YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Mer. Sıh. Ope. Kat. Ken. eş bir Dif. Opera. Spek. İnc. ve Düz. İzin. Hesapı

Doktora Tezi

Yonca Sezer

2007

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMUNUN İNCELENMESİ VE DÜZENLİ İZİNİN HESAPLANMASI

Yüksek Matematikçi Yonca SEZER

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 23.03.2007
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet TAGİYEV (MSGSÜ)
Doç. Dr. Ayşe KARA (YTÜ)
Prof. Dr. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
Prof. Dr. Ağamalı AĞAMALIYEV (İÜ)

İSTANBUL, 2007

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMUNUN İNCELENMESİ VE DÜZENLİ İZİNİN HESAPLANMASI

Yüksek Matematikçi Yonca SEZER

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi	**: 23.03.2007**
Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (YTÜ)**
Jüri Üyeleri	**: Prof. Dr. Mehmet TAGİYEV (MSGSÜ)**
	Doc. Dr. Ayşe KARA (YTÜ)
	Prof. Dr. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
	Prof. Dr. Ağamalı AĞAMALIYEV (İÜ))

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R(L)$	L operatörünün görüntü kümesi
L^*	L operatörünün eşleniği
$\overline{L}$	L operatörünün kapanışı
$(.,.)$	İç çarpım
$\lVert . \rVert$	Norm
$N(\lambda)$	L operatörünün λ dan büyük olmayan özdeğerlerin sayısı
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\rho(L)$	L operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma_\infty(H)$	Tam sürekli operatörler uzayı

KISALTMA LİSTESİ

hhhy	Hemen hemen her yerde

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı yöneten ve bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü desteği veren Sayın Hocam Prof. Dr. Ehliman Adıgüzelov'a gösterdiği yakın ilgi, alaka ve anlayış için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bana yol gösteren Prof. Dr. Hamit Avcı'ya, yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Ayşe Kara'ya, Doç. Dr. Meral Tosun'a ve Dr. Serpil Şengül'e çok teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan ve beni destekleyen anne babama; tez yazımında da büyük yardımı olan sevgili eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yonca SEZER

Mart 2007

ÖZET

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $H_1 = L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$\ell_0(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x),$$

$$\ell(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y^{(2i-1)}(0) = y^{(2i-1)}(\pi) = 0 \quad (i = 1,2,..,m)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörler sırasıyla L_0 ve L olsun. Burada A H uzayında sınırsız kendine eş bir operatör ve $Q(x)$ her $x \in [0,\pi]$ için yine H uzayında kendine eş bir çekirdek operatördür. A operatörünün ve $Q(x)$ operatör fonksiyonunun bazı ek koşullar sağladığı varsayılarak L_0 ve L operatörlerinin saf ayrık spektruma sahip olduğu gösterilmiş, özdeğerleri için asimtotik formül ve L operatörünün düzenli izi için

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{n_p} \left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q})dx \right] = \frac{1}{4}[trQ(0) + trQ(\pi)] - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx$$

şeklinde bir formül bulunmuştur. Burada $n_1 < n_2 < ...$ ve $j_1, j_2, ...$ belirli özelliğe sahip olan doğal sayı dizileridir. Ayrıca $\mu_1 \le \mu_2 \le ... \le \mu_n \le ...$ ve $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ...$ sırasıyla L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri ve $\varphi_1, \varphi_2, ...$ A operatörünün özvektörlerinden oluşan tam ortonormal bir dizidir.

Anahtar kelimeler: Hilbert uzayı, özdeğer, spektrum, rezolvent, kapanabilir operatör, simetrik operatör, kendine eş operatör, çekirdek operatör, asimtotik davranış, saf ayrık spektrum, düzenli iz.

ABSTRACT

Let L_0 and L be operators which are formed by the differantial expressions

$$\ell_0(y)=(-1)^m y^{(2m)}(x)+Ay(x)$$

and

$$\ell(y)=(-1)^m y^{(2m)}(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$$

respectively, in the space $H_1 = L_2(0,\pi;H)$, with the same boundary condition

$$y^{(2i-1)}(0)=y^{(2i-1)}(\pi)=0 \quad (i=1,2,..,m)$$

where H is an infinite dimensional separable Hilbert space. Here, A is an unbounded self adjoint operator in H and, for every $x\in[0,\pi]$, $Q(x)$ is a self-adjoint kernel operator in H. Assuming the operator A and the operator function $Q(x)$ satisfy some additional conditions, it has been shown that the operators L_0 and L have line separated spectrum and, it has been found the asymptotic formula for their eigenvalues and the following formula

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q})dx\right]=\frac{1}{4}[\mathrm{tr}Q(0)+\mathrm{tr}Q(\pi)]-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tr}Q(x)dx$$

for the regularized trace of L. Here, $n_1<n_2<\ldots$and $j_1,j_2,\ldots$ are sequences of natural numbers with a particular property. Furthermore, $\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\mu_n\le\ldots$ and $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\le\ldots$ are the eigenvalues of the operators L_0 and L, respectively; and $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ is a complete orthonormal sequence consisting of eigenvectors of the operator A.

Keywords: Hilbert space, eigenvalue, spectrum, resolvent, closable operator, symmetric operator, self-adjoint operator, kernel operator, regularized trace, asymptotic behaviour, line separated spectrum

1. GİRİŞ

Bu çalışmada çift mertebeden sınırsız operatör katsayılı kendine eş bir diferansiyel operatörün spektrumu incelenmiş, özdeğerleri için asimtotik formül bulunmuş ve düzenli izi hesaplanmıştır.

Bu kısımda çalışmamızın önemli ayrıntıları yer almıştır.

3. Bölümün 1. kısmında, 2m. mertebeden sınırsız operatör katsayılı bir diferansiyel ifade ve belirli sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş bir operatör tanımlayarak bu operatörün spektrumu incelenmiştir.

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı $(.,.)$ ile ve normu da $\|.\|$ ile göstereceğiz. $[0,\pi]$ aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan ve

1. Her $g \in H$ için $(f(x),g)$ skaler fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir,
2. $\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty$

koşullarını sağlayan tüm fonksiyonların kümesini $H_1 = L_2(0,\pi;H)$ ile göstereceğiz. H_1 kümesi bir lineer uzaydır. Bu lineer uzayın

$$(f_1,f_2)_{H_1} = \int_0^\pi (f_1(x),f_2(x))dx \quad (f_1,f_2 \in H_1)$$

fonksiyonu ile bir ayrılabilir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir, (Kirillov,1976). H_1 uzayındaki normu $\|.\|_{H_1}$ ile göstereceğiz.

A, $D(A) \subset H$ olmak üzere

$$A = A^* \geq I, A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$$

koşullarını sağlayan bir operatör olsun. Burada, $\sigma_\infty(H)$ ile H den H ye tüm tam sürekli operatörlerin kümesi gösterilmiştir. A operatörünün özdeğerleri $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq ...$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri de sırasıyla $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ olsun. Burada, her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $D(L_0')$ ile H_1 uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $y(x)$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim:

1) $y(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre 2m. mertebeden sürekli türeve sahiptir.

2) Her $x \in [0,\pi]$ için $y(x) \in D(A)$ ve $Ay(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre süreklidir.

3) $y^{(2i-1)}(0) = y^{(2i-1)}(\pi) = 0 \quad (i = 1,2,..,m)$

$L_0' : D(L_0') \to H_1$

$L_0'(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x)$

lineer operatörünü göz önüne alalım. Bu kısımda L_0' operatörünün simetrik olduğu ispatlanmıştır (Teorem 3.1.2). L_0 operatörünün kapanışı $L_0 = \overline{L}_0'$ olsun. $L_0 : D(L_0) \to H_1$ kapalı simetrik bir operatördür. Bu operatörün özvektörlerinden oluşan $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \infty}$ kümesi tam olduğundan söz konusu operatör kendine eştir, (Adıgüzelov ve Bakşi, 2004).

$Q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör fonksiyon olsun.

a) Her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x): H \to H$ sınırlı kendine eş bir operatördür.

b) $Q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında zayıf ölçülebilirdir. Yani her $f, g \in H$ için $(Q(x)f, g)$ skaler fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilirdir.

c) $\|Q(x)\|$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sınırlıdır.

Bu kısımda $Q : H_1 \to H_1$

$Qy = Q(x)y(x)$

operatörünün kendine eş olduğu ve $L = L_0 + Q : D(L_0) \to H_1$ operatörünün saf ayrık spektruma sahip olduğu gösterilmiştir. L operatörünün özdeğerleri $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ olsun. Burada da her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

3. Bölümün 2. kısmının temel sonucu aşağıdaki teoremden ibarettir:

Teorem 3.2.3: $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim a.j^{\alpha}$ $(0 < a, \alpha < \infty)$ ise

$$d = \left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b} \right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \text{ ve } b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^{\frac{1}{m}+1} dt \text{ olmak üzere}$$

$n \to \infty$ iken $\lambda_n \sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$ dır.

$m = 1$ hali için L operatörünün özdeğerlerinin asimtotik davranışı Gorbaçuk (1975) çalışmasında incelenmiştir.

3. Bölümün 3. kısmında L_0 operatörünün $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...$ özdeğerler dizisinin belirli bir eşitsizliği sağlayan özel alt dizilerinin var olduğu gösterilmiş ve bundan yararlanarak L operatörünün düzenli izi tanımlanmıştır.

L_0 operatörünün özdeğerleri $\mu_1 \le \mu_2 \le ... \le \mu_n \le ...$ olsun. Bu kısımda $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim a.j^{\alpha}$ $(a, \alpha > 0)$ koşulları sağlandığı taktirde $\{\mu_n\}$ dizisinin

$$\mu_q - \mu_{n_p} > d_0 \left(q^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} - n_p^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \right), \; (q = n_p + 1, n_p + 2, ...) \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ alt dizisine sahip olduğu ispatlanmıştır. Burada d_0 pozitif bir sabittir.

L_0 operatörünün özdeğerleri

$$k^{2m} + \gamma_j, \; (k = 0,1,2,... \quad ; j = 1,2,...)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\mu_q = k_q^{2m} + \gamma_{j_q}, \; (q = 1,2,...) \tag{1.2}$$

dir. $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$, azalmayan $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin (1.1) eşitsizliğini sağlayan bir alt dizisi ve $j_1, j_2, ...$ (1.2) eşitliğini sağlayan doğal sayılar olmak üzere

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]$$

limitine L operatörünün düzenli izi diyeceğiz.

3. Bölümün 4. kısmının temel sonucu aşağıdaki teoremden ibarettir:

Teorem 3.4.2: $Q(x)$ operatör fonksiyonu

i. $Q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında 2.mertebeden zayıf türeve sahip ve her $f,g\in H$ için $(Q''(x)f,g)$ fonksiyonu sürekli,

ii. Her $x\in[0,\pi]$ için $Q^{(i)}(x):H\to H$ $(i=0,1,2)$ kendine eş çekirdek operatörler ve $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ $(i=0,1,2)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir

koşullarını sağlıyor ve $j\to\infty$ iken

$$\gamma_j\sim a.j^{\alpha}\ \left(a>0\ ,\ \alpha>\frac{2m+2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m-\sqrt{2}-1}\right) \tag{1.3}$$

ise L operatörünün düzenli izi için

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]=\frac{1}{4}\left[trQ(0)+trQ(\pi)\right]-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}trQ(x)dx \tag{1.4}$$

formülü sağlanır.

3. Bölümün 5. kısmında özdeğerleri (1.3) koşulunu sağlayan A operatörüne ve i), ii) koşullarını sağlayan $Q(x)$ operatör fonksiyonuna birer örnek verilmiştir. Bu örnekte L_0 operatörünün $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$ uzayında kısmi türevli bir simetrik operatörün kapanışı olduğu gösterilmiş ve (1.4) formülünden yararlanarak $L=L_0+Q$ operatörünün düzenli izi hesaplanmıştır.

Skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi ile ilgili çalışmalar ilk olarak Gelfand ve Levitan'ın (1953) çalışması ile başlamıştır. Bu çalışmadan sonra Dikiy (1953), Halberg ve Kramer (1960), Gasimov ve Levitan (1963), Levitan (1964), Lidskiy ve Sadovniçiy (1967), Guseynov ve Levitan (1978) ve birçok başka çalışmalarda çeşitli skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi incelenmiştir. Bu konudaki çalışmaların listesi Levitan ve Sargsyan (1991) ve Fulton ve Pruess (1994) çalışmalarında verilmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izi Halilova (1976), Adıgüzelov(1976), Maksudov vd. (1984), Bayramoğlu ve Adıgüzelov (1996), Albayrak vd. (1999), Adıgüzelov vd. (2001), Adıgüzelov vd. (2001), Adıgüzelov vd. (2004), Adıgüzelov ve Bakşi (2004), Adıgüzelov ve Kanar (2005) ve bazı başka çalışmalarda incelenmiştir.

Bizim çalışmamızdan önce, konumuzla ilgili yapılan en son çalışma olan Adıgüzelov, E.E., Bakşi Ö., (2004) "On The Regularized Trace of The Differantial Operator Equation Given in a Finite Interval", makalesinde $L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$\ell(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (i = 1,2,..,m)$$

sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün düzenli izi hesaplanmıştır.

Bizim çalışmamız, bu çalışmanın genelleştirilmiş halidir. Yani $\ell(y)$ ifadesi, herhangi çift mertebeden bir diferansiyel ifade olarak göz önüne alınmıştır. Ayrıca bu çalışmada kabul edilen bazı koşullar bizim çalışmamızda kaldırılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı $(.,.)$, normu da $\|.\|$ ile göstereceğiz. $-\infty \le a < b \le \infty$ olmak üzere bir (a,b) aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan

1. Her $g \in H$ için $(f(x), g)$ skaler fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir,

2. $$\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty \tag{2.1}$$

koşullarını sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(a,b;H)$ ile gösterelim. H_1 in herhangi f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f,g)_{H_1} = \int_a^b (f(x), g(x))dx \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 kümesi bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur (Kirillov,1976). H_1 uzayında normu $\|.\|_{H_1}$ ile göstereceğiz.

$\overline{D(A)} = H$ olmak üzere A, $D(A)$ dan H ye kendine eş bir operatör olsun. Her $x \in D(A)$, $x \ne 0$ için $(Ax,x) > 0$ $((Ax,x) < 0)$ ise A ya pozitif (negatif) operatör denir ve bu $A > 0$ $(A < 0)$ şeklinde yazılır. Her $x \in D(A)$ için $(Ax,x) \ge 0$ $((Ax,x) \le 0)$ ise A ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatör denir ve bu $A \ge 0$ $(A \le 0)$ şeklinde gösterilir.

A ve B kendine eş herhangi iki operatör olsun. $D(A) \subset D(B)$ ve $D(A)$ dan H ye A-B operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise A ya B den büyüktür (küçük değildir) denir ve $A > B$ $(A \ge B)$ olarak yazılır. H den H ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini B(H) ile ve H den H ye tüm tam sürekli operatörler kümesini de $\sigma_\infty(H)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1: A negatif olmayan kendine eş bir operatör ve B de $B^2 = A$ olacak şekilde kendine eş bir operatör ise B ye A nın karekökü denir.

Teorem 2.1: Negatif olmayan kendine eş bir $A : H \to H$ operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş B karekökü vardır. Eğer $C : H \to H$

$$AC=CA \tag{2.3}$$

olacak şekilde herhangi bir sınırlı lineer operatör ise

$$BC=CB \tag{2.4}$$

dir (Lysternik ve Sobolev, 1955).

Tanım 2.2: Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerin ve sıfır elemanının oluşturduğu N_λ lineer manifolduna A nın λ özdeğerine karşılık gelen özuzayı denir.

Tanım 2.3: Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen N_λ özuzayının boyutuna λ özdeğerinin katlılığı denir.

