} \right) \quad (3. 30)$$

$$\sigma_{22F}^{(m)} = -i s \lambda^{(m)} u_{1F}^{(m)} + \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right) u_{2F,2}^{(m)} \quad (3. 31)$$

$m = 1$  (üst örtük plaka) için elde edilen bağıntılar düzenlenecek olursa, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$u_{1F}^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \quad (3. 32)$$

$$u_{2F}^{(1)} = \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} - \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} - \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (3. 33)$$

$$\sigma_{12F}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) i s + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) i s + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (3. 34)$$

$$\sigma_{11F}^{(1)} = - \left[ i s \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) + \lambda^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} \right) \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + - \left[ i s \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) + \lambda^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} \right) \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \quad (3. 35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22F}^{(1)} = & - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} \right) + \\ & - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$m = 2$  (alt örtük plaka) için elde edilen bağıntılar düzenlenecek olursa, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$u_{1F}^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} x_2} + \alpha_3^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} + \alpha_4^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} x_2} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} u_{2F}^{(2)} = & \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \left( \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} - \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} \right) + \\ & \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \left( \alpha_3^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} - \alpha_4^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12F}^{(2)} = & \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \left( -\alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} + \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} \right) + \\ & + \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \left( -\alpha_3^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} + \alpha_4^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11F}^{(2)} = & - \left[ is \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) + \lambda^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} \right) \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} + \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} \right) + \\ & - \left[ is \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) + \lambda^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} \right) \right] \left( \alpha_3^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} + \alpha_4^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22F}^{(2)} = & - \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} + \alpha_2^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} x_2} \right) + \\ & - \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_3^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} + \alpha_4^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$m = 3$  (yarı düzlem) için elde edilen bağıntılar düzenlenecek olursa, (3. 9) koşuluna göre  $\alpha_3^{(3)} = \alpha_4^{(3)} = 0$  olmalıdır ve aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$u_{1F}^{(3)} = \alpha_1^{(3)} e^{-\sqrt{q_1^{(3)}} x_2} + \alpha_2^{(3)} e^{-\sqrt{q_2^{(3)}} x_2} \quad (3.42)$$

$$u_{2F}^{(3)} = \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) \alpha_1^{(3)} e^{-\sqrt{q_1^{(3)}} x_2} + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) \alpha_2^{(3)} e^{-\sqrt{q_2^{(3)}} x_2} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12F}^{(3)} = & -\mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(3)}} \right] \alpha_1^{(3)} e^{-\sqrt{q_1^{(3)}} x_2} \\ & - \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(3)}} \right] \alpha_2^{(3)} e^{-\sqrt{q_2^{(3)}} x_2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\sigma_{11F}^{(3)} = - \left[ is \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) + \lambda^{(3)} \left( \frac{q_1^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} \right) \right] \left( \alpha_1^{(3)} e^{-\sqrt{q_1^{(3)}} x_2} + \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} x_2} \right) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22F}^{(3)} = & - \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_1^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is \lambda^{(3)} \right] \alpha_1^{(3)} e^{-\sqrt{q_1^{(3)}} x_2} \\ & - \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_2^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is \lambda^{(3)} \right] \alpha_2^{(3)} e^{-\sqrt{q_2^{(3)}} x_2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

bağıntıları elde edilir.(3. 30)-(3. 32) ifadelerinden yararlanarak (3. 7)'deki ideal temas koşulları aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$1) \quad - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is \lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) - \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is \lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = -p_0 \quad (3.47)$$

$$2) \quad \mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = 0$$

$$3) \quad \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} - \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \right) + \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} - \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \right) = \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} - \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} \right) + \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} - \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} \right)$$

$$4) \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \right) + \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \right) = \\ \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} \right) + \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} \right)$$

$$5) \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} + \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} = \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} + \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} h_1}$$

$$6) \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right) \left( -\alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \right) + \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right) \left( -\alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \right) = \\ \mu^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right) \left( -\alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} \right) + \mu^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right) \left( -\alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} \right)$$

$$\left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) + \\ 7) \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) \\ = \left[ (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) \frac{q_1^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right] \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} (h_1+h_2)} + \left[ (\lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)}) \frac{q_2^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right] \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}} (h_1+h_2)}$$

$$8) \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} = \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} (h_1+h_2)} + \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}} (h_1+h_2)}$$

$$\mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1} + \frac{c_1}{b_1 \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \left( -\alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) + \\ \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1} + \frac{c_1}{b_1 \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \left( -\alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) = \\ 9) -\mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1} + \frac{c_1}{b_1 \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(3)}} \right] \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} (h_1+h_2)} - \\ \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1} + \frac{c_1}{b_1 \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(3)}} \right] \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}} (h_1+h_2)}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} - \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \right) + \\
10) & \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} - \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \right) \\
& = \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)}
\end{aligned}$$

(3. 8)'deki ideal olmayan temas koşulları için aşağıda ki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
1) & \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \\
& \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = 0 \tag{3. 48} \\
2) & \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \right) + \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} + \alpha_4^{(1)} \right) = p_0 \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h_1} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h_1} \right) + \\
& \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right] \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h_1} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h_1} \right) = \\
3) & \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \right) + \\
& \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \right) \\
4) & \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) \left( \alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h_1} - \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h_1} \right) + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) \left( \alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h_1} - \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h_1} \right) = \\
& \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} - \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \right) + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} - \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right] \left( -\alpha_1^{(1)} e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} + \alpha_2^{(1)} e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \right) + \\
5) \quad & \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right] \left( -\alpha_3^{(1)} e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} + \alpha_4^{(1)} e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \right) = 0 \\
& \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \left( -\alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} h_1} \right) + \\
6) \quad & \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \left( -\alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} h_1} \right) = 0 \\
& \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) + \\
7) \quad & \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right] \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) = \\
& \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_1^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right] \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} (h_1+h_2)} + \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_2^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right] \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}} (h_1+h_2)} \\
& \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) \left( \alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} - \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) + \\
8) \quad & \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) \left( \alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} - \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) = \\
& \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} (h_1+h_2)} + \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}} (h_1+h_2)} \\
9) \quad & \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(3)}} \right] \alpha_1^{(3)} e^{\sqrt{q_1^{(3)}} (h_1+h_2)} + \\
& \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(3)}} \right] \alpha_2^{(3)} e^{\sqrt{q_2^{(3)}} (h_1+h_2)} = 0 \\
& \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right] \left( -\alpha_1^{(2)} e^{\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_2^{(2)} e^{-\sqrt{q_1^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) + \\
10) \quad & \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right] \left( -\alpha_3^{(2)} e^{\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} + \alpha_4^{(2)} e^{-\sqrt{q_2^{(2)}} (h_1+h_2)} \right) = 0
\end{aligned}$$

Elde edilen denklem sistemlerinin çözümüyle, bilinmeyen  $\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s)$ ,  $\alpha_1^{(2)}(s), \dots, \alpha_4^{(2)}(s)$ ,  $\alpha_1^{(3)}(s), \alpha_2^{(3)}(s)$  katsayıları bulunur. Bu katsayılar  $u_{iF}^{(m)}$  ve  $\sigma_{ijF}^{(m)}$  Fourier dönüşümlerinin ifadelerinde yerine yazılarak,  $u_{iF}^{(m)}$ ,  $\sigma_{ijF}^{(m)}$ 'lerin analitik ifadeleri belirlenmiş olur. Buradan sonra bu ifadelerin ters (invers) Fourier dönüşümlerinin elde edilmesi işlemleri yapılır. Bu işlemlerin analitik yapılmasının imkansız olduğu açıktır. Bu nedenle ters dönüşümler sayısal hesaplanmak zorundadır. Şimdi bu hesaplamaların yapılmasına imkan sağlayan algoritmanın açıklamasını ele alalım.

### 3.3 Hesaplama Algoritması

Bir önceki bölümde de ifade edildiği gibi aranan büyüklüklerin sayısal değerlerinin elde edilmesi ters Fourier dönüşümüne karşı gelen

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(s, x_2) e^{isx_1} ds \quad (3.49)$$

improper integralinin hesaplanmasına indirgenir. Fiziksel ve geometrik simetriler dikkate alınarak (3.49) integrali,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f_F(s, x_2) \cos(sx_1) ds, \quad u_{2F}^{(m)}, \sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{11}^{(m)}, \epsilon_{22}^{(m)}, \epsilon_{11}^{(m)} \text{ için}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f_F(s, x_2) \sin(sx_1) ds, \quad u_{1F}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}, \epsilon_{12}^{(m)} \text{ için} \quad (3.50)$$

integrallerine dönüştürülür. Çözüm sırasında kullanılacak nümerik yöntem için improper integraller aşağıdaki belirli integralle yer değiştirir.

$$\int_0^{\infty} (.) ds \approx \int_0^{S_*} (.) ds \quad (3.51)$$

(3.51)'de  $S_*$  değeri integrallerin sayısal yakınsama kriterinden hesaplanır.

Nümerik hesaplamalar göstermiştir ki, genelde problem parametrelerinin belirli değerlerinde her bir  $V$  hız değeri için,  $u_{iF}^{(m)}$ ,  $\sigma_{ijF}^{(m)}$  fonksiyonları  $sh_1$ 'a bağlı olarak tekil noktalara sahiptir. Bilinmeyen  $\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s)$ ,  $\alpha_1^{(2)}(s), \dots, \alpha_4^{(2)}(s)$ ,  $\alpha_1^{(3)}(s), \alpha_2^{(3)}(s)$  ifadeleri, cebirsel

işlemler yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} & (\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s), \alpha_1^{(2)}(s), \dots, \alpha_4^{(2)}(s), \alpha_1^{(3)}(s), \alpha_2^{(3)}(s)) = \\ & \frac{1}{\det \|A_{nm}(s)\|} \left( \det \| \beta_{nm}^{\alpha_1^{(1)}(s)}(s) \|, \dots, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_4^{(1)}(s)}(s) \|, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_1^{(2)}(s)}(s) \|, \dots, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_4^{(2)}(s)}(s) \|, \right. \\ & \left. \det \| \beta_{nm}^{\alpha_1^{(3)}(s)}(s) \|, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_2^{(3)}(s)}(s) \| \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$A_{nm}(s)$ 'lerin ifadeleri ideal ve ideal olmayan temas koşulları için sırasıyla Ek 3.ve Ek 4'te verilmektedir. Burada denklem  $s$ 'e bağlıdır ve cebirsel denklem sistemindeki bilinmeyenlerin katsayıları  $A_{nm}(s)$ 'tir. (3.52)'deki  $\det \| \beta_{nm}^{\alpha_1^{(1)}(s)}(s) \|, \dots, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_4^{(1)}(s)}(s) \|, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_1^{(2)}(s)}(s) \|, \dots, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_4^{(2)}(s)}(s) \|, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_1^{(3)}(s)}(s) \|, \det \| \beta_{nm}^{\alpha_2^{(3)}(s)}(s) \|$  matrisleri, sırasıyla  $\|A_{nm}(s)\|$  matrisinden  $\alpha_1^{(1)}(s), \dots, \alpha_4^{(1)}(s), \alpha_1^{(2)}(s), \dots, \alpha_4^{(2)}(s), \alpha_1^{(3)}(s), \alpha_2^{(3)}(s)$  bilinmeyenlerine karşılık gelen kolonların (3.47)-(3.48) ifadelerinin sağ tarafları ile yer değiştirmesinden elde edilmektedir.

Açıktır ki yukarıda bahsi geçen integral altı ifadelerin tekil noktaları,

$$\det \|A_{nm}(s)\| = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.53)$$

denklemini sağlayan  $s$ 'lerdir.

