

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER
MEKANİĞİNİN BAZI ÜÇ BOYUTLU TİTREŞİM VE
STABİLİTE PROBLEMLERİNİN SEY İLE İNCELENMESİ**

139761

Yüksek Matematikçi Işım Genç DEMİRİZ

FBE Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 17 Kasım 2003
Tez Danışmanı : Prof.Dr. Surkay D.AKBAROV (YTÜ)
İkinci Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Selmahan SELİM (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Esin İNAN (İÜ)
: Prof.Dr. Yalçın AKÖZ (İTÜ)
: Prof.Dr. Abbas AZİMOV (YTÜ)
: Prof.Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (YTÜ)

[Handwritten signatures and initials]

İSTANBUL, 2003

TEZ YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler	1
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti.....	3
1.3 Konunun Gerekliği ve Güncelliği.....	9
1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları.....	9
2. SERBEST VE ZORLANMIŞ TİTREŞİM PROBLEMLERİ	11
2.1 Akbarov ve Guz Süreklilik Teorisinin Esas Bağlıntıları	11
2.2 Problemlerin Matematiksel Formülasyonu.....	14
2.3 Ele Alınan Problemin Varyasyon Formülasyonu	19
2.4 Üç Boyutlu Sonlu Eleman Modellemesi	23
2.5 Serbest Titreşim Problemleri	28
2.6 Sayısal Sonuçlar	30
2.7 Zorlanmış Titreşim Problemleri.....	34
2.8 Sayısal Sonuçlar.....	35
3. STABİLİTE KAYBI PROBLEMLERİ.....	69
3.1 Problemlerin Formülasyonu	69
3.2 Stabilitate Probleminin Varyasyon Formülasyonu	72
3.3 Sonlu Eleman Modellemesi	83
3.4 Sayısal Sonuçlar	86
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ	94
KAYNAKLAR.....	95
ÖZGEÇMİŞ.....	99

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 Ele Alınan Plağın Belirleyici Levhası	4
Şekil 1.2 Ele Alınan Belirleyici Plağın Eğrisel Kısımları ile Değiştirilen Dairesel Bölgeler	4
Şekil 2.1 İki Yönde Periyodik Eğriliği Olan Kompozit Malzemedden Hazırlanmış Belirleyici Elemanın Geometrisi.....	11
Şekil 2.2 Plak ve Plak Malzemesinin Yapısının Geometrisi.	15
Şekil 2.3 Seçilen sonlu eleman formu ve düğüm noktaları	24
Şekil 2.4 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	36
Şekil 2.5 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	37
Şekil 2.6 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	37
Şekil 2.7 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	38
Şekil 2.8 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)	39
Şekil 2.9 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)	39
Şekil 2.10 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)	40
Şekil 2.11 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)	40
Şekil 2.12 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	41
Şekil 2.13 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	42
Şekil 2.14 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	42
Şekil 2.15 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	43
Şekil 2.16 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	44
Şekil 2.17 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	44
Şekil 2.18 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	45
Şekil 2.19 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	45
Şekil 2.20 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	46

Şekil 2.21 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	46
Şekil 2.22 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	47
Şekil 2.23 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	47
Şekil 2.24 Statik durumda $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	48
Şekil 2.25 Statik durumda $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	49
Şekil 2.26 Statik durumda $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	49
Şekil 2.27 Statik durumda $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	50
Şekil 2.28 ℓ_3/ℓ_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	51
Şekil 2.29 ℓ_3/ℓ_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	51
Şekil 2.30 ℓ_3/ℓ_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	52
Şekil 2.31 ℓ_3/ℓ_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1).....	52
Şekil 2.32 Farklı sonlu eleman sayıları için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	53
Şekil 2.33 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	54
Şekil 2.34 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	54
Şekil 2.35 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	55
Şekil 2.36 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	55
Şekil 2.37 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	56
Şekil 2.38 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	57
Şekil 2.39 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	57
Şekil 2.40 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	58
Şekil 2.41 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	59

Şekil 2.42 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{11}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	59
Şekil 2.43 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	60
Şekil 2.44 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	60
Şekil 2.45 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{22}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	61
Şekil 2.46 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{11}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	62
Şekil 2.47 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	62
Şekil 2.48 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)	63
Şekil 2.49 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	64
Şekil 2.50 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	64
Şekil 2.51 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	65
Şekil 2.52 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	65
Şekil 2.53 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	66
Şekil 2.54 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	66
Şekil 2.55 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	67
Şekil 2.56 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2).....	67

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1. Zamonov (2000b) ve Akbarov ve Guz (2000)' de ele alınan serbest titreşim frekansları ω_*^2 : üstteki değerler bu çalışmada elde edilen sonuçlar, alttaki değerler ise Zamonov (2000b) ve Akbarov ve Guz (2000)' de elde edilen sonuçlardır.....	30
Çizelge 2.2. $l_3/l_1=1$, $E_2/E_1=50$, $\varepsilon=0.00625$ ' de $\gamma_1=l_1/\Lambda_1$ ve $\gamma_3=l_3/\Lambda_3$ çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2	31
Çizelge 2.3. $l_3/l_1=1$, $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ ' de E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2	32
Çizelge 2.4. $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ ' de E_2/E_1 ve l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2	32
Çizelge 2.5. $l_3/l_1=1$, $E_2/E_1=50$, $\varepsilon=0.00625$ ' de $\gamma_1=l_1/\Lambda_1$ ve $\gamma_3=l_3/\Lambda_3$ ' ün çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2	33
Çizelge 2.6. $l_3/l_1=1$, $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ ' de E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2	33
Çizelge 2.7. $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ ' de E_2/E_1 ve l_3/l_1 ' ün çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2	34
Çizelge 3.1. $E_2/E_1=5$, $p_3=0$, $\gamma_1=16$ durumunda ε ' un ve l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $p_{1cr.}/E_1$ değerleri (Problem 1).....	87
Çizelge 3.2. $\varepsilon=0.0$, $p_3=0.0$, $l_1=l_3$, $\gamma_1=\gamma_3=16$ durumunda E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1).....	88
Çizelge 3.3. $\varepsilon=0.00625$, $p_3=0.0$, $l_1=l_3$, $\gamma_1=\gamma_3=16$ durumunda E_2/E_1 ' nin çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1)	88
Çizelge 3.4. $E_2/E_1=50$, $p_3=0.0$, $l_1=l_3$, $\gamma_1=\gamma_3=16$ durumunda ε ' un çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1).....	89
Çizelge 3.5. $E_2/E_1=50$, $\varepsilon=0.00625$, $p_3=0.0$ durumunda γ_1, γ_3 ' ün çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1).....	89
Çizelge 3.6. $\gamma_1=\gamma_3=16$, $l_1=l_3$ durumunda farklı öngerilme durumlarında E_2/E_1 ve ε ' un çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)	90
Çizelge 3.7. $E_2/E_1=50$, $\gamma_1=\gamma_3=16$, $l_1=l_3$ durumunda farklı öngerilme durumlarında ε ' un çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)	91
Çizelge 3.8. $E_2/E_1=20$, $\gamma_1=\gamma_3=16$, $l_1=l_3$ durumunda farklı öngerilme durumlarında ε ' un çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)	92
Çizelge 3.9. $E_2/E_1=50$, $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ durumunda farklı öngerilme durumlarında l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)	92
Çizelge 3.10. $E_2/E_1=20$, $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ durumunda farklı öngerilme durumlarında l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)	93

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında yardımlarını hiçbir şekilde esirgemeyen, değerli fikirlerinden yararlandığım danışman hocam Sayın Prof.Dr. Surkay D. AKBAROV'a ve fedakarca yardımlarından ve katkılarından dolayı Sayın Yrd.Doç.Dr. Selmahan SELİM' e teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez çalışmalarımın başından beri ilgi, alaka ve desteklerini gördüğüm çok değerli hocalarım Sayın Prof.Dr. Füsun URAS ve Prof.Yaşar ÖZDEMİR' e, fedakarca desteklerinden dolayı sevgili AİLEM' e ayrıca teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Tezde yapısında birbirine dik iki yönde periyodik eğriliği olan kompozit malzemeden hazırlanmış kalın plakların serbest ve zorlanmış titreşimine ve ayrıca da stabilite kaybına karşı gelen sınır değer ve özdeğer problemleri üç boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile sayısal olarak incelenmiştir.

Plak malzemesinin bünye denklemleri Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde ele alınmıştır. Plağın zorlanmış ve serbest titreşimleri elastisite teorisinin üç boyutlu kesin hareket denklemleri çerçevesinde, bu plağın stabilite kaybı problemleri ise Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Stabilite Teorisi denklemleri çerçevesinde yapılmıştır. Böylece matematiksel açıdan ele alınan problemler üç boyutlu sonlu prizmatik alanlarda sağlanan değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı için sınır değer veya özdeğer problemlerinin incelenmesine getirilmiştir. Söz konusu olan incelemeler farklı problemler için farklı sınır koşulları çerçevesinde yapılmıştır.

Analitik çözümlerin elde edilmesi imkansız olduğundan ele alınan problemler Sonlu Elemanlar Yöntemi aracılığı ile sayısal olarak incelenmiştir. Sonlu Elemanlar Yöntemi uygulanmasının gerektirdiği işlemler yani uygun fonksiyonellerin oluşturulması, üç boyutlu sonlu eleman seçimi, programlaştırma vs. gibi işlemler yapılmıştır. Ele alınan her bir problem için sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçların mekaniksel yorumları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kompozit, serbest frekans, zorlanmış titreşim, iki yönlü periyodik eğrilik, stabilite.

ABSTRACT

In the present thesis the boundary value and eigenvalue problems corresponding to the natural and forced vibrations of the rectangular thick plate fabricated from the composite material with spatially periodically curved structures are investigated. Moreover, the stability loss problem of this plate is also studied within the framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Stability. All problems considered are solved by employing the three dimensional Finite Element Method (FEM).

The constitutive relations of the plate material are taken within the framework of the continuum theory by Akbarov and Guz. As the natural and forced vibrations of the plate are investigated by the use of the three-dimensional exact equations of motion of the theory of elasticity, therefore the problems considered in the mathematical sense are the boundary-value or eigenvalue problems for the system partially-differential equations with variable coefficients. The solution of these problems are made for the various type boundary conditions.

Under solution procedure, i.e. under FEM modeling of the considered problems it is introduced the corresponding functionals the validity of which is proven. The numerical results are obtained for each considered problem and the discussion of these results are given.

Keywords : Composite, fundamental frequency, forced vibration, spatial periodical curving, stability.

1. GİRİŞ

1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler

Mevcut literatürde yapay şekilde oluşturulmuş kompozit malzemeler, aralarında kesin geometrik sınır olan ve kimyasal açıdan en azından iki tür malzemeden meydana geldiği biçiminde tanımlanmaktadır. Bu tanımdan görüldüğü gibi kompozit malzemeler bileşenlerinin sahip olmadığı özelliklere sahip olabilirler. Bu nedenlerden dolayı günümüzde uçak sanayiinde, gemi sanayiinde, tıp alanında ve çağdaş tekniğin diğer birçok alanlarında kompozit malzemeler yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Kompozit malzemelerin bu şekilde kullanılması onların daha düşük ağırlığa, yüksek mukavemete ve rijitliğe sahip olması ile ilgilidir ki bu özellikler geleneksel malzemelerde bulunmamaktadır.

Yukarıda söylenen ve diğer pek çok nedenden dolayı birçok bilim dalı örneğin mekanik, fizik, kimya v.b. bu malzemelerin kendi dallarına uygun problemlerini araştırmaktır. Bu araştırmalar içerisinde en önemli yerlerden birini kompozit malzemelerin ve bu malzemelerden hazırlanmış yapı elemanlarının dinamik ve statikine ait olan problemlerin matematiksel açıdan modellenmesi ve uygun matematiksel sınır değer veya özdeğer problemlerinin incelenmesidir. Günümüzde gelişmiş dünya devletlerinin hemen hemen hepsinde, kompozit malzemelere ve onlara ait problemler hakkında periyodik bilimsel dergilerin sürekli olarak yayınlanması birçok ciltli kitapların basılması bunları kanıtlamaktadır. Bu açıdan ele alınan tezde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış plakların titreşim ve burkulma problemlerinin matematiksel modellenmesi ve bu modelin gerektirdiği özdeğer ve sınır değer problemlerinin incelenmesi büyük önem taşımaktadır denilebilir.

Bilindiği üzere kompozit malzemelerin (Akbarov ve Guz 2000, Christensen 1979, Chou ve Cullough 1986, Composite Materials Handbook 1992) birçok açıdan sınıflandırılması yapılabilir. Bunlardan en yaygın olanı ve bu malzemelerin mekaniğinde sıkça kullanılan kompozit malzemelerin mikro yapısına ilişkin sınıflandırmadır. Bu sınıflandırmaya göre kompozit malzemeler aşağıdaki gruplara ayrılır:

1. Seyrek, küçük (dispers) tanecik takviyeli kompozitler,
2. Tanecik takviyeli kompozitler,
3. Lifli kompozitler

Birinci tür kompozitler matris ve boyutları 0.01-0.1 mikrometre ve hacim oranı ise %1-%15 aralığında değişen taneciklerden meydana gelir. İkinci tür kompozitlerin yapısında ise taneciklerin boyutu 1 mikrometreden daha büyük olup hacim oranı %25' den fazladır. Lifli kompozit malzemelerde ise liflerin çapı 0.01 mikrometreden 100 mikrometreye kadar değişebilir. Bu liflerin hacim oranı ise %70' e kadar arttırılabilir. Yukarıda adları verilen gruplar içerisinde en yaygın olarak kullanılan lifli kompozitlerdir ki bunların içerisinde de en önemli yerlerden birini polimer matrisi olan kompozit malzemeler tutar. Bu türlü kompozit malzemelerde takviye olarak bor, cam ve matris malzemesi olarak epoksi, polyester vb. reçineler kullanılır. Bu malzemeler lif yönlerine bağlı olarak her bir tabakadaki lifler birbirine paralel ve ayrı tabakalardaki lifler belirli bir açı yapan levhalı kompozit malzeme ve yine lifleri birbirine paralel olan lifli kompozit malzeme diye gruplara ayrılır. Bu çalışmada yapılan araştırmalar lifli ve levhalı kompozit malzemelerden yapılmış plağın titreşim ve burkulmalarının bazı güncel problemlerinin matematiksel açıdan çözülmesine ilişkin araştırmalardır.

Yukarıda söylenenlerden başka kompozit malzemeler takviyelerin (güçlendiricilerin) geometrik şekillerine göre de sınıflandırılırlar. Bu sınıflandırmaya göre kompozit malzemeler küre şekilli güçlendiricili, silindirik şekilli güçlendiricili ve plak şekilli güçlendiricili olmak üzere üç sınıfa ayrılır. Bu tür sınıflandırmaya göre tanecik güçlendirici kompozitlere küre şeklinde güçlendiricisi olan, lifli kompozitlere ise silindir ve plak şeklinde güçlendiricisi olan kompozitler gibi bakılabilir. Bu tür geometrik modellemelerden dolayı kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin matematiksel açıdan modellenmesi önemli ölçüde kolaylaşır.

Lifli ve levhalı kompozitlerin ve bunlardan yapılan yapı elemanları mekaniğinin en önemli ve güncel problemlerinden biri; bu malzemelerin yapısında olan belirli özelliklere ilişkin problemlerdir. Bu özelliklerden en önemlisi ise malzeme yapısındaki liflerin levhaların eğrilikli olmasıdır. Birçok kaynaklardan görülebileceği gibi örneğin; Akbarov ve Guz (1991a), (1991b), (2000), Feng vd.(1998), Ganesh ve Naik (1996), Guz vd. (1997), (1988), Mansfield ve Purslow (1974), Tarnopolosky ve Rose (1996) vd. kompozit malzemelerin lif ve levhalarının yapısındaki eğrilikler bu malzemelerin tasarımından oluştuğu gibi (1.durum), onların hazırlanma aşamalarında kullanılan teknolojik işlemlerin bir seri uyumsuzluklarının bir sonucu olabilir(2.durum). 1.durumda liflerden hazırlanmış dokuma kumaş lifli levhaları olan levhalı kompozitleri örnek göstermek mümkündür. Bu durumda eğrilikler periyodik şekilli olurlar. 2. durumda ise bu eğrilikler genellikle yerel (lokal) eğrilikler taşırlar.

Söylenenler açısından tezde ele alınan çalışmalar iki yönde periyodik eğrilikli olan levhalı

kompozitlerden hazırlanmış plakların burkulma ve titreşimine ait olmaktadır. Şimdi ise bu yönde yapılan araştırmaların kısa özetini ele alalım.

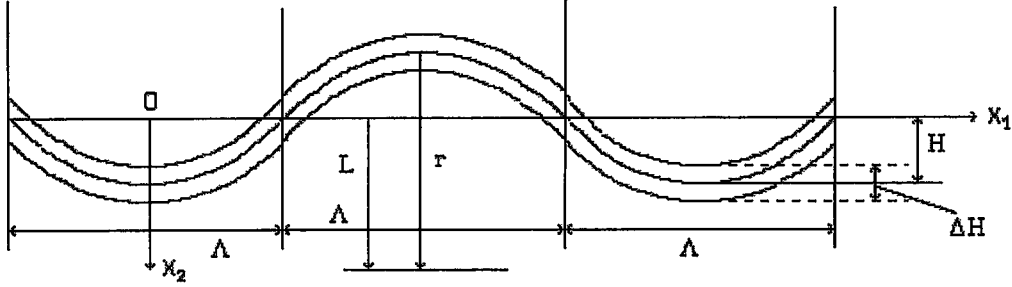
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti

Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin mekaniğine ait problemlerin matematiksel açıdan modellenerek teorik açıdan incelenmesi şimdiye kadar iki yaklaşım çerçevesinde yapılmıştır. Bu yaklaşımlar süreklilik (continuum) ve parçalı homojen cisim yaklaşımları gibi adlandırılmaktadır. Süreklilik yaklaşımın kendisi de genel ve yerel süreklilik yaklaşımı olarak ikiye ayrılabilir. Genel süreklilik yaklaşımlarında malzeme yapısındaki lif ve levhaların eğrilikleri, boyutları eğrilik boyutlarından büyük olan belirleyici elemanlar çerçevesinde hesaplanmış normalize edilmiş mekaniksel özellikler aracılığı ile göz önüne alınmaktadır. Bu yönde yapılan ilk araştırma Bolotin (1966a)'dır. Bu çalışmada Bolotin ve Novichkov (1980)'de açıklaması verilmiş kompozit ortamlar teorisi, küçük eğrisel yapıya sahip çok katlı ortamlar için geliştirilmiştir. Bu geliştirme sonucunda elde edilen denklemler lineer olmayan denklemler olmuştur. Söz konusu eğriliklerin küçük olması göz önüne alınarak uygun problemlerin çözülmesi için küçük parametreler yöntemi kullanılmıştır. Böylece lineer olmayan sınır değer problemlerinin çözümü bir seri lineer sınır değer problemlerinin çözümüne indirgenmiştir. Elde edilen sonuçlar birkaç gerçek duruma uygulanarak gösterilmiştir ki malzeme yapısındaki küçük eğrilikler güçlendirici lifler yönündeki elastisite modülünü önemli bir ölçüde küçültebilir. Elde edilen bu teorik sonuçlar daha sonraları Makarov ve Nikolayev (1971), Nosarev (1967) çalışmalarında deneysel olarak bir daha tespit edilmiştir. Bundan başka Bolotin (1966a)'da yapılan çalışma Bolotin (1966b)'de lineer viskoelastik ortamlar için geliştirilmiştir. Daha sonralar bu yönde Kalmkarov vd. (1987), Tarnopolosky ve Rose (1969), Tarnopolosky vd. (1987), Whitney ve Chou (1989) ve diğer araştırmalar yapılmıştır.

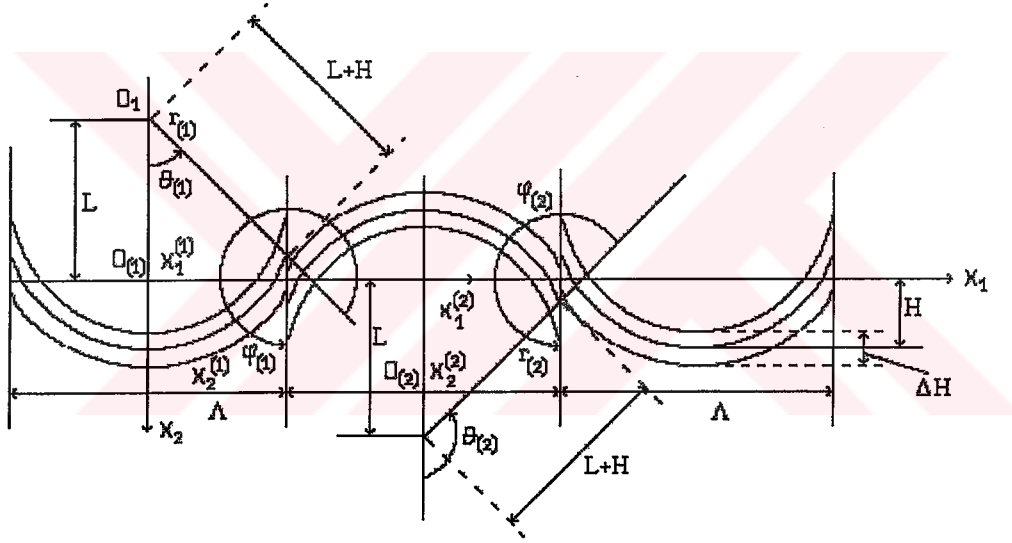
Genel süreklilik teorisi çerçevesinde yapılan daha bir çok araştırmalar vardır. Tez konusuna ait çalışmalar yerel süreklilik teorisi çerçevesinde yapıldığından, bu teori uygulaması ile yapılan araştırmalar üzerinde daha geniş açıklamalar yapalım.

Yerel süreklilik teorileri malzeme yapısındaki eğriliklerin, boyutları eğrilik periyodunun veya genliğinin boyutundan çok küçük olan alanlardaki gerilme yayılımına etkisini incelemeye imkan sağlamaktadır. Bu nedenle "yerel" süreklilik teorileri kompozit malzemelerin yerel kırılması, titreşimi ve burkulması açısından daha çok önem taşımaktadır. Yerel süreklilik teorisi oluşturma açısından ilk teşebbüsler Guz (1983a), (1983b) çalışmalarında yapılmıştır.

Bu çalışmalar yapısında düzlem periyodik eğrilikleri olan çok katlı kompozit malzemeler için geliştirilmiştir. Şimdi bu süreklilik teorisinin esas ilişkilerini kısaca açıklayalım. Bu amaçla periyodik eğrilikleri olan çok katlı kompozit malzemeden oluşan belirleyici bir paket ele alalım ve bundan sonraki açıklamaları bu paket üzerinde yapalım.



Şekil 1.1 Ele Alınan Plağın Belirleyici Levhası



Şekil 1.2 Ele Alınan Belirleyici Plağın Eğrisel Kısımları ile Değiştirilen Dairesel Bölgeler

Paketin $x_3 = sbt.$ kesiti Şekil 1.1' de gösterilmiştir. Bu şekilde paketin orta çizgisi ile Ox_1x_2 koordinat takımını ilişkilendirelim ve

$$\Delta H = h_1 + h_2 + \dots + h_N \quad ; \quad h' = \max\{h_1, h_2, \dots, h_N\} \quad (1.1)$$

işaretlemelemlerini kabul edelim. Burada h_i ($1 \leq i \leq N$) belirleyici paketteki i . katın kalınlığıdır. Bundan başka aşağıdaki işaretlemelemler kabul edilmiştir: H eğriliğın genliğini, Λ eğriliğın yarım peryod uzunluğunu, r orta çizginin Ox_1 ekseninden maksimal uzaklıkta olan noktasının eğrilik yarıçapını, $L = r - H$ ve d malzemenin kapsadığı D alanının karakteristik

küçük boyutunu göstermektedir. Guz (1983a), (1983b) yerel süreklilik teorisi aşağıdaki koşullar çerçevesinde geliştirilmiştir.

1. Kompozit malzemenin yapısı Ox_1 eksen yönünde periyodu 2Λ olan periyodik eğriliğe sahiptir; yani malzemenin yapısında Ox_3 eksen yönünde (Ox_3 eksen şekil düzlemine dik doğrultudadır) hiçbir eğrilik yoktur.
2. Aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır;

$$h' \ll H \quad ; \quad \Delta H \ll \Lambda \quad ; \quad H \ll \Lambda \quad ; \quad \Lambda \ll L \quad ; \quad \Lambda \ll d \quad (1.2)$$

Söz konusu teoremin oluşturulmasında en önemli yeri belirleyici elemanın gerilme tansörü bileşenleri ile şekil değiştirme tansörü bileşenleri arasındaki ilişkinin oluşturulması tutar. Bu amaçla Guz (1983a), (1983b) makalesinde aşağıdaki işlemler yapılmaktadır.

Birinci olarak (1.2)' de verilen ilk dört eşitsizlik göz önüne alınarak Şekil 1.1' de gösterilmiş belirleyici elemanların her yarım periyotdaki kısmı, geometrik parametreleri Şekil 1.2' de verilen dairesel halkalarla yer değiştirilir. Daha sonra bu halkaların her biri ile (örneğin m . ile) $x_j^{(m)}$ kartezyen koordinat takımı birleştirilir. Bu koordinatlarla global Ox_1x_2 koordinat takımı arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi verilir.

$$x_2^{(m)} \equiv x_2 \quad ; \quad x_1^{(m)} = x_1 - (m-1)\Lambda \quad ; \quad x_3^{(m)} = x_3 \quad ; \quad -\infty \leq m \leq +\infty \quad (1.3)$$

m . dairesel halka kısmı için

$$\left| x_1^{(m)} \right| \leq \frac{1}{2}\Lambda \quad (1.4)$$

sağlanmaktadır. Ayrıca m . dairesel halka ile Şekil 1.2' de gösterilen yerel kutupsal koordinat takımı da ele alınmakta ve yerel koordinat takımları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$r_{(m)} \cos \theta_{(m)} = x_2^{(m)} - (-1)^m L \quad ; \quad r_{(m)} \sin \theta_{(m)} = x_1^{(m)} \quad ; \quad \varphi_{(m)} = 2\pi - \theta_{(m)} \quad (1.5)$$

Yukarıda verilen işaretlemeler göz önüne alarak m . dairesel halka için bünye bağıntıları aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= A_{11}^0 \varepsilon_{rr} + A_{12}^0 \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13}^0 \varepsilon_{33} \quad ; \quad \sigma_{\theta 3} = 2A_{44}^0 \varepsilon_{\theta 3} \quad ; \quad A_{44}^0 = G_{23}^0 \\
\sigma_{\theta\theta} &= A_{12}^0 \varepsilon_{rr} + A_{22}^0 \varepsilon_{\theta\theta} + A_{23}^0 \varepsilon_{33} \quad ; \quad \sigma_{r3} = 2A_{55}^0 \varepsilon_{r3} \quad ; \quad A_{55}^0 = G_{13}^0 \\
\sigma_{33} &= A_{13}^0 \varepsilon_{rr} + A_{23}^0 \varepsilon_{\theta\theta} + A_{33}^0 \varepsilon_{33} \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = 2A_{66}^0 \varepsilon_{r\theta} \quad ; \quad A_{66}^0 = G_{12}^0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.6) ilişkilerindeki A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 elastisite sabitleri, ele alınan malzemenin yapısında eğrilikleri olmadığı durumundaki uygun normalize edilmiş mekanik özelliklerini göstermektedir. Bu özellikler Christensen (1979) , Composite Materials Handbook (1992) vs. kaynaklarında gösterildiği gibi hesaplanmaktadır.

(1.2) eşitsizliklerine göre

$$\varepsilon = \frac{\Lambda}{\pi L} \ll 1 \tag{1.7}$$

küçük parametresi göz önüne alınabilir. Buradan ve Şekil 1.2' den yani $(\Lambda/2)^2 \cong (L+H)^2 - L^2$ ilişkisinden

$$\Lambda^2 \approx 8LH \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\Lambda}{\pi L} \approx \frac{8H}{\pi \Lambda} \ll 1 \tag{1.8}$$

ifadesi yazılabilir. Böylece yukarıdaki ifadeleri göz önüne alarak Guz (1983a), (1983b) kaynaklarında kutupsal koordinatlardan yerel kartezyen koordinatlara geçiş formüllerinden yararlanarak ve daha sonra bir takım dönüşümler yapılarak ele alınan belirleyici eleman için elastisite bağıntıları Ox_1x_2 genel koordinat takımında aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A_{11} \varepsilon_{11} + A_{12} \varepsilon_{22} + A_{13} \varepsilon_{33} + 2A_{16} \varepsilon_{12} \quad ; \quad \sigma_{23} = 2A_{44} \varepsilon_{23} + 2A_{45} \varepsilon_{13} \\
\sigma_{22} &= A_{12} \varepsilon_{11} + A_{22} \varepsilon_{22} + A_{23} \varepsilon_{33} + 2A_{26} \varepsilon_{12} \quad ; \quad \sigma_{13} = 2A_{45} \varepsilon_{23} + 2A_{65} \varepsilon_{13} \\
\sigma_{33} &= A_{13} \varepsilon_{11} + A_{23} \varepsilon_{22} + A_{33} \varepsilon_{33} + 2A_{36} \varepsilon_{12} \\
\sigma_{12} &= A_{16} \varepsilon_{11} + A_{26} \varepsilon_{22} + A_{36} \varepsilon_{33} + 2A_{66} \varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Daha sonra bir takım basitleştirme yapılarak ve küçük parametreden yararlanarak (1.9)' daki malzeme özelliklerini belirten A_{ij} ' ler için aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= A_{11}^0 + \varepsilon^2(-A_{11}^0 + A_{12}^0 + 2G_{12}^0)2\text{Sin}^2\theta \quad ; \quad A_{33} = A_{33}^0 \\
A_{12} &= A_{12}^0 + \varepsilon^2(A_{11}^0 + A_{22}^0 - 2A_{12}^0 - 4G_{12}^0)\text{Sin}^2\theta \\
A_{23} &= A_{23}^0 + \varepsilon^2(A_{13}^0 - A_{23}^0)\text{Sin}^2\theta \quad ; \quad A_{26} = \varepsilon(A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2G_{12}^0)\text{Sin}\theta \\
A_{16} &= \varepsilon(-A_{11}^0 + A_{12}^0 + G_{12}^0)\text{Sin}\theta \quad ; \quad A_{36} = \varepsilon(A_{23}^0 - A_{13}^0)\text{Sin}\theta \\
A_{22} &= A_{22}^0 + \varepsilon^2(-A_{22}^0 + A_{12}^0 + 2G_{12}^0)2\text{Sin}^2\theta \tag{1.10} \\
A_{13} &= A_{13}^0 + \varepsilon^2(A_{23}^0 - A_{13}^0)\text{Sin}^2\theta \quad ; \quad A_{45} = \varepsilon(G_{13}^0 - G_{23}^0)\text{Sin}\theta \\
A_{44} &= G_{23}^0 + \varepsilon^2(G_{13}^0 - G_{23}^0)\text{Sin}^2\theta \quad ; \quad A_{55} = G_{13}^0 + \varepsilon^2(G_{23}^0 - G_{13}^0)\text{Sin}^2\theta \\
A_{66} &= G_{12}^0 + \varepsilon^2(A_{11}^0 + A_{22}^0 - 2A_{12}^0 - 4G_{12}^0)\text{Sin}^2\theta
\end{aligned}$$

Burada

$$\theta = \frac{\pi x_1}{\Lambda} \tag{1.11}$$

dır. Böylece Guz (1983a), (1983b)' de verilen yerel süreklilik teorisinin bünye bağıntıları elde edilmiş olur. Bu teorisin problemlerinin çözülmesi için Guz (1983b)' de küçük parametreler yöntemi önerilmektedir. Bundan başka Guz (1983a), (1983b) çalışmalarında bu teoriye ait (Ox_1x_3 düzleminde dış kuvvetler $\sigma_{13} = \tau$ biçiminde olduğu durumunda) söz konusu yerel süreklilik teorisinin kesin bir çözümü elde edilmiştir. Guz (1983c)' de bu teori çerçevesinde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden oluşmuş sonsuz cisimde çekme, basınç ve kayma durumlarındaki quasi-homojen gerilme durumları incelenir ve böylece malzeme yapısındaki eğriliklerin gerilme yayılımına olan yerel etkileri belirlenmiş olur. Daha sonra Guz (1983d) makalesinde Hamilton Varyasyon prensibinden yararlanarak yukarıdaki gibi belirlenmiş eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış titreşim problemlerinin incelenmesi için bir yöntem geliştirilmiş ve bu yöntem $|x_1| \leq d$ ve Ox_2x_3 eksen yönünde sonsuz olan bir şeridin serbest titreşim frekanslarına söz konusu eğriliklerin etkisi incelenir. Bununla da Guz (1983a), (1983b) teorisi çerçevesinde yapılan araştırmaların hemen hemen hepsi özetlenmiş olur. Görüldüğü gibi bu araştırmaların sayısı pek çok değildir.

Bundan başka Guz (1983a), (1983b) süreklilik teorisi sadece küçük düzlem periyodik eğrileri için geçerli olduğundan çok geniş uygulama alanı bulamamaktadır. Başka bir deyimle bu teori eğriliğin genlikleri büyük olduğu durumlarda; eğrilikler yerel olduğu durumlarda ve daha sonra malzeme yapısındaki eğrilikler tek yönde değil, birbirine dik iki yönde olduğunda uygulanmaz. Sıralanan tüm bu durumları göz önüne alabilecek yerel süreklilik teorisi

Akbarov ve Guz (1991a) çalışmasında verilmiştir. Bu teori Akbarov ve Guz (2000) kitabında daha da geliştirilmiştir. Bu teorinin esas bağıntı ve ifadelerini bir sonraki bölümde etraflı bir biçimde vereceğiz. Şimdi ise bu teori çerçevesinde yapılan araştırmaların kısa özetini ele alalım.

Akbarov ve Guliev (1991) makalesinde yapısında Ox_1 ve Ox_3 eksenleri yönünde küçük periyodik eğrilikleri olan kompozit malzemedan oluşmuş sonsuz bir cisimde çekme-basınç ve basit kaymalardan dolayı oluşan quasi-homojen gerilme durumu incelenmiş ve bu gerilmelere eğrilik parametrelerinin etkisi gösterilmiştir. Özel durumlarda Guz (1983c) makalesindeki sonuçlar da tekrar elde edilmiştir. Daha sonra Akbarov ve Guz süreklilik teorisi eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış yapı elemanlarının statik ve dinamik problemlerinin incelenmesine uygulanmıştır. Bu tür incelemeler Akbarov ve Yahnioğlu (1997), (1998), (1999a), (1999b), Akbarov ve Selim (2001), Kütüğ (1996), (1997), Yahnioğlu (1996), (1997), Yahnioğlu ve Selim (2000), Akbarov vd. (1993), Zamanov (1999), (2000a), (2001), (2002) araştırmalarında yapılmıştır. Bu araştırmaların hepsinde malzeme yapısındaki periyodik veya yerel eğriliklerin sadece Ox_1 eksen yönünde olduğu varsayılmıştır. Bu koşul çerçevesinde kenarlarından basit veya rijit tutturulmuş şeritte düzlem şekil değiştirme durumunda ve dikdörtgen kalın plakta (eğriliğin bulunduğu yöndeki kenarlarından rijit veya basit tutturulmuş, diğer yöndeki kenarlarından ise sadece basit tutturulmuş) bazı statik ve dinamik (titreşim) problemleri başarı ile incelenmiştir. Bu problemlerin hemen hemen hepsi sayısal olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımı ile yapılmıştır. Şeride ait problemlerin incelenmesinde iki boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi, plaklara ait incelemelerde ise yarı-analitik Sonlu Elemanlar Yöntemi uygulanmıştır. Böylece yapılan araştırmaların hepsinde sonlu eleman modellemesi iki boyutlu olmuştur. Açıktır ki eğer plak malzemesi yapısındaki eğrilik birbirine dik iki yönde olmuş olsaydı uygun sınır değer yada özdeğer problemlerinin incelenmesi için iki boyutlu sonlu eleman modellemesi yetersiz olurdu. Dolayısı ile plak malzemesi yapısındaki eğrilikler iki yönlü olduğu durumlarda üç boyutlu sonlu eleman modellemesi zorunluluğu karşımıza çıkar. Bu yönde ilk teşebbüs yapısında birbirine dik iki yönde periyodik eğriliği olan kompozit malzemedan yapılmış dikdörtgen plaktaki gerilme durumuna ait Kahramaner vd. (2001) çalışmasında verilmiştir. Bu konuda daha geniş açıklamalar Akbarov ve Guz (2002) makalesinde verilmiştir. Görüldüğü gibi şimdiye kadar yapısında iki yönde eğriliği olan kompozit malzemedan hazırlanmış kalın plakların titreşim veya burkulmasına ait sınır değer veya özdeğer problemlerinin incelenmesi yönünde hiç bir araştırma yapılmamıştır. Tez çalışmasında bu yöndeki ilk teşebbüsleri oluşturan, yapısında birbirine dik iki yönde periyodik eğriliği olan çok katlı kompozit malzemedan hazırlanmış

kenarlarından ankastre veya basit mesnetle tutturulmuş kalın plakların serbest ve zorlanmış titreşimlerine ve aynı zamanda burkulmasına ait matematiksel problemlerin üç boyutlu sonlu eleman modellemesi aracılığı ile çalışmalar yapılmıştır.

1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Çalışmanın konusu, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde bazı üç boyutlu titreşim ve burkulma problemlerinin üç boyutlu SEY modellemesi ile araştırılmasıdır. Titreşim problemlerinin incelenmesinde ele alınan plağın üst yüzeyinde düzgün yayılı, zamana göre periyodik değişen normal yükün etki ettiği kabul edilmektedir. Tezde değişken katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler takımının üç boyutlu sınır değer ve özdeğer problemlerinin sayısal olarak çözümünün araştırılması ve hem de bu amaçla SEY yönteminin geliştirilmesi teorik (matematiksel) açıdan çok büyük önem taşımaktadır.

Yang vd. (1986) ve bu gibi başka kaynaklardan görüldüğü gibi, günümüzde geniş bir biçimde uygulama alanı bulan tekstil kompozitler, yapısında iki yönde eğriliği olan çok katlı kompozitler gibi modellenmektedir. Bu nedenden dolayı tez kapsamında yapılan araştırmaların uygulama açısından da çok büyük önemi vardır.

Yapılan çalışmalarda görülmüştür ki malzeme yapısında ele alınan iki yönlü eğrilikler serbest ve zorlanmış titreşimlere güçlü bir şekilde etki eder ve bazen malzemenin kırılmasına neden olur. Dolayısı ile bu gibi durumların önlenmesi için, verilen dış kuvvetlerin bu elemanlarda yarattığı yerdeğiştirme ve gerilme dağılımına malzeme yapısındaki iki yönlü eğriliklerin etkisinin bilinmesi çok önemlidir ve bu da bir kez daha çalışmanın uygulama açısından gerekliliğinin en önemli göstergesi olarak değerlendirilebilir.

1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amacı aşağıda özetlenmiştir.

- 1) Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde elastisite teorisinin kesin üç boyutlu hareket denklemleri kullanılarak eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin sonlu üç boyutlu alanların (dikdörtgen plakların) serbest ve zorlanmış titreşimlerine ait olan sınır değer problemlerinin formülasyonu,
- 2) Söz konusu olan problemlerin üç boyutlu sonlu elemanlar ile modellenmesi,

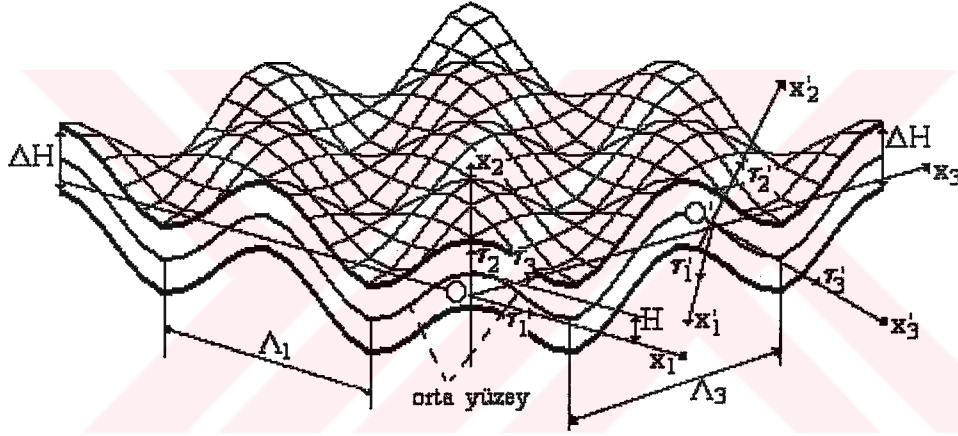
- 3) Sayısal çözümlerin elde edilmesi için gerekli algoritmaların ve programların yapılması,
- 4) Belirlenen problem parametrelerine göre plakların serbest ve zorlanmış titreşimlerine ait bazı sayısal sonuçların alınması ve bunların yorumlanması,
- 5) İki yönde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerden yapılmış Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Stabilitate Teorisi çerçevesinde stabilite kaybı problemlerinin formülasyonu,
- 6) Formülasyonu yapılmış stabilite problemlerinin üç boyutlu sonlu elemanlar ile modellenmesi,
- 7) İncelenen stabilite problemlerinin sayısal çözümü için gerekli algoritmaların ve programların yapılması,
- 8) Belirlenen problem parametrelerine göre sayısal sonuçların alınması ve bunların yorumlanması.



2. SERBEST VE ZORLANMIŞ TİTREŞİM PROBLEMLERİ

2.1 Akbarov ve Guz Süreklilik Teorisinin Esas Bağlıları

Yapısında iki yönde periyodik eğriliği olan kompozit malzemedен hazırlanmış Şekil 2.1’de gösterilen belirleyici eleman ele alalım. Bu şekilde aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir. H eğriliğin maksimal genliğini, Λ_1 ve Λ_3 sırasıyla Ox_1 ve Ox_3 eksenleri yönündeki eğriliğin yarım periyodunun uzunluklarını, ΔH belirleyici elemanın kalınlığını göstermektedir. Ele alınan malzemedeki tekrarlanan levhaların kalınlıkları h_1, h_2, \dots, h_N olarak alınırsa o zaman karşı gelen kompozit malzemenin kalınlığı $\Delta H = h_1 + h_2 + \dots + h_N$ olarak ifade edilir.



Şekil 2.1 İki Yönde Periyodik Eğriliği Olan Kompozit Malzemedен Hazırlanmış Belirleyici Elemanın Geometrisi

Başlangıçlı belirleyici elemanın orta yüzeyinde olan yerel $O'x'_1x'_2x'_3$ koordinat takımı ele alalım ve $O'x'_2$ ekseninin bu yüzeye normal olan τ'_2 yönünde olduğunu varsayalım. $O'x'_1$ ve $O'x'_3$ eksenleri de sırasıyla bu yüzeye teğet olan τ'_1 ve τ'_3 tanjant vektörleri yönündedir. Bu vektörlerin tanımı aşağıda verilmiştir. Eğriliğin olmadığı durumda τ'_1 , τ'_2 ve τ'_3 vektörleri sırasıyla Şekil 2.1’ de gösterilen genel $Ox_1x_2x_3$ koordinat takımının τ_1 , τ_2 ve τ_3 vektörleri ile çakışacaktır.

Ele alınmış belirleyici elemanın orta yüzeyinin denklemini

$$x_2 = F(x_1, x_3) = \varepsilon f(x_1, x_3) \quad (2.1)$$

biçiminde yazalım. Burada ε boyutsuz parametresi eğiriliğin derecesini göstermektedir. Bu parametrenin geometrik anlamı $F(x_1, x_3)$ fonksiyonunun açık formülü verildiğinde belirtilecektir. Çalışmalarımızda F' in kendisinin ve 1. mertebeden türevlerinin sürekli olduğunu kabul edeceğiz.

Seçilen $O'x'_1x'_2x'_3$ yerel koordinat takımındaki bünye bağıntıları aşağıdaki biçimde verilsin.

$$\sigma_i^0 = A_{ij}^0 \varepsilon_j^0 \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.2)$$

burada

$$\begin{aligned} \sigma_i^0 &= \sigma_{ii}^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \quad \sigma_4^0 = \sigma_{23}^0 \quad , \quad \sigma_5^0 = \sigma_{13}^0 \quad , \quad \sigma_6^0 = \sigma_{12}^0 \\ \varepsilon_i^0 &= \varepsilon_{ii}^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \quad \varepsilon_4^0 = \varepsilon_{23}^0 \quad , \quad \varepsilon_5^0 = \varepsilon_{13}^0 \quad , \quad \varepsilon_6^0 = \varepsilon_{12}^0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

dir.

İleride (2.2) bağıntılarının temel eksenleri $O'x'_1$, $O'x'_2$ ve $O'x'_3$ eksenleri ile çakışan ortotropik bir cisme ait olduğunu kabul edeceğiz. Şimdi uygun bünye bağıntılarının $Ox_1x_2x_3$ genel koordinat sisteminde nasıl oluşturulduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk olarak $\ell_{ij} = \tau'_i \tau_j$ kosinüsleri belirlenir. Bu kosinüsler $O'x'_i$ ile Ox_j eksenleri arasındaki açının kosinüsleridir. Belirleyici elemanın orta yüzeyinin (2.1)' de verilen denklemi vektöriyel biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{r} = x_1 \tau_1 + F(x_1, x_3) \tau_2 + x_3 \tau_3 \quad (2.4)$$

(2.4) denkleminde ve $\tau'_2 = (\partial r / \partial x_2 \times \partial r / \partial x_1) / |(\partial r / \partial x_2 \times \partial r / \partial x_1)|$; $\tau'_1 = (\partial r / \partial x_1) / |(\partial r / \partial x_1)|$; $\tau''_3 = \tau'_1 \times \tau'_2$ bağıntılarından τ''_1 , τ'_2 , τ''_3 vektörleri elde edilir. Bu üç vektörün τ'_2 etrafında $\psi/2$ ($\sin \psi = F_{,1} F_{,2} F_{,3}$) açısı kadar döndürülmesi ile yeni τ'_1 , τ'_2 , τ'_3 üçlüsü hesaplanır. Bunlar da τ_1 , τ_2 ve τ_3 üçlüsü ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tau'_i = \ell_{ij} \tau_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Burada aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\ell_{11} &= g_1 V_1 + F_{,1} F_{,3} g_2 V_1 V_2 \quad , \quad \ell_{22} = F_{,1} g_1 V_1 - F_{,3} g_2 V_1 V_2 \quad , \quad \ell_{13} = -(1 + F_{,1}^2) g_2 V_1 V_2 \quad , \\
\ell_{21} &= -F_{,1} V_2 \quad , \quad \ell_{22} = V_2 \quad , \quad \ell_{23} = -V_2 F_{,3} \quad , \quad \ell_{31} = g_2 V - F_{,1} F_{,3} g_1 V_1 V_2 \quad , \\
\ell_{32} &= F_{,1} g_2 V_1 + F_{,3} g_1 V_1 V_2 \quad , \quad \ell_{33} = (1 + F_{,1}^2) g_1 V_1 V_2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6)' da aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
F_{,1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad , \quad F_{,3} = \frac{\partial F}{\partial x_3} \quad , \quad V_1 = \left(1 + (F_{,1})^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
V_2 &= \left(1 + (F_{,1})^2 + (F_{,3})^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad V_3 = \left(1 + (F_{,3})^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
g_1 &= \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad , \quad g_2 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad , \quad \psi = \arcsin(F_{,1} F_{,3} V_1 V_3)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Koordinat sisteminin dönüşümünde elastisite sabitlerinin dönüşüm formülleri yani

$$A_{sp} = A_{mn}^0 q_{sm} q_{pn} \quad m, n, s, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \tag{2.8}$$

formülleri uygulanırsa genel $Ox_1x_2x_3$ koordinat takımında ele alınan malzemenin mekanik özellikleri belirlenmiş olur. Buradaki A_{mn}^0 sabitleri (2.2) formülündeki sabitler olup yerel koordinat takımındaki normalize edilmiş mekanik sabitlerini göstermektedir. Bu sabitler kompozit malzemenin yapısında eğrilik olmadığı durumdaki normalize edilmiş mekanik sabitleri ile çakışmaktadır.

Şimdi (2.8)' deki q_{ij} ' lerin ifadeleri Akbarov ve Guz (2000) kaynağına dayanarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \ell_{11}^2 \quad , \quad q_{12} = \ell_{12}^2 \quad , \quad q_{13} = \ell_{13}^2 \quad , \quad q_{14} = 2\ell_{12}\ell_{13} \quad , \quad q_{15} = 2\ell_{13}\ell_{11} \quad , \\
q_{16} &= 2\ell_{12}\ell_{11} \quad , \quad q_{21} = \ell_{21}^2 \quad , \quad q_{22} = \ell_{22}^2 \quad , \quad q_{23} = \ell_{23}^2 \quad , \quad q_{24} = 2\ell_{23}\ell_{22} \quad , \\
q_{25} &= 2\ell_{23}\ell_{21} \quad , \quad q_{26} = 2\ell_{22}\ell_{21} \quad , \quad q_{31} = \ell_{31}^2 \quad , \quad q_{32} = \ell_{32}^2 \quad , \quad q_{33} = \ell_{33}^2 \quad , \\
q_{34} &= 2\ell_{33}\ell_{32} \quad , \quad q_{35} = 2\ell_{33}\ell_{31} \quad , \quad q_{36} = 2\ell_{32}\ell_{31} \quad , \quad q_{41} = \ell_{31}\ell_{21} \quad , \\
q_{42} &= \ell_{32}\ell_{22} \quad , \quad q_{43} = \ell_{33}\ell_{23} \quad , \quad q_{44} = \ell_{33}\ell_{22} + \ell_{32}\ell_{23} \quad , \quad q_{45} = \ell_{33}\ell_{21} + \ell_{31}\ell_{23} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$q_{46} = l_{31}l_{22} + l_{32}l_{21} , \quad q_{51} = l_{31}l_{11} , \quad q_{52} = l_{32}l_{12} , \quad q_{53} = l_{33}l_{13} ,$$

$$q_{54} = l_{33}l_{12} + l_{32}l_{13} , \quad q_{55} = l_{33}l_{11} + l_{31}l_{13} , \quad q_{56} = l_{31}l_{12} + l_{32}l_{11} ,$$

$$q_{61} = l_{21}l_{11} , \quad q_{62} = l_{12}l_{22} , \quad q_{63} = l_{13}l_{23} , \quad q_{64} = l_{13}l_{22} + l_{12}l_{23} ,$$

$$q_{65} = l_{13}l_{21} + l_{11}l_{23} , \quad q_{66} = l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21}$$

Böylece, (2.8) ifadesi göz önüne alınarak $Ox_1x_2x_3$ genel koordinat takımındaki bünye bağıntıları aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.10)$$

Burada

$$\sigma_i = \sigma_{ii} \quad (i = 1, 2, 3) , \quad \sigma_4 = \sigma_{23} , \quad \sigma_5 = \sigma_{13} , \quad \sigma_6 = \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ii} \quad (i = 1, 2, 3) , \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{23} , \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{13} , \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$$

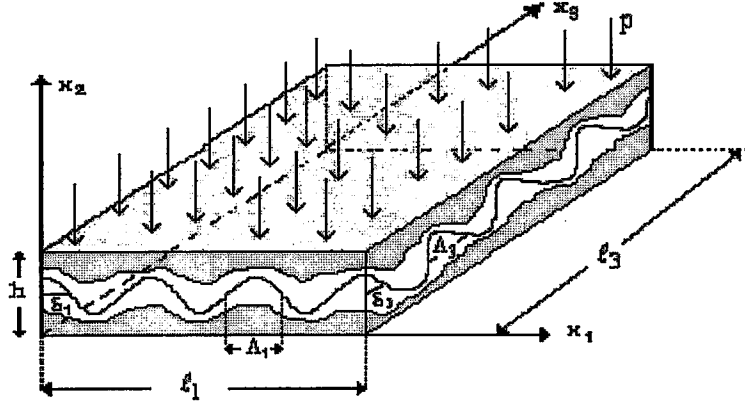
işaretlemleri kabul edilmiştir. (2.8)-(2.10) bağıntılarının eğrilik parametrelerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın elde edildiği açıktır. (2.8)-(2.10)' a göre genelde aşağıdaki A_{ij} bağıntıları A_{ij}^0 sabitleri ve $F(x_1, x_3)$ fonksiyonu ile yazılır.

$$A_{ij} = A_{ij}(A_{nm}^0, F(x_1, x_3)) \quad (2.11)$$

A_{ij} ' lerin A_{nm}^0 ve $F(x_1, x_3)$ ' lerle ifadesi (2.8)-(2.10)' dan elde edilmektedir.

2.2 Problemlerin Matematiksel Formülasyonu

Çalışmada $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq l_1 , 0 \leq x_2 \leq h , 0 \leq x_3 \leq l_3\}$ bölgesinde sağlanan aşağıdaki değişken katsayılı, lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı ele alınmaktadır. Ω bölgesi x_1 yönünde l_1 , x_3 yönünde l_3 uzunluğunda ve h yüksekliğine sahip, yapısında iki yönde eğrilik bulunduran dikdörtgen bir plağı temsil eder. Plak ve plak malzemesinin yapısının geometrisi Şekil 2.2' de verilmektedir. Plak malzemesinin bünye denklemi önceki kısımda açıklanan Akbarov ve Guz süreklilik teorisi ile verilmektedir.



Şekil 2.2 Plak ve Plak Malzemesinin Yapısının Geometrisi.

Şimdi ele alınan problemin alan denklemlerini yazalım.

Hareket denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

(2.12)

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

bünye bağıntıları

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

(2.13)

(2.13) eşitliğinde aşağıdaki notasyonlar kabul edilmiştir.

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12})$$

(2.14)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12})$$

(2.15)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_{11}(x_1, x_3) & A_{12}(x_1, x_3) & A_{13}(x_1, x_3) & 2A_{14}(x_1, x_3) & 2A_{15}(x_1, x_3) & 2A_{16}(x_1, x_3) \\ A_{12}(x_1, x_3) & A_{22}(x_1, x_3) & A_{23}(x_1, x_3) & 2A_{24}(x_1, x_3) & 2A_{25}(x_1, x_3) & 2A_{26}(x_1, x_3) \\ A_{13}(x_1, x_3) & A_{23}(x_1, x_3) & A_{33}(x_1, x_3) & 2A_{34}(x_1, x_3) & 2A_{35}(x_1, x_3) & 2A_{36}(x_1, x_3) \\ A_{14}(x_1, x_3) & A_{24}(x_1, x_3) & A_{34}(x_1, x_3) & 2A_{44}(x_1, x_3) & 2A_{45}(x_1, x_3) & 2A_{46}(x_1, x_3) \\ A_{15}(x_1, x_3) & A_{25}(x_1, x_3) & A_{35}(x_1, x_3) & 2A_{45}(x_1, x_3) & 2A_{55}(x_1, x_3) & 2A_{56}(x_1, x_3) \\ A_{16}(x_1, x_3) & A_{26}(x_1, x_3) & A_{36}(x_1, x_3) & 2A_{46}(x_1, x_3) & 2A_{56}(x_1, x_3) & 2A_{66}(x_1, x_3) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

şekil değiştirme ve yerdeğiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

(2.13) bağıntılarını (2.14)-(2.16) ifadelerini göz önüne alarak aşağıdaki gibi yazalım.

$$\sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33} + 2A_{14}\varepsilon_{23} + 2A_{15}\varepsilon_{13} + 2A_{16}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33} + 2A_{24}\varepsilon_{23} + 2A_{25}\varepsilon_{13} + 2A_{26}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{33} = A_{13}\varepsilon_{11} + A_{23}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33} + 2A_{34}\varepsilon_{23} + 2A_{35}\varepsilon_{13} + 2A_{36}\varepsilon_{12} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{23} = A_{14}\varepsilon_{11} + A_{24}\varepsilon_{22} + A_{34}\varepsilon_{33} + 2A_{44}\varepsilon_{23} + 2A_{45}\varepsilon_{13} + 2A_{46}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{13} = A_{15}\varepsilon_{11} + A_{25}\varepsilon_{22} + A_{35}\varepsilon_{33} + 2A_{45}\varepsilon_{23} + 2A_{55}\varepsilon_{13} + 2A_{56}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{12} = A_{16}\varepsilon_{11} + A_{26}\varepsilon_{22} + A_{36}\varepsilon_{33} + 2A_{46}\varepsilon_{23} + 2A_{56}\varepsilon_{13} + 2A_{66}\varepsilon_{12}$$

(2.16) ve (2.18)' deki $A_{ij}(x_1, x_3) = A_{ji}(x_1, x_3)$ fonksiyonlarının ifadeleri (2.11)' de belirlenmektedir. Tez kapsamında (2.12)-(2.17) denklemler takımının incelenmesi iki tür sınır koşulları çerçevesinde yapılmaktadır.

İlk önce ele alınan plağın $x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell_1$ kenarlarında yerdeğişmelerin sıfır, $x_3 = 0$ ve $x_3 = \ell_3$ kenarlarında ise plağın kalınlık yönündeki yerdeğiştirmesinin ve Ox_3 yönünde etki gösteren normal gerilmenin sıfır olduğunu ve üst yüzeyine homojen yayılı ve zamana göre $e^{i\omega t}$ biçiminde periyodik olarak değişen normal yükün etki ettiğini varsayan sınır koşullarını ele alalım. Bu sınır koşullarını 1. sınır koşulları olarak adlandıracağız.

Daha sonra ise $x_1 = 0$, $x_1 = \ell_1$, $x_3 = 0$ ve $x_3 = \ell_3$ kenarlarındaki tüm yerdeğiştiremelerin sıfır olduğunu ve diğer sınır koşulunda olduğu gibi, üst yüzeyine homojen yayılı ve zamana göre $e^{i\omega t}$ biçiminde periyodik olarak değişen normal yükün etki ettiğini varsayan sınır koşullarını ele alalım. Bu tür sınır koşullarını ise 2. sınır koşulları olarak adlandıracağız.

1. Sınır Koşulları: (Problem 1)

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=0, \ell_1} = u_2|_{x_1=0, \ell_1} = u_3|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad u_2|_{x_3=0, \ell_3} = 0, \quad \sigma_{33}|_{x_3=0, \ell_3} = 0 \\ \sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = pe^{i\omega t}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = \sigma_{32}|_{x_2=h} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

2. Sınır Koşulları: (Problem 2)

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=0, \ell_1} = u_2|_{x_1=0, \ell_1} = u_3|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad u_1|_{x_3=0, \ell_3} = u_2|_{x_3=0, \ell_3} = u_3|_{x_3=0, \ell_3} = 0, \\ \sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{i2}|_{x_2=h} = pe^{i\omega t} \delta_i^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.12)-(2.20)' de aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır. σ_{ij} gerilme tansörü bileşenleri, ε_{ij} şekil değiştirme tansörü bileşenleri ve u_i ($i, j = 1, 2, 3$) yerdeğiştirme vektörü bileşenleri, $A_{ij}(x_1, x_3)$ ' ler de plak malzemesi mekanik özelliklerini belirten normalize edilmiş fonksiyonlardır.

Çalışmamızda (2.12)-(2.17) lineer denklem takımının (2.19) sınır koşulları çerçevesinde oluşturduğu sınır değer problemini Problem 1, (2.20) sınır koşulları çerçevesinde oluşturduğu sınır değer problemini Problem 2 olarak adlandıracağız.

Bilindiği üzere mekanikte bu tür problemlere zorlanmış titreşim problemi denir. Belirli kriterleri uygulayarak zorlanmış titreşim problemlerinin çözümü sonucunda ele alınan plağın serbest titreşim problemlerini de belirleyebiliriz.

x_2 koordinatına göre ortalama işlemi yapıldığında, klasik plak teorisine göre, (2.19) sınır koşulları ele alınan plağın $x_1 = 0, \ell_1$ kenarlarından ankastre, $x_3 = 0, \ell_3$ kenarlarından ise basit tutturulmasına, (2.20) sınır koşulları ise plağın dört kenarlarından da ankastre tutturulmasına karşı gelmektedir.

(2.12)-(2.20)' deki denklem ve ifadelerin yapısından görüldüğü gibi aranan büyüklüklerin zamana bağımlılığını aşağıdaki biçimde seçebiliriz:

$$\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\} = \{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i\} \exp(i\omega t) \quad (2.21)$$

(2.21)' de $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ ve \bar{u}_i ' ler uygun büyüklüklerin genliğini göstermektedir. (2.21) gösterilimini (2.12)-(2.20)' de yerine yazarsak ve genliklerin sembollerindeki üst çizgileri ihmal edersek (2.12)' den genlikler için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (2.22)$$

(2.13)-(2.18)' deki denklem ve ifadeler aranan büyüklüklerin genlikleri için de aynen sağlanmaktadır. (2.19) ve (2.20) sınır koşullarına gelince ise, bu koşullardan sadece $\sigma_{22}|_{x_2=h}$ ' daki koşul

$$\sigma_{22}|_{x_2=h} = p \quad (2.23)$$

ile yer değiştirecektir. Böylece ele alınan plağın zorlanmış titreşimlerinin araştırılması (2.22), (2.13)-(2.18) denklemlerinin (2.19), (2.20) ve (2.23) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesine getirilir. Eğer (2.23)' de $p = 0$ kabul edersek (2.22), (2.13)-(2.18), (2.19), (2.20) problemi ele alınan plağın serbest frekanslarının belirlenmesi için gereken özdeğer problemine dönüşmüş olur. Bu durumda bu bölümde ele alınacak olan problemlerin matematiksel formülasyonu belirlenmiş olur. Matematiksel açıdan bu formülasyondaki

yeniliklerin belirlenmesi bakımından aşağıdakileri söyleyebiliriz.

Şimdiye kadar yapılmış uygun araştırmalarda (Zamanov (1999), (2000b), (2001), (2002)), (2.16) ve (2.18)'deki A_{ij} 'ler sadece x_1 'in fonksiyonudur ve Ox_3 eksen yönündeki sınır koşulları (2.19)'daki gibi kabul edilmiştir. Bundan başka $x_2 = h$ 'daki koşul $\sigma_{22}|_{x_2=h} = p \sin \frac{\pi x_3}{\ell_3}$ biçiminde verilmiştir. Bu söylenenler uygun üç boyutlu titreşim problemlerinin incelenmesinde yarı-analitik Sonlu Elemanlar Yönteminin uygulanmasına imkan sağlamıştır. Ele aldığımız durumda ise A_{ij} 'ler x_1 ve x_3 'ün fonksiyonu olduğu için ve $\sigma_{22}|_{x_2=h} = p$ biçiminde verildiğinden veya bu değişimlerin herhangi birinden dolayı yarı analitik Sonlu Elemanlar Yöntemi uygulanamaz hale gelmektedir. Dolayısı ile ele alınan problemlerdeki matematiksel açıdan olan değişimler (yenilikler) bu problemlerin sayısal olarak incelenmesi için üç boyutlu Sonlu Elemanlar Yönteminin uygulanmasını gerektirmektedir.

2.3 Ele Alınan Problemin Varyasyon Formülasyonu

Şimdi (2.12)-(2.20) problemin SEY modellemesini ele alalım.

Bu amaçla

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \iint_{S_p} \sigma_{ij} n_j u_i dS_p - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho \omega^2 u_i^2 d\Omega \quad (2.24)$$

fonksiyoneli oluşturulmuştur. Burada S_p , Ω bölgesini sınırlayan yüzeyde kuvvetin etki ettiği kısmı belirtmektedir. Π fonksiyonelinin yerdeğiştirmelere göre varyasyonunun sıfıra eşit olmasından (virtüel iş prensibi) (2.12) denkleminin ve gerilmelere göre verilen sınır koşullarının elde edildiğini gösterelim.

(2.24) fonksiyonelinin yerdeğiştirmelere göre 1. mertebeden varyasyonunu alıp sıfıra eşitleyelim.

$$\delta \Pi = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \iint_{S_p} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS_p - \iiint_{\Omega} \rho \omega^2 u_i \delta u_i d\Omega = 0 \quad (2.25)$$

Şimdi bu ifadeden (2.12) hareket denklemlerini ve (2.19) yada (2.20)'de gerilmelere göre verilen sınır koşullarını elde edelim.