A operatörünün pozitif karekökü $A^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir. $A \in \sigma_\infty(H)$ olsun. Bu durumda A^*A kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_\infty(H)$ dır (Cohberg ve Krein, 1969). $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_k$ $(0 \leq k \leq \infty)$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ negatif olmayan bir operatör olduğundan $s_1, s_2, ..., s_k$ pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. Eğer $k < \infty$ ise $s_j = 0$; $j = k+1, k+2, ...$ kabul edilir. A nın s sayıları bazen $s_j(A)$ $(j = 1,2,...)$ şeklinde de yazılabilir. $s_1(A) = \|A\|$ olduğunu belirtelim. Eğer A normal operatör yani $A^*A = AA^*$ ise o taktirde

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \quad (j = 1,2,...,k) \tag{2.5}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969). Burada $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq ... \geq |\lambda_k(A)|$, A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir.

s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty, \ (p \geq 1) \tag{2.6}$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_\infty(H)$ operatörlerinin kümesini σ_p veya $\sigma_p(H)$ simgesiyle göstereceğiz. Burada σ_p $(p \geq 1)$ bir ayrılabilir Banach uzayıdır (Cohberg ve Krein, 1969).

Bu uzayın her A operatörünün normu

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4: σ_1 uzayına ait olan, başka bir deyişle s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty \tag{2.8}$$

özelliğine sahip olan $A \in \sigma_1(H)$ operatörüne çekirdek operatörü denir.

$A \in \sigma_p(H)$ ve $B : H \to H$ sınırlı lineer bir operatör ise $AB, BA \in \sigma_p(H)$ ve

$$\|AB\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| . \|A\|_{\sigma_p(H)} \tag{2.9}$$

$$\|BA\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| . \|A\|_{\sigma_p(H)} \tag{2.10}$$

dır. Ayrıca $p_1 < p_2$ ise $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$ dir (Cohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.5: $A : H \to H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer her $\{e_j\}_1^{\infty}$ ortonormal tabanı için $\sum_{j=1}^{\infty}(Ae_j, e_j)$ serisi yakınsak ise A operatörü sonlu matris izine sahiptir denir.

Teorem 2.2: A bir çekirdek operatörü ise her $\{e_j\}_1^{\infty} \subset H$ ortonormal tabanı için $\sum_{j=1}^{\infty}(Ae_j, e_j)$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_j\}_1^{\infty}$ tabanının seçimine bağlı değildir (Cohberg ve Krein, 1969).

Bu $\sum_{j=1}^{\infty}(Ae_j, e_j)$ toplamına A operatörünün matris izi denir ve trA ile gösterilir.

A ve B herhangi iki çekirdek operatörü ve α, β herhangi iki sayı ise

$$tr(\alpha A + \beta B) = \alpha trA + \beta trB \tag{2.11}$$

$$trA^* = \overline{trA} \tag{2.12}$$

dır.

Teorem 2.3: $A \in \sigma_\infty(H)$, $B : H \to H$ sınırlı lineer bir operatör ve $AB, BA \in \sigma_1(H)$ ise

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \tag{2.13}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.6: $A : H \to H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Bir $\varphi \in H$, $\varphi \neq 0$ vektörü ve λ sayısı için

$$(A - \lambda I)^n \varphi = 0 \tag{2.14}$$

olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa φ ye A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen esas vektörü denir.

Tanım 2.7: Sınırlı lineer bir $A : H \to H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm esas vektörlerin ve $0 \in H$ elemanının oluşturduğu K_λ lineer manifolduna söz konusu operatörün λ özdeğerine karşılık gelen esas lineer manifoldu denir.

Tanım 2.8: Sınırlı lineer bir $A : H \to H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen K_λ esas lineer manifoldunun boyutuna λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir.

Teorem 2.4: A çekirdek operatörünün matris izi için

$$\mathrm{tr}A = \sum_{j=1}^{\upsilon(A)} \lambda_j(A) \tag{2.15}$$

dır. Burada her λ_k özdeğeri kendi cebirsel katlılık sayısı kadar toplanmıştır. $\upsilon(A)$ sıfırdan farklı özdeğerlerin cebirsel katlılıklarının toplamıdır (Cohberg ve Krein, 1969).

Eğer $A \in \sigma_p(H)$, $(1 \leq p < \infty)$ ve $\{e_j\}_1^\omega$ $(1 \leq \omega \leq \infty)$ H de bir ortonormal elemanlar sistemi ise

$$\sum_{j=1}^{\omega} \left|(Ae_j, e_j)\right|^p \leq \left(\|A\|_{\sigma_p(H)}\right)^p \tag{2.16}$$

dır. Bu eşitsizlikten özel olarak A çekirdek operatörü için

$$|\mathrm{tr}A| \leq \|A\|_{\sigma_1(H)} \tag{2.17}$$

elde edilir (Cohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.9: H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \to H$ kendine eş bir operatör olsun. Eğer A operatörünün spektrumu sadece her birinin katlılığı sonlu olan

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{2.18}$$

özdeğerlerinden ibaret ve

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$$

ise A operatörü saf ayrık spektruma sahiptir denir (2.18) de her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

Bir A lineer operatörünün rezolvent kümesini $\rho(A)$ spektrumunu da $\sigma(A)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.5: H bir Hilbert uzayı ve $D(A) \subset H$ olmak üzere $A : D(A) \to H$ kendine eş bir operatör olsun. Her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, x) \geq \alpha(x, x)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in R$ sabiti varsa

$$(-\infty, \alpha) \subset \rho(A)$$

dır.

İspat: λ $(-\infty, \alpha)$ aralığına ait olan herhangi bir sayı olsun. $\lambda \in \rho(A)$ olduğunu göstermek gerekir. Her

$x \in D(A)$ için

$$((A - \lambda I)x, x) = (Ax, x) - \lambda(x, x) = (Ax, x) - \alpha(x, x) + (\alpha - \lambda)(x, x) \tag{2.19}$$

dir. $(Ax, x) \geq \alpha(x, x)$ olduğu göz önüne alınırsa (2.19) dan

$$((A - \lambda I)x, x) \geq (\alpha - \lambda)(x, x) = (\alpha - \lambda)\|x\|^2 \tag{2.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$|((A - \lambda I)x, x)| \leq \|(A - \lambda I)x\| \cdot \|x\| \tag{2.21}$$

dir. (2.20) ve (2.21) den

$$\|(A-\lambda I)x\|.\|x\| \geq (\alpha-\lambda)\|x\|^2$$

ya da

$$\|(A-\lambda I)x\| \geq (\alpha-\lambda)\|x\|, \quad (x \in D(A))$$

bulunur. Burada $\alpha - \lambda > 0$ olduğu dikkate alınırsa $\lambda \in \rho(A)$ dır. ■

Teorem 2.6: X bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \to X$ bir kapalı operatör olsun. Eğer A nın A^{-1} tersi varsa

$$\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$$

dır.

İspat: $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$ olsun.

$$A^{-1} - \lambda^{-1}I = \lambda^{-1}(\lambda I - A)A^{-1}$$

dir. Buradan

$$(A^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} = -\lambda A(A-\lambda I)^{-1} = -\lambda(A - \lambda I + \lambda I)(A-\lambda I)^{-1} = -\lambda I - \lambda^2(A-\lambda I)^{-1} \qquad (2.22)$$

elde edilir. (2.22) den $A^{-1} - \lambda^{-1}I$ operatörünün $(A^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}$ tersinin var ve sınırlı olduğu ve de $D((A-\lambda I)^{-1}) = X$ olduğu göz önüne alınırsa tüm X te tanımlı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

$$\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$$

dir. $A^{-1} : R(A) \to X$ operatörünün de kapalı olduğu ve $(A^{-1})^{-1} = A$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki ispattan dolayı $\lambda \in \rho(A^{-1}) \setminus \{0\}$ ise $\lambda^{-1} \in \rho(A)$ dır. Bu nedenle $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ise $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$ ve $\mu \in \rho(A^{-1}) \setminus \{0\}$ ise $\mu^{-1} \in \sigma(A)$ dir. Sonuç olarak $\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$ dır.■

Tanım 2.10: H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \to H$ simetrik bir operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$ için

$$(Ax,x) \geq a(x,x)$$

olacak şekilde bir $a \in (-\infty,\infty)$ sabiti varsa A operatörüne alttan yarı sınırlıdır denir.

Tanım 2.11: H bir Hilbert uzayı ve $D(A) \subset H$ olmak üzere $A: D(A) \to H$ kendine eş alttan yarı sınırlı bir operatör olsun. Bir $\alpha \in (-\infty,\infty)$ sabiti için A operatörünün spektrumunun $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan kısmının sadece özdeğerlerden ibaret olduğunu, her özdeğerin katlılığının sonlu olduğunu ve bu özdeğerler kümesinin α dan küçük olan yığılma noktasına sahip olmadığını varsayalım. Burada özel olarak $\sigma(A) \cap (-\infty,\alpha) = \varnothing$ olabilir. Bu durumda A operatörünün spektrumunun $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan kısmı ayrıktır denir.

A operatörünün $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan özdeğerleri

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A) \leq \ldots$$

olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

Teorem 2. 7: A ve B $A \geq B$ olmak üzere kendine eş alttan yarı sınırlı herhangi iki operatör olsun. Bir $\alpha \in (-\infty,\infty)$ sabiti için B operatörünün spektrumunun $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan kısmı ayrık ise A operatörü de bu özelliğe sahiptir ve $\sigma(A) \cap (-\infty,\alpha) \neq \varnothing$ halinde $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan özdeğerler için

$\lambda_n(A) \geq \lambda_n(B)$ dir (Smirnov 1964).

Teorem 2.8: H sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı ve $D(A) \subset H$ olmak üzere $A: D(A) \to H$ saf ayrık spektruma sahip olan kendine eş alttan yarı sınırlı bir operatör olsun. Eğer $B: H \to H$ kendine eş bir operatör ise $A + B: D(A) \to H$ operatörü de saf ayrık spektruma sahiptir.

İspat: A operatörü saf ayrık spektruma sahip olduğundan $A - \|B\|I$ operatörü de saf ayrık spektruma sahiptir. A operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$$

olsun. O halde $A - \|B\|I$ operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_1 - \|B\| \leq \lambda_2 - \|B\| \leq \ldots \leq \lambda_n - \|B\| \leq \ldots$$

dir. A+B ve $A-\|B\|I$ alttan yarısınırlı kendine eş operatörlerdir. Her $\alpha \in (-\infty,\infty)$ sayısı için $A-\|B\|I$ operatörünün spektrumunun $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan kısmı ayrıktır. Öte yandan

$$A+B \geq A-\|B\|I$$

olduğundan Teorem 2.7 gereğince her $\alpha \in (-\infty,\infty)$ sayısı için A+B operatörünün de spektrumunun $(-\infty,\alpha)$ aralığına ait olan kısmı ayrıktır. Dolayısıyla A+B operatörünün spektrumu sadece her birinin katlılığı sonlu olan

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots$$

özdeğerlerinden ibarettir. Ayrıca Teorem 2.7 gereğince

$$\mu_n \geq \lambda_n - \|B\|,\ (n=1,2,\ldots) \qquad (2.23)$$

dir. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n - \|B\|)=\infty$ olduğundan (2.23) den $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty$ elde edilir. Sonuç olarak $A+B:D(A)\to H$ operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. ■

Teorem 2.9: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $A:H\to H$ kendine eş bir operatör olsun. A operatörünün,

1. Özvektörlerinden oluşan tam ortonormal bir küme var,
2. Sıfırdan farklı her özdeğerinin katlılığı sonlu,
3. Her $\varepsilon>0$ için $[-\varepsilon,\varepsilon]$ aralığına ait olmayan özdeğerlerlerin sayısı sonlu

ise A operatörü tam süreklidir (Smirnov, 1969).

Tanım 2.12: H bir Hilbert uzayı ve $D(A)\subset H$ olmak üzere $A:D(A)\to H$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x,y\in D(A)$ için

$$(Ax,y)=(x,Ay)$$

ise A ya ermit operatör denir.

Teorem 2.10: Ermit tam sürekli bir operatörün spektrumunun sıfırdan farklı noktaları her birinin katlılığı sonlu olan özdeğerlerden ibarettir ve bu özdeğerler kümesi sadece sıfır yığılma noktasına sahip olabilir. Karşıt olarak bu özelliklere sahip olan her ermit operatör tam süreklidir (Naimark, 1968).

3. YÜKSEK MERTEBEDEN SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMUNUN İNCELENMESİ VE DÜZENLİ İZİNİN HESAPLANMASI

3.1 2m Mertebeden Sınırsız Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel İfade İle Oluşturulan Kendine Eş Operatör Ve Bu Operatörün Spektrumu

Bu kısımda 2m mertebeden sınırsız operatör katsayılı bir diferansiyel ifade ve belirli sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş bir operatör tanımlanmış ve bu operatörün spektrumu incelenmiştir.

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$\ell_0(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x) \tag{3.1}$$

diferansiyel ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadede A, $D(A) \subset H$ olmak üzere $D(A)$ dan H ye

$$A = A^* \geq I, \; A^{-1} \in \sigma_\infty(H) \tag{3.2}$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq ...$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri de sırasıyla $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

$D(L_0')$ ile H_1 uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonları kümesini gösterelim:

1) $y(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre 2m. mertebeden sürekli türeve sahiptir.

2) Her $x \in [0,\pi]$ için $y(x) \in D(A)$ ve $Ay(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre süreklidir.

3) $y^{(2i-1)}(0) = y^{(2i-1)}(\pi) = 0 \; (i = 1,2,..,m)$

$D(L_0')$ H_1 uzayının bir lineer manifoldudur. $D(L_0')$ dan H_1 e

$$L_0' y = \ell_0(y)$$

lineer operatörünü göz önüne alalım.

$$k^{2m}+\gamma_j \quad (k=0,1,2,... \quad ; j=1,2,...) \tag{3.3}$$

L_0' operatörünün özdeğerleri ve

$$M_k=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & ,k=0 \quad \text{ise} \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & ,k=1,2,.....\text{ise}\end{cases} \tag{3.4}$$

olmak üzere

$$M_k \cos kx.\varphi_j \quad (k=0,1,2,... \quad ; j=1,2,...) \tag{3.5}$$

sırasıyla (3.3) özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleridir. Gerçekten $\cos kx.\varphi_j \in D(L_0')$ $(k=0,1,2,...; j=1,2,...)$ ve

$$L_0'(\cos kx.\varphi_j)=(-1)^m(\cos kx.\varphi_j)^{(2m)}+A(\cos kx.\varphi_j)=$$
$$(-1)^m(\cos kx)^{(2m)}\varphi_j+\cos kx.\gamma_j\varphi_j=k^{2m}\cos kx.\varphi_j+\gamma_j\cos kx.\varphi_j=(k^{2m}+\gamma_j)(\cos kx.\varphi_j)$$

dir.

Teorem 3.1.1: $\{f_k(x)\}_1^\infty$ $L_2[0,\pi]$ uzayında ve $\{e_j\}_1^\infty$ H uzayında herhangi tam diziler ise $\{f_k(x)e_j\}_{k,j=1}^\infty$ kümesi H_1 uzayında tamdır.

İspat. y=y(x) H_1 uzayının

$$y(x)\perp\{f_k(x)e_j\}_{k,j=1}^\infty$$

koşulunu sağlayan herhangi bir elemanı olsun. Her $k,j\in N$ için

$$\int_0^\pi (f_k(x)e_j, y(x))dx=0$$

ya da

$$\int_0^{\pi}(e_j, y(x))f_k(x)dx = 0, \quad (k = 1,2,... \; ; j = 1,2,...) \tag{3.6}$$

dır. $\{f_k(x)\}_1^{\infty}$ $L_2[0,\pi]$ de tam dizi olduğundan (3.6) dan $L_2[0,\pi]$ uzayının fonksiyonları olarak

$$(e_j, y(x)) = 0 \quad (j = 1,2,...)$$

elde edilir. Dolayısıyla $[0,\pi]$ aralığında hhhy $(y(x), e_j) = 0$ dır.

$E_j = \{x \in [0,\pi] : (y(x), e_j) \neq 0\}$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ olsun. $mE_j = 0$, $(j = 1,2,...)$ olduğundan

$$0 \le mE \le \sum_{j=1}^{\infty} mE_j = 0$$

dır. Buradan mE=0 bulunur.

Her $x \in [0,\pi] \setminus E$ için

$$(y(x), e_j) = 0, \quad (j = 1,2,...) \tag{3.7}$$

dir. $\{e_j\}_1^{\infty}$ H de tam dizi olduğundan (3.7) den her $x \in [0,\pi] \setminus E$ için y(x)=0 bulunur. Böylece $[0,\pi]$ aralığında hhhy $y(x) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\|y\|_{H_1}^2 = \int_0^{\pi}\|y(x)\|^2 dx = 0$$

ya da y=0 dır. Görüldüğü gibi H_1 uzayının $\{f_k(x)e_j\}_{k,j=1}^{\infty}$ kümesine ortogonal olan sıfırdan farklı bir elemanı yoktur. Bu durumda $\{f_k(x)e_j\}_{k,j=1}^{\infty}$ kümesinin H_1 de tam olduğu bilinmektedir. ∎

Teorem 3.1.2: L_0' operatörü simetriktir.