Sonuç olarak, integre edilen değerlerin tekil noktaları, (3.53) denkleminin kökleriyle çakışır. Bilinmektedir ki bu köklerin mertebesi (bunu  $r$  ile gösterirsek)  $0 \leq r < 1$  durumu için, integralin hesaplanmasında bilinen algoritmalar kullanılabilir.  $r = 1$  durumunda (3.51) numaralı integral Cauchy'nin temel değer prensibi kullanılarak hesaplanabilir. Fakat  $r > 1$  durumunda integral hiçbir anlam ifade etmez ve bu duruma karşılık gelen hız 'kritik hız' olarak adlandırılır. Belirtilmelidir ki kritik hız altında, rezonans tipli durum gerçekleşmektedir.

Bu tanıma göre kritik hız, (3.53) ifadesini sağlayan  $V = V(sh)$  fonksiyonunun yerel minimum (ya da maksimum) noktasına denk gelmektedir. Plakayla kaplı malzemelerde ki hareketli yük problemlerinde sesten yavaş durum için önemli sorulardan biri  $V_{cr}$  ile gösterilen kritik hızın hesaplanması ve problem parametrelerinin bu hız değerleri üzerindeki etkisinin incelenmesidir.

### 3.4 Tekil Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

$$\nu = \frac{V}{c_2^{(1)}}, e_1 = \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}, e_2 = \frac{E^{(3)}}{E^{(2)}}, H = \frac{h_2}{h_1}, \eta_k = \frac{\sigma_{11}^{(k)}}{\mu^{(k)}}, \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})} \quad (3.54)$$

ifadelerinde aşağıdaki eşitlikler kabul edilmiştir.

$$\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0.5, \rho^{(3)}/\rho^{(2)} = 0.5, \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu^{(3)} = 0.3. \quad (3.55)$$

$\nu$  ve  $sh_1$  arasındaki ilişkiyi incelediğimizde,  $H \rightarrow \infty$  durumu ele alındığında, iyi bilinen mekaniksel duruma göre sistem plakayla kaplı yarı düzlem haline dönüşecektir.  $H \rightarrow 0$  koşulunda orta plaka yarı düzlem konumuna geçer, dolayısıyla iki katlı plaka haline dönüşme söz konusu olur. Bu öngörü Şekil 3.3'te  $e_1 = 2.0$ ,  $e_2 = 1.5$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.0$  durumu için, çeşitli  $H$  değerlerinde ideal (3.7) (Şekil 3.3a) ve ideal olmayan (3.8) (Şekil 3.3b) temas koşullarında ispatlanmıştır. Belirtilmelidir ki  $e_1 = 2.0$  durumu için plakayla kaplı yarı düzlemden oluşan sistemin incelenmesi Akbarov v.d. (2007c)'de gerçekleştirilmiştir. İki katlı plakayla yarı düzlemden oluşan sisteme ait bahsedilen özel durumlarda elde edilen sonuçların Akbarov v.d. (2007c)'daki sonuçlarla çakışması, nümerik araştırmalar için kullanılan algoritma ve programların doğruluğunu kanıtlamaktadır.

$\nu$  ve  $sh_1$  arasındaki ilişkiye  $e_1$  parametresinin etkisi,  $H = 1.0$ ,  $e_2 = 2.0$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.0$  durumu için ideal (3.7)(düz çizgi) ve ideal olmayan (3.8)(kesikli çizgi) temas koşulları için Şekil 3.4'te verilmiştir. Bu grafikleri, plakayla kaplı yarı düzlemden oluşan sistemle kıyasladığımızda, ikinci plakanın varlığı, elastisite modülünün daha büyük olması (3.52) eşitliğini sağlayan  $\nu = \nu(sh_1)$  değerinde artmaya sebep olmaktadır.

Yukarıda bahsedilen incelemelerde ve burada yer verilmeyen çok sayıdaki sayısal sonuçlardan görülmüştür ki: (i)  $\nu = \nu(sh_1)$  fonksiyonu yerel maksimum ya da minimuma sahip değildir; (ii)  $\nu = \nu(sh_1)$  fonksiyonu,  $sh_1 \neq \infty$  durumu için yalnızca bir tane yerel maksimum ya da minimuma sahiptir; (iii)  $\nu = \nu(sh_1)$  fonksiyonu,  $sh_1 \neq 0$  ve  $sh_1 \neq \infty$  için, bir ya da daha fazla yerel maksimum ve bir ya da daha fazla yerel minimuma sahiptir. (i) durumunda kritik hız yoktur, (ii) durumunda kritik hız vardır ve  $\nu = \nu(sh_1)$  fonksiyonunun yerel maksimum ya da minimumuna denk gelir, son olarak (iii) durumunda kritik hız vardır ve minimallerin arasından seçilmiş  $\nu$ 'nin minimumuna karşılık gelir.

Yukarıda verilen tanımlamalara göre Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 te verilen grafiklerden ve burada

verilmemiş benzer bir çok grafikten  $v_{cr}$  değerini hesaplarız. Ayrıca Şekil 3. 3 ve Şekil 3. 4 te verilen grafiklerden, ikinci plakanın mekanik ve geometrik parametreleri göz önünde bulundurularak  $v_{cr}$  değerleri kontrol edilebilir. Özel olarak Şekil 3. 3 ve Şekil 3. 4'ten ve burada verilmeyen benzer sonuçlardan  $e_1 > e_2$ ;  $e_2 > 1$  durumunda ikinci plakanın kalınlığında ki artış  $v_{cr}$  değerinde azalmaya yol açmaktadır, ayrıca  $e_1 \geq e_2$ ;  $e_2 > 1$  durumunda  $v_{cr}$  değeri  $e_1$  değeri arttıkça azalmaktadır.

Tablo 3. 1'de çeşitli  $(e_1, e_2)$  ve  $H$  değerlerinde  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.0$ , durumu için yani sistem bileşenlerinin öngerilmemiş olduğu durumda ki  $v_{cr}$  değerleri verilmiştir. Örtük plaka ve yarı düzlem (yada örtük plaka ve yarı düzlem konumunda ki ikinci plaka) için elde edilen  $v_{cr}$  değerleri Tablo 3. 2'de verilmiştir. Bu tabloda ki nümerik sonuçlar mekanik varsayımları doğrulamakta ve bazı özel değerler için Akbarov v.d. (2007c)' deki sonuçları vermektedir.

Tablo 3. 3,  $H = 1.0$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.0$  durumunda  $e_1$  ve  $e_2$  (3. 53) değerlerinin  $v_{cr}$  değeri üzerindeki etkisini göstermektedir. Burada ki değerlerden görülmektedir ki ikinci plakanın elastisite modül değeri arttıkça  $v_{cr}$  değeri artmaktadır. Bu artış  $e_1 \geq 5.0$  durumu için daha belirgindir.

Sistem bileşenlerine etki eden ön gerilmelerin  $v_{cr}$  değeri üzerindeki etkisini gösteren,  $e_1 = 2.0$ ,  $e_2 = 5.0$ ,  $H = 1.0$  durumunda elde edilmiş değerler Tablo 3. 4'te verilmiştir. Bu tabloya göre plakalara ve yarı düzleme etki eden ön gerilme,  $v_{cr}$  değerlerinde artmaya neden olmuştur. Aynı zamanda üst plakaya uygulanan ön gerilmenin  $v_{cr}$  değerleri üzerindeki etkisi, orta plaka ve yarı düzleme uygulanan ön gerilmenin yarattığı etkiden daha fazladır.

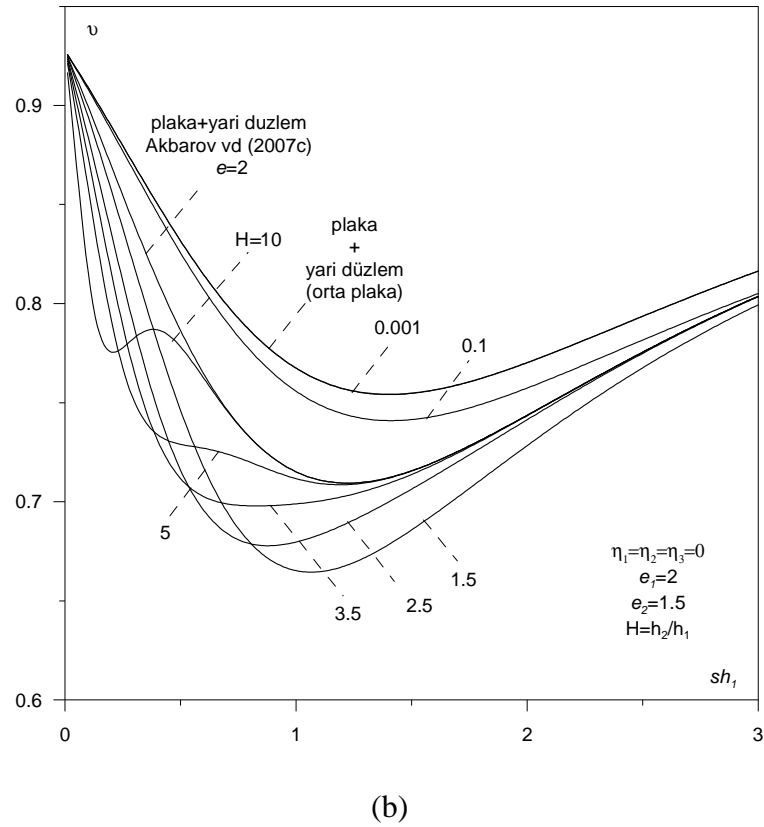
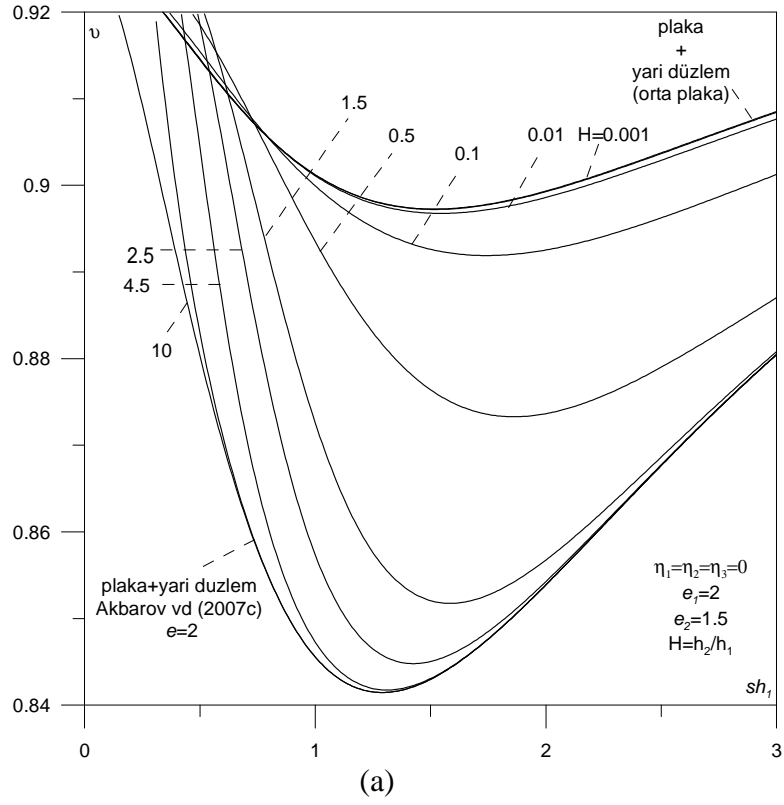
$e_1 = e_2 < 1.0$  durumunu ele alalım,  $e_1 = e_2 = 0.1$  için elde edilen sonuçlara bakıldığında, belirtimlidir ki, Akbarov v.d. (2007c)'de plakayla kaplı yarı düzlemde, bu durum için kritik hız yoktur. Sonuç olarak bahsedilen sistemde  $H \rightarrow \infty$  sönüm koşulu için  $v$  ve  $sh_1$  arasındaki ilişkiyi gösteren grafikte minimum ortaya çıkar. Bu durum çeşitli  $H$  değerleri için  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$  durumunda tam(3. 7) (Şekil 3. 5a) ve ideal olmayan (3. 8) (Şekil 3. 5b) temas koşulları için Şekil 3. 5'te verilmiştir. Bu grafikten  $H \rightarrow \infty$  durumu için, örtük plaka malzemesinde Rayleigh dalga yayılım hızı  $V_R$  olmak üzere,  $sh_1 \rightarrow \infty$  iken  $v \rightarrow v_{(R)} = V_R / C_2^{(1)}$  olduğu görülmektedir. Bununla beraber grafikten,  $e_1 = e_2 < 1.0$  durumu için  $H > H_*$  olacak

şekilde  $H(H_*$  ile gösterilen) değerinde,  $v = v(sh_1)$  grafiğinde yerel minimum kaybolmaktadır.

