YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN-KESİRLİ MERTEBELİ NON-LİNEER KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Matematikçi Muhammet KURULAY

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 09.07.2009
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (FÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ (YTÜ)
: Prof. Dr. İ. Müfit GİRESUNLU (İÜ)
: Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
: Doç. Dr. Emanullah HİZAL (İTÜ)

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

KISALTMA LİSTESİ

KTDD   Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasındaki bilimsel ve insani katkılarından dolayı, kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa BAYRAM'a en derin şükranlarımı ve teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Hayatım boyunca, her türlü fedakârlığı benden esirgemeyen muhterem anne ve babama, büyük sabır ve anlayışlarından dolayı eşime çok teşekkür ederim.

Zaman-Kesirli Mertebeli Non-lineer Kısmi Türevli Diferensiyel Deklemlerin Nümerik Çözümleri

ÖZET

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) = f(u,u_x,u_{xx}),+g(x,t), \qquad m-1<\alpha<m$$

şeklinde yazılan zaman-kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada, $D_{*t}^{\alpha}u = \dfrac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}$ Caputo kesirli türev yukarıdaki ifadenin α. mertebesini gösterir. f nonlineer fonksiyon ve g ise bilinen fonksiyondur. Başlangıç ve sınır değer koşulları

$$u(x,0) = h(x), \qquad 0<\alpha\le 1$$
$$u(x,t)\to 0, \ |x|\to\infty, \quad t>0$$

ve

$$u(x,0) = h(x) \text{ ve } \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = k(x), \qquad 1<\alpha\le 2$$
$$u(x,t)\to 0, \qquad |x|\to\infty, \quad t>0$$

dir.

Bu tezde, mertebesi zaman-kesirli olan nonlineer kısmi türevli diferensiyel deklemini varyasyonel iterasyon, homotopy perturbation, ayrışım ve diferensiyel dönüşüm yöntemleri ile yaklaşık olarak çözümlerini verdik.

Bunun yanında, üç boyutlu kesirli mertebeden kısmi türevli nonlineer diferensiyel denklem sisteminin yaklaşık olarak nümerik çözümleri diferensiyel dönüşüm yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu çözümler nümerik olarak hızlı yakınsamaktadır.

Sonuç olarak, diferensiyel dönüşüm yönteminin kesirli mertebeden nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmede çok etkili ve pratik bir yöntem olduğunu gösterdik.

Anahtar Kelimeler: kesirli diferensiyel denklemler, Caputo kesirli türev, diferensiyel dönüşüm yöntemi, zaman-kesirli türev, nonlineer kısmi diferensiyel denklemler.

Numerical Solutions Of Time-Fractional Order Nonlinear Partial Differential Equations

ABSTRACT

We consider time-fractional order nonlinear Partial Differential Equation

$$D_{*t}^{\alpha} u(x,t) = f(u, u_x, u_{xx}) + g(x,t),\ m-1 < \alpha < m,$$

where $D_{*t}^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ is Caputo fractional derivative of order $\alpha, m \in N$, f is nonlinear function and g is source function. The initial and boundary conditions are of the form

$$0 < \alpha \le 1,\ u(x,0) = h(x),$$
$$u(x,t) \to 0 \ as\ |x| \to \infty,\ t > 0,$$

and

$$u(x,0) = h(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = k(x),\ 1 < \alpha \le 2,$$
$$u(x,t) \to 0 \ as\ |x| \to \infty,\ t > 0.$$

This thesis presents numerical solutions for time-fractional order nonlinear Partial Differential Equations using variational iteration, homotopy perturbation, adomian decomposition and differential transform methods.

In addition, approximate analytical solutions of three-dimensional systems of Fractional order nonlinear Partial Differential Equations (FPDEs) are solved through Differential Transform Method. The solutions were obtained in the form of rapidly convergent infinite series with easily computable terms.

Numerical results proved that Differential Transform Method is very effective and simple for obtaining approximate solutions of nonlinear FPDEs.

Key words: fractional differential equation, caputo fractional derivative, differential transform method, time-fractional derivative, nonlinear partial differential equations.

1. GİRİŞ

Analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemleri, kesirli türevli adi diferensiyel denklemleri ve integral denklemlerini çözmek için önerilebilir. En yaygın olarak kullanılan yaklaşık çözüm yöntemleri Varyasyonel Iterasyon, Homotopy Perturbasyon, Ayrışım ve Diferensiyel Dönüşüm yöntemleridir. Bunlara ek olarak diğer klasik yaklaşık çözümler de vardır. Bu yöntemlerin bazıları, Laplace transform, Fractional Green's function, ve Mellin transform yöntemleridir (Podlubny, 1999).

Varyasyonel iterasyon Yöntemi ilk olarak Ji-Huan He tarafından ileri sürüldü. Bu yöntemi kesirli türevli diferensiyel denklemlere He uyguladı (1998).

Son zamanlarda Odibat ve Momani (2007c) Varyasyonel Iterasyon Yöntemi ile uzay ve zaman kesirli türevleri içeren Fokker-Planck denklemlerini yaklaşık olarak çözmüştür.

Lineer kesirli diferensiyel denklemlerin çözümleri için kesirli fark, Ayrışım ve varyasyonel iterasyon yöntemleri kullanılarak farklı tip problemler için elde edilen sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır (Odibat ve Momani, 2007).

Yine Momani'nin (2008) yaptığı çalışmada lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri için Adomian decomposition ve varyasyonel iterasyon yöntemleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde edilmiş, elde edilen çözümler ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Homotopy Perturbation Yöntemi ilk kez 1998 de He tarafından ortaya atıldı (He J.H., 1999,).

Momani ve Odibat, Homotopy Perturbation Yöntemi ile kesirli türevli kısmi diferensiyel denklemleri için nonlineer başlangıç değer problemlerini çözdü (Odibat ve Momani, 2007a).

Kesirli türevli başlangıç değer problemlerine Abdullaziz tarafından Homotopy Perturbasyon Yöntemi uygulandı (Abdulaziz vd., 2007).

Ayrışım yönteminin temelleri ilk defa Adomian tarafından atılmştır. Zaman-kesirli Navier–Stokes denklemlerine ayrışım yöntemi uygulanmıştır (Odibat ve Momani, baskıda).

Kesirli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri ele alınarak kesirli lineer diferensiyel denklemler için Adomian ayrışım yöntemi geliştirilmiştir (Jafari ve Daftardar-Gejji,2005).

Nonlineer kesirli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Adomian ayrışım yöntemi kullanılmıştır (Jafari ve Daftardar-Gejji, 2006).

Kesirli Riccati diferensiyel denklemlerinin çözümü için Adomian ayrışım yöntemi kullanılmıştır (Momani ve Shawagfeh, 2007).

Caputo anlamındaki türev yardımıyla 4. mertebeden sınır değer lineer ve lineer olmayan integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri için Adomian ayrışım yöntemi kullanılmıştır (Momani ve Noor, 2007).

Ertürk ise, Caputo anlamında türevlere sahip lineer ve nonlineer kesirli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulamıştır (Ertürk vd., 2007).

Shawagfeh (2007) tarafından yapılan çalışmada mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ şeklinde olan, Caputo anlamında türevler içeren, klasik Taylor formülünden elde edilen yeni bir genelleştirilmiş Taylor formülü geliştirmiştir. Yöntem bazı kesirli türevli diferensiyel denklemlere uygulanmıştır.

Daftardar ve Babakhani'nin (2004) yaptıkları çalışmada kesirli diferensiyel denklem sistemleri için bir analiz sunulmuştur. Bu analizde kesirli diferensiyel denklemlerin başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik teoremleri ile kararlılık kriterleri verilmiştir.

2007 yılında, iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi zaman-kesirli türevli difizyon-dalga denklemlerinin çözümünde kullanıldı. Yeni bir genelleşme ile Taylor formülü ve Caputo kesirli türevi tanımlandı. Bunlarla ilgili teorem ve ispatları verildi. (Momani vd., 2007).

2008 yılında, iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi ile ilgili yeni bir genelleştirme yapıldı. Bu yöntem ile uzay ve zaman-kesirli lineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri verildi. Bu yöntemin etkili bir yöntem olduğu birkaç örnekte gösterildi. Sonuç olarak kesirli mertebeli lineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri incelendi. (Odibat ve Momani, 2008a).

Odibat tarafından uzay ve zaman-kesirli nonlineer kimsi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri ve iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi ile ilgili yeni bir genelleştirilme verildi. Yöntemin etkili bir yöntem olduğu birkaç örnekte gösterildi.(Odibat ve Momani, 2008b).

Bu tezde, mertebesi zaman-kesirli olan nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemleri varyasyonel iterasyon, homotopy perturbation, ayrışım ve diferensiyel dönüşüm yöntemleri ile yaklaşık olarak çözüldü. Diferensiyel dönüşüm yönteminin, diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verdiği çözüme daha kolay ulaştığı gösterildi. Bu düşünce çizelge ve şekiller ile desteklendi. Bu tezde kullandığımız kesirli türev, Caputo tarafından tanımlanmıştır.

Bunun yanında, üç boyutlu kesirli mertebeden kısmi türevli nonlineer diferensiyel denklem sisteminin yaklaşık olarak çözümleri de hesaplandı. Bu çözümlerle ilgili teori ve uygulamalar ilk kez tarafımdan yapıldı. Bulunan sayısal sonuçlar: Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin üç boyutlu kesirli mertebeden nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini elde etmede çok etkili ve pratik olduğunu göstermiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Fen, mühendislik ve ekonomi bilimlerinde ortaya çıkan problemlere ait matematiksel modellerin oluşturulması uygulamalı matematikte karşılaşılan en önemli bir problemdir. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda, bu konuda yapılan çalışmalar oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Bu çalışmada genel olarak yukarıda adı geçen bilim dallarında ortaya çıkan ve analitik olarak çözümü mümkün olmayan problemlerin en iyi yaklaşık çözümünü bulma üzerinde durulmuştur. Bu bölümde tezde sık kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Burada yer verilen bazı teoremlerin ispatları, literatürde ayrıntılı bir şekilde verildiği için ayrıca ispatları yapılmayacaktır.

2.1 Kesirli Türev

Kesirli mertebeden türevli denklemlere geçmeden önce türevin tanımını verelim.

2.1.1 Tanım Eğer x, f fonksiyonunun tanım kümesinde bir nokta ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

limiti var ve sonlu bir değerse, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir denir ve f fonksiyonunun bu x noktasındaki türevi adı verilir. Eğer $z=x+h$ denilirse, yukarıdaki türev tanımı,

$$\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=f'(x)$$

şeklini alır. Bu da genel olarak,

$$D_x f=Df(x)=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$$

sembollerinin birisi ile gösterilir. Buda $D=\dfrac{d}{dx}$ türev operatörüdür.

$\alpha>0$ için kesirli mertebeden türevler için bir çok tanım vardır (Podlubny, 1999; Caputo, 1967). Örneğin, Bu tanmlardan bir kaçı; Riemann–Liouville, Grunwald–Letnikow, Caputo ve Genelleştirilmiş Fonksiyonlar yaklaşımıdr. En yaygın olarak kullanılan kesirli türev tanımları; Riemann–Liouville ve Caputo'dir. Kesirli türevle ile ilgili tanımı vermeden önce, şunu bilmeliyiz ki; kesirli türev: Bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesi tam sayı değil de, rasyonel sayı olduğu zamanki haldir.

2.1.2 Tanım Bir bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli türevli adi diferensiyel denklemler denir. Örneğin,

$$xD^{\frac{1}{2}}y(x) - D^{\frac{2}{3}}y(x) - y(x) = \sin(x)$$

$$D^{\frac{1}{3}}y(x) + 5y^2(x) = 3$$
$$D^{\frac{1}{2}}y(t) + D^{\frac{1}{2}}y(x) = t$$
$$D^{\frac{2}{3}}y(x) + D^{\frac{1}{2}}y(x) - 2y(x) = 0$$

denklemleri birer kesirli türevli diferensiyel denklemdir.

2.1.3 Tanım Bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli türevli kısmi diferensiyel denklemler denir. Örneğin,

$$D_t^{\frac{1}{2}}u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

denklemi kesirli türevli kısmi diferensiyel denklemdir.

2.1.4 Tanım x bağımsız değişkenine göre

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \cdots + a_1(x)D^{\alpha_1}y(x) + a_0(x)D^{\alpha_0}y(x) = f(x)$$

şeklinde yazılabilen denklemlere kesirli türevli lineer diferensiyel denklem denir. Bu denklemin lineer olması için şu iki koşulu sağlaması gerekir:

a). Bağımlı değişken olan y ve onun bütün kesirli türevlerinin derecesi bir olacak.

b). $a(x)$ katsayıları yalnızca x bağımsız değişkenine bağlı olabilir.

Bir denklem lineer değilse nonlineer denklem olarak adlandırılır. Örneğin,

$$x^3 D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = e^x$$
$$D^{2q}y(x) - D^q y(x) - y(x) = 0$$

denklemleri lineer olmasına rağmen

$$D^{\frac{3}{2}} y(x) = y^2(x)$$

$$y(x) D^{\frac{3}{2}} y(x) - D^{\frac{3}{5}} y(x) = x^3$$

denklemleri nonlineerdir.

2.1.5 Tanım Bir kesirli türevli adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine o denklemin mertebesi denir. Örneğin,

$$y(x) D^{\frac{7}{3}} y(x) + (D^{\frac{3}{5}} y(x))^2 = (x+1)^2$$

denklemi $\frac{7}{3}$. mertebeden nonlineer kesirli türevli adi diferensiyel denklemdir.

2.1.6 Tanım Bir kesirli türevli adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin derecesine o kesirli türevli diferensiyel denklemin derecesi denir. Örneğin

$$y(x) D^{\frac{3}{5}} y(x) + (D^{\frac{7}{2}} y(x))^2 = (x+1)^2$$

denkleminin derecesi 2 dir.

2.1.7 Tanım $n > 0$ için,

$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ biçiminde tanımlanan fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir.

Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$ dir. Özel olarak, sırasıyla $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ için, $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2!,\ \Gamma(4) = 3!$ elde edilebilir. Daha genel olarak, tümevarımla, $\Gamma(n+1) = n!$ sonucuna varılır. $n = \frac{1}{2}$ için

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olur. $n < 0$ için $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0 < p < 1$ dir. Bunlara ilave olarak Gamma fonksiyonu için

$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$ şeklinde çoğalma formülü verilebilir.

2.1.8 Tanım $f(x),\ x>0$ fonksiyonu $(p>\mu)$ için $f(x)=x^p f_1(x)$ olarak yazılabiliyorsa $C_\mu, \mu\in R$ uzayındadır. Burada $f_1(x)\in C[0,\infty)$ için sürekli ve eğer $f^{(m)}\in C_\mu, m\in N$ ise bu durumda $f\,(x)$ reel fonksiyonu $C_\mu^{(m)}$ uzayındadır.

2.1.9 Tanım (Riemann–Liouville integral operatörü) $a\geq 0$ için $\alpha>0$ mertebeli Riemann–Liouville integral operatörü

$$J_a^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,\quad \mathrm{x}\geq a, \tag{2.1}$$

$$J^0 f(x)=f(x). \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. $f\in C_\mu, \alpha,\ \beta\geq 0$ ve $\gamma>-1$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $(J_a^\alpha J_a^\beta f)(x)=(J_a^\beta J_a^\alpha f)(x)=(J_a^{\alpha+\beta})f(x),$ (2.3)

2. $J_a^\alpha x^\gamma=\dfrac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B_{\frac{x-a}{x}}(\alpha,\gamma+1)$. (2.4)

$B_\tau(\alpha,\gamma+1)$ tam olmayan beta fonksiyonu

$$B_\tau(\alpha,\gamma+1)=\int_0^\tau t^{\alpha-1}(1-t)^\gamma\,dt, \tag{2.5}$$

$$J_a^\alpha e^{cx}=e^{cx}(x-a)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c(x-a))^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}, \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Kesirli türev kavramı için Riemann-Liouville tanımının dışında, bu tanım üzerindeki bazı değişikliklerle elde edilen Caputo'nun verdiği tanım da vardır. Yaptığımız işlemlerde Caputo türevi olarak da bilinen tanımı dikkate alacağız. Çünkü başlangıç değer problemleri için Caputo'nun tanımı daha kullanışlıdır.