İspat: $\{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos kx, ...\}$ kümesi $L_2[0,\pi]$ uzayında tamdır. Öte yandan $A^{-1} : H \to H$ tam sürekli kendine eş bir operatör olduğundan $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_j, ...\}$ kümesi H de tamdır. O halde Teorem 3.1.1 gereğince $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty \;\; \infty}$ kümesi H_1 uzayında tamdır. Yani

$\text{span}\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty}$ kümesi H_1 de yoğundur. $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty} \subset D(L_0')$ olduğundan $\text{span}\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty} \subset D(L_0')$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{D(L_0')} = H_1 \tag{3.8}$$

dır. y=y(x) ve z=z(x) $D(L_0')$ lineer manifoldunun herhangi iki elemanı olsun. $y^{(i)}(x)$ ve $z^{(i)}(x)$ (i=1,2,…,2m) fonksiyonlarının $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre sürekli olmalarından ve iç çarpımın sürekli fonksiyon olmasından yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left(y^{(2m)}(x), z(x)\right)dx \\
&= \left(y^{(2m-1)}(x), z(x)\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(y^{(2m-1)}(x), z'(x)\right)dx \\
&= -\int_0^\pi \left(y^{(2m-1)}(x), z'(x)\right)dx \\
&= -\left(y^{(2m-2)}(x), z'(x)\right)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \left(y^{(2m-2)}(x), z''(x)\right)dx \\
&= \int_0^\pi \left(y^{(2m-2)}(x), z''(x)\right)dx \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \int_0^\pi \left(y(x), z^{(2m)}(x)\right)dx
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Öte yandan $A:D(A) \to H$ kendine eş operatör olduğundan her $x \in [0,\pi]$ için

$$\left(Ay(x), z(x)\right) = \left(y(x), Az(x)\right) \tag{3.10}$$

dır. (3.9) ve (3.10) dan her $y, z \in D(L_0')$ için

$$\begin{aligned}
\left(L_0' y, z\right)_{H_1} &= \int_0^\pi \left((-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x), z(x)\right)dx \\
&= (-1)^m \int_0^\pi \left(y^{(2m)}(x), z(x)\right)dx + \int_0^\pi \left(Ay(x), z(x)\right)dx \\
&= (-1)^m \int_0^\pi \left(y(x), z^{(2m)}(x)\right)dx + \int_0^\pi \left(y(x), Az(x)\right)dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi \left(y(x), (-1)^m z^{(2m)}(x) + Az(x)\right) dx$$
$$= \left(y, L_0' z\right)_{H_1} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.8) ve (3.11) den L_0' operatörünün simetrik olduğu elde edilir. ■

L_0' operatörünün simetrik olmasından onun kapanabilir olması elde edilir. $L_0 = \overline{L_0'}$ olsun. $L_0 : D(L_0) \to H_1$ kapalı simetrik bir operatördür. Bu operatörün özvektörlerinden oluşan $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty \ \ \infty}$ kümesi tam olduğundan söz konusu operatör kendine eştir (Adıgüzelov ve Bakşi, 2004). λ, L_0 operatörünün bir özdeğeri ve y=y(x) bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olsun. Eğer $\lambda \notin \{k^{2m} + \gamma_j\}_{k=0,j=1}^{\infty \ \ \infty}$ olsaydı L_0 operatörü kendine eş olduğundan

$$y \perp \{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty \ \ \infty}$$

olurdu. Öte yandan $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty \ \ \infty}$ kümesi tam olduğundan y=0 olmalıdır. Bu çelişki $\lambda \in \{k^{2m} + \gamma_j\}_{k=0,j=1}^{\infty \ \ \infty}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla L_0 operatörünün özdeğerleri (3.3) şeklindedir. A operatörünün her γ_j özdeğerinin katlılığının sonlu olmasından L_0 operatörünün her $k^{2m} + \gamma_j$ özdeğerinin katlılığının da sonlu olduğu elde edilir.

Q(x) $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör fonksiyon olsun:

a) Her $x \in [0, \pi]$ için $Q(x) : H \to H$ sınırlı kendine eş bir operatördür.

b) Q(x) $[0, \pi]$ aralığında zayıf ölçülebilirdir. Yani her $f, g \in H$ için (Q(x)f,g) skaler fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında ölçülebilirdir.

c) $\|Q(x)\|$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında sınırlıdır.

Teorem 3.1.3: Q(x) operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyorsa her $y = y(x) \in H_1$ için $Q(x)y(x) \in H_1$ ve $Q : H_1 \to H_1$

Qy=Q(x)y(x)

operatörü sınırlı ve kendine eştir.

İspat: $\{e_i\}_1^\infty$ H de ortonormal bir taban olsun. Her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x)$ in H den H ye sürekli lineer operatör olmasından ve iç çarpımın bir sürekli fonksiyon olmasından yararlanarak her $y = y(x) \in H_1$ ve her $f \in H$ için

$$\begin{aligned}(Q(x)y(x), f) &= \left(Q(x)\left(\sum_{i=1}^{\infty} (y(x), e_i) e_i \right), f \right) = \\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} (y(x), e_i) Q(x) e_i, f \right) &= \sum_{i=1}^{\infty} (y(x), e_i)(Q(x)e_i, f)\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. $y \in H_1$ olduğundan $(y(x), e_i)$ $(i = 1,2,\dots)$ fonksiyonları ve varsayım gereği $(Q(x)e_i, f)$ $(i = 1,2,\dots)$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Dolayısıyla $(y(x), e_i)(Q(x)e_i, f)$ $(i = 1,2,\dots)$ fonksiyonları ölçülebilirdir. O halde (3.12) den $(Q(x)y(x), f)$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğu elde edilir.

$\|Q(x)\|$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sınırlı olduğundan $\|Q(x)\| < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. O halde her $y = y(x) \in H_1$ için

$$\int_0^\pi \|Q(x)y(x)\|^2 dx \le \int_0^\pi \|Q(x)\|^2 \|y(x)\|^2 dx \le c^2 \|y\|_{H_1}^2 \tag{3.13}$$

dır. Buradan her $y = y(x) \in H_1$ için $Q(x)y(x) \in H_1$ elde edilir. Ayrıca (3.13) den her $y \in H_1$ için

$$\|Qy\|_{H_1}^2 \le c^2 \|y\|_{H_1}^2 \text{ ya da } \|Qy\|_{H_1} \le c\ \|y\|_{H_1}$$

elde edilir. Yani $Q : H_1 \to H_1$ operatörü sınırlıdır. Her $y, z \in H_1$ için

$$(Qy, z)_{H_1} = \int_0^\pi (Q(x)y(x), z(x))dx = \int_0^\pi (y(x), Q(x)z(x))dx = (y, Qz)_{H_1}$$

olduğundan $Q : H_1 \to H_1$ operatörü kendine eştir.■

$Q(x)$ a), b) ve c) koşullarını sağlayan bir operatör fonksiyon olmak üzere $L : D(L_0) \to H_1$

$$L = L_0 + Q$$

lineer operatörünü göz önüne alalım.

L ye $H_1 = L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$\ell(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(2i-1)}(0) = y^{(2i-1)}(\pi) = 0 \quad (i = 1,2,..,m)$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş operatör diyeceğiz.

Teorem 3.1.3 den L nin kendine eş bir operatör olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.4: Her $y \in D(L_0)$ için

$$(L_0 y, y)_{H_1} \geq (y,y)_{H_1}$$

dir.

İspat: L_0, simetrik L_0' operatörünün kapanışı olduğundan tanım gereği her $y \in D(L_0)$ için

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y, \qquad \lim_{n\to\infty} L_0' y_n = L_0 y \tag{3.14}$$

olacak şekilde bir $\{y_n\}_1^\infty \subset D(L_0')$ dizisi vardır. Her y_n için

$$\left(L_0' y_n, y_n\right)_{H_1} = \int_0^\pi \left((-1)^m y_n^{(2m)}(x) + Ay_n(x), y_n(x)\right)dx$$

$$= (-1)^m \int_0^\pi \left(y_n^{(2m)}(x), y_n(x)\right)dx + \int_0^\pi \left(Ay_n(x), y_n(x)\right)dx$$

$$= (-1)^m \left[\left(y_n^{(2m-1)}(x), y_n(x)\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi y_n^{(2m-1)}(x), y_n'(x)dx\right] + \int_0^\pi \left(Ay_n(x), y_n(x)\right)dx$$

$$= (-1)^{m+1} \int_0^\pi \left(y_n^{(2m-1)}(x), y_n'(x)\right)dx + \int_0^\pi \left(Ay_n(x), y_n(x)\right)dx$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\left(y_n^{(2m-2)}(x), y_n'(x)\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(y_n^{(2m-2)}(x), y_n''(x)\right)dx\right]$$

$$+ \int_0^\pi \left(Ay_n(x), y_n(x)\right)dx$$

$$= (-1)^{m+2} \int_0^{\pi} \left(y_n^{(2m-2)}(x), y_n''(x) \right) dx + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{3.15}$$

$$= (-1)^{2m} \int_0^{\pi} \left(y_n^{(m)}(x), y_n^{(m)}(x) \right) dx + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

dir. $(Ay_n(x), y_n(x)) \geq (y_n(x), y_n(x))$ olduğu göz önüne alınırsa (3.15) ten

$$\left(L_0' y_n, y_n \right)_{H_1} \geq \int_0^{\pi} (y_n(x), y_n(x)) dx = (y_n, y_n)_{H_1}$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) ten

$$\lim_{n \to \infty} (L_0' y_n, y_n)_{H_1} \geq \lim_{n \to \infty} (y_n, y_n)_{H_1}$$

ya da

$$(L_0 y, y)_{H_1} \geq (y, y)_{H_1}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.5 ve Teorem 3.1.4 ten

$$(-\infty, 1) \subset \rho(L_0)$$

bulunur. Ayrıca her $y \in D(L_0) = D(L)$ için

$$(Ly, y)_{H_1} = ((L_0 + Q)y, y)_{H_1} = (L_0 y, y)_{H_1} + (Qy, y)_{H_1}$$
$$\geq (y, y)_{H_1} - \left| (Qy, y)_{H_1} \right| \geq (y, y)_{H_1} - \|Qy\|_{H_1} \|y\|_{H_1}$$
$$\geq (y, y)_{H_1} - \|Q\|_{H_1} \|y\|_{H_1}^2 = \left(1 - \|Q\|_{H_1}\right)(y, y)_{H_1}$$

olduğundan

$$\left(-\infty, 1 - \|Q\|_{H_1}\right) \subset \rho(L)$$

dır.

L_0 ve L operatörlerinin rezolventleri sırasıyla R_λ^0 ve R_λ olsun.

$$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1}, \; R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$$

dır. L_0 operatörünün özdeğerleri $\mu_1 \le \mu_2 \le ... \le \mu_n \le ...$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. L_0 operatörünün özdeğerleri (3.3) şeklinde ve $\lim_{j\to\infty}\gamma_j = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \infty$ dır. Dolayısıyla her $\mu \in \rho(L_0)$ için R_μ^0 operatörünün $\left\{\frac{1}{\mu_n - \mu}\right\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerler dizisinin limiti sıfırdır. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n - \mu} = 0 \quad (\mu \in \rho(L_0))$$

dır. Ayrıca her $\frac{1}{\mu_n - \mu}$ özdeğerinin katlılığı sonludur. Her $\mu \in \rho(L_0) \cap R$ için $R_\mu^0 : H_1 \to H_1$ sınırlı kendine eş operatördür. Bu operatörün özvektörlerinin $\{M_k \cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \infty}$ kümesi tam ortonormal bir kümedir. O halde Teorem 2.9 gereğince R_μ^0 operatörü tam süreklidir.

$$R_\lambda^0 - R_\mu^0 = (\lambda - \mu)R_\lambda^0 R_\mu^0$$

formülünden her $\lambda \in \rho(L_0)$ için R_λ^0 operatörünün tam sürekli olduğu elde edilir. $R_0^0 = L_0^{-1} : H_1 \to H_1$ operatörünün spektrumu

$$\{0, \mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, ..., \mu_n^{-1}, ...\}$$

kümesidir. O halde Teorem 2.6 gereğince L_0 operatörünün spektrumu her birinin katlılığı sonlu olan

$$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...$$

özdeğerlerinden ibarettir. Öte yandan $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \infty$ olduğundan L_0 operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. Teorem 3.1.3 gereğince $Q : H_1 \to H_1$ sınırlı kendine eş bir operatördür. O halde teorem 2.8 den dolayı $L = L_0 + Q : D(L) \to H_1$ operatörü de saf ayrık spektruma sahip olacaktır.

L operatörünün özdeğerleri $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ...$ olsun. Her $\mu \in \rho(L)$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n - \mu} = 0$$

olduğundan Teorem 2.6 gereğince $R_\mu = (L - \mu I)^{-1}$ operatörünün spektrumu

$$\left\{0, \frac{1}{\lambda_1 - \mu}, \frac{1}{\lambda_2 - \mu}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \mu}, \dots\right\}$$

kümesidir. Burada her $(\lambda_n - \mu)^{-1}$ sayısı R_μ operatörünün katlılığı sonlu olan bir özdeğeridir. O halde Teorem 2.10 gereğince her $\mu \in \rho(L) \cap R$ sayısı için sınırlı kendine eş $R_\mu : H_1 \to H_1$ operatörü tam sürekli,

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$$

formülünden her $\lambda \in \rho(L)$ sayısı için R_λ operatörünün tam sürekli operatör olduğu elde edilir.

3.2 Özdeğerler İçin Asimtotik Formül

Bu kısımda L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri için asimtotik formül bulunacaktır. L_0 operatörünün bir λ pozitif sayısından büyük olmayan özdeğerlerinin sayısını $N(\lambda)$ ile gösterelim

Teorem 3.2.1: $\gamma_j = a.j^\alpha \ (0 < a, \alpha < \infty)$ ise

$$b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\cos t)^{\frac{1}{m} + 1} dt$$ olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken

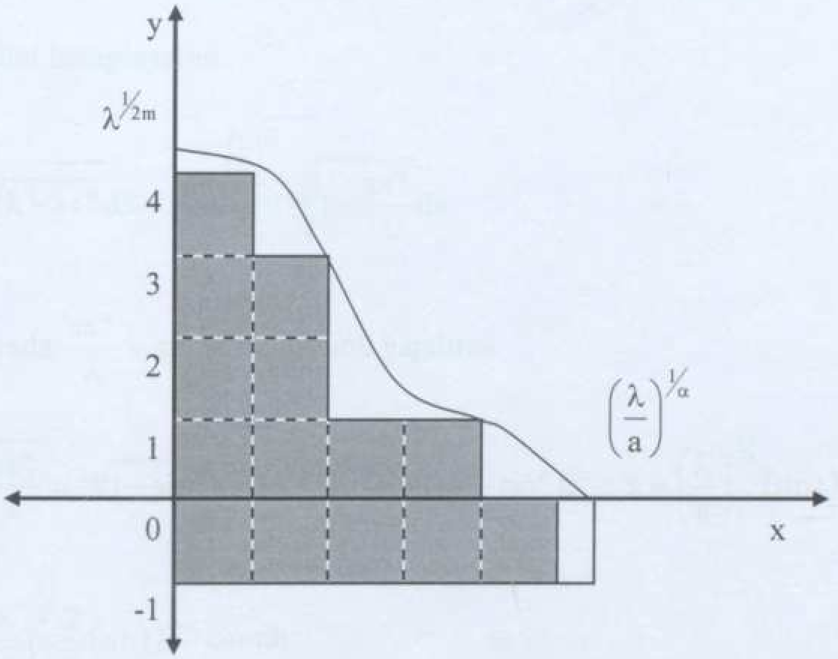
$$N(\lambda) \sim \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}} . \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}$$

dir.