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iiint_{\Omega} (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}\delta\varepsilon_{23}) d\Omega \\ & - \iint_{S_p} (p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + p_3\delta u_3) dS_p - \rho\omega^2 \iiint_{\Omega} (u_1\delta u_1 + u_2\delta u_2 + u_3\delta u_3) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26) ifadesinde

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.27)$$

(2.27) eşitlikleri yazılıp yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iiint_{\Omega} \left[\left(\sigma_{11} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \sigma_{13} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\sigma_{12} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \sigma_{23} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_3} \right) + \left(\sigma_{13} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} + \sigma_{23} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \right) \right] d\Omega \\ & - \iint_{S_p} (p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + p_3\delta u_3) dS_p - \rho\omega^2 \iiint_{\Omega} (u_1\delta u_1 + u_2\delta u_2 + u_3\delta u_3) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ifadesi elde edilir.

Varyasyon ifadesinin 1. terimindeki integral ifadeleri,

$$\iiint_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \int_0^h (\cdot) dx_2 dx_3 dx_1 \quad (2.29)$$

şeklinde olduğundan, elde edilen her bir terimde kısmi integrasyon uygulanırsa genel olarak

$$\iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i d\Omega + \iint_{S_p} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS_p \quad (2.30)$$

biçiminde yazılır. (2.28) ifadesini benzer sınırlar altında δu_i ($i=1,2,3$)' lere göre gruplandırırız;

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & - \int_0^h \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} \delta u_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_3 dx_2 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} \int_0^h \delta u_1 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 dx_3 dx_1 - \int_0^h \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} \delta u_1 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 - \\
& - \int_0^h \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} \delta u_2 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 dx_3 dx_2 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} \int_0^h \delta u_2 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 dx_3 dx_1 - \int_0^h \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} \delta u_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 - \\
& - \int_0^h \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} \delta u_3 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1 dx_3 dx_2 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} \int_0^h \delta u_3 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2 dx_3 dx_1 - \int_0^h \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} \delta u_3 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 - \\
& - \rho \omega^2 \iiint_{\Omega} (u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 + u_3 \delta u_3) d\Omega + \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_3} (\sigma_{11} - p_1) \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_1} dx_3 dx_2 - \int_0^h \int_0^{\ell_3} (\sigma_{11} + p_1) \delta u_1 \Big|_{x_1=0} dx_3 dx_2 + \\
& + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} (\sigma_{12} - p_1) \delta u_1 \Big|_{x_2=h} dx_3 dx_1 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} (\sigma_{12} + p_1) \delta u_1 \Big|_{x_2=0} dx_3 dx_1 + \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_1} (\sigma_{13} - p_1) \delta u_1 \Big|_{x_3=\ell_3} dx_1 dx_2 - \int_0^h \int_0^{\ell_1} (\sigma_{13} + p_1) \delta u_1 \Big|_{x_3=0} dx_1 dx_2 + \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_3} (\sigma_{12} - p_2) \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_1} dx_3 dx_2 - \int_0^h \int_0^{\ell_3} (\sigma_{12} + p_2) \delta u_2 \Big|_{x_1=0} dx_3 dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} (\sigma_{22} - p_2) \delta u_2 \Big|_{x_2=h} dx_3 dx_1 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} (\sigma_{22} + p_2) \delta u_2 \Big|_{x_2=0} dx_3 dx_1 \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_1} (\sigma_{23} - p_2) \delta u_2 \Big|_{x_3=\ell_3} dx_1 dx_2 - \int_0^h \int_0^{\ell_1} (\sigma_{23} + p_2) \delta u_2 \Big|_{x_3=0} dx_1 dx_2 \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_3} (\sigma_{13} - p_3) \delta u_3 \Big|_{x_1=\ell_1} dx_3 dx_2 - \int_0^h \int_0^{\ell_3} (\sigma_{13} + p_3) \delta u_3 \Big|_{x_1=0} dx_3 dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} (\sigma_{23} - p_3) \delta u_3 \Big|_{x_2=h} dx_3 dx_1 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_3} (\sigma_{23} + p_3) \delta u_3 \Big|_{x_2=0} dx_3 dx_1 \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_1} (\sigma_{33} - p_3) \delta u_3 \Big|_{x_3=\ell_3} dx_1 dx_2 - \int_0^h \int_0^{\ell_1} (\sigma_{33} + p_3) \delta u_3 \Big|_{x_3=0} dx_1 dx_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

elde edilir. Şimdi (2.31)' i Problem 1 için ele alırsak (2.19) de u_i ' lere göre verilen sınır koşullarını δu_i ' ler de sağladığından

$$\delta u_1|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_2|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_3|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_2|_{x_3=0,\ell_3} = 0$$

olur ve bunun sonucunda yukarıda δu_i 'lerin bu değerlerini içeren ifadeler 0 olur.

(2.31) deki $\delta u_1|_{x_2=0,h}$, $\delta u_1|_{x_3=0,\ell_3}$, $\delta u_2|_{x_2=0,h}$, $\delta u_3|_{x_2=0,h}$ ve $\delta u_3|_{x_3=0,\ell_3}$ ifadeleri de keyfi olduklarından katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek ve

$$P_1|_{x_2=h} = 0 \quad , \quad P_3|_{x_2=h} = 0 \quad , \quad P_2|_{x_2=h} = p \quad , \quad P_1|_{x_2=0} = 0 \quad , \quad P_2|_{x_2=0} = 0 \quad , \quad P_3|_{x_2=0} = 0$$

$$P_1|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \quad , \quad P_2|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \quad , \quad P_3|_{x_3=0,\ell_3} = 0$$

olduğu göz önüne alınarak (2.12) denklemleri ve (2.19)'daki $\sigma_{33}|_{x_3=0,\ell_3} = 0$,

$$\sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0 \quad , \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = p \quad , \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = \sigma_{32}|_{x_2=h} = 0$$

sınır koşulları elde edilir.

Benzer şekilde problem 2 için ele alınacak olursa;

$$\delta u_1|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_2|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_3|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_1|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \quad , \quad \delta u_2|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \quad , \quad \delta u_3|_{x_3=0,\ell_3} = 0$$

olur ve bunun sonucunda yukarıda bu büyüklükleri içeren ifadeler 0 olur.

(2.31)'deki $\delta u_1|_{x_2=0,h} = 0$, $\delta u_2|_{x_2=0,h} = 0$, $\delta u_3|_{x_2=0,h} = 0$ ifadeleri de keyfi olduklarından katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek ve

$$P_1|_{x_2=h} = 0 \quad , \quad P_3|_{x_2=h} = 0 \quad , \quad P_2|_{x_2=h} = p \quad , \quad P_1|_{x_2=0} = 0 \quad , \quad P_2|_{x_2=0} = 0 \quad , \quad P_3|_{x_2=0} = 0$$

olduğu göz önüne alınarak (2.12) denklemleri ve (2.20)'deki

$$\sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0 \quad , \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = p \quad , \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = \sigma_{32}|_{x_2=h} = 0$$

sınır koşulları elde edilir.

Şimdi (2.31) ifadesindeki kalanları yazarsak Problem 1 ve Problem 2' nin varyasyon formülasyonunun

$$\delta \Pi = - \left[\iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta u_1 d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \delta u_1 d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \delta u_1 d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \delta u_2 d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \delta u_2 d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \delta u_2 d\Omega \\
& + \left[\iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \delta u_3 d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \delta u_3 d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \delta u_3 d\Omega \right] - \\
& - \rho \omega^2 \iiint_{\Omega} (u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 + u_3 \delta u_3) d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

olduğu görülür. Bu ifadeyi δu_i ($i = 1, 2, 3$)' lere göre düzenlersek;

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & - \left[\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho \omega^2 u_1 \right) \delta u_1 d\Omega \right. \\
& + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho \omega^2 u_2 \right) \delta u_2 d\Omega + \\
& \left. + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho \omega^2 u_3 \right) \delta u_3 d\Omega \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

elde edilir. Buradan δu_i ' lerin keyfi olduğunu dikkate alırsak (2.33)' den (2.22) denklemlerini ve trivial olmayan sınır koşulunu elde ederiz. Böylece (2.24) fonksiyonelinin Euler denklemlerinin (2.22) ve (2.23) olduğunu kanıtlamış oluyoruz.

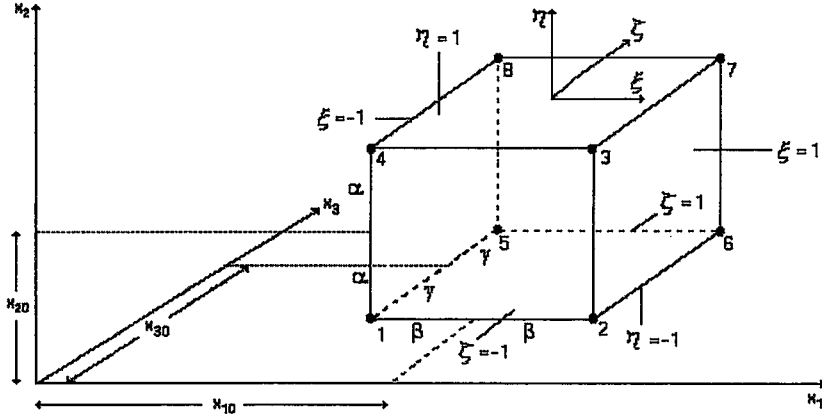
2.4 Üç Boyutlu Sonlu Eleman Modellemesi

Plağın kapsadığı Ω bölgesini sonlu sayıda dikdörtgen prizmalara bölelim.

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \tag{2.34}$$

Bilindiği gibi SEY uygulamalarında Ω_k elemanları çeşitli biçimlerde seçilebilir. Eleman formunun belirlenmesi ele alınan alanın şekliyle de ilgilidir. Bu sebepten bu çalışmada yapılan araştırmalar için dikdörtgen prizma eleman şekli seçilmiştir (Şekil 2.3).

Her bir prizmada köşelerde olmak koşuluyla 8 adet düğüm noktası olduğunu varsayalım.



Şekil 2.3 Seçilen sonlu eleman formu ve düğüm noktaları

Zienkiewicz ve Taylor (1989)' de verilen tekniğe uygun olarak her bir sonlu eleman için normalize edilmiş

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}, \quad \eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha}, \quad \zeta = \frac{x_3 - x_{30}}{\gamma}$$

koordinatları ile verilen

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (2.35)$$

şekil fonksiyonlarını seçelim ve her bir k . sonlu elemanda aranan yerdeğiştirmeleri

$$\mathbf{u}^k \approx \mathbf{N}^k \mathbf{a}^k \quad (2.36)$$

biçiminde ifade edelim. Burada

$$(\mathbf{u}^k)^T = (u_1^k(x_1, x_2, x_3) \quad u_2^k(x_1, x_2, x_3) \quad u_3^k(x_1, x_2, x_3)) \quad (2.37)$$

$$(\mathbf{a}^k)^T = (u_{11}^k \quad u_{21}^k \quad u_{31}^k \quad u_{12}^k \quad u_{22}^k \quad u_{32}^k \quad \dots \quad u_{18}^k \quad u_{28}^k \quad u_{38}^k) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{N}^k = \begin{pmatrix} N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & 0 & \dots & N_8^k & 0 & 0 \\ 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & \dots & 0 & N_8^k & 0 \\ 0 & 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & \dots & 0 & 0 & N_8^k \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

dır. (2.34) ve (2.35)' deki k indisi uygun büyüklüklerin Ω_k elemanına ait olduğunu, \mathbf{a}^k vektörünün bileşenleri ise Ω_k elemanın nodlarındaki yerdeğiştirmeleri göstermektedir. Bu bileşenlerin birinci alt indisleri yerdeğiştirmelerin yönünü, ikinci alt indisleri nodun numarasını belirtir. (2.24) ifadesinde

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\cdot) d\Omega &= \sum_{k=1}^M \iiint_{\Omega_k} (\cdot) d\Omega \\ \iint_{S_p} (\cdot) dS &= \sum_{k=1}^{M_1} \iint_{S_p^k} (\cdot) dS \end{aligned} \quad (2.40)$$

ayrıklaştırılmasını yaparak ve (2.24) ifadesinin 1. mertebeden varyasyonunu sıfıra eşitleyerek yani

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi(\mathbf{a})}{\partial\mathbf{a}} \delta\mathbf{a} = 0 \quad (2.41)$$

işlemine yaparak \mathbf{a} bilinmeyenleri için

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{r}$$

elde edilir. \mathbf{M} kütle matrisi olup aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{M}_{ij} = \iiint_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.42)$$

\mathbf{K} ise rijitlik matrisi olup aşağıdaki ifadeler yardımı ile belirlenir.

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{k=1}^M \mathbf{K}_{ij}^k \quad (2.43)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^k = \iiint_{\Omega} \mathbf{B}_j^{kT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_i^k d\Omega_k \quad (2.44)$$

$$\mathbf{B}_i^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Bu ifadelerdeki \mathbf{D}^k matrisinin elemanları fonksiyonlar olduğundan ve her bir sonlu eleman çerçevesinde fonksiyon gibi verilmesi gerektiğinden, ele alınan problemin sonlu elemanlara ait bilinen paket programlarla incelenmesi mümkün olmamaktadır. Söylenen nedenden dolayı sayısal sonuçlarının elde edilmesinin gerektirdiği programlar tarafımızdan yapılmış ve her bir eleman çerçevesinde \mathbf{D} matrisinin elemanları fonksiyon olarak verilmiştir.

Yukarıdaki işlemlerden görüldüğü gibi ele alınan problemlerde yerdeğiştirme esaslı SEY kullanılmıştır. Yani ele alınan alanı ayrıklaştıran eleman nodlarında bilinmeyenler olarak yerdeğiştirmeler alınmıştır. Geriye kalan büyüklükler yani gerilmeler ve şekil değiştirmeler (2.17) ve (2.18) formüllerinin ayrıklaştırılmış formları kullanılarak elde edilir. O zaman gerilmelerin yaklaşık değerleri aşağıdaki formül yardımı ile hesaplanır.

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.46)$$

Burada

$$\hat{\mathbf{c}}^T = (\hat{\sigma}_{11} \quad \hat{\sigma}_{22} \quad \hat{\sigma}_{33} \quad \hat{\sigma}_{23} \quad \hat{\sigma}_{13} \quad \hat{\sigma}_{12})$$

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \dots, \mathbf{B}^M) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{B}^k = (\mathbf{B}_1^k, \mathbf{B}_2^k, \dots, \mathbf{B}_8^k)$$

biçimindedir. \mathbf{a} ve $\mathbf{B}_1^k, \mathbf{B}_2^k, \dots, \mathbf{B}_8^k$ ' ların ifadesi ise (2.41) ve (2.45)' de verilmektedir. Görüldüğü gibi, bu çalışmada yerdeğiştirmeler, ele alınan alanda x_1 , x_2 ve x_3 koordinatlarının C^0 sürekliliğine sahip fonksiyonlardır ve bundan dolayı, (2.46) formülü yardımıyla elde edilen gerilmeler sonlu elemanlar arası sınırlarda genellikle sıçramalar yaparak süreksiz fonksiyonlar olurlar. Böyle bir durum gerçek gerilme yayılımına uygun gelmediğinden, bu durumun ortadan kaldırılması için, araştırılan problemlerin sonlu elemanlar ile modellenmesinin aşağıda söylenecek iki türden geliştirilmesi yapılabilir.

Birinci tür geliştirilmeler, araştırılan problemlerin karışık sonlu eleman formülasyonları üzerinedir. Bu formülasyona göre, nodlarda bilinmeyenler sadece yerdeğiştirmeler değil, başka büyüklükler, örneğin gerilmeler vb. de kabul edilerek karışık varyasyon prensipleri kullanılır (Reissner prensibi vb.). Karışık formülasyon çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlarda, gerilmeler de ele alınan alanda C^0 sürekliliğine sahip olurlar. Karışık formülasyonlar fiziksel anlamları olmayan süreksizlikleri aradan kaldırırsa da bir çok durumlarda, bu formülasyonun kullanılması sonlu eleman boyutlarının büyük seçilmesini

gerektirir. Bu yüzden de elde edilen sayısal sonuçların hassasiyeti düşük olur.

İkinci tür geliştirmelerde ise, süreksiz gerilme yayılımlarının, belli kurallar ile süreklileştirilmesi yoluna gidilir ve bu süreklileştirilme işlemlerine varyasyonel iyileştirme adı verilir. Bu tür yaklaşımlara SEY' in başka bir karışık formülasyonu gibi bakmak da mümkündür. Bu yaklaşımın önceki söylenen karışık formülasyondan farkı iki aşamalı olmasıdır. Birinci aşamada yukarıda söylenen yerdeğiştirmeler bulunur. İkinci aşamada ise gerilmeler, onların nodlardaki değeri ve belli kurallarla seçilmiş şekil fonksiyonları yardımıyla (2.36)' nın benzeri olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.49)$$

burada

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12})$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^T = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_M) \quad (2.50)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^T = (\bar{\sigma}_{11i} \quad \bar{\sigma}_{22i} \quad \bar{\sigma}_{33i} \quad \bar{\sigma}_{23i} \quad \bar{\sigma}_{13i} \quad \bar{\sigma}_{12i}) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

biçimindedir. Bundan başka (2.46)' daki $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörünün bileşenleri ise, nodlardaki gerilmeleri göstermektedir. Çoğu zaman \mathbf{N}_σ şekil fonksiyonları (2.36)' daki şekil fonksiyonlarının aynısı alınır. Ele alınan sonlu elemanlar için \mathbf{N}_σ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{N}_\sigma = \{\mathbf{N}^1, \mathbf{N}^2, \dots, \mathbf{N}^M\} \quad (2.51)$$

(2.51)' deki \mathbf{N}^i ' ler ise (2.39)' da gösterildiği gibidir.

Yukarıda adı geçen tüm durumlarda $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörü bileşenlerinin, yani gerilmelerin nodlardaki veya Gauss noktalarındaki değerlerinin bulunması En Küçük Kareler yöntemi kullanılarak elde edilir. Bu durumda

$$Q = \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 d\Omega \quad (2.52)$$

fonksiyoneline bakılır. Daha sonra bu fonksiyonelin varyasyonunu sıfıra eşitleyerek $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörü bileşenleri için,

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ijk}} = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.53)$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemler daha açık olarak

$$\left(\iint_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{N}_{\sigma} d\Omega \right) \bar{\sigma} = \iint_{\Omega} (\mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}) d\Omega \quad (2.54)$$

şeklinde yazılır. Ancak tez kapsamında (2.53) denklemleri Zienkiewicz ve Taylor (1989)' de söylenen yaklaşık iteratif yöntemler kullanılarak değil direkt olarak çözülmüştür. Böylece ele alınan alanda gerilme yayılımı sürekli bir hale getirilir.

2.5 Serbest Titreşim Problemleri

Plak malzemesinin birbirini tekrarlayan iki izotrop, homojen levhadan oluşmuş bir kompozit malzeme olduğunu varsayalım. Bu tür bir kompozit ideal durumda yani yapısında hiç bir eğrilik olmadığında anizotrop, simetri eksenini Ox_2 olan transversal izotrop homojen bir malzeme gibi göz önüne alınırsa onun normalize edilmiş mekanik özellikleri aşağıdaki bilinen formüller yardımı ile elde edilir (Christensen (1979), Akbarov ve Guz (2000)).

$$A_{23}^0 = A_{12}^0 = \lambda^{(1)} \eta^{(1)} + \lambda^{(2)} \eta^{(2)} - \eta^{(1)} \eta^{(2)} (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \eta^{(1)}}$$

$$\frac{1}{2} (A_{11}^0 + A_{12}^0) = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \eta^{(2)} - \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \eta^{(1)}}$$

$$\frac{1}{2} (A_{11}^0 - A_{13}^0) = \eta^{(1)} \mu^{(1)} + \eta^{(2)} \mu^{(2)} \quad ,$$

$$A_{66}^0 = A_{44}^0 = \frac{\mu^{(1)} \mu^{(2)}}{\mu^{(1)} \eta^{(2)} + \mu^{(2)} \eta^{(1)}} \quad , \quad A_{55}^0 = \eta^{(1)} \mu^{(1)} + \eta^{(2)} \mu^{(2)} \quad (2.55)$$

Burada $\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k=1,2$) yukarıda adı geçen izotrop levhaların mekanik sabitleridir, $\eta^{(k)}$ ise bu malzemelerin oluşturdukları ortamdaki hacim oranlarını gösterir. $\lambda^{(k)}$ ve $\mu^{(k)}$ sabitlerinin $E^{(k)}$ (Elastisite modülü) ve $\nu^{(k)}$ (Poisson oranı) sabitleri ile olan

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})} \quad ; \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \quad (2.56)$$

ifadelerinden kullanılmıştır.

D matrisinin elemanları Akbarov ve Guz (1991, 2000) teorisine göre $A_{ij}(x_1, x_3)$ ' ler A_{ij}^0 sabitleri ve malzeme yapısındaki eğriliği gösteren $F(x_1, x_3) = \mathcal{E}f(x_1, x_3)$ (2.1) fonksiyonunun yardımı ile (2.6)-(2.9)' da verilen formüllerle hesaplanmaktadır.

Çalışmada plak malzeme yapısındaki eğriliğin periyodik olduğu varsayılmış ve (2.1)' deki denklemin açık ifadesi

$$\begin{aligned} x_2 = F(x_1, x_3) &= H \operatorname{Sin}\left(\frac{\ell_1}{\Lambda_1} \frac{\pi x_1}{\ell_1} + \delta_1\right) \operatorname{Sin}\left(\frac{\ell_3}{\Lambda_3} \frac{\pi x_3}{\ell_3} + \delta_3\right) \\ &= \varepsilon \ell_1 \operatorname{Sin}\left(\frac{\ell_1}{\Lambda_1} \frac{\pi x_1}{\ell_1} + \delta_1\right) \operatorname{Sin}\left(\frac{\ell_3}{\Lambda_3} \frac{\pi x_3}{\ell_3} + \delta_3\right), \quad \varepsilon = \frac{H}{\ell_1} \end{aligned} \quad (2.57)$$

biçiminde ele alınmıştır . Burada Λ_1 ve Λ_3 sırasıyla Ox_1 ve Ox_3 eksenleri boyunca eğriliğin yarım dalga uzunluğudur. ε eğriliğin derecesini belirtir (eğer $\varepsilon = 0$ ise eğrilik yoktur). $\delta_1(\delta_3)$ $Ox_1x_2x_3$ koordinat sistemi orijininin $Ox_1(Ox_3)$ eksenini boyunca malzeme yapısındaki eğriliği gösteren çizginin Ox_1 eksenini ile kesiştiği ilk noktaya olan uzaklığını ifade eder. Serbest titreşim ($\bar{\omega}^2 = \frac{\rho \omega^2 \ell_1^2}{A_{22}}$) değerleri, ele alınan problemlerin sonlu eleman modellemesi bu problemlerin $x_2 = \ell/2$ kesitine göre simetrikliği göz önüne alınarak yapıldığından $u_2(\ell_1/2, h/2, \ell_3/2) \rightarrow \infty$ kriteri çerçevesinde belirlenmiştir.

$x_1/\ell_1 = 1/2$ ve $x_3/\ell_3 = 1/2$ bölgesinde ele alınan problemin simetrisinden dolayı tüm sayısal araştırmaların hesaplanması $\{0 \leq x_1/\ell_1 \leq 1/2, 0 \leq x_2 \leq h, 0 \leq x_3/\ell_3 \leq 1/2\}$ bölgesinde 2304 dikdörtgensel sonlu eleman kullanılarak yapılmıştır. Yani Ox_1, Ox_2 ve Ox_3 eksenleri yönünde sırasıyla 24, 4, 24 eleman kullanılmıştır. Bu sayıda eleman seçiminin nedeni ve bunun yakınsaması hakkında bilgi ileride verilecektir.

Ele alınan problemlerin matematiksel formülasyonundan görüldüğü gibi bu problemleri belirleyen parametreler $E_1, E_2, \eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2, h, \ell_1, \ell_3, \varepsilon, \delta_1, \delta_3, \Lambda_1, \Lambda_3, H$ dir ve ele alınan $\bar{\omega}$ ' nin üzerindeki çizgiyi ihmal edip ω ile gösterelim.

2.6 Sayısal Sonuçlar

İlk önce kullanılan algoritma ve programların doğruluğunu gösterebilmek için plak malzemesi yapısında sadece Ox_1 eksenî yönünde eğrilik olduğu durumu ele alalım. Yani (2.1)

fonksiyonu $x_2 = \varepsilon \ell_1 \text{Sin}\left(\frac{x_1}{\Lambda_1} \frac{\pi}{\ell_1} x_1 + \delta_1\right)$ biçiminde verilmektedir. Bu durumda plağın serbest

frekansları Akbarov ve Guz (2000), Zamanov (2000b) kaynaklarında yarı analitik Sonlu Elemanlar Yöntemi ile incelenmiştir. Aynı problem çalışmalarımızda tez kapsamında kullandığımız üç boyutlu sonlu eleman modellemesi çerçevesinde yapılan algoritma ve programlar aracılığı ile de incelenmiştir. Çizelge 2.1' de Zamanov (2000b) kaynağında elde edilen sonuçlar ve tarafımızdan elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Çizelge 2.1. Zamanov (2000b) ve Akbarov ve Guz (2000)' de ele alınan serbest titreşim frekansları ω_2^* : üstteki değerler bu çalışmada elde edilen sonuçlar, alttaki değerler ise Zamanov (2000b) ve Akbarov ve Guz (2000)' de elde edilen sonuçlardır.

E_2/E_1	ε	
	0	0.00625
1	$\frac{0.49}{0.49}$	$\frac{0.49}{0.49}$
20	$\frac{1.71}{1.71}$	$\frac{1.61}{1.56}$
50	$\frac{2.63}{2.62}$	$\frac{2.56}{2.38}$

Çizelge 2.1' deki sonuçları karşılaştırırsak, $\varepsilon = 0$ durumunda uygun sonuçların yakınlık derecesinin çok yüksek olduğu görülmektedir (yani bu sonuçlar arasındaki fark %0.38' den düşüktür.). Ancak $\varepsilon = 0.00625$ durumunda E_2/E_1 oranının artması ile uygun sonuçlar arasındaki fark büyümektedir. (Örneğin $E_2/E_1 = 20, 50$ olduğu durumlarda bu fark sırasıyla %3.2 ve %6.25 dir.) Açık ki gösterilen farklılıklar kabul edilebilir çerçevededir ve temel açıdan elde edilecek sayısal sonuçlara etki gösteremez. Böylece tez kapsamında uygulanan sonlu eleman modellemesinin algoritma ve programlarının yeteri derecede hassas ve doğru olduğu görülmektedir.

Şimdiye kadar yapılan araştırmalarda küçük parametre olarak $\frac{H}{\Lambda_1}$ oranısı kabul edilmiştir.

Burada H malzeme yapısındaki eğriliğin genliğini, Λ_1 ise bu eğriliğin yarım periyodunun uzunluğunu göstermektedir. Malzeme yapısında iki yönde eğrilik olduğu durumda ise küçük parametre olarak $\frac{H}{\ell_1}$ oranısını ele alacağız ki bu da bakılan durumların incelenmesinin kolaylığı açısından çok önemlidir.

Şimdi Problem 1 için sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. Bu sonuçlar $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$, $h/\ell_1 = 0.1$, $E_2/E_1 = 50$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\delta_1 = \delta_3 = \pi/2$ durumlarında elde edilmiş ve $\gamma_1 = \ell_1/\Lambda_1$ ve $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ işaretlemeleri kullanılmıştır. Gösterilen durumda ele alınan plağın serbest titreşim frekanslarının değeri Çizelge 2.2' de $\varepsilon = 0.00625$ durumunda verilmektedir.

Çizelge 2.2. $\ell_3/\ell_1 = 1$, $E_2/E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.00625$ ' de $\gamma_1 = \ell_1/\Lambda_1$ ve $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2

γ_1	γ_3					
	0	4	8	12	16	20
4	2.523	2.607	2.635	2.693	2.831	3.002
8	2.491	2.588	2.569	2.548	2.581	2.680
12	2.532	2.603	2.580	2.546	2.538	2.580
16	2.561	2.621	2.602	2.571	2.550	2.562
20	2.592	2.645	2.631	2.606	2.585	2.586

Bu çizelgede $\gamma_3 = 0$ sütunundaki değerler plak malzemesi yapısındaki eğriliklerin sadece Ox_1 yönünde olduğu duruma aittir. Bundan başka $\varepsilon = 0$ durumunda $\omega_*^2 = 2.634$ olur. Burada ve daha sonraki incelemelerimizde sadece ele alınan plağın serbest frekanslarını (yani 1. moda ait frekanslarını) araştıracağız. Çizelge 2.2' deki verilerden görüldüğü gibi $\gamma_3 = 0$ için elde edilen ω_*^2 değerleri Akbarov ve Guz (2000)' de verilen değerlere çok yakındır. Bu sonuçlar plak malzemesi yapısında Ox_3 eksenini yönünde de eğrilik bulunduğu durumda serbest titreşim

frekanslarının γ_1 ve γ_3 parametrelerinden bağımlı olarak değiştiğini göstermektedir. Çizelge 2.2 gösteriyor ki bu bağımlılık çok karmaşıktır. Örneğin Çizelge 2.2' den $\gamma_1 = 4$ için ω_*^2 , γ_3 ile monoton olarak arttığını söylemek mümkündür. Bununla birlikte bu çizelgeden $\gamma_1 = 8, 12, 16, 20$ değerleri için ω_*^2 ile γ_3 arasındaki bağımlılığın monoton olmadığı görülmektedir.

Çizelge 2.3. $l_3/l_1 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\varepsilon = 0.00625$ ' de E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2

E_2/E_1	5	10	20	50	100
ω_*^2	0.776	1.117	1.626	2.550	3.469

Çizelge 2.3'de $l_3/l_1 = 1$, $\varepsilon = 0.00625$ ve $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için ω_*^2 ' lar verilmiştir. Bu çizelgeden anlaşılacağı gibi ω_*^2 değerleri E_2/E_1 arttıkça artmaktadır. Bu durum da çok iyi bilinen mekanik hususlar ile uyumaktadır.

Çizelge 2.4. $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\varepsilon = 0.00625$ ' de E_2/E_1 ve l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2

E_2/E_1	l_3/l_1			
	1	1.5	2	4
5	0.776	0.599	0.548	0.504
10	1.117	0.866	0.793	0.731
50	2.550	1.970	1.796	1.641
100	3.469	2.639	2.387	2.154

Çizelge 2.4' de ise $\varepsilon = 0.00625$ ve $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda $\varepsilon = 0.00625$ ve l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için ω_*^2 ' lar verilmiştir. Bu çizelgeden anlaşılacağı gibi ω_*^2 değerleri E_2/E_1 arttıkça artmaktadır, l_3/l_1 arttıkça ise azalmaktadır. Bu durum da çok iyi bilinen mekanik hususlar ile uyumaktadır.

Bununla Problem 1 için serbest titreşim frekanslarına ait elde edilen sayısal sonuçların incelenmesini bitiriyoruz. Şimdi ise Problem 2 için elde edilen uygun sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. Problem 2 için malzeme yapısında tek yönde eğrilik olduğu halde bile şu ana kadar hiç bir inceleme yapılmamıştır. Bu araştırmaların sonuçları Çizelge 2.5' de $\gamma_3 = 0$ durumuna ait olan sütunda verilmektedir.

Çizelge 2.5. $\ell_3/\ell_1=1$, $E_2/E_1=50$, $\varepsilon = 0.00625$ ' de $\gamma_1 = \ell_1/\Lambda_1$ ve $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2

γ_1	γ_3					
	0	4	8	12	16	20
4	3.752	3.509	3.519	3.537	3.571	3.635
8	3.549	3.519	3.524	3.535	3.569	3.638
12	3.543	3.537	3.535	3.538	3.565	3.634
16	3.560	3.571	3.569	3.565	3.586	3.651
20	3.594	3.635	3.638	3.634	3.651	3.715

Bu çizelgeden görüldüğü gibi $E_2/E_1=50$, $\ell_3/\ell_1=1$ ve $\varepsilon = 0.00625$ değerleri için plak malzemesi yapısında hem Ox_1 hemde Ox_3 eksenini yönünde eğrilik bulunduğu durumda ($\gamma_3 \neq 0$) $\gamma_1 = 4,8$ için ω_*^2 ile γ_3 monoton artan, $\gamma_1 = 12,16,20$ değerleri için monoton olmayan bir ilişkiyi belirtmektedir. Çizelge 2.5' deki sonuçları Çizelge 2.2' deki uygun sonuçlarla karşılaştırırsak, plağın Ox_3 eksenini yönünde rijit tutturulduğunda serbest titreşim değerlerinin arttığını görürüz.