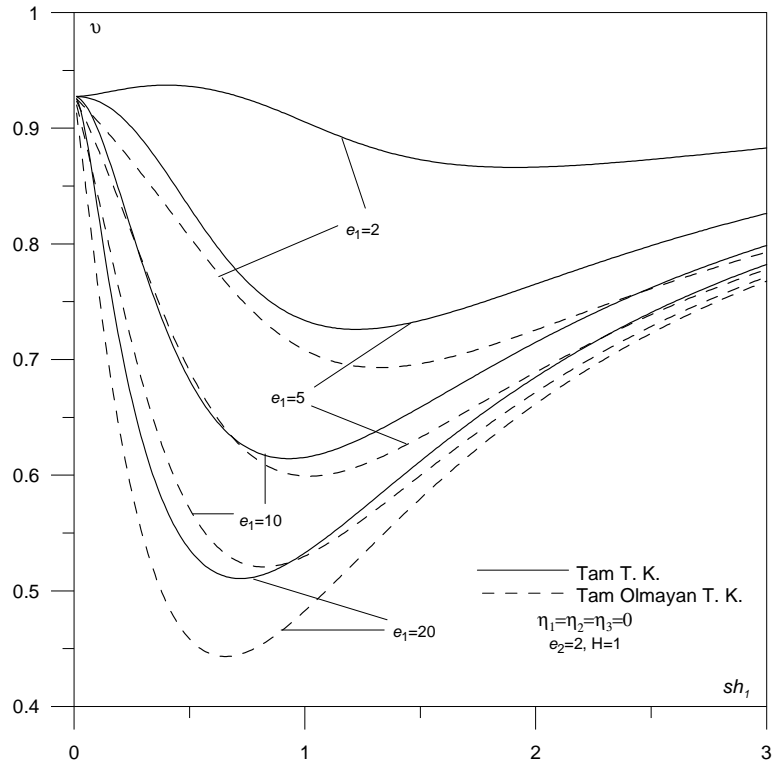
Son olarak ideal temas koşullarında (3. 7),  $x_1|h$ 'e göre,  $\sigma_{22}^{(1)}h_1|p_0$  ( $x_2 = -h_1$ 'de) ve  $\sigma_{22}^{(2)}h_1|p_0$  ( $x_2 = -(h_1 + h_2)$ 'de) gerilme yayılımına ait bazı örneklere bakılırsa, bu dağılıma ait grafikler, Şekil 3. 6'da,  $H = 1.0$ ,  $e_1 = 2$ ,  $e_2 = 5$  durumu için, çeşitli  $\eta_1$  değerlerinde verilmiştir. Bu grafikte,  $x_1 = 0$  civarında  $\sigma_{22}^{(1)}h_1|p_0$  (Şekil 3. 6a) değeri,  $\sigma_{22}^{(2)}h_1|p_0$  (Şekil 3. 6b) değerinden daha büyüktür. Aynı zamanda bu grafikler göstermektedir ki, üst plakaya verilen öngerilme bahsedilen gerilme değerlerinde belirgin bir düşüşe sebep olmaktadır.

Bu bölümde, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, ÜDETYT kullanılarak, iki katlı plakayla kaplı yarı düzlemin dinamiği incelenmiştir.

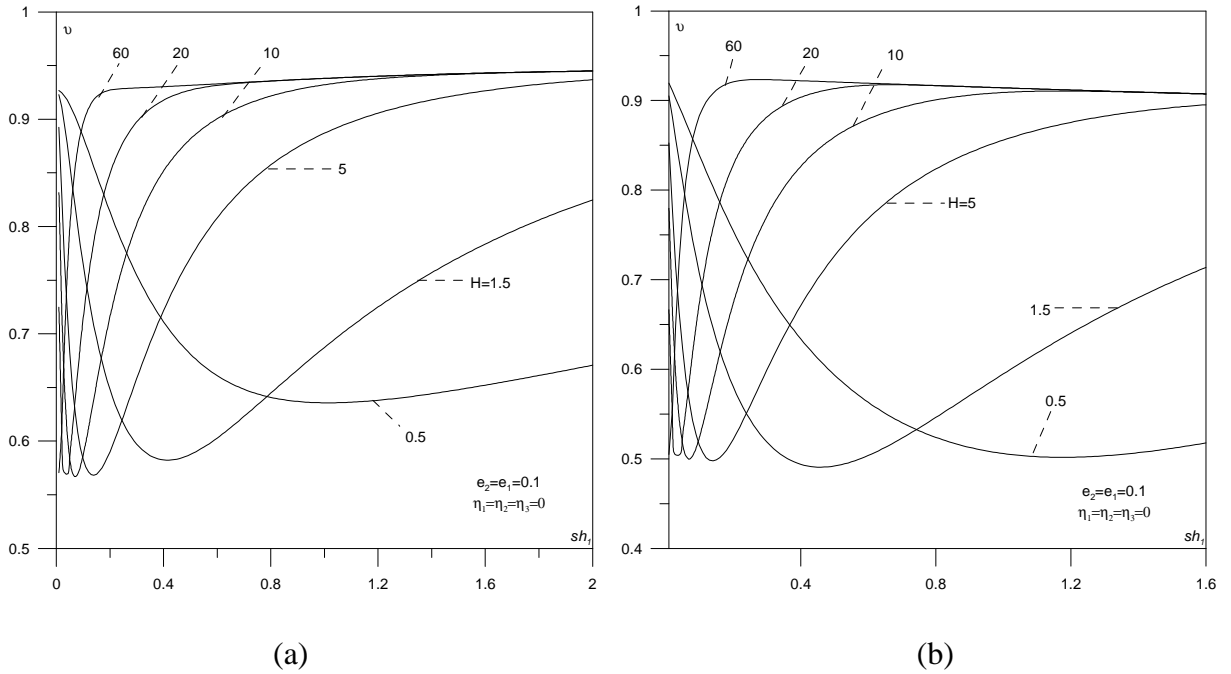
Kritik hız için elde edilen nümerik sonuçlardan görülmektedir ki,  $e_1 > e_2$ ,  $e_2 > 1$  durumunda ortadaki plakanın varlığı kritik hız değerlerinde artışa neden olmaktadır; yukarıda bahsedilen koşullarda ortadaki plakanın kalınlığının artması kritik hız değerlerinde azalmaya neden olur;  $e_1 < 1$ ,  $e_1 = e_2$ , durumunda  $H < H_*$  için kritik hız vardır, bununla beraber orta plakanın bazı değerlerinde  $H > H_*$  durumu için kritik hız yoktur; Plakalar ve yarı düzleme etki eden ön gerilme kritik hız değerinde artışa neden olur; Üst plakaya etki eden öngerilmenin kritik hız değerleri üzerindeki etkisi, orta plaka ve yarı düzleme etki eden ön gerilmenin kritik hız değerleri üzerindeki etkisinden daha fazladır .



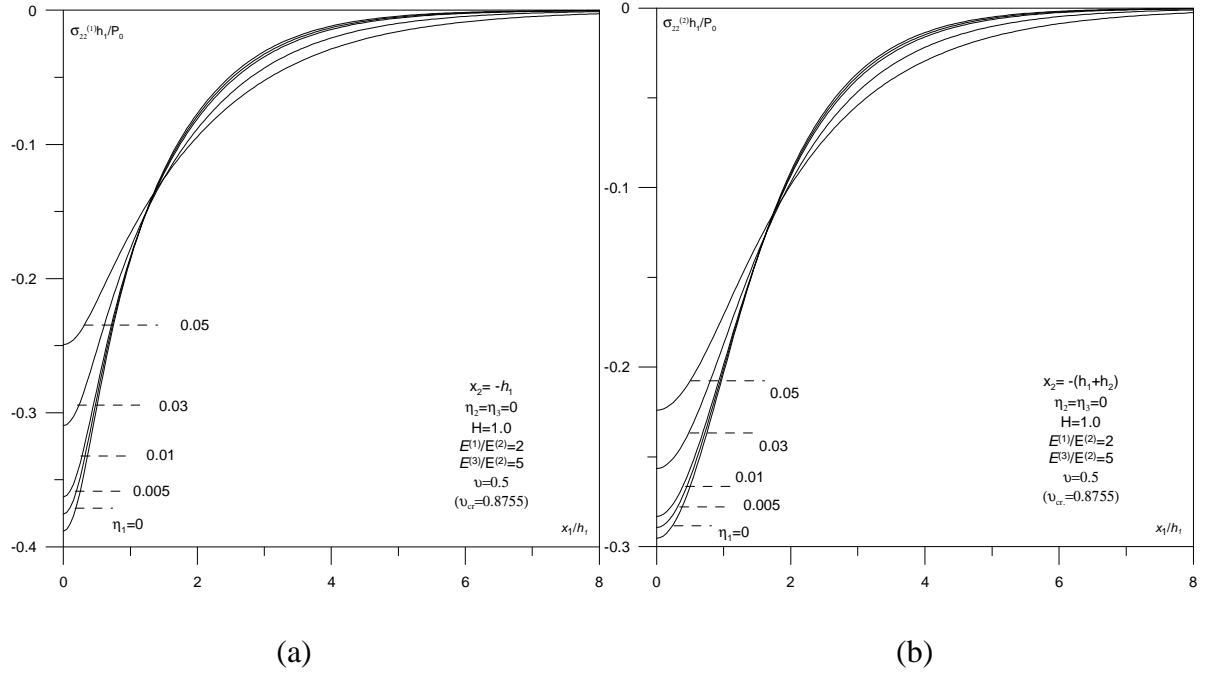
Şekil 3. 3 Farklı  $H = h_2/h_1$  değerleri için, ideal (a) ve ideal olmayan (b) temas koşullarında  $v$  ve  $sh_1$  arasındaki bağımlılık



Şekil 3. 4 Farklı  $e_1$  değerleri için  $e_2 = 1$ ,  $H = 1.0$  olmak üzere  $v$  ve  $sh_1$  arasındaki bağımlılık



Şekil 3. 5 Farklı  $H$  değerleri için,  $e_1 = e_2 < 1$  ( $e_1 = e_2 = 0.1$ ) olmak üzere, ideal (a) ve ideal olmayan (b) temas koşullarında  $v$  ve  $sh_1$  arasındaki bağımlılık



Şekil 3. 6 Farklı  $\eta_1 (= \sigma_{11}^{(1)0} / \mu^{(1)})$  değerlerinde, ideal temas koşulları için (3. 7),  $\sigma_{22}^{(1)} h_1 | P_0 |_{x_2 = -h_1}$  (a) ve  $\sigma_{22}^{(2)} h_2 | P_0 |_{x_2 = -(h_1 + h_2)}$  (b) dağılımı ile  $x_1/h$  arasındaki bağımlılık

Tablo 3. 1 Farklı  $e_1$ ,  $e_2$  ve  $H$  değerlerinde,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$  için ideal (üstteki sayı) ve ideal olmayan (alttaki sayı) temas koşullarında kritik hız ( $\nu_{cr}$ ) değerleri

$(e_1; e_2)$	H				
	0.001	0.5	1.5	10	30
(2; 4/3)	$\frac{0.8972}{0.7540}$	$\frac{0.8732}{0.6970}$	$\frac{0.8517}{0.6644}$	$\frac{0.8414}{0.7754}$	$\frac{0.8414}{0.7093}$
(5; 5/2)	$\frac{0.8058}{0.6824}$	$\frac{0.7538}{0.6303}$	$\frac{0.7100}{0.5839}$	$\frac{0.6857}{0.5931}$	$\frac{0.6857}{0.5931}$
(10; 5)	$\frac{0.6856}{0.5930}$	$\frac{0.6405}{0.5490}$	$\frac{0.5976}{0.5041}$	$\frac{0.5664}{0.5016}$	$\frac{0.5664}{0.5016}$

Tablo 3. 2 Farklı  $e_1$  değerleri için iki katlı plaka ya da yarı düzlem konumuna geçmiş orta plaka durumu için ideal (üstteki sayı) ve ideal olmayan (alttaki sayı) temas koşullarında kritik hız ( $v_{cr}$ ) değerleri

$e_1$				
2	5	10	4/3	5/2
$\frac{0.8414}{0.7093}$ (Akbarov vd) (2007c)	$\frac{0.6857}{0.5931}$	$\frac{0.5664}{0.5016}$ (Akbarov vd) (2007c)	$\frac{0.8972}{0.7542}$	$\frac{0.8059}{0.6825}$

Tablo 3. 3 Farklı  $e_1, e_2$  değerlerinde  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$  ; H=1.0 için ideal (üstteki sayı) ve ideal olmayan (alttaki sayı) temas koşullarında kritik hız ( $v_{cr}$ ) değerleri

$e_1 \backslash e_2$	2	5	10	20
2	$\frac{0.8661}{0.6930}$	$\frac{0.8756}{0.7442}$	$\frac{0.8784}{0.7649}$	$\frac{0.8798}{0.7760}$
5	$\frac{0.7260}{0.5991}$	$\frac{0.8669}{0.6523}$	$\frac{0.8706}{0.6742}$	$\frac{0.8724}{0.6861}$
10	$\frac{0.6142}{0.5206}$	$\frac{0.8253}{0.5745}$	$\frac{0.8325}{0.5973}$	$\frac{0.8361}{0.6098}$
20	$\frac{0.5106}{0.4431}$	$\frac{0.7777}{0.4965}$	$\frac{0.7906}{0.5198}$	$\frac{0.7970}{0.5329}$

Tablo 3. 4  $e_1 = 2, e_2 = 5, H = 1$  durumu için, sistem bileşenlerine uygulanan farklı değerlerdeki ön gerilmelerin kritik hıza ( $v_{cr}$ ) etkisi

	$\eta_1; \eta_2; \eta_3$			
	0	0.005	0.01	0.05
$\eta_1 \neq 0;$ $\eta_2 = \eta_3 = 0$	$\frac{0.8756}{0.7442}$	$\frac{0.8821}{0.7503}$	$\frac{0.8884}{0.7563}$	$\frac{0.9353}{0.7994}$
$\eta_2 \neq 0;$ $\eta_1 = \eta_3 = 0$	$\frac{0.8756}{0.7442}$	$\frac{0.8764}{0.7456}$	$\frac{0.8773}{0.7469}$	$\frac{0.8835}{0.7575}$
$\eta_3 \neq 0;$ $\eta_1 = \eta_2 = 0$	$\frac{0.8756}{0.7442}$	$\frac{0.8758}{0.7454}$	$\frac{0.8759}{0.7465}$	$\frac{0.8767}{0.7536}$

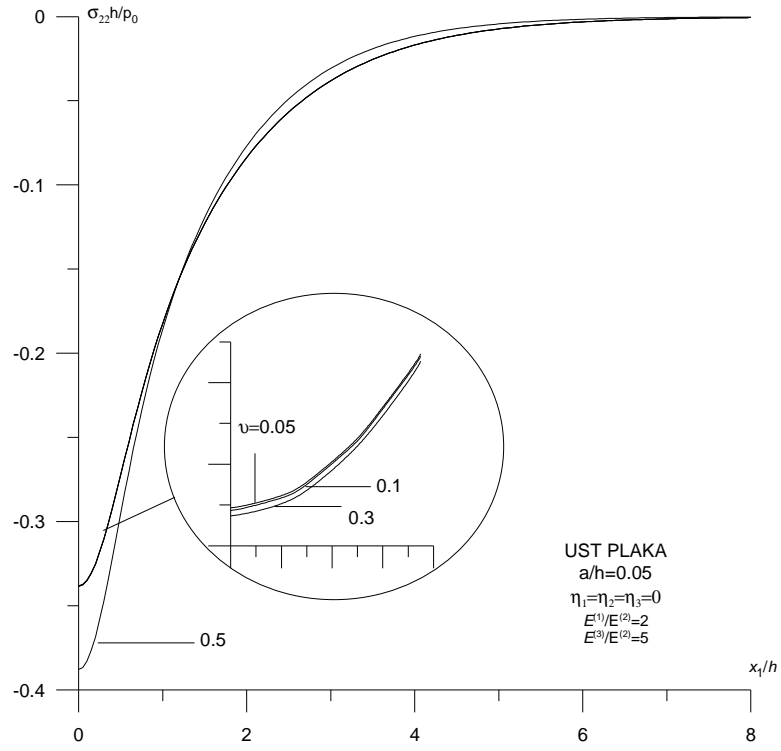
### 3.5 Yayılı Yüke Ait Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

Söz konusu problemin matematiksel formülasyonu 3. 1 alt bölümünde yapılan formülasyonun aynısı olup, sadece (3. 6) sınır koşulunun (2. 10) sınır koşulu ile yer değiştirmesinden elde edilmektedir. Problemin çözüm tekniği önceki bölümlerde kullanılan teknikle aynı olduğundan burada onun üzerinde durulmamıştır. Levhalar arasında oluşan  $\sigma_{22}$  normal gerilmesinin yayılımı ve bu yayılıma problem parametrelerinin etkisinin incelenmesine ait sonuçlar Şekil 3. 7–3. 15’te grafiklerle verilmiştir.

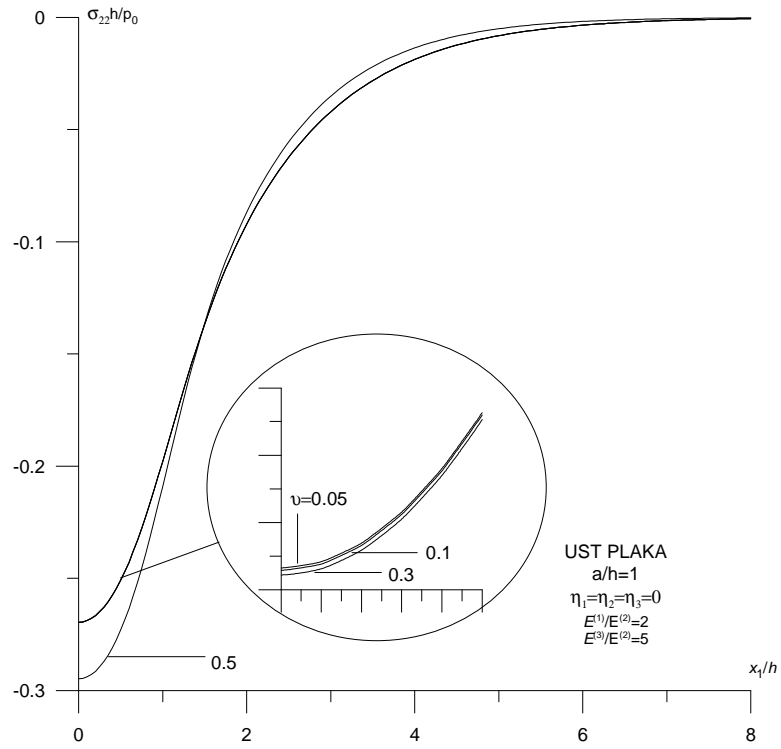
2. 5 alt bölümünde de belirtildiği gibi fiziksel ve mekaniksel öngörülere göre  $a$  (şerit uzunluğu) büyüdükçe  $\sigma_{22}$  değerleri küçülmelidir. Şekil 3. 7–3. 11 grafikleri ile verilen sonuçlar karşılaştırıldığında yukarıda söylenen ön görüşü kanıtlanmaktadır. Ayrıca bu sonuçların  $a/h \rightarrow 0$  koşulunda, bir önceki alt bölümde elde edilen sonuçlarla yakınlaştığı görülmektedir. Bu durum tekrar elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu ve mekaniksel görüşlere uygun olduğunu göstermektedir.

Sistemi oluşturan tabakalar ve yarı düzlemdeki ön gerilmelerin söz konusu gerilme yayılımına etkisini gösteren sayısal sonuçlar Şekil 3. 12–3. 15’te verilmiştir.

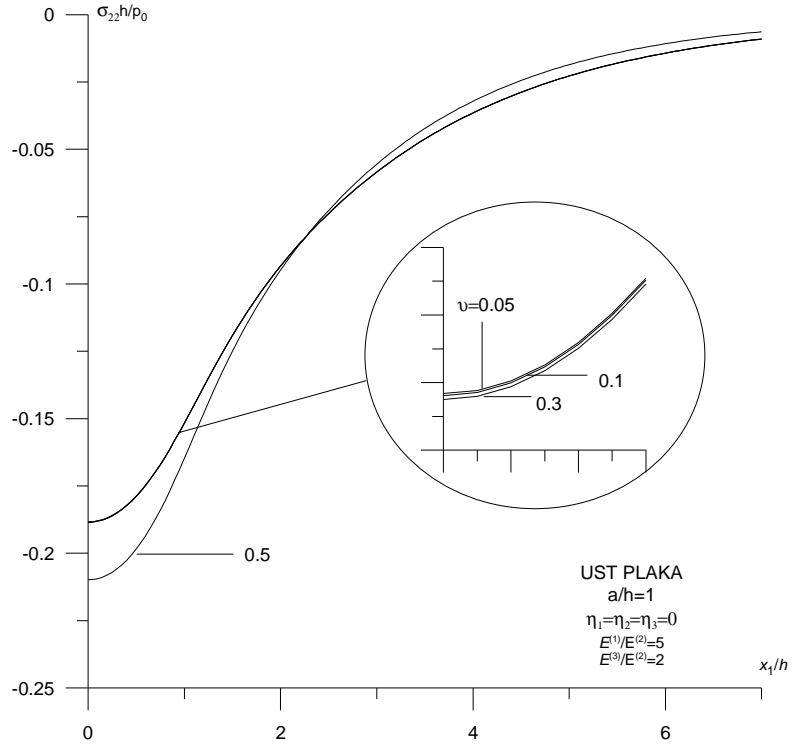
Görüldüğü üzere  $a/h$  değerlerinin değişimi ön gerilmelerin etkisini sadece sayısal açıdan değil nicelik açısından da değiştirmektedir.



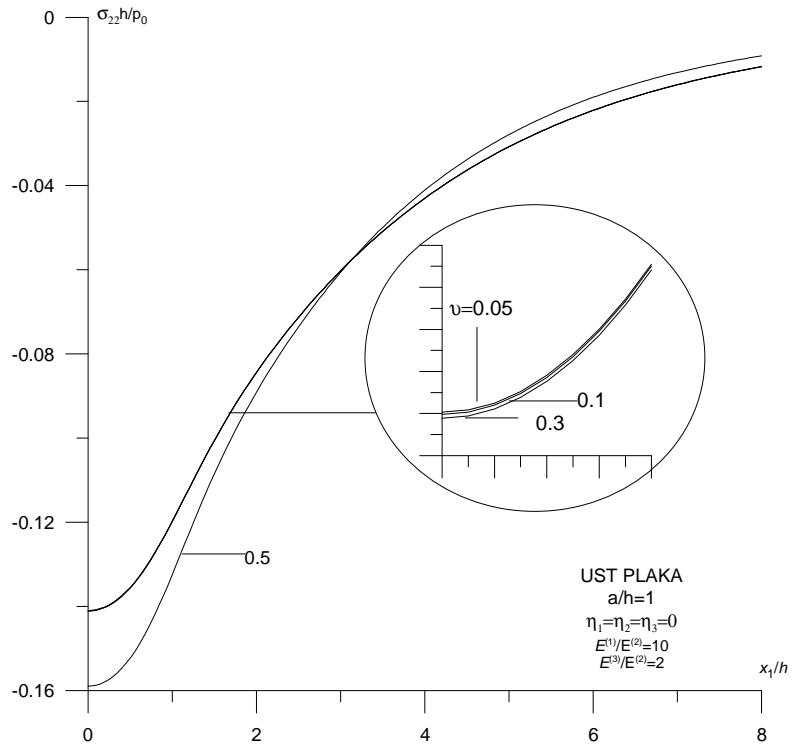
Şekil 3. 7  $a/h=0.05$  ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$  ,  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$  ,  $E^{(3)}/E^{(2)} = 5$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



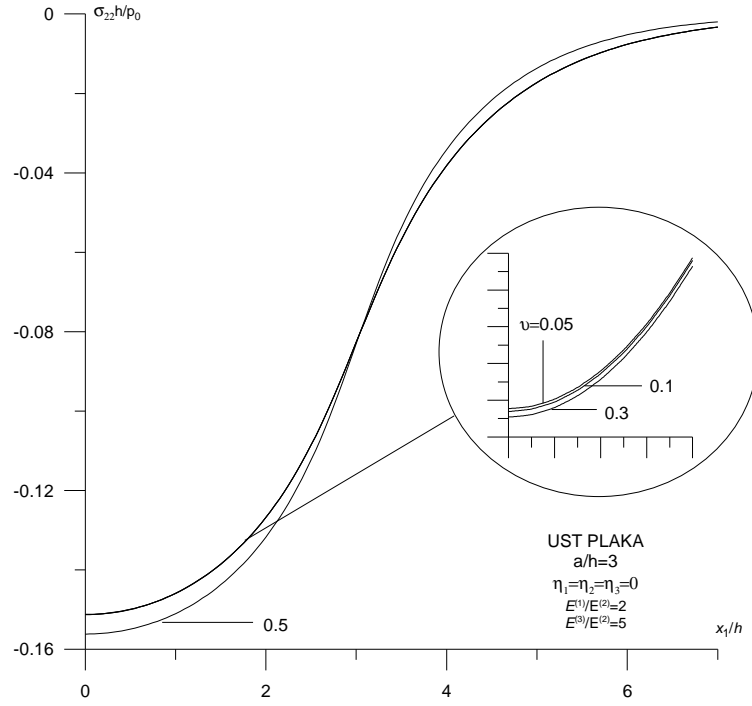
Şekil 3. 8  $a/h=1$  ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$  ,  $E^{(1)}/E^{(2)} = 2$  ,  $E^{(3)}/E^{(2)} = 5$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



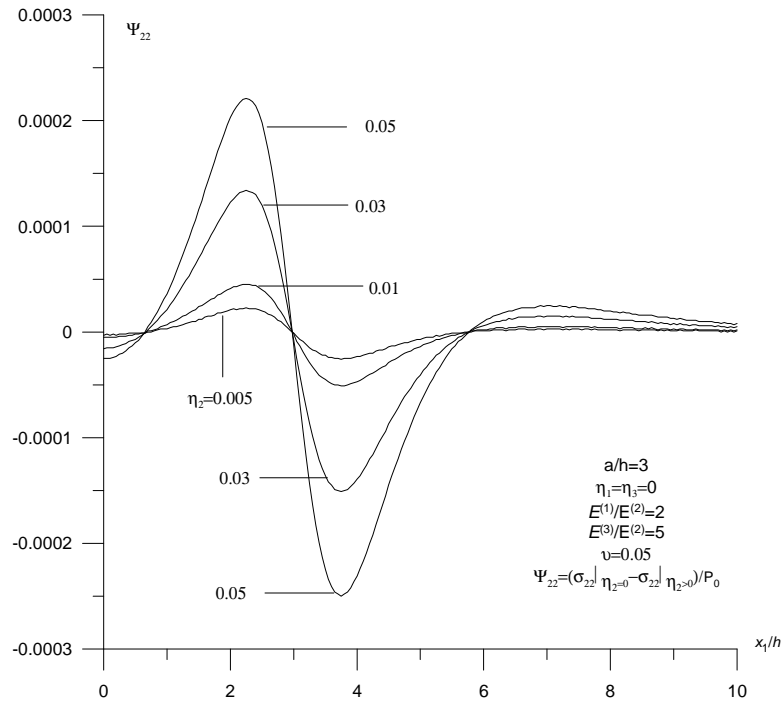
Şekil 3. 9  $a/h=1$ ,  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=5$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=2$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



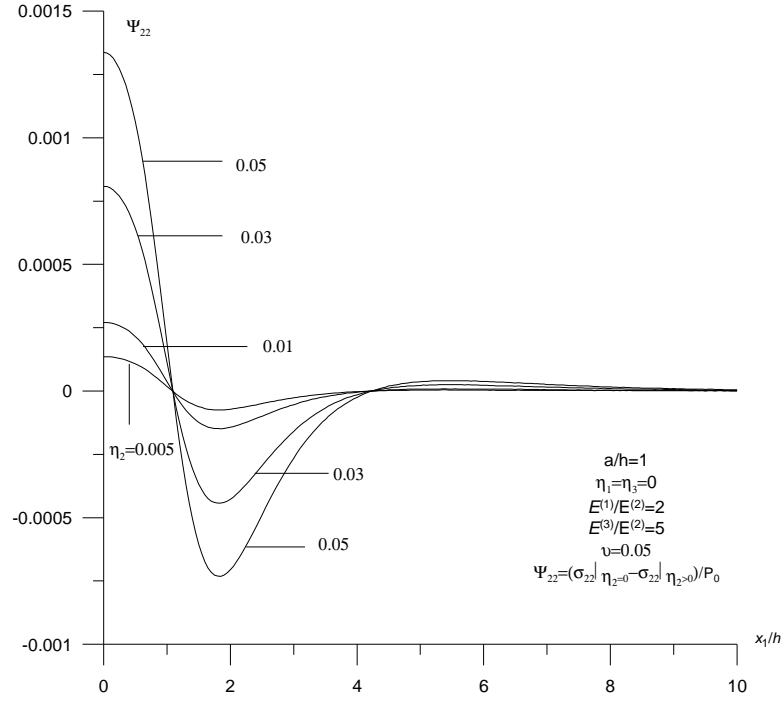
Şekil 3. 10  $a/h=1$ ,  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=10$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=2$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



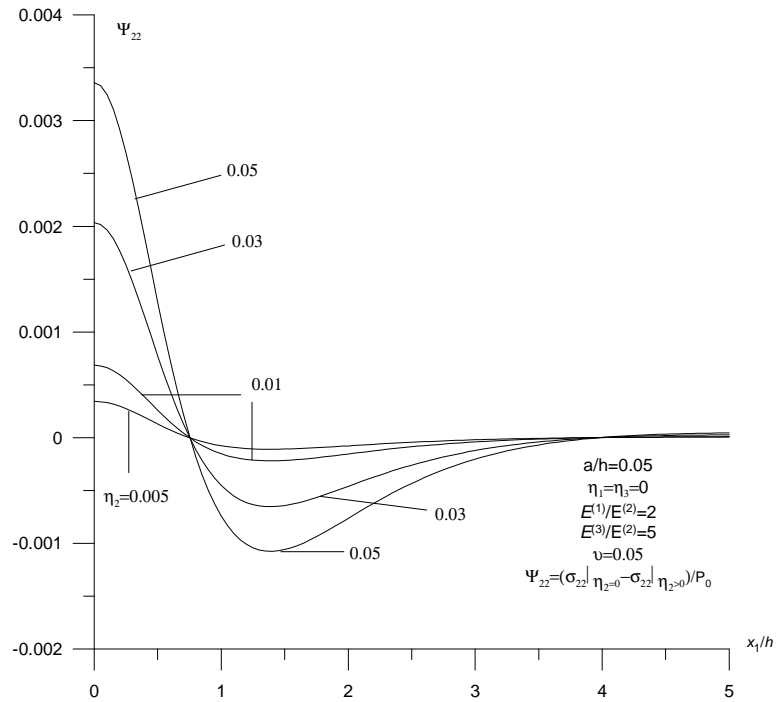
Şekil 3. 11  $a/h=3$ ,  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=5$  için, farklı  $\nu$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\sigma_{22}(x_1)$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



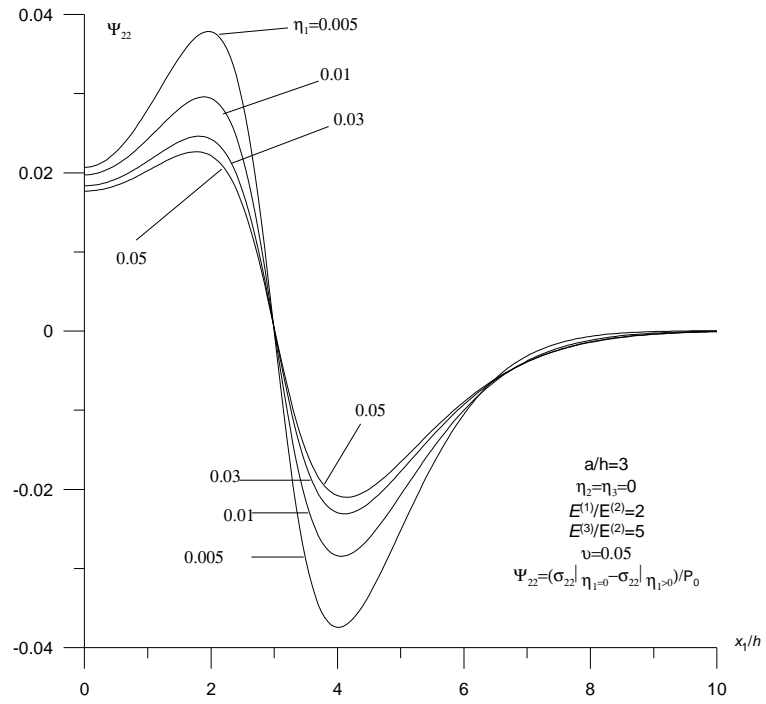
Şekil 3. 12  $a/h=3$ ,  $\eta_1=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=5$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_2$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