İspat: $N(\lambda)$

$$aj^\alpha + k^{2m} \le \lambda, (j = 1,2,\dots \quad ; k = 0,1,2,\dots)$$

eşitsizliğini sağlayan (j,k) ikililerinin sayısıdır. (x,y) düzleminin $x = 0, x = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}$, $y = -1$ doğruları ve $ax^\alpha + y^{2m} = \lambda \ (x \ge 0, y \ge 0)$ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı alt kümesini F_λ ile gösterelim. $N(\lambda)$, F_λ kümesine ait olan (j,k) $(j=1,2,\ldots \quad ;k=0,1,2,\ldots)$ noktalarının sayısıdır. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1 F_λ kümesinin alt kümeleri olan $E_{j,k}$ kareleri

Öte yandan

$$y=\left(\lambda-ax^{\alpha}\right)^{1/2m},\left(0\le x\le\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}\right)$$

fonksiyonu azalan olduğundan her $(j,k)\in F_\lambda$ noktasına, köşeleri $(j-1,k-1)$, $(j-1,k)$, $(j,k-1)$, ve (j,k) olan $E_{j,k}\subset F_\lambda$ karesi karşılık gelir. Dolayısıyla $N(\lambda)$, $E_{j,k}$ $((j,k)\in F_\lambda)$ karelerinin sayısıdır. Yani $N(\lambda)$, $E_{j,k}\subset F_\lambda$ $(j=1,2,\ldots \quad ;k=0,1,2,\ldots)$ karelerinin alanlarının toplamıdır. Bu nedenle $N(\lambda)$, F_λ nın alanından büyük değildir. Yani

$$N(\lambda) \leq \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} + \int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx$$

dır. Bu eşitsizlikte yer alan

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx$$

integralini hesaplayalım.

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx = \sqrt[2m]{\lambda} \int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{1 - \frac{ax^\alpha}{\lambda}}\,dx$$

dır. Burada $\frac{ax^\alpha}{\lambda} = \sin^2 t$ dönüşümü yapılırsa

$$\sqrt[2m]{1 - \frac{ax^\alpha}{\lambda}} = \sqrt[2m]{1 - \sin^2 t} = (\cos t)^{\frac{1}{m}}, \quad x^\alpha = \frac{\lambda}{a}\sin^2 t, \quad x = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} (\sin t)^{2/\alpha} \tag{3.16}$$

$$dx = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{2}{\alpha} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} \cos t\,dt \tag{3.17}$$

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} \frac{2}{\alpha} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^{1+\frac{1}{m}}\,dt \tag{3.18}$$

bulunur. (3.16), (3.17) ve (3.18) den

$$N(\lambda) \leq \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} + \frac{2}{\alpha a^{1/\alpha}} \lambda^{\frac{1}{2m}+\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^{1+\frac{1}{m}}\,dt \tag{3.19}$$

elde edilir.

$$b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^{1+\frac{1}{m}}\,dt \tag{3.20}$$

alınırsa (3.19) eşitsizliği

$$N(\lambda) \le \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} + \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}} \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.21}$$

şeklinde yazılır.

(x, y) düzleminin $x = 0$, $y = 0$ doğruları ve $a(x+1)^\alpha + (y+1)^{2m} = \lambda$ $(x \ge 0, y \ge 0)$ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı alt kümesini D_λ ile gösterelim. $E_{j,k} \subset F_\lambda$ $(j = 1,2,... \quad ; k = 0,1,2,...)$ kareleri D_λ kümesini örtüyor. Öte yandan $N(\lambda)$ nın söz konusu karelerin alanlarının toplamı olduğu hatırlanırsa $N(\lambda)$ nın D_λ nın alanından küçük olmayacağı ortaya çıkar. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} N(\lambda) &\ge \int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \left[\sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha} - 1\right] dx = \\ &= \int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha}\, dx - \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha} + 1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

dır. Burada $x + 1 = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha}\, dx = \int_1^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\, dt = \\ &\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\, dt - \int_0^1 \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\, dt - \int_{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}}^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\, dt = \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.18) ve (3.20) den

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\, dt = \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}} \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.24}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_0^1 \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\, dt < \lambda^{1/2m} \tag{3.25}$$

$$\int_{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}}^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^{\alpha}}\,dt < \left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} - \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}\right].\sqrt[2m]{\lambda - a\left[\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha}} < \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} - \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha} \tag{3.26}$$

dır. (3.23), (3.24), (3.25) ve (3.26) dan

$$\int_{0}^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^{\alpha}}\,dx > \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} - \lambda^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.22) ve (3.27) den

$$N(\lambda) > \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \lambda^{\frac{1}{2m}} \tag{3.28}$$

bulunur. (3.21) ve (3.28) den $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2.2: $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(0 < a, \alpha < \infty)$ ise $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}$$

dır.

İspat: $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. O zaman $j > M$ iken

$$1 - \varepsilon < \frac{\gamma_j}{aj^{\alpha}} < 1 + \varepsilon$$

ya da

$$(1-\varepsilon)aj^{\alpha} < \gamma_j < (1+\varepsilon)aj^{\alpha} \qquad (\forall j > M)$$

olacak şekilde $M = M(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

$$\gamma_j^{(1)} = \begin{cases} \gamma_j & , j \le M \\ (1-\varepsilon)aj^{\alpha} & , j > M \end{cases}$$

$$\gamma_j^{(2)} = \begin{cases} \gamma_j & , j \le M \\ (1+\varepsilon)aj^{\alpha} & , j > M \end{cases}$$

olsun.

$$\begin{array}{ll}
\gamma_j^{(1)} + k^{2m} \le \lambda & (j = 1,2,\ldots\ldots \quad ; k = 0,1,2,\ldots) \\
\gamma_j^{(2)} + k^{2m} \le \lambda & (j = 1,2,\ldots\ldots \quad ; k = 0,1,2,\ldots) \\
\gamma_j + k^{2m} \le \lambda & (j = 1,2,\ldots.M \quad ; k = 0,1,2,\ldots) \\
(1-\varepsilon)aj^{\alpha} + k^{2m} \le \lambda & (j = 1,2,\ldots\ldots \quad ; k = 0,1,2,\ldots) \\
(1+\varepsilon)aj^{\alpha} + k^{2m} \le \lambda & (j = 1,2,\ldots\ldots \quad ; k = 0,1,2,\ldots) \\
(1+\varepsilon)aj^{\alpha} + k^{2m} \le \lambda & (j = 1,2,\ldots.M \quad ; k = 0,1,2,\ldots) \\
(1+\varepsilon)aj^{\alpha} + k^{2m} \le \lambda & (j = M+1, M+2,\ldots \quad ; k = 0,1,2,\ldots)
\end{array}$$

eşitsizliklerini sağlayan (j,k) ikililerinin sayısı sırasıyla $N_1(\lambda)$, $N_2(\lambda)$, $N_3(\lambda)$, $N_4(\lambda)$, $N_5(\lambda)$, $N_6(\lambda)$, $N_7(\lambda)$ olsun. $\gamma_j^{(1)} \le \gamma_j \le \gamma_j^{(2)}$ $(j = 1,2,\ldots)$ olduğundan

$$N_2(\lambda) \le N(\lambda) \le N_1(\lambda) \tag{3.29}$$

dır. Ayrıca

$$N_1(\lambda) \le N_3(\lambda) + N_4(\lambda) \tag{3.30}$$

$$N_3(\lambda) \le 2M\lambda^{\frac{1}{2m}} \tag{3.31}$$

dır. (3.21) eşitsizliğinden yararlanarak

$$N_4(\lambda) \le \frac{2b}{\alpha[(1-\varepsilon)a]^{\frac{1}{\alpha}}} . \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} + \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.29) (3.30) (3.31) ve (3.32) ten

$$N(\lambda) \le \frac{2b}{\alpha[(1-\varepsilon)a]^{\frac{1}{\alpha}}} . \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} + \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2M.\lambda^{\frac{1}{2m}} \tag{3.33}$$

bulunur.

$$N_2(\lambda)=N_3(\lambda)+N_7(\lambda)\geq N_7(\lambda)=N_5(\lambda)-N_6(\lambda) \tag{3.34}$$

ve

$$N_6(\lambda)\leq 2M.\lambda^{1/2m} \tag{3.35}$$

dır. Öte yandan (3.28) eşitsizliğinden yararlanarak

$$N_5(\lambda)\geq \frac{2b}{\alpha[a(1+\varepsilon)]^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}-\left(\frac{\lambda}{a(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-\lambda^{1/2m} \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.29), (3.34), (3.35) ve (3.36) dan

$$N(\lambda)\geq \frac{2b}{\alpha[(1+\varepsilon)a]^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}-\left(\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-(2M+1)\lambda^{1/2m} \tag{3.37}$$

bulunur. (3.33) ve (3.37) den

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}+\frac{\alpha}{2b(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}.\lambda^{-\frac{1}{2m}}+\frac{\alpha M a^{1/\alpha}}{b}.\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/\alpha}}-\frac{\alpha}{2b(1+\varepsilon)^{1/\alpha}}.\lambda^{-\frac{1}{2m}}-\frac{2\alpha M a^{1/\alpha}}{b}.\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$$

elde edilir. Son iki eşitsizlikten

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}+\varepsilon \qquad (\forall\lambda>M_1) \tag{3.38}$$

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/\alpha}}-\varepsilon \qquad (\forall\lambda>M_1) \tag{3.39}$$

olacak şekilde bir $M_1=M_1(\varepsilon)$ pozitif sayısının var olduğu görülmektedir. Öte yandan

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/\alpha}}=1$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.38) ve (3.39) dan

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\dfrac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=1$$

ya da

$$N(\lambda)\sim\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.40}$$

bulunur. ■

Teorem 3.2.3: $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b), ve c) koşullarını sağlıyor ve $j\to\infty$ iken $\gamma_j\sim aj^{\alpha}$ $(0<a,\alpha<\infty)$ ise

$$d=\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \quad \text{ve } b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1}(\cos t)^{1+\frac{1}{m}}dt \text{ olmak üzere}$$

$n\to\infty$ iken

$$\lambda_n\sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır.

İspat: L_0 operatörünün bir μ_n özdeğerinin katlılığı p_n olsun. O taktirde

$$\mu_{q_n}<\mu_{q_n+1}=\mu_{q_n+2}=\ldots=\mu_{q_n+p_n}=\mu_n<\mu_{q_n+p_n+1}$$

$$q_n+1\le n\le q_n+p_n \tag{3.41}$$

olacak şekilde bir q_n doğal sayısı vardır.

$$N(\mu_n)=q_n+p_n\sim c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.42}$$

dır. Burada $c=\dfrac{2b}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}$ dır. Öte yandan μ_n özdeğerinin p_n katlılığı

$$\gamma_j+k^{2m}=\mu_n \quad (j=1,2,\ldots\ldots \quad ;k=0,1,2,\ldots)$$

denklemini sağlayan (j,k) $(j=1,2,......\quad ;k=0,1,2,...)$ ikililerinin sayısıdır. Dolayısıyla

$$p_n < \mu_n^{1/2m} + 1 \leq 2\mu_n^{1/2m}$$

dır. Bu bağıntıdan

$$0 < \frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \leq 2\mu_n^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.43}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ olduğundan (3.43) den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = 0 \tag{3.44}$$

bulunur. (3.42) ve (3.44) den

$$\frac{q_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = \frac{N(\mu_n) - p_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{N(\mu_n)}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} - \frac{1}{c}.\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = 1 \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.41) den ve $N(\mu_n) = q_n + p_n$ eşitliğinden

$$\frac{q_n + 1}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \leq \frac{n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \leq \frac{q_n + p_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = \frac{N(\mu_n)}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \tag{3.46}$$

bulunur. (3.42), (3.45) ve (3.46) dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = 1$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}{n/c} = 1$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{\left(c^{-1}n\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}}=1$$

bulunur. Böylece $n\to\infty$ iken

$$\mu_n \sim c^{-\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır. $c=\dfrac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}$ olduğundan

$$c^{-\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}=\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır. Dolayısıyla $n\to\infty$ iken

$$\mu_n \sim \left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

ya da

$$d=\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

olmak üzere

$$\mu_n \sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \qquad (3.47)$$

elde edilir.

Bu kez $L=L_0+Q$ operatörünün $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\le\ldots$ özdeğerleri için asimtotik formül bulalım. $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b), c) koşullarını sağlıyorsa Teorem 3.1.3 den dolayı $Q:H_1\to H_1$ sınırlı ve kendine eş operatördür. Dolayısıyla her $y\in H_1$ için

$$\left|(Qy,y)_{H_1}\right|\le\|Qy\|_{H_1}\|y\|_{H_1}\le\|Q\|_{H_1}\|y\|_{H_1}^2$$

ya da

$$-\left(\|Q\|_{H_1} y, y\right)_{H_1} \leq (Qy, y)_{H_1} \leq \left(\|Q\|_{H_1} y, y\right)_{H_1}$$

dır. Buradan

$$-\|Q\|_{H_1} I \leq Q \leq \|Q\|_{H_1} I$$

elde edilir. Bu nedenle

$$L_0 - \|Q\|_{H_1} I \leq L = L_0 + Q \leq L_0 + \|Q\|_{H_1} I$$

dır. Bu durumda

$$\mu_n - \|Q\|_{H_1} \leq \lambda_n \leq \mu_n + \|Q\|_{H_1} \tag{3.48}$$

olduğu bilinmektedir (Smirnov, 1964). Buradan

$$1 - \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n} \leq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \leq 1 + \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n}$$

bulunur. Bu bağıntıdan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.47) ve (3.49) dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\mu_n} \cdot \frac{\mu_n}{dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} \right) = 1$$

ya da $n \to \infty$ iken

$$\lambda_n \sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \tag{3.50}$$

bulunur. ■

3.3 Özdeğerler Dizisinin Özel Alt Dizileri Ve Düzenli İzin Tanımlanması

Bu kısımda L_0 operatörünün $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ özdeğerler dizisinin belirli bir eşitsizliği sağlayan özel alt dizilerinin var olduğu gösterilmiş ve bundan yararlanarak L operatörünün düzenli izi tanımlanmıştır.

Teorem 3.3.1: $\{a_n\}$ limiti $+\infty$ olan herhangi bir reel sayı dizisi ise bu dizinin

$$a_q > a_{n_p},\ (q = n_p + 1, n_p + 2, \ldots)$$

koşulunu sağlayan bir $\{a_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

İspat: Önce $\min\{a_n\}$ nin var olduğunu yani her $n \in N$ için $a_n \geq a_{j_0}$ olacak şekilde bir $j_0 \in N$ sayısının var olduğunu gösterelim. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğundan $\{a_n\}$ dizisinin bir $a_{j_1} > 0$ elemanı vardır. Ayrıca her $n > N$ için

$$a_n > a_{j_1}$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Buradan görülüyor ki $\{a_n\}$ dizisinin a_{j_1} den büyük olmayan elemanlarının sayısı sonludur. Bu sonlu sayıda elemanlardan en küçük olan bir tanesi a_{j_0} olsun:

$$\min\{a_n : a_n \leq a_{j_1}\} = a_{j_0}$$

Eğer $a_n \leq a_{j_1}$ ise $a_n \geq a_{j_0}$ dır. $a_n > a_{j_1}$ ise $a_{j_1} \geq a_{j_0}$ olduğundan $a_n > a_{j_0}$ dır. Dolayısıyla $\min\{a_n\}$ vardır ve $\min\{a_n\} = a_{j_0}$ dır. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki ispattan $\{a_n\}$ dizisinin

$$a_{n_1} = \min\{a_1, a_2, \ldots\} \text{ ve } a_q > a_{n_1} \quad (q = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots)$$

$$a_{n_2} = \min\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\} \text{ ve } a_q > a_{n_2} \quad (q = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots)$$

....

$$a_{n_p} = \min\{a_{n_{p-1}+1}, a_{n_{p-1}+2}, \ldots\} \text{ ve } a_q > a_{n_p} \quad (q = n_p + 1, n_p + 2, \ldots)$$

....

koşullarını sağlayan bir $\{a_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ alt dizisinin varlığı elde edilir. ■

Teorem 3.3.2: $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim a.j^{\alpha}$ $(a, \alpha > 0)$ ise bir d_0 pozitif sabiti için $\{\mu_n\}$ dizisinin

$$\mu_q - \mu_{n_p} > d_0\left(q^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} - n_p^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}\right), \ (q = n_p + 1, n_p + 2, ...) \tag{3.51}$$

olacak şekilde bir $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

İspat: (3.47) formülünden

$$\lim_{q \to \infty} \frac{\mu_q}{q^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} = d \qquad , d > 0$$

dir. Buradan her $q \geq j_0$ için

$$\frac{\mu_n}{n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} > \frac{d}{2}$$

olacak şekilde bir $j_0 \in N$ sayısının varlığı elde edilir. Dolayısıyla

$$a_n = \mu_n - \frac{d}{4} n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} > \frac{d}{4} n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \ , \ (n = j_0, j_0 + 1, ...)$$

dir. Görüldüğü gibi $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ dur. O halde Teorem 3.3.1 den dolayı $\{a_n\}$ dizisinin

$$a_q > a_{n_p}, \ (q = n_p + 1, n_p + 2, ...)$$

ya da

$$\mu_q - \frac{d}{4} q^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} > \mu_{n_p} - \frac{d}{4} n_p^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \ , \ (q = n_p + 1, n_p + 2, ...)$$

olacak şekilde bir $\{a_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Son eşitsizlikten

$$\mu_q - \mu_{n_p} > d_0\left(q^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} - n_p^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}\right), \ (q = n_p + 1, n_p + 2, ...)$$

bulunur. Burada $d_0 = \dfrac{d}{4}$ tür. ■

L_0 operatörünün özdeğerleri

$k^{2m} + \gamma_j$, $(k = 0,1,2,... \quad ; j = 1,2,...)$

şeklinde olduğundan

$$\mu_q = k_q^{2m} + \gamma_{j_q}, \; (q = 1,2,...) \tag{3.52}$$

dir. Bu tez çalışmasında $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$, azalmayan $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin (3.51) eşitsizliğini sağlayan bir alt dizisi ve $j_1, j_2, ...$ (3.52) eşitliğini sağlayan doğal sayılar olmak üzere

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{n_p} \left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q} \right) dx \right] \tag{3.53}$$

limitinin var olduğu gösterilecek ve bu limit için bir formül bulunacaktır. Söz konusu limite L operatörünün düzenli izi diyeceğiz.

Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta} > x^{\delta} \;, \; (x > 1, \delta > 0) \tag{3.54}$$

Gerçekten

$$\frac{x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta}}{x^{\delta}} = x - \left(\frac{x-1}{x} \right)^{\delta} (x-1) > x - (x-1) = 1$$

ya da

$$x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta} > x^{\delta}$$

dır.

Teorem 3.3.3: $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim a.j^{\alpha}$ $\left(a > 0, \alpha > \dfrac{2m}{2m-1} \right)$ ise p nin büyük değerleri için

$$\lambda_{n_p} < \frac{1}{2}\left(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p} \right) < \lambda_{n_p+1}$$

dir. Burada $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ Teorem 3.3.2 yi sağlayan bir dizidir.

İspat: $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ dizisi Teorem 3.3.2 yi sağladığından

$$\mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} > d_0\left((n_p+1)^{\delta+1} - n_p^{\delta+1}\right) \tag{3.55}$$

dir. Burada

$$\delta = \frac{2m\alpha}{2m+\alpha} - 1 \tag{3.56}$$

dır. (3.54) ve (3.55) den

$$\mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} > d_0 n_p^{\delta} \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.48) den ve bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\begin{aligned} 2\lambda_{n_p+1} - (\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}) &= 2(\lambda_{n_p+1} - \mu_{n_p+1}) + \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} \\ &> d_0 n_p^{\delta} + 2(\lambda_{n_p+1} - \mu_{n_p+1}) \\ &\geq d_0 n_p^{\delta} - 2\|Q\|_{H_1} \end{aligned}$$

bulunur. $\delta > 0$ olduğundan buradan p nin büyük değerleri için

$$2\lambda_{n_p+1} - (\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}) > 0$$

veya

$$\frac{1}{2}(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}) > \lambda_{n_p+1} \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.48) ve (3.57) eşitsizliklerinden bir daha yararlanırsak p nin büyük değerleri için

$$2(\lambda_{n_p} - \mu_{n_p}) < \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p}$$

veya

$$\lambda_{n_p} < \frac{1}{2}(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}) \tag{3.59}$$

bulunur. (3.58) ve (3.59) den

$\lambda_{n_p} < \frac{1}{2}(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}) < \lambda_{n_p+1}$ elde edilir. ■

Teorem 3.3.4: $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim a.j^{\alpha}$ $\left(a > 0, \alpha > \frac{2m}{2m-1}\right)$ ise p nin büyük değerleri için

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_q - \lambda} \quad \text{ve} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_q - \lambda}$$

serileri $|\lambda| = b_p = 2^{-1}(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p})$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.3.3 gereğince p nin büyük değerleri için

$$\lambda_{n_p} < b_p < \lambda_{n_p+1} \tag{3.60}$$

dir. Öte yandan $\mu_q > 0$ olduğundan (3.48) den

$$\lambda_q > -\|Q\|_{H_1} \quad (q = 1,2,...) \tag{3.61}$$

bulunur. $\lim\limits_{p\to\infty} b_p = \infty$ olduğu dikkate alınırsa (3.60) ve (3.61) den

$$|\lambda_q| \neq b_p \quad (q = 1,2,...)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\lambda}{\lambda_q - \lambda} \quad (q = 1,2,...)$$

fonksiyonları p nin büyük değerleri için $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde tanımlıdır ve

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda_q - \lambda}\right| \leq \frac{|\lambda|}{\big||\lambda_q| - |\lambda|\big|} = \frac{b_p}{\big||\lambda_q| - b_p\big|}$$

olduğundan $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_q - \lambda}$ serisinin $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığını göstermek için

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\big||\lambda_q| - b_p\big|}$$

serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. $\lim\limits_{q\to\infty} \lambda_q = \infty$ olduğundan keyfi $q > N$ için

$$\lambda_q > 2b_p$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu nedenle $q > N$ için

$$\left\|\lambda_q\right| - b_p\right| = \lambda_q - b_p > \lambda_q - \frac{\lambda_q}{2} = \frac{\lambda_q}{2}$$

veya

$$\frac{1}{\left\|\lambda_q\right| - b_p\right|} < \frac{2}{\lambda_q} \tag{3.62}$$

dır. Ayrıca (3.50) formülüne göre keyfi $q > N$ için

$$\lambda_q > cq^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \tag{3.63}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır. (3.62) ve (3.63) den

$$\frac{1}{\left\|\lambda_q\right| - b_p\right|} < \frac{2}{cq^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} \quad (q > N) \tag{3.64}$$

bulunur. Varsayım gereği $\alpha > \dfrac{2m}{2m-1}$ dir ve dolayısıyla $\sum_{q=1}^{\infty} 2c^{-1}q^{\frac{-2m\alpha}{2m+\alpha}}$ serisi yakınsaktır. O taktirde (3.64) den

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\left\|\lambda_q\right| - b_p\right|}$$

serisinin yakınsaklığı elde edilir. Benzer şekilde $\sum_{q=1}^{\infty}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_q - \lambda}\right)$ sersinin de $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığı gösterilebilir. ■

Teorem 3.2.3 gereğince $q \to \infty$ iken

$$\lambda_q, \mu_q \sim dq^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır. Buradan görülüyor ki $\alpha > \dfrac{2m}{2m-1}$ ve $\lambda \neq \lambda_q, \mu_q$ $(q = 1,2,\ldots)$ ise

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{|\mu_q-\lambda|} \text{ ve } \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_q-\lambda|}$$

serileri yakınsak serilerdir. Dolayısıyla R_λ^0 ve R_λ operatörleri çekirdek operatörlerdir ve (2.11) ve (2.15) formüllerinden yararlanarak

$$\operatorname{tr}\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) = \operatorname{tr}R_\lambda - \operatorname{tr}R_\lambda^0 = \sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_q-\lambda} - \frac{1}{\mu_q-\lambda}\right)$$

bulunur. Bu eşitliği $\frac{\lambda}{2\pi i}$ ile çarpıp $|\lambda| = b_p = 2^{-1}\left(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}\right)$ çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda \operatorname{tr}\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\left(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_q-\lambda}\right)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\left(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\mu_q-\lambda}\right)d\lambda \tag{3.65}$$

elde edilir. Teorem 3.3.4 e göre

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_q-\lambda} \quad \text{ve} \quad \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\mu_q-\lambda}$$

serileri $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde düzgün yakınsak serilerdir. Dolayısıyla (3.65) den

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda \operatorname{tr}\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)d\lambda = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{\lambda}{\lambda_q-\lambda}d\lambda - \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{\lambda}{\mu_q-\lambda}d\lambda \tag{3.66}$$

bulunur. $\mu_{n_p} < b_p < \mu_{n_p+1}$ bağıntısından ve Teorem 3.3.3 den p nin büyük değerleri için

$$\{\lambda_q, \mu_q\}_1^{n_p} \subset B(0, b_p) = \{\lambda : |\lambda| < b_p\}$$

$$\lambda_q, \mu_q \notin B[0, b_p] = \{\lambda : |\lambda| \le b_p\} \quad (q \ge n_p + 1)$$

elde edilir.

Bu nedenle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda-\mu_q} = \begin{cases}\mu_q & ,q \le n_p \quad \text{ise}\\ 0 & ,q \ge n_p+1 \quad \text{ise}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda-\lambda_q}=\begin{cases}\lambda_q & ,q\le n_p \quad \text{ise}\\ 0 & ,q\ge n_p+1 \quad \text{ise}\end{cases}$$

olur. Bunlar (3.66) da yerine konursa

$$\sum_{q=1}^{n_p}(\lambda_q-\mu_q)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda \operatorname{tr}(R_\lambda-R_\lambda^0)d\lambda \tag{3.67}$$

bulunur. Aşağıdaki formülün sağlandığı bilinmektedir:

$$R_\lambda=R_\lambda^0-R_\lambda QR_\lambda^0 \qquad (\lambda\in\rho(L)\cap\rho(L_0))$$

Buradan $s\ge 2$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$R_\lambda-R_\lambda^0=\sum_{j=1}^{s}(-1)^j R_\lambda^0(QR_\lambda^0)^j+(-1)^{s+1}R_\lambda(QR_\lambda^0)^{s+1}$$

formülü elde edilir. Bu da (3.67) de yerine yazılırsa

$$\sum_{q=1}^{n_p}(\lambda_q-\mu_q)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda \operatorname{tr}\left[\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}R_\lambda^0(QR_\lambda^0)^j+(-1)^s R_\lambda(QR_\lambda^0)^{s+1}\right]d\lambda$$

veya

$$\sum_{q=1}^{n_p}(\lambda_q-\mu_q)=\sum_{j=1}^{s}D_{pj}+D_p^{(s)} \tag{3.68}$$

bulunur. Burada

$$D_{pj}=\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda \operatorname{tr}\left[R_\lambda^0(QR_\lambda^0)^j\right]d\lambda \qquad (j=1,2,\ldots)$$

$$D_p^{(s)}=\frac{(-1)^s}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda \operatorname{tr}\left[R_\lambda(QR_\lambda^0)^{s+1}\right]d\lambda$$

dır.

Bakşi (1999) doktora tez çalışmasındakine benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 3.3.5: $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}\left(a > 0, \alpha > \dfrac{2m}{2m-1}\right)$ ise

$$D_{pj} = \frac{(-1)^j}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_p} tr\left[(QR_\lambda^0)^j\right] d\lambda$$

dır.

L_0 operatörünün $\{\mu_q\}_{q=1}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleri sırasıyla $\{\Psi_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ olsun. L_0 operatörünün

$$k^{2m} + \gamma_j,\ (k = 0,1,2,... \quad ; j = 1,2,...)$$

özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörler sırarıyla $M_k \cos kx.\varphi_j$ olduğundan

$$\Psi_q(x) = M_{k_q} \cos k_q x.\varphi_{j_q} \qquad (q = 1,2,...) \tag{3.69}$$

dır.

Teorem 3.3.5 den

$$D_{p1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} tr(QR_\lambda^0) d\lambda \tag{3.70}$$

elde edilir. QR_λ^0 her $\lambda \in \rho(L_0)$ için bir çekirdek operatörü ve $\{\Psi_q(x)\}_1^{\infty}$ H_1 uzayının bir ortonormal tabanı olduğundan

$$tr(QR_\lambda^0) = \sum_{q=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \Psi_q, \Psi_q)_{H_1}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969). Bu ifade (3.70) de yerine yazılıp

$$R_\lambda^0 \Psi_q = (L_0 - \lambda I)^{-1} \Psi_q = (\mu_q - \lambda)^{-1} \Psi_q$$

olduğu dikkate alınırsa

$$D_{p1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \left[\sum_{q=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \Psi_q, \Psi_q)_{H_1}\right] d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\left[\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_q-\lambda}\left(Q\Psi_q,\Psi_q\right)_{H_1}\right]d\lambda$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{\infty}\left(Q\Psi_q,\Psi_q\right)_{H_1}\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu_q}$$

bulunur. (3.69) dan ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu_q}=\begin{cases}1 & ,q\le n_p \quad \text{ise}\\ 0 & ,q>n_p \quad \text{ise}\end{cases}$$

formülünden yararlanarak

$$D_{p1}=\sum_{q=1}^{n_p}\left(Q\Psi_q,\Psi_q\right)_{H_1}=\sum_{q=1}^{n_p}\int_0^{\pi}\left(Q(x)\Psi_q(x),\Psi_q(x)\right)dx=$$

$$\sum_{q=1}^{n_p}\int_0^{\pi}\left(Q(x)M_{k_q}\cos k_q x.\varphi_{j_q},M_{k_q}\cos k_q x.\varphi_{j_q}\right)dx=$$

$$\sum_{q=1}^{n_p}M_{k_q}^2\int_0^{\pi}\cos^2 k_q x\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n_p}M_{k_q}^2\int_0^{\pi}\left(1+\cos 2k_q x\right)\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx \tag{3.71}$$

elde edilir. (3.68) ve (3.71) den

$$\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{M_{k_q}^2}{2}\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n_p}M_{k_q}^2\int_0^{\pi}\cos 2k_q x\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx+\sum_{j=2}^{s}D_{pj}+D_p^{(s)} \tag{3.72}$$

bulunur. Burada $k_q\ge 0$ ve $j_q\ge 1$

$$\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\mu_q\le\ldots$$

olmak üzere

$$\mu_q=k_q^{2m}+\gamma_{j_q}$$

olacak şekilde tam sayılardır.

$Q(x)$ operatör fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

i. $Q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında 2.mertebeden zayıf türeve sahiptir ve her $f,g \in H$ için $(Q''(x)f,g)$ fonksiyonu süreklidir.

ii. Her $x \in [0,\pi]$ için $Q^{(i)}(x): H \to H$ $(i = 0,1,2)$ kendine eş çekirdek operatörlerdir ve $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ $(i = 0,1,2)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir.

Teorem 3.3.6: $Q(x)$ operatör fonksiyonu i) ve ii) koşullarını sağlıyorsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos 2kx dx\right| < \infty \text{ dır.}$$

İspat: $f_j(x) = (Q(x)\varphi_j,\varphi_j)$ olsun. Kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\int_0^{\pi} f_j(x)\cos 2kx dx = \int_0^{\pi} f_j(x)\left(\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)' dx$$

$$= \frac{1}{2k} f_j(x)\sin 2kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2k}\int_0^{\pi} f_j'(x)\sin 2kx dx$$

$$= \frac{1}{2k}\int_0^{\pi} f_j'(x)\left(\frac{1}{2k}\cos 2kx\right)' dx$$

$$= \frac{1}{4k^2} f_j'(x)\cos 2kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4k^2}\int_0^{\pi} f_j''(x)\cos 2kx dx$$

$$= \frac{1}{4k^2}\left[f_j'(\pi) - f_j'(0)\right] - \frac{1}{4k^2}\int_0^{\pi} f_j''(x)\cos 2kx dx$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\int_0^{\pi} f_j(x)\cos 2kx dx\right| \le \frac{1}{4k^2}\left[\left|f_j'(\pi)\right| + \left|f_j'(0)\right| + \int_0^{\pi}\left|f_j''(x)\right| dx\right]$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı k ya ve j ye göre 1 den ∞ a kadar toplamı alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} f_j(x)\cos 2kx dx\right| \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left|f_j'(0)\right| + \left|f_j'(\pi)\right| + \int_0^{\pi}\left|f_j''(x)\right| dx\right]\sum_{j=1}^{\infty} k^{-2} \tag{3.73}$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = c_0$ ve

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left|f_j''(x)\right|dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{n}\left|f_j''(x)\right|\right]dx \le \int_0^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j''(x)\right|\right]dx$$

dır. Bu eşitsizlik (3.73) de göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} f_j(x)\cos 2kx dx\right| \le c_0\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left|f_j'(0)\right| + \left|f_j'(\pi)\right|\right] + c_0\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j''(x)\right|\right]dx \tag{3.74}$$

dır. (2.16) eşitsizliğinden

$$\sum_{j=1}^{w}\left|f_j^{(m)}(x)\right| = \sum_{j=1}^{w}\left|\left(Q^{(m)}(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right| \le \left\|Q^{(m)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)} \qquad (m = 1,2),(1 \le w \le \infty) \tag{3.75}$$

bulunur. (3.74) ve (3.75) den

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} f_j(x)\cos 2kx dx\right| \le c_0\left[\left\|Q'(0)\right\|_{\sigma_1(H)} + \left\|Q'(\pi)\right\|_{\sigma_1(H)}\right] + c_0\int_0^{\pi}\left\|Q''(x)\right\|_{\sigma_1(H)}dx$$

elde edilir. Varsayım gereği $\left\|Q''(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir olduğundan bu son eşitsizlikten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} f_j(x)\cos 2kx dx\right| < \infty \tag{3.76}$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} f_j(x)dx\right| = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{n}\left|f_j(x)\right|\right]dx \le \int_0^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j(x)\right|\right]dx \tag{3.77}$$

dır. Q(x) operatör fonksiyonu çekirdek operatör olduğundan ve ii) koşulunu sağladığından

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j(x)\right| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right| < \left\|Q(x)\right\|_{\sigma_1(H)} \le c_1 \qquad (c_1 > 0)$$

dır. Bu eşitsizlik (3.77) de göz önüne alınırsa

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} f_j(x)dx\right| < \infty$$

elde edilir. Bu son bağıntıdan ve (3.76) dan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos 2kxdx\right| < \infty$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.3.7: $Q(x)$ operatör fonksiyonu i) ve ii) koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $\left(a > 0, \alpha > \dfrac{2m}{2m-1}\right)$ ise

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p} M_{k_q}^2 \int_0^{\pi}\cos 2k_q x(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q})dx = \frac{1}{2}[trQ(0) + trQ(\pi)] \text{ dır.}$$

İspat: Teorem 3.3.6 dan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} M_k^2 \int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos 2kxdx$$

iki kat serisinin mutlak yakınsak olduğu elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p} M_{k_q}^2 \int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q})\cos 2k_q xdx = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} M_k^2 \int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos 2kxdx \tag{3.78}$$

olduğu bilinmektedir. Öte yandan (3.4) formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} M_k^2 \int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos 2kxdx = \\
&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[M_k^2\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos kxdx + (-1)^k M_k^2 \int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos kxdx\right] = \\
&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[M_k^2\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos kxdx\right]\cos(k0) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[M_k^2\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)\cos kxdx\right]\cos(k\pi)\right\}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

dır. Bu bağıntının sonundaki k ya göre toplamlar ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olan $(Q(x)\varphi_j,\varphi_j)$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ fonksiyonlarına göre Fourier serisinin 0 ve π noktalarındaki değerleridir. Dolayısıyla (3.78) ve (3.79) dan

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p} M_{k_q}^2 \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q})\cos 2k_q x dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(Q(0)\varphi_j,\varphi_j\right)+\left(Q(\pi)\varphi_j,\varphi_j\right)\right]$$

ya da

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p} M_{k_q}^2 \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q})\cos 2k_q x dx = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}Q(0)+\mathrm{tr}Q(\pi)]$$

bulunur. ■

3.4 Düzenli İz İçin Formül

Bu kısımda L operatörünün (3.53) düzenli izi için bir formül bulacağız. Bunun için 3. Bölümün 3. kısmında ispatladığımız

$$\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{M_{k_q}^2}{2}\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n_p} M_{k_q}^2\int_0^{\pi}\cos 2k_q x(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q})dx+\sum_{j=2}^{s}D_{pj}+D_p^{(s)} \tag{3.80}$$

formülünden yararlanacağız. Burada

$$D_{pj}=\frac{(-1)^j}{2\pi ij}\int_{|\lambda|=b_p}\left[\mathrm{tr}\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda, \tag{3.81}$$

$$D_p^{(s)}=\frac{(-1)^s}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda\,\mathrm{tr}\left[R_\lambda^0\left(QR_\lambda\right)^{s+1}\right]d\lambda \tag{3.82}$$

dır. Bakşi (1999) doktora tez çalışmasında

$$D_{pj}=\frac{(-1)^j}{2\pi ij}\sum_{q_1=1}^{\infty}\sum_{q_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_j=1}^{\infty}{}^{*}\left[\left(\int_{|\lambda|=b_p}\prod_{r=1}^{j}\left(\mu_{q_r}-\lambda\right)^{-1}d\lambda\right)\prod_{r=1}^{j}\left(Q\psi_{q_r},\psi_{q_{g(r)+1}}\right)_{H_1}\right] \tag{3.83}$$

formülü ispatlanmıştır. Bu ifadedeki * işareti $\mu_{q_1},\mu_{q_2},\ldots,\mu_{q_j}$ sayıları arasında b_p den küçük ve b_p den büyük olanların var olduklarını gösterir. Ayrıca

$$g(r)=\begin{cases} r & ,r<j \text{ ise} \\ 0 & ,r=j \text{ ise}\end{cases}$$

dır. (3.83) formülünden yararlanarak D_{p2} için

$$D_{p2}=\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\left[\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)}d\lambda\right](Q\psi_j,\psi_k)_{H_1}(Q\psi_k,\psi_j)_{H_1}+$$

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=n_p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_p}\left[\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)}d\lambda\right](Q\psi_j,\psi_k)_{H_1}(Q\psi_k,\psi_j)_{H_1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\left[\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)}d\lambda\right](Q\psi_j,\psi_k)_{H_1}(Q\psi_k,\psi_j)_{H_1} \tag{3.84}$$

elde edilir. $j\le n_p$ ve $k\ge n_p+1$ için yani $\mu_j<b_p$ ve $\mu_k>b_p$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\mu_j-\mu_k)}\left[\frac{1}{\lambda-\mu_j}-\frac{1}{\lambda-\mu_k}\right]d\lambda=$$

$$\frac{1}{\mu_j-\mu_k}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{\lambda-\mu_j}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{\lambda-\mu_k}d\lambda\right]=\frac{1}{\mu_j-\mu_k} \tag{3.85}$$

dır. (3.84) ve (3.85) den

$$|D_{p2}|=\left|\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}(\mu_j-\mu_k)^{-1}(\psi_j,Q\psi_k)_{H_1}\overline{(\psi_j,Q\psi_k)_{H_1}}\right|$$

$$=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}(\mu_k-\mu_j)^{-1}\left|(\psi_j,Q\psi_k)_{H_1}\right|^2$$

$$\le\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}(\mu_k-\mu_{n_p})^{-1}\left|(\psi_j,Q\psi_k)_{H_1}\right|^2$$

$$=\left[\sum_{k=n_p+1}^{\infty}(\mu_k-\mu_{n_p})^{-1}\right]\sum_{j=1}^{\infty}\left|(Q\psi_k,\psi_j)_{H_1}\right|^2$$

elde edilir. $\{\psi_j\}\subset H_1$ tam ortonormal dizi olduğundan

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|(Q\psi_k,\psi_j)_{H_1}\right|^2=\|Q\psi_k\|_{H_1}^2\le\|Q\|_{H_1}^2$$

dır. Dolayısıyla

$$\left|D_{p2}\right| \leq \|Q\|_{H_1}^2 \Omega_p \tag{3.86}$$

dir. Burada

$$\Omega_p = \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \left(\mu_k - \mu_{n_p}\right)^{-1} \quad (p=1, 2, \ldots) \tag{3.87}$$

dir. $\alpha > \dfrac{2m}{2m-1}$ olduğunu kabul edip Ω_p yi sınırlandıralım. (3.56) formülünden ve Teorem 3.3.2. den yararlanarak

$$\begin{aligned}\Omega_p &= \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \mu_{n_p}} < \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \frac{1}{d_0\left(k^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}\right)} \\ &= \frac{1}{d_0\left(\left(n_p+1\right)^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}\right)} + \frac{1}{d_0} \sum_{k=n_p+2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}}\end{aligned} \tag{3.88}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{k=n_p+2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{n_p+i}^{n_p+i+1} \frac{dx}{\left(n_p+i+1\right)^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}}$$

ve $x \in \left[n_p + i \;, n_p + i + 1\right]$ için

$$\frac{1}{\left(n_p+i+1\right)^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}} \leq \frac{1}{x^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}}$$

olduğundan

$$\int_{n_p+i}^{n_p+i+1} \frac{dx}{\left(n_p+i+1\right)^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}} \leq \int_{n_p+i}^{n_p+i+1} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}}$$

ve

$$\sum_{k=n_p+2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{n_p+i}^{n_p+i+1} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}} = \int_{n_p+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_p{}^{1+\delta}} \tag{3.89}$$

dir. (3.88) ve (3.89) dan

$$\Omega_p < \frac{1}{d_0\left((n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}\right)} + \frac{1}{d_0}\int_{n_p+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}} \tag{3.90}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integrali sınırlandırmak için

$$x^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta} = t$$

dönüşümünü yapalım. O takdirde

$$\int_{n_p+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}} = \int_{\alpha_p}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)t}\left(t + n_p^{\,1+\delta}\right)^{-\frac{\delta}{1+\delta}} dt \tag{3.91}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha_p = (n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}$$

dır. (3.91) den

$$\int_{n_p+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}} < \frac{1}{1+\delta}\int_{\alpha_p}^{\infty} t^{-1-\frac{\delta}{1+\delta}} dt = -\frac{1}{1+\delta}\,\frac{1+\delta}{\delta}\, t^{-\frac{\delta}{1+\delta}}\Bigg|_{\alpha_p}^{\infty} = \frac{1}{\delta}\left[(n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}\right]^{-\frac{\delta}{1+\delta}} \tag{3.92}$$

bulunur. (3.90) ve (3.92) ten

$$\Omega_p < \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0\delta}\right)\left[(n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}\right]^{-\frac{\delta}{1+\delta}} \tag{3.93}$$

elde edilir. Varsayım gereği $\alpha > \dfrac{2m}{2m-1}$ yani $\delta = \dfrac{2m\alpha}{2m+\alpha} - 1 > 0$

dır. O halde (3.54) eşitsizliğinden yararlanarak

$$(n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta} > (n_p+1)^{\delta} > n_p^{\,\delta} \tag{3.94}$$

bulunur. (3.93) ve (3.94) den

$$\Omega_p < \frac{1+\delta}{d_0\delta}\, n_p^{-\frac{\delta^2}{1+\delta}} \tag{3.95}$$

elde edilir. (3.86) ve (3.95) den

$$\lim_{p\to\infty} D_{p2} = 0 \qquad \left(\alpha > \frac{2m}{2m-1}\right) \tag{3.96}$$

bulunur.

Bu kez

$$\lim_{p\to\infty} D_{p3} = 0 \tag{3.97}$$

olduğunu gösterelim. Yine (3.83) formülünden yararlanarak D_{p3} için

$$D_{p3} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}{}^{*}F(j,k,s)$$

elde edilir. Burada

$$F(j,k,s)=g(j,k,s)\left(Q\psi_j,\psi_k\right)_{H_1}\left(Q\psi_k,\psi_s\right)_{H_1}\left(Q\psi_s,\psi_j\right)_{H_1},$$

$$g(j,k,s)=\frac{1}{6\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)(\lambda-\mu_s)}d\lambda \quad \text{dır.}$$

$$\begin{aligned}
D_{p3} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n_p}{}^{*}F(j,k,s)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}{}^{*}F(j,k,s)\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=1}^{n_p}{}^{*}F(j,k,s)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n_p}{}^{*}F(j,k,s)\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}{}^{*}F(j,k,s)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}{}^{*}F(j,k,s)\\
&=\sum_{j=n_p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=1}^{n_p}F(j,k,s)+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n_p}F(j,k,s)\\
&+\sum_{j=n_p+1}^{\infty}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n_p}F(j,k,s)+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s)\\
&+\sum_{j=n_p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s)+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s)\\
&=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}\left[F(j,k,s)+F(s,k,j)+F(j,s,k)\right]\\
&+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}\left[F(j,k,s)+F(s,k,j)+F(k,j,s)\right]
\end{aligned} \tag{3.98}$$

dır. $g(j,k,s)=\overline{g(j,k,s)}$ ve $Q=Q^*$ olduğu göz önüne alınırsa

$$F(s,k,j)=g(j,k,s)\left(Q\psi_s,\psi_k\right)_{H_1}\left(Q\psi_k,\psi_j\right)_{H_1}\left(Q\psi_j,\psi_s\right)_{H_1}=\overline{F(j,k,s)} \tag{3.99}$$

$$F(k,j,s)=g(j,k,s)\left(Q\psi_k,\psi_j\right)_{H_1}\left(Q\psi_j,\psi_s\right)_{H_1}\left(Q\psi_s,\psi_k\right)_{H_1}=\overline{F(j,k,s)} \tag{3.100}$$

$$F(j,s,k)=g(j,k,s)\left(Q\psi_j,\psi_s\right)_{H_1}\left(Q\psi_s,\psi_k\right)_{H_1}\left(Q\psi_k,\psi_j\right)_{H_1}=\overline{F(j,k,s)} \tag{3.101}$$

dır. (3.98), (3.99), (3.100) ve (3.101) den

$$D_{p3}=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}\left[F(j,k,s)+2\overline{F(j,k,s)}\right]+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}\left[F(j,k,s)+2\overline{F(j,k,s)}\right]=I_1+I_2 \tag{3.102}$$

elde edilir.

$$I_{11}=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s) \tag{3.103}$$

$$I_{21}=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=n_p+1}^{\infty}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s) \tag{3.104}$$

olsun. O zaman

$$I_1=I_{11}+2\overline{I_{11}} \tag{3.105}$$

$$I_2=I_{21}+2\overline{I_{21}} \tag{3.106}$$

$$I_{11}=\sum_{\substack{j=1\\ \mu_j\neq\mu_k}}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s)+\sum_{\substack{j=1\\ \mu_j=\mu_k}}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{s=n_p+1}^{\infty}F(j,k,s) \tag{3.107}$$

dır. $\mu_j\neq\mu_k$ $(j,k\leq n_p)$ ve $s\geq n_p+1$ için

$$\begin{aligned}g(j,k,s)&=\frac{1}{6\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)(\lambda-\mu_s)}d\lambda\\&=\frac{1}{6\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_s)(\mu_j-\mu_k)}\left(\frac{1}{\lambda-\mu_j}-\frac{1}{\lambda-\mu_k}\right)d\lambda\\&=\frac{1}{3(\mu_j-\mu_k)}\left(\frac{1}{\mu_j-\mu_s}-\frac{1}{\mu_k-\mu_s}\right)=-\frac{1}{3(\mu_s-\mu_j)(\mu_s-\mu_k)}\end{aligned} \tag{3.108}$$

dır. $\mu_j = \mu_k$ $(j, k \le n_p)$ ve $s \ge n_p + 1$ için

$$g(j,k,s) = \frac{1}{6\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{1}{(\lambda-\mu_j)^2(\lambda-\mu_s)} d\lambda = -\frac{1}{3(\mu_s-\mu_j)^2} \tag{3.109}$$

dir. (3.108) ve (3.109) dan

$$|I_{11}| = \left| \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \frac{1}{3(\mu_s-\mu_j)(\mu_s-\mu_k)} (Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_k,\psi_s)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1} \right| \le$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} (\mu_s-\mu_j)^{-1}(\mu_s-\mu_k)^{-1} \left| (Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_k,\psi_s)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1} \right| \le$$

$$\sum_{s=n_p+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} (\mu_s-\mu_{n_p})^{-2} \|Q\psi_j\|_{H_1} \|\psi_k\|_{H_1} \left|(Q\psi_k,\psi_s)_{H_1}\right| \left|(Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right| \le$$

$$\|Q\|_{H_1} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[(\mu_s-\mu_{n_p})^{-2} \left(\sum_{j=1}^{n_p} \left|(Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right| \right) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \left|(Q\psi_k,\psi_s)_{H_1}\right| \right) \right] \le$$

$$\|Q\|_{H_1} n_p \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[(\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p})^{-1}(\mu_s-\mu_{n_p})^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n_p} \left|(Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n_p} \left|(Q\psi_k,\psi_s)_{H_1}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \le$$

$$\|Q\|_{H_1} n_p (\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p})^{-1} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[(\mu_s-\mu_{n_p})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left|(Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right|^2 \right] =$$

$$\|Q\|_{H_1} n_p (\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p})^{-1} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[(\mu_s-\mu_{n_p})^{-1} \|Q\psi_s\|_{H_1}^2 \right] \le$$

$$\|Q\|_{H_1}^3 n_p (\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p})^{-1} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} (\mu_s-\mu_{n_p})^{-1} = \|Q\|_{H_1}^3 n_p (\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p})^{-1} \Omega_p \tag{3.110}$$

bulunur. Teorem 3.3.2 den ve (3.54) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p} > d_0\left((n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{1+\delta}\right) > d_0(n_p+1)^{\delta} > d_0 n_p^{\delta} \tag{3.111}$$

elde edilir. (3.95), (3.110) ve (3.111) den

$$|I_{11}| \le \|Q\|_{H_1}^3 n_p d_0^{-1} n_p^{-\delta} \frac{1+\delta}{d_0\delta} n_p^{-\frac{\delta^2}{1+\delta}} = \frac{1+\delta}{d_0^2\delta} \|Q\|_{H_1}^3 n_p^{\frac{1-2\delta^2}{1+\delta}}$$

bulunur. Buradan

$$\delta = \frac{2m\alpha}{2m+\alpha} - 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ya da

$$\alpha > \frac{2m + 2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m - \sqrt{2} - 1} \tag{3.112}$$

koşulu sağlandığı takdirde

$$\lim_{p\to\infty} I_{11} = 0 \tag{3.113}$$

olduğu görülmektedir. (3.105) ve (3.113) den (3.112) koşulu sağlandığı takdirde

$$\lim_{p\to\infty} I_1 = 0 \tag{3.114}$$

elde edilir.

Bu kez I_{21} in (3.104) ifadesini sınırlandıralım.

$$|I_{21}| = \left|\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} F(j,k,s)\right| =$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{6\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)(\lambda-\mu_s)} d\lambda\right] (Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_k,\psi_s)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right| =$$

$$\frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j-\mu_k)(\mu_j-\mu_s)} (Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_k,\psi_s)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right| \le$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} (\mu_k-\mu_j)^{-1} (\mu_s-\mu_j)^{-1} \left|(Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_k,\psi_s)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right| \le$$

$$\|Q\|_{H_1} \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[\frac{\left|(Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right|}{(\mu_k-\mu_j)(\mu_s-\mu_j)}\right] \le$$

$$\|Q\|_{H_1} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_k-\mu_{n_p})(\mu_s-\mu_{n_p})} \sum_{j=1}^{n_p} \left|(Q\psi_j,\psi_k)_{H_1} (Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right|\right] \le$$

$$\|Q\|_{H_1} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_k-\mu_{n_p})(\mu_s-\mu_{n_p})} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|(Q\psi_k,\psi_j)_{H_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|(Q\psi_s,\psi_j)_{H_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$\|Q\|_{H_1} \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_k-\mu_{n_p})(\mu_s-\mu_{n_p})} \|Q\psi_k\|_{H_1} \|Q\psi_s\|_{H_1}\right] \le$$

$$\|Q\|_{H_1}^3 \sum_{k=n_p+1}^{\infty} \sum_{s=n_p+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k - \mu_{n_p})(\mu_s - \mu_{n_p})} =$$

$$\|Q\|_{H_1}^3 \left(\sum_{k=n_p+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \mu_{n_p}} \right)^2 = \|Q\|_{H_1}^3 \, \Omega_p^2 \tag{3.115}$$

dir. (3.95) ve (3.115) den

$$|I_{21}| \le \left(\frac{1+\delta}{d_0 \delta} \right)^2 \|Q\|_{H_1}^3 \, n_p^{-\frac{2\delta^2}{1+\delta}} \qquad \left(\alpha > \frac{2m}{2m-1} \right)$$

dir. Bu eşitsizlikten

$$\lim_{p\to\infty} I_{21} = 0 \qquad \left(\alpha > \frac{2m}{2m-1} \right) \tag{3.116}$$

bulunur. (3.106) ve (3.116) dan

$$\lim_{p\to\infty} I_2 = 0 \qquad \left(\alpha > \frac{2m}{2m-1} \right) \tag{3.117}$$

elde edilir. (3.102) (3.114) ve (3.117) den

$$\lim_{p\to\infty} D_{p3} = 0 \qquad \left(\alpha > \frac{2m + 2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m - \sqrt{2} - 1} \right) \tag{3.118}$$

bulunur.

$\lambda \notin \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q, \ldots\}$ için R_λ^0 normal operatör olduğundan

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_q - \lambda|}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969). $|\lambda| = b_p = 2^{-1}(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p})$ çemberi üzerinde

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \le \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\left||\lambda| - \mu_q\right|} = \sum_{q=1}^{n_p} \frac{2}{\mu_{n_p} + \mu_{n_p+1} - 2\mu_q} + \sum_{q=n_p+1}^{\infty} \frac{2}{2\mu_q - \mu_{n_p} - \mu_{n_p+1}} \le$$
$$\sum_{q=1}^{n_p} \frac{2}{\mu_{n_p+1} - \mu_q} + \sum_{q=n_p+1}^{\infty} \frac{2}{\mu_q - \mu_{n_p}} = \sum_{q=1}^{n_p} \frac{2}{\mu_{n_p+1} - \mu_q} + 2\Omega_p \tag{3.119}$$

dir. Teorem 3.3.2 den ve (3.54) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\sum_{q=1}^{n_p} \frac{1}{\mu_{n_p+1} - \mu_q} < \frac{n_p}{\mu_{n_p+1} - \mu_{n_p}} < \frac{n_p}{d_0\left[(n_p+1)^{1+\delta} - n_p^{\,1+\delta}\right]} < \frac{n_p}{d_0(n_p+1)^{\delta}} < d_0^{-1} n_p^{\,1-\delta} \tag{3.120}$$

elde edilir. (3.95), (3.119) ve (3.120) den

$$\left\| R_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} < 2d_0^{-1} n_p^{\,1-\delta} + 2d_0^{-1}\delta^{-1}(1+\delta) n_p^{\,-\frac{\delta^2}{1+\delta}}$$

bulunur. Buradan da

$$\left\| R_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} < \frac{2(1+2\delta)}{d_0\delta} n_p^{\,1-\delta} \qquad \left(|\lambda| = b_p; \quad \alpha > \frac{2m}{2m-1} \right) \tag{3.121}$$

elde edilir.

$|\lambda| = b_p$ ve p nin büyük değerleri için R_λ operatörünün normunu sınırlandıralım. $|\lambda| = b_p$ için

$$\left| |\lambda_q| - |\lambda| \right| = \left| |\lambda_q| - \frac{1}{2}\left(\mu_{n_p} + \mu_{n_p+1}\right) \right| = \frac{1}{2}\left| \mu_{n_p} + \mu_{n_p+1} - 2|\lambda_q| \right| \tag{3.122}$$

dır. $q \le n_p$ ve p nin büyük değerleri için $|\lambda_q| \le \lambda_{n_p}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\mu_{n_p} + \mu_{n_p+1} - 2|\lambda_q| \ge \mu_{n_p} + \mu_{n_p+1} - 2\lambda_{n_p} = \\ &\mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} + 2\left(\mu_{n_p} - \lambda_{n_p}\right) \ge \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} - 2\left|\mu_{n_p} - \lambda_{n_p}\right| \end{aligned} \tag{3.123}$$

dır. (3.48) ve (3.123) den

$$\mu_{n_p} + \mu_{n_p+1} - 2|\lambda_q| \ge \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} - 2\|Q\|_{H_1} \qquad (q \le n_p) \tag{3.124}$$

elde edilir. $q \ge n_p + 1$ ve p nin büyük değerleri için $|\lambda_q| = \lambda_q \ge \lambda_{n_p+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &2|\lambda_q| - \mu_{n_p} - \mu_{n_p+1} \ge 2\lambda_{n_p+1} - \mu_{n_p} - \mu_{n_p+1} = 2\left(\lambda_{n_p+1} - \mu_{n_p+1}\right) + \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} \\ &\ge \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} - 2\left|\lambda_{n_p+1} - \mu_{n_p+1}\right| \end{aligned} \tag{3.125}$$

dır. (3.48) ve (3.125) den

$$2|\lambda_q| - \mu_{n_p} - \mu_{n_p+1} \ge \mu_{n_p+1} - \mu_{n_p} - 2\|Q\|_{H_1} \qquad (q \ge n_p + 1) \tag{3.126}$$

bulunur. $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p}\right)=\infty$ olduğu göz önüne alınırsa (3.122), (3.124) ve (3.126) dan

$$\left\|\lambda_q\right|-|\lambda\|>\frac{1}{4}\left(\mu_{n_p+1}-\mu_{n_p}\right)\qquad\left(|\lambda|=b_p\right)\tag{3.127}$$

elde edilir. Teorem 3.3.2 den ve (3.54), (3.127) eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\left\|\lambda_q\right|-|\lambda\|>\frac{d_1}{4}\left[\left(n_p+1\right)^{1+\delta}-n_p^{\ 1+\delta}\right]>\frac{d_1}{4}\left(n_p+1\right)^{\delta}$$

bulunur. Bu bağıntıdan $|\lambda|=b_p$ ve p nin büyük değerleri için

$$\left|\lambda_q-\lambda\right|>\frac{d_1}{4}n_p^{\ \delta}\tag{3.128}$$

elde edilir. Öte yandan R_λ operatörünün s-sayıları $\left\{\left|\lambda_q-\lambda\right|^{-1}\right\}_{q=1}^{\infty}$ olduğundan

$$\left\|R_\lambda\right\|_{H_1}=\max_q\left\{\left|\lambda_q-\lambda\right|^{-1}\right\}\tag{3.129}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969). (3.128) ve (3.129) den p nin büyük değerleri için

$$\left\|R_\lambda\right\|_{H_1}<\frac{4}{d_1}n_p^{\ -\delta}\qquad\left(|\lambda|=b_p;\quad\alpha>\frac{2m}{2m-1}\right)\tag{3.130}$$

bulunur.

Teorem 3.4.1: $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyor ve $j\to\infty$ iken $\gamma_j\sim aj^{\alpha}\left(a>0,\alpha>\dfrac{2m+2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m-\sqrt{2}-1}\right)$ ise

$$\lim_{p\to\infty}D_{pj}=0\qquad(j=2,3,4,\ldots)$$

İspat: (2.10), (2.17) ve (3.81) bağıntılarından yararlanarak D_{pj} aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}\left|D_{pj}\right|&\leq\frac{1}{2\pi j}\int_{|\lambda|=b_p}\left|tr\left(QR_\lambda^0\right)^j\right||d\lambda|\leq\int_{|\lambda|=b_p}\left\|\left(QR_\lambda^0\right)^j\right\|_{\sigma_1(H_1)}|d\lambda|\leq\\&\int_{|\lambda|=b_p}\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{j-1}\right\|_{H_1}|d\lambda|\leq\int_{|\lambda|=b_p}\|Q\|_{H_1}\left\|R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{j-1}\right\|_{H_1}|d\lambda|\leq\\&\|Q\|_{H_1}\int_{|\lambda|=b_p}\left\|R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|QR_\lambda^0\right\|_{H_1}^{j-1}|d\lambda|\leq\|Q\|_{H_1}^{j}\int_{|\lambda|=b_p}\left\|R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1}^{j-1}|d\lambda|\end{aligned}\tag{3.131}$$

dır. $Q(x)\equiv 0$ halinde $R_\lambda = R_\lambda^0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.130) dan

$$\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} < \frac{4}{d_1} n_p^{-\delta} \qquad \left(|\lambda| = b_p; \quad \delta = \frac{2m\alpha}{2m+\alpha} - 1\right) \tag{3.132}$$

elde edilir. (3.121), (3.131) ve (3.132) bağıntılarından

$$\left|D_{pj}\right| < \text{const} \left|\int_{|\lambda|=b_p} n_p^{1-\delta} n_p^{-\delta(j-1)} |d\lambda|\right| < \text{const}.b_p n_p^{1-\delta j} \tag{3.133}$$

bulunur. p nin büyük değerleri için

$$b_p = \frac{1}{2}\left(\mu_{n_p+1} + \mu_{n_p}\right) \le \text{const}.n_p^{1+\delta} \tag{3.134}$$

olduğundan (3.133) ten

$$\left|D_{pj}\right| < \text{const}.n_p^{2-\delta(j-1)}$$

elde edilir. Burada $\delta > \dfrac{2}{3}$ ya da

$$\alpha > \frac{10m}{6m-5}$$

koşulu sağlandığı taktirde

$$\lim_{p\to\infty} D_{pj} = 0 \qquad (j = 4,5,\dots)$$

olduğu görülmektedir. Öte yandan her $m \in N$ için

$$\frac{2m + 2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m - \sqrt{2} - 1} > \frac{10m}{6m-5}$$

olduğu ve (3.96) ve (3.118) formülleri göz önüne alınırsa

$$\alpha > \frac{2m + 2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m - \sqrt{2} - 1}$$

koşulu sağlandığı taktirde

$\lim\limits_{p\to\infty} D_{pj} = 0 \qquad (j = 2,3,4,\dots)$ bulunur.■

Teorem 3.4.2: $Q(x)$ operatör fonksiyonu

i. $Q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında 2.mertebeden zayıf türeve sahiptir ve her $f, g \in H$ için $(Q''(x)f, g)$ fonksiyonu sürekli,

ii. Her $x \in [0,\pi]$ için $Q^{(i)}(x): H \to H$ $(i = 0,1,2)$ kendine eş çekirdek operatörlerdir ve $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ $(i = 0,1,2)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir

koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken

$$\gamma_j \sim aj^{\alpha} \left(a > 0, \alpha > \frac{2m + 2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m - \sqrt{2} - 1} \right) \text{ ise}$$

L operatörünün düzenli izi için

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{n_p} \left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}\right)dx \right] = \frac{1}{4}[\mathrm{tr}Q(0) + \mathrm{tr}Q(\pi)] - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{tr}Q(x)dx$$

formülü sağlanır.

İspat: (2.10) ve (2.17) eşitsizliklerinden yararlanarak (3.80) formülünün sonundaki $D_p^{(s)}$ nin (3.82) ifadesini sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} \left|D_p^{(s)}\right| &\le \frac{1}{2\pi j}\int_{|\lambda|=b_p} |\lambda| \left|\mathrm{tr}\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{s+1}\right]\right| |d\lambda| \le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\|R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{s+1}\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \le \\ & b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{s+1}\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{s}\right\|_{H_1} \left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \le \\ & b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|QR_\lambda^0\right\|_{H_1}^s \left\|Q\right\|_{H_1} \left\|R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1}^s \left\|Q\right\|_{H_1}^{s+1} \left\|R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \end{aligned} \tag{3.135}$$

dır. (3.121), (3.130) ve (3.135) bağıntılarından

$$\left|D_p^{(s)}\right| \le \text{const.} b_p \int_{|\lambda|=b_p} n_p^{-\delta(s+1)} n_p^{1-\delta} |d\lambda| \le \text{const.} b_p^2 n_p^{-\delta s - 2\delta + 1} \tag{3.136}$$

elde edilir. (3.134) ve (3.136) dan

$$\left|D_p^{(s)}\right| \le \text{const.} n_p^{3-\delta s}$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{p\to\infty} D_p^{(s)} = 0 \qquad \left(s > 3\delta^{-1}\right) \tag{3.137}$$

elde edilir. Teorem 3.3.7, Teorem 3.4.1 ve (3.80), (3.137) formüllerinden yararlanarak

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{M_{k_q}^2}{2}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] = \frac{1}{4}\left[\mathrm{tr}Q(0) + \mathrm{tr}Q(\pi)\right] \tag{3.138}$$

bulunur. Bu eşitliğin sol tarafındaki sonlu toplamı aşağıdaki gibi düzenleyelim:

$$\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{M_{k_q}^2}{2}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] =$$

$$= \sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q\ne 0}}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{M_{k_q}^2}{2}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] + \sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q= 0}}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{M_{k_q}^2}{2}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]$$

$$= \sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q\ne 0}}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] + \sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q= 0}}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]$$

$$= \sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q\ne 0}}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] + \sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q= 0}}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] +$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q= 0}}\left[\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]$$

$$= \sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q= 0}}\left[\int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right] \tag{3.139}$$

dır. Ayrıca

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right| \le \left\|Q(x)\right\|_{\sigma_1(H)}, \ (n = 1,2,\ldots) \tag{3.140}$$

dır. Varsayım gereği $\left\|Q(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir. Bu nedenle

$$\int_0^\pi \left\|Q(x)\right\|_{\sigma_1(H)} dx < \infty \tag{3.141}$$

dır. (3.140) ve (3.141) den Lebesgue teoremi gereğince

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx=\int_{0}^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right]dx=\int_{0}^{\pi}trQ(x)dx \tag{3.142}$$

elde edilir. Öte yandan $k_{q_1}=k_{q_2}=0$ ve $q_1\neq q_2$ koşullarını sağlayan her q_1 ve q_2 doğal sayıları için $j_{q_1}\neq j_{q_2}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q=0}}\int_{0}^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx \tag{3.143}$$

dır. (3.142) ve (3.143) den

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\substack{q\le n_p\\ k_q=0}}\int_{0}^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx=\int_{0}^{\pi}trQ(x)dx \tag{3.144}$$

bulunur. (3.138), (3.139) ve (3.144) den

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]=\frac{1}{4}\left[trQ(0)+trQ(\pi)\right]-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}trQ(x)dx$$

elde edilir.■

3.5 Örnekler

$H=L_2[0,\pi]$ ve $m=2$ olsun. $D(A)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi(t)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim:

a) $\varphi'''(t)$ $[0,\pi]$ aralığında mutlak süreklidir ve $\varphi^{IV}(t)\in L_2[0,\pi]$

b) $\varphi(0)=\varphi''(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(\pi)=0$

$$A:D(A)\to L_2[0,\pi] \qquad ,A\varphi=\frac{d^4\varphi(t)}{dt^4} \tag{3.145}$$

operatörünü göz önüne alalım.

Bu operatör

$$A=A^*\ge I \text{ ve } A^{-1}\in\sigma_\infty\left(L_2[0,\pi]\right) \tag{3.146}$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri

$$\gamma_j = j^4 \qquad (j = 1,2,3,...) \tag{3.147}$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörler de

$$\varphi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin jt \qquad (j = 1,2,3,...) \tag{3.148}$$

şeklindedir. $m = 2$ ve $\alpha = 4$ olduğu göz önüne alınırsa A operatörü için

$$\alpha > \frac{2m + 2\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}m - \sqrt{2} - 1}$$

koşulunun da sağlandığı görülmektedir. $Q(x)$ olarak her $x \in [0,\pi]$ için $L_2[0,\pi]$ den $L_2[0,\pi]$ ye

$$Q(x)\varphi(t) = x^2 \int_0^{\pi} K(t,s)\varphi(s)ds \tag{3.149}$$

operatör fonksiyonunu ele alalım. Burada

$$K(t,s) = \begin{cases} \pi^{-1}t(\pi - s) & ,t \le s \quad \text{ise} \\ \pi^{-1}s(\pi - t) & ,t \ge s \quad \text{ise} \end{cases}$$

dır. Her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x): L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi]$ tam sürekli kendine eş operatördür. Bu operatörün özdeğerleri

$$\alpha_i(x) = \frac{x^2}{i^2} \quad (i = 1,2,...)$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörler sırasıyla

$$f_i(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin it \quad (i = 1,2,...)$$

şeklindedir. Gerçekten

$$Q(x)(\sin it) = x^2 \int_0^{\pi} K(t,s) \sin isds$$

$$= x^2 \int_0^{t} K(t,s) \sin isds + x^2 \int_t^{\pi} K(t,s) \sin isds$$

$$= x^2 \int_0^t \pi^{-1} s(\pi - t) \sin isds + x^2 \int_t^\pi \pi^{-1} t(\pi - s) \sin isds$$

$$= x^2 \pi^{-1} (\pi - t) \int_0^t s \sin isds + tx^2 \int_t^\pi \sin isds - \pi^{-1} tx^2 \int_t^\pi s \sin isds$$

$$= -\pi^{-1} tx^2 \int_0^\pi s \sin s\pi ds + x^2 \int_0^t s \sin isds + tx^2 \int_t^\pi \sin isds$$

$$= -\pi^{-1} tx^2 \left(-\frac{s}{i} \cos is + \frac{1}{i^2} \sin is \right) \Bigg|_0^\pi + x^2 \left(-\frac{s}{i} \cos is + \frac{1}{i^2} \sin is \right) \Bigg|_0^t - \frac{tx^2}{i} \cos is \Big|_t^\pi$$

$$= \frac{tx^2}{i} (-1)^i + x^2 \left(-\frac{t}{i} \cos it + \frac{1}{i^2} \sin it \right) - \frac{tx^2}{i} (-1)^i + \frac{tx^2}{i} \cos it$$

$$= \frac{x^2}{i^2} \sin it$$

dır. Ayrıca her $x \in [0, \pi]$ için $Q'(x) : L_2[0, \pi] \to L_2[0, \pi]$ operatörünün özdeğerleri $\left\{ \frac{2x}{i^2} \right\}_{i=1}^\infty$,

$Q''(x) : L_2[0, \pi] \to L_2[0, \pi]$ operatörünün de özdeğerleri $\left\{ \frac{2}{i^2} \right\}_{i=1}^\infty$ dır. Dolayısıyla

$$\|Q(x)\|_{\sigma_1(L_2[0,\pi])} = \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} \right) x^2$$

$$\|Q'(x)\|_{\sigma_1(L_2[0,\pi])} = 2 \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} \right) x$$

$$\|Q''(x)\|_{\sigma_1(L_2[0,\pi])} = 2 \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2}$$

dır. Görüldüğü gibi $Q(x)$ operatör fonksiyonu i) ve ii) koşullarını sağlıyor. L_0 ve L, $D(L_0) = D(L) \subset H_1$ olmak üzere $D(L_0)$ dan H_1 e sırasıyla

$$\ell_0(u) = \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} \tag{3.150}$$

$$\ell(u) = \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + x^2 \int_0^\pi K(t,s) u(x,s) ds \tag{3.151}$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$u'_x(0,t) = u'''_{x^3}(0,t) = u'_x(\pi,t) = u'''_{x^3}(\pi,t) = 0 \tag{3.152}$$

$$u(x,0) = u''_{t^2}(x,0) = u(x,\pi) = u''_{t^2}(x,\pi) = 0 \tag{3.153}$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş operatörlerdir. $\ell_0(u)$ ve $\ell(u)$ ifadelerinde yer alan $\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$ türevi $L_2[0,\pi]$ uzayındaki norma göre anlaşılmaktadır. Yani

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_0^\pi \left| \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} - u'_x(x,t) \right|^2 dt = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_0^\pi \left| \frac{u^{(i)}_{x^i}(x+\Delta x,t) - u^{(i)}_{x^i}(x,t)}{\Delta x} - u^{(i+1)}_{x^{i+1}}(x,t) \right|^2 dt = 0 \quad ,(i=1,2,3)$$

dır. L_0 operatörünün özdeğerleri

$$k^4 + j^4 \quad (k = 0,1,2,...;\, j = 1,2,3,...) \tag{3.154}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörler de

$$M_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & ,k = 0 \quad \text{ise} \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & ,k = 1,2,.....\text{ise} \end{cases} \tag{3.155}$$

olmak üzere

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} M_k \cos kx . \sin jt \quad (k = 0,1,2,... \quad ; j = 1,2,...) \tag{3.156}$$

şeklindedir.

Bu kez de $H_1 = L_2(0,\pi; L_2[0,\pi]) = L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$ uzayında

$$\ell_1(u) = \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} \tag{3.157}$$

diferansiyel ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadedeki $\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$ veya $\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$ türevleri bildiğimiz adi kısmi türevler olarak alınmıştır.

c) $u(x,t)$, $[0,\pi]\times[0,\pi]$ karesinde $\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$ ve $\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$ sürekli türevlerine sahip,

d) $u'_x(0,t)=u'''_{x^3}(0,t)=u'_x(\pi,t)=u'''_{x^3}(\pi,t)\equiv 0 \qquad (0\le t\le \pi)$ (3.158)

$$u(x,0)=u''_{t^2}(x,0)=u(x,\pi)=u''_{t^2}(x,\pi)\equiv 0 \qquad (0\le x\le \pi) \tag{3.159}$$

koşullarını sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonlar kümesi D_0 olsun. D_0, H_1 uzayının yoğun bir lineer manifoldu, D_0 dan H_1 e $L_1' = \ell_1(u)$ operatörü de bir simetrik operatördür. L_1' operatörünün özdeğerleri de

$$k^4+j^4 \quad (k=0,1,2,...;\ j=1,2,3,...) \tag{3.160}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörler de

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}M_k \cos kx.\sin jt \quad (k=0,1,2,... \quad ;j=1,2,...) \tag{3.161}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi L_1' operatörünün ortonormal özvektörler sistemi H_1 uzayının bir ortonormal tabanıdır. Bu durumda $L_1=\overline{L_1'}$ operatörü kendine eştir. (Adıgüzelov ve Bakşi, 2004). Diğer taraftan H_1 den H_1 e

$$Qu = x^2\int_0^{\pi} K(t,s)u(x,s)ds \tag{3.162}$$

operatörü sınırlı ve kendine eş olduğundan

$$L_2 = L_1 + Q$$

operatörü de kendine eş olacaktır. L_0 operatörüne benzer şekilde L_1 operatörünün de saf ayrık spektruma sahip olduğu gösterilebilir.

Böylece L_0 ve L_1, H_1 uzayında aşağıdaki özelliklere sahip olan operatörlerdir:

1) $L_0 = L_0^*$ ve $L_1 = L_1^*$

2) L_0 ve L_1 operatörleri saf ayrık spektruma sahiptir.

3) L_0 ve L_1 operatörleri aynı özdeğerlere ve aynı özvektörlere sahiptir.

Bu taktirde $L_0 = L_1$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $L = L_2$ olacaktır.

$$trQ(0) = 0, \qquad trQ(\pi) = \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}$$

$$\int_0^{\pi} trQ(x)dx = \int_0^{\pi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} \right) x^2 dx = \frac{\pi^3}{3} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}$$

olduğu göz önüne alınırsa Teorem 3.4.2 gereğince

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{n_p} \left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q} \right) dx \right] = \frac{\pi^2}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \frac{\pi^2}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{12} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

dir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$\ell(y)=(-1)^m y^{(2m)}(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(2i-1)}(0)=y^{(2i-1)}(\pi)=0 \quad (i=1,2,..,m)$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş L operatörünün spektrumu incelenmiş, özdeğerleri için asimtotik formül bulunmuş ve düzenli izi hesaplanmıştır. $\ell(y)$ nin ifadesinde yer alan A operatörünün ve $Q(x)$ operatör fonksiyonunun belirli koşullar sağladıkları varsayılmıştır.

KAYNAKLAR

Adıgüzelov, E.E., (1976), "Operatör Katsayılı İki Sturm-Liouville Operatörünün Farkının İzi Hakkında" İz. An Az SSR, Seriya Fiz-Tekn. I Mat. Nauk, No:5, 1976, 20-24 (R)*

Adıgüzelov, E.E., Avcı, H. ve Gül, E., (2001), "The Trace Formula for Sturm-Liouville Operatör with Operatör Coefficient", J. Math. Phys., Volume 42, No:6, 2001, 1611-1624.

Adıgüzelov, E.E., Baykal, O. ve Bayramov, A. (2001), "On the Spektrum and Regularized Trace of Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter on the Boundary Condition and with the Operator Coefficient", International Journal of Differential Equations and Applications, Volume 2, No:3, 2001, 317-333.

Adıgüzelov, E.E., Bakşi Ö., (2004) "On The Regularized Trace of The Differantial Operator Equation Given in a Finite Interval", Journal of Engineering and Natural Sciences Sigma,, 47-55, 2004/1.

Adıgüzelov, E.E., Bakşi Ö. ve Baykal, O., (2004) "On a Regularized Trace of a Differantial Operator with Bounded Operator Coefficient" International Math. Journal, Volume 5, No:3, 2004, 273-286.

Adıgüzelov, E.E., Kanar, P., (2005), "The Second Regularized Trace Of A Second Order Differantial Operator with Unbounded Operator Coefficient", International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 22, No.3, 2005, 349-365.

Albayrak, İ., Bayramoğlu, M ve Adıgözelov, E., (1999), "Formula for the Second Regularized Trace of the Sturm-Liouville Problem with a Spectral Parameter on Boundary Condition", Methods of Functional Analysis and Topology, Volume 4, No:3, 1999.

Bakşi, Ö., (1999), "Sınırsız Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin İz Formülü" Doktora Tezi YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Bayramoğlu, M ve Adıgüzelov, E.E., (1996), "Sınırlı Operatör Katsayılı Tekil Sturm-Liouville Operatörünün Düzenli İzi Hakkında" Differens. Uravneniya, 1996, T.32, No:12, 1587-1592.

Cohberg, I.C. ve Krein, M.G., (1969), "Introduction to the Theory of Linear Non-Self Adjoint Operators", Translation of Math. Monograph, Volume 18, Amer. Math. Soc., 1969, Providence, R.I.

Dikiy, L.A., (1953), "Gelfand-Levitan'ın Bir Formülü Hakkında", Upseki Mat. Nouk, 1953, T.8, No:2, 119-123 (R)

Fulton, T.C. ve Pruess, S.A., (1944), "Eigenvalue and Eigenfunction Asypmtotics for Regular Sturm-Liouville Problems", J.Math. Anal. Appl. 188, 1994, 297-340.

Gasimov, M.G. ve Levitan, B.M., (1963), "İki Tekil Strurm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin Farklarının Toplamı Hakkında", Dokl. AN SSSR, 1963, T.151, No:5, 1014-1017 (R)

Gelfand, I.M. ve Levitan, B.M., (1953), "İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri için Bir Formül Hakkında", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1953, T.88, No:4, 593-596 (R)

* : R, kaynağın Rusça olduğunu göstermektedir.

Gorbaçuk, V. İ., (1975)" Vektör Fonksiyonu Uzayında Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemlerinin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı Hakkında" Ukr. Mat. Journal, T.27, No:5, 657-664, (R)

Guseynov, G.Ş. ve Levitan, B.M., (1978), "Sturm-Liouville Operatörü için İz Formülleri Hakkında", Vestnik MGU, Ser. Matem-Mekan., 1978, No:1, 40-49 (R)

Halberg, C.J. ve Kramer, V.A., (1960), " A Generalization of the Trace Concept", Duke Math. Journal, 1960, Vol.27, No:4, 607-618.

Halilova, R.Z., (1976), "Sturm-Liouville Operatör Denkleminin İzinin Düzenlenmesi Hakkında", Funks. Analiz, Teoriya Funksi I Ik Pril.-Mahaçkala, 1976, No:3, 1. Bölüm, 154-161, (R).

Levitan, B.M., (1964), "Sturm-Liouville Operatörü için Düzenli İzin Hesaplanması", Upseki Matem. Nauk, 1964, T.19, No:1 161-164 (R)

Levitan, B.M., ve Sargsyan, I.S., (1991), "Sturm-Liouville and Dirac Operators", Kluzer,, Dordrechz, 1991.

Lidskiy, L.A. ve Sadovniçiy, V.A. (1967), "Bir Sınıfa Ait Olan Tam Fonksiyonlarının Köklerinin Düzenli Toplamı", Funks. Analiz I Ego Pril., 1967, T.1, No:2, 52-59 (R)

Lysternik, L.A. ve Sobolev, V.I., (1955), "Elements of Functional Analysis", (English Translation), 1955, New York Fredrick Ungar.

Maksudov, F.G., Bayramoğlu, M ve Adıgözelov, E.E., (1984), "On a Regularized Trace of Sturm-Liouville Operator on a Finite Interval with the Unbounded Operator Coefficient", Dokl. Akad. Nauk SSSR, English Translation: Soviet Math. Dokl. 30, 1984, No:1, 169-173.

Naimark, M.A., (1968) " Linear Differantial Operators", Part I, II, London.

Smirnov, V. I., (1964) "A Course of Highe Mathematics" Vol. 5, 602, Pergamon Pres, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.01.1977	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	Yeşilköy 50.Yıl Lisesi
Lisans	1995-1999	Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2000-2002	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	2002-2007	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

2000-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi