

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CARNOT GRUPLARI ÜZERİNDEKİ
AFİN KONTROL SİSTEMLERİNİN
KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ**

Memet KULE

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 26 Aralık 2008
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ayşe KARA (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ulviye BAŞER (İTÜ)
: Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
: Prof. Dr. Ömer GÖK (YTÜ)
: Doç. Dr. Meral TOSUN (GSÜ)

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÇİZELGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	2
2.1 Manifold	2
2.2 Lie Grupları	5
2.3 Lie Cebiri	6
3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ	8
3.1 R^n üzerindeki Afın Kontrol Sistemleri	10
4. LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ	12
4.1 Carnot Grubu	13
4.1.1 Dilation Etkisi	13
4.1.2 Carnot Grubunun Örnekleri	14
4.1.3 Carnot Grubu Otomorfizmaları	15
5. BAZI LİE CEBİRLERİ İÇİN HESAPLAMALAR	19
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	44

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5.1 2.Dereceden Nilpotent Lie Grupları	39
Çizelge 5.2 3.Dereceden Nilpotent Lie Grupları	40
Çizelge 5.3 4.Dereceden Nilpotent Lie Grupları	40
Çizelge 5.4 5.Dereceden Nilpotent Lie Grupları	41

ÖNSÖZ

Bu doktora çalışması sırasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen bilgisi ile çalışmamı yönlendiren Sayın hocam Doç.Dr. Ayşe KARA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez izleme komitesinde görev alarak çalışmalarına katkı sağlayan Prof.Dr. Ulviye BAŞER ve Prof.Dr. A. Göksel AĞARGÜN'e şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım süresince bana destek olan eşim ve kızıma da teşekkür ederim.

ÖZET

CARNOT GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

Memet KULE
Matematik Bölümü, Doktora Tezi

G basit bağlantılı nilpotent bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olsun. Eğer $L(G)$ 'nin vektör alanları $1 \leq j < r$ için $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ ve $[V_1, V_r] = 0$ şeklinde $V_1, L(G)$ 'nin tümünü üretiyorsa G 'ye Carnot grubu denir. Bu grup üzerinde tanımlanmış afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilmesi için sistemin tekil noktalarının varlığı ve afin sisteme ilişik olan bilinear kısmının kontrol edilebilirliği ile olan ilişkisi karakterize edilmiştir.

Ayrıca 6. boyuta kadar bütün nilpotent Lie cebirlerinin merkezleri, regüler elemanları ve free nilpotent üreteçleri hesaplanmış ve tablo halinde sınıflandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kontrol edilebilirlik, Afin cebir, Carnot grubu, Nilpotent Lie cebiri

ABSTRACT

CONTROLLABILITY OF AFFINE CONTROL SYSTEMS ON CARNOT GROUPS

Memet KULE

Dept. Of Maths., Ph.D. Thesis

Let G be a simply connected nilpotent Lie group and $L(G)$ be its Lie algebra. If vector fields of $L(G)$ produce the algebra such that for $1 \leq j < r$, $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ and $[V_1, V_r] = 0$, then G is called a Carnot group. For the controllability of affine control systems defined on this group, connections of existence singular points of the system and controllability of associated bilinear part has been characterized.

Moreover; centers, regular elements and free nilpotent generators of all nilpotent Lie algebras of up to dimension 6 has been calculated and listed in tables.

Keywords : Controllability, Affine algebra, Carnot group, Nilpotent Lie algebra

1. Giriş

Bu tez çalışmasının asıl amacı diferansiyel geometrik bakış açısından, topolojik ve cebirsel yaklaşımlar ile Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği için genel bir sonuç elde etmektir. Bu problem ve yaklaşım ile ilgili, ilk olarak yayınlanmış (Jurđjevic ve Sallet, 1984) sonuçları mevcuttur. Daha sonra yapılan bazı çalışmalar takip edildiğinde, en son varılan genel durumun Genelleştirilmiş Heisenberg Lie Grubu üzerinde olduğu görülmektedir.

Lie grupları üzerinde yapılmış ilk kontrol edilebilirlik çalışması ise (Brockett, 1972)'a aittir. Daha sonra (Jurđjevic ve Sussmann, 1972) yayınladıkları makale ile Lie Grupları üzerindeki kontrol sistemlerinin sistematik matematiksel çalışmasını başlatmışlardır.

Bu çalışmanın amacı, daha genel bir durum uzayı üzerinde kontrol edilebilirlik problemi için genel bir sonuç elde etmektir. Bu amaçla, Carnot grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri incelenmiştir. Ayrıca, 6. boyuta kadar bütün nilpotent Lie cebirlerinin merkezleri, regüler elemanları ve free nilpotent üreteçleri hesaplanmıştır.

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm de konu hakkında genel kavramlar verilmektedir. II. bölüm de genel kontrol tanımı verilip, ayrıca (Jurđjevic ve Sallet, 1984)'ın R^n üzerinde yapmış oldukları afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonu incelenmektedir. III. bölüm de Carnot grubu tanımı ve dilation etkisi verilip Carnot grubu üzerin de ki afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonu elde edilmektedir. IV. bölümde de 3-boyutlu Heisenberg Lie grubu üzerindeki afin sistem örneği gözönüne alınmış ve bu amaçla 6. boyuta kadar bütün nilpotent Lie cebirlerinin merkezleri, regüler elemanları ve free nilpotent üreteçleri hesaplanmıştır.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının temel kavramları olan manifold, Lie grubu ve Lie cebiri gibi bazı temel kavramlar yer almaktadır.

2.1 Manifold

Tanım : n boyutlu M yerel Öklid uzayı, her bir noktasının komşuluğu R^n Öklid uzayının açık alt kümesine homeomorfik olan Hausdorff topolojik uzayıdır.

Eğer φ , bağlantılı açık $U \subset M$ alt kümesinden R^n nin açık bir alt kümesi üzerine bir homeomorfizma ise, φ 'ye koordinat tasviri, $x_i = r_i \circ \varphi$ fonksiyonlarına koordinat fonksiyonları ve (U, φ) çiftine koordinat sistemi denir. Burada, $r_i : R^n \rightarrow R$ fonksiyonu, $(a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n)$ olmak üzere $r_i(a) = a_i$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım : M yerel Öklid uzayı üzerindeki C^∞ sınıftan bir F diferansiyellenebilir yapısı aşağıdaki üç şartı sağlayan $(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I$, koordinat sistemlerinin bir topluluğudur;

$$i) \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

$$ii) \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in C^\infty, \forall \alpha, \beta \in I$$

iii) F topluluğu maksimaldir, yani, (U, φ) koordinat sistemi $\forall \alpha \in I$ için $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ve $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$ 'yi sağlıyorsa, $(U, \varphi) \in F$ dir.

C^∞ sınıftan n boyutlu diferansiyellenebilir manifold, C^∞ sınıftan bir F diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte M yerel Öklid uzayını içeren (M, F) çiftidir.

Örnek : R^n Öklid uzayı diferansiyellenebilir manifold yapısına sahiptir. R^n üzerindeki standart diferansiyellenebilir F yapısı (R^n, i) koordinat sistemini içeren maksimum topluluktur. Burada, $i : R^n \rightarrow R^n$ ye birim tasvirdir.

Örnek : $S^1 = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ kümesini göz önüne alalım. S^1 kümesi R^2 de merkezi orjinde yarıçapı 1 birim olan çemberdir. S^1 , 1-boyutlu yerel Öklid uzayıdır.

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\} \quad (2.1)$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\} \quad (2.2)$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\} \quad (2.3)$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\} \quad (2.4)$$

Kümelerini göz önüne alalım. Bu kümeler S^1 in açık alt kümeleridir.

$$S^1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \quad (2.5)$$

$I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ açık aralığını göz önüne alalım.

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow I \quad (2.6)$$

$(x, y) \mapsto x$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\varphi_1(x, y) = x$ fonksiyonu sürekli, bire-bir ve örten bir fonksiyondur.

$$\varphi_1^{-1} : I \rightarrow U_1 \quad (2.7)$$

$$x \mapsto \left(x, \sqrt{1-x^2} \right)$$

$\varphi_1^{-1} = \left(x, \sqrt{1-x^2} \right)$ fonksiyonu da sürekli bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla, φ_1 fonksiyonu bir homeomorfizmadır. Benzer şekilde,

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow I \quad (2.8)$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow I \quad (2.9)$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow I \quad (2.10)$$

$$(x, y) \mapsto y$$

$$\varphi_4 : U_4 \rightarrow I \quad (2.11)$$

$$(x, y) \mapsto y$$

izdüşüm fonksiyonları da birer homeomorfizmadır.

$F = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3), (U_4, \varphi_4)\}$ topluluğu için

i) $S^1 = \bigcup_{i=1}^4 U_i$ dir.

ii) $\forall i, j = 1, 2$ için $\varphi_i \circ \varphi_j \in C^\infty$ olması gerekir.

$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ in C^∞ olup olmadığını inceleyelim. (2.8) alalım ve (2.10) nun ters fonksiyonu

$$\varphi_3^{-1} : I \rightarrow U_3 \quad (2.13)$$

$$y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y)$$

olan fonksiyonu alalım o taktirde $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ bileşkesi

$$I \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} U_3 \cap U_1 \xrightarrow{\varphi_1} I \quad (2.14)$$

$$y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y) \mapsto \sqrt{1-y^2}, (y > 0)$$

şeklinde olur. Dolayısıyla,

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : y \mapsto \sqrt{1-y^2} \in C^\infty, \text{ yani sürekli türetilebilirdir.}$$

Benzer şekilde, $\forall i, j = 1, 2, 3, 4$ için $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^\infty$ dur.

iii) F topluluğu maksimumdur. Gerçekten, (ii) koşulunu sağlayacak (U_5, φ_5) koordinat sistemi yoktur.

Sonuç olarak, (S^1, F) yapısı 1-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifolddur.

Tanım : $f, g \in C^\infty(M)$ için $X : C^\infty(M) \rightarrow R$ tasviri aşağıdaki şartları sağlarsa $p \in M$ noktasında bir tanjant vektördür;

$$i) \quad X(f + g) = X(f) + X(g)$$

$$ii) \quad X(fg)(p) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$$

$p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin kümesi $T_p M$ ile gösterilir ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı (teğet uzayı) denir. Ayrıca $\dim(T_p M) = \dim(M)$ dir.

Tanım : TM ile gösterilen tanjant demeti $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ şeklinde tanımlıdır. Tanjant demeti

bir manifold olup $\dim(TM) = 2 \dim(M)$ dir.

Tanım : M bir manifold olmak üzere $\text{dom}(X) \subset M$ açık alt kümesinden TM tanjant demetine tanımlı olan $X : \text{dom}(X) \subset M \rightarrow TM$ sürekli fonksiyonuna vektör alanı denir. $\forall p \in \text{dom}(X)$ için $X_p \in T_p M$ dir.

Not : Eğer $f, \text{dom}(X)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $X(f), \text{dom}(X)$

üzerinde bir fonksiyon olup $p \in \text{dom}(X)$ 'deki değeri $X(f)(p) = X_p(f)$ dir.

Tanım : X ve Y , M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanları olsun. $[X, Y]$ de bir diferansiyellenebilir vektör alanı olup buna X ve Y nin Lie parantezi denir ve

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf) \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $f \in C^\infty, m \in M$ dir.

Lie Parantezinin Özellikleri :

1. $[X, X] = 0$
2. $[X, Y] = -[Y, X]$
3. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (Jakobi Özdeşliği)

Tanım :

1. M ve N birer manifold olmak üzere, eğer

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \psi(V) \end{array}$$

ve $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \varphi(p)$ 'de diferansiyellenebilecek şekilde, p için (U, φ) ve $f(p)$ için (V, ψ) koordinat sistemleri varsa $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu $p \in M$ de diferansiyellenebilirdir denir.

2. M ile N iki manifold ve $f : M \rightarrow N$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f nin türevi olan $df : TM \rightarrow TN$ tasviri,

$$df(X)(g) = X(g \circ f) , \forall X \in TM \text{ ve her bir } g \in C^\infty(N)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2 Lie Grupları

Lie grubu hem manifold hemde grup yapısına sahip bir kümedir.

Tanım : G diferansiyellenebilir bir manifold ve grup yapısını sağlayan bir küme olmak üzere $G \times G \rightarrow G, (\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ tasviri diferansiyellenebilir ise G 'ye Lie grubu denir.

Örnek : R^n Öklid uzayı toplama işlemi ile birlikte bir Lie grubudur.

Örnek : $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberi karmaşık sayılardaki çarpma işlemi altında bir Lie grubudur.

Tanım : $\sigma \in G$ olmak üzere,

$$l_\sigma : G \rightarrow G \quad (2.16)$$

$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau$ tasvirine σ 'nın sol ötelemesi denir. l_σ 'nın türevi $dl_\sigma : TG \rightarrow TG$ şeklindedir ve $dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau} G$ dir.

Tanım : X bir vektör alanı olmak üzere, $\forall \sigma \in G$ için, $X \circ l_\sigma = dl_\sigma \circ X$ eşitliği sağlanıyorsa, X vektör alanına G üzerinde sol invaryanttır denir.

Tanım : G bir Lie grubu ve $L(G)$ G 'nin sol invaryant vektör alanlarının bir kümesi olsun. O takdirde, $L(G)$ reel vektör uzayıdır ve

$$\alpha : L(G) \rightarrow T_e G \quad (2.17)$$

$\alpha(X) = X_e$ şeklinde tanımlı tasvir bir izomorfizmadır. Sonuç olarak, $\dim L(G) = \dim T_e G = \dim G$ dir.

2.3 Lie Cebiri

Tanım : $L(G)$, K cismi üzerinde ($K=\mathbb{R}, \mathbb{C}$) bir vektör uzayı olsun.

$$L(G) \times L(G) \rightarrow L(G) \quad (2.18)$$

$(X, Y) \mapsto [X, Y]$ tasviri aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $L(G)$ ye Lie cebiri denir;

i) K cismi üzerinde bilineerdir, yani; $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ ve $\forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in L(G)$ için

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y] \text{ ve}$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2] \text{ dir.}$$

ii) Ters simetriktir, yani; $[X, Y] = -[Y, X]$

iii) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ Jakobi özdeşliğini sağlar.

Lie cebirinin önemi, kendisine ilişik Lie grubunda özelliklerinin yansıyor olmasıdır.

G Lie grubunun $L(G)$ Lie cebiri, G üzerindeki tüm sol(sağ)-invaryant vektör alanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Bunun dışında, G 'nin $L(G)$ Lie cebirini birimdeki tanjant uzayı $T_e(G)$ olarak da alabiliriz.

Örnek: 3- boyutlu Heisenberg grubu,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ şeklindedir.}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ için } \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olup } \gamma(t), G \text{ üzerinde } \gamma(0) = I = e \text{ olacak şekilde bir}$$

eğridir.

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e G \text{ olur.}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olup } \alpha(t), G \text{ üzerinde } \alpha(0) = I = e \text{ olacak şekilde bir}$$

eğridir.

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_e G \text{ olur.}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ için } \beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olup } \beta(t), G \text{ üzerinde } \beta(0) = I = e \text{ olacak şekilde bir}$$

eğridir.

$$\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_e G \text{ olur.}$$

$T_e G = \text{span}\{X, Y, Z\}$ olur. Burada, bunların Lie parantezlerine bakacak olursak $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = 0$ ve $[Y, Z] = 0$ dır. Buradan, G Heisenberg grubunun $L(G)$ Lie cebiri $L(G) \cong T_e G$ olduğundan, $L(G) = \text{span}_{L.A.}\{X, Y\}$ olur.

3. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere M nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı tüm pürüzsüz (C^∞ veya analitik) vektör alanlarının topluluğunu $X(M)$ ile gösterelim. $X(M)$ 'nin her bir elemanı M üzerindeki yerel difeomorfizmaların bir 1-parametrelili grubunu tanımlar. Dolayısıyla, eğer $X \in X(M)$ ise, manifoldlar üzerinde vektör alanları vasıtasıyla üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı, olanaklı her bir $t \in R$ için,

$$X_t : \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M \quad (3.1)$$

bir yerel difeomorfizmadır. Bundan başka, eğer $\gamma^X(., x)$, x noktasındaki vektör alanının integral eğrisi ise, o takdirde

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x) \quad (3.2)$$

dir. X_t yerel difeomorfizması aşağıdaki özelliklere sahiptir :

i) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$, $\forall t, s \in R$

ii) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$, $\forall t \in R$

iii) $X_0 = Id$.