Çizelge 2.6. $\ell_3/\ell_1=1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\varepsilon = 0.00625$ ' de E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2

E_2/E_1	5	10	20	50	100
ω_*^2	1.168	1.660	2.365	3.586	4.749

Çizelge 2.6'da $l_3/l_1=1$, $\varepsilon=0.00625$ ve $\gamma_1=\gamma_3=16$ durumunda E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için ω_*^2 ' lar elde edilmiştir. Bu çizelgeden anlaşılacağı gibi ω_*^2 değerleri E_2/E_1 arttıkça artmaktadır.

Çizelge 2.7. $\gamma_1=\gamma_3=16$, $\varepsilon=0.00625$ ' de E_2/E_1 ve l_3/l_1 ' ün çeşitli değerleri için serbest titreşim frekansları ω_*^2

E_2/E_1	l_3/l_1			
	1	1.5	2	4
5	1.168	0.698	0.586	0.508
10	1.660	1.011	0.849	0.737
50	3.586	2.293	1.931	1.656
100	4.749	3.056	2.568	2.176

Çizelge 2.7' de ise $\varepsilon=0.00625$ ve $\gamma_1=\gamma_3=16$ durumunda E_2/E_1 ve l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için ω_*^2 ' lar verilmiştir. Bu çizelgeden anlaşılacağı gibi ω_*^2 değerleri E_2/E_1 arttıkça artmaktadır, l_3/l_1 arttıkça azalmaktadır. Bu durum da çok iyi bilinen mekanik hususlar ile uyumaktadır.

Bununla da Problem 2 için serbest titreşimlere ait elde edilen sayısal sonuçların incelenmesini bitirmiş bulunuyoruz.

2.7 Zorlanmış Titreşim Problemleri

Bilindiği üzere serbest titreşim frekansları yapı elemanlarının genel karakteristiğini (yani yapı elemanlarının tümüne ait bir özelliğini) belirtmektedir. Serbest titreşim frekanslarını bilerek zamana göre periyodik biçimde etki gösteren dış kuvvetlerin değişim frekanslarını rezonans olayına karşı kısıtlamak gibi önlemlerin alınması mümkündür. Zorlanmış titreşim problemlerinde ise yapı elemanlarının yerel karakteristiklerinin (örneğin gerilme yayılımının vs.) dış kuvvet değişim frekanslarından bağımlılığı incelenmektedir. Yerel karakteristiğin yani gerilme, şekil değiştirme veya yerdeğiştirme gibi büyüklüklerin dış kuvvet frekanslarındaki bağımlılığının incelenmesi yapı elemanlarının kırılmasının önlenmesinde çok büyük önem

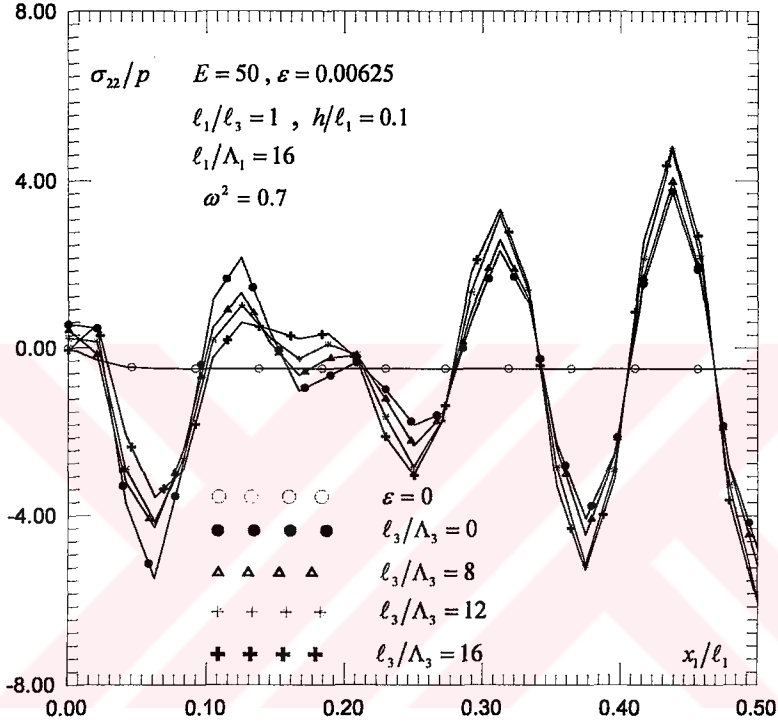
taşımaktadır. Tez kapsamında yapılan zorlanmış titreşim araştırmalarında dış kuvvet frekanslarının plak malzemesi yapısındaki eğriliklerden dolayı ortaya çıkan gerilme yayılımlarına etkisinin incelenmesi söylenenler açısından çok büyük önem taşımaktadır. Bu incelemeler Problem 1 ve Problem 2 çerçevesinde yapıldığında plağın üst yüzeyinde etki gösteren dış kuvvet frekanslarının uygun temel frekanslardan çok düşük olması koşulu sağlanmıştır.

2.8 Sayısal Sonuçlar

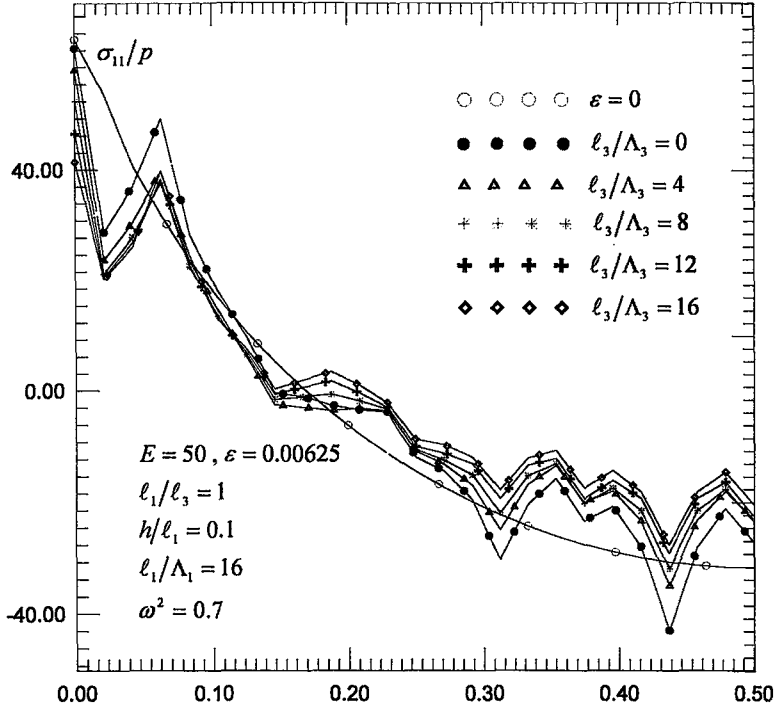
Şimdi problem 1 için elde edilen sayısal sonuçların incelenmesine geçelim. Bu incelemeleri σ_{11} , σ_{22} normal gerilmeleri ve σ_{23} , σ_{12} kayma gerilmeleri için yapalım. Bilindiği üzere σ_{22} gerilmesi plağın kalınlığı boyunca Ox_2 eksenine dik düzlemlerde etki gösteren normal gerilmenin değerini göstermektedir. σ_{11} gerilmesi ise Ox_1 eksenine dik düzlemlerde etki gösteren normal gerilmelerdir. Görüldüğü üzere σ_{22} gerilmesi plak malzemesinin atezyon mukavemetine direkt olarak etki göstermektedir. Ve plak malzemesinin tabakalara ayrılışı biçiminde kırılması bu gerilmenin değerine önemli ölçüde bağlıdır. σ_{11} gerilmesi ise güçlendirici lifler veya levhalar yönünde etki gösterdiğinden başka gerilmelere oranla (örneğin σ_{22} gerilmesine göre) daha büyük değerler alabilmektedir. Şunu da belirtelim ki σ_{33} gerilmesinin yayılımı ve problem parametrelerine bağımlılığı hemen hemen σ_{11} gerilmesinin uygun bağımlılıkları gibidir. Bu yüzden σ_{33} gerilmesinin burada incelenmesine yer verilmemiştir. Bundan başka ele alınan plak malzemesinin atezyon mukavemetine Ox_2 eksenine dik düzlemlerde etki gösteren kayma gerilmelerinin de etkisi büyüktür ve bu nedenle σ_{23} ve σ_{12} kayma gerilmelerinin incelenmesine de yer verilmiştir. Sayısal incelemelerde amaç plak malzemesi yapısındaki eğriliklerden dolayı oluşan gerilme birikimlerine bu eğriliğin iki yönlülüğünün ve bu durumda dış kuvvet frekanslarının değişiminin etkisini göstermektir.

Şimdi ilk önce σ_{22} gerilmesinin değişimini gösteren sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. Bu sonuçlar Şekil 2.4, 2.8, 2.12, 2.16, 2.20, 2.24, 2.28' de verilmektedir. Bu şekillerde σ_{22} gerilmesinin $x_2 = h/2$, $x_3 = \ell_3/2$ ' deki değerlerinin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafikleri problem parametrelerinin farklı değerlerinde verilmektedir. Problem parametrelerinin uygun değerleri şekil alanlarında gösterilmektedir. Burada E ile E_2/E_1 verilmiştir. σ_{11} için uygun

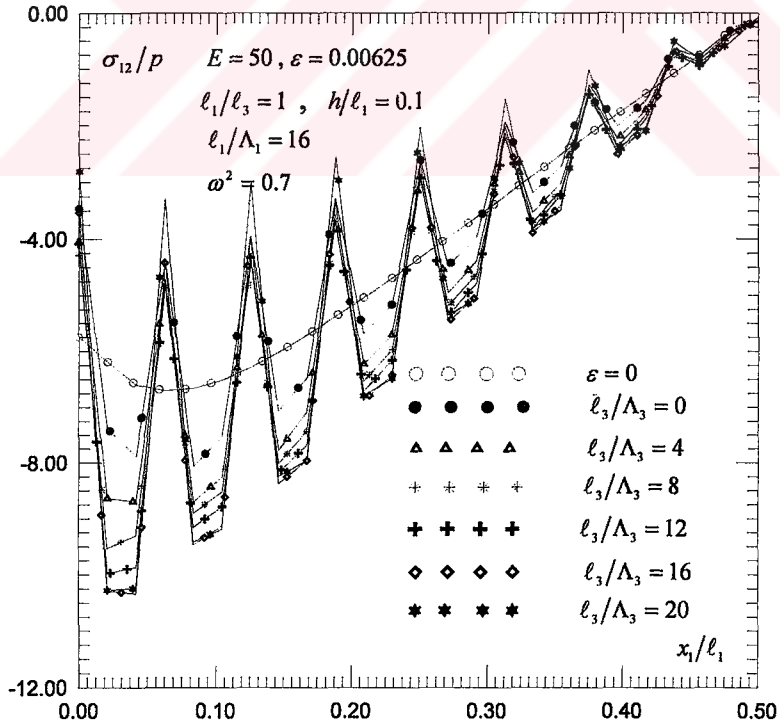
grafikler Şekil 2.5, 2.9, 2.13, 2.17, 2.21, 2.25, 2.29' da verilmektedir. Bu grafikler σ_{11} gerilmesinin $x_2 = h$, $x_3 = \ell_3/2$ 'deki değerlerinin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılımını göstermektedir. Bundan başka uygun sonuçlar σ_{12} gerilmesi için ($x_2 = h/2$, $x_3 = \ell_3/2$ değerlerinin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafikleri) Şekil 2.6, 2.10, 2.14, 2.18, 2.22, 2.26, 2.30' da verilmektedir. σ_{23} gerilmesi için elde edilen sayısal sonuçlar ise Şekil 2.7, 2.11, 2.15, 2.19, 2.23, 2.27, 2.31' de verilmektedir.



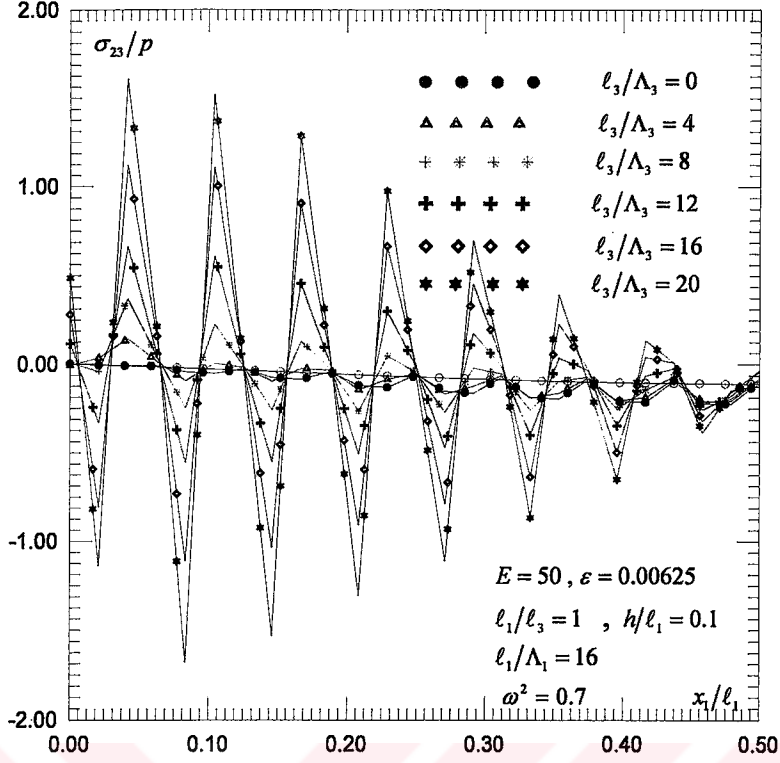
Şekil 2.4 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p ' nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.5 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



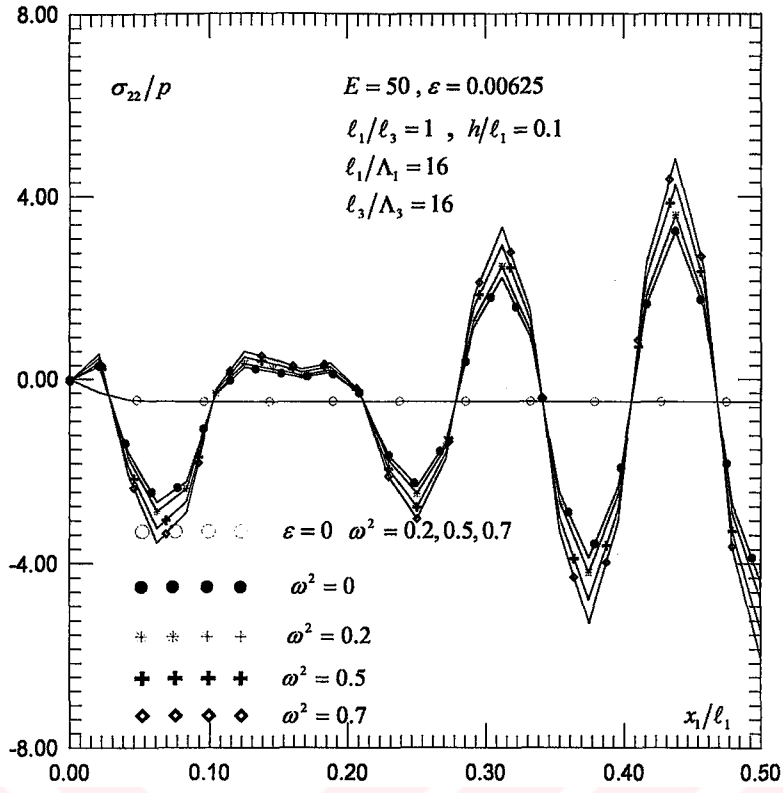
Şekil 2.6 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



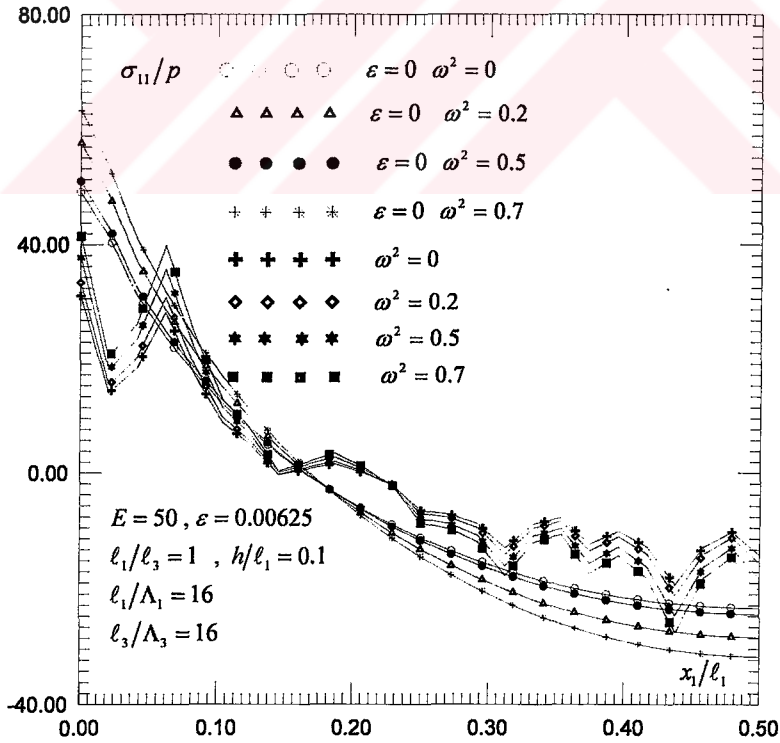
Şekil 2.7 $\omega^2 = 0.7$ ve $l_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)

Şekil 2.4-2.7' den görüldüğü gibi plak malzemesi yapısındaki eğriliğin iki yönlülüğü sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin x_1/l_1 ' e göre yayılımını önemli bir biçimde değiştirmektedir. σ_{22} , σ_{11} ve σ_{23} gerilme değişimlerinin değişim genliklerinin değeri l_3/Λ_3 büyüdükçe $x_1 = l_1/2$ civarında σ_{22} gerilmelerinin şiddetini monoton olarak büyütmede ise $x_1 = 0$ civarında ise bu genliği küçültmektedir. σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin değişim genliği ise l_3/Λ_3 ' ün büyümesi ile monoton olarak artmaktadır. σ_{11} gerilmesine gelince ise l_3/Λ_3 parametresinin artmasının bu gerilmelerin değerini tümü ile değiştirmektedir. Söylenenlerden ve uygun grafiklerden görüldüğü gibi plak malzemesi yapısındaki eğriliğin iki yönlülüğü ele alınan gerilmelerin yayılımını önemli bir biçimde değiştirmektedir.

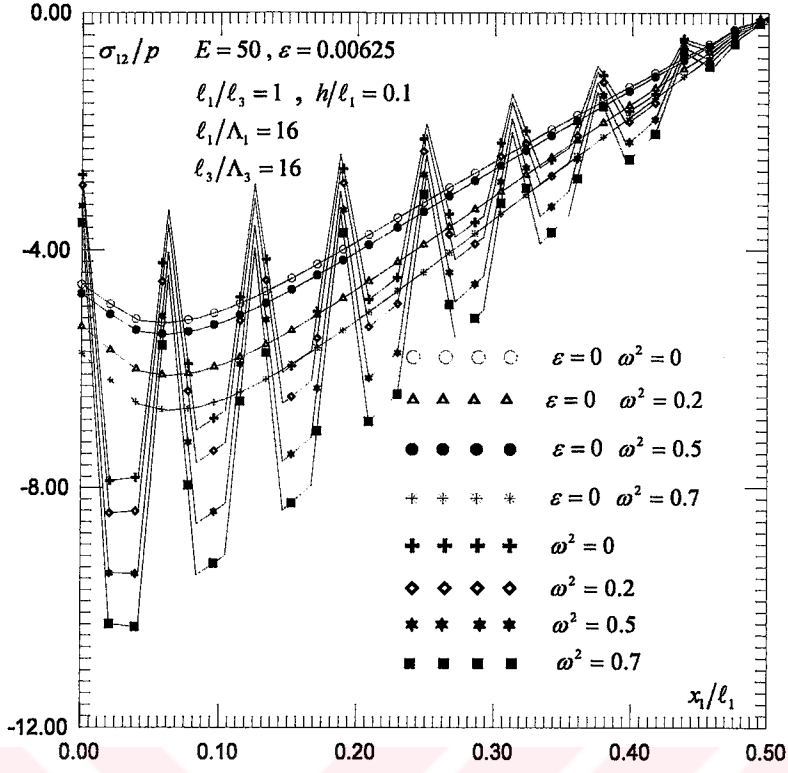
İncelenen gerilmelerin değişimine dış kuvvet frekansının etkisini gösteren sonuçları ele alalım. Bu sonuçlar σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmeleri için sırasıyla Şekil 2.8-2.11' de verilmektedir.



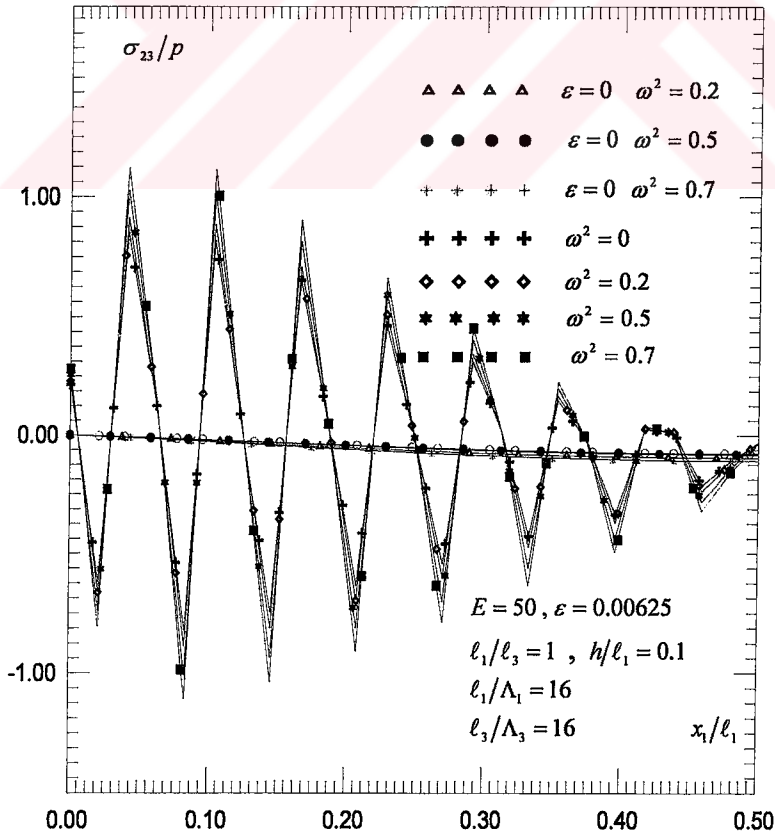
Şekil 2.8 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.9 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



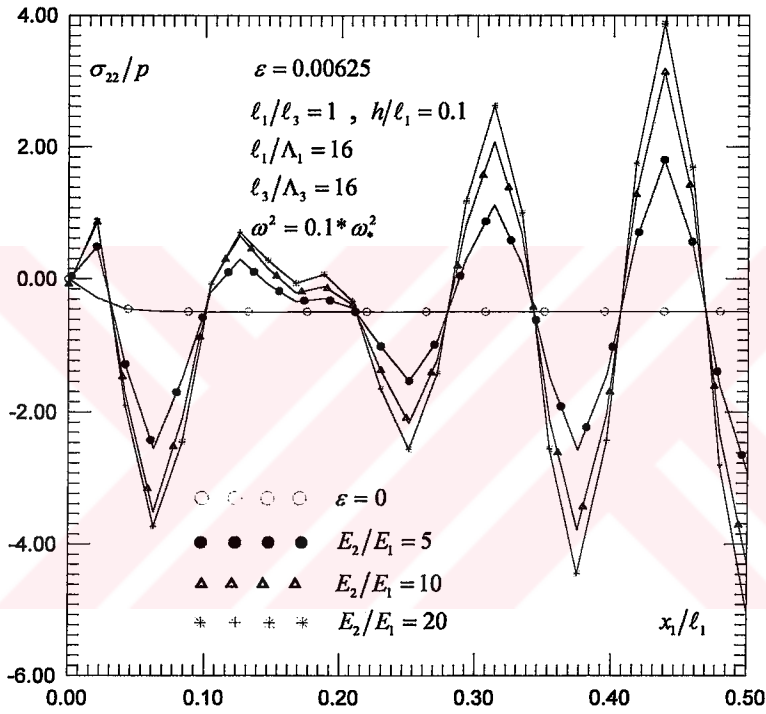
Şekil 2.10 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



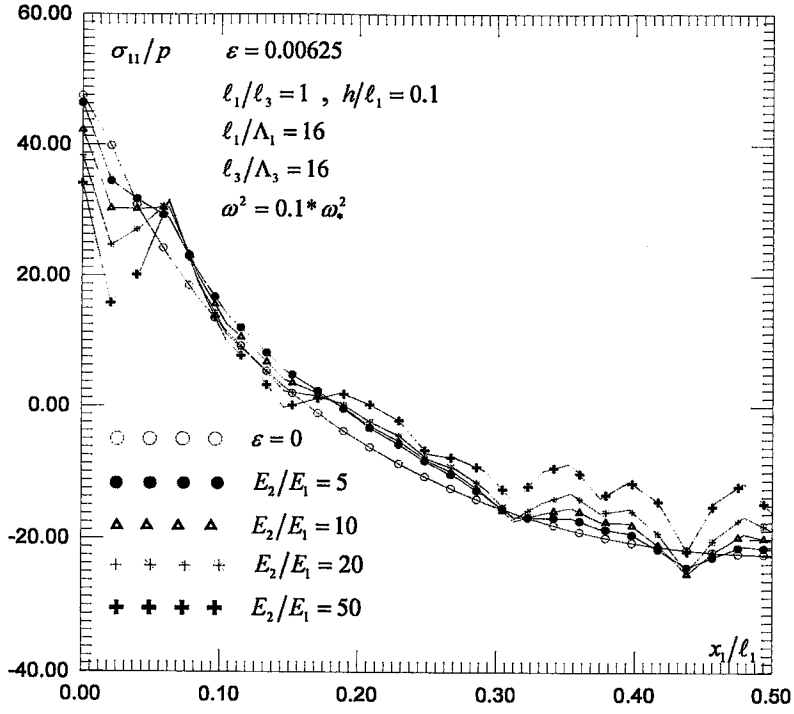
Şekil 2.11 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)

Bu şekillerdeki grafiklerden görüldüğü gibi ω^2 değerleri büyüdükçe gerilmelerin yayılım formunun genlikleri monoton olarak büyümektedir. Yukarıda ve ileride kullanılan yayılım genlikleri denilirken yerel $\max \left| \sigma_{ij} \Big|_{\varepsilon=0} - \left| \sigma_{ij} \Big|_{\varepsilon \neq 0} \right|$ değerleri göz önüne alınmaktadır.

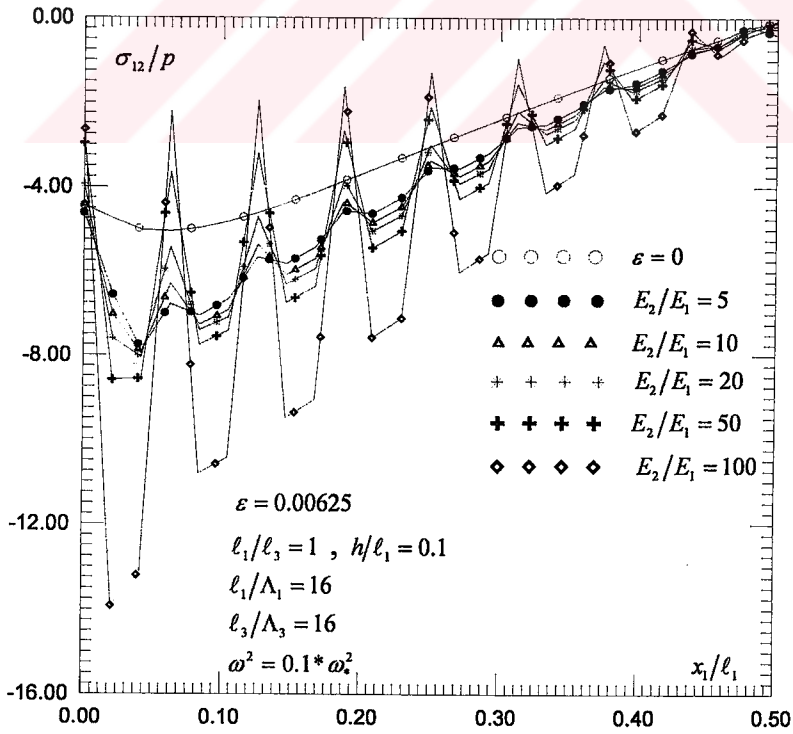
Plak malzemesinin mekanik özelliklerini belirten esas parametrelerden biri olan E_2/E_1 oranısının ele alınan gerilme yayılımına etkisini gösteren grafikler Şekil 2.12-2.15' de verilmektedir.



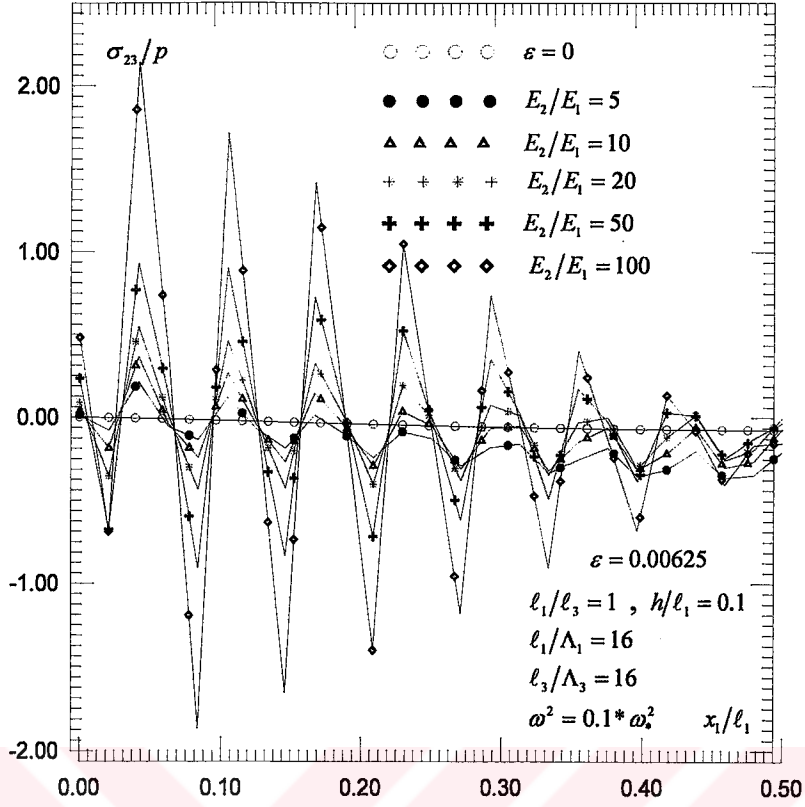
Şekil 2.12 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.13 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



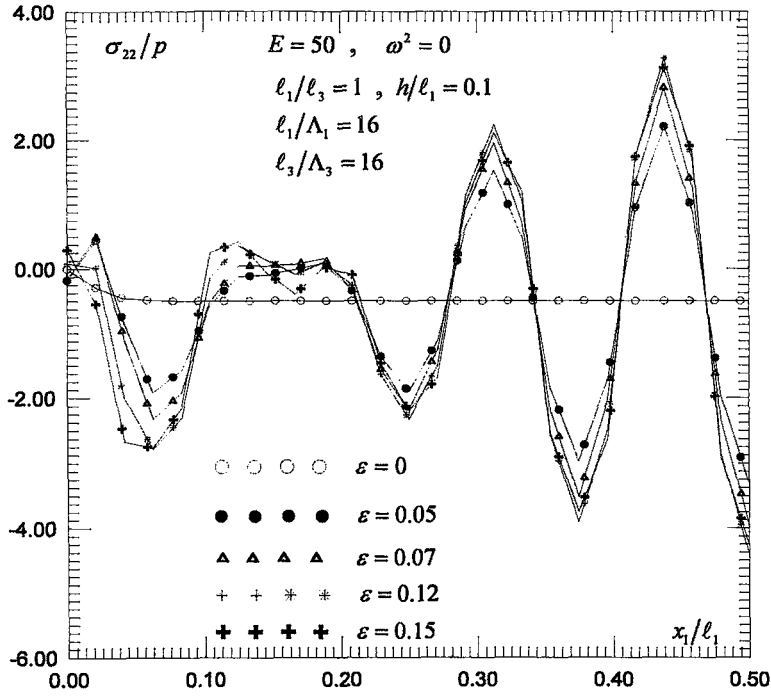
Şekil 2.14 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



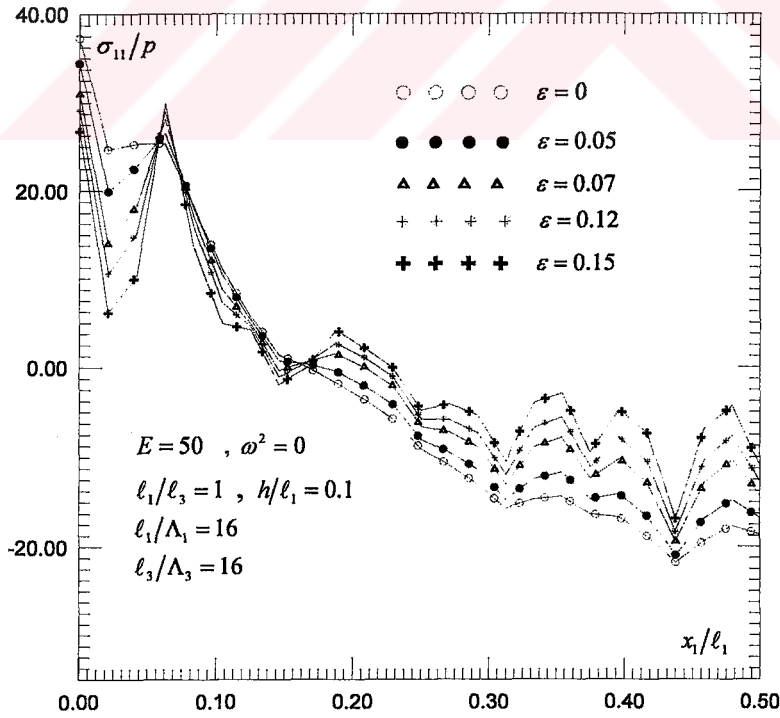
Şekil 2.15 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)

Bu grafiklerden görüldüğü gibi E_2/E_1 değerleri büyüdükçe gerilmelerin yayılım formu genliklerinin değerleri monoton olarak büyümektedir. Bu sonuçlar bilinen mekaniksel görüşlerle ve nicelik açısından şimdiye kadar elde edilen uygun sonuçlara denk düşmektedir.

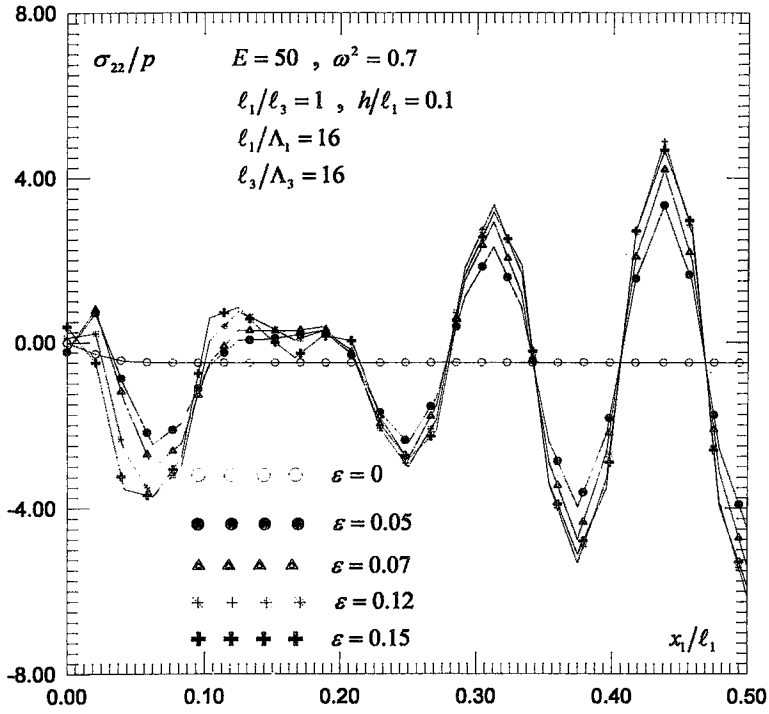
ε parametresinin gerilim yayılımlarına etkisi $\omega^2 = 0$ durumunda (statik yükleme durumunda) Şekil 2.16-2-19' da verilmektedir. $\omega^2 = 0.7$ durumunda ise Şekil 2.20-2.23' de verilmektedir.



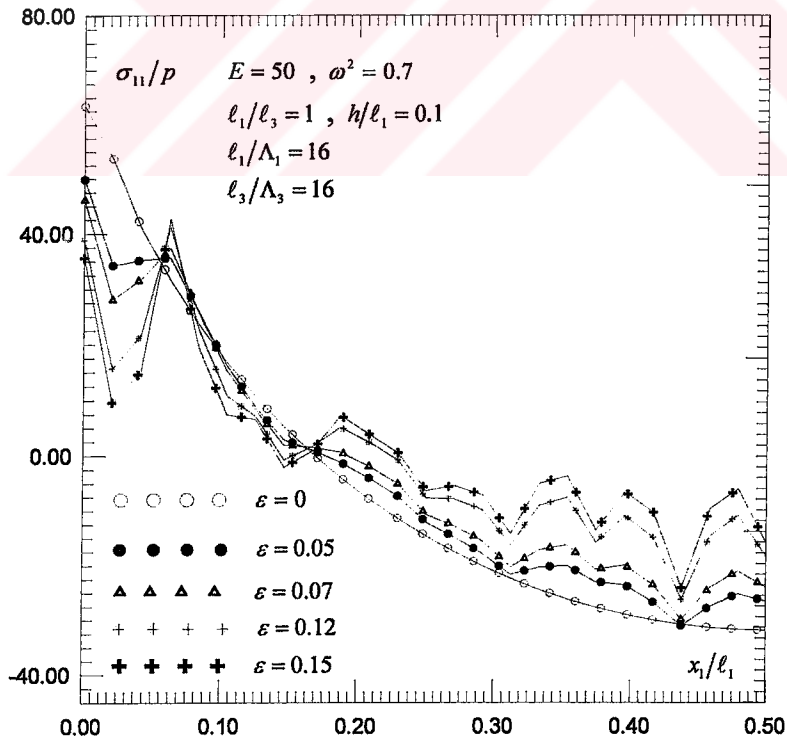
Şekil 2.16 Statik yükleme durumunda ϵ 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



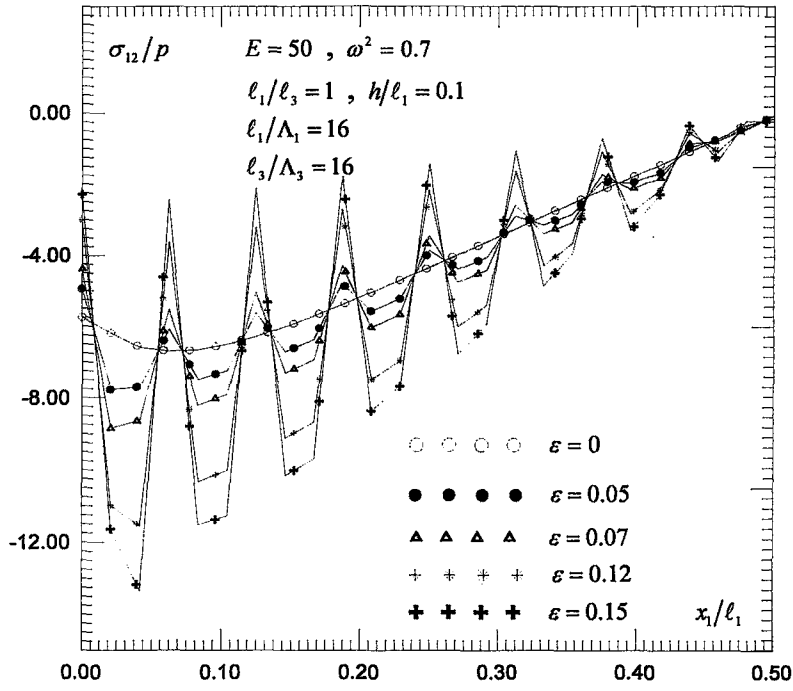
Şekil 2.17 Statik yükleme durumunda ϵ 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



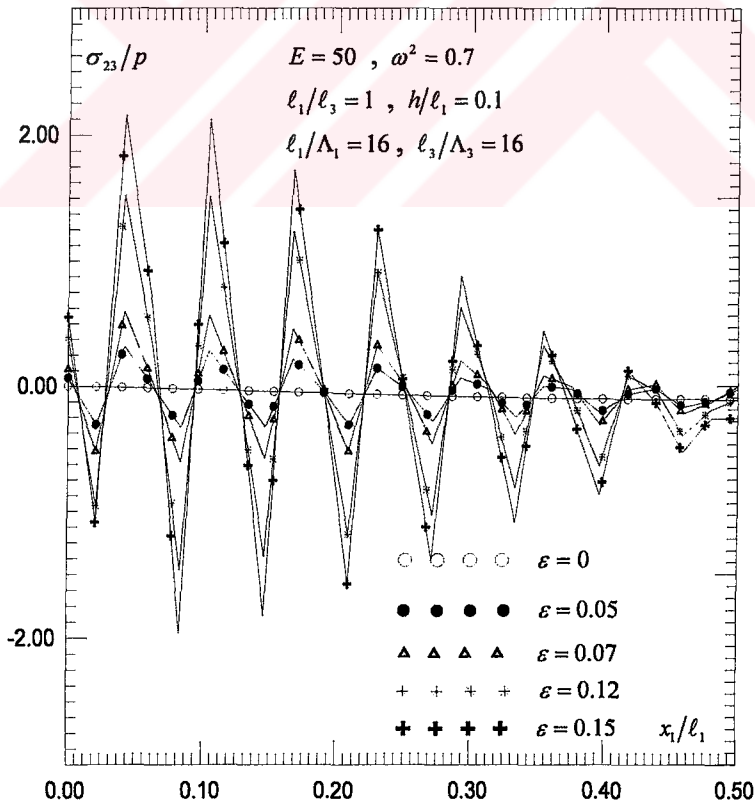
Şekil 2.20 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.21 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



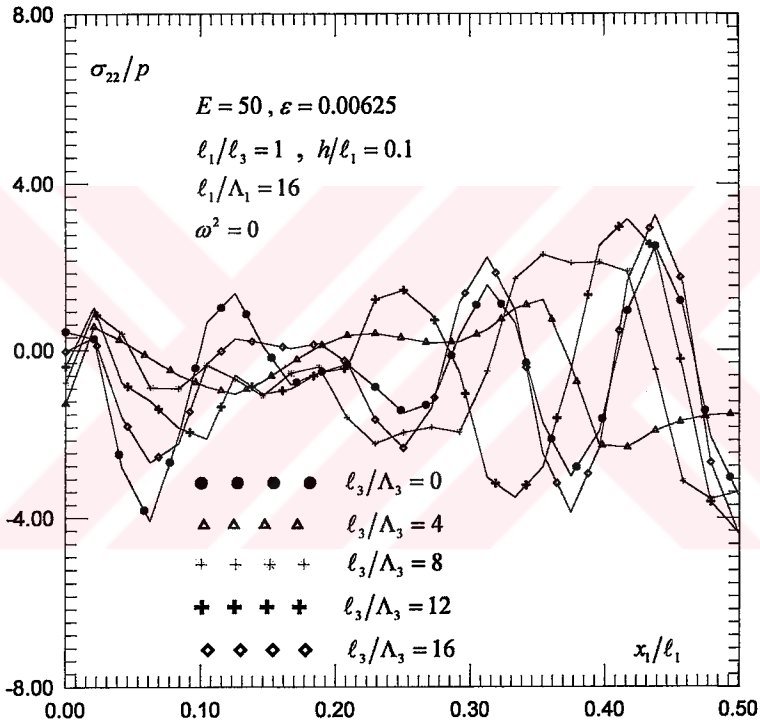
Şekil 2.22 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)



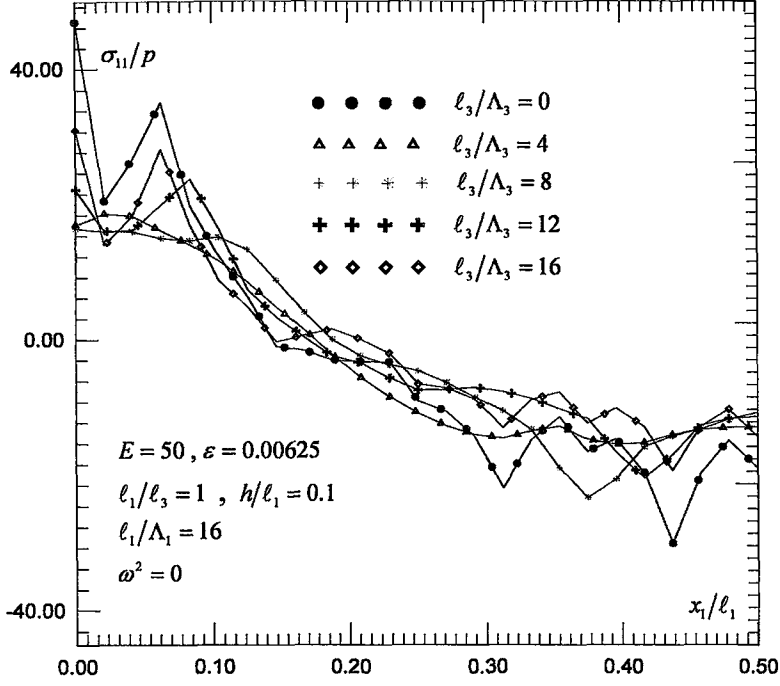
Şekil 2.23 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)

Bu şekillerdeki sonuçlardan görüldüğü gibi her iki durumda (yani $\omega^2 = 0$ ve $\omega^2 \neq 0$ durumlarında) ε ' un değerleri arttıkça gerilme yayılımı formu genliklerinin değeri de monoton artmaktadır. $\omega^2 = 0$ ve $\omega^2 = 0.7$ durumlarında elde edilen uygun sonuçların karşılaştırılması ise atalet kuvvetlerinin bu genliklerin değerlerini çok büyük ölçüde arttırdığını göstermektedir.

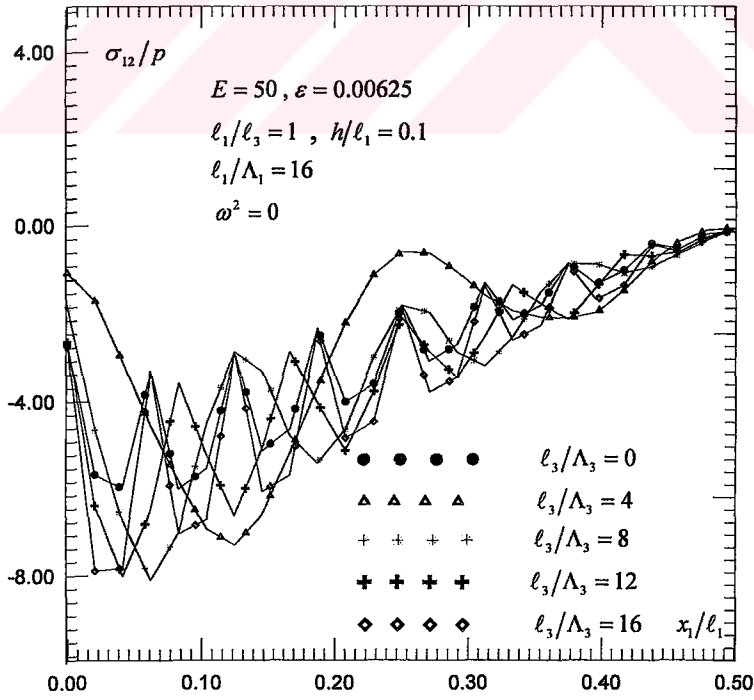
Şekil 2.24-2.27' de sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin yukarıda gösterilen durumdaki yayılımlarına malzeme yapısındaki eğriliğin iki yönlülüğünün etkisi statik yükleme durumunda ($\omega^2 = 0$ durumu) gösterilmiştir.



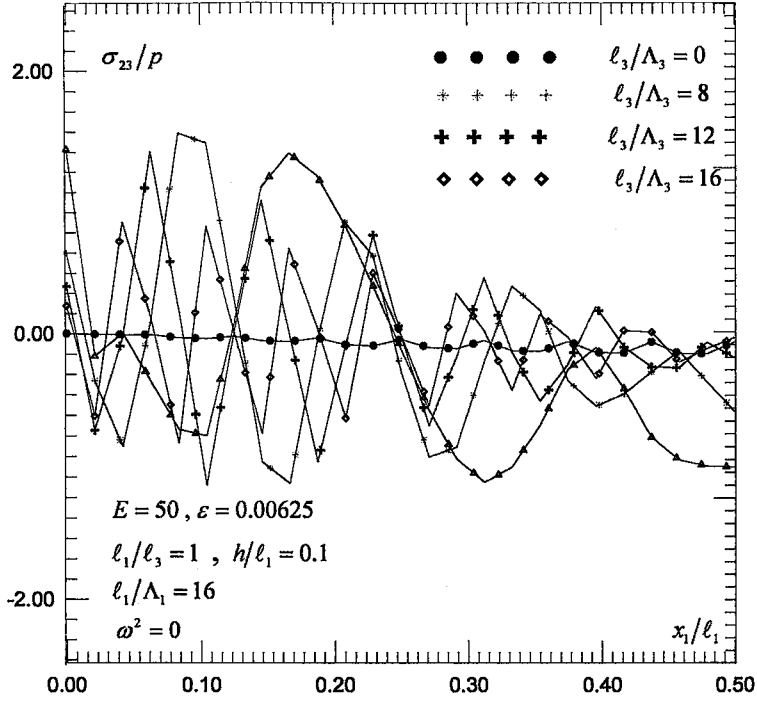
Şekil 2.24 Statik durumda $l_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ ' ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.25 Statik durumda $l_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)

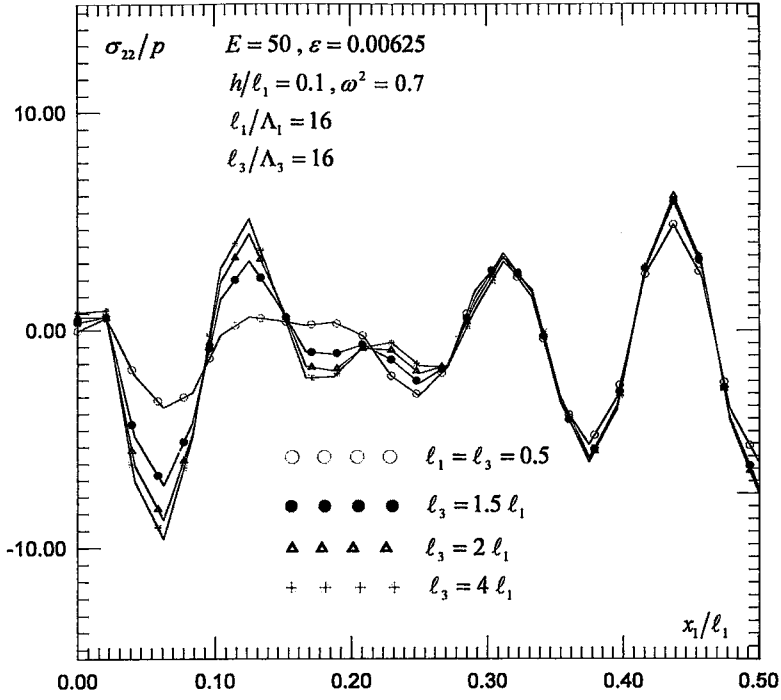


Şekil 2.26 Statik durumda $l_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)

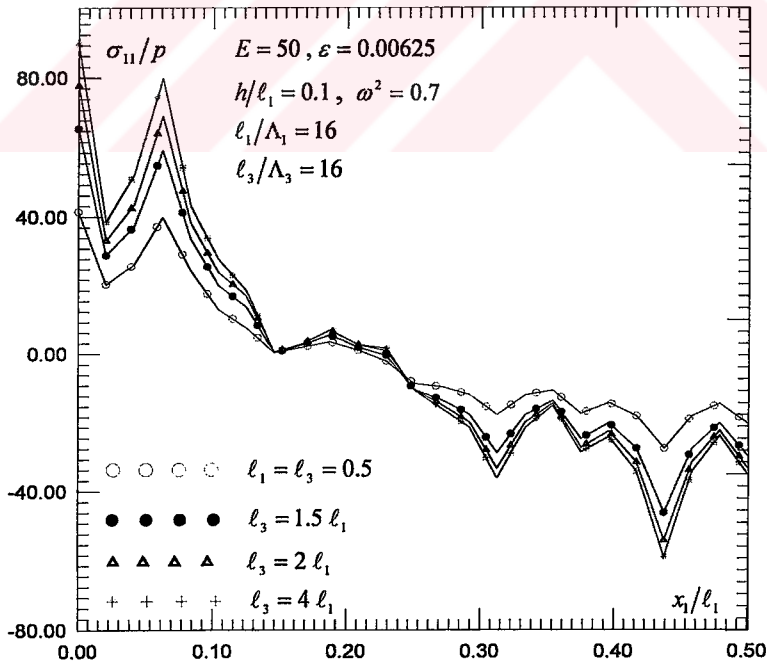


Şekil 2.27 Statik durumda $l_1/\Lambda_1 = 16$ iken $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 1)

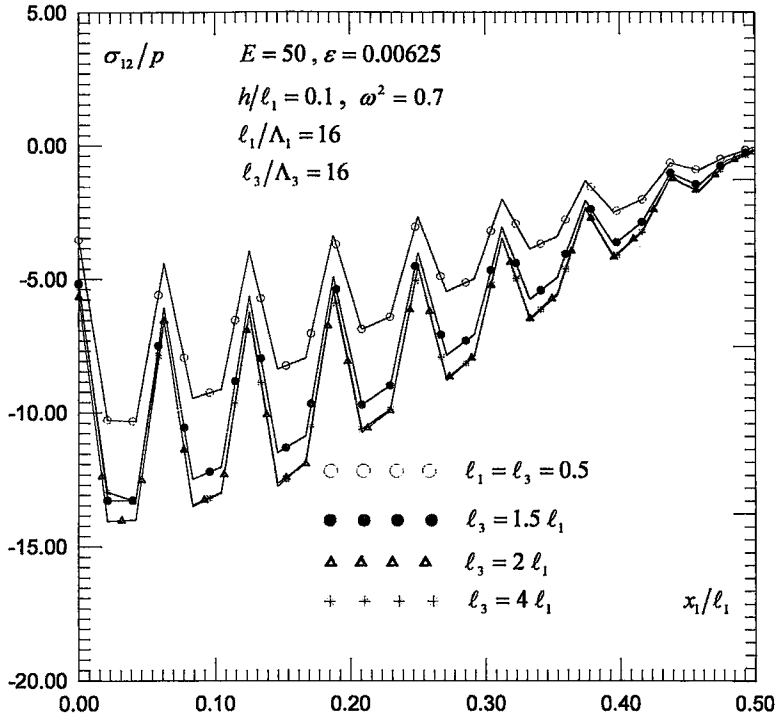
Bu sonuçlardan görüldüğü gibi karakter açısından malzeme yapısındaki iki yönlülüğün gerilme yayılımlarına etkisi statik yükleme durumunda da dinamik yükleme olduğu durumdaki gibidir. Şimdiye kadar verilen durumların hepsi $l_1 = l_3$ durumuna karşı gelmektedir. Şekil 2.28-2.31' de l_3 'ün l_1 'e göre büyümesinin ele alınan gerilme yayılımına katkısını göstermektedir.



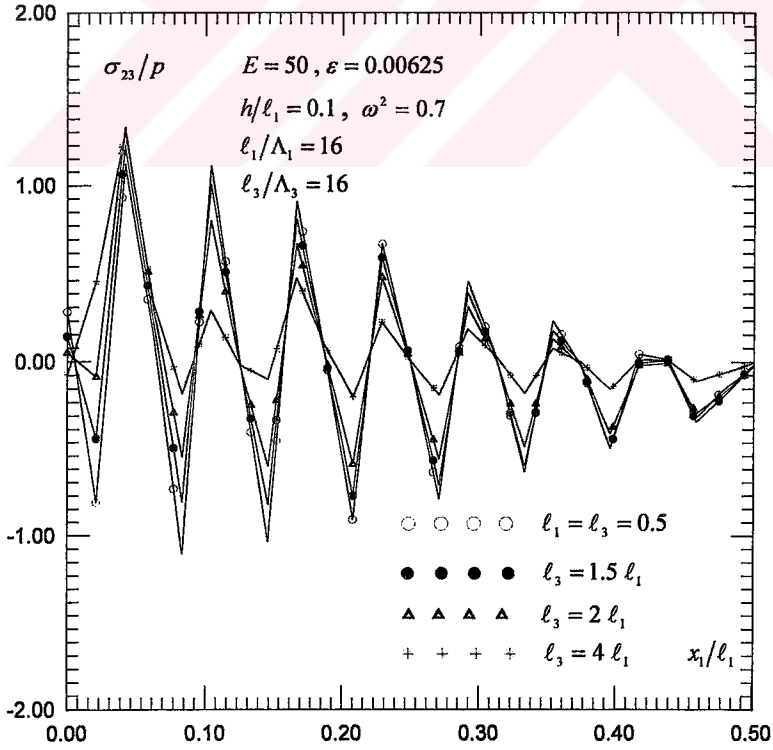
Şekil 2.28 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{22}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.29 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{11}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



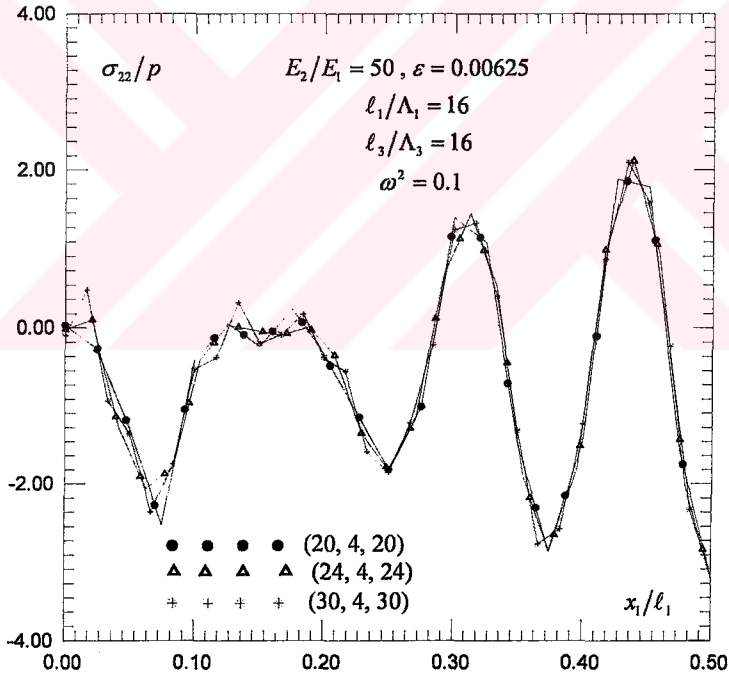
Şekil 2.30 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)



Şekil 2.31 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 1)

Bu şekillerden görüldüğü gibi σ_{12} , σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerin yayılımı (değerleri) belirli bir asimptota yaklaşmaktadır. Bu durumda ℓ_3 büyüdükçe gerilme yayılım formu genlikleri büyüyerek (σ_{23} gerilmesinin genlikleri ise küçülerek) asimptotlarına yaklaşıyorlar. Bu ise bilinen mekaniksel görüşlere uymaktadır. Bununla da Problem 1 için zorlanmış titreşim durumunda elde edilen sayısal sonuçları incelenmesini bitiriyoruz.

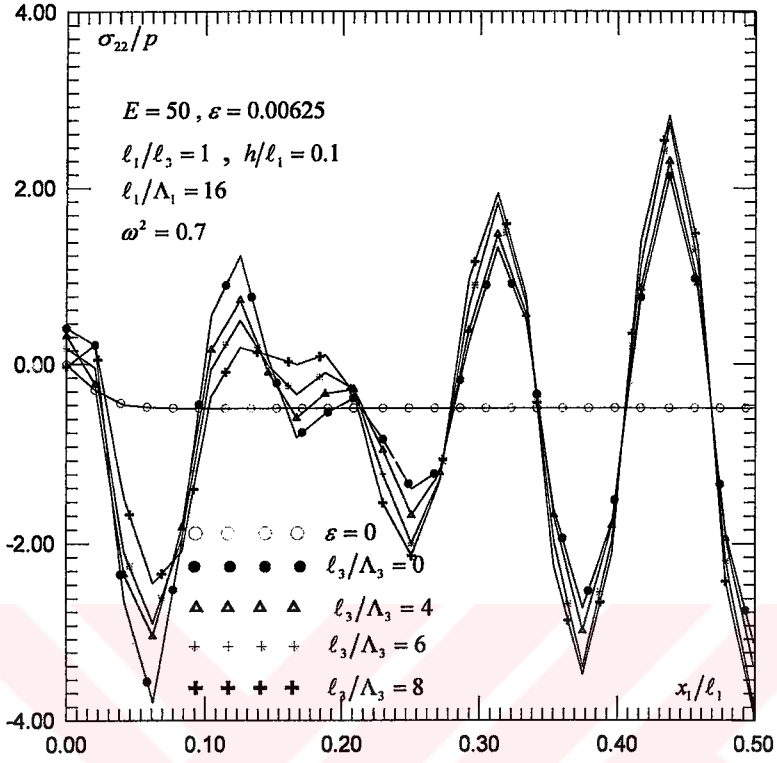
Şimdi Problem 2 için sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. İlk önce bulunan sonuçların sonlu eleman sayısına göre yakınsaklığını kanıtlayan bazı grafiklerin verildiği Şekil 2.32' ye dikkat edelim. Bu şekilde parantez içerisinde birbirinden virgül ile ayrılan üç sayı sırası ile Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 eksenleri yönündeki sonlu eleman sayısını belirtmektedir. Görüldüğü gibi ardışık son iki durumdaki sonlu eleman sayısında elde edilen sonuçlar hemen hemen çakışmaktadır. Bu sayısal sonuçların elde edilmesinde problem parametreleri için kullanılan değerler Şekil 2.32' nin alanında gösterilmektedir.



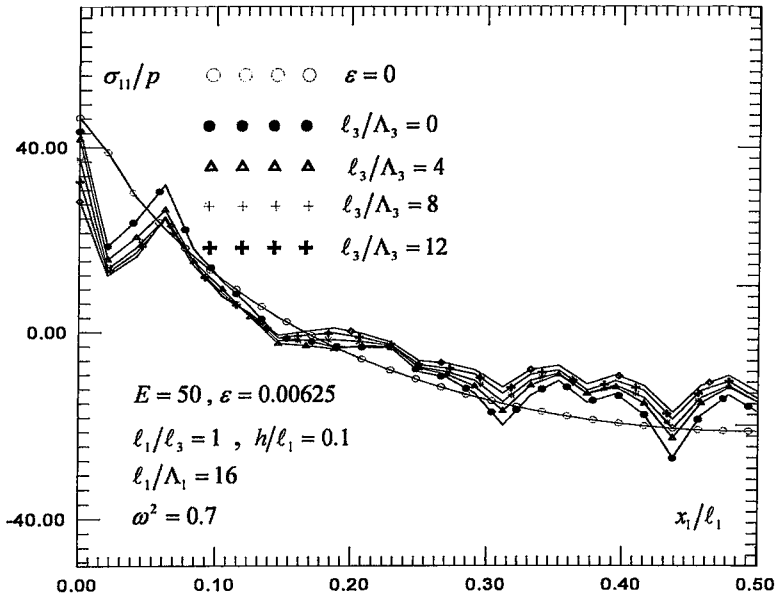
Şekil 2.32 Farklı sonlu eleman sayıları için σ_{22}/p ' nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)

Bu sonuçlardan yararlanarak tez kapsamında sayısal incelemeler (24,4,24) sonlu eleman sayısında yapılmıştır. Bu seçim program çalışmalarında zaman ve hafıza açısından da uygun bulunmuştur.

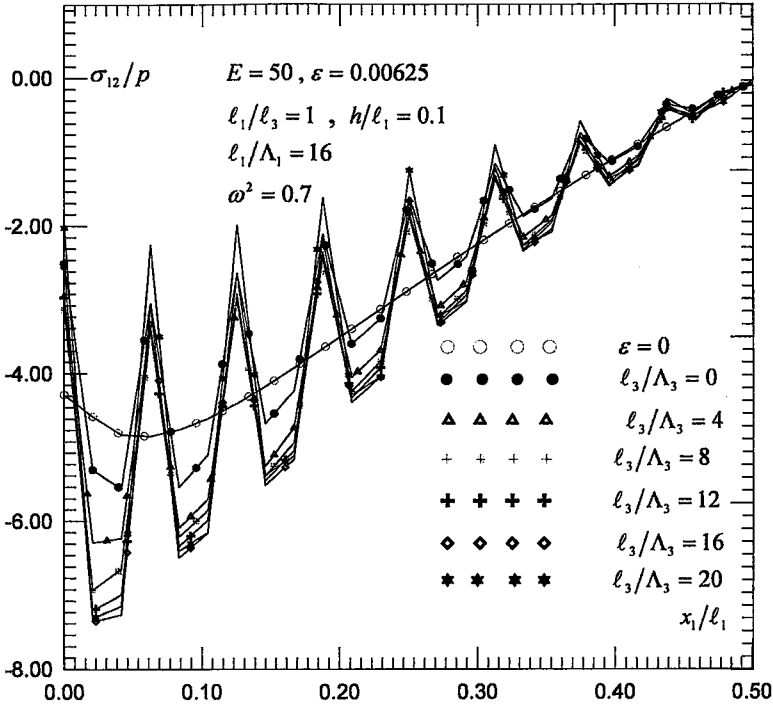
Şimdi bir önceki problemde olduğu gibi σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılımını gösteren grafiklerin açıklanmasına geçelim.



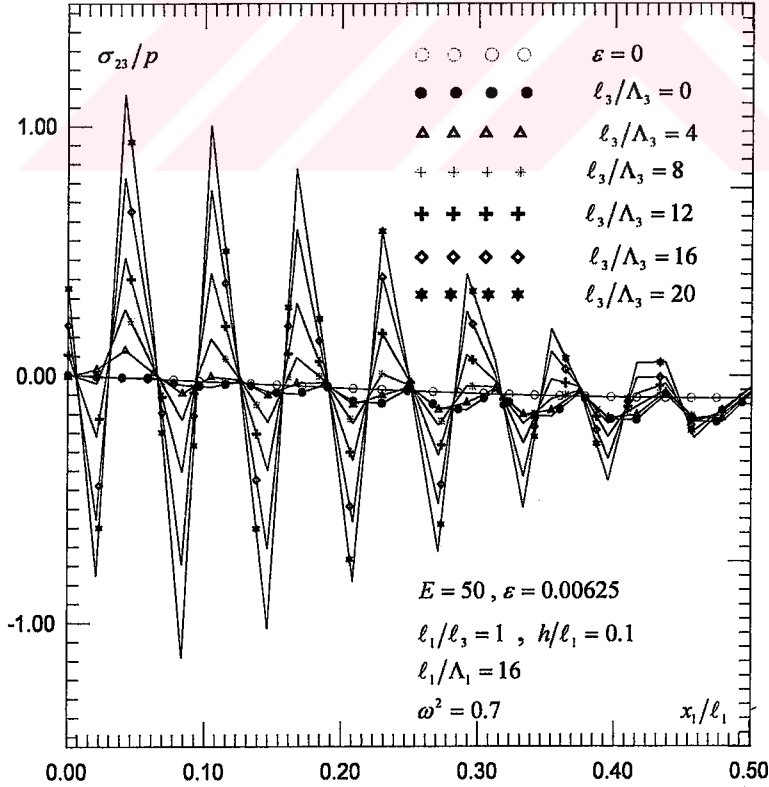
Şekil 2.33 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ ' ün çeşitli değerleri için σ_{22}/p ' nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.34 $\omega^2 = 0.7$ ve $\ell_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = \ell_3/\Lambda_3$ ' ün çeşitli değerleri için σ_{11}/p ' nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



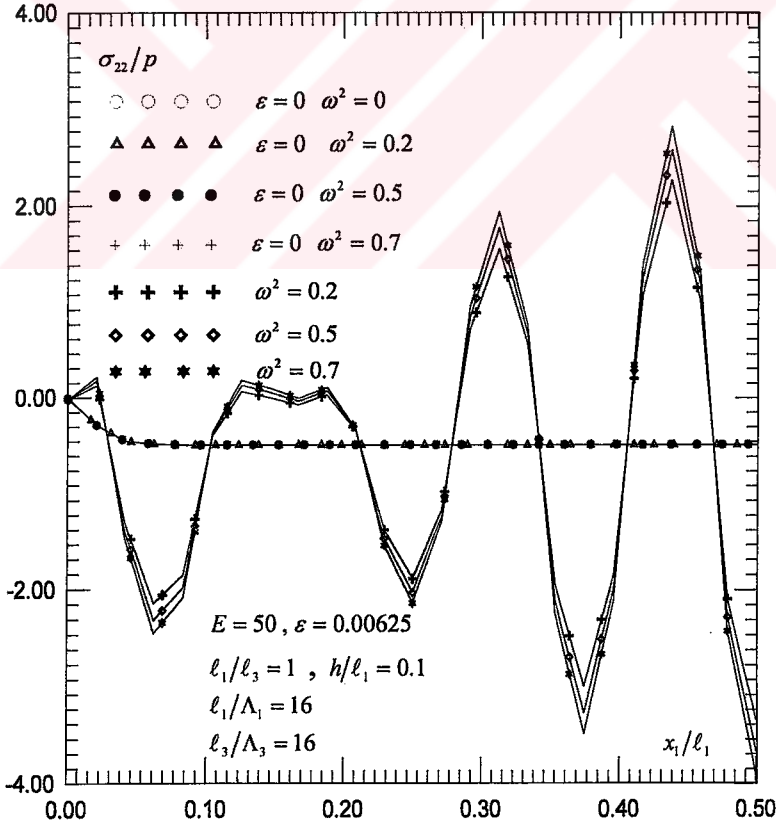
Şekil 2.35 $\omega^2 = 0.7$ ve $l_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



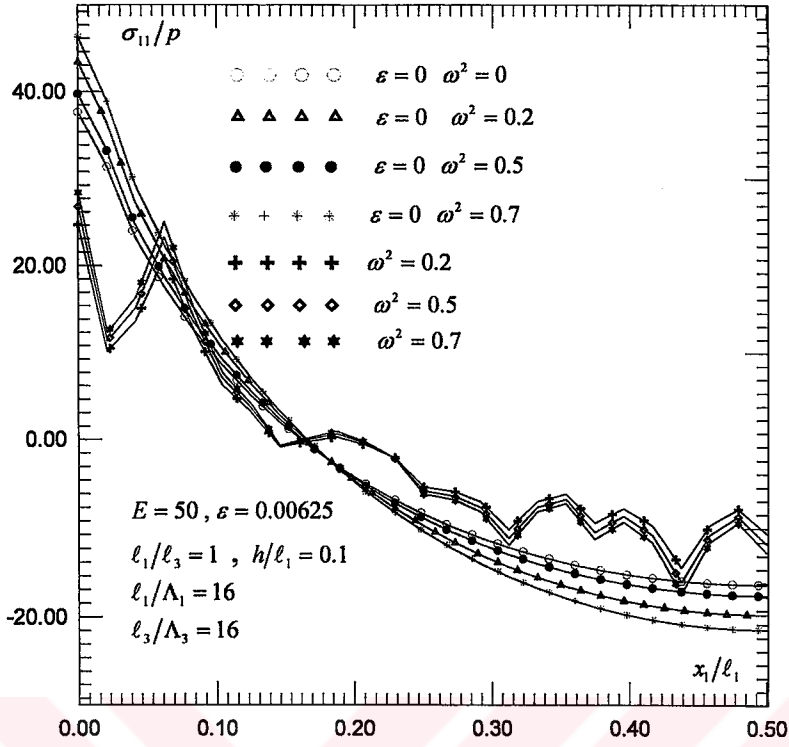
Şekil 2.36 $\omega^2 = 0.7$ ve $l_1/\Lambda_1 = 16$ durumunda $\gamma_3 = l_3/\Lambda_3$ 'ün çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)

Şekil 2.33-2.36' da sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılımlarına plak malzemesi yapısındaki eğriliğin iki yönlülüğünün bu gerilmelerin değerlerine ve yayılımına etkisi gösterilmektedir. Görüldüğü gibi eğriliğin iki yönlü olması gerilmelerin yayılım formunun genliğini önemli biçimde arttırmaktadır. Bundan başka ℓ_3/Λ_3 artışı bu genlikleri monoton olarak büyütmektedir. Bu şekillerdeki sonuçları Şekil 2.4-2.7' deki uygun sonuçlarla karşılaştırdığımızda plağın Ox_3 eksenı yönünde de rijit tutturulması halindeki gerilme değerleri bu plağın Ox_3 eksenı yönünde basit tutturulması halindeki uygun gerilme değerlerinden önemli biçimde küçük olduğu görülmektedir. Bu sonuç bundan sonraki gerilme yayılımı halleri için de geçerlidir.

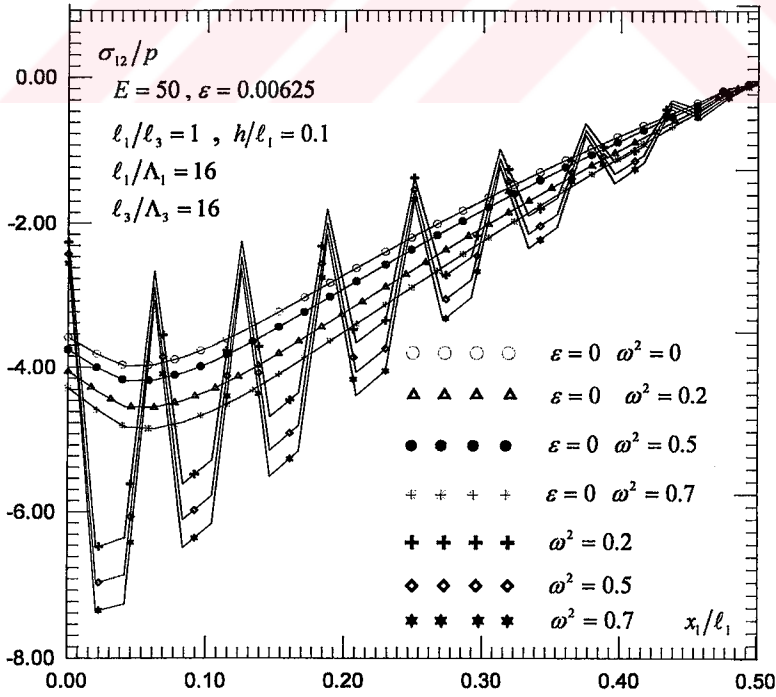
Yukarıda ele alınan ve ileride gösterilecek olan tüm sayısal sonuçlar σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmeleri için sırası ile $(x_2 = h/2, x_3 = \ell_3/2)$, $(x_2 = h, x_3 = \ell_3/2)$, $(x_2 = h/2, x_3 = \ell_3/2)$, $(x_2 = h/2, x_3 = \ell_3/2)$ kesitlerinde hesaplanmıştır.



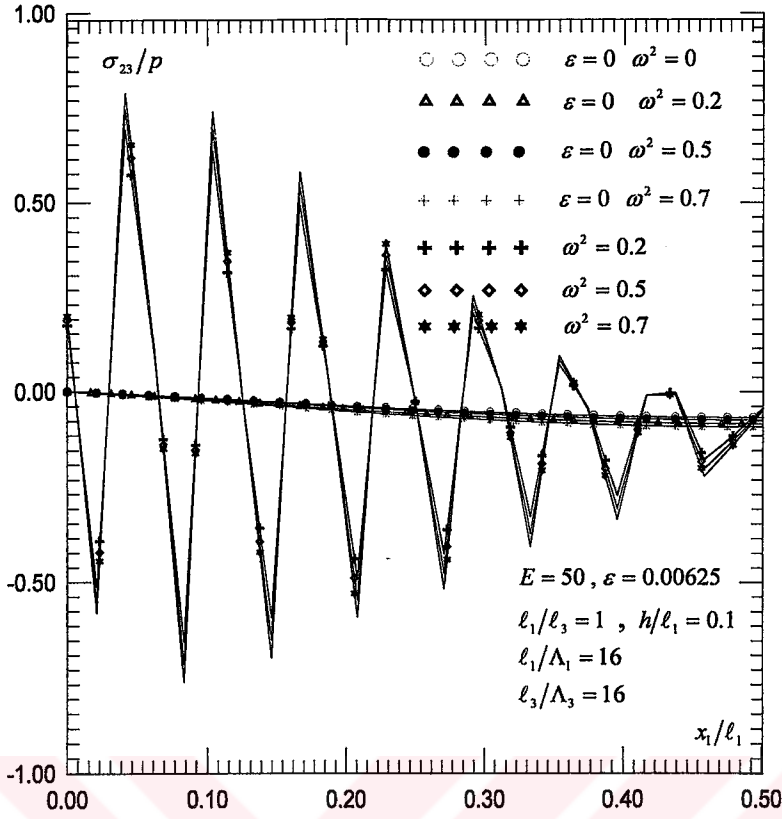
Şekil 2.37 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.38 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

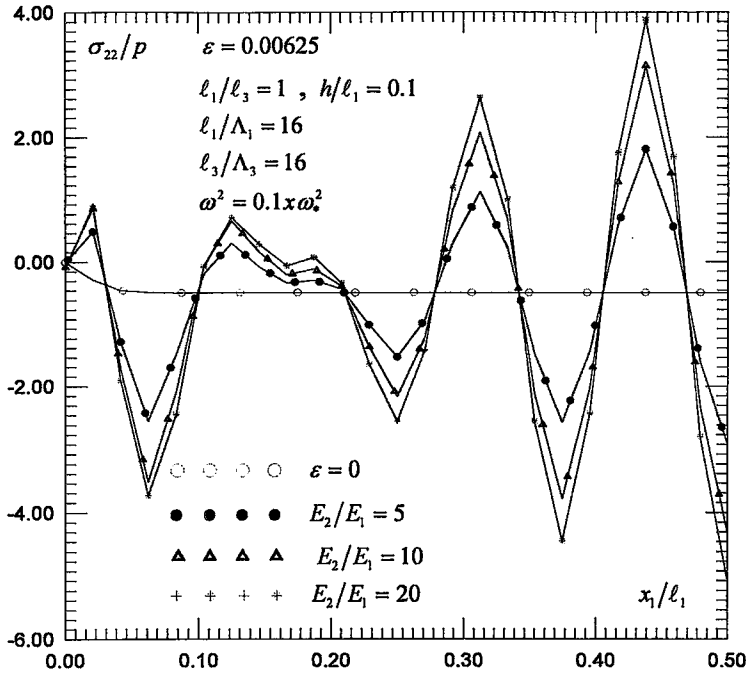


Şekil 2.39 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

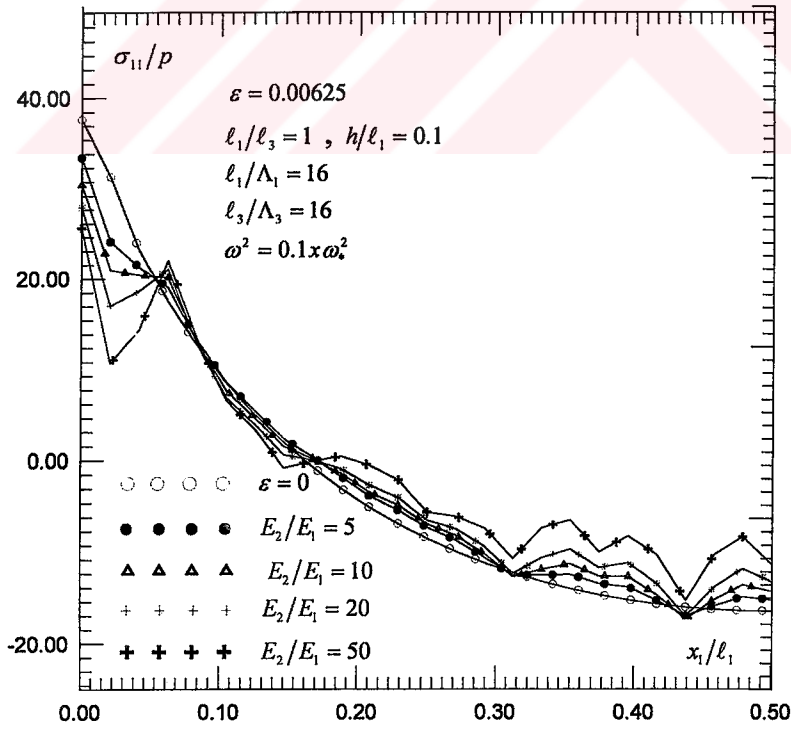


Şekil 2.40 ω^2 'nin çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

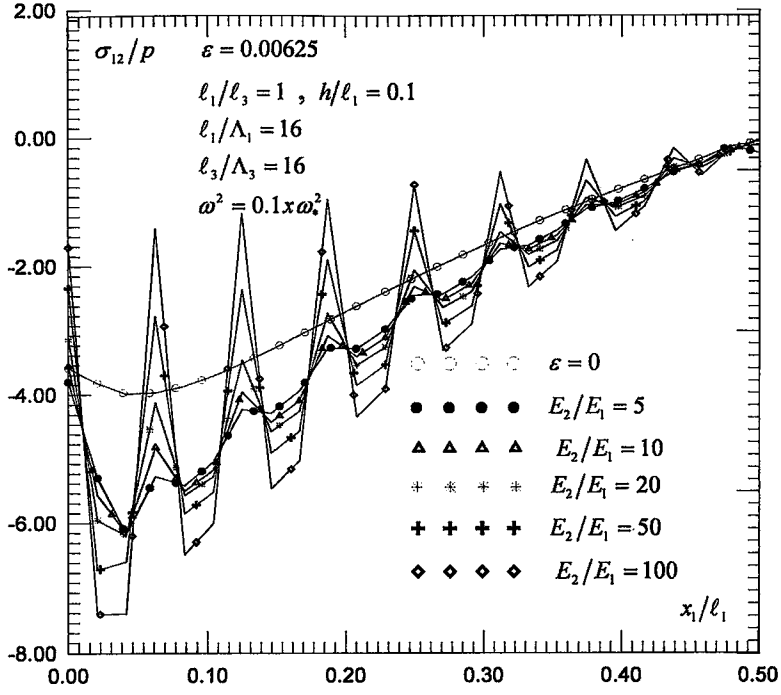
Şekil 2.37-2.40' da sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin yayılımına dış kuvvet değişim frekansının büyümesinin etkisini gösteren sonuçlar verilmektedir. Problem 1' deki uygun sonuçlarda olduğu gibi burada da ω^2 'nin büyümesi gerilme yayılım formu genliklerinin monoton olarak artmasına neden olmaktadır.



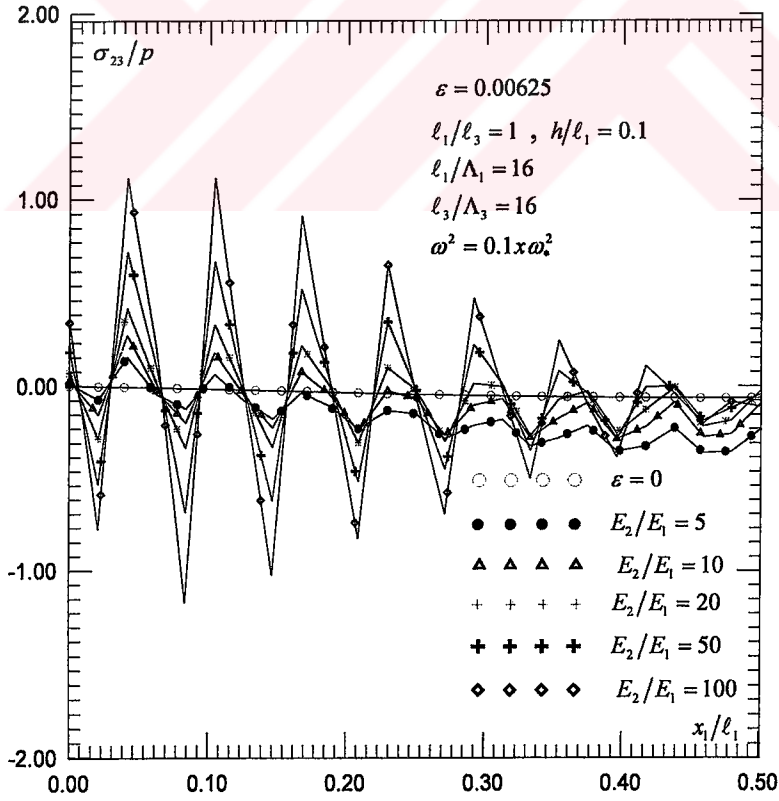
Şekil 2.41 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.42 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

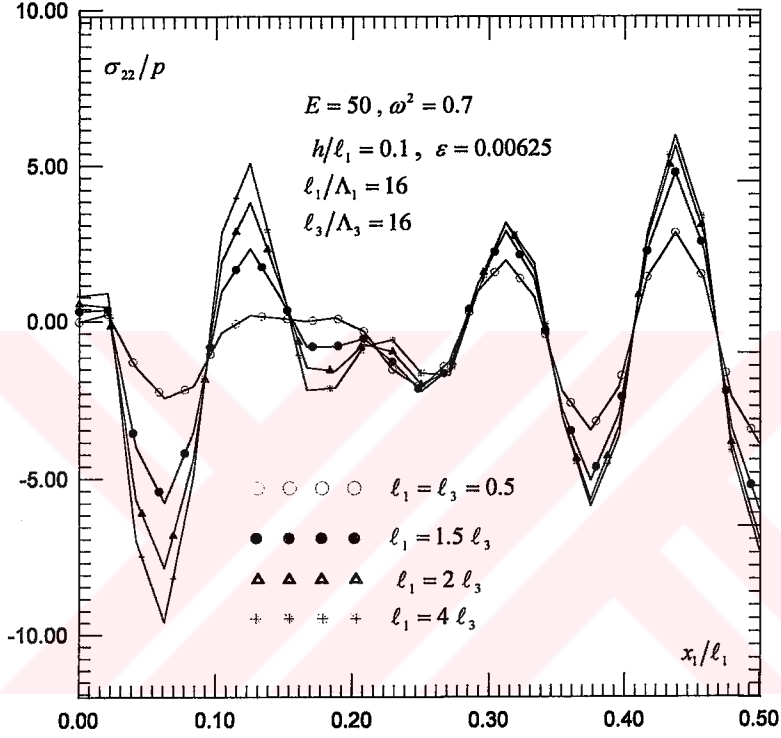


Şekil 2.43 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{12}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

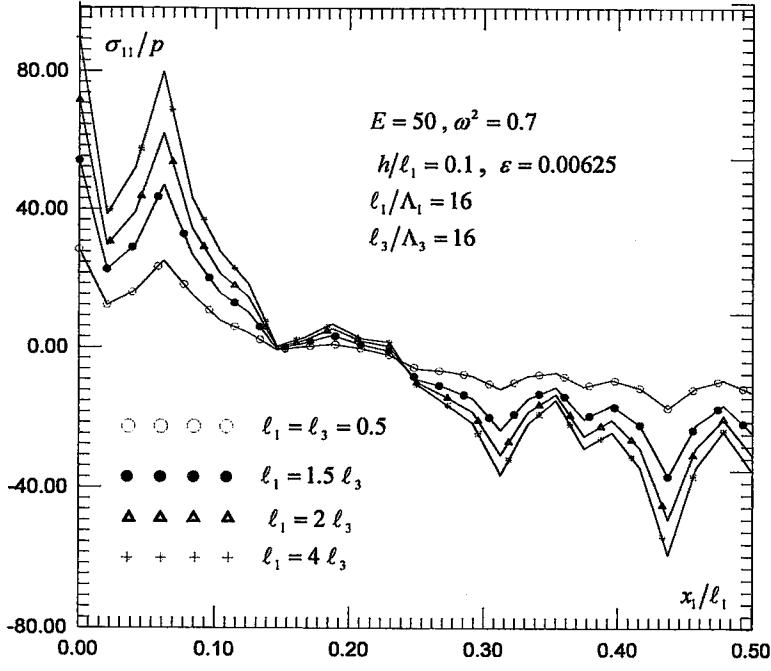


Şekil 2.44 $\omega^2 = 0.1 * \omega_*^2$ durumunda E_2/E_1 'in çeşitli değerleri için σ_{23}/p 'nin x_1/ℓ_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

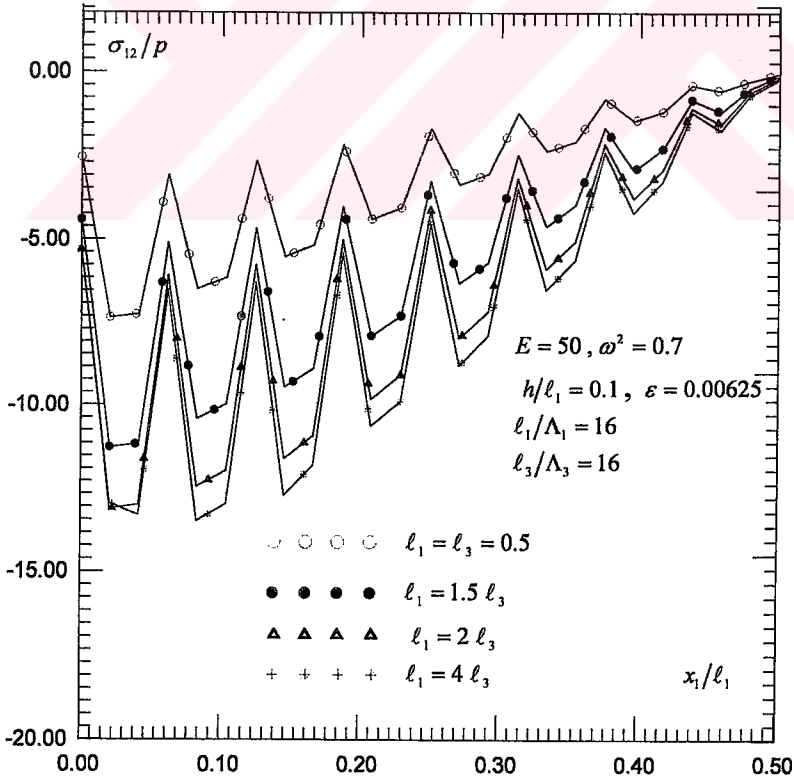
Şekil 2.41-2.44' de sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin yayılımlarına E_2/E_1 oranısının büyümesinin etkisini gösteren grafikler verilmiştir ki bu grafiklerden de şunu söyleyebiliriz: E_2/E_1 büyüdükçe yerel $\max \left| \left| \sigma_{ij} \right|_{\varepsilon=0} - \left| \sigma_{ij} \right|_{\varepsilon \neq 0} \right|$ değerleri monoton olarak artmaktadır. Şimdi plak geometrisinin değişiminin gerilme yayılımlarına etkisini gösteren ve Şekil 2.45-2.48' de grafikler halinde sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmeleri için verilen sonuçları ele alalım.



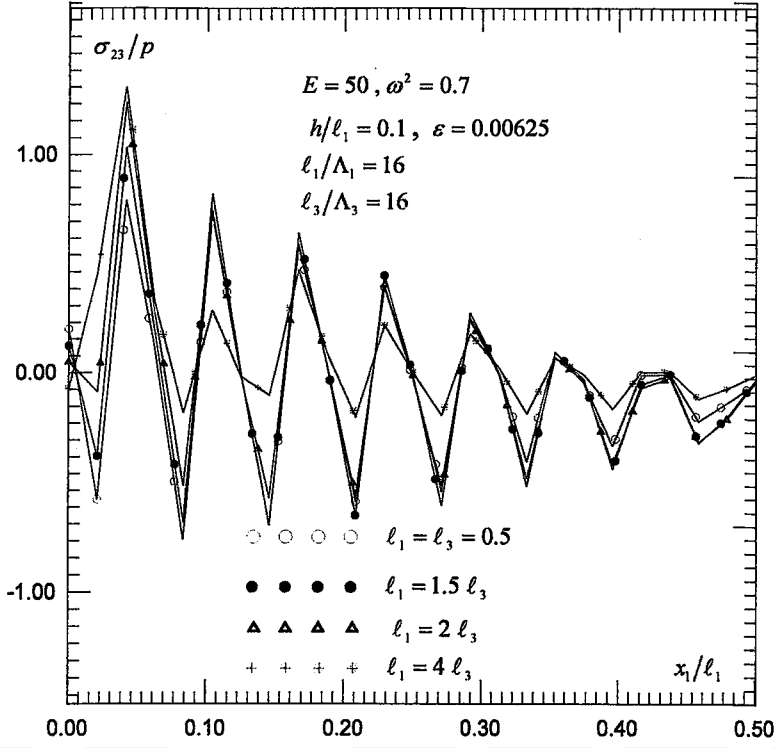
Şekil 2.45 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{22}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.46 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{11}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)

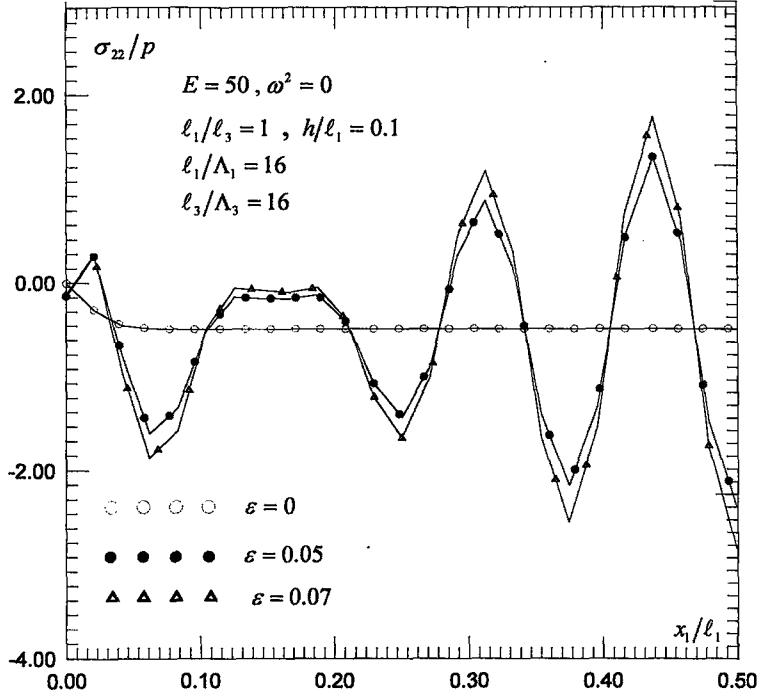


Şekil 2.47 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)

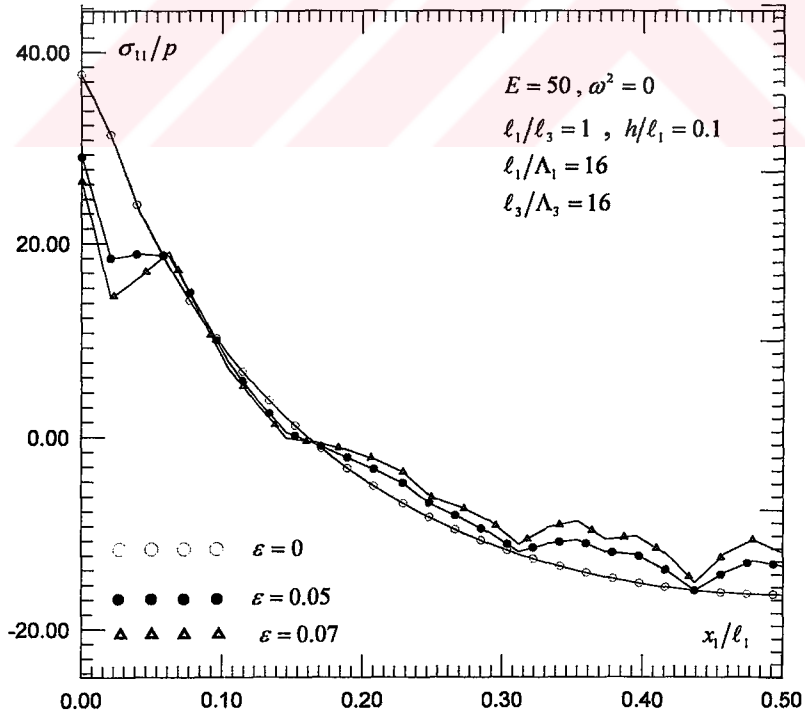


Şekil 2.48 l_3/l_1 oranlarının farklı değerlerinde σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)

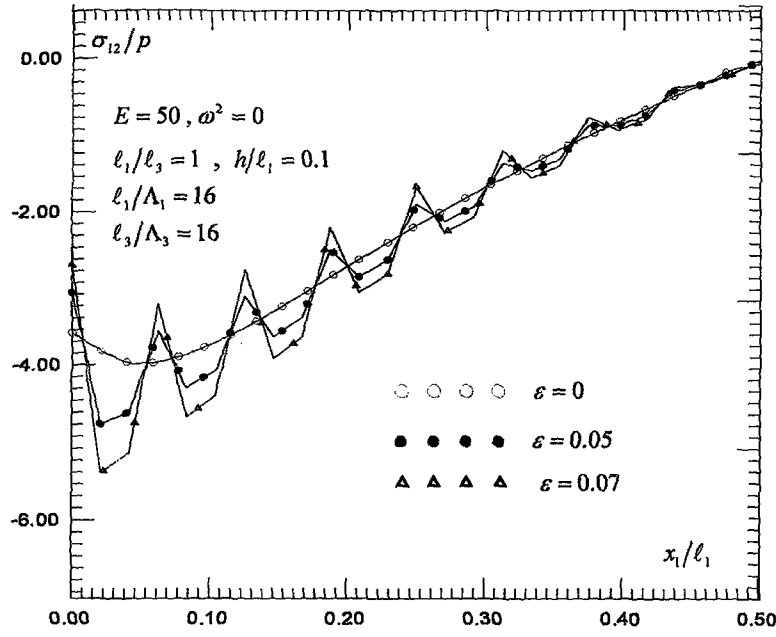
Bu sonuçlardan görüldüğü gibi l_3/l_1 oranı büyüdükçe yerel $\max \left| \left| \sigma_{ij} \right|_{\delta=0} - \left| \sigma_{ij} \right|_{\delta \neq 0} \right|$ değerleri artmakta ve belirli bir asimptota yaklaşmaktadır. Bu asimptot aynı zamanda Problem 1' de elde edilen gerilmelerin l_3/l_1 oranı büyüdüğünde yaklaştığı asimptotlarla çakışmaktadır. Bu çakışmanın nedeni x_3 yönündeki sınır koşullarının ele alınan gerilme yayılımlarına etkisinin l_3/l_1 oranı büyüdükçe küçülmesi ile açıklanmaktadır.



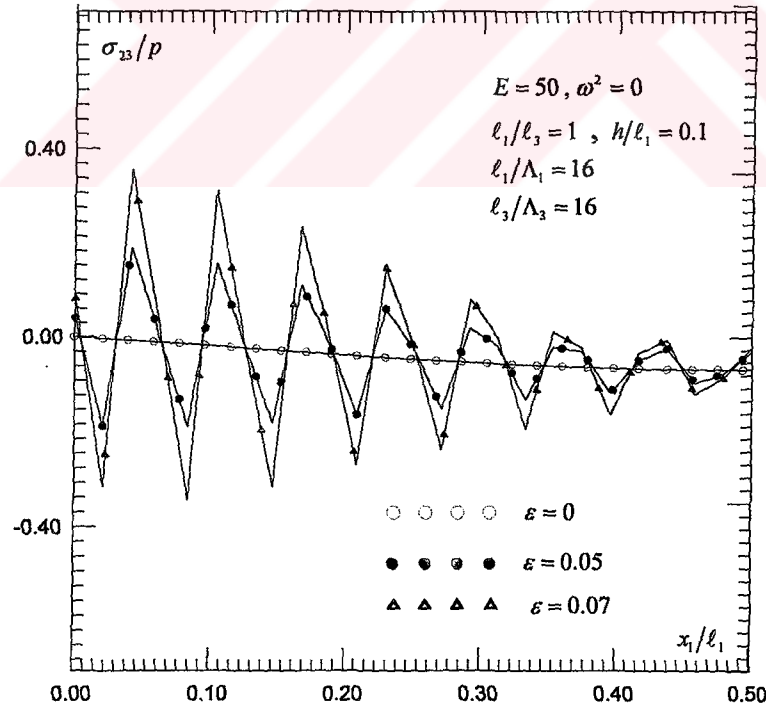
Şekil 2.49 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)



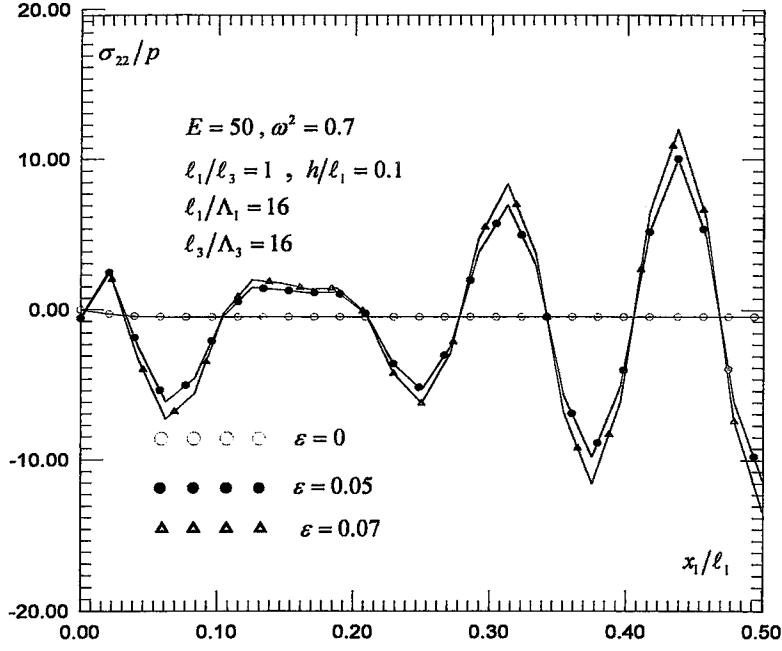
Şekil 2.50 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)



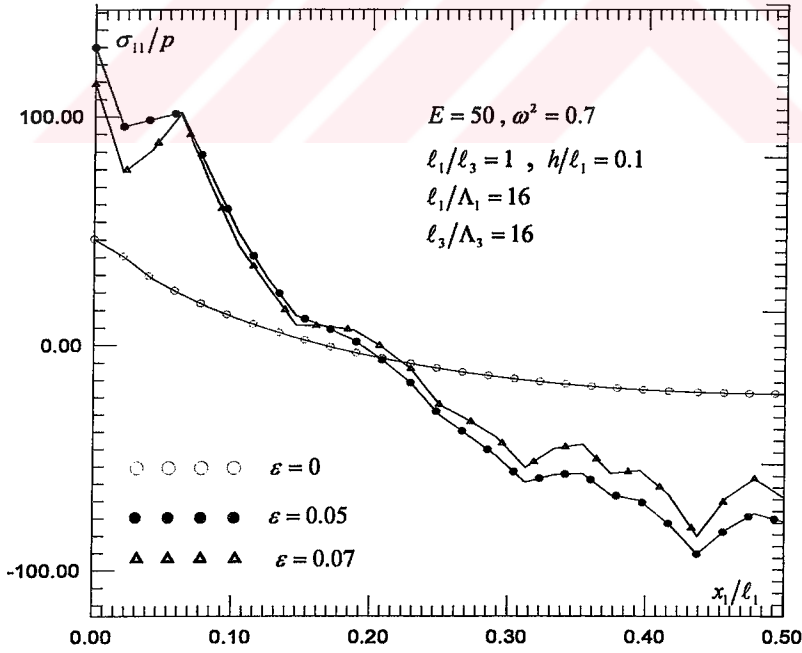
Şekil 2.51 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{12}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.52 Statik yükleme durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{23}/p ' nin x_1/l_1 ' e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.53 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{22}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)



Şekil 2.54 $\omega^2 = 0.7$ durumunda ε 'un çeşitli değerleri için σ_{11}/p 'nin x_1/l_1 'e göre yayılım grafiği (Problem 2)

Şekil 2.49-2.52' de yine sırasıyla σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} , σ_{23} gerilmelerinin x_1/ℓ_1 ' e göre yayılım grafikleri statik yükleme durumunda (yani $\omega^2 = 0$ durumunda) farklı ε değerleri için verilmektedir. Uygun grafikler dinamik yükleme halinde (yani $\omega^2 \neq 0$ ve $\omega^2 = 0.7$ durumunda) Şekil 2.53-2.56' da verilmektedir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi her iki yükleme durumunda plak malzemesi yapısındaki eğriliğin genliğinin büyümesi yerel $\max \left| \left| \sigma_{ij} \right|_{\varepsilon=0} - \left| \sigma_{ij} \right|_{\varepsilon \neq 0} \right|$ değerlerini monoton olarak arttırmaktadır.

Problem 2 için elde edilen sonuçların nicelik bakımından Problem 1 için elde edilen uygun sonuçlarla aynı tür olduğu görülmektedir. Bununla da zorlanmış titreşim durumunda Problem 2 için elde edilen sayısal sonuçların incelenmesini bitiriyoruz.

3. STABİLİTE KAYBI PROBLEMLERİ

Bu bölümde bir önceki bölümde ele alınan plakların Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Stabilité Teorisi (ÜBLEST) çerçevesinde Sonlu Elemanlar Yöntemi uygulanarak incelenmesi verilmiştir. İlk önce problemin formülasyonu daha sonra ise bu problemin sonlu eleman modellenmesi ele alınmaktadır. Sonlu eleman modellemesinin gerektirdiği fonksiyonelin ifadesi verilmekte ve bu ifadenin doğruluğu ispatlanmaktadır. Nihayet bu bölümün son kısımlarında elde edilen sayısal sonuçların açıklanması verilmektedir.

3.1 Problemlerin Formülasyonu

Bir önceki bölümde olduğu gibi, ele alınan plak $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1, 0 \leq x_2 \leq h, 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}$ alanını kapsamaktadır. Şekil 2.2' de görüldüğü gibi plak ile $Ox_1x_2x_3$ koordinat takımını birleştirelim. Plagın her bir noktasının bu koordinat takımındaki koordinatlarının Lagrange koordinatları olduğunu ve onların şekildeğiştirmeden önceki kartezyen koordinatları ile çakıştığını varsayalım. Ω bölgesinde aşağıdaki ÜBLEST denklemlerinin (Guz (1999)) sağlandığını varsayalım.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = 0, \quad T_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_m^{(0)} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \Omega, \quad i, j, n = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

bünye bağıntıları

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

şekil ve yerdeğiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

dir. (3.1) ve (3.3)' de bir önceki bölümde kabul edilen notasyonlar kullanılmıştır. (3.2)'deki \mathbf{D} matrisi (2.16) ifadesi ile belirtilmektedir. Yani plak malzemesi yapısında aynı zamanda Ox_1 ve Ox_3 eksenleri yönünde eğrilik olduğu varsayılmaktadır. (3.1) ve (3.3) denklemleri iki tür sınır koşulları çerçevesinde incelenecektir.

İlk önce ele alınan plagın $x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell_1$ kenarlarında tüm yerdeğiştirmelerin sıfır, $x_3 = 0$ ve $x_3 = \ell_3$ kenarlarında ise plagın kalınlık yönündeki yerdeğiştirmesinin sıfır olduğunu, ve

bundan başka T_{ij} ' lerin $x_2 = 0, h$ ve $x_3 = 0, \ell_3$ ' deki uygun değerlerinin sıfıra eşit olduğunu varsayan sınır koşullarını ele alalım. Bu sınır koşullarını 1. sınır koşulları olarak adlandıracacağız.

Daha sonra ise $x_1 = 0, x_1 = \ell_1, x_3 = 0$ ve $x_3 = \ell_3$ kenarlarındaki tüm yerdeğiştiremelerin sıfır olduğunu ve T_{ij} ' lerin $x_2 = 0, h$ ' da uygun değerlerinin sıfır olduğunu varsayan sınır koşullarını ele alalım. Bu tür sınır koşullarını ise 2. sınır koşulları olarak adlandıracağız.

1. tür sınır koşullarının karşı geldiği problem Problem 1, 2. tür sınır koşullarının karşı geldiği problem de Problem 2 olarak adlandırılacaktır.

1. Sınır Koşulları: (Problem 1)

$$T_{2i}|_{(x_2=0,h)} = 0, \quad u_i|_{(x_1=0,\ell_1)} = 0, \quad T_{33}|_{(x_3=0,\ell_3)} = 0,$$

$$u_2|_{(x_3=0,\ell_3)} = 0, \quad T_{31}|_{(x_3=0,\ell_3)} = 0 \quad i = 1,2,3 \quad (3.4)$$

2. Sınır Koşulları: (Problem 2)

$$T_{2i}|_{(x_2=0,h)} = 0, \quad u_i|_{(x_1=0,\ell_1)} = 0, \quad u_i|_{(x_3=0,\ell_3)} = 0 \quad i = 1,2,3 \quad (3.5)$$

(3.1) ifadesinde görünen $\sigma_m^{(0)}$ gerilmeleri plak stabilitesi kaybına kadar plakta oluşan öngerilmelerdir. Bu gerilmeler aşağıdaki denklemler takımını sağlamaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \quad (3.6)$$

$$\sigma^{(0)} = \mathbf{D}\epsilon^{(0)} \quad (3.7)$$

$$\epsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

(3.6)-(3.8)' de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}^{(0)})^T &= (\sigma_{11}^{(0)} \quad \sigma_{22}^{(0)} \quad \sigma_{33}^{(0)} \quad \sigma_{23}^{(0)} \quad \sigma_{13}^{(0)} \quad \sigma_{12}^{(0)}) \\
(\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)})^T &= (\varepsilon_{11}^{(0)} \quad \varepsilon_{22}^{(0)} \quad \varepsilon_{33}^{(0)} \quad \varepsilon_{23}^{(0)} \quad \varepsilon_{13}^{(0)} \quad \varepsilon_{12}^{(0)})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Problem 1 ve Problem 2 için (3.6)-(3.9) denklemleri sırası ile aşağıdaki sınır koşulları çerçevesinde çözülmelidir.

Problem 1: Ele alınan plağın Ox_1 eksenî yönündeki kenarlarından rijit bir cisim ile tutturulduğu ve Ox_1 yönünde basınca maruz bırakıldığı varsayalım. Dolayısı ile rijit cisim aracılığıyla plağın Ox_1 eksenî üzerindeki kenarlarına eşit α_1 yerdeğiştirmesi verilmektedir. Söylenen durumda plağın Ox_3 eksenî yönündeki kenarlarına şiddeti p_3 olan homojen yayılı normal basınç kuvvetleri etki göstermektedir. Bu söylenenleri göz önüne alırsak Problem 1 için öngerilmelerin belirlenmesinde sağlanması gereken sınır koşulları aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_{2i}^{(0)} \Big|_{x_2=\pm h} &= 0, \quad u_1^{(0)} \Big|_{x_1=0} = -u_1^{(0)} \Big|_{x_1=\ell_1} = \alpha_1 = \text{sabit}, \\
u_2^{(0)} \Big|_{x_1=0,\ell_1} &= u_3^{(0)} \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0, \quad u_2^{(0)} \Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0, \quad \sigma_{33}^{(0)} \Big|_{x_3=0,\ell_3} = -p_3
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Problem 2: Bu problem için ele alınan plağın hem Ox_1 eksenî yönündeki kenarlarından hem de Ox_3 eksenî yönündeki kenarlarından rijit cisimlerle tutturularak basınca maruz bırakıldığı varsayalım. Basınç durumunda plak kenarlarına uygun yönde sabit yerdeğiştirmeler verilmektedir. Böylece Problem 2 için öngerilmelerin belirlenmesinde kullanılması gereken sınır koşulları aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_{2i}^{(0)} \Big|_{x_2=\pm h} &= 0, \quad u_1^{(0)} \Big|_{x_1=0} = -u_1^{(0)} \Big|_{x_1=\ell_1} = \alpha_1 = \text{sabit}, \\
u_2^{(0)} \Big|_{x_1=0,\ell_1} &= u_3^{(0)} \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0, \quad u_2^{(0)} \Big|_{x_3=0,\ell_3} = u_1^{(0)} \Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \\
u_3^{(0)} \Big|_{x_3=0} &= -u_3^{(0)} \Big|_{x_3=\ell_3} = \alpha_3 = \text{sabit}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Böylece incelenmesi gereken problemlerin matematiksel formülasyonunu bitirmiş oluyoruz.

3.2 Stabilite Probleminin Varyasyon Formülasyonu

Öngerilmelerin sonlu eleman modellemesinde kullanılan fonksiyonel bir önceki bölümde kullanılan fonksiyonelin $\omega^2 = 0$ durumuna karşı gelmektedir. Dolayısı ile öngerilmelerin belirlenmesinde

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(0)} dx_1 dx_2 dx_3 - \iint_{S_p} P_i u_i^{(0)} dS_p \quad (3.12)$$

fonksiyonelinde yararlanılmaktadır. Öngerilmelerin Problem 1 ve Problem 2 için sağladıkları denklem ve sınır koşullarının (3.12) fonksiyonelinin Euler denklemleri olduğu bir önceki bölümde olduğu gibi ($\omega^2 = 0$ durumunda) gösterilebilmektedir. Bu işlemler detaylı bir biçimde bir önceki bölümde yapıldığından burada tekrar edilmesini gerekli bulmuyoruz.

Şimdi ÜBLEST denklemlerinin sağladığı denklemlerin çözümünde sonlu eleman modellemesinin yapılabilmesi için kullanılan fonksiyoneli Guz (1999)' a göre aşağıdaki biçimde seçebiliriz.

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[T_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + T_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + T_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + T_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + T_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + T_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right. \\ \left. + T_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + T_{32} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.1) denklemlerinin ve Problem 1 ve Problem 2 için sırasıyla verilen (3.4) ve (3.5) sınır koşullarının (3.13) fonksiyonelinin Euler denklemleri olduğunu ispat edelim.

(3.1)' den ve (3.2)' den aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \sigma_{11} + \sigma_{1n}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ &= A_{11} \varepsilon_{11} + A_{12} \varepsilon_{22} + A_{13} \varepsilon_{33} + 2A_{14} \varepsilon_{23} + 2A_{15} \varepsilon_{13} + 2A_{16} \varepsilon_{12} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{14} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{15} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{16} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\
&\quad + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\
&= (A_{11} + \sigma_{11}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{14} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + (A_{15} + \sigma_{13}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \\
&\quad + (A_{16} + \sigma_{12}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{16} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
&= \omega_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{1133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{1123} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{1132} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{1113} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + \omega_{1131} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \sigma_{12} + \sigma_{1n}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\
&= A_{16} \varepsilon_{11} + A_{26} \varepsilon_{22} + A_{36} \varepsilon_{33} + 2A_{46} \varepsilon_{23} + 2A_{56} \varepsilon_{13} + 2A_{66} \varepsilon_{12} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\
&= A_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{56} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{66} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\
&\quad + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\
&= A_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (A_{26} + \sigma_{12}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + (A_{46} + \sigma_{13}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{56} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \\
&\quad + (A_{66} + \sigma_{11}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
&= \omega_{1211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{1233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{1223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{1232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{1213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + \omega_{1231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{1212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{13} &= \sigma_{13} + \sigma_{1n}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_n} \\
&= A_{15}\varepsilon_{11} + A_{25}\varepsilon_{22} + A_{35}\varepsilon_{33} + 2A_{45}\varepsilon_{23} + 2A_{55}\varepsilon_{13} + 2A_{56}\varepsilon_{12} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
&= A_{15} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{25} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\
&\quad + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
&= A_{15} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{25} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (A_{35} + \sigma_{13}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (A_{45} + \sigma_{12}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + (A_{55} + \sigma_{11}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
&= \omega_{1311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{1333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{1323} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{1332} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{1313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + \omega_{1331} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{1312} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1321} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{21} &= \sigma_{21} + \sigma_{2n}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\
&= A_{16}\varepsilon_{11} + A_{26}\varepsilon_{22} + A_{36}\varepsilon_{33} + 2A_{46}\varepsilon_{23} + 2A_{56}\varepsilon_{13} + 2A_{66}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\
&= A_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{56} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{66} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\
&\quad + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\
&= (A_{16} + \sigma_{21}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{46} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + (A_{56} + \sigma_{23}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{56} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \\
&\quad + (A_{66} + \sigma_{22}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{66} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
&= \omega_{2111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{2133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{2123} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{2132} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{2113} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + \omega_{2131} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

$$T_{22} = \sigma_{22} + \sigma_{2n}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_n}$$

$$= A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33} + 2A_{24}\varepsilon_{23} + 2A_{25}\varepsilon_{13} + 2A_{26}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

$$= A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{24} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{24} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{25} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{25} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{26} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} +$$

$$+ \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

$$= A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (A_{22} + \sigma_{22}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + (A_{24} + \sigma_{23}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{24} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{25} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{25} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} +$$

$$+ A_{26} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (A_{26} + \sigma_{21}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$= \omega_{2211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{2233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{2223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{2232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} +$$

$$+ \omega_{2213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \omega_{2231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{2212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$T_{23} = \sigma_{23} + \sigma_{2n}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_n}$$

$$= A_{14}\varepsilon_{11} + A_{24}\varepsilon_{22} + A_{34}\varepsilon_{33} + 2A_{44}\varepsilon_{23} + 2A_{45}\varepsilon_{13} + 2A_{46}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$= A_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{24} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{45} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{46} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{46} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} +$$

$$+ \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$= A_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{24} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (A_{34} + \sigma_{23}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (A_{44} + \sigma_{22}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{45} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} +$$

$$+ (A_{45} + \sigma_{21}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{46} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{46} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$= \omega_{2311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{2333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{2323} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{2332} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{2313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} +$$

$$+ \omega_{2331} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{2312} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2321} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$T_{31} = \sigma_{31} + \sigma_{3n}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_n}$$

$$= A_{15}\varepsilon_{11} + A_{25}\varepsilon_{22} + A_{35}\varepsilon_{33} + 2A_{45}\varepsilon_{23} + 2A_{55}\varepsilon_{13} + 2A_{56}\varepsilon_{12} + \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

$$= A_{15} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{25} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} +$$

$$+ \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

$$= (A_{15} + \sigma_{31}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{25} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + (A_{55} + \sigma_{33}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} +$$

$$+ (A_{56} + \sigma_{32}^{(0)}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{56} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$= \omega_{3111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3123} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3132} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3113} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} +$$

$$+ \omega_{3131} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$T_{32} = \sigma_{32} + \sigma_{3n}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_n}$$

$$= A_{14}\varepsilon_{11} + A_{24}\varepsilon_{22} + A_{34}\varepsilon_{33} + 2A_{44}\varepsilon_{23} + 2A_{45}\varepsilon_{13} + 2A_{46}\varepsilon_{12} + \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

$$= A_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{24} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{45} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{46} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{46} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} +$$

$$+ \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

$$= A_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (A_{24} + \sigma_{32}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + (A_{44} + \sigma_{33}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{45} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} +$$

$$+ A_{46} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (A_{46} + \sigma_{31}^{(0)}) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$= \omega_{3211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} +$$

$$+ \omega_{3231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \sigma_{33} + \sigma_{3n}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_n} \\
&= A_{13} \varepsilon_{11} + A_{23} \varepsilon_{22} + A_{33} \varepsilon_{33} + 2A_{34} \varepsilon_{23} + 2A_{35} \varepsilon_{13} + 2A_{36} \varepsilon_{12} + \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
&= A_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{34} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{36} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\
&\quad + \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
&= A_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (A_{33} + \sigma_{33}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{34} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (A_{34} + \sigma_{32}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + (A_{35} + \sigma_{31}^{(0)}) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + A_{36} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
&= \omega_{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3323} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3332} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + \omega_{3331} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3312} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3321} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Burada ω_{ijmn} 'leri açıkça ifade edersek;

$$\begin{aligned}
 \omega_{1111} &= A_{11} + \sigma_{11}^{(0)} & \omega_{2211} &= A_{12} & \omega_{3311} &= A_{13} \\
 \omega_{1122} &= A_{12} & \omega_{2222} &= A_{22} + \sigma_{22}^{(0)} & \omega_{3322} &= A_{23} \\
 \omega_{1133} &= A_{13} & \omega_{2233} &= A_{23} & \omega_{3333} &= A_{33} + \sigma_{33}^{(0)} \\
 \omega_{1123} &= A_{14} & \omega_{2223} &= A_{24} + \sigma_{23}^{(0)} & \omega_{3323} &= A_{34} \\
 \omega_{1132} &= A_{14} & \omega_{2232} &= A_{24} & \omega_{3332} &= A_{34} + \sigma_{32}^{(0)} \\
 \omega_{1113} &= A_{15} + \sigma_{13}^{(0)} & \omega_{2213} &= A_{25} & \omega_{3313} &= A_{35} \\
 \omega_{1131} &= A_{15} & \omega_{2231} &= A_{25} & \omega_{3331} &= A_{35} + \sigma_{31}^{(0)} \\
 \omega_{1112} &= A_{16} + \sigma_{12}^{(0)} & \omega_{2212} &= A_{26} & \omega_{3312} &= A_{36} \\
 \omega_{1121} &= A_{16} & \omega_{2221} &= A_{26} + \sigma_{21}^{(0)} & \omega_{3321} &= A_{36} \\
 \\
 \omega_{1211} &= A_{16} & \omega_{2111} &= A_{16} + \sigma_{21}^{(0)} & \omega_{1311} &= A_{15} \\
 \omega_{1222} &= A_{26} + \sigma_{12}^{(0)} & \omega_{2122} &= A_{26} & \omega_{1322} &= A_{25} \\
 \omega_{1233} &= A_{36} & \omega_{2133} &= A_{36} & \omega_{1333} &= A_{35} + \sigma_{13}^{(0)} \\
 \omega_{1223} &= A_{46} + \sigma_{13}^{(0)} & \omega_{2123} &= A_{46} & \omega_{1323} &= A_{45} \\
 \omega_{1232} &= A_{46} & \omega_{2132} &= A_{46} & \omega_{1332} &= A_{45} + \sigma_{12}^{(0)} \\
 \omega_{1213} &= A_{56} & \omega_{2113} &= A_{56} + \sigma_{23}^{(0)} & \omega_{1313} &= A_{55} \\
 \omega_{1231} &= A_{56} & \omega_{2131} &= A_{56} & \omega_{1331} &= A_{55} + \sigma_{11}^{(0)} \\
 \omega_{1212} &= A_{66} & \omega_{2112} &= A_{66} + \sigma_{22}^{(0)} & \omega_{1312} &= A_{56} \\
 \omega_{1221} &= A_{66} + \sigma_{11}^{(0)} & \omega_{2121} &= A_{66} & \omega_{1321} &= A_{56} \\
 \\
 \omega_{3111} &= A_{15} + \sigma_{31}^{(0)} & \omega_{2311} &= A_{14} & \omega_{3211} &= A_{14} \\
 \omega_{3122} &= A_{25} & \omega_{2322} &= A_{24} & \omega_{3222} &= A_{24} + \sigma_{32}^{(0)} \\
 \omega_{3133} &= A_{35} & \omega_{2333} &= A_{34} + \sigma_{23}^{(0)} & \omega_{3233} &= A_{34} \\
 \omega_{3123} &= A_{45} & \omega_{2323} &= A_{44} & \omega_{3223} &= A_{44} + \sigma_{33}^{(0)} \\
 \omega_{3132} &= A_{45} & \omega_{2332} &= A_{44} + \sigma_{22}^{(0)} & \omega_{3232} &= A_{44} \\
 \omega_{3113} &= A_{55} + \sigma_{33}^{(0)} & \omega_{2313} &= A_{45} & \omega_{3213} &= A_{45} \\
 \omega_{3131} &= A_{55} & \omega_{2331} &= A_{45} + \sigma_{21}^{(0)} & \omega_{3231} &= A_{45} \\
 \omega_{3112} &= A_{56} + \sigma_{32}^{(0)} & \omega_{2312} &= A_{46} & \omega_{3212} &= A_{46} \\
 \omega_{3121} &= A_{56} & \omega_{2321} &= A_{46} & \omega_{3221} &= A_{46} + \sigma_{31}^{(0)}
 \end{aligned}$$

(3.15)

yazılır. Dikkat edilirse $\omega_{ijmn} = \omega_{nmji}$ olduğunu görürüz. Şimdi hesaplanan T_{ij} değerlerini (3.13) ifadesinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
& + \left[\omega_{3211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \left. + \omega_{3231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big] dx_1 dx_2 dx_3 \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Elde edilen (3.16) ifadesinin 1. varyasyonunu alıp, $\omega_{ijmn} = \omega_{nmji}$ 'nin olduğu da göz önüne alınarak ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\omega_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{1133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \omega_{1123} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{1132} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{1113} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \omega_{1131} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \right. \\
& \quad + \left[\omega_{2211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{2233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{2223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{2232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{2213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \omega_{2231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{2212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \\
& \quad + \left[\omega_{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3323} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3332} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \omega_{3331} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3312} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3321} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \\
& \quad + \left[\omega_{1211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{1233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{1223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{1232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{1213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \omega_{1231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{1212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \\
& \quad + \left[\omega_{2111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{2133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{2123} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{2132} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{2113} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \omega_{2131} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \\
& \quad + \left[\omega_{1311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{1333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{1323} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{1332} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{1313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \omega_{1331} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{1312} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1321} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\omega_{3111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3133} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3123} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3132} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3113} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \left. + \omega_{3131} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \\
& + \left[\omega_{2311} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2322} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{2333} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{2323} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{2332} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{2313} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \left. + \omega_{2331} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{2312} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2321} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \\
& + \left[\omega_{3211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{3222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \omega_{3233} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega_{3223} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_{3232} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \omega_{3213} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
& \quad \left. + \omega_{3231} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_{3212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{3221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \} dx_1 dx_2 dx_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. Açıkça görülür ki (3.17) ifadesi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} & \left[T_{11} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + T_{22} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + T_{33} \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \right. \\
& + T_{12} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + T_{21} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + T_{13} \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \\
& \left. + T_{31} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + T_{23} \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + T_{32} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Varyasyon ifadesinin integral ifadeleri

$$\iiint_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} (\cdot) dx_2 dx_3 dx_1 \tag{3.19}$$

şeklinde olduğundan, elde edilen her bir terim için

$$T_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ij} \delta u_j) - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j \tag{3.20}$$

özdeşliği kullanarak (3.18) ifadesini benzer sınırlar altında δu_i ($i=1,2,3$)' lere göre gruplandırırsak;

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & - \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \right] \delta u_1 + \left[\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \right] \delta u_2 + \right. \\
& + \left. \left[\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right] \delta u_3 \right\} dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& + \int_0^{\ell_3} \int_0^h T_{11} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell_1} dx_2 dx_3 + \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} T_{22} \delta u_2 \Big|_{x_2=h} dx_1 dx_3 + \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_1} T_{33} \delta u_1 \Big|_{x_3=\ell_3} dx_1 dx_2 + \int_0^{\ell_3} \int_0^h T_{12} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_1} dx_2 dx_3 + \\
& + \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} T_{21} \delta u_2 \Big|_{x_2=h} dx_1 dx_3 + \int_0^{\ell_3} \int_0^h T_{13} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell_1} dx_2 dx_3 + \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_1} T_{31} \delta u_3 \Big|_{x_3=\ell_3} dx_1 dx_2 + \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} T_{23} \delta u_3 \Big|_{x_2=h} dx_1 dx_3 + \\
& + \int_0^h \int_0^{\ell_1} T_{32} \delta u_3 \Big|_{x_3=\ell_3} dx_1 dx_2 = 0 \tag{3.21}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi iki katlı integral ifadelerini Problem 1 için ele alırsak (3.4)' de u_i ' lere göre verilen sınır koşullarını δu_i ' ler de sağladığından

$$\delta u_1 \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_2 \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_3 \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_2 \Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0$$

olur ve bunun sonucunda yukarıda δu_i ' lerin bu değerlerini içeren ifadeler 0 olur.

(3.21)' deki $\delta u_1 \Big|_{x_2=0,h}$, $\delta u_1 \Big|_{x_3=0,\ell_3}$, $\delta u_2 \Big|_{x_2=0,h}$, $\delta u_3 \Big|_{x_2=0,h}$ ve $\delta u_3 \Big|_{x_3=0,\ell_3}$ ifadeleri de keyfi olduklarından katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek (3.1) denklemleri ve (3.4)' deki $T_{2i} \Big|_{(x_2=0,h)} = 0$, $T_{33} \Big|_{(x_3=0,\ell_3)} = 0$, $T_{31} \Big|_{(x_3=0,\ell_3)} = 0$ $i = 1,2,3$

sınır koşulları elde edilir.

Benzer şekilde problem 2 için ele alınacak olursa;

$$\delta u_1 \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_2 \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_3 \Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0 \quad , \quad \delta u_1 \Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \quad , \quad \delta u_2 \Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \quad , \quad \delta u_3 \Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0$$

olur ve bunun sonucunda yukarıda bu büyüklükleri içeren ifadeler 0 olur.

(3.21)' deki $\delta u_1|_{x_2=0,h} = 0$, $\delta u_2|_{x_2=0,h} = 0$, $\delta u_3|_{x_2=0,h} = 0$ ifadeleri de keyfi olduklarından katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek (3.1) denklemleri ve (3.5)' deki $T_{2i}|_{(x_2=0,h)} = 0$, $i = 1,2,3$ sınır koşulları elde edilir.

Şimdi (3.21) ifadesindeki kalanları yazarsak Problem 1 ve Problem 2' nin varyasyon formülasyonunun

$$\delta \Pi = - \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \right] \delta u_1 + \left[\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \right] \delta u_2 + \left[\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right] \delta u_3 \right\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (3.22)$$

olduğu görülür. O halde bu ifadeden anlaşılacağı gibi (3.1) denklemleri ve sırasıyla Problem 1 ve Problem 2 için verilen (3.4) ve (3.5) sınır koşullarının (3.13) fonksiyonelinin Euler denklemi olduğunu ispat etmiş oluruz.

3.3 Sonlu Eleman Modellemesi

Öngerilmelerin belirlenmesi için yapılması gereken sonlu eleman modellemesi bir önceki bölümde yapılan sonlu eleman modellemesinin $\omega^2 = 0$ durumu ile çakışmaktadır. Bilindiği gibi bu durumda nodlardaki yerdeğiştirmenin sağladığı denklem

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (3.23)$$

biçiminde olur. Burada \mathbf{K} matrisinin ifadeleri bir önceki bölümdeki ifadelerin aynısıdır. \mathbf{r} ise nodlarda verilmiş kuvvetlerdir. \mathbf{K} 'nin, \mathbf{a} 'nın ve \mathbf{r} 'nin ifadeleri de bir önceki bölümde olduğu gibidir. Bu denklemlerin incelenmesi ve sonlu eleman seçimi ile ilgili açıklamalar Bölüm 2' de verildiğinden burada tekrar verilmesini gerekli görmüyoruz.

Şimdi ÜBLEST' e karşı gelen (3.13) fonksiyonelindeki yerdeğiştirmeleri ve onların varyasyonunu sırası ile $u_i = \sum_{s=1}^8 N_s u_{is}$, $\delta u_i = \sum_{s=1}^8 N_s \delta u_{is}$ biçiminde yazarsak $\delta \Pi = 0$ ' dan aşağıdakileri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = \iiint_{\Omega} & \left[T_{11} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} \delta u_{1s} + T_{22} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} \delta u_{2s} + T_{33} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} \delta u_{3s} + \right. \\
& + T_{12} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} \delta u_{2s} + T_{21} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} \delta u_{1s} + T_{13} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} \delta u_{3s} + \\
& \left. + T_{31} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} \delta u_{1s} + T_{23} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} \delta u_{3s} + T_{32} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} \delta u_{2s} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0
\end{aligned} \quad (3.24)$$

(3.23)' de T_{ij} 'lerin (3.14) ifadeleri yerine yazılıp burada bulunan $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ' ler için $\frac{\partial}{\partial x_j} N_s u_{is}$ '

ler yazılırsa $\delta \Pi = 0$ ' da elde edilen

$$\mathbf{K}_T \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

denklemindeki \mathbf{K}_T matrisinin elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
K_{is}(1,1) = & \omega_{1111} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1113} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \\
& + \omega_{2111} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2113} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2112} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \\
& + \omega_{3111} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3113} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3112} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{is}(1,2) = & \omega_{1122} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1123} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1121} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \\
& + \omega_{2122} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2123} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2121} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \\
& + \omega_{3122} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3123} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3121} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

$$K_{is}(1,3) = \omega_{1133} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1132} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1131} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} +$$

$$\begin{aligned}
K_{ts}(3,1) = & \omega_{1311} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1313} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1312} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \\
& + \omega_{2311} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2313} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2312} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \\
& + \omega_{3311} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3313} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3312} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ts}(3,2) = & \omega_{1322} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1323} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1321} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \\
& + \omega_{2322} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2323} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2321} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \\
& + \omega_{3322} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3323} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3321} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ts}(3,3) = & \omega_{1333} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1332} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \omega_{1331} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + \\
& + \omega_{2333} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2332} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \omega_{2331} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + \\
& + \omega_{3333} \frac{\partial N_t}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3332} \frac{\partial N_t}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} + \omega_{3331} \frac{\partial N_t}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Yapılan program ve kullanılan algoritmaların doğruluğu özel durumda elde edilen sayısal sonuçların önceden belli sonuçlarla karşılaştırılması yoluyla belirlenmiştir.

3.4 Sayısal Sonuçlar

Bir önceki bölümde olduğu gibi plağın birbirini tekrarlayan izotrop ve homojen malzemeden hazırlanmış iki tür levhadan oluştuğu varsayılacaktır. Bu durumda malzeme sabitleri için bir önceki bölümde kabul edilen koşul ve işaretlemelerin burada da geçerli olduğu kabul edilecektir.

Şimdi bazı işaretlemeler ve kabuller yapalım. Problem formülasyonlarında görüldüğü gibi α_1 ve α_3 ' ler plak kenarlarındaki yerdeğiştirmeleri belirttiğinden, stabilite kaybına ait sayısal sonuçların yorumlanmasını bu yerdeğiştirmelerin $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1/\ell_1$ ve $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3/\ell_3$ boyutsuzlaştırılmış kritik değerlerine nazaran yapacağız. İleride $\bar{\alpha}_1$ ve $\bar{\alpha}_3$ üzerindeki çizgiyi ihmal edeceğiz. Bundan başka Problem 1 için özel durumda elde edilen sayısal sonuçları Akbarov ve Selim (2001)' deki sonuçlarla karşılaştırabilmemiz için

$$p_1 = \frac{1}{h \Lambda_1} \int_{\gamma \Lambda_1}^{8 \Lambda_1} \left(\int_0^h \sigma_{11}^0 dx_2 \right) dx_1 \quad (3.27)$$

işaretlemesinden de yararlanacağız. İlk önce Problem 1 için elde edilen sayısal sonuçları ele alalım. Bütün incelemeler $h/\ell_1 = 0.1$ durumu için yapılmıştır.

Çizelge 3.1. $E_2/E_1 = 5$, $p_3 = 0$, $\gamma_1 = 16$ durumunda ε ' un ve ℓ_3/ℓ_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $p_{1cr.}/E_1$ değerleri (Problem 1)

ε	Kritik Parametreler	$\ell_3 = \ell_1$	$\ell_3 = 2\ell_1$	$\ell_3 = 3\ell_1$	$\ell_3 = 4\ell_1$
0.0	$\alpha_{1cr.}$	0.0223	0.01538	0.0143	0.0140
	$p_{1cr.}/E_1$	0.1379	0.0974	0.0918	0.0906 0.0886 [Akbarov ve Selim 2001]
0.00625	$\alpha_{1cr.}$	0.02339	0.01597	0.01492	0.01459
	$p_{1cr.}/E_1$	0.1386	0.0966	0.0914	0.0900 0.0830[Akbarov ve Selim 2001]

Çizelge 3.1' de plak malzemesi yapısında eğrilik sadece Ox_1 eksenini yönünde olduğunda $\gamma_1 = 16$, $p_3 = 0$, $E_2/E_1 = 5$ değerleri için ε ' un ve ℓ_3/ℓ_1 ' in farklı değerlerinde $\alpha_{1cr.}$ ve $p_{1cr.}/E_1$ değerleri verilmektedir. Önceden belirtelim ki mekaniksel öngörülere göre ℓ_3/ℓ_1 büyüdükçe $\alpha_{1cr.}$ veya $p_{1cr.}/E_1$ değerleri küçülerek belirli bir asimptota, dolayısı ile Akbarov

ve Selim (2001) çalışmasında elde edilen sonuçlara yaklaşmalıdırlar. Görüldüğü gibi söylenen öngörüler tez kapsamında kullanılan algoritma ve programlarla elde edilen ve Çizelge 3.1' de verilen sayısal sonuçlarla doğrulanmaktadır. Bu da söz konusu program ve algoritmaların ve bunların uygulanması ile elde edilen sayısal sonuçların doğruluğuna güven sağlamaktadır.

Çizelge 3.2. $\varepsilon = 0.0$, $p_3 = 0.0$, $\ell_1 = \ell_3$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1)

E_2/E_1	1	5	10	20	50
$\alpha_{1cr.}$	0.0244	0.0223	0.0198	0.0163	0.0105

Çizelge 3.2' de $\ell_1 = \ell_3$, $p_3 = 0.0$, ve $\varepsilon = 0.0$ durumunda $\alpha_{1cr.}$ değerlerine E_2/E_1 değişiminin etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilmiştir. Aynı etkiyi $\varepsilon = 0.00625$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda gösteren sayısal sonuçlar ise Çizelge 3.3' de verilmektedir. Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3' deki uygun değerleri karşılaştırdığımızda plak malzemesi yapısındaki eğriliklerin $\alpha_{1cr.}$ değerlerini büyüttüğünü ve bu büyümenin E_2/E_1 büyümesi ile monoton olarak arttığını görmekteyiz. Malzeme yapısında eğriliğin olduğu durumda $\alpha_{1cr.}$ değerlerinin büyümesi ise plak malzemesi rijitliğinin söz konusu eğriliklerden dolayı azalması ile açıklanabilmektedir.

Çizelge 3.3. $\varepsilon = 0.00625$, $p_3 = 0.0$, $\ell_1 = \ell_3$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda E_2/E_1 ' nin çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1)

E_2/E_1	1	5	10	20	50
$\alpha_{1cr.}$	0.0244	0.0225	0.0205	0.0176	0.0131

Çizelge 3.4. $E_2/E_1 = 50$, $p_3 = 0.0$, $l_1 = l_3$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda ε ' un çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1)

ε	0.00	0.00625	0.0125
$\alpha_{1cr.}$	0.0105	0.0114	0.0131

Çizelge 3.4' de $E_2/E_1 = 50$, $p_3 = 0.0$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$ durumunda ε değişiminin $\alpha_{1cr.}$ değerlerine etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu değerlerden görüldüğü gibi ε ' nun büyümesi ile de $\alpha_{1cr.}$ değerleri monoton olarak büyümektedir.

Çizelge 3.5. $E_2/E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.00625$, $p_3 = 0.0$ durumunda γ_1, γ_3 ' ün çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ değerleri (Problem 1)

$\gamma_1 \backslash \gamma_3$		4	8	12	16	20
4		0.0108	0.0119	0.0134	0.0149	0.01638
8		0.0108	0.0116	0.0130	0.0145	0.01593
12		0.0107	0.0113	0.0124	0.0138	0.01526
16		0.0108	0.0111	0.0119	0.0131	0.0145
20		0.0109	0.0112	0.0117	0.0127	0.0139

Çizelge 3.5' de $E_2/E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.00625$, $p_3 = 0.0$ durumunda γ_1, γ_3 ' ün farklı değerlerine karşı gelen $\alpha_{1cr.}$ değerleri verilmektedir. Bu değerlerden görüldüğü gibi Ox_3 eksenindeki yarım periyotların sayısının değişimi $\alpha_{1cr.}$ değerlerine önemli bir etki göstermemektedir. Ox_1 eksenindeki eğriliklerin yarım periyotlarının sayısının değişimi ise $\alpha_{1cr.}$ değerlerine önemli bir biçimde etkilemektedir. Başka bir deyimle γ_1 ' ler büyüdükçe $\alpha_{1cr.}$ değerleri monoton olarak artmaktadır. Bu sonuçlar dış basınç kuvvetinin Ox_1 eksenini

yönünde olması ile açıklanabilmektedir. Görüldüğü gibi ele alınan durumda eğriliğin iki yönde olması α_{1cr} değerlerine önemli bir etki göstermemektedir. Bununla da Problem 1 için elde edilen sayısal sonuçların incelenmesini bitirmiş bulunuyoruz.

Yapılan program ve algoritmalar çerçevesinde ele alına plağın stabilite kaybına ait başka daha çok sayısal sonuçlar da elde edilebilir.

Şimdi Problem 2 için elde edilen sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım.

Çizelge 3.6. $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\ell_1 = \ell_3$ durumunda farklı öngerilme durumlarında E_2/E_1 ve ε ' un çeşitli değerleri için α_{1cr} ve α_{3cr} değerleri (Problem 2)

Öngerilme Durumu	E_2/E_1				
	ε	5	10	20	50
$\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$	0.0	0.01446	0.01268	0.01021	0.006502
	0.0125	0.01492	0.01377	0.01221	0.00982
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$	0.0	0.02760	0.02346	0.01850	0.01053
	0.0125	0.02848	0.02572	0.02180	0.01550
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ Tek yönde eğrilik durumu	0.0125	0.02764	0.02392	0.01867	0.00999

Çizelge 3.6' da $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\ell_1 = \ell_3$ durumunda farklı E_2/E_1 ve farklı ε değerleri için α_{1cr} ve α_{3cr} değerleri verilmektedir. Bu çizelgenin 1. ve 2. satırındaki sonuçlar plağın hem Ox_1 hem de Ox_3 eksenleri yönünde aynı basınca (yani $\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$) maruz kaldığı durumdaki $\alpha_{1cr} = \alpha_{3cr}$ değerleri gösterilmektedir. Daha sonraki iki satırda ise ele alınan plak sadece Ox_1 eksen yönünde basınca maruz kalmaktadır (yani $\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$) ve bu satırlarda α_{1cr} değerleri gösterilmiştir. Plak malzemesi yapısındaki eğrilik sadece Ox_1 eksen yönünde olduğu hale ait olan sonuçlar $\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ durumunda bu çizelgenin son satırında verilmektedir. Çizelge 3.6' daki uygun sonuçların karşılaştırılması bilinen mekaniksel

görüŖlere uymaktadır. Bundan baŖka Çizelge 3.6' daki sayısal sonuçlar plak malzemesi yapısındaki eğriliğın her iki yönde olmasının α_{1cr} değerlerini önemli bir biçimde büyüttüğünü de göstermektedir. Bu büyüme E_2/E_1 oranının yükselmesi ile monoton olarak artmaktadır.

Çizelge 3.7. $E_2/E_1 = 50$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\ell_1 = \ell_3$ durumunda farklı öngerilme durumlarında ε ' un çeŖitli değerleri için α_{1cr} ve α_{3cr} değerleri (Problem 2)

Öngerilme Durumu	ε		
	0	0.00625	0.0125
$\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$	0.006502	0.00762	0.00982
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$	0.01053	0.01208	0.01550
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ Tek yönde eğrilik durumu	0.01053	0.01043	0.00999

Çizelge 3.7' de $E_2/E_1 = 50$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\ell_1 = \ell_3$ durumunda ε değişiminin α_{1cr} değerlerine etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilmektedir. Bu çizelgenin son satırında plak malzemesi yapısında sadece Ox_1 eksenı yönünde eğrilik olduğu duruma ait α_{1cr} değerleri gösterilmiştir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi ε ' un büyümesi ve malzeme yapısındaki eğriliğın iki yönlülüğü α_{1cr} değerlerini arttırmaktadır. Aynı sonuçlar $E_2/E_1 = 20$ için Çizelge 3.8' de verilmektedir.

Çizelge 3.8. $E_2/E_1 = 20$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $l_1 = l_3$ durumunda farklı öngerilme durumlarında ε ' un çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)

Öngerilme Durumu	ε		
	0	0.00625	0.0125
$\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$	0.01021	0.01084	0.01221
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$	0.01850	0.01937	0.02180
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ Tek yönde eğrilik durumu	0.01850	0.01855	0.01867

Çizelge 3.9. $E_2/E_1 = 50$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\varepsilon = 0.00625$ durumunda farklı öngerilme durumlarında l_3/l_1 ' in çeşitli değerleri için $\alpha_{1cr.}$ ve $\alpha_{3cr.}$ değerleri (Problem 2)

Öngerilme Durumu	$l_3 = l_1$	$l_3 = 1.2l_1$	$l_3 = 1.5l_1$	$l_3 = 2l_1$	$l_3 = 4l_1$
$\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$	0.00982	0.00961	0.00950	0.00951	0.00964
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$	0.01550	0.01405	0.01236	0.01095	0.00992
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ Tek yönde eğrilik durumu	0.00999	0.00994	0.00886	0.00792	0.00719

Çizelge 3.9' da l_3/l_1 ' in farklı değerlerinde $E_2/E_1 = 50$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\varepsilon = 0.00625$ durumunda $\alpha_{1cr.}$ değerleri verilmiştir. Bu çizelgedeki değerlerden görüldüğü gibi l_3/l_1 büyüdükçe $\alpha_{1cr.}$ değerleri genellikle monoton olarak azalmaktadır. Bu ise bilinen fiziksel ve mekaniksel öngörülere uymaktadır. Aynı sonuçlar $E_2/E_1 = 20$ durumunda Çizelge 3.10' da verilmektedir.

Çizelge 3.10. $E_2/E_1 = 20$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 16$, $\varepsilon = 0.00625$ durumunda farklı öngerilme durumlarında ℓ_3/ℓ_1 ' in çeşitli değerleri için α_{1cr} ve α_{3cr} değerleri (Problem 2)

Öngerilme Durumu	$\ell_3 = \ell_1$	$\ell_3 = 1.2\ell_1$	$\ell_3 = 1.5\ell_1$	$\ell_3 = 2\ell_1$	$\ell_3 = 4\ell_1$
$\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0$	0.01221	0.01185	0.01164	0.01162	0.01174
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$	0.02180	0.01825	0.01531	0.01337	0.01206
$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ Tek yönde eğrilik durumu	0.01867	0.01568	0.01400	0.01169	0.01059

Bununla da Problem 2 için sayısal sonuçların incelenmesini bitirmiş bulunuyoruz. Belirtelim ki oluşturulan program ve algoritmalar çerçevesinde Problem 2 için de daha başka birçok sayısal sonuçlar elde edilebilir.

4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlar kısaca özetlenecek olursa aşağıdakiler söylenebilir.

- 1- Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde elastisite teorisinin ve ÜBLEST' nin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak birbirine dik iki yönde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin sonlu üç boyutlu prizmatik alanlar için olan sınır değer problemlerinin formülasyonu verilmiştir.
- 2- Bu problemlerin mekaniksel açıklamaları yapılmış, onların kısmi türevli değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler takımının bazı sınır değer ve özdeğer problemlerine karşılık geldiği gösterilmiştir.
- 3- Formülasyonu yapılmış olan lineer sınır değer ve özdeğer problemlerinin üç boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi ile modellenmesi yapılmıştır.
- 4- Sayısal sonuçların elde edilmesi için gerekli algoritmalar geliştirilmiş ve FTN77 dilinde bu algoritmalar program haline getirilmiştir.
- 5- Belirlenen problem parametrelerine göre yapısında birbirine dik iki yönde periyodik eğriliği olan kompozit malzemelerden hazırlanmış kalın plakların serbest ve zorlanmış titreşim ve hem de stabilite kaybı problemleri incelenmiş ve pek çok sayısal sonuç elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçların değerlendirilmesi için aşağıdakiler söylenebilir;

Tezde değişken katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklem takımının üç boyutlu sınır değer ve özdeğer problemlerinin sayısal olarak çözümünün bulunması ve bu amaca yönelik olarak bu problem için ilk defa üç boyutlu Sonlu Eleman Modellemesi yönteminin geliştirilmesi ve uygulanması teorik yani matematiksel açıdan çok büyük önem taşımaktadır.

Yapılan çalışmalardan görülmüştür ki malzeme yapısında ele alınan iki yönlü eğrilikler serbest ve zorlanmış titreşimlere önemli bir şekilde etki eder ve zaman zaman malzemenin kırılmasına sebep olabilir. Dolayısı ile dış kuvvetlerin bu elemanlarda oluşturduğu gerilme ve şekil değiştirme durumu ve malzeme yapısındaki iki yönlü eğriliklerin bu duruma yapmış olduğu etkinin bilinmesinin çok önemli olduğu kanısına varılmıştır.

KAYNAKLAR

Akbarov S.D. ve Guliev G.M., (1991), "Quasihomogeneous States in the Structure", Dep. in VINITI, n:511, B91, 90s. (in Russian)

Akbarov S.D. ve Guz A.N., (1991a), "Continuum Theory in the Mechanics of Composite Materials with Smallscale Structural Distortion", Soviet Appl. Mech., Ağustos, s:107-117

Akbarov S.D. ve Guz A.N., (1991b), "Mechanics of Composite Materials with Distorted Structure(Review).Continuum Theory", Fiber Composites, Soviet Appl. Mech., Ekim, s:429-443

Akbarov S.D., Guz A.N., Zamanov A.D., (1993), "Natural Vibrations of Composite Materials Having Structures with Smallscale Curvatures", Int. Appl. Mech., 28, n:12, s:794-800

Akbarov S.D. ve Yahnioğlu N., (1997), "Stress Distribution in a Strip Fabricated from a Composite Material with Smallscale Curved Structure", Int. Appl.Mech., 32, n:9, s:684-690

Akbarov S.D. ve Yahnioğlu N., (1998), "On the Finite Element Analysis of the Influence of the Local Structural Damage of the Multilayered Thick Plate Material to the Stress Distribution", Damage and Fracture Mechanics, Eds:C.A. Birebbia and A.Carpinteri, Computational Mech. Pub., Sauthampton, UK., Boston, USA, s:187-196

Akbarov S.D. ve Yahnioğlu N., (1999a), "Mechanics of Composite Materials with Curved Structures and Elements of Constructions(Review)", Int. Appl. Mech., 34, n:11, s:1067-1079

Akbarov S.D. ve Yahnioğlu N., (1999b), "The Influence of the Local Structural Dange of the Multilayered Thick Plate Material to the Stress Distribution", Int. Appl. Mech., 34, n:9, s:873-878

Akbarov S.D. ve Guz A.N., (2000), Mechanics of Curved Composites, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London, 464s.

Akbarov S.D. ve Selim S., (2001), "Stability of a Strip Made of a Mutlilayered Composite with a Curved Structure", Int. Appl. Mech., 37, n:6, s:831-839

Akbarov S.D. ve Genç Demiriz I., (2001), "Natural Vibration of the Thick Plate Fabricated From the Spatially Curved Composite", ICCE/8, Ed. by D. HUI, 5-11 Ağustos, s:11-12

Akbarov S.D. ve Guz A.N., (2002), "Continuum Approaches in The Mechanics of Curved Composites and Related Problems for Members of Construction", Int. Appl. Mech., 38, n:11, s:3-31

Bazhant Z.P., (1968), "The Influence of the Curvature of Reinforced Fibres on the Elasticity Modulus and Strength of Composite Materials", *Mechanica Polimerov*, n:2, s:314-321(in Russian)

Bolotin V.V., (1966a), "The Theory of Reinforced Layered Material with Random Distortions", *Mechanica Polimerov*, n:1, s:11-19(in Russian)

Bolotin V.V., (1966b), "Layered Elastic and Viscoelastic Materials with Initial Random Distortions", *Eng. J. Mech. Tverd Tela.*, n:3, s:59-65(in Russian)

Bolotin V.V., Novichkov Yu.N., (1980), "Mechanics of Multilayered Structures", *M. Mashinostroyeniye*, 375s. (in Russian)

Chou T.W. ve Me Cullough R.L., (1968), "Pipes R.B. Composites", J. Scientific American, n:10, s:193-203

Christensen R.M., (1979), Mechanics of Composite Materials, Willey, NewYork, 348s.

Corten H.T., (1967), "Fracture Reinforcing Plastics", In:Modem Composite Materials, Eds. by L.J. Broutman and R.H. Krock, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, s:27-100

Composite Materials Handbook, (1992), Mel. M. Schwards, Ed. In Chief, 2nd Ed., Mc Graw-Hill, NewYork

Feng Z.N., Alien H.G. ve May S.S., (1998), "Micromechanical Analysis of a Woven Composite", In:Proc.ECCM-8, Vol.4, s:619-625

Ganesh V.K. ve Naik N.K., (1996), "Failure Behaviour of Plane Weave Fabric Laminates Under on-axis Unaxial Tensile Loading:III-Effect of Fabric Geometry", J.Composite Materials, 30, s:1823-1856

Genç Demiriz I. ve S.D. Akbarov, (2002), "Stress Analysis For a Thick Rectangular Plate From a Composite Material with a Periodic Spatially Curved Structure Under Forced Vibrations", Abstracts of 12th Int. Conf. Mech. Comp. Mater., Riga, s:51

Guz A.N., (1983a), "On the Continual Theory of Composite Materials with Smallscale Curvings in the Structure", Dokl. Akad. Nauk USSR, 268, n:2, s:307-313(in Russian)

Guz A.N., (1983b), "Mechanics of Composite Materials with Smallscale Structural Flexure", Soviet Appl. Mech., Ekim, s:383-393

Guz A.N., (1983c), "Quasi-Uniform States in Composites with a Smallscale Curvatures in the Structure", Soviet Appl. Mech., November, s:479-490

Guz A.N., (1983d), "On the Vibration Theory of The Composite Materials with Smallscale Curved Structures", Dokl. Akad. Nauk USSR, 270, n:5, s:1078-1081(in Russian)

Guz A.N., (1999), "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Berlin, Springer-Verlag, 555s.

Guz A.N., (2001), "Constructing the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Int. Appl. Mech., 37, n:1, s:1-37

Guz A.N., Shulga N.A. ve Tomashevsky V.T., (1997), "et al Tecnolohical Stresses and Strains in Materials", Eds.by N.A. Shulga ve V.T. Tomashevsky, Vol.6 of Series "Mechanics of Composite Materials", Ed. By A.N. Guz, K:PTOO A.S.K., 396s.(in Russian)

Guz A.N., Tomashevsky V.T., Shulga N.A. ve Yakovlev V.S., (1988), "Tecnological Stresses and Strains in Composite Materials", K:Vitsaya Skola, 270s.(in Russian)

Kahramaner Y., Taylan İ., Genç Demiriz I. ve Selim S., (2001), "Investigation of The Stress Distribution in a Thick Plate Fabricated from the Curved Composite", In Proc:ICCE/8, Ed. by D. HUI, 5-11 Ağustos, s:413-414

Kalmkarov A.L., Kudryavcev B.A. ve Parton V.Z., (1987), "The Problem on the Curved Layer From the Composite Materials with periodical Waviness Surfaces in The Structure", Prikl. Mathem. and Mech., 51, n:1, s:68-75(in Russian)

Kosek M., Dolezalova E., (2001), "Visualization of Spatial Structure of 2D Woven Real and Virtual Composites", In Proc: ICCE/8, Ed. by D. HUI, 5-11 August, s:487-488

- Kromm A., (1953), "Verallgemeinerte Theori Der Plattenstatik", Ing. Arch., 21, s:266-286
- Kromm A., (1955), "Über Die Randquerkräfte Biegestützter Platten", ZAMM., 35, s:231-242
- Küttüğ Z., (1996), "Natural Vibration of the Beam-Strip Fabricated From a Composite Material with Smallscale Curvings in the Structure", Mech. Comp. Mater., 36, n:4, s:502-512
- Küttüğ Z., (1997), "Natural Vibration and Bucling of the Composite Beam-Plates Fabricated From Composite Material with Locally and Periodically Curved Structure", Ph.D. Thesis, Yıldız Teknik Üniversitesi, Türkiye, İstanbul, 145s.
- Lekhnitskü S.G., (1977), "Theory of Elasticity of an Anisotropic Body", M.:Nauka, 416s.(in Russian)
- Makarov B.P. ve Nikolayev V.P., (1971), "The Influence of the Curving of the Reinforcing Elements to the Mechanical and Heat-Physical Properties of Composite Materials", Mechanica Polimerov, n:6, s:1036-1039(in Russian)
- Mansfied E.H. ve Purslow D., (1974), "The Influence of Fibre Waviness on the Moduli of Unidirectional Fibre Reinforced Composites", Aeronautical Research Council Current Paper, n:I339, 30s.
- Nosarev A.V., (1967), "The Influence of The Fibers Curving to the Elastic Properties of the Unidirected Reinforced Plastics", Mechanica Polimerov, n:5, s:858-863(in Russian)
- Reissner E., (1945), "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", J. of Applied Mechanics, n:12, s:67-77
- Swift D.G., (1975), "Elastic Moduli of Fibrous Composites Containing Misaligned Fibres", J. Phys., D:Appl. Phys., 8, s:223-240
- Tarnopolosky Yu. M. ve Rose A.V., (1996), Special Feature of Design of Parts Fabricated From Reinforced Plastics, Zinatne, Riga, 275s.(in Russian)
- Tarnopolosky Yu. M., Jigun I.G. ve Polyakov V.A., (1987), Spatially-Reinforced Composite Materials: Handbook, M:Mashinostroyenia, 224s.(in Russian)
- Tekin Tarım E. ve Akbarov S.D., (2002), "Three-Dimensional Stress Analysis For a Thick Plate Fabricated From a Composite Material with a Spatial Locally Curved Structure", Abstracts of 12th Int. Conf. Mech. Comp. Mater., Riga, s:204
- Vandeurzen Ph., Ivens J. ve Verpoest I., (1996), "A Three-Dimensional Micromechanical Analysis of Woven Fabric Composites": I. Geometric Analysis, Comp. Sci. Technol., 56, s:1303-1315
- Whitney J.M., (1966), "Geometrical Effects of Filament Twist on the Modulus and Strength of Graphite Fiber", Reinforced Composites, Textile Res. J., 36, s:765-770
- Whitney T.J. ve Chou T.W., (1989), "Modelling of 3-D Angle-Interlock Textile Structural Composites", J. Composite Materials, 23, s:890-911
- Yahnioğlu N., (1996), "FEM Analysis of the Boundary-Value Problems Corresponding to the Statics of Elements of Constuctions Fabricated From Composite Materials with Curved Structure", Ph.D. Thesis, Yıldız Teknik Üniversitesi, Türkiye, İstanbul, 156s.
- Yahnioğlu N., (1997), "Three-Dimensional Analysis of the Stress Fields in the Plate Fabricated From Composite Materials with Smallscale Structural Curving", Mech. Comp.

Mater., 33, n:3, s:340-348

Yahnioglu N. ve Selim S., (2000), "Bending of a Composite Material Strip with Curved Structure in the Geometrically Nonlinear Statement", *Mech. Comp. Mater.*, 36, n:6, s:459-464

Yang J.M., Ma C.L. ve Chou T.W., (1986), "Fiber Inclination Model of Three-Dimensional Textile Structural Composites", *J. Composite Materials*, 20, s:472-484

Zamanov A.D., (1999), "On the Stress Distribution in the Thick Plate Fabricated From the Composite Material with Curved Structures under Forced Vibration", *Mech. Comp. Mater.*, 35, n:4, s:447-454

Zamanov A.D., (2000a), "Natural vibration of a Rectangular Plate of Composite Material with Periodically Bent Structures", *Int. Appl. Mech.*, 36, n:10, s:1035-1039

Zamanov, A.D., (2000b), "Natural Oscillation of the Rigidly Fixed Rectangular Plate Fabricated From the Composite Materials with the Local Curved Structures", *Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Ser. of Phys-Techn. and Math. Sciences*, n:20, s: 171-175.

Zamanov A.D., (2001), "Stress Distribution in a Rigidly Clamped Composite Plate with Locally Curved Structures Under Forced Vibration", *Int. Appl. Mech.*, 2001, 37, n:9, s:1189-1195

Zamanov A.D., (2002), "The Effect of Structural Curvings on the Stress Distribution in a Rigidly Fixed Composite Plate Under Forced Vibration", *Mech. Comp. Mater.*, 38, n:1, s:41-46

Zienkiewicz O.C. ve Taylor R.L., (1989), "The Finite Element Method 4th Ed., Vol.1, Basic Formulation and Linear Problems", *Mc-Grow Hill Book Comp.*

Zienkiewicz O.C. ve Taylor R.L., *The Finite Element Method 4th Ed., Vol.2, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity*, *Mc-Grow Hill Book Comp.*

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	22.09.1966	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1980-1983	İstanbul Erenköy Kız Lisesi
Lisans	1984-1988	Yıldız Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1988-1990	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	1997-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

1988-Devam Ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik ABD
Araştırma Görevlisi