2.1.10 Tanım $f(x)$ reel değerli bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun v mertebeli Caputo kesirli türevi, $m-1<v<m,\ m\in N,\ x\geq a,\ f\in C_{-1}^m$ için

$$D_a^{v} f(x) = J_a^{m-v} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-v)} \int_a^x (x-t)^{m-v-1} f^{(m)}(t) dt \tag{2.7}$$

şeklindedir. $m-1 < v < m,\ v \geq -1,\ f \in C_v^m$

$$\left(J_a^{v} D_*^{v} f\right)(x) = J^m D^m f(x), \tag{2.8}$$

$$J^m D^m f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^k(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.11 Tanım t değişkeni zamanı göstermek üzere, Caputo zaman-kesirli türevi

$$D_{*t}^{\eta} u(x.t) = \frac{\partial^{\eta} u(x.t)}{\partial t^{\eta}} = \begin{cases} \dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} & \eta = m \text{ için,} \\ \dfrac{1}{\Gamma(m-\eta)} \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{m-\eta-1} \frac{\partial^m u(x,\tau)}{\partial t^m} d\tau, & m\text{-}1 < \eta < m \text{ için} \end{cases}$$

ve benzer şekilde Caputo uzay-kesirli türevi

$$D_{*x}^{v} u(x.t) = \frac{\partial^{v} u(x.t)}{\partial t^{v}} = \begin{cases} \dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} & v = m \text{ için,} \\ \dfrac{1}{\Gamma(m-v)} \displaystyle\int_0^x (x-\theta)^{m-v-1} \frac{\partial^m u(\theta,t)}{\partial \theta^m} d\theta, & m\text{-}1 < v < m \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Riemann-Liouville kesirli mertebeli diferensiyeli $m-1 \leq q < m$, $m \in \mathrm{Z}^+$ ve $x > x_0$ olmak üzere,

$$D_{x_0}^{q} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \left[\int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1+q-m}} dt \right]$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Odibat ve Momani, 2008).

Analitik ve sürekli $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{t=0}^{\infty}F(k)(x-x_0)^{k/\alpha}$$

şeklinde kesirli kuvvet serisine genişletilir. Kesirli mertebeli diferensiyel denklemlerle bilimin çeşitli alanlarındaki pratik uygulamalarda da karşılaşılır. Fakat kesirli başlangıç şartlarına sık rastlanmaz ve fiziksel olarak ne anlama geldiği de açık değildir. Bu yüzden Tanım 2.1.11 tam kuvvetleri kullanabilmek için Caputo tarafından

$$D_{x_0}^{q}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(x-x_0)^k f^{(k)}(x_0)\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-q)}\frac{d^m}{dx^m}\left\{\int_0^x\left[\frac{f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(t-x_0)^k f^{(k)}(x_0)}{(x-t)^{1+q-m}}\right]dt\right\}$$

şeklinde genişletilmiştir. Başlangıç koşulları mertebesi tamsayı olan türevler bulunduğundan başlangıç şartlarının dönüşümü

$$F(k)=\begin{cases} Eğer\ k/\alpha\in Z^{+} & \dfrac{1}{(k/\alpha)!}\left[\dfrac{d^{k/\alpha}f(x)}{dx^{k/\alpha}}\right]_{x=x_0},\quad k=0,1,2,...(n\alpha-1)\ için \\ Eğer\ k/\alpha\notin Z^{+} & ,\ 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Arıkoğlu ve Ozkol, 2006b). Burada n, kesirli mertebeli diferensiyel denklemin mertebesi olarak alınmıştır.

2.2 Varlık ve Teklik

Kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümünü bulmak için

$$D^{q_n}y(x)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{n-i}(x)D^{q_{n-i}}y(x)+a_0(x)y(x)=f(x), \tag{2.10}$$

$$y^{(k)}(a)=y_k,\qquad k=1,2,...,q_n-1,\ 0<q_1<q_2<\cdots<q_n,, \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanan başlangıç değer problemini ele alalım. Öncelikli olarak başlangıç şartlı kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümünü araştıracağız. Eğer denklemin çözümü varsa tek midir? Bu soruların cevabını vermek için aşağıdaki iki teoreme ihtiyaç vardır. İlk teorem lineer kesirli türevli denklemlerin (2.10) çözümünün varlığı ve tekliğini gösterir. Diğer teorem ise (2.10) denkleminin daha genelleştirilmiş hali olan

$$D^{q_n} y(x) = f(x,y), \qquad (2.12)$$
$$y^{(k)}(a) = y_k, \qquad k = 1,2,...,q_n - 1$$

denklemi ile ilgilidir.

2.2.1 Teorem Eğer $f(x) \in L_1(a,b)$, ve $a_{n-j}(j = 1,2,...,n)$ ifadeleri $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise (2.10)-(2.11) başlangıç değer problemi $y(x) \in L_1(a,b)$ için tek bir çözüme sahiptir.

Burada $f(x) \in L_1(a,b)$ ifadesi $\int_a^b |f(x)|dx < \infty, \quad a < x < b < \infty$ anlamına gelir.

2.2.2 Teorem $D \supset R^2$ ve $f(x,y)$ reel değerli Lipschitz şartlarını sağlayan sürekli fonksiyon olsun. Yani,

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z|,$$

ve

$$|f(x,y)| \le M < \infty \qquad \forall (x,y) \in D$$

dir.

(2.12) probleminin çözümü sürekli olup $M \subset D$ bölgesinde vardır ve tekdir. Teoremlerin detaylı ispatları Podlubny'nin kitabında vardır (Podlubny, 1999).

2.3 Genelleştirilmiş Taylor Formülü

Bu kısımda Caputo kesirli türevini içeren genelleştirilmiş Taylor formülünü vereceğiz (Odibat ve Shawagfeh, 2007).

2.3.1 Teorem (Genelleştirilmiş ortalama değer teoremi). $0 < \alpha \le 1$ için $f(x) \in C[a,b]$ ve $D_a^\alpha f(x) \in C(a.b]$olsun. Bu durumda

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(D_a^\alpha f)(\xi).(x-a)^\alpha \qquad (2.13)$$

olur. Burada $\forall x \in (a,b]$ için $\xi,\ a \le \xi \le x$ dir.

İspat: (2.1) ve (2.7) denklemlerinden,

$$(J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (D_a^\alpha f)(t)dt \tag{2.14}$$

ve integral ortalama değer teoremini kullandığımızda, $0 \le \xi \le x$ için

$$(J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha f)(\xi) \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \tag{2.15}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha f)(\xi).(x-a)^\alpha \tag{2.16}$$

yazılır. (2.9) denkleminden

$$(J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - f(a) \tag{2.17}$$

elde edilir. Eğer $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 2.3.1. bildiğimiz ortalama değer teoremine indirgenmiş olur.

2.3.2 Teorem $0 < \alpha \le 1$ için $D_a^{n\alpha} f(x),\ D_a^{(n+1)\alpha} f(x) \in C(a,b]$ olsun. Bu durumda

$$(J_a^{n\alpha} D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} (D_a^{n\alpha} f)(a) \tag{2.18}$$

olur. Burada

$$D_a^{n\alpha} = D_a^\alpha . D_a^\alpha \cdots D_a^\alpha \qquad 2.19)$$

dir.

İspat. (2.3) ve (2.8) denklemlerinden

$$(J_a^\alpha D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^{(n+1)\alpha} D_a^{(n+1)\alpha} f)(x) = J_a^{n\alpha}((D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^\alpha D_a^{(n+1)\alpha} f)(x)), \tag{2.20}$$

$$= J_a^{n\alpha}((D_a^{n\alpha} f)(x) - (J_a^\alpha D_a^\alpha)(D_a^{n\alpha} f)(x)), \tag{2.21}$$

$$= J_a^{n\alpha}((D_a^{n\alpha} f)(a)), \tag{2.22}$$

$$= \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} (D_a^{n\alpha} f)(a) \tag{2.23}$$

bulunur.

2.3.3 Teorem (Genelleştirilmiş Taylor Formülü) $0<\alpha\leq 1$ ve $k=0,1,\ldots,n+1$ için $D_a^{k\alpha} f(x)\in C(a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}(D_a^{i\alpha}f)(a)+\frac{(D_a^{(n+1)\alpha}f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}.(x-a)^{(n+1)\alpha},\quad a\leq\xi\leq x,\ \ \forall\mathrm{x}\in(\mathrm{a,b}] \tag{2.24}$$

olur.

İspat: (2.18)

$$\sum_{i=0}^{n}(J_a^{i\alpha}D_a^{i\alpha}f)(x)-(J_a^{(i+1)\alpha}D_a^{(i+1)\alpha}f)(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-a)^{ni\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}(D_a^{i\alpha}f)(a),$$

denkleminden

$$f(x)-(J_a^{(n+1)\alpha}D_a^{(n+1)\alpha}f)(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-a)^{ni\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}(D_a^{i\alpha}f)(a)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 2.3.1. uygulandığında,

$$(J_a^{(n+1)\alpha}D_a^{(n+1)\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}\int_a^x(x-t)^{(n+1)\alpha}(D_a^{(n+1)\alpha}f)(t)dt,$$

$$=\frac{(D_a^{(n+1)\alpha}f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}\int_a^x(x-t)^{(n+1)\alpha}dt,$$

$$=\frac{(D_a^{(n+1)\alpha}f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}.(x-a)^{(n+1)\alpha}.$$

elde edilir. $\alpha=1$ olması durumunda Teorem 2.3.3. Taylor formülüne indirgenmiş olur.

3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN DÖNÜŞÜM VE KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde kullanacağımız bazı yöntemleri vereceğiz. Bu yöntemler kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılacak yöntemler için temel teşkil edecektir. Önce bir boyutlu ve iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemleri daha sonra kuvvet serisi yöntemi ele alınacaktır.

3.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm

$y(x)$ fonksiyonunun k . mertebeden diferensiyel dönüşümü

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} . \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $y(x)$ orijinal fonksiyon ve $Y(k)$ ise dönüşüm fonksiyonudur. $Y(k)$ 'nın ters dönüşümü

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x-x_0\right)^k Y(k) \tag{3.2}$$

şeklindedir. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x-x_0\right)^k \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denklemi $x=x_0$ da $y(x)$ 'in Taylor serisine açılmasından elde edilir. (3.1) ve (3.2) dönüşüm fonksiyonları tanımlarından ve matematiğin temel özelliklerinden aşağıdaki özellikler kolayca elde edilir. Bu özellikler Çizelge 3.1 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Tek boyutlu diferensiyel dönüşüm yönteminin özellikleri.

Fonksiyon	**Dönüşüm fonksiyonu**
$y(x)=u(x)\pm v(x)$	$Y(k)=U(k)\pm V(k)$
$y(x)=cw(x)$	$Y(k)=cW(k)$
$y(x)=dw/dx$	$Y(k)=(k+1)W(k+1)$
$y(x)=d^j w/dx^j$	$Y(k)=(k+1)(k+2)...(k+j)W(k+j)$
$y(x)=u(x)v(x)$	$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$
$y(x)=u_1(x)u_2(x),...,u_n(x)$	$Y(k)=\sum_{r=0}^{r_1}\sum_{r=r_1}^{r_2},...,\sum_{r=r_{n-1}}^{k}U_1(r)U_2(r_1-r),...,U_n(k-r_{n-1})$
$y(x)=x^j$	$Y(k)=\delta(k-j)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}, \quad x_0=0 \ için$

Bir diferensiyel cebirsel denklem $F(t,y(t),y'(t))=0$ şeklinde yazılabilir. Bu denkleme genel kapalı (implicit) şekilde yazılmış diferensiyel cebirsel denklem denir. Burada $F\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^n$ ve $t\in\mathbb{R}$ dır.

Diferensiyel cebirsel denklem açık formda

$F(y',y,x,t)=0$,

$G(y,x,t)=0$.

şeklinde yazılabilir. $G(y,x,t)=0$ ifadesinde de görüldüğü gibi diferensiyel cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. $y=y(t)$ ve $x=x(t)$ olmak üzere, y diferensiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer diferensiyel cebirsel denklem, k tane denkleme sahip ve m tanesi diferensiyel denklem ise $(k-m)$ tanesi cebirsel denklemdir.

3.1.1 Tanım Bir diferensiyel cebirsel denklemin, y' diferensiyelini oluşturabilmek için denklemin hepsinin veya bir kısmının t ye bağlı minimum türevlenebilme sayısına o sistemin indeksi denir.

Şimdi aşağıdaki 3-indeksli diferensiyel cebirsel denklem sistemini ele alalım,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ e^t & t+1 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2t \\ t^2+t+2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t\in[0,\infty] \tag{3.4}$$

Burada başlangıç şartları

$$x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ve tam çözümler ise

$$x_1(t)=e^{-t},$$
$$x_2(t)=t,$$
$$x_3(t)=1$$

şeklindedir. Diferensiyel dönüşüm yönteminin özelliklerini kullanarak ve verilen (3.4) diferensiyel cebirsel denklemlerinin diferensiyel dönüşümlerini alarak

$$(k+1)X_1(k+1)+X_1(k)+X_2(k)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)X_3(k-r)=2.\delta(k-1) \tag{3.5}$$

$$(k+1)X_2(k+1)+\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}X_1(k-r)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)X_2(k-r)+X_2(k)=\delta(k-2)+\delta(k-1)+2.\delta(k) \tag{3.6}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)X_2(k-r)=\delta(k-3) \tag{3.7}$$

denklemlerini elde ederiz.

(3.5)-(3.7) denklemleri düzenlenirse

$$X_1(k+1)=\frac{1}{k+1}\left[2.\delta(k-1)-X_1(k)-X_2(k)-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)X_3(k-r)\right] \tag{3.8}$$

$$X_2(k+1)=\frac{1}{k+1}\left[\delta(k-2)+\delta(k-1)+2.\delta(k)-\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}X_1(k-r)-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)X_2(k-r)-X_2(k)\right] \tag{3.9}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)X_2(k-r)=\delta(k-3) \tag{3.10}$$

elde edilir.

$X_1(k),\ X_2(k),\ X_3(k)$ katsayıları $k=0,1,2,...$ için (3.8)-(3.10) denklemlerinden

$$X_1(1)=-1,\ X_1(2)=\frac{1}{2},\ X_1(3)=-\frac{1}{6},\ X_1(4)=\frac{1}{24},\ X_1(5)=-\frac{1}{120},...$$

$$X_2(1)=1,\ \ X_2(2)=0,\ \ X_2(3)=0,\ \ X_2(4)=0,\ \ X_2(5)=0,...$$

$$X_3(1)=0,\ X_3(2)=0,\ X_3(3)=0,\ \ X_3(4)=0,\ \ X_3(5)=0,...$$

şeklinde elde edilir. $X_1(k),\ X_2(k),\ X_3(k)$ katsayılarının yukarıdaki değerlerini (3.2) denkleminde yerine yazarsak

$$x_1(t)=1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{720}t^6-\frac{1}{5040}t^7+\frac{1}{40320}t^8-\frac{1}{362880}t^9+O(t^{10}),$$

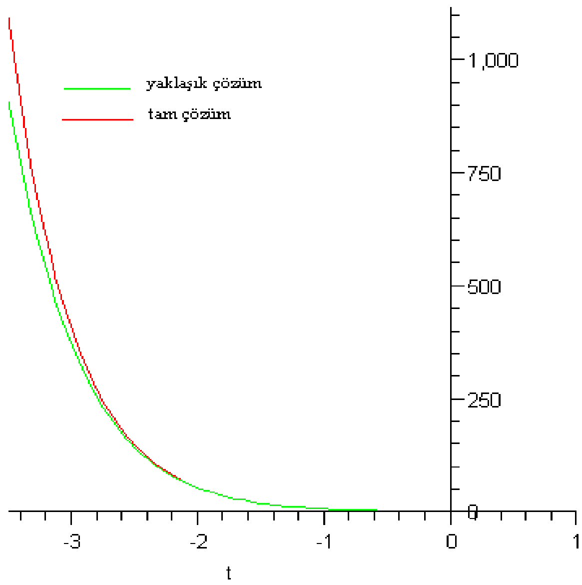
$$x_2(t)=t,$$

$$x_3(t)=1$$

şeklinde seri çözümü bulunur. Bu problemin tam ve yaklaşık çözümleri aşağıdaki Çizelge 3.2 de karşılaştırılmıştır. Ayrıca grafiği Şekil 3.1 de verilmiştir.