Tanım : Bir Σ kontrol sistemi $\Sigma = (M, D)$ şeklindeki bir ikili olarak tanımlıdır. Burada, M diferansiyellenebilir bir manifold ve $D, X(M)$ 'in bir alt topluluğudur.

M 'ye Σ 'nın durum uzayı denir. D 'nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ kontrol sisteminin kontrolleridirler. Σ kontrol sistemi;

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \in R, r \in N\} \quad (3.3)$$

sözde (pseudo) grubunu tanımlar ve Σ tarafından M 'de x 'in yörüngesi

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_\Sigma\} \quad (3.4)$$

x 'de G_Σ 'nin etkisi ile verilir .

Tanım: Bir Σ kontrol sistemi, eğer $x \in M$ olmak üzere $G_\Sigma(x) = M$ sağlanıyorsa, x 'de geçişlidir denir.

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_\Sigma(x) \quad (3.5)$$

olacak şekilde $G_\Sigma(x) \subset M$ üzerinde tanımlı “ \sim ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Σ kontrol sistemi geçişli ise, $\forall x \in M$ için, $G_\Sigma(x) = M$ ’dir.

Ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N\} \quad (3.6)$$

sözde yarı (pseudo-semi) grubu elde edilir. S_Σ x ’den Σ ’nin ulaşılabilirlik (accessibility) kümesi olan Σ ile M ’deki x ’in pozitif yörüngesi $S_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_\Sigma\}$ ’yı verir. Genel olarak, $\forall x \in M$ için, $S_\Sigma(x) \subseteq G_\Sigma(x) \subseteq M$ dir.

$x \sim y \Leftrightarrow y \in S_\Sigma(x)$ ile tanımlı $S_\Sigma(x) \subset M$ üzerindeki “ \sim ” bağıntısı, $t > 0$ olmak üzere $\forall x \in M$ için $X_{-t}(x)$ ’nin $S_\Sigma(x)$ ’e ait olması gerekmediğinden, simetrik bir bağıntı değildir.

Kontrol Teorinin temel problemlerinden kontrol edilebilirlik problemi, $S_\Sigma(x) = M$ olacak şekilde M , D ve $x \in M$ üzerindeki koşulları bulmaktır. Problemin amacı bir x başlangıç noktasından başlayarak Σ ’nin D negatif olmayan stratejileri ile M ’in her noktasına ulaşmaktır.

Genel olarak, $S_\Sigma(x) \subseteq G_\Sigma(x) \subseteq M$ olduğundan, Σ ’nin geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir koşuldur ancak yeterli değildir. Örneğin;

$$\Sigma = \left(R, \left\{ \frac{d}{dx} \right\} \right) \text{ sistemini göz önüne alalım. } S_\Sigma(1) = [1, \infty) \subsetneq G_\Sigma(1) = R \text{ dir.}$$

Tanım: $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ’ya eğer $S_\Sigma(x) = M$ ise, x ’de kontrol edilebilirdir denir.

Eğer Σ kontrol sistemi M ’nin her noktasında kontrol edilebilir ise, kontrol edilebilirdir denir.

Teorem: (Yörünge Teoremi, (Sussman, 1973)) $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ ise, $G_\Sigma(x)$ yörüngesi bir diferansiyellenebilir manifold yapısına sahiptir.

Teorik açıdan önemli bir sonuç olan Yörünge Teoremi (Sussmann, 1973) sistemin dinamiğinin tüm özelliklerini koruyarak, M ’deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak vermektedir.

3.1 R^n üzerindeki Afin Kontrol Sistemleri

R^n üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonunu Jurđjevic ve Sallet (1984) göstermişlerdir.

Bir afin reel uzay R^n n-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, bu uzay üzerindeki tüm endomorfizmaların uzayını $EndR^n$ ve tüm lineer otomorfizmaların uzayını da $AutR^n$ ile gösterirsek $AfR^n = AutR^n \otimes R^n$, R^n 'nin afin grubunu tanımlar ve grubun Lie cebiri de $afR^n = EndR^n \otimes R^n$ şeklindedir. $A \in EndR^n$ ve $a \in R^n$ için $X(x) = Ax + a$ vektör alanına afin vektör alanı denir.

R^n üzerinde $\exp tX$ 'in etkisi R^n üzerindeki difeomorfizmaların bir 1-parametrelili grubuna neden olur ve onun sonsuz küçük üretici $X(x) = Ax + a$ afin vektör alanıdır.

X_0, X_1, \dots, X_m afin vektör alanlarının herhangi bir sonlu topluluğu, $X_i(x) = A_i x + a_i$; $i=0, 1, \dots, m$ olmak üzere bir kontrol sistemi tanımlar.

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(x) = (A_0 x + a_0) + \sum_{i=1}^m u_i(t) (A_i x + a_i) \quad (3.7)$$

şeklindeki kontrol parametrelili diferansiyel denklemler R^n üzerindeki afin sistemin dinamiğini oluşturur. Burada, $u_i \in U \subset R^n$ kontrollerle ilgili keyfi fonksiyonlar, A_0, A_1, \dots, A_m $n \times n$ 'lik matrisler ve a_0, a_1, \dots, a_m 'de R^n içindeki sütun vektörlerdir.

F afin sistem olmak üzere, $\forall X \in F$ ve $\forall x \in R^n$ için $X(x) \neq 0$ oluyorsa F afin ailesine tekil noktası yoktur denir.

Teorem : (Jurđjevic, 1997)

Vektör alanlarının bir F afin ailesi eğer

1. F hiçbir tekil noktaya sahip değilse ve
2. $\vec{F} ; R^n - \{0\}$ üzerinde kontrol edilebilir ise

F afin ailesi, R^n üzerinde kontrol edilebilirdir denir. Burada, \vec{F} F afin ailesinin bilineer kısmını göstermektedir.

Teoremin ilk koşulu tekil noktaların var olmaması ile ilgilidir, kontrol edilebilirlik için gerekli bir koşuldur. Eğer tekil nokta olursa o noktada ki ulaşılabilirlik kümesi tek noktadan meydana gelen sabit bir noktadır. Teorem aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

1. $i=0,1,\dots,m$ için $A_i x + a_i = 0$ olacak şekilde $x \in R^n$ noktası yoktur,

2. $\frac{dx}{dt} = A_0 x + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i x$ biliner sistem $R^n - \{0\}$ üzerinde kontrol edilebilirdir.

Teoremin ispatında R^n üzerinde v merkezli, $\lambda > 0$ oranlı $h_{\lambda,v}(x) = v + \lambda(x - v)$ homoteti fonksiyonu kullanılmaktadır. Böylece, F afın sistemi bu dönüşüm sayesinde \vec{F} biliner sistemine dönüşür. \vec{F} biliner sistemi $R^n - \{0\}$ üzerinde kontrol edilebilir olduğundan biliner sistemin ulaşılabilirlik kümesi açık bir kümedir. Buradan ters dönüşüm sayesinde F afın sisteminin ulaşılabilirlik kümesinin açık bir küme olduğu gösterilir ve böylece ispat tamamlanır.

4. LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ

Kompakt bağlantılı ve kompakt olmayan semi-simple Lie grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonunu (Ayala ve San Martin, 2000) yapmışlardır.

Daha sonra (Kara ve San Martin, 2006) Genelleştirilmiş Heisenberg Lie Grupları üzerinde afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonunu elde etmişlerdir.

G bağlantılı bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olmak üzere, G ' nin $Af(G)$ afin grubu G ile $Aut(G)$ ' nin semi-direkt çarpımıdır, yani: $Af(G) = Aut(G) \otimes G$.

$$(\phi, g_1) \cdot (\phi, g_2) = (\phi \circ \phi, g_1 \phi(g_2)) \quad (4.1)$$

$Af(G)$ (4.1) işlemiyle grup yapısına sahiptir. $Aut(G)$ ' nin birim elemanını I ile ve G ' nin birim elemanını da e ile gösterirsek. $Af(G)$ ' nin birim elemanı (I, e) ve $(\phi, g) \in Af(G)$ ' nin tersi $(\phi^{-1}, \phi^{-1}(g^{-1})) \in Af(G)$ dir.

$Af(G)$ ' nin Lie cebiri de $af(G) = aut(G) \otimes L(G)$ dir. Burada, $aut(G)$, $Aut(G)$ ' nin Lie cebirini göstermektedir.

Bir $G \subset Af(G)$ Lie grubu üzerindeki bir afin kontrol sistemi $\Sigma = (G, D)$

$$\dot{g} = (X + D)_g + \sum_{j=1}^d u_j(t)(Y^j + D^j)_g \quad (4.2)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirlidir. Burada, $g \in G$, $X, Y^1, Y^2, \dots, Y^d \in L(G)$, $D, D^1, D^2, \dots, D^d \in aut(G)$ ve u_j kontrolleridirler. O takdirde dinamik

$$D = \left\{ D + X + \sum_{j=1}^d u_j(t)(D^j + Y^j) \mid u \in R^d \right\} \quad (4.3)$$

ile verilir. Eğer G basit bağlantılı ise $Aut(G) \cong AutL(G)$ dir. Burada, $AutL(G)$ grubu ile $L(G)$ ' nin otomorfizma gurubunu gösterelim. $AutL(G)$ Lie grubunun Lie cebiri de

$$\partial L(G) = \{ D \in EndL(G) \mid \forall X, Y \in L(G) : D[X, Y] = [D(X), Y] + [X, D(Y)] \} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlı ve Lie cebir işlemi de

$$[(D_1, X_1), (D_2, X_2)] = ([D_1, D_2], D_1 X_2 - D_2 X_1 + [X_1, X_2]) \quad (4.5)$$

şeklinindedir. Böylece, $af(G) = \partial L(G) \otimes L(G)$ olur.

Afin kontrol sistemleri genel olarak lineer ve bilinear kontrol sistemlerinden daha geniş bir sınıfı temsil ederler. Afin kontrol sistemlerinde Lie cebirinden gelen vektör alanları sıfır vektörü olarak alındığında sistem bilinear kontrol sistemine dönüşmektedir.

Ayrıca, afin kontrol sistemleri Abelyen Lie grupları üzerinde göz önüne alındığında sistem lineer kontrol sistemine dönüşmektedir.

4.1 Carnot Grubu

G basit bağlantılı nilpotent bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olsun. Eğer $L(G)$ 'nin vektör alanları $1 \leq j < r$ için $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ ve $[V_1, V_r] = 0$ şeklinde V_1, \dots, V_r $L(G)$ 'nin tümünü üretiyorsa G 'ye Carnot grubu denir. Carnot grubunun Lie cebiri

$$L(G) = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. (Buliga, 2002)

4.1.1 Dilation Etkisi

G bir Carnot grubu ve $L(G)$ 'de onun Lie cebiri olsun. $\delta_\varepsilon : L(G) \rightarrow L(G)$ tasviri, her $i=1, \dots, m$ için $X_i \in V_i$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$X = \sum_{i=1}^m X_i \rightarrow \delta_\varepsilon X = \sum_{i=1}^m \varepsilon^i X_i \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlı ise, dilation etkisidir. Burada, m sayısına grubun basamağı denir. (Buliga, 2002)

Yardımcı Teorem : δ_ε dilation etkisi otomorfizmadır.

İspat : Öncelikle homomorfizma olduğunu gösterelim. $L(G)$ 'nin herhangi iki elemanı

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^m X_i \text{ ve } Y = \sum_{j=1}^m X_j \text{ için,} \\ [\delta_\varepsilon X, \delta_\varepsilon Y] &= \left[\delta_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^m X_i \right), \delta_\varepsilon \left(\sum_{j=1}^m X_j \right) \right] = \left[\sum_{i=1}^m \varepsilon^i X_i, \sum_{j=1}^m \varepsilon^j X_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varepsilon^{i+j} X_{i+j} = \delta_\varepsilon X_{i+j} = \delta_\varepsilon \left[\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{j=1}^m X_j \right] = \delta_\varepsilon [X, Y] \end{aligned} \quad (4.8)$$

dir. Buradan, $\delta_\varepsilon : L(G) \rightarrow L(G)$ tasvirinin bir homomorfizma olduğu görülür.

$$(\delta_\varepsilon \circ \delta_\varepsilon^{-1})X = \delta_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\varepsilon^i} X^i \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^i}{\varepsilon^i} X^i = \sum_{i=1}^m X^i = X \quad (4.9)$$

$$(\delta_\varepsilon^{-1} \circ \delta_\varepsilon)X = \delta_\varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon^i X^i \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^i}{\varepsilon^i} X^i = \sum_{i=1}^m X^i = X \quad (4.10)$$

(4.9) ve (4.10) eşitliklerinden 1-1 ve örten olduğu sonucu elde edilir. Dolayısıyla, δ_ε izomorfizmadır. Tanım kümesi ile değer kümesi aynı olduğundan otomorfizmadır.

Sonuç : δ_ε dilation etkisi Lie cebir otomorfizmasının 1-parametrelili grubunu tanımlar.

4.1.2 Carnot Grubunun Örnekleri (Buliga, 2002)

1) R^n toplama işlemi altında değişmeli bir Carnot grubudur.

2) Heisenberg grubu trivial olmayan ilk örnektir.

$$(x, \bar{x})(y, \bar{y}) = (x + y, \bar{x} + \bar{y} + \frac{1}{2} w(x, y)) \quad (4.11)$$

işlemi ile $H(n) = R^{2n} \times R$ grup yapısına sahiptir. Burada w , R^{2n} üzerinde standart simplektik formdur. Lie parantezi

$$\left[(x, \bar{x}), (y, \bar{y}) \right] = (0, w(x, y)) \quad (4.12)$$

şeklindedir. Grubun cebirinin direkt toplam ayrışımı:

$$V = R^{2n} \times \{0\} \text{ ve } Z = \{0\} \times R \text{ olmak üzere } H(n) = V + Z \text{ şeklindedir.}$$

Burada, Z cebirin merkezidir ve grup 2.basamaktan nilpotent Lie grubudur.

3) H-tipi gruplar. Z Lie cebirinin merkezi olmak üzere,

$$N = V + Z \quad (4.13)$$

ortogonal direkt toplam ayrışımından meydana gelecek şekilde bir (\cdot, \cdot) iççarpım ile donatılmış 2.basamaktan nilpotent N Lie grubu alınsın.

$$J : Z \rightarrow \text{End}(V), \quad (J_z x, x') = (z, [x, x']) \quad (4.14)$$

fonksiyonu tanımlansın. Eğer $\forall z \in Z$ için

$$J_z \circ J_z = -|z|^2 I \quad (4.15)$$

ise N grubuna H-tipi grup denir. H-tipi gruplar Carnot gruplarıdır.

4) $n \times n$ üst üçgen matrislerin grubu $(n-1)$. basamaktan nilpotent olup aynı zamanda Carnot grubudur. Herhangi bir Carnot grup üst üçgen matrislerin bir grubunun bir alt grubuna izomorf olması nedeniyle bu örnek Carnot gruplarında önemli bir yeri vardır.

4.1.3 Carnot Grubu Otomorfizmaları

1. $G = R^N$ Carnot grubunu alalım. Lie cebirinin $R^N = R^{N_1} \times R^{N_2} \times \dots \times R^{N_r}$ şeklinde bir ayrışımı vardır.

$$\delta_\varepsilon(x) = \delta_\varepsilon(x^1, x^2, \dots, x^r) = (\varepsilon x^1, \varepsilon^2 x^2, \dots, \varepsilon^r x^r); x^j \in R^{N_j} \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlı $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dilation etkisi G 'nin otomorfizmasıdır.

2. $L(G)$ herhangi bir Lie cebiri olsun. $\varepsilon > 0$ ve $X \in V^i$ için

$$\delta_\varepsilon(X) = \varepsilon^i X \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlı tasvir Lie cebiri üzerinde tanımlı grup otomorfizmasıdır.

Özel olarak Heisenberg grubu ele alındığında

$$\delta_\varepsilon(X, Y, Z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon^2 Z) \quad (4.18)$$

$L(G)$ Lie cebirinin otomorfizmasıdır.

3. δ_ε G 'nin dilation etkilerinin 1-parametrelili ailesi ($\delta_{st} = \delta_s \circ \delta_t$ ve $\delta_1 = id$)

$$d(\delta_\varepsilon(x), \delta_\varepsilon(y)) = \varepsilon d(x, y); x, y \in G \quad (4.19)$$

δ_ε , G 'nin kendisi üzerine bir otomorfizmaya neden olur.

Tanım: S , G üzerindeki vektör alanlarının bir ailesi olmak üzere, boş kümeden farklı $A \subset G$ için, eğer $\forall t \in R$, $\forall X \in S$ ve $\forall x \in A$ için $X_t(x)$ tanımlı olacak şekilde $X_t(x) \in A$ ise A 'ya S -invariant denir.

Teorem: G tıkız olmayan bağlantılı bir Lie grubu ve $L(G)$ onun Lie cebiri olsun. O takdirde, eğer G üzerindeki kontrol sistemi invariant ise, G 'nin tıkız altkümeleri G_Σ -invariant değildir.

İspat: Her $x \in G$, her $X \in L(G)$ ve her $t \in R$ için, $\delta_x(\cdot, x): (a, b) \subset R \rightarrow G$ diferansiyellenebilir eğrisi $\delta_x(t, x) = X_t(x)$ şeklinde tanımlıdır. $K \subset G$ altkümelerinin tıkız ve G_Σ -invariant bir altküme olduğunu kabul edelim. Her $X \in L(G)$ vektör alanı tam bir vektör alanıdır. K 'nin herhangi bir $\Lambda = \{U_i \mid i \in Z^+\}$ açık örtüsünü göz önüne alalım. O halde, her

$x \in K$ için $X_i(x)$ olduğundan, her i için $\delta_X(t, U_i)$ K 'nın açık örtüsüdür. K tıktır olduğundan, $\Lambda_\delta = \{\delta_X(t, U_i) | i \in Z^+\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsüne sahiptir. Böylece, Λ_δ 'nın elemanlarının ters görüntüleri de R 'yi örtmelidir. Buda R 'nin tanımıyla çelişir.

Yardımcı Teorem : $\Sigma = (G, D)$, G bağlantılı Lie grubu üzerinde bir afin kontrol sistemi olsun. Sistemin her bir pozitif yörüngesi açık ise, o takdirde sistem kontrol edilebilirdir.

İspat : Eğer kontrol sisteminin her bir $S_\Sigma(x)$ pozitif yörüngesi açık ise, o takdirde $S^*_\Sigma(x) = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r | -t > 0\}$ kümesi de açıktır. G 'nin topolojisinden dolayı, $G = S_\Sigma(x)$ dir.

Teorem: Bir G Carnot grubu üzerindeki

$$\mathfrak{S} = \left\{ D + X + \sum_{i=1}^d u_i (D^i + X^i) : u \in R^d ; D, D^1, \dots, D^d \in \partial L(G); X, X^1, \dots, X^d \in L(G) \right\} \quad (4.20)$$

dinamiği ile verilen bir $\Sigma = (G, \mathfrak{S})$ afin kontrol sistemi, eğer Σ tekil noktaya sahip değilse ve dinamiği

$$\mathfrak{S}_b = \left\{ D + \sum_{i=1}^d u_i D^i : u \in R^d ; D, D^1, \dots, D^d \in \partial L(G) \right\} \quad (4.21)$$

şeklinde olan ilişik bilineer kontrol sistemi $\Sigma_b = (G, \mathfrak{S}_b)$ G üzerinde kontrol edilebilirse, G üzerinde kontrol edilebilirdir.

İspat: Öncelikle, kontrol sistemleri için herhangi bir tekil noktaya sahip olmamak, sabit bir noktadan ulaşılabilir noktaların kümesinin tek bir noktadan meydana gelmesi, yani; $G_\Sigma(x) = x$ olması nedeniyle kontrol edilebilirlik için gerekli bir koşuldur.

$\xi : Id \times \delta_\varepsilon = D + X \rightarrow \xi(D + X) = D + \delta_\varepsilon(X)$ olacak şekilde $\xi : af(G) \rightarrow af(G)$ şeklinde

bir otomorfizma tanımlayalım. $\forall X \in L(G)$ için $\delta_\varepsilon(X) = \delta_\varepsilon \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j X_j$ olduğundan

$\varepsilon \rightarrow 0$ için $\delta_\varepsilon(X) \rightarrow 0$ olur. Öyleyse $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\xi(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathfrak{S}_b$ dir.

$\Sigma_b = (G, \mathfrak{S}_b)$ bilineer kontrol sisteminin x 'ten ulaşılabilirlik kümesini $A_b(x)$ ile ve $\Sigma = (G, \mathfrak{S})$ afin kontrol sisteminin de x 'ten ulaşılabilirlik kümesini $A(x)$ ile gösterelim.

Bir $y \in G$ ve $B(y)$ kapalı birim yuvarı göz önüne alınsın. Burada, $B(y) = \{x : d(x, y) \leq 1\}$ dir. $S(y)$, bu yuvarın sınırını gösterebilir.

Tam kontrol edilebilirlik küçük pertürbasyonlarda korunur, (Sussman, 1976). Dolayısıyla, $S(y) \subset A_b(x)$ dir. Yeteri kadar küçük ε değeri için, $S(y) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ olur. $u, z \in S(y)$ noktalarını alalım. $S(y) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ olduğundan, z 'den u 'ya normal olarak ulaşılabilir. Dolayısıyla, x 'den ulaşılabilir küme u 'nun bir açık komşuluğunu kapsar. $\delta_\varepsilon(u) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ elde edilir. O halde, $u_1 \in \delta_\varepsilon(u)$, $u_1 \notin S(y)$ ve $u_1 \in B(y)$ olacak şekilde bir u_1 elemanı vardır. z 'den u_1 'e normal ulaşılabilir olduğundan, $\delta_\varepsilon(u_1) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ elde edilir. Benzer şekilde, $B(y)$ 'nin tümü u_i 'lerin açık komşulukları tarafından örtülür. $B(y) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_\varepsilon(u_i) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ dir ve $B(y)$ tıkHz olduğundan, $B(y) \subset \bigcup_{i=1}^n \delta_\varepsilon(u_i) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ dir ve böylece, $B(y) \subset \xi_\varepsilon(A(x))$ elde edilir.

Ters dönüşüm kullanılarak $\xi_\varepsilon^{-1}(B(y)) \subset \xi_\varepsilon^{-1} \xi_\varepsilon(A(x)) = A(x)$ olduğundan, Σ 'nın pozitif yörüngesi boştan farklı bir içe sahiptir. Dolayısıyla, Σ x 'den normal olarak ulaşılabilirlik özelliğine sahiptir. x keyfi olduğundan Σ , $\forall x$ 'den normal olarak ulaşılabilirlik özelliğine sahiptir. O halde, $\Sigma = (G, \mathfrak{S})$ G üzerinde kontrol edilebilirdir, (Sussmann, 1976 4.2 ve 4.3).

Örnek: G , 3- boyutlu Heisenberg grubu, yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in R \right\} \quad (4.22)$$

olsun. G 'nin Lie cebiri

$$L(G) = \{X, Y, Z\} \quad (4.23)$$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.24)$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.25)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.26)$$

$$[X, Y] = Z \quad (4.27)$$

şeklin de tanımlansın

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_1, D_2 \in \partial g \quad (4.28)$$

olmak üzere G üzerinde ki afin dönüşüm

$$[(D_1, X), (D_2, Y)] = ([D_1, D_2], D_1 Y - D_2 X + [X, Y]) \quad (4.29)$$

$$= \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (4.30)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (4.31)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2}x+1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}x+1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (4.32)$$

δ_ε otomorfizmi

$$\delta_\varepsilon(g) = \delta_\varepsilon(X, Y, Z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon^2 Z) \quad (4.33)$$

$$\xi : af(G) \rightarrow af(G) \quad (4.34)$$

$$\xi : Id \times \delta_\varepsilon = D_1 + X \rightarrow \xi(D_1 + X) = D_1 + \delta_\varepsilon(X) \quad (4.35)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \partial g \text{ ve } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} \in L(G) \quad (4.36)$$

$$\xi : D_1 + X \rightarrow \xi(D_1 + X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2}y \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ için } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ kalır}$$

$$\xi^{-1} : \xi(D_1 + X) \rightarrow D_1 + X \quad (4.38)$$

$$\xi^{-1} : Id \times \delta_\varepsilon^{-1} = D_1 + \partial_\varepsilon(X) \rightarrow \xi^{-1}(D_1 + \delta_\varepsilon(X)) = D_1 + (\partial_\varepsilon^{-1} \circ \partial_\varepsilon)X \quad (4.39)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon}{2} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} = D_1 + X \quad (4.40)$$

5. BAZI LİE CEBİRLERİ İÇİN HESAPLAMALAR

3-boyutlu Heisenberg Lie Grubu üzerindeki afin sistem örneği incelendiğinde Lie cebirinin dinamiğinin elemanları olan X ve Y 'nin hem regüler hem de free nilpotent üreteçler olduğu gözlemlenmiştir. Heisenberg Lie Cebirin de merkez dışında ki elemanlar regüler olduğundan cebir seviyesinde merkez çıkarılarak (merkezin yörüngesini çıkarıyoruz) regüler elemanların oluşturduğu dinamiğin yörüngesi grup içersinde yoğun ve açık bir alt küme olur. Bu yörünge kontrol edilebilirse uzayın tamamı kontrol edebilir, (Kara ve San Martin, 2006). Bu fikirden yola çıkarak, bu bölümde 6 boyuta kadar bütün nilpotent Lie cebirlerinin merkezleri, regüler elemanları ve free nilpotent üreteçleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken (Nielsen, 1983) Lie cebir örnekleri kullanılmıştır.

Tanım: $\zeta(X) = \{\forall Y \in g \text{ : } [X, Y] = 0\}$ ise g Lie cebirinin merkezi X 'tir denir. i pozitif tamsayı olmak üzere $Z(X_i)$ ile Lie cebirinin merkezleyicisini gösterelim.

Tanım: Bir Lie Cebirinin bir elemanının merkezleyicisinin boyutu Lie cebirinin tüm elemanlarının merkezleyicileri arasında minimum ise bu elemana Lie cebirinin regüler elemanı denir.

Tanım: Lie cebirinin bazı elemanlarının olası tüm Lie parantezleri alınarak cebirin tamamı üretilebiliyorsa, o taktirde bu elemanlara Free Nilpotent üreteçler denir.

Hesaplamalar :

1) X_1, X_2, X_3 vektör alanlarının oluşturduğu aşağıdaki 2.dereceden nilpotent Lie cebirini gözönüne alalım.

$[X_3, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $g = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubuda G_3 olsun. $X_1, X_2, X_3 \in g$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$X_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial X_3}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek:

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_3\} \quad \text{elde ederiz.}$$

Dolayısıyla, g Lie cebirinin regüler elemanları X_2 ve X_3 , merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_2, X_3 tür.

2) $[X_4, X_3]=X_2$, $[X_4, X_2]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu G_4 olsun.

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{g} \text{ ve } X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1} , X_2 = x_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} , X_3 = \frac{1}{2}x_4^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} ,$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial X_4} ; Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin merkezleyicisini gösterirsek.}$$

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_4\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_4 , merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_4 tür. Bu örnekteki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

3) $[X_5, X_4]=X_1$, $[X_3, X_2]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{5,1}$ olsun.

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{g} \text{ ve } X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1} , X_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} , X_3 = \frac{\partial}{\partial X_3} ,$$

$$X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_4} , X_5 = \frac{\partial}{\partial X_5} ; Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin merkezleyicisini gösterirsek.}$$

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_2, X_3, X_4, X_5 dir ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_2, X_3, X_4, X_5 dir. Buradaki Lie cebiri 2.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

4) $[X_5, X_4]=X_2$, $[X_5, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{5,2}$

olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$, $X_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}$,

$X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4}$, $X_5 = \frac{\partial}{\partial X_5}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_5\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_5 , merkezleri ise X_1 ve X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_4, X_5 dir. Bu örnekteki Lie cebiri 2.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

5) $[X_5, X_4]=X_2$, $[X_5, X_2]=X_1$, $[X_4, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu

$G_{5,3}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$X_3 = x_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}$, $X_4 = \frac{1}{2}x_5^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4}$, $X_5 = \frac{\partial}{\partial X_5}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin

merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_4\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_3, X_5\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_4 ve X_5 dir ve merkezi ise X_1 dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_4, X_5 dir. Bu örnekteki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

6) $[X_5, X_4]=X_3$, $[X_5, X_3]=X_2$, $[X_4, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu

$G_{5,4}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$X_3 = x_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}$, $X_4 = x_4 x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_5^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4}$, $X_5 = \frac{\partial}{\partial X_5}$;

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_5\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_3, X_4, X_5 dir ve merkezleri ise X_1 ve X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_4, X_5 dir. Buradaki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

7) $[X_5, X_4]=X_3$, $[X_5, X_3]=X_2$, $[X_5, X_2]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu

$G_{5,5}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$X_3 = \frac{1}{2} x_5^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}$, $X_4 = \frac{1}{6} x_5^3 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_5^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4}$, $X_5 = \frac{\partial}{\partial X_5}$;

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_5\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_5 dir ve merkezi ise X_1 dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5 dir. Bu örnekteki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

8) $[X_5, X_4] = X_3$, $[X_5, X_3] = X_2$, $[X_5, X_2] = X_1$, $[X_4, X_3] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{5,6}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = (x_4 + \frac{1}{2}x_5^2) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = (x_4x_5 + \frac{1}{6}x_5^3) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2}x_5^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4}$$

, $X_5 = \frac{\partial}{\partial X_5}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_5\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_5 dir ve merkezi ise X_1 dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5 dir. Buradaki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

9) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_1$, $[X_3, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie

grubu $G_{6,1}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_4}, \quad X_5 = \frac{1}{2}x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}; \quad Z(X_i) \text{ ile}$$

X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_2, X_3, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

10) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_3$, $[X_6, X_3] = X_1$, $[X_5, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,2}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$X_5 = \frac{1}{6} x_6^3 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6};$$

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_2, X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

11) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_3$, $[X_6, X_3]=X_1$, $[X_5, X_4]=X_1$, $[X_5, X_2]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent

Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,3}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad , \quad X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad , \quad X_4 = \left(x_5 + \frac{1}{2} x_6^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = \left(x_5 x_6 + \frac{1}{6} x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin}$$

merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \}$$

$$Z(X_2) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 \}$$

$$Z(X_3) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \}$$

$$Z(X_4) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4 \}$$

$$Z(X_5) = \{ X_1, X_3, X_5 \}$$

$$Z(X_6) = \{ X_1, X_2, X_6 \}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_5, X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_2, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

12) $[X_6, X_5]=X_3$, $[X_6, X_4]=X_2$, $[X_5, X_2]=X_1$, $[X_4, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,4}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad , \quad X_3 = x_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad , \quad X_4 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = x_4 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin merkezleyicisini gösterirsek.}$$

$$Z(X_1) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \}$$

$$Z(X_2) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 \}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_4, X_5, X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

13) $[X_6, X_5] = X_3$, $[X_6, X_4] = X_2$, $[X_6, X_3] = X_1$, $[X_4, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,5}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_4 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$X_5 = \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6};$$

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 ' dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

14) $[X_6, X_5] = X_3$, $[X_6, X_4] = X_2$, $[X_5, X_3] = X_1$, $[X_4, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,6}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad X_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_4 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$X_5 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{ 'nin merkezleyicisini gösterirsek.}$$

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_4, X_5, X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 3.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

15) $[X_6, X_5] = X_3$, $[X_6, X_3] = X_2$, $[X_6, X_2] = X_1$, $[X_5, X_4] = X_2$, $[X_4, X_3] = -X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,7}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}, \quad X_2 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad X_3 = \left(-x_4 + \frac{1}{2}x_6^2\right) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$X_5 = \left(-x_4 x_6 + \frac{1}{6}x_6^3\right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \left(-x_4 + \frac{1}{2}x_6^2\right) \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}; \quad Z(X_i) \text{ ile}$$

X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_4, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

16) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_3$, $[X_6, X_2] = X_1$, $[X_5, X_4] = X_2$, $[X_5, X_3] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent

Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,8}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad X_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$X_5 = \frac{1}{2} x_5 x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin}$$

merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_5, X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

17) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_3$, $[X_6, X_3] = X_1$, $[X_5, X_4] = X_2$, $[X_5, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent

Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,9}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad , \quad X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad ,$$

$$X_4 = \left(\frac{1}{2} x_6^2 + \frac{1}{2} x_5^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = \left(\frac{1}{6} x_6^3 + \frac{1}{2} x_5^2 x_6 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile}$$

X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \}$$

$$Z(X_2) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 \}$$

$$Z(X_3) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \}$$

$$Z(X_4) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4 \}$$

$$Z(X_5) = \{ X_1, X_3, X_5 \}$$

$$Z(X_6) = \{ X_1, X_2, X_6 \}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_5, X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 4.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

18) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_3$, $[X_6, X_3] = X_2$, $[X_6, X_2] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R} X_1 + \mathbb{R} X_2 + \mathbb{R} X_3 + \mathbb{R} X_4 + \mathbb{R} X_5 + \mathbb{R} X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,10}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$,

$$X_2 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad , \quad X_3 = \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad ,$$

$$X_4 = \frac{1}{6} x_6^3 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = \frac{1}{24} x_6^4 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{6} x_6^3 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin}$$

merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \}$$

$$Z(X_2) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6)=\{X_1, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 5.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

19) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_3$, $[X_6, X_3]=X_2$, $[X_6, X_2]=X_1$, $[X_5, X_4]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent

Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,11}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$

$$, \quad X_2 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad , \quad X_3 = \frac{1}{2}x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad ,$$

$$X_4 = \left(x_5 + \frac{1}{6}x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2}x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = \left(x_5x_6 + \frac{1}{24}x_6^4 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{6}x_6^3 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2}x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile}$$

X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6)=\{X_1, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 5.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

20) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_3$, $[X_6, X_3]=X_2$, $[X_5, X_2]=-X_1$, $[X_4, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$

nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,12}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial X_1} \quad , \quad X_2 = -x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad , \quad X_3 = (x_4 - x_5 x_6) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad , \\ X_4 &= \left(x_4 x_6 - \frac{1}{2} x_5 x_6^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad , \\ X_5 &= \left(\frac{1}{2} x_4 x_6^2 - \frac{1}{6} x_5 x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{6} x_6^3 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile} \end{aligned}$$

X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \}$$

$$Z(X_2) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 \}$$

$$Z(X_3) = \{ X_1, X_2, X_3, X_5 \}$$

$$Z(X_4) = \{ X_1, X_2, X_4, X_5 \}$$

$$Z(X_5) = \{ X_1, X_3, X_4, X_5 \}$$

$$Z(X_6) = \{ X_1, X_2, X_6 \}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 5.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

21) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_3$, $[X_6, X_3] = X_2$, $[X_6, X_2] = X_1$, $[X_5, X_4] = X_2$, $[X_5, X_3] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu

$$G_{6,13} \text{ olsun. } X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g} \text{ ve } X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1} \quad , \quad X_2 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \quad ,$$

$$X_3 = \left(x_5 + \frac{1}{2} x_6^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad ,$$

$$X_4 = \left(x_5 x_6 + \frac{1}{6} x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \left(x_5 + \frac{1}{2} x_6^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = \left(\frac{1}{2} x_5 x_6^2 + \frac{1}{24} x_6^4 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \left(x_5 x_6 + \frac{1}{6} x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ;$$

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 5.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

22) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_3$, $[X_6, X_3] = X_2$, $[X_5, X_4] = X_2$, $[X_5, X_2] = -X_1$, $[X_4, X_3] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu

$G_{6,14}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = -x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = (x_4 - x_5 x_6) \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} ,$$

$$X_4 = \left(x_4 x_6 - \frac{1}{2} x_5^2 - \frac{1}{2} x_5 x_6^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \left(x_5 + \frac{1}{2} x_6^2 \right) \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} ,$$

$$X_5 = \left(\frac{1}{2} x_4 x_6^2 - \frac{1}{2} x_5^2 x_6 - \frac{1}{6} x_5 x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \left(x_5 x_6 + \frac{1}{6} x_6^3 \right) \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} ,$$

$X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_4, X_5, X_6 dır ve merkezi ise X_1 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 5.dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

23) $[X_6, X_5]=X_3$, $[X_6, X_4]=X_1$, $[X_5, X_4]=X_2$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,15}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial X_3}$, $X_4 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4}$, $X_5 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_5}$, $X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6)=\{X_1, X_2, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_4, X_5, X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2, X_3 'tür. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_4, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 2. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

24) $[X_6, X_5]=X_2$, $[X_6, X_4]=X_1$, $[X_5, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,16}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$, $X_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}$, $X_4 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_4}$, $X_5 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_5}$, $X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6}$; $Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_5, X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_4, X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 2. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

25) $[X_6, X_5] = X_2$, $[X_6, X_3] = X_1$, $[X_5, X_4] = X_1$, $[X_4, X_3] = X_2$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,17}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_4}, \quad X_5 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6};$$

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_4, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_3, X_4, X_5, X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_4, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 2. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

26) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_2$, $[X_6, X_3] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie

grubu $G_{6,18}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4}, \quad X_5 = \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6};$$

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 3. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

27) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_3] = X_1$, $[X_5, X_4] = X_2$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie

grubu $G_{6,19}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4}, \quad X_5 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6};$$

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_4, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanları X_5, X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 3. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

28) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_1$, $[X_6, X_3]=X_2$, $[X_5, X_3]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,20}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad , \quad X_4 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad , \quad X_5 = \frac{1}{2}x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad ,$$

$$X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin merkezleyicisini gösterirsek.}$$

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_6)=\{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 3. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

29) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_2$, $[X_6, X_3]=X_1$, $[X_5, X_4]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,21}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3} \quad , \quad X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4} \quad ,$$

$$X_5 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2}x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} \quad , \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} \quad ; \quad Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin merkezleyicisini}$$

gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 3. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

30) $[X_6, X_5] = X_4$, $[X_6, X_4] = X_2$, $[X_5, X_4] = X_1$, $[X_5, X_3] = X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4 + \mathbb{R}X_5 + \mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,22}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}$,

$$X_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$X_5 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6};$$

$Z(X_i)$ ile X_i 'nin merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_5 dir ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_5, X_6 dır. Buradaki Lie cebiri 3. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

31) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_2$, $[X_6, X_3]=-X_1$, $[X_5, X_4]=X_1$, $[X_5, X_3]=X_2$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun nilpotent Lie grubu $G_{6,23}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1} , X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2} , X_3 = -x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} , X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_4} ,$$

$$X_5 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} , X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} ; Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin merkezleyicisini}$$

gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_4)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5)=\{X_1, X_2, X_5\}$$

$$Z(X_6)=\{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_5, X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_3, X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 3. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

32) $[X_6, X_5]=X_4$, $[X_6, X_4]=X_3$, $[X_6, X_3]=X_2$, $[X_5, X_4]=X_1$ ve diğer Lie parantezleri 0 olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1+\mathbb{R}X_2+\mathbb{R}X_3+\mathbb{R}X_4+\mathbb{R}X_5+\mathbb{R}X_6$ nilpotent Lie cebiri ve onun

nilpotent Lie grubu $G_{6,24}$ olsun. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in \mathfrak{g}$ ve $X_1 = \frac{\partial}{\partial X_1} , X_2 = \frac{\partial}{\partial X_2} ,$

$$X_3 = x_6 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} , X_4 = x_5 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + \frac{\partial}{\partial X_4} ,$$

$$X_5 = x_5 x_6 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{6} x_6^3 \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2} x_6^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + x_6 \frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_5} , X_6 = \frac{\partial}{\partial X_6} ; Z(X_i) \text{ ile } X_i \text{'nin}$$

merkezleyicisini gösterirsek.

$$Z(X_1)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_2)=\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$

$$Z(X_3) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

$$Z(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$Z(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$$

$$Z(X_6) = \{X_1, X_2, X_6\}$$

Dolayısıyla, \mathfrak{g} Lie cebirinin regüler elemanı X_6 dır ve merkezleri ise X_1, X_2 'dir. Lie cebirinin Free nilpotent üreteçleri X_5, X_6 dır. Bu örnekteki Lie cebiri 4. dereceden nilpotent bir Lie cebiridir.

Bu inceleme sonunda aşağıdaki gibi bir tablo ortaya çıkmıştır:

1.Dereceden Nilpotent Lie Grupları: Abelyen Lie cebirleridir.

Çizelge 5.1 2.Dereceden Nilpotent Lie Grupları

<i>DURUM</i>	<i>GRUP ADI</i>	<i>MERKEZ</i>	<i>REGÜLER ELEMENLAR</i>	<i>FREE NİLPOTENT ÜRETEÇLER</i>
<i>1 merkez, diğer elemanlar regüler</i>	G_3	X_1	X_2, X_3	X_2, X_3
	$G_{5,1}$	X_1	X_2, X_3, X_4, X_5	X_2, X_3, X_4, X_5
<i>2 merkez 1 regüler eleman</i>	$G_{5,2}$	X_1, X_2	X_5	X_3, X_4, X_5
<i>2 merkez 2 regüler eleman</i>	$G_{6,16}$	X_1, X_2	X_5, X_6	X_3, X_4, X_5, X_6
<i>3 merkez 3 regüler eleman</i>	$G_{6,15}$	X_1, X_2, X_3	X_4, X_5, X_6	X_4, X_5, X_6
<i>2 merkez 4 regüler eleman</i>	$G_{6,17}$	X_1, X_2	X_3, X_4, X_5, X_6	X_3, X_4, X_5, X_6

Çizelge 5.2 3.Dereceden Nilpotent Lie Grupları

<i>DURUM</i>	<i>GRUP ADI</i>	<i>MERKEZ</i>	<i>REGÜLER ELEMENLAR</i>	<i>FREE NİLPOTENT ÜRETEÇLER</i>
<i>1 merkez, 1 regüler eleman</i>	G_4	X_1	X_4	X_3, X_4
	$G_{6,1}$	X_1	X_6	X_2, X_3, X_5, X_6
	$G_{6,5}$	X_1	X_6	X_4, X_5, X_6
<i>1 merkez 2 regüler eleman</i>	$G_{5,3}$	X_1	X_4, X_5	X_3, X_4, X_5
<i>1 merkez 3 regüler eleman</i>	$G_{6,4}$	X_1	X_4, X_5, X_6	X_4, X_5, X_6
	$G_{6,6}$	X_1	X_4, X_5, X_6	X_4, X_5, X_6
<i>2 merkez 1 regüler eleman</i>	$G_{6,18}$	X_1, X_2	X_6	X_3, X_5, X_6
	$G_{6,20}$	X_1, X_2	X_6	X_3, X_5, X_6
	$G_{6,21}$	X_1, X_2	X_6	X_3, X_5, X_6
	$G_{6,22}$	X_1, X_2	X_5	X_3, X_5, X_6
<i>2 merkez 2 regüler eleman</i>	$G_{6,19}$	X_1, X_2	X_5, X_6	X_3, X_5, X_6
	$G_{6,23}$	X_1, X_2	X_5, X_6	X_3, X_5, X_6
<i>2 merkez 3 regüler eleman</i>	$G_{5,4}$	X_1, X_2	X_3, X_4, X_5	X_3, X_4, X_5

Çizelge 5.3 4.Dereceden Nilpotent Lie Grupları

<i>DURUM</i>	<i>GRUP ADI</i>	<i>MERKEZ</i>	<i>REGÜLER ELEMENLAR</i>	<i>FREE NİLPOTENT ÜRETEÇLER</i>
<i>1 merkez, 1 regüler eleman</i>	$G_{5,5}$	X_1	X_5	X_4, X_5
	$G_{5,6}$	X_1	X_5	X_4, X_5
	$G_{6,2}$	X_1	X_6	X_2, X_5, X_6
	$G_{6,7}$	X_1	X_6	X_4, X_5, X_6
<i>1 merkez 2 regüler eleman</i>	$G_{6,3}$	X_1	X_5, X_6	X_2, X_5, X_6
	$G_{6,8}$	X_1	X_5, X_6	X_5, X_6
	$G_{6,9}$	X_1	X_5, X_6	X_5, X_6
<i>2 merkez 1 regüler eleman</i>	$G_{6,24}$	X_1, X_2	X_6	X_5, X_6

Çizelge 5.4 5.Dereceden Nilpotent Lie Grupları

<i>DURUM</i>	<i>GRUP ADI</i>	<i>MERKEZ</i>	<i>REGÜLER ELEMENLAR</i>	<i>FREE NİLPOTENT ÜRETEÇLER</i>
<i>1 merkez, 1 regüler eleman</i>	$G_{6,10}$	X_1	X_6	X_5, X_6
	$G_{6,11}$	X_1	X_6	X_5, X_6
	$G_{6,12}$	X_1	X_6	X_5, X_6
	$G_{6,13}$	X_1	X_6	X_5, X_6
<i>1 merkez 3 regüler eleman</i>	$G_{6,14}$	X_1	X_4, X_5, X_6	X_5, X_6

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Carnot grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri incelenmiş ve bilinear kısım ile bağlantılı olarak kontrol edilebilirliği karakterize edilmiştir.

Ayrıca 6.boyuta kadar bütün Nilpotent Lie cebirlerinin merkezleri, regüler elemanları ve free nilpotent üreteçleri bulunmuştur. Buradan yola çıkılarak, Heisenberg grubunun kontrol edilebilirlik karakterizasyonundaki merkez, regüler elemanlar ve free nilpotent üreteçlerin aralarındaki ilişkiye bakılıp diğer nilpotent Lie cebirlerinin kontrol edilebilirliği için bir karakterizasyon incelemesi yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Agrachev, A. A. (2002), editor, "Mathematical Control Theory", ictp lecture notes, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics.
- Ayala, V. (1995), "Controllability of Nilpotent Systems", Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions, Banach Center Publications, Vol.,32,pp.35-46.Institute of Math. Polish Academy of Science.
- Ayala, V. ve San Martin, L.A.B. (2000), "Controllability Properties of a Class of Control Systems on Lie Groups", Proceedings of Second Nonlinear Control Network (NCN) Workshop, France, June 5-8, 2000.
- Brockett, R.W. (1972), "System theory on group manifolds and coset spaces", SIAM J.Control, 10, 265-284.
- Buliga, M. (2002), "Sub-Riemannian geometry and Lie groups", Part I, arXiv:math.MG/0210189.
- Jurdjevic, V. ve Sussmann, H. (1972), "Control systems on Lie Groups", J. Diff. Equat., 12 , 313-329.
- Jurdjevic, V., and Sallet, G. (1984), "Controllability properties of affine systems", SIAM J. Control and Optimization, 22:501–508.
- Jurdjevic, V. (1997), Geometric Control Theory, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kara Hacibekiroglu, A. (1994), "Controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups", Dissertation of 1993-94 Diploma Course in Mathematics, International Centre for Theoretical Physics, Italy, August 1994
- Kara, A. and San Martin, L. A. B. (2006), "Controllability of Affine Control System for the Generalized Heisenberg Lie Groups", International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.29, No.1, pp.1-6.
- Isidori, A. (1989), Nonlinear Control Systems: An introduction, Springer Verlag, London.
- Nielsen, O. A. (1983), Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups, Queen's University Kingston, Ontario.
- Sussmann, H. J. (1973), "Orbits of families of vector fields and integrability of distributions", Trans. Amer. Math. Soc. 180, pp. 171-188.
- Sussmann, H. J. (1976), "Some properties of vector fields that are not altered by small perturbations" ,J. Diff.Equations 20, no. 2, pp. 292-315.
- Warner, F. W. (1971), Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott Foresman and Company, London.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 04.09.1975

Doğum yeri Kilis

Lise 1990-1993 Fatih Vatan Lisesi

Lisans 1994-1998 Anadolu Üniversitesi Fen Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1999-2002 Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Teorik Matematik Programı

Doktora 2002-2008 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü, Topoloji Anabilim Dalı

Çalıştığı kurumlar

1999-Devam ediyor Milli Eğitim Bakanlığı

Eğitim ve Seminerler

19-21/09/2001 XIV.Ulusal Matematik Sempozyumu
Anadolu Üniversitesi

21-29/06/2004 CIME Course İtalya