Şekil 3. 13  $a/h=1$ ,  $\eta_1=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=5$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_2$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



Şekil 3. 14  $a/h=0.05$ ,  $\eta_1=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=5$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_2$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_2=0} - \sigma_{22}|_{\eta_2>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi



Şekil 3. 15  $a/h=3$ ,  $\eta_2=\eta_3=0$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=2$ ,  $E^{(3)}/E^{(2)}=5$ ,  $\nu=0.05$  için, farklı  $\eta_1$  değerlerine göre ara yüzeyde  $\Psi_{22} = (\sigma_{22}|_{\eta_1=0} - \sigma_{22}|_{\eta_1>0})/p_0$  ile  $x_1/h$  ilişkisi

#### 4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Tez kapsamında yapılan araştırmalarda elde edilen sayısal sonuçlar ve değerlendirmesi hakkında aşağıdakiler söylenebilir:

1. Tez kapsamında, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu doğrusallaştırılmış dalga yayılımı teorisi (ÜDEDYT) uygulanarak ön gerilmeli tek ve ön gerilmeli çift tabaka ile örtülü ön gerilmeli yarı düzlemde sabit hızla hareket eden doğrusal tekil ve düzgün yayılı şerit yükün dinamik etkisi “sesten yavaş” durumlar için incelenmiştir.
2. Uygun sınır değer problemlerinin matematiksel formülasyonu yapılmış, inceleme ideal ve ideal olmayan temas koşulları için ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir.
3. Formülasyonu yapılan sınır değer problemlerinin çözümü, belirli bir aşamaya kadar analitik olarak yapılmış ve daha sonra sayısal sonuçlar elde etmek için uygun algoritma geliştirilmiş ve uygulanmıştır.
4. Probleme ait çeşitli parametreler için kritik hız değeri hesaplanmış ve bu parametrelerin özellikle örtük tabaka (lar) ve yarı düzlemdeki ön gerilmelerin, hareketli yükün kritik hız değeri üzerindeki etkisi incelenmiştir.
5. Her bir problem için yapılan algoritma ve bilgisayar programlarından elde edilen sayısal sonuçlar biri diğeri ile ve özel durumlarda, literatürdeki uygun sonuçlar ile karşılaştırılarak test edilmiştir.

Tezde verilen çok sayıdaki sayısal sonucun değerlendirmesi aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Kritik hız, tek plakalı durum için bakıldığında yalnızca örtük plaka (yarı düzlem) Young modüllerinin  $e > 1$  ( $e = E^{(1)}/E^{(2)}$ ) olduğu durumda meydana gelmektedir. Diğer bir deyişle kritik hız ‘sert tabaka+yumuşak yarı düzlem’ durumunda meydana gelmektedir.
2. İki plakalı durum için  $e_1 > e_2$ ,  $e_2 > 1$  durumunda ortadaki plakanın varlığı kritik hız değerlerinde artışa neden olmaktadır; ortadaki plakanın kalınlığının artması kritik hız değerlerinde azalmaya neden olur;  $e_1 < 1$ ,  $e_1 = e_2$ , durumunda  $H < H_*$  için kritik hız vardır, bununla beraber orta plakanın bazı değerlerinde  $H > H_*$  durumu için kritik hız yoktur.
3. Plakalar ve yarı düzleme etki eden ön gerilme kritik hız değerinde artışa neden olur.

4. Üst plakaya etki eden öngerilmenin kritik hız değerleri üzerindeki etkisi, orta plaka ve yarı düzleme etki eden ön gerilmenin kritik hız değerleri üzerindeki etkisinden daha fazladır
5. Kritik hız değeri,  $e$  değeri arttıkça azalmaktadır.
6. Yarı düzlemde ki ön basınç değeri arttıkça kritik hız değeri azalmaktadır ve ideal temas koşulları için elde edilen kritik hız ideal olmayan temas koşulları için elde edilen kritik hızdan daha büyüktür.
7. Ayrıca örtük plakalar ile yarı düzlem arasındaki ara yüzeyde bulunan gerilme dağılımı  $\sigma_{22}$  ve hareketli yükün hızının ve ön gerilmelerin bu gerilme dağılımına olan etkisi incelenmiş, sonuçlar grafikler halinde verilmiştir.

Tezde elde edilen sonuçların bir kısmı Akbarov v. d. (2007c) ,Dincsoy v.d. (2009), Güler ve Dinçsoy (2005) kaynaklarında gösterilen uluslararası ve ulusal mekanik kongrelerinde sunulmuştur.

**KAYNAKLAR**

Achenbach J. D, Keskava S. P. , Herrman G. ,(1967), “Moving Load on a Plate Resting on an Elastic Half Space”, *Trans. ASME, Ser. E. , Journal of Appl. Mech. ,* 34(4):183–189.

Akbarov S. D. and Guz A. N. , (2004), “Axisymmetric Longitudinal Wave Propagation in Pre-Stressed Compound Circular Cylinders,” *Int. J. Eng. Sci. ,* 42: 769–791.

Akbarov S. D. and Ozaydin O. , (2001a), “The Effect of Initial Stresses on Harmonic Stress Field Within the Stratified Half Plane,” *Eur. J. Mech. A/Solids,* 20: 385–396.

Akbarov S. D. and Ozaydin O. , (2001b), “Lamb’s Problem for an Initially Stressed Stratified Half-Plane,” *Int. Appl. Mech. ,* 37(10): 1363–1367.

Akbarov S. D. and Ozisik M. , (2003), “The Influence of the Third Order Elastic Constants to the Generalized Rayleigh Wave Dispersion in a Pre-Stressed Stratified Half-Plane,” *Int. J. Eng. Sci.,* 41: 2047–2061.

Akbarov S. D. and Ozisik M. , (2004), “Dynamic Interaction of a Prestressed Nonlinear Elastic Layer and a Half-Plane,” *Int. Appl. Mech. ,* 40(9): 137–144.

Akbarov S. D. , Yahnioglu N. , and Yucel A. M. , (2004), “On the Influence of the Initial Tension of a Strip with a Rectangular Hole on the Stress Concentration Caused by Additional Loading,” *J. Strain Anal. ,* 39(6): 615–624.

Akbarov S. D. , Emiroglu I. , and Tasci F. , (2005), “The Lamb’s Problem for a Half-Space Covered with the Pre-Stretched Layer,” *Int. J. Mech. Sci. ,* 45: 1326–1349.

Akbarov S. D. and Guler C., (2005), “Dynamical (Harmonic) Interface Stress Field in the Half-Plane Covered by the Prestressed Layer under a Strip Load,” *J. Strain Anal.,* 40(3): 225–235.

Akbarov S. D. , Zamanov A. D., and Suleimanov T. R., (2005), “Forced Vibration of a Prestretched Two-Layer Slab on a Rigid Foundation,” *Mech. Comp. Mater.,* 41(3): 229–240.

Akbarov S. D. , (2006a), “The Influence of the Third Order Elastic Constants on the Dynamical Interface Stress Field in a Half-Space Covered with a Pre-Stretched Layer,” *Int. J. Non-Linear Mech. ,* 41: 417–425

Akbarov S. D. , (2006b), “Dynamical (time-harmonic) Axisymmetric Interface Stress Field in the Finite Pre-Strained Half-Space Covered with the Finite Pre-Stretched Layer,” *Int. J. Eng. Sci.,* 44: 93–112.

Akbarov S. D. , (2006c), “On the Dynamical Axisymmetric Stress Field in a Finite Pre-Stretched Bilayered Slab Resting on a Rigid Foundation,” *J. Sound Vibr.,* 294: 221–237.

Akbarov S. D. , (2006d), “Frequency Response of the Axisymmetrically Finite Pre-Stretched Slab From Incompressible Functionally Graded Material on a Rigid Foundation,” *Int. J. Eng. Sci.,* 44: 484–500.

Akbarov S. D. , (2007a), “The Axisymmetric Lamb’s Problem for the Finite Pre-Strained Half-Space Covered with a Finite Prestretched Layer”, *Int. Appl. Mech.,* 43(3): 351–360.

Akbarov S. D. , (2007b), “Recent Investigations on the Dynamical Problems of the Elastic Body with Initial (Residual) Stresses(review)”, *Int. Appl. Mech. ,* 43(12):3–27

- Akbarov S. D. , Guler C. , Dincsoy E. , (2007c), “The Critical Speed of a Moving Load on a Prestressed Plate Resting on a Prestressed Half-Plane”, *Mech. Comp. Mater.* , 43(2):173–182.
- Arnold L. ,(1983), “The Critical Velocity of a Load Moving on a Plate that is Subjected to in-Plane forces”, *Cold Region Science and Technology*, 6: 267–274.
- Auersch L. , (2006), “Ground Vibration due to Railway Traffic-Calculation of the Effects of Moving Static Loads and their Experimental Verification. ”, *Journal of Sound and Vibration*, 293:599–610.
- Babich S. Yu. , Glukhov Yu. P. , and Guz A. N. , (1986), “Dynamics of a Layered Compressible Pre-Stressed Half-Space under the Influence of Moving Load,” *Int. Appl. Mech.*, 22(6): 808–815.
- Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. , and Guz A. N. , (1988), “Toward the Solution of the Problem of the Action of a Live Load on a Two-Layer Half-Space with Initial Stresses,” *Int. Appl. Mech.*, 24(8): 775–780.
- Babbich S. Yu. ,Glukhov Yu. P. ,Guz A. N. ,(2008a), “Dynamics of Layered Incompressible Semi-Space with Initial Stresses under Action of a Moving Load”, *Int. Appl. Mech.*, 44(3): 36-54.
- Babbich S. Yu. ,Glukhov Yu. P. ,Guz A. N. ,(2008b), “Dynamics of a Pre-Stressed Incompressible Layered Half-Space Under Moving Load”, *Int. Appl. Mech.*, 44(3): 268-285.
- Babbich S. Yu. ,Glukhov Yu. P. ,Guz A. N. ,(2008c), “To Certain Problem Problem for a Layered Compressible Semi-Space with Initial Stresses”, *Int. Appl. Mech.* , 44(4): 35–55.
- Babbich S. Yu. ,Glukhov Yu. P. ,Guz A. N. ,(2008d), “Dynamics of a Pre-Stressed Compressible Layered Half-Space Under Moving Load”, *Int. Appl. Mech.*, 44(4): 388-405.
- Bespalova E. I. , (2007), “Reaction of an Anisotropic Cylindrical Shell to a Moving Load”, *International Applied Mechanics*, 43(4):425–431
- Biot M. A. ,(1965), *Mechanics of Incremental Deformations.*,Wiley, New York.
- Chakraborty and S. Gopalakrishnan, (2004a), “A Spectrally Formulated Finite Element for Wave Propagation Analysis in Layered Composite Media,” *Int. J. Solids Struct.* , 41(18): 5155–5183.
- Chakraborty and S. Gopalakrishnan, (2004b), “Thermoelastic Wave Propagation in Anisotropic Layered Media: a Spectral Element Formulation” , *Int. J. Comp. Meth.*, 1(3): 535–567.
- Chen Y. H. , Huang Y. H. , (2000), “Dynamic Stiffness of Infinite Timoshenko Beam on Viscoelastic Foundation in Moving Co-Ordinate”, *Int. Jour. for Num. Meth. in Engi.*, 48:1-18.
- Degrande G. and Schillemans L. , (2001), “Free Fields Vibration During the Passage of a Thalys High Speed Train at Variable Speed. ”, *Journal Sound and Vibration*, 247(1):131–144.
- Dieterman H. A. , Metrikine A.V. , (1997), “Critical Velocities of a Harmonic Load Moving Uniformly Along an Elastic Layer.”, *Trans. ASME J. of Applied Mechanics*, 64:596–600.
- Dincsoy E. , Guler C. , Akbarov S. D. , (2009), “Dynamical Response of a Prestrained System Comprising a Substrate and Bond and Covering Layers to a Moving Load”, *Mechanics of Composite Materials*, 45(5):527–536.

- Elishakoff and Guide Z. , (2004), “Analytical Polynomial Solutions for Vibrating Axially Graded Beams,” *Mech. Adv. Mater.Struct.*, 11: 517–533.
- Emiroglu I., Tasci F., and Akbarov S. D., (2004), “Lamb Problem for a Half-Space Covered with a Two-Axially Prestretched Layer,” *Mech. Comp. Mater.*, 40(5): 379–388.
- Engelbrecht, (1997), “Nonlinear wave dynamics: Complexity and simplicity”, Kluwer, Dordrecht.
- Eringen C. and Suhubi E. S. , (1975a), “Elastodynamic, V. 1. Finite Motions”, Academic Press, New York.
- Eringen C. and Suhubi E. S. , (1975b), “Elastodynamic, V. 2. Linear Theory”, Academic Press, New York.
- Gladwell G. M. L., (1968), “The Calculation of Mechanical Impedances Related with the Surface of a Semi-Infinite Elastic body,” *J. Sound Vibr.*, 8: 215–219.
- Green A. E. , Rivlin R. S. , Shield R. T. , (1952) “General Theory of Small Elastic Deformations Superposed on Finite Elastic Deformations”, *Proceeding of the Royal Society of London A*, 211:128–154.
- Guler C. and Akbarov S. D. , (2004), “Dynamic (harmonic) Interfacial Stress Field in a half-Plane Covered with a Prestretched Soft Layer,” *Mech. Comp. Mater.*, 40(5): 379–388.
- Güler C. , Dinçsoy E., (2005), “Öngerilmeli Tabaka ile Örtülü Yarı Düzleme Etki Eden Hareketli Noktasal Yükün Kritik Hızının İncelenmesi”, 14. Ulusal Mekanik Kongresi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Antakya, 12-16 Eylül.
- Guz A. N., (1978), “Linearized Theory of Propagation of Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses,” *Int. Appl. Mech.*, 14(4): 339–362.
- Guz A. N. and Koshman V. P. , (1980), “Nonstationary Problem of the Theory of Elasticity for an Incompressible Half-Plane with Initial Stresses,” *Dokl. AN Ukr. SSR, Ser. A*, 8: 39–49.
- Guz A. N., (1986a), *Elastic Waves in a Body with Initial Stresses, I. General Theory* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev.
- Guz A. N. , (1986b), *Elastic Waves in a Body with Initial Stresses, II. Propagation Laws* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev.
- Guz A. N. and Makhort F. G. , (2000), “The Physical Fundamentals of the Ultrasonic Nondestructive Stress Analysis of Solids,” *Int. Appl. Mech.*, 36(9): 1119–1148.
- Guz A. N., (2002), *Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses*, *Int. Appl. Mech.*, 38(19): 23–59.
- Guz A. N. , (2004), *Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses* [in Russian], A.S.K. , Kiev.
- Guz A. N. , Roger A. A. , and Guz I. A. , (2005), “Developing a Compressive Failure Theory for Nanocomposites”, *Int. Appl. Mech.* , 41(3): 233–255.
- Guz A. N. , (2006), “Three-Dimensional theory of Stability of a Carbon Nanotube in a Matrix,” *Int. Appl. Mech.*, 42(1): 19–31.

- Guz A. N. and Guz I. A. , (2006), “On Models in the Theory of Stability of Multiwalled Carbon Nanotubes in Matrix”, *Int. Appl Mech.*, 42(6): 617–628.
- Hussein M. F. M., Hunt H. E. M. , (2006), “Modelling of Floating-Slab Tracks with Continuous Slabs under Oscillating Moving Loads”, *Journal of Sounds and Vibrations*, 297:37-54
- Ilschner and Cherradi N. (eds.), (1994), *Proc. 3rd Int. Symp. on Structural and Functional Graded Materials (FGM 94)*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Switzerland.
- Johnson L. , (1985), “Contact Mechanics”, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kerr A.D. ,(1983),”The Critical Velocities of a Load Moving on a Floating Ice Plate That is Subjected to in-Plane Forces.”, *Cold Region Science and Technology*, 6(3):267-274.
- Karlström A. , (2006), “An Analytical Model for Ground Vibrations from Accelerating Trains. ”, *Journal of Sound and Vibration*, 293:587–598.
- Koshman V. P. , (1980a), “Dynamics of an Incompressible Half-Plane with Initial Strains,” *Int. Appl. Mech.* , 16(9): 817–822.
- Koshman V. P. , (1980b), “Lamb’s Plane Problem for a Compressible Half-Space with Initial Stresses,” *Int. Appl. Mech.* , 16(10): 912–917.
- Madshus C. ,Kaynia A. M. ,(2000), “High Speed Railway Lines on Soft Ground: Dynamic Behaviour at Critical Train Speed. ”, *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):689–701.
- Maugin G. A. , (1999), “Nonlinear waves in elastic crystals”, Oxford University Press, Oxford.
- Metrikine A. V. Vrounwenvelde,A.C.W., (2000), “Surface Ground Vibration due to a Moving Train in a Tunnel:Two Dimensional Model.”, *Journal of Sound and Vibration*, 234(1):43-66.
- Murnaghan F. D. , (1951), “Finite deformation of an elastic solid”, Willey and Sons, New York.
- Ozisk, (2003), “Generalized Rayleigh Waves Dispersion in a Pre-stressed Half-Plane Covered with a Pre-stressed Layer”, Doctoral Dissertation, Yildiz Technical University, Istanbul.
- Ozisk and Akbarov S. D. , (2003), “Rayleigh-Wave Propagation in a Half-Plane Covered with a Prestressed Layer under Complete and Incomplete Interfacial Contact,” *Mech. Comp. Mater.*, 39(2): 177–182.
- Piotr K., Cristinel M., İbrahim E. , (2008), “Wavelet Approach to Vibratory Analysis of Surface due to Load Moving in the Layer”, *Int. Jour. of Solid and Structures*, 45: 2140–2159.
- Reddy N. , (2000), “Analysis of Functionally Graded Plates”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 47, 663–684.
- Rizzi S. A. and Doyle J. F. , (1992), “A Spectral Element Approach to Wave Motion in Layered Solids”, *J. Vibr. Acoust.* , 114: 569–577.
- Robertson A. , (1996), “Forced Vertical Vibration of a Rigid Circular Disc on a Semi-Infinite Solid”, *Proc. Cambr. Philosoph. Soc.* , 62: 547–557.

- Shiota and Miyamoto Y. (eds.), (1997), “FGM 96 Functionally Graded Materials”, Elsevier, Amsterdam.
- Suiker A. S. J., Borst R., Esveld C., (1998), “Critical Behaviour of a Timoshenko Beam- Half Plane System under a Moving Load”, *Appl. Mech.*, 68:158-168.
- Suresh S. and Mortensen A. , (1998), “Fundamentals of Functionally Graded Materials”, IOM Communications Ltd., London.
- Tadeu, Antonio J. , and Godinho L. , (2001), “Green’s Function for Two-and-a-Half Dimensional Elastodynamics Problems in a Half-Space,” *Comp. Mech.* , 27: 484–491.
- Tasci F. , Emiroglu I. , and Akbarov S. D. , (2005), “On the “Resonance” Values of the Dynamical Stresses in the System Comprises Two-Axially Pre-Stretched Layer and Half-Space,” in: 7th Int. Conf. on Vibration Problems, ICOVP–2005, Isik University, Sile, September 5–9, Abstracts, p. 100.
- Timoshenko S. P. and Goodier J. N. , (1975), “Theory of Elasticity, McGraw-Hill”, New York.
- Tolstoy and Usdin E. , (1953), “Dispersive Properties of Stratified Elastic and Liquid Media. A Ray Theory,” *Geophysics*, 18: 844–870.
- Truestell C. , Noll W. ,(1965), “The Nonlinear Field Theories of Mechanics”, In:E. Flugge(Ed.), *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin, New York, 3/3.
- Vetnitskii A.I., (1991), *Wave dynamics of machines* (K.V. Frolow, editor) 15:30. Moscow:Nauka. *Wave effects in elastic systems.*, in Russian.
- Vetnitskii A.I., Metrikine A.V., (1993), “Parametric Instability in the Oscillations of a Body Moving Uniformly in a Periodically Inhomogeneous Elastic System.”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.*, 34:226-271.
- Wang Y. and Achenbach J. D. , (1996), “Lamb’s Problem for Solids of General Anisotropy,” *Wave Motion*, 24: 227–242.
- Yahnioğlu N. , (2007), “On the Stres Distribution in the Pre-Strained Simply Supported Strip Containing Two Neighbouring Circular Holes Under Vibration.”, *Int. Appl. Mech.* ,43(10):135–140.
- Zhuk Yu. A. and Guz I. A. , (2006), “Influence of Prestress on the Velocities of Plane Waves Propagating Normally to the Layers of Nanocomposites,” *Int. Appl. Mech.*, 42(7): 729–743.
- Zhuk Yu. A. and Guz I. A. , (2007), “Feature of Plane Wave propagation Along the Layers of a Pre- Strained Nanocomposites.” *Int. Appl. Mech.* , 43(4): 361–379.

**EKLER**

**Ek 1** (2. 43) ve (2. 45)'deki  $\|A_{nm}(s)\|$  matrisinin bileşenlerinin ideal temas koşulları için ifadeleri.

$$\alpha_{11}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{21}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1}} (is) + \sqrt{q_1} \right], \alpha_{31}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1}h} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1}} \right)$$

$$\alpha_{41}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{51}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1}h}, \alpha_{61}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_1}h} \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1}} is + \sqrt{q_1} \right)$$

$$\alpha_{12}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1}} (is) + \sqrt{q_1} \right], \alpha_{32}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_1}h} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1}} \right)$$

$$\alpha_{42}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{52}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1}h}, \alpha_{62}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1}h} \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_1}} is + \sqrt{q_1} \right)$$

$$\alpha_{13}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{23}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2}} (is) + \sqrt{q_2} \right], \alpha_{33}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2}h} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2}} \right)$$

$$\alpha_{43}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{53}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2}h}, \alpha_{63}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_2}h} \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2}} is + \sqrt{q_2} \right)$$

$$\alpha_{14}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{24}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2}} (is) + \sqrt{q_2} \right], \alpha_{34}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_2}h} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2}} \right)$$

$$\alpha_{44}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{54}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2}h}, \alpha_{64}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2}h} \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}\sqrt{q_2}} is + \sqrt{q_2} \right)$$

$$\alpha_{11}^{(2)} = 0, \alpha_{21}^{(2)} = 0, \alpha_{31}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1}h} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1}} \right), \alpha_{41}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1}h} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{51}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1}h}, \alpha_{61}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1}h} \mu^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1}} is + \sqrt{q_1} \right)$$

$$\alpha_{12}^{(2)} = 0, \alpha_{22}^{(2)} = 0, \alpha_{32}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2}h} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2}} \right), \alpha_{42}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2}h} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{52}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2}h}, \alpha_{62}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2}h} \mu^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2}} is + \sqrt{q_2} \right)$$

Tekil yük için;  $\beta_1 = p_0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0$

Yayıllı yük için;  $\beta_1 = \frac{-p_0}{a} \frac{\text{Sins}a}{s}, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0$

**Ek 2** (2. 44) ve (2. 46)'deki  $\|A_{nm}(s)\|$  matrisinin bileşenlerinin ideal olmayan temas koşulları için ifadeleri.

$$\alpha_{11}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{21}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{31}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right], \alpha_{41}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{51}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_1^{(1)}}} \right), \alpha_{61}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{12}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{32}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right], \alpha_{42}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{52}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_1^{(1)}}} \right), \alpha_{62}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{13}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{23}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{33}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right], \alpha_{43}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{53}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_2^{(1)}}} \right), \alpha_{63}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{14}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{24}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{34}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right], \alpha_{44}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{54}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1\sqrt{q_2^{(1)}}} \right), \alpha_{64}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}}h} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{11}^{(2)} = 0, \alpha_{21}^{(2)} = 0, \alpha_{31}^{(2)} = 0, \alpha_{41}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{51}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_1^{(2)}}} \right), \alpha_{61}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{12}^{(2)} = 0, \alpha_{22}^{(2)} = 0, \alpha_{32}^{(2)} = 0, \alpha_{42}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{52}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right), \alpha_{62}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h} \mu^{(1)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

Tekil yük için;  $\beta_1 = p_0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0$ .

Yayılı yük için;  $\beta_1 = \frac{p_0}{a} \frac{\text{Sinsa}}{s}, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0$

**Ek 3** (3. 47) ve (3. 48)'deki  $\|A_{nm}(s)\|$  matrisinin bileşenlerinin ideal temas koşulları için ifadeleri.

$$\alpha_{11}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{21}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_1^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{31}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right), \alpha_{41}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{51}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1}, \alpha_{61}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right), \alpha_{71}^{(1)} = 0, \alpha_{81}^{(1)} = 0, \alpha_{91}^{(1)} = 0, \alpha_{101}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{12}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_1^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{32}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right), \alpha_{42}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{52}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1}, \alpha_{62}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left( \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right), \alpha_{72}^{(1)} = 0, \alpha_{82}^{(1)} = 0, \alpha_{92}^{(1)} = 0, \alpha_{102}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{13}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{23}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_2^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{33}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right), \alpha_{43}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{53}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1}, \alpha_{63}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right), \alpha_{73}^{(1)} = 0, \alpha_{83}^{(1)} = 0, \alpha_{93}^{(1)} = 0, \alpha_{103}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{14}^{(1)} = \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}, \alpha_{24}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} (is) + \sqrt{q_2^{(1)}} \right]$$

$$\alpha_{34}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right), \alpha_{44}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left[ \left( \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \right) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right]$$

$$\alpha_{54}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1}, \alpha_{64}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left( \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right), \alpha_{74}^{(1)} = 0, \alpha_{84}^{(1)} = 0, \alpha_{94}^{(1)} = 0, \alpha_{104}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{11}^{(2)} = 0, \alpha_{21}^{(2)} = 0, \alpha_{31}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right), \alpha_{41}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{51}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1}, \alpha_{61}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right)$$

$$\alpha_{71}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{81}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)}$$

$$\alpha_{91}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right], \alpha_{101}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{12}^{(2)} = 0, \alpha_{22}^{(2)} = 0, \alpha_{32}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right), \alpha_{42}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{52}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1}, \alpha_{62}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left( \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right)$$

$$\alpha_{72}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{82}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)}$$

$$\alpha_{92}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right], \alpha_{102}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{13}^{(2)} = 0, \alpha_{23}^{(2)} = 0, \alpha_{33}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right), \alpha_{43}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{53}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1}, \alpha_{63}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right)$$

$$\alpha_{73}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{83}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)}$$

$$\alpha_{93}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right], \alpha_{103}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{14}^{(2)} = 0, \alpha_{24}^{(2)} = 0, \alpha_{34}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right), \alpha_{44}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{54}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1}, \alpha_{64}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left( \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right)$$

$$\alpha_{74}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{84}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)}$$

$$\alpha_{94}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right], \alpha_{104}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)} \sqrt{q_2^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{11}^{(3)} = 0, \alpha_{21}^{(3)} = 0, \alpha_{31}^{(3)} = 0, \alpha_{41}^{(3)} = 0, \alpha_{51}^{(3)} = 0, \alpha_{61}^{(3)} = 0$$

$$\alpha_{71}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_1^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right], \alpha_{81}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)}$$

$$\alpha_{91}^{(3)} = e^{-\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(3)}} \right], \alpha_{101}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_1^{(3)}}} \right)$$

$$\alpha_{12}^{(3)} = 0, \alpha_{22}^{(3)} = 0, \alpha_{32}^{(3)} = 0, \alpha_{42}^{(3)} = 0, \alpha_{52}^{(3)} = 0, \alpha_{62}^{(3)} = 0$$

$$\alpha_{72}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_2^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right], \alpha_{82}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)}$$

$$\alpha_{92}^{(3)} = e^{-\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)} \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(3)}} \right], \alpha_{102}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)} \sqrt{q_2^{(3)}}} \right)$$

Tekil yük için;

$$\beta_1 = p_0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0, \beta_7 = 0, \beta_8 = 0, \beta_9 = 0, \beta_{10} = 0.$$

Yayıllı yük için;

$$\beta_1 = \frac{p_0}{a} \frac{\text{Sinsa}}{s}, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0, \beta_7 = 0, \beta_8 = 0, \beta_9 = 0, \beta_{10} = 0$$

**Ek 4** (3. 47) ve (3. 48)'deki  $\|A_{nm}(s)\|$  matrisinin bileşenlerinin ideal olmayan temas koşulları için ifadeleri.

$$\alpha_{11}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right], \alpha_{21}^{(1)} = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}$$

$$\alpha_{31}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{41}^{(1)} = e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right)$$

$$\alpha_{51}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right], \alpha_{61}^{(1)} = 0, \alpha_{71}^{(1)} = 0, \alpha_{81}^{(1)} = 0, \alpha_{91}^{(1)} = 0, \alpha_{101}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{12}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right], \alpha_{22}^{(1)} = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}$$

$$\alpha_{32}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_1^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{42}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right)$$

$$\alpha_{52}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_1^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_1^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(1)}} \right], \alpha_{62}^{(1)} = 0, \alpha_{72}^{(1)} = 0, \alpha_{82}^{(1)} = 0, \alpha_{92}^{(1)} = 0, \alpha_{102}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{13}^{(1)} = -\mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right], \alpha_{23}^{(1)} = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}$$

$$\alpha_{33}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{43}^{(1)} = e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right)$$

$$\alpha_{53}^{(1)} = -e^{\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right], \alpha_{63}^{(1)} = 0, \alpha_{73}^{(1)} = 0, \alpha_{83}^{(1)} = 0, \alpha_{93}^{(1)} = 0, \alpha_{103}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{14}^{(1)} = \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right], \alpha_{24}^{(1)} = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)}$$

$$\alpha_{34}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left[ (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{q_2^{(1)} + c_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + is\lambda^{(1)} \right], \alpha_{44}^{(1)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right)$$

$$\alpha_{54}^{(1)} = e^{-\sqrt{q_2^{(1)}} h_1} \mu^{(1)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(1)}}}{b_1^{(1)}} + \frac{c_1^{(1)}}{b_1^{(1)} \sqrt{q_2^{(1)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(1)}} \right], \alpha_{64}^{(1)} = 0, \alpha_{74}^{(1)} = 0, \alpha_{84}^{(1)} = 0, \alpha_{94}^{(1)} = 0, \alpha_{104}^{(1)} = 0$$

$$\alpha_{11}^{(2)} = 0, \alpha_{21}^{(2)} = 0, \alpha_{31}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{41}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right), \alpha_{51}^{(2)} = 0, \alpha_{61}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{71}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{81}^{(2)} = e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{91}^{(2)} = 0, \alpha_{101}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{12}^{(2)} = 0, \alpha_{22}^{(2)} = 0, \alpha_{32}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{42}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right), \alpha_{52}^{(2)} = 0, \alpha_{62}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{72}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_1^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{82}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{92}^{(2)} = 0, \alpha_{102}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_1^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_1^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{13}^{(2)} = 0, \alpha_{23}^{(2)} = 0, \alpha_{33}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{43}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right), \alpha_{53}^{(2)} = 0, \alpha_{63}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{73}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{83}^{(2)} = e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1\sqrt{q_2^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{93}^{(2)} = 0, \alpha_{103}^{(2)} = -e^{\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{14}^{(2)} = 0, \alpha_{24}^{(2)} = 0, \alpha_{34}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right]$$

$$\alpha_{44}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right), \alpha_{54}^{(2)} = 0, \alpha_{64}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}h_1} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{74}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} \right) \frac{q_2^{(2)} + c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + is\lambda^{(2)} \right], \alpha_{84}^{(2)} = -e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right)$$

$$\alpha_{94}^{(2)} = 0, \alpha_{104}^{(2)} = e^{-\sqrt{q_2^{(2)}}(h_1+h_2)} \mu^{(2)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(2)}}}{b_1^{(2)}} + \frac{c_1^{(2)}}{b_1^{(2)}\sqrt{q_2^{(2)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(2)}} \right]$$

$$\alpha_{11}^{(3)} = 0, \alpha_{21}^{(3)} = 0, \alpha_{31}^{(3)} = 0, \alpha_{41}^{(3)} = 0, \alpha_{51}^{(3)} = 0, \alpha_{61}^{(3)} = 0$$

$$\alpha_{71}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_1^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right], \alpha_{81}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}\sqrt{q_1^{(3)}}} \right)$$

$$\alpha_{91}^{(3)} = e^{\sqrt{q_1^{(3)}}(h_1+h_2)} \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_1^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}\sqrt{q_1^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_1^{(3)}} \right], \alpha_{101}^{(3)} = 0$$

$$\alpha_{12}^{(3)} = 0, \alpha_{22}^{(3)} = 0, \alpha_{32}^{(3)} = 0, \alpha_{42}^{(3)} = 0, \alpha_{52}^{(3)} = 0, \alpha_{62}^{(3)} = 0$$

$$\alpha_{72}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)} \left[ \left( \lambda^{(3)} + 2\mu^{(3)} \right) \frac{q_2^{(3)} + c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}} + is\lambda^{(3)} \right], \alpha_{82}^{(3)} = -e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)} \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}\sqrt{q_2^{(3)}}} \right)$$

$$\alpha_{92}^{(3)} = e^{\sqrt{q_2^{(3)}}(h_1+h_2)} \mu^{(3)} \left[ \left( \frac{\sqrt{q_2^{(3)}}}{b_1^{(3)}} + \frac{c_1^{(3)}}{b_1^{(3)}\sqrt{q_2^{(3)}}} \right) is + \sqrt{q_2^{(3)}} \right], \alpha_{102}^{(3)} = 0$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = p_0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0, \beta_6 = 0, \beta_7 = 0, \beta_8 = 0, \beta_9 = 0, \beta_{10} = 0$$

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 31.01.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1992–1995 Pertevniyal Lisesi

Lisans 1995–1999 Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2000–2003 Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora 2003-2009 Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

**Çalıştığı kurum(lar)**

1999–2000

İSKO Makine

2000-Devam ediyor YTÜ Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Müh. Bölümünde Araştırma Görevlisi