Çizelge 3.2. (3.4) probleminin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması, burada x_1 tam çözüm $\tilde{x}_1$ ise yaklaşık çözümdür.

t	x_1	$\tilde{x}_1$	$\lvert x_1-\tilde{x}_1\rvert$
0.1	0.9048374180	0.9048374181	$0,1.10^{-9}$
0.2	0.8187307531	0.8187307532	$0,1.10^{-9}$
0.3	0.7408182207	0.7408182206	$0,1.10^{-9}$
0.4	0.6703200460	0.6703200461	1.10^{-10}
0.5	0.6065306597	0.6065306595	2.10^{-10}
0.6	0.5488116361	0.5488116345	$1,6.10^{-9}$
0.7	0.4965853038	0.4965852966	$7,2.10^{-9}$
0.8.	0.4493289641	0.4493289365	$2,76.10^{-8}$
0.9	0.4065696597	0.4065695710	$8,87.10^{-8}$
1.0	0.3678794412	0.3678791888	$2,524.10^{-7}$



Şekil 3.1. (3.4) problemindeki x_1 ve $\tilde{x}_1$ fonksiyonlarının grafikleri.

İkinci örnek olarak aşağıdaki 3-indeksli diferensiyel cebirsel denklemi ele alalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t\in[0,\infty] \tag{3.11}$$

Burada başlangıç şartları

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ve tam çözümler ise

$$x_1(t)=e^t-1,$$
$$x_2(t)=2t-e^t,$$
$$x_3(t)=(1+t)e^t-2t^2.$$

şeklindedir. Çizelge 3.1 deki diferensiyel dönüşüm yönteminin özelliklerini kullanarak (3.11) diferensiyel cebirsel denklem sistemi için

$$
\begin{gathered}
(k+1)X_2(k+1)+X_1(k)=\delta(k) \\
(k+1)X_2(k+1)+(k+1)X_3(k+1)+2X_2(k)=2\delta(k-1) \\
\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)X_2(k-r)+X_3(k)=\frac{1}{k!}.
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

elde edilir.

(3.12) denklemini daha basit olarak

$$
\begin{aligned}
&X_2(k+1)=\frac{1}{k+1}\left[\delta(k)-X_1(k)\right], \\
&X_3(k+1)=\frac{1}{k+1}\left[2\delta(k-1)-2X_2(k)-(k+1)X_2(k+1)\right], \\
&\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)X_2(k-r)+X_3(k)=\frac{1}{k!}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.13) denklemlerinden $k=0,1,2,...$ için $X_1(k),\ X_2(k),\ X_3(k)$ katsayılarını

$$X_1(1)=1,\ X_1(2)=\frac{1}{2},\ X_1(3)=\frac{1}{6},\ X_1(4)=\frac{1}{24},\ X_1(5)=\frac{1}{120},...$$

$$X_2(0)=-1,\ X_2(1)=1,\ X_2(2)=-\frac{1}{2},\ X_2(3)=-\frac{1}{6},\ X_2(4)=-\frac{1}{24},\ X_2(5)=-\frac{1}{120},...$$

$$X_3(0)=1,\ X_3(1)=2,\ X_3(2)=-\frac{1}{2},\ X_3(3)=\frac{2}{3},\ X_3(4)=\frac{5}{24},\ X_3(5)=\frac{1}{20},...$$

şeklinde hesaplarız. Bu $X_1(k),\ X_2(k),\ X_3(k)$ katsayılarının değerlerini (3.2) denkleminde yerlerine yazarak

$$x_1(t)=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{720}t^6+\frac{1}{5040}t^7+\frac{1}{40320}t^8+\frac{1}{362880}t^9+O(t^{10})$$

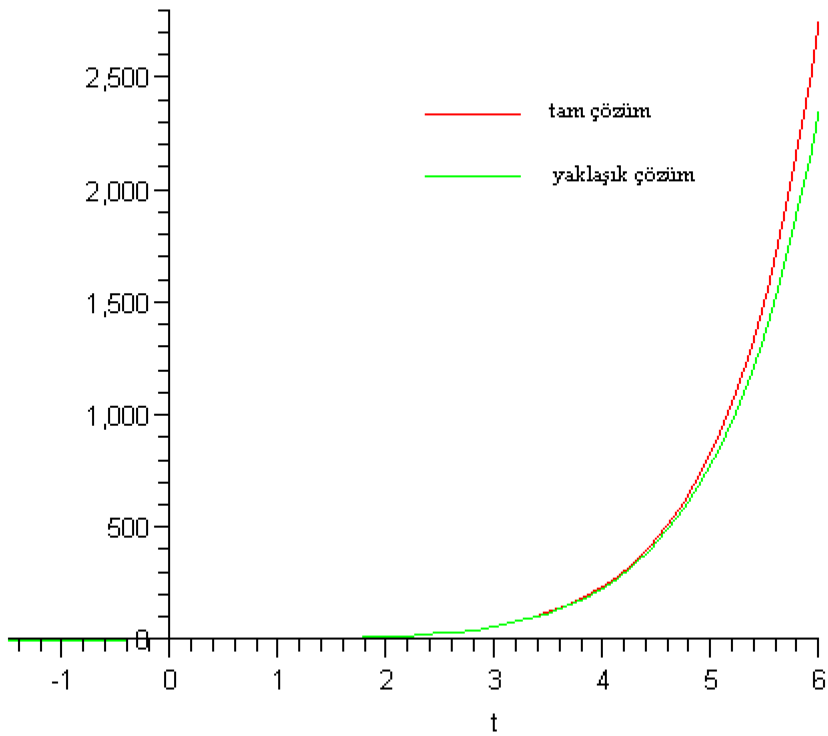
$$x_2(t)=-1+t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{120}t^5-\frac{1}{720}t^6-\frac{1}{5040}t^7-\frac{1}{40320}t^8-\frac{1}{362880}t^9+O(t^{10})$$

$$x_3(t)=1+2t-\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{24}t^4+\frac{1}{20}t^5+\frac{7}{720}t^6+\frac{1}{630}t^7+\frac{1}{4480}t^8+\frac{1}{36288}t^9+O(t^{10})$$

şeklinde seri çözümü buluruz.

Çizelge 3.3. (3.11) probleminin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması,burada x_3 tam çözüm $\tilde{x}_3$ ise yaklaşık çözümdür

t	x_3	$\tilde{x}_3$	$\lvert x_3 - \tilde{x}_3 \rvert$
0.1	1.195688010	1.195688010	0
0.2	1.385683310	1.385683309	$0,1.10^{-8}$
0.3	1.574816450	1.574816451	$0,1.10^{-8}$
0.4	1.768554577	1.768554576	$0,1.10^{-8}$
0.5	1.973081906	1.973081903	$0,3.10^{-8}$
0.6	2.195390080	2.195390061	$0,19.10^{-7}$
0.7	2.443379602	2.443379511	$0,91.10^{-7}$
0.8.	2.725973670	2.725973317	$0,353.10^{-6}$
0.9	3.053245911	3.053244751	$0,1160.10^{-5}$
1.0	3.436563656	3.436560295	$0,3361.\ 10^{-5}$



Şekil 3.2 (3.11) problemindeki x_3 ve $\tilde{x}_3$ fonksiyonlarının grafikleri.

3.2 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm

3.2.1 Tanım $w(x,y)$ fonksiyonunun iki boyutlu diferensiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.14}$$

olarak tanımlanır. Burada $w(x,y)$ orijinal fonksiyon, $W(k,h)$ dönüşüm fonksiyonudur (kısaca bu fonksiyona T – fonksiyonu da denilir).

3.2.2 Tanım $W(k,h)$ ın ters diferensiyel dönüşümü

$$w(x,y)=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h \tag{3.15}$$

olarak tanımlanır. (3.14) ve (3.15) denklemlerinden

$$w(x,y)=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} x^k y^h \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) denkleminden de anlaşılacağı gibi iki boyutlu diferensiyel dönüşüm iki boyutlu Taylor seri açılımından türetilmiştir.

3.2.3 Teorem $w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$ fonksiyonu için diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.17}$$

$$V(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.18}$$

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}u(x,y)\pm v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.19}$$

denklemleri elde edilir. (3.17), (3.18), (3.19) denklemleri kullanılarak $W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilir.

3.2.4 Teorem $w(x,y)=\lambda u(x,y)$ fonksiyonu için diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k,h)=\lambda U(k,h)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.20}$$

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left[\lambda w(x,y)\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.21}$$

elde edilebilir. (3.20) ve (3.21) denklemlerinden $W(k,h)=\lambda U(k,h)$ elde edilir.

3.2.5 Teorem $w(x,y)=\partial u(x,y)/\partial x$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu $W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$\begin{aligned} W(k,h)&=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \\ &=\frac{k+1}{(k+1)!h!}\left[\frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

yazılabilir. Buradan $W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$ dir.

3.2.6 Teorem: $w(x,y)=\partial u(x,y)/\partial y$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu $W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)$ şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$\begin{aligned} W(k,h)&=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \\ &=\frac{h+1}{k!(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k} \partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \end{aligned} \tag{3.23}$$

yazılabilir. Buradan $W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)$ dir.

3.2.7 Teorem $w(x,y)=\partial^{r+s}u(x,y)/\partial x^r\partial y^s$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu

$W(k,h)=(k+1)(k+2)...(k+r)(h+1)(h+2)...(h+s)U(k+r,h+s)$

şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den

$$\begin{aligned} W(k,h)&=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}\left[\frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \\ &=\frac{(k+1)...(k+s)(h+1)...(h+s)}{(k+r)!(h+s)!}\left[\frac{\partial^{k+h+r+s}}{\partial x^{k+r}\partial y^{h+s}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

yazılabilir. Buradan $W(k,h)=(k+1)...(k+r)(h+1)...(h+s)U(k+r,h+s)$ elde edilir.

3.2.8 Teorem: $w(x,y)=u(x,y).v(x,y)$ için dönüşüm fonksiyonu

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)$$

şeklindedir (Chen ve Ho, 1999).

İspat : Tanım 3.2.1 den hareketle,

$$W(0,0)=\left[u(x,y).v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=U(0,0)V(0,0), \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} W(1,0)&=\frac{1}{1!0!}\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y)v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \\ &=\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}v(x,y)+u(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \\ &=U(1,0)V(0,0)+U(0,0)V(1,0), \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} W(0,1)&=U(0,1)V(0,0)+U(0,0)V(0,1), \\ W(2,0)&=U(2,0)V(0,0)+U(1,0)V(1,0)+U(0,0)V(2,0), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$W(1,1)=U(1,1)V(0,0)+U(1,0)V(0,1)+U(0,1)V(1,0)+U(0,0)V(1,1), \tag{3.28}$$

$$W(0,2)=U(0,2)V(0,0)+U(0,1)V(0,1)+U(0,0)V(0,2), \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} W(1,2)=&U(1,2)V(0,0)+U(1,1)V(0,1)+U(1,0)V(0,2)\\ &+U(0,2)V(1,0)+U(0,1)V(1,1)+U(0,0)V(1,2), \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} W(2,1)=&U(2,1)V(0,0)+U(2,0)V(0,1)+U(1,1)V(1,0)\\ &+U(1,0)V(1,1)+U(0,1)V(2,0)+U(0,0)V(2,1), \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} W(2,2)=&U(2,2)V(0,0)+U(2,1)V(0,1)+U(2,0)V(0,2)\\ &+U(1,2)V(1,0)+U(1,1)V(1,1)+U(1,0)V(1,2)\\ &+U(0,2)V(2,0)+U(0,1)V(2,1)+U(0,0)V(2,2). \end{aligned} \tag{3.32}$$

yazılabilir. Genelleme yapılırsa $W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)$ eşitliği elde edilir.

3.2.9. Teorem $w(x,y)=x^m y^n$ şeklinde bir fonksiyon ise diferensiyel dönüşüm fonksiyonu

$$\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}, \qquad \delta(h-n)=\begin{cases}1, & h=n\\ 0, & h\neq n\end{cases}. \tag{3.33}$$

olmak üzere, $W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\delta(k-m)\delta(h-n)$ şeklinde olur(Chen ve Ho, 1999).

İspat :

$$\left[\frac{\partial^{k+h}w(x,y)}{\partial x^k\partial y^h}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=\begin{cases}k!h!, & k=m \;\; ve \;\; h=n,\\ 0, & k\neq m \;\; ya\,da \;\; h\neq n.\end{cases} \tag{3.34}$$

eşitliğinden

$$\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}, \qquad \delta(h-n)=\begin{cases}1, & h=n\\ 0, & h\neq n\end{cases}. \tag{3.35}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} W(k,h)&=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial w(x,y)^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}\\ &=\delta(k-m,h-n)\\ &=\delta(k-m)\delta(h-n). \end{aligned} \tag{3.36}$$

yazılır. Örnek olarak iki boyutlu dönüşüm için aşağıdaki başlangıç değer problemi verilebilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.37}$$

$$(x,0)=\frac{1}{c}x^2, \qquad x>0, \quad c>0, \qquad \text{(c: keyfi} \qquad \text{sabit)}.$$

(3.37) denkleminin iki boyutlu dönüşümünü aldığımızda,

$$(h+1)U(k,h+1)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)$$

$$\times U(k-r+1,s)+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(k-r+2)\times U(r,h-s)U(k-r+2,s). \tag{3.38}$$

elde edilir. Başlangıç şartını (3.38) denklemine uyguladığımızda,

$$U(i,0)=0, \qquad i=0,1,3,\ldots,m, \tag{3.39}$$

$$U(2,0)=\frac{1}{c}. \tag{3.40}$$

bulunur. (3.39) ve (3.40) denklemlerini (3.38) de yerine yazarak ve $m\to\infty$ durumu göz önüne alarak

$$\begin{aligned} U(2,1)&=\frac{6}{c^2},\\ U(2,2)&=\frac{36}{c^3},\\ U(2,3)&=\frac{216}{c^4}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Bütün $W(k,h)$ değerlerini (3.15) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(x,t)=x^2\left(\frac{1}{c}+\frac{6}{c^2}t+\frac{36}{c^3}t^2+\frac{216}{c^4}t^3+\cdots\right). \tag{3.42}$$

çözümü bulunur. Buradan

$$u(x,t)=x^2\left(\frac{1}{c-6t}\right). \tag{3.43}$$

elde edilir.

3.3 Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Kuvvet Serisi Çözümü

Bu bölümde kısmi türevli diferensiyel denklemlerin (KTDD) yeni tanımlayacağımız kuvvet serisi yaklaşımı ile nasıl çözülebileceğini göstereceğiz. Genel olarak kısmi türevli lineer diferensiyel denklem,

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u=g(x,y) \tag{3.44}$$

ve başlangıç şartları,

$$u(x,0)=p(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,0)=q(\pi x)$$

şeklinde yazılabilir. Bir kuvvet serisi, $W(0,0), W(1,0), W(0,1), W(1,1),...$ bilinen katsayılar ve a bilinmeyen katsayı olmak üzere,

$$w(x,y)=W(0,0)+W(1,0)x+W(0,1)y+W(1,1)xy+...+ax^m y^n \tag{3.45}$$

şeklinde yazılabilir. (3.45) ifadesi (3.44)'de yerine yazılırsa

$$W(m,n)=(\mu a+\lambda)x^m y^{n-i}=0 \tag{3.46}$$

denklemi elde edilir. Burada μ ve λ sabit, i kısmi diferensiyel denklemin mertebesidir. (3.46) denkleminden, a sabiti bulunur. Benzer şekilde (3.46) ifadesi (3.45) te yerine yazılırsa kısmi diferensiyel denklemin çözümü elde edilebilir. Bu şekilde devam edilirse (3.45)-(3.46) den KTDD 'in keyfi mertebeden kuvvet serisi çözümü elde edilmiş olur.

3.2.1 Örnek Aşağıda verilen KTDD başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0, \tag{3.47}$$

$$u(x,0)=x^3,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=x. \tag{3.48}$$

(3.48) başlangıç şartlarını (3.15) denkleminde yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
&U(i,0)=0, \qquad i=0,1,2,4,...,m,\\
&U(3,0)=1,\\
&U(i,1)=0, \qquad i=0,2,...,n,\\
&U(1,1)=1
\end{aligned} \tag{3.49}$$

bulunur. (3.49)'da bulunan değerleri (3.15)'de yerine yazdığımızda

$$u(x,t)=xt+x^3+axt^2 \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) denklemi (3.47) de yerine yazıldığında,

$$U(1,2)=3c^2$$

bulunur.

$m \to \infty$ ve $n \to \infty$ diğer tüm değerler sıfıra eşittir. Buradan,

$$u(x,t)=xt+3c^2xt^2+x^3$$

elde edilir. Bulunan bu çözüm, Chen ve Ho (1999) tarafından bulunan çözümle örtüşmektedir. Bu da bize tam çözümü verir.

3.2.2 Örnek Aşağıda başlangıç şartları ile verilen denklemi ele alalım.

$$u_{tt}=u_{xx}+6, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
&u(x,0)=x^2,\\
&u_t(x,0)=4x.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

(3.15) denklemi ve (3.52) başlangıç şartlarından,

$$\begin{aligned}
&U(i,0)=0, \qquad i=0,1,3,4,...,m,\\
&U(2,0)=1,\\
&U(i,1)=0, \qquad i=0,2,...,n,\\
&U(1,1)=4,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

bulunur. (3.53) de bulunan değerleri (3.15) denkleminde yazdığımızda

$$u(x,t)=x^2+4xt+at^2 \tag{3.54}$$

elde edilir.(3.54) denklemini (3.51) de yazdığımızda,

$$U(0,2)=4 \tag{3.55}$$

bulunur. $m \to \infty, n \to \infty$ için diğer tüm değerler sıfıra eşittir. Buradan,

$$u(x,t) = x^2 + 4xt + 4t^2.$$

elde edilir. Bulunan sonuç Kesan (2003) tarafından bulunan tam çözüme eşittir.

3.2.3 Örnek Aşağıda başlangıç şartları ile verilen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - x^2 u(x,t) = x, \tag{3.56}$$

$$u(x,0) = 0,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \tag{3.57}$$

denklemini ele alalım. Başlangıç şartlarını göz önüne alınırsa

$$U(i,0) = 0, \qquad i = 0,1,2,...,m.$$

$$U(i,1) = 0, \qquad i = 0,1,2,...,n.$$

bulunur. (3.15) denklemi ve (3.56)'dan

$$U(1,2) = \frac{1}{2},$$
$$U(3,4) = \frac{1}{24},$$
$$U(1,6) = \frac{1}{120},$$

elde edilir. Diğer tüm değerler sıfıra eşittir. Buradan

$$u(x,t) = \frac{xt^2}{2} + \frac{x^3 t^4}{24} + \frac{xt^6}{120}.$$

elde edilir. Bulunan sonuç Chen ve Ho (1999) tarafından bulunan tam çözüme eşittir.

4. KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde kesirli türevli nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri verilecektir.

4.1 Varyasyonel İterasyon Yöntemi

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t)=f(u,u_x,u_{xx}),+g(x,t),\quad m-1<\alpha<m \tag{4.1}$$

zaman-kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $D_{*t}^{\alpha}u=\dfrac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}$ Caputo kesirli türevli ifade $\alpha.$ mertebedendir. f nonlineer fonksiyon ve g bilinen fonksiyondur. (4.1) denkleminin başlangıç ve sınır değer koşulları

$$\begin{aligned}&u(x,0)=h(x), && 0<\alpha\le 1\\ &u(x,t)\to 0,\ |x|\to\infty, && t>0\end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}&u(x,0)=h(x)\ \text{ve}\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=k(x), && 1<\alpha\le 2\\ &u(x,t)\to 0, && |x|\to\infty,\quad t>0\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklindedir. İterasyon yöntemindeki Lagrance çarpanı Ji-Huan He (2004) tarafından aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir. Bu çarpan doğrulama fonksiyonu olarak adlandırılmıştır. Şimdi

$$u_{k+1}(x,t)=u_k(x,t)+\int_0^t \lambda(\xi)\left(\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}u_k(x,\xi)-f\left(\tilde{u}_k,(\tilde{u}_k)_x,(\tilde{u}_k)_{xx}\right)-g(x,\xi)\right)d\xi, \tag{4.4}$$

denklemini ele alalım. Burada λ Lagrance çarpanı ve $\tilde{u}_k,(\tilde{u}_k)_x,(\tilde{u}_k)_{xx}$ ifadeleri de iterasyonun kısıtları olarak düşünülebilir. Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$u_{k+1}(x,t)=u_k(x,t)+\delta\int_0^t \lambda(\xi)\left(\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}u_k(x,\xi)-g(x,\xi)\right)d\xi, \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada Lagrance çarpanı

$m=1$ için $\lambda=-1,$
$m=2$ için $\lambda=\xi-t.$

olur. Bundan dolayı $m=1$ için aşağıdaki iterasyon formülünü elde ederiz.

$$u_{k+1}(x,t)=u_k(x,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}u_k(x,\xi)-f\left(\tilde{u}_k,(\tilde{u}_k)_x,(\tilde{u}_k)_{xx}\right)-g(x,\xi)\right)d\xi. \tag{4.6}$$

Bu durumda başlangıç şartı,

$$u_0(x,0)=h(x) \tag{4.7}$$

olur. $m=2$ için de

$$u_{k+1}(x,t)=u_k(x,t)-\int_0^t(\xi-t)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}u_k(x,\xi)-f\left(\tilde{u}_k,(\tilde{u}_k)_x,(\tilde{u}_k)_{xx}\right)-g(x,\xi)\right)d\xi. \tag{4.8}$$

şeklinde yazılır. Başlangıç şartı da,

$$u_0(x,0)=h(x)+tk(x) \tag{4.9}$$

olur. (4.4) doğrulama fonksiyonu bize yaklaşık çözümü verir. Tam çözüm ise

$$u(x,t)=\lim_{k\to\infty}u_k(x,t) \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir (Momani ve Odibat, 2007c).

4.2 Homotopy Perturbation Yöntemi

Aşağıda verilen

$$A(u)-f(r)=0 \qquad r\in\Omega \tag{4.11}$$

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0 \qquad r\in\Gamma \tag{4.12}$$

nonlineer sınır değer problemini ele alalım. A genel bir diferensiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon, Ω tanım kümesi, Γ ise bu tanım kümesinin sınırıdır.

A operatörü, L(lineer) ve N(nonlineer) olmak üzere iki parçaya bölündüğünde (4.11) ifadesi

$$L(u)+N(u)-f(r)=0 \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (4.13)'e homotopy yöntemini uygulayalım.

$V(r,p):\Omega\times[0,1]\rightarrow R$ şeklinde tanımlı olmak üzere,

$$\mu(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L(u_0)\right]+p\left[A(v)-f(r)\right]=0 \qquad p\in[0,1], \qquad r\in\Omega \tag{4.14}$$

olur . Ya da $A(u)=L(u)+N(u)$ ifadesi (4.14) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\mu(v,p)=L(v)-L(u_0)+pL(u_0)+p\left[N(v)-f(r)\right]=0 \qquad p\in[0,1], \qquad r\in\Omega \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) ifadelerinde yer alan $p\in[0,1]$ 'ye gömülü parametre (embedding parameter) denir.

u_0, (4.11) denkleminin başlangıç şartıdır ve sınır şartını sağlar. Açıkça görülmektedir ki (4.14) denkleminde p'nin yerine sırasıyla 0 ve 1 yazılırsa;

$$\mu(v,p)=L(v)-L(u_0)=0 \tag{4.16}$$

$$\mu(v,p)=A(v)-f(r)=0 \tag{4.17}$$

elde edilir.

Bu çalışmamızda gömülü parametre olan p yi, bir küçük parametre (small parameter) olarak kullanacağız. (4.14) denkleminin çözümü

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3\cdots \tag{4.18}$$

şeklinde p' nin kuvvetleri olarak verilsin.

Yukarıdaki ifade de $p=1$ için (4.11) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u=\lim_{p\rightarrow 1}v=v_0+v_1+v_2+v_3......... \tag{4.19}$$

olarak bulunur (HE, 2000).

Perturbasyon ve homotopy yöntemlerinin birleşmiş haline homotopy perturbasyon yöntemi denir. Bu yöntem, alışılagelmiş perturbasyon yönteminin bütün avantajlarına sahiptir.

Şimdi Homotopy perturbasyon yöntemini kesirli mertebeden türevlere sahip nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulayalım.

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t)=f(u,u_x,u_{xx}), \qquad t>0, \tag{4.20}$$

denklemini göz önüne alalım.

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t)=L(u,u_x,u_{xx})+N(u,u_x,u_{xx})+f(x,t), \qquad t>0, \tag{4.21}$$

yazarız. L lineer ve N de nonlineer operatör olup kesirli türevleri de içerebilirler. f bilinen fonksiyon D_{*t}^{α} ise $m-1<\alpha<m$ arasında değerler alan kesirli ifade olup başlangıç şartları aşağıdaki gibidir.

$$u^k(x,0)=g_k(x), \qquad k=0,1,2,...,m-1. \tag{4.22}$$

Buradan Homotopy tekniğini kullanarak aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}-L(u,u_x,u_{xx})-f(x,t)=p\left[\frac{\partial^m u}{\partial t^m}+N(u,u_x,u_{xx})-D_{*t}^{\alpha}u(x,t)\right] \tag{4.23}$$

veya

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}-f(x,t)=p\left[\frac{\partial^m u}{\partial t^m}+L(u,u_x,u_{xx})+N(u,u_x,u_{xx})-D_{*t}^{\alpha}u(x,t)\right] \tag{4.24}$$

olup burada $p\in[0,1]$ 'dır. (4.23) denkleminde p'nin yerine 0 konursa

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=L(u,u_x,u_{xx})+f(x,t) \tag{4.25}$$

ve benzer şekilde (4.24) denkleminde p'nin yerine 0 konursa

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=f(x,t) \tag{4.26}$$

bulunur. (4.23) ve (4.24) denklemlerinin çözümünü p nin kuvvet serisi olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+\cdots. \tag{4.27}$$

Sonuç olarak yaklaşık çözüm

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

olarak bulunur (Momani ve Odibat, 2007a).

4.3 Ayrışım Yöntemi

Bir zaman-kesirli kısmi türevli diferensiyel denklem

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) = f(u,u_x,u_{xx}),+g(x,t), \quad m-1<\alpha<m \tag{4.28}$$

şeklinde yazılır. (4.28) denklemini lineer ve nonlineer kısımlarına ayırdığımızda

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) + Lu(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t), \quad t>0, \tag{4.29}$$

şeklini alır. L lineer ve N nonlineer operatör olup α . mertebeden daha küçük kesirli türevleri içerebilirler. Burada $D_{*t}^{\alpha}u = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ Caputo kesirli türevli ifade α. mertebedendir ve g bilinen fonksiyondur.

D_{*t}^{α} operatörünün tersi olan J^{α} operatörünü (4.29) denkleminin her iki yanına uygularsak

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0^+)\frac{t^k}{k!} + J^{\alpha}g(x,t) - J^{\alpha}\left[Lu(x,t)+Nu(x,t)\right]. \tag{4.30}$$

elde edilir.

Adomian ayrışım yöntemi (Wazwaz ve El-Sayed, 2001) yardımıyla $u(x,t)$ 'nin ayrışımı

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{4.31}$$

ve (4.30) denklemindeki nonlinear fonksiyonun ayrışımı

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty}A_n \tag{4.32}$$

yazılabilir. (4.30) denkleminin her iki yanına (4.31) ve (4.32) ayrışım serileri yerleştirilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0^+)\frac{t^k}{k!} + J^{\alpha}g(x,t) - J^{\alpha}\left[L\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\right)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right] \tag{4.33}$$

bulunur. Son denklemden,

$$
\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0^+)\frac{t^k}{k!} + J^{\alpha} g(x,t),\\
u_1(x,t) &= -J^{\alpha}\left(Lu_0 + A_0\right),\\
u_2(x,t) &= -J^{\alpha}\left(Lu_1 + A_1\right),\\
&\vdots\\
u_{n+1}(x,t) &= -J^{\alpha}\left(Lu_n + A_n\right),
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

elde edilir.

A_n Adomian polinomunun genel formu,

$$
A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k u_k\right)\right] \tag{4.35}
$$

şeklindedir. Sonuç olarak $u(x,t)$ 'nin yaklaşık çözümü

$$
\phi_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x,t) \quad \text{ve} \quad \lim_{N\to\infty} \phi_N(x,t) = u(x,t)
$$

dir (Odibat ve Momani, 2008b).

4.4 Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

4.4.1 Kesirli Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu kısımda kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanacağımız kesirli diferensiyel dönüşüm yöntemi verilecektir (Arikoglu ve Özkol, 2006).

4.4.1 Tanım Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$
Y(k) = \frac{1}{\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})}\left[\frac{d^{\frac{p}{\alpha}} y(x)}{dx^{\frac{p}{\alpha}}}\right]_{x=0} \tag{4.36}
$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $y(x)$ orijinal fonksiyon, $Y(k)$ ise T-fonksiyonu diye adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur.

4.4.2. Tanım $Y(k)$ nın ters diferensiyel dönüşümü,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k) \tag{4.37}$$

şeklinde tanımlanır. (4.36) ve (4.37) denklemlerinden

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^ky(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.38) denkleminden de anlaşıldığı gibi diferensiyel dönüşüm düşüncesi Taylor seri açılımından türetilmiştir. Bu yöntem sembolik olarak türevleri hesaplamaz. Bununla birlikte, ilişkili türevler orijinal fonksiyonun dönüşüm denklemleriyle tanımlanmış iteratif bir yolla hesaplanır. Bu tezde, küçük harfle orijinal fonksiyonu, büyük harfle dönüşüm fonksiyonunu göstereceğiz.

4.4.3 Teorem $f(x)=g(x)\pm h(x)$ ise $F(k)=G(k)\pm H(k)$ dir.

İspat :

Tanım 4.4.1 den,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}G(k)(x-x_0)^{k/\alpha}\pm\sum_{k=0}^{\infty}H(k)(x-x_0)^{k/\alpha}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}[G(k)\pm H(k)](x-x_0)^{k/\alpha}$$

yazılır. Tanım 4.4.2 den

$$F(k)=G(k)\pm H(k)$$

elde edilir.

4.4.4 Teorem $f(x)=g(x)h(x)$ ise $F(k)=\sum_{l=0}^{k}G(l)H(k-l)$ dir.

İspat :

Tanım 4.4.1 den,

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}G(k)(x-x_0)^{k/\alpha}\times\sum_{k=0}^{\infty}H(k)(x-x_0)^{k/\alpha}$$

$$= \left[G(0) + G(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + G(2)(x-x_0)^{2/\alpha} + \ldots + G(n)(x-x_0)^{n/\alpha}\right]$$

$$\times [H(0) + H(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + H(2)(x-x_0)^{2/\alpha} + \ldots + H(n)(x-x_0)^{n/\alpha}]$$

$$= [G(0)H(0)] + [G(0)H(1) + G(1)H(0)](x-x_0)^{1/\alpha}$$

$$+ [G(0)H(2) + G(1)H(1) + G(2)H(0)](x-x_0)^{2/\alpha} + \ldots \tag{4.39}$$

$$+ [G(0)H(n) + G(1)H(n-1) + \ldots + G(n-1)H(1) + G(n)H(0)](x-x_0)^{n/\alpha}$$

yazılır. (4.39) eşitliği kısaca

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} G(l)H(k-l)(x-x_0)^{k/\alpha}$$

şeklinde yazılır. Tanım 4.4.2 den

$$F(k) = \sum_{l=0}^{k} G(l)H(k-l)$$

olarak bulunur.

4.4.5 Teorem $f(x) = g_1(x)g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)g_n(x)$ ise,

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \ldots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)\ldots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})G_n(k-k_{n-1})$$

dır.

İspat:

$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ in kesirli mertebeli kuvvet serisine açılımı kullanılarak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_1(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \times \sum_{k=0}^{\infty} G_2(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \times \ldots$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} G_{n-1}(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \times \sum_{k=0}^{\infty} G_n(k)(x-x_0)^{k/\alpha}$$

$$= [G_1(0) + G_1(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + \ldots][G_2(0) + G_2(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + \ldots]$$

$$\times \ldots [G_n(0) + G_n(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + \ldots]$$

$$
\begin{aligned}
&= [G_1(0)G_2(0)...G_n(0)] + [G_1(1)G_2(0)...G_n(0)\alpha 1)...G_n(0) + ... \\
&\quad + G_1(0)G_2(0)...G_n(1)](x-x_0)^{1/\alpha} + [G_1(1)G_2(1)G_3(0)...G_n(0) \\
&\quad + G_1(0)G_2(0)G_3(1)...G_n(0) + ... + G_1(1)G_2(0)...G_n(1) \qquad (4.40) \\
&\quad + G_1(0)G_2(1)G_3(1)...G_n(0) + ... + G_1(0)G_2(1)G_3(0)...G_n(1) + ... \\
&\quad + G_1(0)G_2(0)...G_{n-1}(1)G_n(1) + G_1(2)G_2(0)...G_n(0) + ... \\
&\quad + G_1(0)G_2(0)...G_{n-1}(0)G_n(2)](x-x_0)^{2/\alpha} + ...
\end{aligned}
$$

olarak yazılır. (4.40) ifadesi genelleştirilirse,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)...G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}) \\
&\quad \times G_n(k-k_{n-1})(x-x_0)^{k/\alpha}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Tanım 4.4.2 den

$$
F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)...G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})G_n(k-k_{n-1})
$$

şeklinde ifade edilir.

4.4.6 Teorem $f(x) = x^p$ ise $\delta = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ olmak üzere $F(k) = \delta(k-\alpha p)$ dır.

İspat:

$f(x)$ fonksiyonu,

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-\alpha p)x^{k/\alpha}
$$

şeklinde yazılır. Tanım 4.4.2 den

$$
F(k) = \delta(k-\alpha p)
$$

olarak bulunur.

4.4.7 Teorem $f(x)=D_{x_0}^{q}[g(x)]$ ise $F(k)=\dfrac{\Gamma(q+1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)}G(k+\alpha q)$ dır.

İspat:

Coputo kesirli türev denklemi kullanılarak $g(x)$ fonksiyonu

$$D_{x_0}^{q}\left[g(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(m-q)}\frac{d^m}{dx^m}\left\{\int_0^x\left[\frac{g(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(x-x_0)^k g^{(k)}(0)}{(x-t)^{1+q-m}}\right]dt\right\},\qquad m-1\le q<m$$

şeklinde yazılır.

Buradan,

$$D_{x_0}^{q}\left[g(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(m-q)}\frac{d^m}{dx^m}\left[\int_{x_0}^x\frac{\sum_{k=0}^{\infty}G(k)(t-x_0)^{k/\alpha}-\sum_{k=0}^{q\alpha-1}G(k)(t-x_0)^{k/\alpha}}{(x-t)^{1+q-m}}dt\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-q)}\sum_{k=q\alpha}^{\infty}G(k)\frac{d^m}{dx^m}\left[\int_{x_0}^x\frac{(t-x_0)^{k/\alpha}}{(x-t)^{1+q-m}}dt\right]$$

$$=\sum_{k=q\alpha}^{\infty}\frac{\Gamma(1+k/\alpha)}{\Gamma(1-q+k/\alpha)}G(k)(x-x_0)^{\frac{k}{\alpha}-q}$$

ifadesi elde edilir.

Bu formülde k indeksi sıfırdan başlatılırsa,

$$f(x)=\sum_{k=q\alpha}^{\infty}\frac{\Gamma(q+1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)}G(k+\alpha q)(x-x_0)^{\frac{k}{\alpha}}$$

elde edilir. Tanım 4.4.2 den

$$F(k)=\frac{\Gamma(q+1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)}G(k+\alpha q)$$

denklemi elde edilir.

4.4.8 Teorem $f(x)=\dfrac{d^{q_1}}{dx^{q_1}}\left[g_1(x)\right]\dfrac{d^{q_2}}{dx^{q_2}}\left[g_2(x)\right]..\dfrac{d^{q_n}}{dx^{q_n}}\left[g_n(x)\right]$ şeklinde ise $i=1,2,...,n$ için

$\alpha q_i \in Z^+$ olmak üzere,

$$F(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\Gamma(p_1+1+k_1/\alpha)}{\Gamma(1+k_1/\alpha)}\frac{\Gamma(p_2+1+(k_2-k_1)/\alpha)}{\Gamma(1+(k_2-k_1)/\alpha)}\cdots$$

$$\times\frac{\Gamma(p_{n-1}+1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha)}{\Gamma(1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha)}\frac{\Gamma(p_n+1+(k-k_{n-1})/\alpha)}{\Gamma(1+(k-k_{n-1})/\alpha)}$$

$$\times G_1(k_1+\alpha q_1)G_2(k_2-k_1+\alpha q_2)...G_{n-1}(k-k_{n-1}+\alpha q_n)$$

dır.

İspat:

$x=x_0$ noktasındaki $i=1,2,3,...,n$ için $\frac{d^{q_i}}{dx^{q_i}}\left[g_i(x)\right]$ diferensiyel dönüşümü $C_i(k)$ ile tanımlanırsa, Teorem 4.4.5 kullanılarak $f(x)$ in kesirli mertebeli diferensiyel dönüşümü

$$F(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}C_1(k_1)C_2(k_2-k_1)...C_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})C_n(k-k_{n-1})$$

şeklinde ifade edilir. Teorem 4.4.7 kullanılarak,

$$C_1(k_1)=\frac{\Gamma(q_1+1+k_1/\alpha)}{\Gamma(1+k_1/\alpha)}G(k_1+\alpha q_1)$$

$$C_2(k_2-k_1)=\frac{\Gamma(q_2+1+(k_2-k_1)/\alpha)}{\Gamma(1+(k_2-k_1)/\alpha)}G(k_2-k_1+\alpha q_2),$$

$\vdots$

$$C_n(k-k_{n-1})=\frac{\Gamma(q_n+1+(k-k_{n-1})/\alpha)}{\Gamma(1+(k-k_{n-1})/\alpha)}G(k-k_{n-1}+\alpha q_n)$$

elde edilir. Bu değerler kullanılarak $i=1,2,3,...,n$ için $\alpha q_i \in Z^+$ olmak üzere;

$$F(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\Gamma(q_1+1+k_1/\alpha)}{\Gamma(1+k_1/\alpha)}\frac{\Gamma(q_2+1+(k_2-k_1)/\alpha)}{\Gamma(1+(k_2-k_1)/\alpha)}...$$

$$\times\frac{\Gamma(q_n+1+(k-k_{n-1})/\alpha)}{\Gamma(1+(k-k_{n-1})/\alpha)}G_1(k_1+\alpha q_1)G_2(k_2-k_1+\alpha q_2)...G_n(k-k_{n-1}+\alpha q_n)$$

olarak bulunur.

Teoremlerden de görüldüğü gibi diferensiyel dönüşüm yöntemi $\alpha = 1$ özel durumu için kesirli mertebeli diferensiyel dönüşüm yönteminin bir alt kümesidir. Ayrıca bu özel durum için (4.37) eşitliği analitik fonksiyonların Taylor serisine genişlemesidir.

Şimdi başlangıç koşulları

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \tag{4.41}$$

olan

$$D^{2.2}x(t) + 1.3D^{1.5}x(t) + 2.6x(t) = \sin(2t) \tag{4.42}$$

kesirli mertebeli diferensiyel denklemini ele alalım.

$\alpha = 10$ için (4.42) denklemi düzenlenirse,

$$D^{\frac{22}{10}}x(t) + 1.3D^{\frac{15}{10}}x(t) + 2.6x^{\frac{10}{10}}(t) = \sin(2t) \tag{4.43}$$

elde edilir. $\sin(2t)$ nin Taylor Serisine açılması sonucu elde edilecek katsayılar dizisi $S(k)$ olmak üzere, Teorem 4.4.6 (4.43) denklemine uygulandığında,

$$\frac{\Gamma(\frac{22}{10} + 1 + \frac{k}{10})}{\Gamma(1 + \frac{k}{10})} U(k + 10.\frac{22}{10}) + 1.3\frac{\Gamma(\frac{15}{10} + 1 + \frac{k}{10})}{\Gamma(1 + \frac{k}{10})} X(k + 10.\frac{15}{10}) + 2.6X(k) = S(k) \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.44) ifadesi düzenlenirse,

$$X(k + 22) = \frac{\Gamma(1 + 0.1k)[S(k) - 2.6X(k)] - 1.3\Gamma(2.6 + 0.1k)X(k + 15)}{\Gamma(3.2 + 0.1k)} \tag{4.45}$$

elde edilir.

$sin(2t) = \sum_{k=0}^{\infty} S(k)(t - t_0)^{k/\alpha}$ eşitliğinden,

$$S(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 2^{2i+1}}{(2i + 1)!} \delta[k - 10(2i + 1)]$$

olarak hesaplanır.

$k = 0,1,2,...,21$ için $X(k) = 0$ olarak bulunur. (4.46)

(4.45) ve (4.46) denklemlerinden $X(k)$ nın terimlerini $k = 60$ a kadar hesaplarız. Tanım 4.4.2 göz önüne alarak,

$$x(t) = \frac{28561}{3600000}t^6 + \frac{2}{\Gamma(21/5)}t^{\frac{16}{5}} - \frac{13}{5\Gamma(49/10)}t^{\frac{39}{10}} + \frac{169}{50\Gamma(28/5)}t^{\frac{23}{5}} - \frac{8}{\Gamma(31/5)}t^{\frac{26}{5}} - \frac{2197}{500\Gamma(63/10)}t^{\frac{53}{10}}$$
$$- \frac{26}{5\Gamma(32/5)}t^{\frac{27}{5}} + \frac{52}{5\Gamma(69/10)}t^{\frac{59}{10}} + ...$$

çözümü elde edilir.

4.4.2 Kesirli İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

$u(x, y)$ şeklinde iki değişkenli bir fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonun $u(x, y) = f(x)g(y)$ gibi yazılabileceğini kabul edelim (Momani ve Odibad, 2008). Genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşümünü için $u(x, y)$ fonksiyonunu ;

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k)(x - x_0)^{k\alpha} \sum_{h=0}^{\infty} G_\beta(h)(y - y_0)^{h\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha,\beta}(k, h)(x - x_0)^{k\alpha}(y - y_0)^{h\beta} \end{aligned} \tag{4.47}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada $0 < \alpha,\ \beta \leq 1$ ve $U_{\alpha,\beta}(k, h) = F_\alpha(k)G_\beta(h)$ olur. F_α *ve* G_β ye de $u(x, y)$ 'nin ayrışımları denir. $u(x, y)$ fonksiyonunun iki boyutlu diferensiyel dönüşümünü

$$U_{\alpha,\beta}(k, h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)}\left[(D^\alpha_{*x_0})^k (D^\beta_{*y_0})^h u(x, y)\right]_{(x_0, y_0)}, \tag{4.48}$$

şeklinde yazabiliriz. $\left(D^\alpha_{x_0}\right)^k = D^\alpha_{x_0} D^\alpha_{x_0} \cdots D^\alpha_{x_0}$, k kez çarpım halindedir. Bu tezde küçük karakterle gösterdiğimiz $u(x, y)$ orijinal fonksiyon, büyük karakterle gösterdiğimiz $U_{\alpha,\beta}(k, h)$ ise dönüşüm fonksiyonudur. $\alpha = 1,\ \beta = 1$ alınması durumunda (4.47) deki genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm iki boyutlu diferensiyel dönüşüme dönüşür. (4.47) ve (4.48) tanımlarından aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

4.4.9 Teorem $u(x, y)$, $v(x, y)$ ve $w(x, y)$ fonksiyonlarının diferensiyel dönüşümü $U_{\alpha,\beta}(k, h)$, $V_{\alpha,\beta}(k, h)$ ve $W_{\alpha,\beta}(k, h)$ olsun. Bu durumda:

a) $u(x,y)=v(x,y)\pm w(x,y)$ ise $U_{\alpha,\beta}(k,h)=V_{\alpha,\beta}(k,h)\pm W_{\alpha,\beta}(k,h)$,

b) $u(x,y)=av(x,y)$, $a\in \mathrm{R}$ ise $U_{\alpha,\beta}(k,h)=aV_{\alpha,\beta}(k,h)$,

c) $u(x,y)=v(x,y).w(x,y)$ ise $U_{\alpha,\beta}(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta}(r,h-s)W_{\alpha,\beta}(k-r,h)$,

d) $u(x,y)=(x-x_0)^{n\alpha}(y-y_0)^{m\beta}$ ise $\mathrm{U}_{\alpha,\beta}(k,h)=\delta(k-n)\delta(h-m)$

yazılır.

4.4.10 Teorem $u(x,y)=D_{*x_0}^{\alpha}v(x,y)$, $0<\alpha\le 1$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)}V_{\alpha,\beta}(k+1,h) \text{ şeklindedir.} \tag{4.49}$$

İspat. (4.47) den**,**

$$\begin{aligned}
U_{\alpha,\beta}(k,h)&=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)\Gamma\left(\beta h+1\right)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}D_{*x_0}^{\alpha}v(x,y)\right]_{(x_0,y_0)},\\
&=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)\Gamma\left(\beta h+1\right)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k+1}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}v(x,y)\right]_{(x_0,y_0)},\\
&=\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)\Gamma\left(\beta h+1\right)\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k+1}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}v(x,y)\right]_{(x_0,y_0)},\\
&=\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)}V_{\alpha,\beta}(k+1,h).
\end{aligned}$$

elde ederiz.

4.4.11 Teorem

Eğer $u(x,y)=f(x)g(y)$ ve $(\lambda>-1)$ için $f(x)=x^{\lambda}h(x)$ ise $h(x)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımı $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{\alpha k}$ olur ve

a) $\beta<\lambda+1$ ve α keyfi sabit veya

b) $\beta\ge\lambda+1$, α keyfi sabit ve $n=0,1,\dots,m-1$ için $a_n=0$ dır. Burada, $m-1<\beta\le m$ dır.

İspat: (Momani ve Odibat, 2007b). $\beta<\lambda+1$ olması durumunda Caputo kesirli diferensiyelin özelliklerinden

$$D_a^{\beta} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_a^{\beta} (x-a)^{n\alpha+\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n\alpha+\lambda+1)}{\Gamma(n\alpha+\lambda-\beta+1)} (x-a)^{n\alpha+\lambda-\beta}, \quad \lambda-\beta>1$$

ve

$$\begin{aligned} D_a^{\gamma} D_a^{\beta} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n\alpha+\lambda+1)}{\Gamma(n\alpha+\lambda-\beta+1)} D_a^{\gamma} (x-a)^{n\alpha+\lambda-\beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n\alpha+\lambda+1)}{\Gamma(n\alpha+\lambda-\beta+1)} \frac{\Gamma(n\alpha+\lambda-\beta+1)}{\Gamma(n\alpha+\lambda-\beta-\gamma+1)} D_a^{\gamma} (x-a)^{n\alpha+\lambda-\beta-\gamma} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n\alpha+\lambda+1)}{\Gamma(n\alpha+\lambda-\beta-\gamma+1)} (x-a)^{n\alpha+\lambda-\beta-\gamma} \end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde (b) şıkkıda ispat edilebilir.

4.4.12 Teorem Eğer $u(x,y) = D_{*x_0}^{\gamma} v(x,y),\ m-1<\gamma\le m$ ve $v(x,y) = f(x)g(y)$ şeklinde verilen $f(x)$ fonksiyonu Teorem 4.4.11 deki şartları sağlarsa bu durumda

$$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha k+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha,\beta}(k+\frac{\gamma}{\alpha},h) \tag{4.50}$$

olur.

İspat: Teorem 4.4.11 kullanılarak

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta}(k,h) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[(D_{*x_0}^{\alpha})^k (D_{*y_0}^{\beta})^h D_{*x_0}^{\gamma} v(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[(D_{*x_0}^{\alpha k+\gamma})(D_{*y_0}^{\beta})^h v(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\alpha k+\gamma+1)} \left[(D_{*x_0}^{\alpha k+\gamma})(D_{*y_0}^{\beta})^h v(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha,\beta}(k+\frac{\gamma}{\alpha},h) \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $u(x,y) = f(x)g(y)$ ise ve $f(x)$ ile $g(y)$ teorem 4.4.11 deki şartları sağlarsa (4.48) genelleştirilmiş diferensiyel dönüşümü

$$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[(D_{*x_0}^{\alpha k})(D_{*y_0}^{\beta h}) u(x,y) \right]_{(x_0,y_0)}. \tag{4.51}$$

şeklinde yazılır.

Eğer $u(x,y)=D^{\gamma}_{*x_0}D^{\mu}_{*y_0}v(x,y),\ m-1<\gamma\le m,\ n-1<\mu\le n$ ise ve $f(x)$ ve $g(y)$ Teorem 4.11 deki şartları sağlarsa aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\frac{\Gamma(\alpha k+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}\frac{\Gamma(\beta k+\mu+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}V_{\alpha,\beta}(k+\frac{\gamma}{\alpha},h+\frac{\mu}{\beta})$$

olur.

4.4.3 Yöntemin Analizi

Bu kısımda zaman-kesirli ve uzay-kesirli türevli nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan dönüşüm yöntemini ele alacağız.

$$\frac{\partial^{\mu}u}{\partial t^{\mu}}=\frac{\partial^{v}u}{\partial x^{v}}+N_f(u(x,t)),\quad m-1<\mu\le m,\ n-1<n\le n,\quad n,m\in N, \tag{4.52}$$

Burada N_f nonlineer operatörler olup x ve t değişkenlerini içeren diğer kesirli türevleri de içerebilir.

Eğer $0<\mu\le 1$ ve $0<v\le 1$ ise (4.52) nonlineer denkleminin çözümü tek değerli fonksiyonların çarpımı olarak yazılabilir. Bu durumda $\alpha=\mu,\ \beta=v$ olduğunda her iki tarafın dönüşümü alınırsa,

$$\frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)}U_{\alpha,\beta}(k,h+1)=\frac{\Gamma(\beta(k+1)+1)}{\Gamma(\beta k+1)}U_{\alpha,\beta}(k+1,h)+F_{\alpha,\beta}(k,h) \tag{4.53}$$

olur. Burada $F_{\alpha,\beta}(k,h)$, $N_f(u(x,t))$ nin genelleştirilmiş diferensiyel dönüşümüdür.

Şimdi $m-1<\mu=\frac{m_1}{m_2}\le m$ ve $0<v\le 1$ olduğunda (4.52) nonlineer denkleminin çözümü tek değerli fonksiyonların çarpımı olarak yazılabildiğini kabul edelim. $u(x,t)=v(x)w(t)$ olup burada $w(t)$ fonksiyonu Teorem 4.4.11 deki şartları sağlar. Bu durumda $\alpha=\frac{1}{m_2},\ \beta=v$ için her iki tarafın diferensiyel dönüşümünü alınırsa,

$$\frac{\Gamma\left(\alpha(h+1)+m_1\right)}{\Gamma\left(\alpha h+1\right)}U_{\alpha,\beta}(k,h+m_1)=\frac{\Gamma\left(\beta(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+1\right)}U_{\alpha,\beta}(k+1,h)+F_{\alpha,\beta}(k,h), \tag{4.54}$$

elde edilir.

Son olarak eğer $m-1<\mu=\dfrac{m_1}{m_2}\leq m$ ve $\text{n}-1<\nu=\dfrac{n_1}{n_2}\leq n$ ise (4.52) nonlineer denkleminin çözümü tek değerli fonksiyonların çarpımı olarak $u(x,t)=v(x)w(t)$ yazılsın. Burada $w(t)$ ve $v(x)$ fonksiyonları Teorem 4.4.11 deki şartları sağlar. Bu durumda $\alpha=\dfrac{1}{m_2}$, $\beta=\dfrac{1}{n_2}$ için her iki tarafın diferensiyel dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{\Gamma\left(\alpha(h+1)+m_1\right)}{\Gamma\left(\alpha h+1\right)}U_{\alpha,\beta}(k,h+m_1)=\frac{\Gamma\left(\beta(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+1\right)}U_{\alpha,\beta}(k+1,h)+F_{\alpha,\beta}(k,h)$$

(4.55)

bulunur. Yukarıdaki üç farklı durumda, uzay-kesirli ve zaman-kesirli (4.52) nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünü Caputo kesirli türevler yardımıyla (4.47) denkleminden

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{\alpha,\beta}(k,h)x^{k\alpha}y^{h\beta} \tag{4.56}$$

yazılır.

5. UYGULAMALAR

Şimdi nonlineer zaman-kesirli Fisher denklemi (Momani ve Odibat, 2007a)

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t)+6u(x,t)(1-u(x,t)),\ t>0,\ x\in R,\ 0<\alpha\leq 1 \tag{5.1}$$

ve başlangıç şartları,

$$u(x,0)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}} \tag{5.2}$$

olarak verilsin. (4.4) formülüne göre (5.1) denklemine iterasyon formülünü uyguladığımızda

$$u_{k+1}(x,t)=u_k(x,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}u_k(x,\xi)-(u_k)_{xx}(x,\xi)-(u_k)(x,\xi)\left(1-(u_k)(x,\xi)\right)\right)d\xi, \tag{5.4}$$

elde ederiz. Yukarıdaki varyasyonel iterasyon yöntremi(VİY) uygulanmış denkleme başlangıç şartını kullanarak iterasyon uygularsak aşağıdaki yaklaşık sonuçları elde ederiz.

$$u_0(x,t)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}},$$

$$u_1(x,t)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}+10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}t,$$

$$\begin{aligned}u_2(x,t)=&\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}+10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}t-10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\\&+\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{6}}\left[-200e^{2x}t^{3}+\left(50e^{4x}+75e^{3x}-25e^{x}\right)t^{2}+\left(10e^{4x}+30e^{3x}+30e^{2x}+10e^{x}\right)t\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3(x,t)=&\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}(1+6t)+\frac{10e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}\left(t+3t^{2}-\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}-\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+\frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}\right)\\&+\frac{t}{\left(1+e^{x}\right)^{4}}\left[4e^{2x}-2e^{x}-6\right]+\frac{10}{\left(1+e^{x}\right)^{5}}\left[4e^{3x}-7e^{x}-11e^{x}\right]\left(\frac{t^{2}}{2}-\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{6}}[-300e^{2x}t^{4}+\left(100e^{4x}+150e^{3x}-400e^{2x}-50e^{x}\right)t^{3}$$

$$-\left(80e^{4x}+165e^{3x}+90e^{2x}+5e^{x}\right)t^{2}+\left(10e^{4x}+30e^{3x}30e^{2x}+10e^{x}\right)t$$

$$-\left(10e^{4x}+30e^{3x}+30e^{2x}+10e^{x}\right)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}-\left(100e^{4x}+150e^{3x}-50e^{x}\right)\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}$$

$$+1200e^{2x}\left(\frac{1}{\Gamma(5-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}t^{4-\alpha}\right)-600e^{2x}\frac{t^{5-2\alpha}}{\Gamma(5-2\alpha)\Gamma(3-\alpha)}]$$

$$+\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{8}}[(-3200e^{4x}+4400e^{3x}+1600e^{2x})\frac{t^{4}}{4}+(200e^{6x}-425e^{5x}-1600e^{4x}$$

$$-850e^{3x}+400e^{2x}+275e^{x})\frac{t^{3}}{3}+(40e^{6x}+50e^{5x}-200e^{4x}-500e^{3x}-400e^{2x}-110e^{x})\frac{t^{2}}{4}]$$

$$+\frac{120}{\left(1+e^{x}\right)^{9}}[-200e^{2x}\left(\frac{t^{5}}{5}-\frac{t^{6-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}\right)+\left(50e^{4x}+75e^{3x}-25e^{x}\right)$$

$$\times\left(\frac{t^{4}}{4}-\frac{t^{5-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}\right)+\left(10e^{4x}+30e^{3x}+30e^{2x}+10e^{x}\right)\left(\frac{t^{3}}{3}-\frac{t^{4-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}\right)]$$

$$-\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{12}}[40,000e^{4x}\frac{t^{7}}{7}+(20,000e^{6x}-30,000e^{5x}+10,000e^{3x})\frac{t^{6}}{6}$$

$$+(2500e^{8x}+7500e^{7x}+1625e^{6x}-14,500e^{5x}-15,750e^{4x}-4000e^{3x}+625e^{2x})\frac{t^{5}}{5}$$

$$+(1000e^{8x}+4500e^{7x}+7500e^{6x}+5000e^{5x}-1500e^{3x}-500e^{2x})\frac{t^{4}}{4}$$

$$+(100e^{8x}+600e^{7x}+1500e^{6x}+2000e^{5x}+1500e^{4x}+600e^{3x}+100e^{2x})\frac{t^{3}}{3}],$$

Bu şekilde matematik paket programları (maple, matematica) kullanılarak iterasyona devam edilebilir.

Şimdi de (5.1) denklemini diğer bir yaklaşık çözüm olan homotopy perturbation yöntemi(HPY) ile çözelim.

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t)+6u(x,t)(1-u(x,t)),\ t>0,\ x\in R,\ 0<\alpha\leq 1$$

denklemi ve başlangıç şartları,

$$u(x,0)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$$

olup (4.23) denkleminden Fisher denklemine homotopy uyguladığımızda,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=p\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u_{xx}+6u\left(1-u\right)-D_{*t}^{\alpha}u\right] \tag{5.5}$$

elde edilir. Başlangıç şartları ve (4.27) denklemi (5.5) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki denklemleri buluruz.

$$u_0(x,0)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}+(u_0)_{xx}+6u_0\left(1-u_0\right)-D_{*t}^{\alpha}u_0, \qquad u_1(x,0)=0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial u_1}{\partial t}+(u_1)_{xx}+6u_1\left(1-u_1\right)-D_{*t}^{\alpha}u_1, \qquad u_2(x,0)=0,$$

$$\vdots$$

Buradan,

$$u_0(x,t)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}},$$

$$u_1(x,t)=10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}t,$$

$$u_2(x,t)=-10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma\left(3-\alpha\right)}+\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{6}}[-200e^{2x}t^{3}$$
$$+\left(50e^{4x}+75e^{3x}-25e^{x}\right)\vdots t^{2}+\left(10e^{4x}+30e^{3x}+30e^{2x}+10e^{x}\right)t]$$

$$\vdots$$

elde edilir. (5.1) denkleminin üçüncü mertebeye kadar yaklaşık çözümü

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}+10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}t-10\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma\left(3-\alpha\right)}$$
$$+\frac{1}{\left(1+e^{x}\right)^{6}}\left[-200e^{2x}t^{3}+\left(50e^{4x}+75e^{3x}-25e^{x}\right)t^{2}+\left(10e^{4x}+30e^{3x}+30e^{2x}+10e^{x}\right)t\right],$$

bulunur.

Şimdi de diğer bir yaklaşık çözüm yöntemi olan ayrışım yöntemi(AY) ile Fisher denklemini çözelim.

Fisher denklemi ve başlangıç şartlarını (4.34) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2},$$

$$u_{j+1}(x,t) = J^\alpha\left(\left(u_j\right)_{xx} + 6u_j - 6A_j\right), \qquad j \geq 0,$$

Burada A nonlineer fonksiyon olan ifadeler için Adomian polinomlarıdır. Şimdi ayrışım serisinin ilk birkaç bileşenini bulalım.

$$u_0(x,t) = \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2},$$

$$u_1(x,t) = \frac{10e^x}{\left(1+e^x\right)^3}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2(x,t) = \frac{50e^x(-1+2e^x)}{\left(1+e^x\right)^4}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma\left(2\alpha+1\right)},$$

$$u_3(x,t) = \frac{50e^x\left(20e^{3x} - 15e^{2x} - 6e^x + 5\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)^2 - 12e^x\Gamma\left(2\alpha+1\right)}{\left(1+e^x\right)^6\Gamma\left(\alpha+1\right)^2}\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma\left(3\alpha+1\right)},$$

$$\vdots$$

Son olarak fisher denklemini diferensiyel dönüşüm yöntemi(DDY) ile çözelim.

$$D_{*t}^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t) + 6u(x,t)(1-u(x,t)), \ t > 0, \ x \in R, \ 0 < \alpha \leq 1$$

denklemi ve başlangıç şartları,

$$u(x,0) = \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}$$

olup (4.49) denkleminden faydalanarak Fisher denklemine diferensiyel dönüşüm uyguladığımızda

$$\frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)}U_{\alpha,1}(k,h+1)=(k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2,h)+6U_{\alpha,1}(k,h)$$
$$-6\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U_{\alpha,1}(r,h-s)U_{\alpha,1}(k-r,s) \tag{5.6}$$

elde ederiz. Başlangıç şartından,

$$\text{U}(0{,}0)=\frac{1}{4},\ \text{U}(1{,}0)=-\frac{1}{4},\ \text{U}(2{,}0)=\frac{1}{4},\ \text{U}(3{,}0)=\frac{1}{48},\ \text{U}(4{,}0)=-\frac{1}{96},\cdots \tag{5.7}$$

bulunur. (5.7) de bulunan değerler (4.47) denkleminde yerine yazıldığında

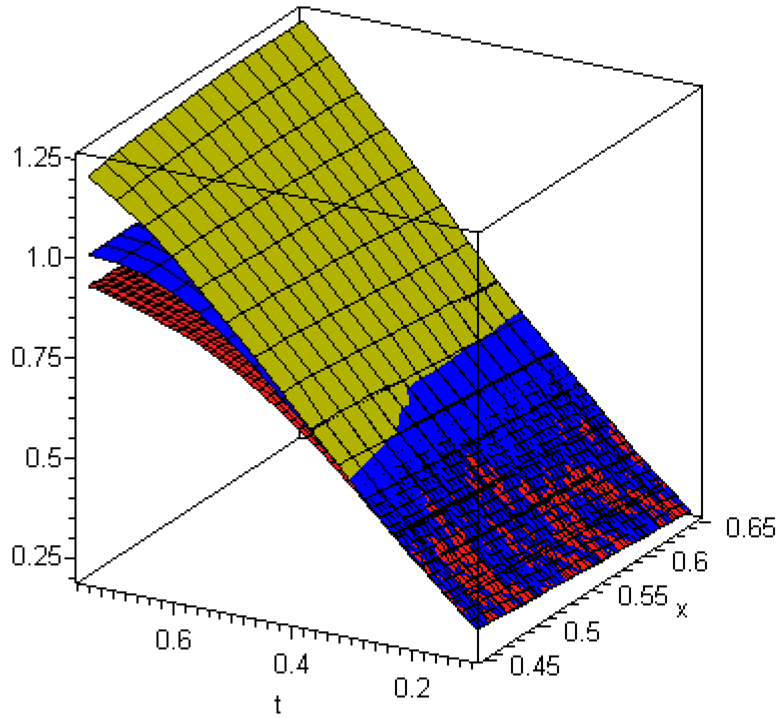
$$u(x,t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{48}x^3+(\frac{5}{4}-\frac{5}{8}x-\frac{5}{16}x^2)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$+(\frac{25}{16}+\frac{25}{16}x)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}-\frac{125}{48}\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \tag{5.8}$$

elde edilir.

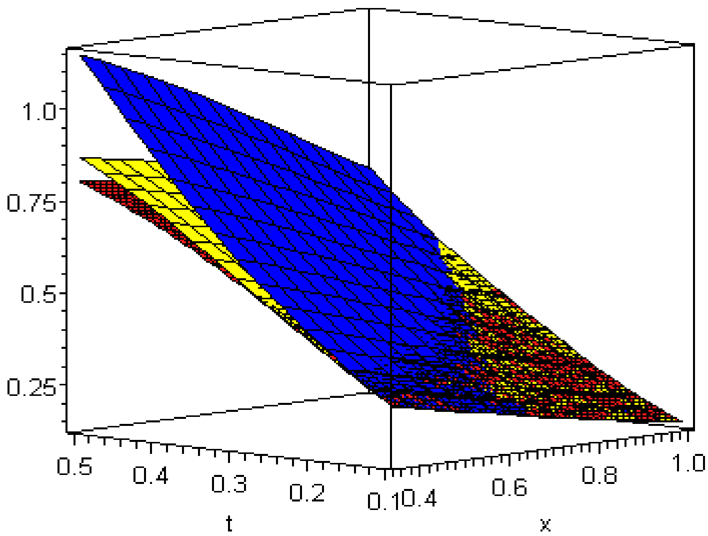
(5.1) denklemi için çizelge 5.1 de gösterilen çözümler varyasyonel iterasyon, homotopy perturbation, ayrışım ve diferensiyel dönüşüm yöntemleri kullanılarak $\alpha=1$ değeri için hesaplanmıştır. $\alpha=1$ durumu için tam çözümden bahsedebiliriz. Tam çözüm ise $u(x,t)=\dfrac{1}{(1+e^{x-5t})^2}$ şeklindedir. Yaklaşık çözüm olarak kullandığımız diferensiyel dönüşüm yöntemi diğer üç yaklaşık çözüm yöntemine göre daha iyi sonuç vermektedir. Çizelge 5.1 de verilen yaklaşık değerlerin hesaplanmasında varyasyonel iterasyon ve homotopy perturbation yöntemleri dördüncü mertebeye kadar ayrışım ve diferensiyel dönüşüm yöntemleri üçünü mertebeye kadar açılmıştır.

Çizelge 5.1. $\alpha = 1$ için Fisher denkleminin yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.

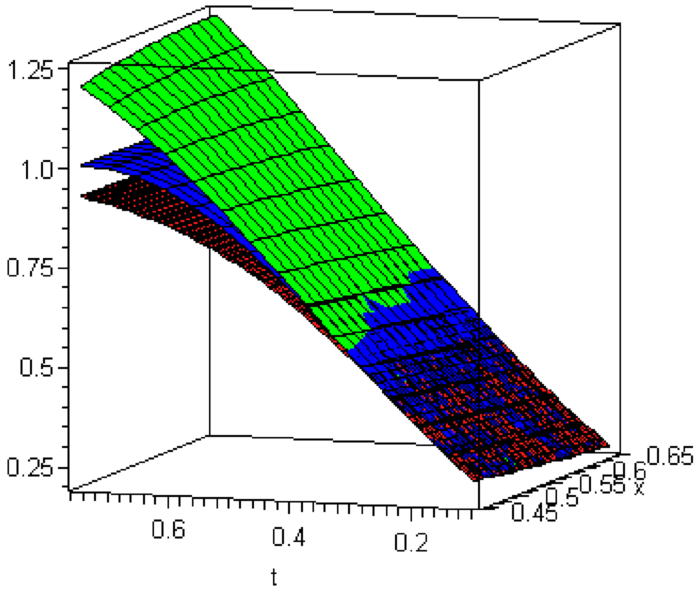
t	x	u_{VIY}	u_{HPY}	u_{AY}	u_{DDY}	$u_{TAM\ ÇÖZÜM}$
0.1	0.25	0.315940	0.315940	0.317948	0.316080	0.316042
0.1	0.50	0.249926	0.249926	0.200500	0.250000	0.250000
0.1	0.75	0.191606	0.191606	0.190964	0.191731	0.191689
0.1	1.0	0.142411	0.142411	0.140979	0.143229	0.142537
0.2	0.25	0.459320	0.459320	0.481199	0.463867	0.461284
0.2	0.50	0.386420	0.386420	0.396941	0.388020	0.387456
0.2	0.75	0.315478	0.315478	0.315266	0.316080	0.316042
0.2	1.0	0.249092	0.249092	0.241175	0.250000	0.250000
0.3	0.25	0.591179	0.591179	0.681440	0.619466	0.604195
0.3	0.50	0.527635	0.527635	0.581861	0.541666	0.534447
0.3	0.75	0.459719	0.459719	0.475833	0.463867	0.461284
0.3	1.0	0.387025	0.387025	0.372917	0.388020	0.387456



Şekil 5.1. $\alpha = 1$ için $u(x,t)$ 'nin tam çözümü(kırmızı), dönüşüm çözümü(mavi) ve homotopy çözümünün(yeşil) grafiği



Şekil 5.2. $\alpha = 1$ için $u(x,t)$ nin tam çözümü(kırmızı), dönüşüm çözümü(sarı) ve ayrışım çözümünün(mavi) grafiği



Şekil 5.3. $\alpha = 1$ için $u(x,t)$ nin tam çözümü(kırmızı), dönüşüm çözümü(mavi) ve varyasyonel iterasyon çözümünün(yeşil) grafiği

6. ÜÇ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM

İki boyutlu diferensiyel dönüşümden faydalanarak üç boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımlanabilir.

Tanım 6.1. Üç boyutlu kesirli türevli $u(x,y,t)$ 'nin diferensiyel dönüşümü

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\gamma m+1)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^k(D_{*y_0}^{\beta})^h(D_{*t_0}^{\gamma})^m u(x,y,t)\right]_{(x_0,y_0,t_0)} \tag{6.1}$$

şeklindedir. Burada $0<\alpha,\ \beta,\gamma\le 1,\ U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=F_{\alpha}(k)G_{\beta}(h)J_{\gamma}(m)$ olup F_{α} , G_{β} *ve* J_{γ} $u(x,y,t)$ 'nin bileşenleri olarak adlandırılırlar. Buradan $u(x,y,t)$ 'nin çözümü

$$\begin{aligned}u(x,y,t)&=\sum_{k=0}^{\infty}F_{\alpha}(k)(x-x_0)^{k\alpha}\sum_{h=0}^{\infty}G_{\beta}(h)(y-y_0)^{h\beta}\sum_{m=0}^{\infty}J_{\gamma}(m)(t-t_0)^{m\gamma}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}(t-t_0)^{m\gamma}\end{aligned} \tag{6.2}$$

şeklinde olur.

6.2 Teorem

$u(x,y,t)=v(x,y,t)\pm w(x,y,t)$ ise $U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=V_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)\pm W_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$ dir.

6.3 Teorem

$u(x,y,t)=av(x,y,t),$ a $\in$ R ise $U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=aV_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$

Yukarıdaki teoremlerin ispatları kolaylıkla gösterilebilir.

6.4 Teorem

$u(x,y,t)=v(x,y,t).w(x,y,t)$ olmak üzere bu ifadenin diferensiyel dönüşümü

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta,\gamma}(r,h-s,m-p)W_{\alpha,\beta,\gamma}(k-r,s,p)\text{'dir.} \tag{6.3}$$

İspat: Tanım 6.1 den,

$$\begin{aligned}u(x,y,t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}V_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}(t-t_0)^{m\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}W_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}(t-t_0)^{m\gamma}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}V_{\alpha,\beta,\gamma}(r,h-s,m-p)W_{\alpha,\beta,\gamma}(k-r,s,p)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}(t-t_0)^{m\gamma},\end{aligned}$$

ve üç boyutlu diferensiyel dönüşümden

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta,\gamma}(r,h-s,m-p)W_{\alpha,\beta,\gamma}(k-r,s,p)$$

elde edilir.

6.5 Teorem $u(x,y,t)=D_{*x_0}^{\alpha}v(x,y,t),\ 0<\alpha\le 1$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{\Gamma\big(\alpha(k+1)+1\big)}{\Gamma\big(\alpha k+1\big)}V_{\alpha,\beta,m}(k+1,h,m) \tag{6.4}$$

şeklindedir.

İspat: Tanım 6.1 den faydalanarak,

$$\begin{aligned}U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)&=\frac{1}{\Gamma\big(\alpha k+1\big)\Gamma\big(\beta h+1\big)\Gamma\big(\gamma m+1\big)}\Big[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}(D_{*x_0}^{\gamma})^{m}D_{*x_0}^{\alpha}v(x,y,t)\Big]_{(x_0,y_0,t_0)},\\&=\frac{1}{\Gamma\big(\alpha k+1\big)\Gamma\big(\beta h+1\big)\Gamma\big(\gamma m+1\big)}\Big[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k+1}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}(D_{*x_0}^{\gamma})^{m}v(x,y,t)\Big]_{(x_0,y_0,t_0)},\\&=\frac{\Gamma\big(\alpha(k+1)+1\big)}{\Gamma\big(\alpha k+1\big)\Gamma\big(\beta h+1\big)\Gamma\big(\gamma m+1\big)\Gamma\big(\alpha(k+1)+1\big)}\Big[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k+1}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}(D_{*x_0}^{\gamma})^{m}v(x,y,t)\Big]_{(x_0,y_0,t_0)},\\&=\frac{\Gamma\big(\alpha(k+1)+1\big)}{\Gamma\big(\alpha k+1\big)}V_{\alpha,\beta}(k+1,h,m)\end{aligned}$$

elde ederiz.

6.6 Teorem Eğer $u(x,y,t)=D_{*x_0}^{\lambda}v(x,y,t),$ m-1$<\lambda\le m$, $m\in N$ ise bu fonksiyon için dönüşüm fonksiyonu şu şekildedir.

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{\Gamma\big(\alpha k+\lambda+1\big)}{\Gamma\big(\alpha k+1\big)}V_{\alpha,\beta,\gamma}(k+\frac{\lambda}{\alpha},h,m). \tag{6.5}$$

İspat. Kesirli türevli diferensiyel denklemlerin dönüşümü tanımından,

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\gamma m+1)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}(D_{*x_0}^{\gamma})^{m}D_{*x_0}^{\lambda}v(x,y,t)\right]_{(x_0,y_0,t_0)},$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\gamma m+1)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k+\lambda}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}(D_{*x_0}^{\gamma})^{m}v(x,y,t)\right]_{(x_0,y_0,t_0)},$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha k+\lambda+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\gamma m+1)\Gamma(\alpha k+\lambda+1)}\left[(D_{*x_0}^{\alpha})^{k+\lambda}(D_{*y_0}^{\beta})^{h}(D_{*x_0}^{\gamma})^{m}v(x,y,t)\right]_{(x_0,y_0,t_0)},$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha k+\lambda+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}V_{\alpha,\beta,\gamma}(k+\frac{\lambda}{\alpha},h,m)$$

6.7 Örnek Aşağıda üç bilinmeyenli kesirli türevli nonlineer kısmi türevli denklem sistemi bulunmaktadır. Bunlar $u(x,y,t),v(x,y,t)$ ve $w(x,y,t)$ olup çözümlerini alışılagelmiş yöntemlerle bulmak ya çok zor yâda imkânsızdır. Bu problemi kolaylıkla üç boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemiyle çözebiliriz. Şimdi

$$D_{*t}^{\alpha}u+v_xw_y-v_yw_x=-u, \tag{6.6}$$

$$D_{*t}^{\beta}v+w_xu_y+w_yu_x=v, \tag{6.7}$$

$$D_{*t}^{\gamma}w+u_xv_y+u_yv_x=w \tag{6.8}$$

denklemi ve başlangıç şartları

$$u(x,y,0)=e^{x+y}, \tag{6.9}$$

$$v(x,y,0)=e^{x-y}, \tag{6.10}$$

$$w(x,y,0)=e^{-x+y} \tag{6.11}$$

verilsin. Eğer (6.6) denklemine üç boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemini uyguladığımızda

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}U_{\alpha,1,1}(k+1,h,m)&=-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)\\ &\times V(k-r+1),s,p)W(r,h-s+1,m-p)+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)\\ &\times(h-s+1)V(r,h-s+1,m-p)W(k-r+1,s,p)-U(k,h,m),\end{aligned} \tag{6.12}$$

elde ederiz. Benzer şekilde (6.7) ve (6.8) denklemlerine de uygularsak

$$\frac{\Gamma\left(\beta(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+1\right)}V_{\beta,1,1}(k+1,h,m)=-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)$$
$$\times W(k-r+1),s,p)U(r,h-s+1,m-p)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1) \tag{6.13}$$
$$\times(h-s+1)U(k-r+1,s,p)U(k-r+1,s,p)$$
$$\times W(r,h-s+1,m-p)+V(k,h,m),$$

$$\frac{\Gamma\left(\gamma(k+1)+1\right)}{\Gamma\left(\gamma k+1\right)}W_{\gamma,1,1}(k+1,h,m)=-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)$$
$$\times U(k-r+1),s,p)V(r,h-s+1,m-p)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1) \tag{6.14}$$
$$\times(h-s+1)V(k-r+1,s,p)U(r,h-s+1,m-p)+W(k,h,m)$$

bulunur.

Başlangıç şartlarını (6.2) de yazdığımızda

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}U(k,h,0)x^r y^s=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\right), \tag{6.15}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}V(k,h,0)x^r y^s=\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\times\left(1-\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots\right), \tag{6.16}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}W(k,h,0)x^r y^s=\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\right) \tag{6.17}$$

elde edilir. (6.15)-(6.17) denklemlerinden

$$U(0,0,0)=1,\ V(0,0,0)=1,\ W(0,0,0)=1, \tag{6.18}$$

$$U(1,0,0)=1,\ V(1,0,0)=1,\ W(1,0,0)=-1, \tag{6.19}$$

$$U(2,0,0)=\frac{1}{2!},\ V(2,0,0)=\frac{1}{2!},\ W(2,0,0)=\frac{1}{2!}, \tag{6.20}$$

$$U(3,0,0)=\frac{1}{3!},\ V(3,0,0)=\frac{1}{3!},\ W(3,0,0)=-\frac{1}{3!} \tag{6.21}$$

bulunur. Genel halde yazdığımızda

$$U(k,h,0)=\frac{1}{k!h!},\ k,h=0,1,2,\cdots, \tag{6.22}$$

$$V(k,h,0)=\frac{(-1)^h}{k!h!},\ k,h=0,1,2,\cdots, \tag{6.23}$$

$$W(k,h,0)=\frac{(-1)^k}{k!h!},\ k,h=0,1,2,\cdots, \tag{6.24}$$

elde edilir. (6.22)–(6.24) denklemlerini (6.12)–(6.14) denklemlerinde yerine yazıp ve yöntemi uyguladığımızda,

$$U(1,0,1)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)},\ V(1,0,1)=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)},\ W(1,0,1)=-\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}, \tag{6.25}$$

$$U(1,1,1)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)},\ V(1,1,1)=-\frac{1}{\Gamma(\beta+1)},\ W(1,1,1)=-\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}, \tag{6.26}$$

$$U(1,0,2)=\frac{1}{1!0!\Gamma(2\alpha+1)},\ V(1,0,2)=\frac{1}{1!0!\Gamma(2\alpha+1)},\ W(1,0,2)=-\frac{1}{1!0!\Gamma(2\alpha+1)}, \tag{6.27}$$

$$U(2,2,2)=\frac{1}{2!2!\Gamma(2\alpha+1)},\ V(2,2,2)=\frac{1}{2!2!\Gamma(2\beta+1)},\ W(2,2,2)=-\frac{1}{2!2!\Gamma(2\lambda+1)} \tag{6.28}$$

bulunur. Bunları genelleştirdiğimizde

$$U(k,h,m)=\frac{(-1)^m}{k!h!\Gamma(m\alpha+1)}\ \ if\ \ k,h,m=0,1,2,\cdots, \tag{6.29}$$

$$V(k,h,m)=\frac{(-1)^h}{k!h!\Gamma(m\beta+1)}\ \ if\ \ k,h,m=0,1,2,\cdots, \tag{6.30}$$

$$W(k,h,m)=\frac{(-1)^k}{k!h!\Gamma(m\lambda+1)}\ \ if\ \ k,h,m=0,1,2,\cdots \tag{6.31}$$

elde ederiz. Sırasıyla bütün $U(k,h,m), V(k,h,m)$ ve $W(k,h,m)$ ifadelerini (6.2) denkleminde yerine koyduğumuzda

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{k!h!\Gamma(m\alpha+1)}x^r y^h t^m=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}y^h\right)$$
$$\times\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-t^{\alpha})^m}{\Gamma(m\alpha+1)}\right)=e^{x+y}M_{\alpha}(-t^{\alpha}), \tag{6.32}$$

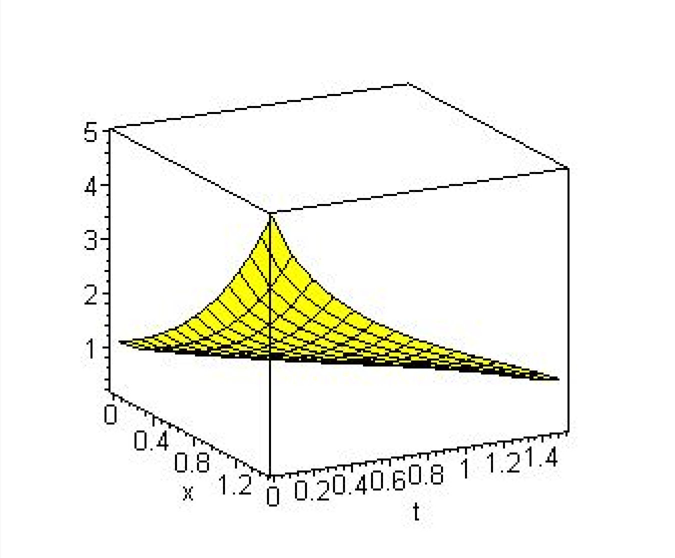
$$v(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{k!h!\Gamma(m\beta+1)}x^r y^h t^m=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{h!}y^h\right)$$
$$\times\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(t^{\beta})^m}{\Gamma(m\beta+1)}\right)=e^{x-y}M_{\beta}(t^{\beta}), \tag{6.33}$$

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!h!\Gamma(m\lambda+1)}x^r y^h t^m=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}y^h\right)$$
$$\times\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(t^{\gamma})^m}{\Gamma(m\lambda+1)}\right)=e^{-x+y}M_{\gamma}(t^{\gamma}). \tag{6.34}$$

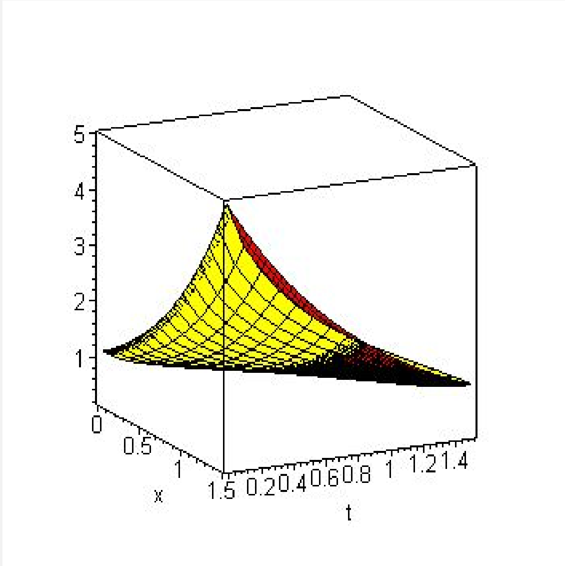
bulunur. Eğer $\alpha=\beta=\gamma=1$ aldığımızda

$$(u,v,w)=(e^{x+y-t},e^{x-y+t},e^{-x+y+t}), \tag{6.35}$$

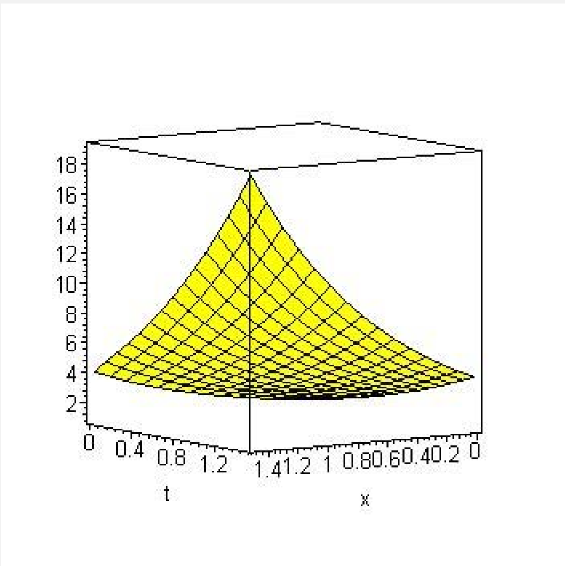
denklemlerin tam çözümlerini elde ederiz. Bu denklem sistemi için aynı çözümler Jafari(2009) tarafından homotopy yöntemiyle bulunmuştur. Bizim çözüm yöntemimiz Jafari'nin çözüm yöntemine göre hem işlem kolaylığı sağlıyor hem de daha iyi yakınsadığı gözükmektedir.



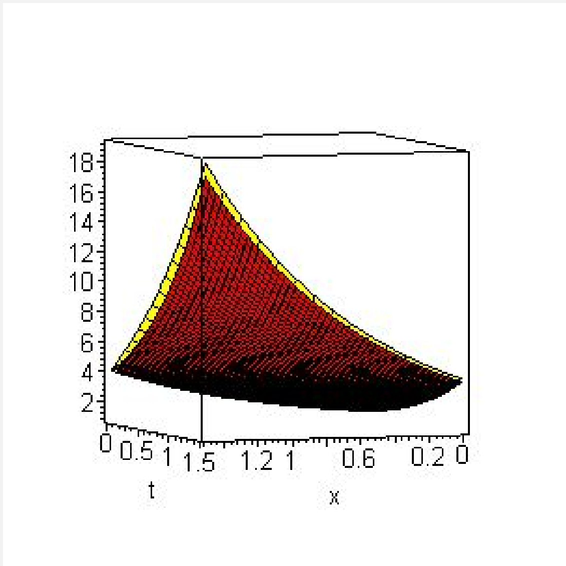
Şekil 7.1. α = 0.8, y=0.1 için u(x,y,t)'nin yaklaşık çözümünün grafiği



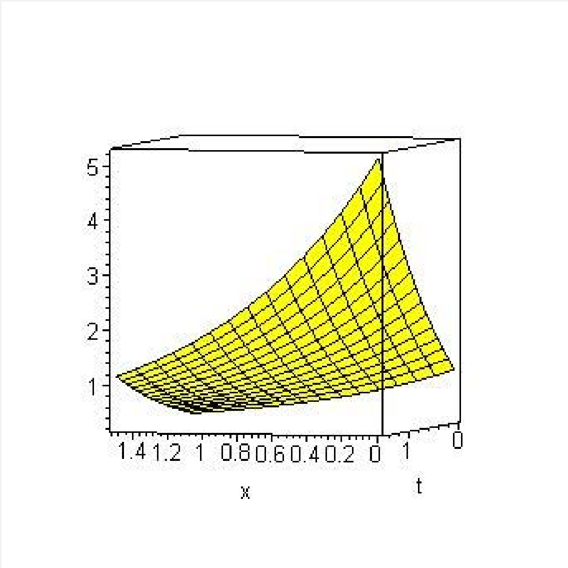
Şekil 7.2. α = 0.8, y=0.1 için u(x,y,t)'nin yaklaşık çözümü ile y=0.1 için u(x,y,t)'nin tam çözümünün grafiği



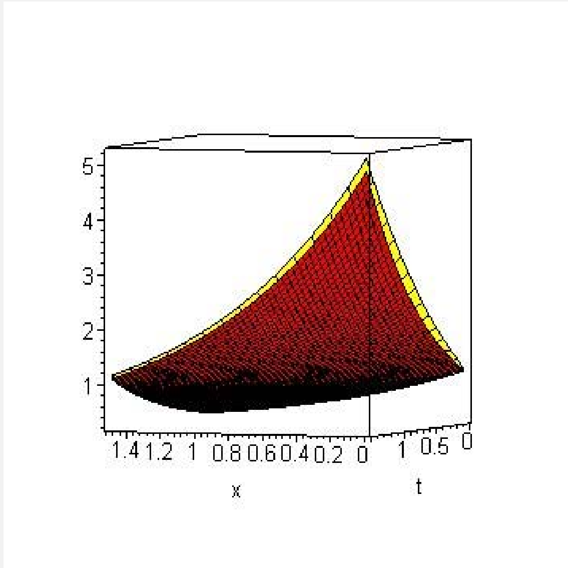
Şekil **7.3.** β= 0.8, y=0.1 için v(x,y,t)'nin yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil 7.4. β = 0.8, y=0.1 için v(x,y,t)'nin yaklaşık çözümü ile y=0.1 için v(x,y,t)'nin tam çözümünün grafiği



Şekil 7.5. γ = 0.8, y=0.1 için w(x,y,t)'nin yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil 7.6. γ = 0.8, y=0.1 için w(x,y,t)'nin yaklaşık çözümü ile y=0.1 için w(x,y,t)'nin tam çözümünün grafiği

Şekillerdeki u(x,y,t), v(x,y,t), w(x,y,t) fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinde ki denklemler dördüncü mertebeye kadar bulunmuştur.

7. SONUÇLAR

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan birçok matematik modelin analitik çözümü çok zor veya imkansız olabilir. Bu durumda yaklaşık çözümler kullanılır. Son zamanlarda yapılan çalışmaların çoğunda yaklaşık çözüme sahip sayısal yöntemler ön plana çıkmaktadır. Özellikle hızlı sonuç veren, algoritması kolay hazırlanabilen ve hassasiyeti yüksek olan yöntemler son derece ilgi çekici olup hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır. Bu durum özellikle nonlineer modellerde daha çok önem taşımaktadır.

Bu tezde, mertebesi zaman-kesirli olan nonlineer kısmi türevli diferensiyel denklemi varyasyonel iterasyon, homotopy perturbation, ayrışım ve diferensiyel dönüşüm yöntemleri ile yaklaşık olarak çözdük. Diferensiyel dönüşüm yöntemi, diğer yöntemlere göre hem daha iyi sonuçlar vermiş hem de çözüme daha kolay ulaştırmıştır. Çizelge ve şekillerden anlaşılacağı üzere, diferensiyel dönüşüm yöntemi diğer yöntemlere göre daha etkili bir yöntemdir. Bunun yanında, üç boyutlu kesirli mertebeden kısmi türevli nonlineer diferensiyel denklem sisteminin yaklaşık olarak analitik çözümleri de dönüşüm yöntemi ile hesaplanmıştır. Bununla ilgili teoremler yazılıp ispatlanmıştır.

İlk olarak 1986 yılında adi türevli diferensiyel denklemler için Zhou tarafından ortaya konulan ancak son dönemlere kadar pek de rağbet görmeyen dönüşüm yöntemi, bununla birlikte algoritmasının kolay oluşu, hızlı ve yüksek hassasiyette çözüme ulaşması ve de çözüm için karmaşık integraller yerine kolay türevler kullanmasından dolayı dikkat çekmektedir. Hassasiyet ve kolay hesaplanması dikkate alındığında diğer yöntemlerden çok daha etkili ve daha hızlı sonuç üretir. Bu yöntem üzerinde yapılan çalışmalara bakıldığında diğer yöntemlerden çok daha az olduğu dikkate çarpmaktadır. Yöntemle ilgili araştırmaların artması ile birlikte yöntemin geliştirilip birçok bilim dalında daha etkin kullanılabileceğini söylemek mümkündür. Sonuç olarak benzerlerinden daha etkili olan diferensiyel dönüşüm yöntemi günümüzde çokça karşılaşılan birçok problemin çözümüne yardımcı olmaya aday yeni ve oldukça etkili bir yöntemdir.

KAYNAKLAR

Abdel-Halim Hassan, I.H.,(2002), “On solving same eigenvalue problems by using a differential transformation, Applied Mathematics and Computation”, 127, 1-22.

Abdel-Halim Hassan, I.H.,(2002), “ Different applications for the differential transformation in the differential equations, Applied Mathematics and Computation”, 129, 183-201.

Abdulaziz, O., Hashim, I. ve Momani S., (2007),“Application of homotopy-perturbation method to fractional IVPs”, J. Comput. Appl. Math. in press, (doi:10.1016/j.cam..06.010).

Arikoglu, A. ve Ozkol, İ.,(2006a), “Solution of differential-difference equations by using differential transform method, Applied Mathematics and Computation”, 181, 153-162.

Arikoglu, A. ve Ozkol, I. (2006b), “Solution of fractional differential equations by using differential transform method”, Chaos, Solitons & Fractals, in press.

Ayaz, F.,(2003), “On the two-dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation”, 143, 361-374.

Ayaz, F.,(2004), “ Solutions of the systems of differential equations by differential transform method, Applied Mathematics and Computation”, 147, 547-567.

Ayaz, F.,(2004), “Applications of differential transform method to differential–algebraic equations, Applied Mathematics and Computation”, 152, 649-657.

Bayram M. ve Çelik E., (2003), “Arbitrary Order Numerical Method for Solving Differential- Algebraic Equations by Padé Series”, Applied Mathematics and Computation. 137;57-65

Caputo, M., (1967), “Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent”, Part II, J. Roy. Austral. Soc. 13, 529–539.

Chen, C.K. ve Ju, S.P.,(2004), “ Application of differential transformation to transient advective-dispersive transport equation, Applied Mathematics and Computation”, 155, 25-38

Chen, C.K. ve Ho, S.H. (1999), “Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method”, Applied Mathematics and Computation,106:171-179.

Daftardar-Gejji V. ve Babakhani A.,(2004), “Analysis of a system of fractional differential equations”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 293, 2;511-522.

Debrabant, K. ve Strehmel K. (2005), “Convergence of Runge-Kutta methods applied to linear partial differential-algebraic equations”, Applied Numerical Mathematics,53:213-229.

Ertürk, V. S., Momani S., Odibat Z., (2007) "Generalized differential transform method for solving a space and time-fractional diffusion-wave equation" Physics Letters A 370:379–387

Ertürk V. S., Momani S., Odibat Z. "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, In Press, Corrected Proof, Available online 24 February 2007.

Frank, G.,(1996), MAPLE V:CRC Press Inc., 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida 33431.

Hassan, I.H. (2002), "On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation", Applied Mathematics and Computation, 127:1-22.

He, J.H., (2004), "Variational principle for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients", Chaos Solitons Fractals 19 (4) 847–851.

He, J.H., (1999), "Homotopy perturbation technique", Comput. Meth. Appl. Mech.Eng. 178:257-262.

He, J.H., (1998), "Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, Comput. Meth. Appl. Mech.Eng. 167 ; 57–68.

Ho, S. H.ve Chen, C. K.,(1998), "Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform", Appl. Math. Mod., 22,219-234.

Jafari H. ve Daftardar-Gejji V., (2005),"Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 301, 2: 508-518.

Jafari H. ve Daftardar-Gejji V. ,(2006), "Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition" Journal of Computational and Applied Mathematics, 196, 2: 644-651.

Jafari H. ve Seifi S., (2009), "Solving a system of nonlinear fractional partial differential equations using homotopy analysis method" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14;1962-1969.

Jang, M.J. , Chen, C.L. , Liy, L.C. (2000), "On solving the initial-value problems using the differential transformation method", Applied Mathematics and Computation, 115:145-160.

Jang, M.J., Chen. C.L., Liy, Y.C.,(2001), "Two-dimonsional differential transform for partial differential equations, Applied Mathematics and Computation", 121, 261-270.

Kesan, C., (2003), “Chebyshev polynomial solutions of second-order linear partial differential equations”, Applied Mathematics and Computation 134 ;109–124.

Kurulay, M. , Osmanoğlu, M. ve Bayram M.,(2008), "Kesirli Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümü üzerine", XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu, İstanbul-TURKEY, Sep.

Kurulay, M , Osmanğlu, M. ve Bayram M.,(2008), "Solution of the differential-algebraic equations with index-3 using differential transform method", Journal of the Institute of Science and Technology of Dumlupınar University, Vol. 16, No. 16; 25-30.

Kurulay, M. ve Bayram M.,(2008), "A Noval Power Series Method for Solving Second Order Partial Differential Equations ", European Journal of Pure and Applied Mathematics, article in press, Jan.

Liu, H. ve Song, Y.,(2007), “Differential transform method applied to high index differential–algebraic equations, Applied Mathematics and Computation”, 184, 748-753.

Lucht, W. , Strehmel, K. , Eichler-Liebenow, C. (1997a), “Linear partial differential algebraic equations, Part I: Indexes, consistent boundary/initial conditions”, Report 17, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universitat Halle.

Lucht, W. , Strehmel, K. , Eichler-Liebenow, C. (1997b), “Linear partial differential algebraic equations, Part II: Numerical solution”, Report 18, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universitat Halle.

Marszalek, W. (1997), Analysis of partial differential algebraic equations, Ph.D. Thesis, North Carolina State University, Raleigh.

Martinson, W. ve Barton, P. (2000), “A differentiation index for partial differential-algebraic equations”, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 21, 6:2295-2315.

Martinson, W. ve Barton, P. (2002), “Index and characteristic analysis of linear PDAE systems”, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 24, 3:905-923.

Momani, S. ve Odibat, Z. (2008), “A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor’s Formula”, Journal of Computational and Applied Math. 220, 85-95.

Momani, S. ve Odibat, Z., (2007a), “Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order” Physics letter A 365 345-350.

Momani, S. ve Odibat, Z., (2007b), “Generalized differential dönüşüm method for solving a space- and time-fractional diffusion-wave equation”,Phys.Lett.A, Article in press.

Momani, S. ve Odibat, Z., (2007c), “Numerical solution of Fokker–Planck equation with space- and time-fractional derivatives”, Phys. Lett. A, 369 , 349-358.

Momani, S. ve Odibat, Z., “Analytical solution of a time-fractional Navier–Stokes equation by Adomian decomposition method”, Appl. Math. Comput., in press.

Momani, S. ve Odibat, Z., (2007), “Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order”, Chaos, Solitons & Fractals, 31, 5;1248-1255.

Momani S. ve Noor M. A.,(2006), “Numerical methods for fourth-order fractional integro-differential equations” Applied Mathematics and Computation, 182, Pages 754-760.

Momani S. ve Shawagfeh N..(2007), “Decomposition Method for solving fractional Riccati differential equations” Applied Mathematics and Computation, 182, Pages 1083-1092.

Momani, S. ve Odibat, Z. (2008a),“A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order”Applied Mathematics Letters 21:194–199

Odibat Z., Shawagfeh N. T.,(2007), “Generalized Taylor’s Formula” Applied Mathematics and Computation, 186, 1, 286-293.

Odibat, Z. ve Momani, S. , (2008b), “Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order” Applied mathematical modelling 32, 28-39.

Podlubny, I., (1999), Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, some methods of their solutionand some of their applications, SanDiego: Academic Press.

SEN, A.K.,(1986), “ An Application of the Adomian Decomposition Method to the Transiet Bhavior of a Model Biochemical Reaction”, J. Math. Anal. Appl. 131, 232-245.

SEN, A.K.,(1988), “On the Time Course of the Reversible Michaelis–Menten Reaction, J. Theor. Biol. 135 ,483-493.

Wazwaz A. ve El-Sayed S., (2001), “A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators”, Appl. Math.Comput. 122 393–405.

Yang, X. Y., Liu, S. Bai, (2006). “ A numerical solution of second-order linear partial differential equations by differential transform”, Applied Mathematics and Computation 173 ;792-802.

Zhou, J.K., (1986), Differential Dönüşümation and its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	25.07.1978	
Doğum yeri	Of	
Lise	1994-1997	Fatih Ahmet Rasim Lisesi
Lisans	1997-2001	Atatürk Üniversitesi Fen Edb. Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2004-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü
Doktora	2006-2009	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

	2001-2005	Milli Eğitim Bakanlığı
	2005-2009	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi