

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BULANIK EUCLID İDEALİ**

**Bayram Ali ERSOY**

**F.B.E Matematik Anabilim Dalında  
Hazırlanan**

**DOKTORA TEZİ**

**Tez Savunma Tarihi** : 04.10.2002  
**Tez Danışmanı** : Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN (Y.T. Ü.)  
**Jüri Üyeleri** : Prof. Dr. Mehmet CAN (İ.T.Ü.)  
: Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP (D. Ü.)  
: Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (Y. T. Ü.)  
: Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (Y.T. Ü.)

**İSTANBUL, 2002**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
1. GİRİŞ.....	1
2. BULANIK ALT GRUPLAR VE HALKALAR.....	3
2.1 Bulanık Alt Küme.....	3
2.2 Bulanık Alt Grup.....	3
2.3 Bulanık İdeal.....	4
2.4 Bulanık Asal İdeal.....	7
2.5 Bulanık Maksimal İdeal.....	9
2.6 Bulanık Koset.....	11
2.7 Bulanık Esas İdeal.....	12
2.8 Bulanık Bağıntı.....	13
3. BULANIK EUCLID İDEALİ.....	20
3.1 Tanımlar ve Örnekler.....	20
3.2 Kesişim ve Birleşim.....	22
3.3 Kartezyen Çarpım.....	28
3.4 Bulanık Bölüm İdeali, Bulanık Lokal Alt Halkalar ve Bulanık Temel İdealler.....	35
3.5 Bulanık Maksimal İdeal ve Bulanık Asal İdeal.....	38
3.6 Görüntü ve Ters Görüntü.....	40
4. TARTIŞMA.....	44
5. SONUÇLAR.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

## ÖNSÖZ

**Doktora tezimi yöneten ve çalışmalarımnda maddi ve manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen; her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; hocam Sayın Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN' e, yardımlarını esirgemeyen oda arkadaşım Sayın Arş. Gör. Murat ALAN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.**

**Aynı zamanda her zaman benden manevi desteğini eksik etmeyen babama, anneme, kardeşlerime, eşime ve oğluma teşekkürlerimi sunarım.**

Bayram Ali ERSOY  
İstanbul, 2002

## ÖZET

Bu çalışma bulanık alt gruplar ve halkalar ile bulanık Euclid ideali adlı iki bölümden oluşmuştur.

Literatürde mevcut temel bilgileri aktarmayı amaçlayan birinci bölüm sekiz kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bulanık küme kavramı verilmiştir. İkinci kısımda bulanık alt gruplar ve bunların seviye alt grupları ile olan ilişkisi incelenmiştir. Daha sonra bulanık ideal tanımı ve seviye ideali tanımı verilerek aralarındaki ilişki anlatılmıştır. Dördüncü ve beşinci kısımda bulanık asal idealler ve bulanık maksimal ideal tanımları verilip bunlarla ilgili temel teoremlere yer verilerek bulanık asal ve maksimal ideal arasındaki ilişki incelenmiştir. Altıncı kısımda bulanık koset kavramına değinilmiştir. Yedinci kısımda bulanık esas ideal verilerek bununla ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Birinci bölümün son kısmında bulanık bağıntı kavramı ve bunlarla ilgili temel teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bulanık bağıntı ile ilgili birkaç örnek de incelenmiştir.

Bizim çalışmamızın özgün bölümünü oluşturan ikinci bölüm altı kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bulanık idealler için yeni bir şart getirilerek bulanık Euclid ideali tanımı ve onunla ilgili örnekler verilmiştir. İkinci kısımda bulanık Euclid ideallerin kesişimleri ve birleşimleri incelenmiştir. Daha sonra bulanık Euclid ideallerin Kartezyen çarpımlarının bulanık Euclid ideali olduğu ve bununla ilgili benzer teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü ve beşinci kısımlarda halkalardaki bulanık asal, bulanık maksimal ideal, bulanık bölüm ideali, bulanık lokal alt halkalar ve bulanık temel idealler gibi bazı cebirsel yapılarla bulanık Euclid idealler arasındaki ilişkiler incelenerek bazı teoremler verilmiştir. Son olarak da bulanık Euclid idealin bir halka homomorfizması olan  $f$  altındaki görüntüsü ve ters görüntüsü incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık İdeal, Euclid Halkası, Bulanık Bağıntı, Kartezyen Çarpım, Bulanık Euclid İdeali.

## ABSTRACT

### **This work is composed of two chapters; fuzzy subgroups, fuzzy ideals and fuzzy Euclidean ideal.**

First chapter, which purposes the present basic informations in Literature has eight sections. In the first section the concept of fuzzy subset is given. The relationships between the fuzzy subgroups and level subgroups are analized in the second section. Then the fuzzy ideals and level ideals are studied. After that fuzzy maximal ideal, fuzzy prime ideal and basic theorems about them are given in the fourth and fifth sections. In the sixth section the concept of fuzzy coset are studied. In the seventh section fuzzy principal ideal is examined. At the end of this chapter the definition of fuzzy relation and fuzzy cartesian product are given. Then the basic theorems and results about them are studied. Finally some important examples are given.

**Second chapter, which is the original part of our work, consists of six sections. Firstly, by imposing a new condition on the fuzzy ideal, we define fuzzy Euclidean ideal and give some examples. After that intersection and union of fuzzy Euclidean ideals are discussed. In the third section the cartesian products of fuzzy Euclidean ideals are analized. The relationships between fuzzy prime, fuzzy maksimal, fuzzy quotient ideal, fuzzy principal ideal, fuzzy localized subrings and fuzzy Euclidean ideals are examined. At the end of this chapter the image and pre-image (inverse image) of a fuzzy Euclidean ideal under a ring homomorphism  $f$  are studied.**

**Keywords:** Fuzzy Ideal, Euclidean Ring, Fuzzy Relation, Cartesian Product, Fuzzy Euclidean Ideal.

## 1. GİRİŞ

Bulanık küme kavramı ilk olarak Zadeh (1965) tarafından Information Sciences 8' de yayınlanan "Fuzzy sets" adlı makaleyle ortaya atıldı. Bu makalede bazı matematiksel kavramların genelleştirilmesi yani kümelerdeki  $\subseteq, \cup, \cap$  işlemlerinin  $\leq, \wedge, \vee$  gibi sembollerle genelleştirilmesi yapılmıştır. 1968 yılında Zadeh'in öğrencisi Chang tarafından yazılan "Fuzzy topological spaces" makalesinden esinlenen Rosenfeld (1971), bu yapılan işlemlerin cebirsel yapılara uygulanabileceğini düşünmüştür. Bu düşüncenin sonucunda 1971 yılında "Fuzzy Groups" adıyla bir makale yapıldı ki bu da bulanık cebirin temelini oluşturmaktadır. Bu yıldan sonra pek çok matematikçi gruplar ve halkalar üzerindeki bulanık cebirsel yapılarla uğraştılar. Bunlardan Liu (1982) bulanık halkalar ve bulanık idealler üzerine önemli sonuçlar çıkardı. Liu'yu sonradan takip eden Mukherjee ve Sen (1987), Swamy ve Swamy (1988), Yue (1988) gibi matematikçiler gruplar, halkalar ve idealler üzerindeki belirli cebirsel yapılar ( Bulanık normal alt gruplar, bulanık kosetler, bulanık idealler, bulanık asal idealler gibi cebirsel yapılar) üzerine önemli sonuçlar ortaya attılar.

Tezimizde çalıştığımız bulanık bağıntı kavramı ilk olarak gene Zadeh (1971) tarafından "Similarity relations and fuzzy ordering" adlı makaleyle ortaya atıldı. Bundan sonra bu kavramı Bhattacharya ve Mukherjee (1985) gruplar üzerine taşıdı. Halkalar üzerine bulanık bağıntı kavramı ise Malik ve Mordeson (1991) tarafından incelendi. "Fuzzy relations on rings and groups" adlı makalede bulanık grupların ve bulanık ideallerin kartezyen çarpımlarını incelediler. Bugüne kadar cebirde bildiğimiz cisim, esas ideal bölgesi, tamlık bölgesi gibi kavramlar Malik, Mordeson (1998) ve Alkamees (1997, 1998), vb. gibi matematikçiler tarafından bulanık cebirde incelenmiş ve bunların tanımları yapıp cebir yapısına uygun teoremler verilmiştir. Bulanık cebirde yaptığımız araştırma sonucunda bulanık idealler için Euclid olma kavramının incelenmediğini tespit ettik ve bu konu üzerinde çalışmaya başladık. Bulanık Euclid ideali tanımı yaparak bulanık Euclid ideallerin kesişimlerinin de bulanık Euclid ideali olduğunu gösterdik. Birleşimlerinin bulanık Euclid ideali olamayabileceğini fakat özel durumlarda birleşimlerinin de bulanık Euclid ideali olduğunu gösterdik. Bulanık Euclid ideallerin kartezyen çarpımlarının da bulanık Euclid ideal olduğunu inceledik. Eğer kartezyen çarpım bulanık Euclid ideali ise çarpanlardan birinin mutlaka bulanık Euclid ideali olduğunu fakat aynı anda her ikisinin de Euclid ideali olması gerekmediğini örnekle açıkladık. Her iki değerli bulanık idealin bulanık Euclid ideali olduğunu göstererek bulanık asal ve bulanık maksimal ideallerin de bulanık Euclid ideal olduklarını gösterdik. Fakat her bulanık

Euclid idealin bulanık maksimal ve bulanık asal ideali olamayabileceğini örneklerle açıkladık. Bulanık cebirdeki diyagramın (sayfa 10) bulanık Euclid ideali için de geçerli olduğunu gösterdik. Son olarak da, bulanık Euclid idealin bir halka homomorfizması olan  $f$  altındaki görüntüsünün ve ters görüntüsünün de bulanık Euclid ideali olduğu gösterildi.

## 2. BULANIK ALT GRUPLAR VE HALKALAR

### 2.1 Bulanık alt küme

#### Tanım 2.1.1:

$X$  evrensel bir küme olsun. Bir  $A \subset X$  kümesini ele alalım.  $m: X \rightarrow [0,1]$  şeklinde bir dönüşüm olmak üzere

$$m_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüme  $A$  nın karakteristik fonksiyonu denir. Bu durumda  $m_A(x)$ ,  $x$  in  $A$  daki üyelik derecesini verir.

Herhangi bir  $A$  kümesinden  $[0,1]$  aralığına tanımlanan her bir dönüşüme  $A$  nın bir bulanık alt kümesi denir. (Zadeh, 1965)

Bu tanımlardan kolayca şu temel bilgi ortaya çıkmaktadır: Bulanık küme kavramı esas olarak klasik küme kavramının genelleştirilmiş şeklidir.  $X$  deki bir  $m_A$  bulanık kümesi

$$\{ (x, m_A(x)): x \in X \}$$

sıralı ikililerin bir kümesidir.

### 2.2 Bulanık Alt Grup

**Tanım 2.2.1:**  $G$  herhangi bir grup ve  $m: G \rightarrow [0,1]$  bir bulanık alt küme olsun.  $\forall x, y \in G$  için

$$1) m(xy) \geq \min(m(x), m(y))$$

$$2) m(x^{-1}) \geq m(x)$$

ise  $m$  ye  $G$  nin bir bulanık alt grubu denir. (Rosenfeld, 1971)

**Tanım 2.2.2:**  $m, S$  kümesinin bir bulanık alt kümesi ise herhangi  $t \in [0,1]$  için

$$m_t = \{ x \in S: m(x) \geq t \}$$

kümesi  $S$  'nin  $m$  ye göre bir seviye alt kümesidir. (Zadeh, 1971)

**Tanım 2.2.3:**  $m, G$  grubunun bir bulanık alt kümesi ise herhangi  $t \in [0,1]$  için

$$m_t = \{ x \in G: m(x) \geq t \}$$

kümesi  $G$  nin  $m$  ye göre bir seviye alt grubudur. (Das, 1981)

Eğer  $m$ , birimi  $e$  ile gösterilen  $G$  nin bir bulanık alt grubu ise  $m(x) \leq m(e)$  olduğu kolayca görülür. Şöyle ki,

$$m(xy) \geq \min(m(x), m(y)) \text{ ifadesinde}$$

$y = x^{-1}$  alınır,

$$m(xx^{-1}) \geq \min(m(x), m(x^{-1}))$$

$$m(e) \geq \min(m(x), m(x))$$

$$m(e) \geq m(x)$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.3:**  $m$ ,  $G$  nin bir bulanık alt kümesi olsun.

1) Eğer  $m$ ,  $G$  nin bir bulanık alt grubu ise o zaman  $\forall x \in G$  için

$$m(e) \geq m(x)$$

ve bütün  $t \in [0, m(e)]$  için  $m_t$ ,  $G$  nin bir alt grubudur.

ii) Eğer bütün  $t \in \text{Im}(m)$  için  $m_t$ ,  $G$  nin bir alt grubu ise o zaman  $m$ ,  $G$  nin bir bulanık alt grubudur. (Das, 1981)

### 2.3 Bulanık İdeal

**Tanım 2.3.1:**  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer  $\forall x, y \in R$  için

$$1) m(x - y) \geq \min(m(x), m(y))$$

$$2) m(xy) \geq \min(m(x), m(y))$$

şartları sağlanıyorsa  $m$  ye  $R$  nin bir bulanık sol(sağ) ideali denir. (Liu, 1982)

$m$  nün  $R$  nin bir bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul  $m$  nün  $R$  nin hem sol hem de sağ bulanık ideali olmasıdır.

**Teorem 2.3.2:**  $m$  nün  $R$  nin bir bulanık ideali olması için;

$$1) m(x - y) \geq \min(m(x), m(y))$$

$$2) m(xy) \geq \max(m(x), m(y))$$

şartlarını sağlaması yeterlidir. (Liu, 1982)

### İspat

Bu, yukarıdaki tanımın bir sonucudur.

**Tanım 2.3.3:**  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık ideali olsun.  $t \in [0,1]$  ve  $m(0) \geq t$  için  $m_t$  ideali  $m$  nün seviye ideali olarak adlandırılır. (Liu, 1982)

**Teorem 2.3.4:**  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık alt kümesi olsun.

1) Eğer  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık sol (sağ) ideali ise o zaman  $\forall x \in R$  için

$$m(0) \geq m(x)$$

ve bütün  $t \in [0, m(0)]$  için  $m_t$ ,  $R$  nin bir sol (sağ) idealidir.

2) Eğer bütün  $t \in \text{Im}(m)$  için  $m_t$ ,  $R$  nin bir sol (sağ) ideali ise o zaman  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık sol (sağ) idealidir. (Liu, 1982)

### İspat

1)  $m$ ,  $R$  nin bir sol (sağ) ideali olduğu için

$$m(x - x) \geq \min(m(x), m(x))$$

$$m(0) \geq \min(m(x))$$

dir.

$m_t$ ,  $R$  nin bir sol (sağ) ideal olması için ispatlamamız gereken  $\forall x, y \in m_t$  ve  $\forall r \in R$  için  $x - y \in m_t$  ve  $rx \in m_t$  olmasıdır.

Eğer  $x, y \in m_t$  ise

$m(x) \geq t$  ve  $m(y) \geq t$  dir.  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık sol(sağ) ideali olduğu için

$$m(x - y) \geq \min(m(x), m(y))$$

olur.

$m(x) \geq m(y)$  olsun. O zaman

$$m(x - y) \geq \min(m(x), m(y)) = m(y)$$

$$m(y) \geq t \text{ olduğundan}$$

$$m(x - y) \geq t \text{ olur ve buradan } x - y \in m_t \text{ olur.}$$

Diğer taraftan

$m$ ,  $R$  nin bir bulanık sol(sağ) ideali olduğu için  $m(rx) \geq \max(m(r), m(x))$  dir ve  $m(x) \geq t$  olduğundan  $m(rx) \geq m(x) \geq t$  olur. Buradan  $rx \in m_t$  elde edilir ki bu da  $m_t$  nin  $R$  nin bir ideali olduğunu gösterir.

2) Eğer  $m_t$  bir sol (sağ) ideal ise  $\forall x, y \in m_t$  için  $x - y \in m_t$  dir.

Bizim göstermemiz gereken  $\forall x, y \in R$  için

$$m(x - y) \geq \min(m(x), m(y))$$

$$m(xy) \geq m(y)$$

olduğudur.

$t_1 < t_2$  olmak üzere  $m(x) = t_1$  ve  $m(y) = t_2$  olsun. O zaman  $x \in m_{t_1}$  ve  $y \in m_{t_2}$  dir.  $m(y) \geq m(x)$

olduğundan  $m_{t_2} \subseteq m_{t_1}$  dir. Buradan  $y \in m_{t_1}$  olur. Şu halde  $x, y \in m_{t_1}$  ve  $m_{t_1}$ ,  $R$  nin bir ideali

olduğundan dolayı  $x - y \in m_{t_1}$  dir. Buradan

$$m(x - y) \geq \min(m(x), m(y)) = m(x) = t_1$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $x \in m_{t_1}$  ve  $y \in m_{t_2}$  olsun.  $m_{t_2}$  ve  $m_{t_1}$ ,  $R$  nin bir ideali olduğundan

$xy \in m_{t_1} \cap m_{t_2}$  olur. Buradan

$$m(xy) \geq \max(m(x), m(y)) = m(y) = t_2$$

olup ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.3.5:**  $m$ ,  $R$  nin bulanık ideali olsun.  $m$  nün  $m_t$  ve  $m_s$  gibi iki seviye idealinin eşit olması için gerek ve yeter koşul  $s \leq m(x) < t$  şartını sağlayan bir  $x \in R$  bulunamamasıdır. (Liu, 1982)

**İspat:**

$m_t = m_s$  olsun.

$s \leq m(x) < t$  şartını sağlayan  $x \in R$  bulunsun. O zaman  $m_t \not\subseteq m_s$  olur. Çünkü  $x$ ,  $m_s$  nin elemanıdır fakat  $m_t$  nin elemanı değildir. Bu da baştaki kabulümüzle çelişir.

Tersine,

$s \leq m(x) < t$  şartını sağlayan  $x \in R$  bulunmasın.  $s \leq t$  olduğu için  $m_t \subseteq m_s$  dır.  $x \in m_s$  olsun. O zaman  $m(x) \geq s$  olur ve  $m(x)$   $s$  ile  $t$  arasında bir değer almadığından  $m(x) \geq t$  olur. Bunun sonucu olarak  $x \in m_t$  olur. Böylece  $m_s \subseteq m_t$  dır. Sonuç olarak

$$m_t = m_s$$

olur. Bununla ispat tamamlanmış olur.

## 2.4 Bulanık Asal İdeal

**Tanım 2.4.1:**  $m$   $R$  nin bir bulanık ideali olsun.  $R$  nin  $s$  ve  $q$  bulanık idealleri için

$$sq \subseteq m \Rightarrow s \subseteq m \text{ veya } q \subseteq m$$

ise  $m$  ye  $R$  nin bir bulanık asal ideali denir. (Mukherjee ve Sen, 1987)

**Tanım 2.4.2:**  $m$ ,  $R$  nin bulanık ideali olsun.

$\forall a, b \in R$  için  $m(ab) = m(a)$  veya  $m(ab) = m(b)$  oluyorsa  $m$  ye bir bulanık asal ideal denir. (Kumar, 1992)

**Tanım 2.4.3:**  $m$ ,  $R$  nin bulanık ideali olsun  $\forall x \in R, \forall n \in \mathbb{Z}^+$  için

$$m(x^n) = m(x)$$

oluyorsa  $m$  ye bulanık yarı asal denir. (Kumar, 1992)

**Tanım 2.4.4:**  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık ideali olsun. Eğer  $\forall a, b \in R$  için  $m(ab) = m(a)$  veya bir  $m \in \mathbb{N}_+$  için  $m(ab) \leq m(b^m)$  ise  $m$  ye  $R$  nin bir bulanık asallanabilir ideali denir. (Kumar, 1992)

**Tanım 2.4.5:**  $m$   $R$  nin bir bulanık ideali olsun. . Eğer  $\forall a, b \in R$  için  $\exists m, n \in \mathbb{N}_+$  için  $m(ab) \leq m(a^n)$  veya  $m(ab) \leq m(b^m)$  ise  $m$  ye  $R$  nin bir bulanık yarı asallanabilir ideali denir. (Kumar, 1992)

**Sonuç 2.4.6:i),**  $R$  nin her  $m$  bulanık asal ideali  $R$  nin bir bulanık yarı asal idealidir.

**ii)**  $R$  nin her  $m$  bulanık asal ideali  $R$  nin bir bulanık asallanabilir idealidir.

**iii)**  $R$  nin her  $m$  bulanık asallanabilir ideali  $R$  nin bir bulanık yarı asallanabilir idealidir.

**Tanım 2.4.7:**  $c \in [0,1]$  olmak üzere  $\forall a, b \in [0,1]$  için  $a \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$  veya  $b \leq c$  oluyor ise  $c$  ye  $[0,1]$  aralığında bir asal eleman denir. (Malik ve Mordeson, 1998)

**Teorem 2.4.8:**  $m$ ,  $R$  nin bulanık ideali olsun.  $m$  nün  $R$  nin bir bulanık asal ideali olması için gerek ve yeter koşul  $c$ ,  $[0,1]$  aralığında asal eleman ve  $m$ ,  $R$  nin bir asal ideali olmak üzere  $m(0) = 1$  ve  $m(R) = \{1, c\}$  olmasıdır. (Malik ve Mordeson, 1998)

**Teorem 2.4.9:**  $m, R$  nin bulanık ideali olsun. Eğer  $m(0)=1$ ,  $m, R$  nin bir asallanabilir ideali ve  $0 \leq t < 1$  olmak üzere  $\text{Im } m = \{1, t\}$  ise  $m R$  nin bir bulanık asallanabilir idealidir. (Malik ve Mordeson, 1998)

**Teorem 2.4.10:** Eğer  $A, R$  nin herhangi bir yarı asallanabilir bir ideali,  $A \neq R$  olsun. O zaman aşağıdaki şekilde tanımlanan  $R$  nin bir  $m$  bulanık ideali yarı asallanabilirdir. (Kumar, 1992)

$$m(x) = \begin{cases} a & x \in A \text{ ise} \\ b & x \in R - A \text{ ise} \end{cases} \quad a, b \in [0,1], \quad a > b.$$

### İspat

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$  için  $ab \in R$  ve  $m(ab) > m(a^n)$ , olsun. O zaman

$$m(a^n) \neq a, \text{ ve böylece } m(a^n) = b \text{ ve } m(ab) = a.$$

dır.

Şu halde,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  için  $a^n \notin A$  ve  $ab \in A$  ve bundan dolayı bazı  $m \in \mathbb{Z}_+$  için  $b^m \in A$  dır. Çünkü  $A$  yarı asallanabilirdir. Sonuçta  $m(b^m) = a$  ile  $m$  nün yarı asallanabilir olduğunu göstermiş oluruz.

**Teorem 2.4.11:**  $m_1 \subseteq m_2 \subseteq m_3 \subseteq \dots \subseteq m_n \subseteq \dots$  olmak üzere

$\{m_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$   $R$  nin bulanık asal ideallerinin bir kümesi ise o zaman  $\bigcup m_n$  ve  $\bigcap m_n$ ,  $R$  nin bulanık asal idealleridir. (Kumar, 1992)

### İspat:

$a, b \in R$  olsun.  $\forall i, j \in \mathbb{Z}_+$  için

$$m_i(a), m_j(b) \leq m_k(a), m_k(b)$$

olacak şekilde  $k \in \mathbb{Z}$  vardır ve buradan

$$\min(m_i(a), m_j(b)) \leq m_k(a - b)$$

dır.

$m = \bigcup m_n$  olsun. Şimdi

$$\min(m(a), m(b)) = \min(\sup(m_n(a)), \sup(m_n(b)))$$

$$\begin{aligned}
&= \sup(\min(m_i(a), m_j(b))) \\
&\leq \sup(m_k(a-b)) = m(a-b)
\end{aligned}$$

dır. Aynı zamanda  $\forall i \in Z^+$  için

$$\begin{aligned}
m(ab) &= \sup(m_i(ab)) \\
&\geq m_i(ab) \\
&\geq m_i(a), \quad m_i(b)
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
m(ab) &\geq (\bigcup m_i)(a), \quad (\bigcup m_i)(b), \text{ yani} \\
m(ab) &\geq m(a), \quad m(b)
\end{aligned}$$

dır.

Böylece  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık idealidir.

Şimdi  $m$  nün bulanık asal olduğunu gösterelim.  $a = m(ab)$  ve  $b = \max(m(a), m(b))$  olsun.

$a \geq b$  olduğu aşikardır.

$e > 0$  verilsin. O zaman

$$a - e < \sup m_i(ab),$$

olacak şekilde  $j \in Z_+$  vardır öyleki

$$\begin{aligned}
a - e &< m_j(ab), \\
&= \max(m_j(a), m_j(b)) \\
&\leq \max(m(a), m(b)) \\
&= b
\end{aligned}$$

dır. Buradan  $a \leq b$  ve sonuç olarak  $a = b$  olur.

İspatın geri kalan kısmı açıktır.

## 2.5 Bulanık Maksimal İdeal

**Tanım 2.5.1:**  $m$   $R$  nin bir bulanık ideali ve  $S, R$  deki tersi olan elemanlardan oluşan bir küme olsun.

i) Bir  $a \in S$  için  $m(a) < m(0)$ .

ii) Bir  $b \in R$  için  $m(b) < m(0)$  olmak üzere bir  $c \in S$  ve  $\exists r \in R$  için  $m(c - rb) = m(0)$ .

şartları sağlanıyorsa  $m$  ye bulanık maksimal ideal denir. (Kumar, 1992)

**Teorem 2.5.2:** Eğer  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık maksimal ideali ise o zaman  $t = m(0)$  için  $m_t$  maksimal ve  $\text{card Im } m = 2$  dir. (Kumar, 1992)

### İspat

Bulanık maksimal ideal tanımındaki (i) den  $m_t \neq R$  dir.  $b \in R \setminus m_t$  olsun. O zaman

$$m(b) < m(0) \text{ olur. } \exists c \in S, r \in R \text{ için } m(c - rb) = m(0) \text{ olduğundan}$$

$$c - rb \in m_t \text{ ve } c \in m_t + \langle b \rangle$$

dir.

Buradan  $m_t + \langle b \rangle = R$  elde edilir. Buna göre  $m_t$  maksimaldir.

$a \in \text{Im } m$  ve  $a < m(0) = t$  olsun. O zaman  $m_t \subset m_a$  dır ve dolayısıyla  $m_a = R$

dir.

Bu nedenle  $F_m = \{m_t, R\}$  olur. Buradan  $\text{card Im } m = 2$  elde edilir.

**Teorem 2.5.3:**  $m$ ,  $R$  nin bulanık ideali olsun.  $m$  nün  $R$  nin bir bulanık maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul  $m_a$ ,  $R$  nin bir maksimal ideali ve  $0 \leq a < 1$  olmak üzere  $m = 1_m \cup a_R$  şeklinde ifade edilebilmesidir. (Malik ve Mordeson, 1998)

**Teorem 2.5.4:**  $R$  birimli bir halka olsun. O zaman  $R$  nin her bulanık maksimal ideali  $R$  nin bir bulanık asal idealidir. (Malik ve Mordeson, 1998)

Eğer  $m$ ,  $R$  nin herhangi bir bulanık ideali ise aşağıdaki diagram verilebilir. (Kumar, 1992)

$m$  bir bulanık maksimal

↓

$m$  bulanık asal ideal  $\Rightarrow$   $m$  bulanık asallanabilir ideal

↓

↓

$m$  bulanık yarı asal ideal  $m$  bulanık yarı asallanabilir ideal

## 2.6 Bulanık Koset

**Tanım 2.6.1:**  $m, R$  nin bir bulanık ideali olsun.  $\forall r \in R$  için

$$m_x^*(r) = m(r - x)$$

ifadesindeki  $m_x^*$  bulanık alt kümesi  $m$  ve  $x$  ile tanımlanan  $R$  nin bir bulanık koseti adını alır.

Aşağıdaki özellikler gösterilebilir. (Ajmal, Dixit ve Kumar, 1992)

$$\forall x, y \in R \text{ için } m_x^* + m_y^* = m_{x+y}^* \quad \text{ve} \quad m_x^* \cdot m_y^* = m_{xy}^* \quad (I)$$

dır.

$R_m$ , ( I ) daki işlemler altında  $m_e^*$  birim eleman olmak üzere değişmeli halka oluşturur.

$m_0^* = m$   $R_m$  nün toplamsal etkisiz elemandır.  $m_{-x}^*$ ,  $m_x^*$  in toplamsal ters elemanıdır. Açıkça görülüyor ki  $m, R$  nin herhangi bir sabit bulanık alt kümesi ise

$$R_m = (m_0^*)$$

dır.

**Teorem 2.6.2:**  $m, R$  halkasının bir bulanık ideali olsun.  $R$  deki  $m$  nün bütün bulanık kosetlerinin kümesi  $R_m$   $\forall x, y \in R$  için

$$m_x^* + m_y^* = m_{x+y}^* \quad \text{ve} \quad m_x^* \cdot m_y^* = m_{xy}^*$$

işlemlerine göre bir halkadır. (Ajmal, Dixit ve Kumar, 1992)

**Teorem 2.6.3:**  $m, R$  nin bir bulanık ideali olsun.  $\forall x \in R$  için  $m(x) = m(0)$  olması için gerek ve yeter koşul  $m_x^* = m_0^*$  olmasıdır. (Ajmal, Dixit ve Kumar, 1992)

**İspat:**  $\forall x \in R$  için  $m(x) = m(0)$  olsun. Bu durumda  $\forall r \in R$  için  $m(r) \leq m(x)$  dir.

Eğer  $m(r) < m(x)$  ise o zaman

$$m(r - x) = m(r)$$

olur. Eğer  $m(r) = m(x)$  ise o zaman  $t = m(0)$  olduğu yerde

$$r, x \in m_t$$

dır. Bunun sonucunda

$$m(r - x) = m(0) = m(r) \text{ olduğu görülür.}$$

Böylece  $\forall x \in R$  için

$$m(r - x) = m(r)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$m_x^* = m_0^*$$

dır.

İspatın diğer kısmı açıktır.

**Tanım 2.6.4:**  $m$ ,  $R$  halkasının bir bulanık ideali,  $\forall x \in R$  için  $m'(m_x^*) = m(x)$  ile tanımlanan  $R_m$  nün  $m'$  bulanık ideali  $m$  tarafından tanımlanan bulanık bölüm ideali olarak tanımlanır. (Ajmal, Dixit ve Kumar, 1992)

## 2.7 Bulanık Esas ideal

**Tanım 2.7.1:**  $x$ ,  $R$  nin bir bulanık alt kümesi ve  $p \supseteq x$  olmak üzere  $\langle x \rangle$   $R$  deki bütün  $p$  bulanık ideallerinin ara kesiti ise  $\langle x \rangle$  ya  $R$  nin  $x$  tarafından üretilen bir bulanık ideali denir. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

**Tanım 2.7.2:**  $x_t$ ,  $R$  nin bir alt kümesi olmak üzere

$$x_t(y) = \begin{cases} 0 & y \neq x \\ t & y = x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı  $x_t$  ye bir bulanık singleton denir. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

**Teorem 2.7.3:** Eğer  $x_t$  ve  $y_s$  iki bulanık singleton ise  $m = \min\{t, s\}$  olmak üzere  $x_t + y_s = (x + y)_m$  ve  $x_t y_s = (xy)_m$  şeklindedir. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

**Tanım 2.7.4:**  $m$ ,  $R$  nin bir alt kümesi olmak üzere  $\text{Im } m$  nün boştan farklı her alt kümesi maksimal elemana sahip ise  $m$  ye sup-özelliğine sahiptir denir. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

**Tanım 2.7.5:**  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık ideali olsun.  $\text{Im } m$  nün boştan farklı her alt kümesinin bir minimum elemanı var ve  $\forall x, y \in R, y \neq 0$  için  $m(x - qy) = m(y) \Rightarrow y|x$  ise  $m$  ye M-özelliğine sahiptir denir.

**Tanım 2.7.6:**  $m, R$  nin bir bulanık ideali ve  $\mathfrak{S}$  da  $x_t, y_s \in \mathfrak{S}$  iken  $t = s > 0$  olacak şekildeki bulanık singletonların kümesi olsun. Eğer  $\langle \mathfrak{S} \rangle \cup 0_{m(0)} = m$  ise  $\mathfrak{S}$  ya  $m$  yü üretir denir. Eğer  $\mathfrak{S}$ ,  $m$  yü üretiyor ve  $\langle \mathfrak{S} \setminus \{x_t\} \rangle \cup 0_{m(0)} = m$  olacak şekilde  $x_t \in \mathfrak{S}$  elemanı bulunamıyor ise  $\mathfrak{S}$  ya  $m$  için minimal üreteç kümesi denir. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

**Tanım 2.7.7:** Eğer  $m, R$  nin bir bulanık ideali olmak üzere  $x_t, y_s \in \mathfrak{S}$  ve  $s > t$  iken  $\exists r_s \in R$  için  $x = r_s y$  olacak şekilde bulanık singletonlardan oluşan minimal üreteç kümesi  $\mathfrak{S}$  ya sahip ise  $m$  ye  $R$  nin bir bulanık esas ideali denir. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

**Teorem 2.7.8:**  $m, R$  nin bir bulanık ideali ve sup özelliğine sahip olsun. O zaman  $m$  nün bulanık esas ideal olması için gerek ve yeter koşul  $m$  nin  $R$  nin esas ideali olmasıdır. (Alkhamees ve Mordeson, 1998)

## 2.8 Bulanık Bağntı

**Tanım 2.8.1:**  $S$  üzerindeki bir  $m$  bulanık bağntısı  $S \times S$  nin bir bulanık alt kümesidir. (Zadeh, 1971)

**Tanım 2.8.2:**  $m, S$  üzerinde bir bulanık bağntı ve  $s, S$  nin bir bulanık alt kümesi olsun.

$$\forall x, y \in S \text{ için } m(x, y) \leq \min(s(x), s(y))$$

oluyorsa  $m$  ye  $s$  üzerinde bir bulanık bağntı denir. (Zadeh, 1971)

**Tanım 2.8.3:**  $m$  ve  $s, S$  nin bulanık alt kümeleri olsun.  $m$  ve  $s$  nin kartezyen çarpımı

$$m \times s(x, y) = \min(m(x), s(y)) \quad \forall x, y \in S$$

şeklinde tanımlanır. (Zadeh, 1971)

**Tanım 2.8.4:**  $s, S$  nin bulanık alt kümesi olsun. O zaman  $s$  üzerinde bulanık bağntı olan,  $S$  üzerindeki en güçlü  $m_s$  bulanık bağntısı şöyle tanımlanır.

$$\forall x, y \in S \text{ için } m_s(x, y) = s \times s(x, y) = \min(s(x), s(y)). \text{ (Rosenfeld, 1975)}$$

**Teorem 2.8.5:**  $m$  ve  $s, S$  nin bulanık alt kümeleri olsun. O zaman

i)  $m \times s, S$  üzerinde bir bulanık bağntıdır.

ii)  $(m \times S)_t = m_t \times S_t \quad \forall t \in [0,1]$  dir. (Bhattacharya ve Mukherjee, 1985)

### İspat

i)  $m \times S(x,y) = \min(m(x), S(y))$  ve  $m$  ile  $S$ ,  $S$  nin bulanık alt kümeleri olduklarından  $m \times S$ ,  $S$  üzerinde bir bulanık bağıntıdır.

ii)  $m \times S(x,y) \geq t$  olsun. Buradan

$(x,y) \in (m \times S)_t$  dir.

$m \times S(x,y) = \min(m(x), S(y)) = m(x)$  olsun.

$m(x) \geq t \Rightarrow x \in m_t$  olsun.  $S(y) \geq t$  olur ve buradan  $y \in S_t$  elde edilir.  $(m \times S)_t \subset m_t \times S_t$  \* sonucu elde edilir.

Tersine

$x \in m_t$  ve  $y \in S_t$  olsun. O zaman  $m(x) \geq t$  ve  $S(y) \geq t$  olur. Şimdi

$m \times S(x,y) = \min(m(x), S(y)) = m(x) \geq t$  olur ve buradan  $(x,y) \in (m \times S)_t$  sonucu elde edilir. Veya

$m \times S(x,y) = \min(m(x), S(y)) = S(y) \geq t$  olur ve buradan  $(x,y) \in (m \times S)_t$  sonucu elde edilir. Bunun sonucu olarak  $m_t \times S_t \subset (m \times S)_t$  dir. \*\*

\* ve \*\* dan  $(m \times S)_t = m_t \times S_t$  olduğu görülür.

**Tanım 2.8.6:** Eğer  $m$   $S$  üzerinde bulanık bağıntı ise o zaman  $m$  üzerindeki  $S$  nin en zayıf  $S_m$  bulanık bağıntısı şöyle tanımlanır;

$\forall x \in S$  için  $S_m(x) = \sup_{y \in S} \{ \max(m(x,y), m(y,x)) \}$ . (Rosenfeld, 1975)

**Tanım 2.8.7:**  $m$  ve  $S$   $G$  nin bulanık alt kümeleri olsun. O zaman

$$m \circ S(x) = \sup_{x=yz} \{ \min(m(y), S(z)) \} \quad \forall x \in G$$

dir. (Malik ve Mordeson, 1991)

**Teorem 2.8.8: i)**  $m$  ve  $S$ ,  $R$  nin bulanık sol (sağ) idealleri olsun. O zaman  $m \times S$ ,  $R \times R$  nin bulanık sol (sağ) idealidir.

ii)  $m$  ve  $S$ ,  $G$  nin bulanık alt grupları olsun. O zaman  $m \times S$ ,  $G \times G$  nin bir bulanık alt grubudur. (Malik ve Mordeson, 1991)

**İspat:**

i)  $m \times s(0,0) = \min(m(0), s(0))$  olduğunu biliyoruz.

$\forall t \in \text{Im}(m \times s)$  olsun. o zaman  $t \leq m(0)$  ve  $t \leq s(0)$  dır.

Teorem 2.3.4 den  $m_i$  ve  $s_i$ ,  $R$  nin sol (sağ) idealleridir. Böylece  $\forall t \in \text{Im}(m \times s)$  için

$(m \times s)_i = m_i \times s_i$ ,  $R \times R$  nin sol idealleridir. Teorem 2.3.4 den  $m \times s$   $R \times R$  nin bir bulanık sol (sağ) idealidir.

ii) Bu da i deki gibi çözülür.

**Teorem 2.8.9:**  $m$  ve  $s$ ,  $R$  nin bulanık alt kümeleri olmak üzere  $m \times s$ ,  $R \times R$  nin bulanık sol (sağ) ideali olsun. O zaman

i)  $\forall x \in R$  için  $m(x) \leq m(0)$  veya  $s(x) \leq s(0)$  dır.

ii) Eğer  $\forall x \in R$  için  $m(x) \not\leq m(0)$  ise, o zaman

$$m(x) \leq s(0) \text{ veya } s(x) \leq s(0) \text{ dir.}$$

iii) Eğer,  $\forall x \in R$  için  $s(x) \leq s(0)$  ise, o zaman

$$m(x) \leq m(0) \text{ veya } s(x) \leq m(0) \text{ dir}$$

iv)  $m$  veya  $s$ ,  $R$  nin bulanık sol (sağ) idealidir. (Malik ve Mordeson, 1991)

**İspat:**

i)  $x, y \in R$  için  $m(x) > m(0)$  ve  $s(y) > s(0)$  olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned} m \times s(x,y) &= \min(m(x), s(y)) \\ &> \min(m(0), s(0)) \\ &= m \times s(0,0) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bu da  $m \times s$  nin  $R \times R$  nin bir bulanık sol(sağ) ideali olmasıyla çelişir.

ii)  $m(x) > s(0)$  ve  $s(y) > s(0)$  olacak şekilde  $\exists x, y \in R$  bulunabileceğini kabul edelim.

O zaman

$$m \wedge s(0,0) = s(0) \text{ dır.}$$

$$m \wedge s(x,y) = \min(m(x), s(y))$$

$$> s(0) = m \wedge s(0,0) \text{ dır.}$$

Bu da  $m \wedge s$  nin bulanık sol ideali olmasıyla çelişir.

iii)  $m(0) < m(x)$  ve  $m(0) < s(y)$  olacak şekilde  $\exists x, y \in R$  bulunabileceğini kabul edelim. O zaman  $m \times s(0,0) = m(0)$  olur.

$$m \times s(x,y) = \min(m(x), s(y))$$

$$\exists m(0) = m \times s(0,0) \text{ dır.}$$

Bu da  $m \times s$  nin bulanık sol ideal olmasıyla çelişir. Bu yüzden, eğer  $s(x) \leq s(0)$  ise  $m(x) \leq m(0)$  veya  $s(x) \leq s(0)$  dir.

iv) I nin yardımıyla  $\forall x \in R$  için  $m(x) \leq m(0)$  veya  $s(x) \leq s(0)$  dir. Genelliği bozmadan  $\forall x \in R$  için  $m(x) \leq m(0)$  olduğunu kabul edelim. O zaman, ii yardımıyla  $\forall x \in R$  için  $m(x) \leq s(0)$  veya  $s(x) \leq s(0)$ .

### I.durum;

$m(x) \leq s(0) \forall x \in R$  için olsun. O zaman  $\forall x \in R$  için  $m \times s(x,0) = m(x)$  dir.

$x, y \in R$  olsun.

$$m(x-y) = m \times s(x-y,0)$$

$$\geq \min(m \times s(x,0), m \times s(y,0))$$

$$= \min(m(x), m(y)) \text{ dir.}$$

Aynı zamanda

$$m(xy) = m \times s(xy,0)$$

$$= m \times s((x,0)(y,0))$$

$$\geq m \times s(y,0)$$

$$= m(y) \text{ dir.}$$

Böylece  $m$   $R$  nin bir bulanık sol idealidir.

### II. durum:

$\forall x \in R$  için  $s(x) \leq s(0)$  olsun ve birinci durumun olmadığını kabul edelim. O zaman  $m(y) > s(0)$  olacak şekilde en az bir  $y \in R$  vardır. Buradan  $m(0) \geq m(y) > s(0)$  olur.

Sonuçta

$m \times s(0,x) = \min(m(0), s(x)) = s(x)$  dir. Bu, I. durum da olduğu gibi  $s$  nin  $R$  nin bir bulanık sol (sağ) ideali olduğunu gösterir.

Bunlardan dolayı  $m$  veya  $s$ ,  $R$  nin bir bulanık sol idealidir.

**Teorem 2.8.10:**  $m$  ve  $s$   $G$  nin bulanık alt kümeleri olmak üzere,  $m \times s$ ,  $G \times G$  nin bulanık alt grupları olsun. O zaman ,

- i)  $\forall x \in G$  için  $m(x) \leq m(e)$   $\forall x \in G$  veya  $s(x) \leq s(e)$  dir.
- ii)  $\forall x \in G$  için  $m(x) \leq m(e)$  ise o zaman  $m(x) \leq s(e)$  veya  $s(x) \leq s(e)$  dir.
- iii)  $\forall x \in G$  için  $s(x) \leq s(e)$  ise o zaman  $s(x) \leq m(e)$  veya  $m(x) \leq m(e)$  dir.
- iv)  $m$  veya  $s$ ,  $G$  nin bir bulanık alt grubudur. (Malik ve Mordeson, 1991)

**İspat:** Teorem 2.8.9 a benzer şekilde gösterilir.

**Sonuç 2.8.11:** i)  $m$  ve  $s$ ,  $m \times s$  bulanık ideal olacak şekilde  $R$  nin bulanık alt kümeleri olsunlar. Eğer  $\forall x \in R$  için

$$m(0) = s(0), \quad m(0) \geq m(x) \quad \text{ve} \quad s(0) \geq s(x)$$

ise o zaman  $m$  ve  $s$  nin her ikisi de  $R$  nin bulanık sol idealleridir. (Malik ve Mordeson, 1991)

ii)  $m \times s$ ,  $G \times G$  nin bulanık alt grupları olacak şekilde  $m$  ve  $s$ ,  $G$  nin bulanık alt kümeleri olsunlar. Eğer

$$\forall x \in G \text{ için } m(e) = s(e), \quad m(e) \geq m(x) \quad \text{ve} \quad s(e) \geq s(x) \text{ ise}$$

o zaman  $m$  ve  $s$  nin her ikisi de  $G$  nin bulanık alt gruplarıdır. (Malik ve Mordeson, 1991)

**İspat:**

i) Bir önceki ispatta ii ve iv nin yardımıyla istenen sonuç elde edilir.

ii) Benzer şekilde  $m$  ve  $s$  nin bulanık alt grup olduğu ispatlanır.

Buna karşılık eğer  $m \times s$ ,  $R \times R$  nin bulanık sol (sağ) ideali olması her zaman  $m$  ve  $s$  nin bulanık sol (sağ) ideal olmasını gerektirmediğine dair örnek verilebilir.

**Örnek 2.8.12:**  $R$  en az iki elemandan oluşan bir halka olsun.  $0 \leq t \leq s < 1$  olsun.  $\forall x \in R$  için  $m(x) = t$  ve  $s(0) = s$ ,  $s(x) = 1$  olacak şekilde  $m$  ve  $s$ ,  $R$  nin bulanık alt kümeleri olsunlar. O zaman  $\forall x, y \in R$  için

$$m \times s(x, y) = \min(m(x), s(y)) = t$$

dır. Sonuçta  $m \times S$ ,  $R \times R$  nin bulanık sol (sağ) idealidir. Çünkü  $m \times S$  sabit fonksiyondur. Burada  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık idealidir fakat  $S$  değildir.

Çünkü  $0 \neq x \in R$  için

$$S(0) < S(x)$$

dır. Eğer  $s = t$  ise

$$S(0) = m(0)$$

olduğuna dikkat edelim.

**Sonuç 2.8.13: i)** Eğer  $S$ ,  $R$  nin bulanık alt kümesi olsun  $m_s = S \times S$  nin,  $R \times R$  nin bir bulanık sol (sağ) ideali olması için gerek ve yeter koşul  $S$  nin  $R$  nin bir bulanık sol (sağ) ideali olmasıdır.

**ii)**  $S$ ,  $G$  nin bir bulanık alt kümesi olsun.  $m_s = S \times S$  nin,  $G \times G$  nin bir bulanık alt grup olması için gerek ve yeter koşul  $S$  nin  $G$  nin bir bulanık alt grubu olmasıdır. (Malik ve Mordeson, 1991)

### İspat:

Daha önceki teoremlerin sonuçlarından kolayca görülür..

Şimdi  $m$ ,  $R \times R$  nin bir bulanık sol ideali ise  $S_m$  nün  $R$  nin bir bulanık sol ideali olması gerekmediğine bir örnek verelim.

**Örnek 2.8.14:**  $R = \mathbb{Z}_6$  bir tamsayılar halkası ve  $H = \{0, 3\}$  ve  $K = \{0, 2, 4\}$  olsun. O zaman  $H$  ve  $K$ ,  $R$  nin idealleri olduğu kolayca görülür.

$$H_0 = \{(0, 0)\}, \quad H_1 = H \times K \quad \text{ve} \quad H_2 = R \times R \quad \text{olsun.}$$

O zaman

$$\forall 0 \leq i \leq 2 \text{ için } H_i, \quad R \times R \text{ nin idealleridir.}$$

$$1 \geq t_0 > t_1 > t_2 \geq 0 \text{ ve } m, \quad R \times R \text{ nin bir bulanık alt kümesi olmak üzere}$$

$$m(H_0) = t_0 \quad m(H_1 \setminus H_0) = t_1 \quad m(H_2 \setminus H_1) = t_2$$

şeklinde tanımlansın.

$\forall 0 \leq i \leq 2$  için  $m_i = H_i$  dir. Buradan,  $\forall t \in \text{Im}(m)$  için  $m_i$  nin,  $R \times R$  nin bir ideali olduğu gör÷lür. Sonuç olarak,  $m$ ,  $R \times R$  nin bir bulanık idealidir.

$\forall x \in R$  için  $(5, x), (x, 5) \notin H_1$ , olduğundan

$$s(5) = t_2$$

dir. Aynı zamanda  $(3, 0) \in H_1$  olduğundan

$$s_m \geq \max(m(3, 0), m(0, 3)) = t_1$$

dir.  $(0, 2) \in H_1$  olduğundan

$$s_m(2) \geq \max(m(2, 0), m(0, 2)) = t_1$$

dir. Böylece

$$\min(s_m(2), s_m(3)) \geq t_1 > t_2 = s_m(5) = s_m(2 + 3)$$

dir. Sonuç olarak  $s_m$ ,  $R$  nin bir bulanık ideali değildir.

### 3. BULANIK EUCLİD İDEALİ

#### 3.1 Tanımlar ve Örnekler

Bulanık kümeler cebirindeki kavramlar bir çok bakımdan standart cebir kavramlarının uzantısıdır. Bizim bu çalışmada ki bulanık Euclid ideali tanımımız da standart cebirdeki Euclid halkasının aşağıdaki tanımından esinlenilmiştir.

**Tanım 3.1.1:**  $R$  değişmeli ve birimli bir halka,  $W$  iyi sıralı bir küme ve  $j : R \longrightarrow W$  ya tanımlı bir fonksiyon olsun.  $\forall x, y \in R$  için  $x = qy + r$  ve  $r = b$  veya  $j(r) < j(y)$  olacak şekilde  $q, r \in R$  varsa  $j$  ye Euclid Algoritması ve  $R$  ye Euclid halkası adı verilir (Nagata, 1987). Şimdi bir Euclid halkası örneği verelim:

**Örnek 3.1.2:**  $\mathbb{Z}$ , birimli ve değişmeli olan Tamsayılar halkası,  $d : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ,

$d(a) = |a|$  ile tanımlı bir fonksiyonu için  $\mathbb{Z}$  bir Euclid halkasıdır.

Yukarıdaki Euclid halkası tanımından esinlenerek bulanık Euclid idealini şöyle tanımlayacağız:

**Tanım 3.1.3:**  $R$  değişmeli birimli bir halka olmak üzere  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık ideali olsun.  $\forall x, y \in R$  için  $m(x - qy) < m(y)$  veya  $m(x - qy) = m(y) \in \{m(0), m(1)\}$  olacak şekilde en az bir  $q \in R$  ise  $m$  ye  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali denir. Bu ifadeye bulanık idealler için Euclid olma koşulu diyeceğiz. Şimdi de bir bulanık Euclid ideali örneği verelim:

**Örnek 3.1.4:**  $m$ ,  $\mathbb{Z}$  nin bir bulanık alt kümesi olmak üzere

$$m(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2) \\ 0, & x \notin (2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $m$ ,  $\mathbb{Z}$  'nin bir bulanık Euclid idealidir. Bunun için önce  $m$  nün  $\mathbb{Z}$  nin bir bulanık ideali olduğunu gösterelim.  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$  için

i)  $m(x - y) \geq \min(m(x), m(y))$  olduğunu gösterelim.

a) Eğer  $x, y \in (2) \Rightarrow x = 2k$  ve  $y = 2m$  olacak şekilde  $\exists k, m \in \mathbb{Z}$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m(x - y) &= m(2k - 2m) \\ &= m(2(k - m)) \\ &= 1 = \min(m(2k), m(2m)). \end{aligned}$$

b) Eğer  $x \in (2)$  ve  $y \notin (2) \Rightarrow x = 2k$  ve  $y = 2m + 1$  olacak şekilde  $\exists k, m \in \mathbb{Z}$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m(x - y) &= m(2k - 2m - 1) \\ &= m(2(k - m) - 1) \\ &= 0 = \min(m(2k), m(2m - 1)). \end{aligned}$$

c) Eğer  $x, y \notin (2) \Rightarrow x = 2k - 1$  ve  $y = 2m - 1$  olacak şekilde  $\exists k, m \in \mathbb{N}$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m(x - y) &= m(2k - 1 - 2m + 1) \\ &= m(2(k - m)) \\ &= 1 \geq 0 \\ &= \min(m(2k), m(2m)). \end{aligned}$$

olacağından  $\forall x, y \in \mathbb{N}$  için  $m(x - y) \geq \min(m(x), m(y))$  dir.

ii)  $\forall x, y \in \mathbb{N}$  için  $m(xy) \geq \max(m(x), m(y))$  olduğunu gösterelim.

a) Eğer  $x, y \in (2) \Rightarrow x = 2k$  ve  $y = 2m$  olacak şekilde  $\exists k, m \in \mathbb{N}$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m(xy) &= m(2k2m) \\ &= m(4km) \\ &= 1 = \max(m(2k), m(2m)). \end{aligned}$$

b) Eğer  $x \in (2)$  ve  $y \notin (2) \Rightarrow x = 2k$  ve  $y = 2m - 1$  olacak şekilde  $\exists k, m \in \mathbb{N}$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m(xy) &= m(2k(2m - 1)) \\ &= m(4km - 2k) \\ &= m(2(2km - k)) \\ &= 1 = \max(m(2k), m(2m - 1)). \end{aligned}$$

c) Eğer  $x, y \notin (2) \Rightarrow x = 2k - 1$  ve  $y = 2m - 1$  olacak şekilde  $\exists k, m \in \mathbb{N}$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m(xy) &= m((2k - 1)(2m - 1)) \\ &= m(4km - 2k - 2m + 1) \\ &= m(2(2km - k - m) + 1) \\ &= 0 = \max(m(2k - 1), m(2m - 1)). \end{aligned}$$

olacağından  $\forall x, y \in \mathbb{N}$  için  $m(xy) \geq \max(m(x), m(y))$  dir. Şu halde  $m, \mathbb{N}$  nin bir bulanık idealidir. Şimdi  $m$  nün Euclid koşulunu sağladığını gösterelim.

i) Eğer  $x, y \in (2)$  ise  $x - qy$  ifadesinde  $q$  sayısı ne olursa olsun  $x - qy \in (2)$  olmak zorundadır. Dolayısıyla  $m(x - qy) = m(y) = 1 = m(0)$  dir.

ii) Eğer  $x, y \notin (2)$  ise o zaman bir  $q$  sayısı çift sayısı için  $x - qy$  sayısı tek olur ve  $m(x - qy) = 0 = m(y) = m(1)$  elde edilir.

iii) Eğer  $x \in (2)$  ve  $y \notin (2)$  ise o zaman bir  $q$  tek sayısı için  $x - qy$  sayısı tek olur ve  $m(x - qy) = 0 = m(y) = m(1)$  elde edilir.

iv) Eğer  $x \notin (2)$  ve  $y \in (2)$  ise o zaman  $x - qy$  ifadesinde  $q$  sayısı ne olursa olsun  $x - qy$  tek sayı olur ve  $m(x - qy) = 0 < m(y) = 1$  eşitsizliği sağlanır.

Şu halde  $m, \mathbb{N}$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**Örnek 3.1.5:**  $m, !$  nin bir bulanık alt kümesi olmak üzere

$$m(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0,5, & x \in (3) - \{0\}, \\ 0, & x \notin (3) \end{cases}$$

$!$  ' nin bir bulanık ideali fakat Euclid ideali değildir. Çünkü  $\forall x, y \in R$  için  $m(x - qy) < m(y)$  veya  $m(x - qy) = m(y) \in \{m(1), m(0)\}$  olacak şekilde bir  $q$  tamsayısı bulunamaz. Örnek olarak  $x = y = 3$  alınırsa  $m(x - qy) < m(y)$  veya  $m(x - qy) = m(y) \in \{m(1) = 0, m(0) = 1\}$  olacak şekilde bir  $q$  tamsayısı bulunamaz.

**Tanım 3.1.6:**  $m$  ve  $s$ , sırasıyla  $R_1$  ve  $R_2$  nin bulanık alt kümeleri olmak üzere

$m(0_{R_1}) = s(0_{R_2})$  ve  $m(1_{R_1}) = s(1_{R_2})$  ise  $m$  ve  $s$  ya benzer bulanık alt kümeler diyeceğiz.

### 3.2 Kesişim ve Birleşim

**Teorem 3.2.1:**  $m$  ve  $s$ ,  $R$  nin iki benzer bulanık alt kümeleri olsun.  $m$  ve  $s$ ,  $R$  nin iki bulanık Euclid ideali ise  $m \cap s$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Öncelikle  $m \cap s$  nin  $R$  nin bir bulanık ideali olduğunu gösterelim.  $\forall x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} m \cap s(x - y) &= \inf(m(x - y), s(x - y)) \\ &\geq \inf(\min(m(x), m(y)), \min(s(x), s(y))) \\ &= \min(\inf(m(x), s(x)), \inf(m(y), s(y))) \\ &= \min(m \cap s(x), m \cap s(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \cap s(xy) &= \inf(m(xy), s(xy)) \\ &\geq \inf(\max(m(x), m(y)), \max(s(x), s(y))) \\ &\geq \max(\inf(m(x), s(x)), \inf(m(y), s(y))) \\ &= \max(m \cap s(x), m \cap s(y)). \end{aligned}$$

olduğundan  $m \cap s$   $R$  nin bir bulanık idealidir. Şimdi  $m \cap s$  nin Euclid koşulunu sağladığını gösterelim.

Bunun için  $\forall x, y \in R$  için  $m \cap s(x - qy) < m \cap s(y)$  veya

$m \cap s(x - qy) = m \cap s(y) \in \{m \cap s(0), m \cap s(1)\}$  olacak şekilde bir  $q \in R$  nin olduğunu gösterelim.  $m$  ve  $s$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealleri olduklarından aşağıdaki seçenekler göz önüne alınmalıdır.

i)  $m(x - qy) < m(y)$  ve  $s(x - qy) < s(y)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathbf{S}(x - qy) &= \inf(\mathbf{m}(x - qy), \mathbf{S}(x - qy)) \\
&< \inf(\mathbf{m}(y), \mathbf{S}(y)) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(y).
\end{aligned}$$

ii)  $\mathbf{m}(x - qy) = \mathbf{m}(y) = \mathbf{S}(x - qy) = \mathbf{S}(y) = \mathbf{m}(1)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathbf{S}(x - qy) &= \inf(\mathbf{m}(x - qy), \mathbf{S}(x - qy)) \\
&= \inf(\mathbf{m}(y), \mathbf{S}(y)) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(y) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(1).
\end{aligned}$$

iii)  $\mathbf{m}(x - qy) = \mathbf{m}(y) = \mathbf{S}(x - qy) = \mathbf{S}(y) = \mathbf{m}(0)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathbf{S}(x - qy) &= \inf(\mathbf{m}(x - qy), \mathbf{S}(x - qy)) \\
&= \inf(\mathbf{m}(y), \mathbf{S}(y)) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(y) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(0).
\end{aligned}$$

iv)  $\mathbf{m}(x - qy) = \mathbf{m}(y) = \mathbf{m}(1)$  ve  $\mathbf{S}(x - qy) = \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(0)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathbf{S}(x - qy) &= \inf(\mathbf{m}(x - qy), \mathbf{S}(x - qy)) \\
&= \inf(\mathbf{m}(y), \mathbf{S}(y)) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(y) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(1).
\end{aligned}$$

v)  $\mathbf{m}(x - qy) < \mathbf{m}(y)$  ve  $\mathbf{S}(x - qy) = \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(1)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathbf{S}(x - qy) &= \inf(\mathbf{m}(x - qy), \mathbf{S}(x - qy)) \\
&= \inf(\mathbf{m}(y), \mathbf{S}(y)) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(y) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(1).
\end{aligned}$$

vi)  $\mathbf{m}(x - qy) < \mathbf{m}(y)$  ve  $\mathbf{S}(x - qy) = \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(0)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathbf{S}(x - qy) &= \inf(\mathbf{m}(x - qy), \mathbf{S}(x - qy)) \\
&= \mathbf{m}(x - qy) \\
&< \mathbf{m}(y) \\
&= \inf(\mathbf{m}(y), \mathbf{S}(y)) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathbf{S}(y)
\end{aligned}$$

vii)  $\mathbf{S}(x - qy) < \mathbf{S}(y)$  ve  $\mathbf{m}(x - qy) = \mathbf{m}(y) = \mathbf{m}(1)$  ise (v) e benzer şekilde gösterilir.

viii)  $S(x - qy) < S(y)$  ve  $m(x - qy) = m(y) = m(0)$  ise (vi) ye benzer şekilde gösterilir.

Böylece  $m \cap S$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Sonuç 3.2.2:**  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ ,  $R$  nin benzer bulanık Euclid idealleri ise

$m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap \dots \cap m_n$  de  $R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**İspat:**  $n$  tane bulanık idealin kesişiminin de bulanık ideal olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi  $n$  tane benzer bulanık Euclid idealin kesişiminin de bulanık Euclid olduğunu tümevarımla gösterelim.  $n=2$  için Teorem 3.2.1 den  $m_1 \cap m_2$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir. Şimdi  $n = k - 1$  için ifadenin doğru olduğunu kabul edip  $n = k$  için doğru olduğunu gösterelim.  $n = k - 1$  için doğru olduğundan  $m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap \dots \cap m_{k-1} = S$  olacak şekilde  $R$  nin bir  $S$  bulanık Euclid ideali vardır.  $S$  ve  $m_k$  benzer bulanık Euclid ideal olduklarından dolayı Teorem 3.2.1 den  $S \cap m_k$  ve böylece  $m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap \dots \cap m_k$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

Fakat aynı şey birleşim için söylenemez. Yani  $m$  ve  $S$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealleri ise  $m \cup S$ ,  $R$  nin bulanık Euclid ideali olmayabilir. Çünkü  $m \cup S$ ,  $R$  nin bulanık ideali olmayabilir.

**Örnek 3.2.3:**  $m(x) = \begin{cases} 1 & x \in (2) \\ 0 & x \notin (2) \end{cases}$  ve  $S(x) = \begin{cases} 1 & x \in (3) \\ 0 & x \notin (3) \end{cases}$ ,  $!$  'nin bulanık Euclid idealleridir.

Burada aynı zamanda  $m$  ve  $S$  iki benzer bulanık alt kümelerdir. Fakat  $m \cup S$ ,  $!$  nin bulanık Euclid ideali değildir. Çünkü  $2, 3 \in !$  olmak üzere

$$\begin{aligned} m \cup S(1) &= m \cup S(3 - 2) \\ &= \sup(m(1), S(1)) \\ &= 0 \\ &\geq \min(m \cup S(3), m \cup S(2)) \\ &= \min(\sup(m(3), S(3)), \sup(m(2), S(2))) \\ &= \min(\sup(0, 1), \sup(1, 0)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

çelişkisi olacağından  $m \cup S$ ,  $!$  nin bulanık ideali değildir ve dolayısıyla bulanık Euclid ideal değildir.

$R$  nin iki bulanık Euclid idealinin birleşiminin de Euclid ideal olması ve  $R$  nin benzer olmayan iki bulanık Euclid idealinin kesişiminin de bulanık Euclid ideal olması için de bu teorem verilebilir.

**Teorem 3.2.4:**  $m$  ve  $s$ ,  $R$  nin iki bulanık Euclid ideali olsun. Eğer  $m \subseteq s$  ise  $m \cup s$  ve  $m \cap s$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealleridir.

**İspat:**  $m \subseteq s$  ise  $m \cup s$  da  $R$  nin bir bulanık idealidir. Gerçekten  $\forall x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} m \cup s(x-y) &= \sup(m(x-y), s(x-y)) \\ &\geq \sup(\min(m(x), m(y)), \min(s(x), s(y))) \\ &= \min(\sup(m(x), s(x)), \sup(m(y), s(y))) \\ &= \min(m \cup s(x), m \cup s(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \cup s(xy) &= \sup(m(xy), s(xy)) \\ &\geq \sup(\max(m(x), m(y)), \max(s(x), s(y))) \\ &= \max(\sup(m(x), s(x)), \sup(m(y), s(y))) \\ &= \max(m \cup s(x), m \cup s(y)). \end{aligned}$$

olduğundan  $m \cup s$  da  $R$  nin bir bulanık idealidir. Şimdi  $m \cup s$  nin Euclid koşulunu sağladığını gösterelim.

$\forall x, y \in R$  için  $m \cup s(x-xy) = \sup(m(x-xy), s(x-xy)) = s(x-xy)$  olduğundan ve  $s$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olduğundan

$$\begin{aligned} m \cup s(x-xy) &= s(x-xy) < s(y) = m \cup s(y) \text{ veya} \\ m \cup s(x-xy) &= s(x-xy) \\ &= s(y) \\ &= m \cup s(y) \in \{m \cup s(0), m \cup s(1)\} \end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Şu halde  $m \cup s$  da  $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

Şimdi  $m \cap s$  nin  $R$  nin bir bulanık ideali olduğunu gösterelim.  $\forall x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} m \cap s(x-y) &= \inf(m(x-y), s(x-y)) \\ &\geq \inf(\min(m(x), m(y)), \min(s(x), s(y))) \\ &= \min(\inf(m(x), s(x)), \inf(m(y), s(y))) \\ &= \min(m \cap s(x), m \cap s(y)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} m \cap s(xy) &= \inf(m(xy), s(xy)) \\ &\geq \inf(\max(m(x), m(y)), \max(s(x), s(y))) \\ &= \max(\inf(m(x), s(x)), \inf(m(y), s(y))) \\ &= \max(m \cap s(x), m \cap s(y)) \end{aligned}$$

olduğundan  $m \cap s$  da  $R$  nin bir bulanık idealidir. Şimdi  $m \cap s$  nin Euclid koşulunu sağladığını gösterelim.

$\forall x, y \in R$  için  $m \cap s(x-xy) = \inf(m(x-xy), s(x-xy)) = m(x-xy)$  olduğundan ve  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olduğundan

$$m \cap s(x-xy) = m(x-xy) < m(y) = m \cap s(y) \text{ veya}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cap \mathcal{S}(x - qy) &= \mathbf{m}(x - qy) \\
&= \mathbf{m}(y) \\
&= \mathbf{m} \cap \mathcal{S}(y) \in \{\mathbf{m} \cap \mathcal{S}(0), \mathbf{m} \cap \mathcal{S}(1)\}
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Şu halde  $\mathbf{m} \cap \mathcal{S}$  de  $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.2.4,** artan zincir oluşturan bulanık Euclid idealler için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

**Teorem 3.2.5:**  $\mathbf{m}_1 \subseteq \mathbf{m}_2 \subseteq \mathbf{m}_3 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{m}_n \subseteq \dots$  olmak üzere

$\{\mathbf{m}_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$   $R$  nin bulanık Euclid ideallerinin bir kümesi ise o zaman  $\mathbf{U}\mathbf{m}_n$  ve  $\cap \mathbf{m}_n$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealleridir.

**İspat:** Teorem 2.4.11 in ispatından  $\mathbf{m}_1 \subseteq \mathbf{m}_2 \subseteq \mathbf{m}_3 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{m}_n \subseteq \dots$  olmak üzere

$\{\mathbf{m}_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$   $R$  nin bulanık ideallerinin bir kümesi ise o zaman  $\cup \mathbf{m}_n$  ve  $\cap \mathbf{m}_n$ ,  $R$  nin bulanık idealleri olduğunu biliyoruz. Şu halde göstermemiz gereken  $\cup \mathbf{m}_n$  ve  $\cap \mathbf{m}_n$  nin Euclid koşulunu sağlamasıdır.

$\forall x, y \in R$  için

$\forall i, j \in \mathbb{Z}_+$  için

$$\mathbf{m}_i(x), \mathbf{m}_j(y) \leq \mathbf{m}_k(x), \mathbf{m}_k(y)$$

olacak şekilde  $k \in \mathbb{Z}$  vardır ve bu yüzden

$$\min(\mathbf{m}_i(x), \mathbf{m}_j(y)) \leq \mathbf{m}_k(x - y)$$

dır.

$\mathbf{m} = \cup \mathbf{m}_n$  olsun.

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(x - qy) &= \cup \mathbf{m}_n(x - qy) \\
&= \sup\{\mathbf{m}_i(x - qy) \mid i \in \mathbb{N}^+\} \\
&< \sup\{\mathbf{m}_i(y) \mid i \in \mathbb{N}^+\} \\
&= \cup \mathbf{m}_n(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(x - qy) &= \cup \mathbf{m}_n(x - qy) \\
&= \sup\{\mathbf{m}_i(x - qy) \mid i \in \mathbb{N}^+\} \\
&= \sup\{\mathbf{m}_i(y) \mid i \in \mathbb{N}^+\} \\
&= \cup \mathbf{m}_n(y) \in \{\cup \mathbf{m}_n(0), \cup \mathbf{m}_n(1)\}
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Şu halde  $\cup \mathbf{m}_n$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

Benzer şekilde  $\mathbf{m} = \cap \mathbf{m}_n$  olsun.  $\mathbf{m}_i$  lerin her biri  $R$  nin bulanık Euclid ideali olduklarından dolayı

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(x-xy) &= \bigcap \mathbf{m}_n(x-xy) \\
&= \inf \left\{ \mathbf{m}_i(x-xy) \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&< \inf \left\{ \mathbf{m}_i(y) \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&= \bigcap \mathbf{m}_n(y) \\
\mathbf{m}(x-xy) &= \bigcap \mathbf{m}_n(x-xy) \\
&= \inf \left\{ \mathbf{m}_i(x-xy) \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&= \inf \left\{ \mathbf{m}_i(y) \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&= \bigcap \mathbf{m}_n(y) \in \left\{ \bigcup \mathbf{m}_n(0), \bigcup \mathbf{m}_n(1) \right\}
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Şu halde  $\bigcap \mathbf{m}_n$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

### 3.3 Kartezyen Çarpım

**Teorem 3.3.1:**  $\mathbf{m}$  ve  $\mathbf{s}$  benzer bulanık alt kümeler olmak üzere  $R$  nin iki bulanık Euclid ideali ise  $\mathbf{m} \times \mathbf{s}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Teorem 2.8.8 den dolayı  $\mathbf{m}$  ve  $\mathbf{s}$   $R$  nin bulanık idealleri ise  $\mathbf{m} \times \mathbf{s}$ ,  $R \times R$  nin bulanık idealidir. Şu halde  $\mathbf{m} \times \mathbf{s}$  nın  $R \times R$  nin Euclid koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir.

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R \times R$  için  $\mathbf{m} \times \mathbf{s}((x_1, x_2) - (y_1, y_2))(q_1, q_2) < \mathbf{m} \times \mathbf{s}(y_1, y_2)$  veya

$\mathbf{m} \times \mathbf{s}((x_1, x_2) - (y_1, y_2))(q_1, q_2) = \mathbf{m} \times \mathbf{s}(y_1, y_2) \in \{\mathbf{m} \times \mathbf{s}(1, 1), \mathbf{m} \times \mathbf{s}(0, 0)\}$  olacak şekilde bir  $(q_1, q_2) \in R \times R$  nin varlığını göstermemiz gerekir.  $\mathbf{m}$  ve  $\mathbf{s}$  bulanık Euclid ideal olduklarından

$\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$  için  $\mathbf{m}(x_1 - y_1q_1) < \mathbf{m}(y_1)$  veya

$\mathbf{m}(x_1 - y_1q_1) = \mathbf{m}(y_1) \in \{\mathbf{m}(1), \mathbf{m}(0)\}$  ve  $\mathbf{s}(x_2 - y_2q_2) < \mathbf{s}(y_2)$  veya

$\mathbf{s}(x_2 - y_2q_2) = \mathbf{s}(y_2) \in \{\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(0)\}$  olacak şekilde  $\exists q_1, q_2 \in R$  olduğunu biliyoruz. Şimdi bu durumları göz önüne alalım.

i)  $\mathbf{m}(x_1 - y_1q_1) < \mathbf{m}(y_1)$  ve  $\mathbf{s}(x_2 - y_2q_2) < \mathbf{s}(y_2)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{s}(x_1 - y_1q_1, x_2 - y_2q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1q_1), \mathbf{s}(x_2 - y_2q_2)) \\
&< \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{s}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{s}(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

ii)  $\mathbf{m}(x_1 - y_1q_1) = \mathbf{m}(y_1) = \mathbf{s}(x_2 - y_2q_2) = \mathbf{s}(y_2) = \mathbf{m}(1) = \mathbf{s}(1)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(1, 1).
\end{aligned}$$

iii)  $\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) = \mathbf{m}(y_1) = \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) = \mathbf{S}(y_2) = \mathbf{m}(0) = \mathbf{S}(0)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(0, 0).
\end{aligned}$$

iv)  $\mathbf{m}(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}(y_1) = \mathbf{m}(1)$  ve  $\mathbf{S}(x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{S}(y_2) = \mathbf{S}(0)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) \\
&= \mathbf{m}(y_1) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(1, 1).
\end{aligned}$$

v)  $\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) < \mathbf{m}(y_1)$  ve  $\mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) = \mathbf{S}(y_2) = \mathbf{S}(1)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) \\
&= \mathbf{S}(y_2) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(1, 1).
\end{aligned}$$

vi)  $\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) < \mathbf{m}(y_1)$  ve  $\mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) = \mathbf{S}(y_2) = \mathbf{S}(0)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) \\
&< \mathbf{m}(y_1) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

vii)  $\mathbf{m}(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}(y_1) = \mathbf{m}(1)$  ve  $\mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) < \mathbf{S}(y_2)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) \\
&= \mathbf{m}(y_1) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(1, 1).
\end{aligned}$$

viii)  $\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) = \mathbf{m}(y_1) = \mathbf{m}(0)$  ve  $\mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) < \mathbf{S}(y_2)$  ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, x_2 - y_2 q_2) &= \min(\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1), \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2)) \\
&= \mathbf{S}(x_2 - y_2 q_2) \\
&< \mathbf{S}(y_2) \\
&= \min(\mathbf{m}(y_1), \mathbf{S}(y_2)) \\
&= \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R \times R$  için  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}((x_1, x_2) - (y_1, y_2)(q_1, q_2)) < \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2)$  veya  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}((x_1, x_2) - (y_1, y_2)(q_1, q_2)) = \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, y_2) \in \{\mathbf{m} \times \mathbf{S}(1, 1), \mathbf{m} \times \mathbf{S}(0, 0)\}$  olacak şekilde  $\exists (q_1, q_2) \in R \times R$  vardır. Şu halde  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.3.2:**  $\mathbf{m}$  ve  $\mathbf{S}$   $R$  nin benzer bulanık alt kümeleri olmak üzere  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid ideali olsun. O halde  $\mathbf{m}$  veya  $\mathbf{S}$   $R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Teorem 2.8.9 dan  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık ideali ise  $\mathbf{m}$  veya  $\mathbf{S}$   $R$  nin bulanık ideali ve  $\forall x \in R$  için  $\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{m}(0)$  veya  $\mathbf{S}(x) \leq \mathbf{S}(0)$  olduğunu biliyoruz.  $\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{m}(0)$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{S}(0)$  veya  $\mathbf{S}(x) \leq \mathbf{S}(0)$  dir. Yani  $\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{m}(0)$  için  $\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{S}(0)$  veya  $\mathbf{S}(x) \leq \mathbf{S}(0)$  dir. Şimdi bu iki durumu inceleyelim.

i) Eğer  $\mathbf{m}(x) \leq \mathbf{S}(0)$  ise  $\forall x \in R$  için  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x, 0) = \mathbf{m}(x)$  dir.  $\mathbf{m} \times \mathbf{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid ideali olduğundan  $\forall (x_1, 0), (y_1, 0) \in R \times R$  için

$$\mathbf{m} \times \mathbf{S}((x_1, 0) - (y_1, 0)(q_1, q_2)) < \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, 0) \text{ veya}$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{S}((x_1, 0) - (y_1, 0)(q_1, q_2)) = \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, 0) \in \{\mathbf{m} \times \mathbf{S}(0, 0), \mathbf{m} \times \mathbf{S}(1, 1)\} \text{ olacak şekilde}$$

$\exists (q_1, q_2) \in R \times R$  vardır. Buradan

$$\mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, 0) = \mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) < \mathbf{m}(y_1) = \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, 0) \text{ veya}$$

$$\mathbf{m}(x_1 - y_1 q_1) = \mathbf{m} \times \mathbf{S}(x_1 - y_1 q_1, 0) = \mathbf{m} \times \mathbf{S}(y_1, 0) = \mathbf{m}(y_1) \in \{\mathbf{m}(1), \mathbf{m}(0)\} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla  $\forall x, y \in R$  için  $\mathbf{m}(x - qy) < \mathbf{m}(y)$  veya  $\mathbf{m}(x - qy) = \mathbf{m}(y) \in \{\mathbf{m}(0), \mathbf{m}(1)\}$  olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Şu halde  $\mathbf{m}$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir

ii)  $\forall x \in R$  için  $S(x) \leq S(0)$  olsun ve (i) nin sağlanmadığını kabul edelim. O zaman  $m(a) > S(0)$  olacak şekilde  $a \in R$  vardır. Buradan  $S(x) = \min(m(0), S(x)) = m \times S(0, x)$  dir. Benzer şekilde  $m \times S, R \times R$  nin bulanık Euclid ideali olduğundan  $\forall (0, x_2), (0, y_2) \in R \times R$  için  $m \times S((0, x_2) - (0, y_2)(q_1, q_2)) < m \times S(0, y_2)$  veya

$m \times S((0, x_2) - (0, y_2)(q_1, q_2)) = m \times S(0, y_2) \in \{m \times S(0, 0), m \times S(1, 1)\}$  olacak şekilde

$\exists (q_1, q_2) \in R \times R$  vardır. Böylece

$$S(x_2 - y_2 q_2) = m \times S(0, x_2 - y_2 q_2) < m \times S(0, y_2) = S(y_2) \text{ veya}$$

$$S(x_2 - y_2 q_2) = m \times S(0, x_2 - y_2 q_2) = m \times S(0, y_2) = S(y_2) \in \{S(0), S(1)\} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla  $\forall x, y \in R$  için  $S(x - qy) < S(y)$  veya  $S(x - qy) = S(y) \in \{S(1), S(0)\}$  olacak şekilde

$\exists q \in R$  vardır. Buradan  $S, R$  nin bir bulanık Euclid idealidir. Sonuç olarak  $m \times S, R \times R$  nin bulanık Euclid ideali ise  $m$  veya  $S, R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Theorem 3.3.3:**  $m$  ve  $S$   $R$  nin benzer bulanık alt kümeleri olmak üzere  $m \times S, R \times R$  nin bir bulanık Euclid ideali olsun. Eğer  $m(0) = S(0), m(x) \leq m(0)$  ve  $S(x) \leq S(0)$  ise  $m$  ve  $S, R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Teorem 2.8.9 dan  $m$  ve  $S$   $R$  nin bulanık alt kümeleri olmak üzere  $m \times S, R \times R$  nin bulanık ideali ise  $m$  ve  $S$   $R$  nin bulanık idealleridir. Dolayısıyla  $\forall x, y \in R$  için  $m(x - q_1 y) < m(y)$  veya  $m(x - q_1 y) = m(y) \in \{m(1), m(0)\}$  ve  $S(x - q_2 y) < S(y)$  veya  $S(x - q_2 y) = S(y) \in \{S(1), S(0)\}$  olacak şekilde  $\exists q_1, q_2 \in R$  olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Teoremin hipotezinden  $\forall x \in R$  için  $m(x) = m \times S(x, 0)$  ve  $S(x) = m \times S(0, x)$  dir.  $m \times S, R \times R$  nin bulanık Euclid ideali olduğundan  $\forall (x, 0), (y, 0) \in R \times R$  için olmak üzere  $m \times S((x, 0) - (y, 0)(q_1, q_2)) < m \times S(y, 0)$  veya

$m \times S((x, 0) - (y, 0)(q_1, q_2)) = m \times S(y, 0) \in \{m \times S(0, 0), m \times S(1, 1)\}$  olacak şekilde

$\exists (q_1, q_2) \in R \times R$  vardır. Buradan

$$m \times S(x - y q_1, 0) = m(x - y q_1) < m(y) = m \times S(y, 0) \text{ veya}$$

$$m \times S(x - y q_1, 0) = m(x - y q_1) = m(y) = m \times S(y, 0) \in \{m(0), m(1)\} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla  $\forall x, y \in R$  için  $m(x - q_1 y) < m(y)$  veya  $m(x - q_1 y) = m(y) \in \{m(0), m(1)\}$  olacak şekilde

$\exists q_1 \in R$  vardır. Şu halde  $m, R$  nin bir bulanık Euclid idealidir

Benzer şekilde  $\mathbf{m} \times \mathcal{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid ideali olduğundan  $\forall (0, x), (0, y) \in R \times R$  için  $\mathbf{m} \times \mathcal{S}((0, x) - (0, y)(q_1, q_2)) < \mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, y)$  veya

$\mathbf{m} \times \mathcal{S}((0, x) - (0, y)(q_1, q_2)) = \mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, y) \in \{\mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, 0), \mathbf{m} \times \mathcal{S}(1, 1)\}$  olacak şekilde

$\exists (q_1, q_2) \in R \times R$  vardır. Buradan

$$\mathcal{S}(x - yq_2) = \mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, x - yq_2) < \mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, y) = \mathcal{S}(y) \text{ veya}$$

$$\mathcal{S}(x - yq_2) = \mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, x - yq_2) = \mathbf{m} \times \mathcal{S}(0, y) = \mathcal{S}(y) \in \{\mathcal{S}(0), \mathcal{S}(1)\} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla  $\forall x, y \in R$  için

$\mathcal{S}(x - q_2 y) < \mathcal{S}(y)$  veya  $\mathcal{S}(x - q_2 y) = \mathcal{S}(y) \in \{\mathcal{S}(1), \mathcal{S}(0)\}$  olacak şekilde  $\exists q_2 \in R$  vardır. Buradan

$\mathcal{S}$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir. Sonuç olarak verilen şartlar altında  $\mathbf{m} \times \mathcal{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid ideali ise  $\mathbf{m}$  ve  $\mathcal{S}$ ,  $R$  nin bulanık Euclid idealleridir.

**Teorem 3.3.4:**  $\mathcal{S}$ ,  $R$  nin bir bulanık alt kümesi olsun. O zaman  $\mathbf{m}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ,  $R \times R$  nin bulanık Euclid ideali olması için gerek ve yeter koşul  $\mathcal{S}$  nin  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olmasıdır.

**İspat:** Bu Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.3 den elde edilir.

**Teorem 3.3.5:**  $\mathbf{m}$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olsun.  $R$  üzerindeki en zayıf  $\mathcal{S}_{\mathbf{m}}$  bulanık bağıntısı  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olmayabilir.

**İspat:** Örnek 2.8.13 den görülebilir.

Teorem 3.3.1, Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.3 bir  $R$  halkası için geçerli idi. Buna ilaveten bu teoremler farklı halkalar içinde geçerlidir. Teorem 3.3.6, Teorem 3.3.7 ve Teorem 3.3.8 de bu konu incelenmiştir.

**Teorem 3.3.6:**  $\mathbf{m}_1$  ve  $\mathbf{m}_2$  benzer bulanık alt kümeler olmak üzere sırasıyla  $R_1$  ve  $R_2$  nin bulanık Euclid ideali ise o zaman  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  de  $R_1 \times R_2$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Proof:**  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(0_{R_1}, 0_{R_2}) = \min(\mathbf{m}_1(0_{R_1}), \mathbf{m}_2(0_{R_2}))$  dir. Şimdi  $t \in \text{Im}(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)$  olsun. Buradan

$t \leq \mathbf{m}_1(0_{R_1})$  ve  $t \leq \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  dir. Teorem 2.4.2 den sırasıyla  $\mathbf{m}_1$ , ve  $\mathbf{m}_2$ ,  $R_1$  ve  $R_2$  nin idealleridir.

Bu yüzden  $t \in \text{Im}(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)$  için  $(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  de  $R_1 \times R_2$  nin bir idealidir. Bunun için

$\forall (x, y), (z, k) \in (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  ve  $\forall (a, b) \in (R_1, R_2)$  için  $(x - z, y - k) \in (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t$  ve  $(xa, yb) \in (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t$  olduğunu göstermemiz gerekir.

$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 (x - z, y - k) = \min(\mathbf{m}_1(x - z), \mathbf{m}_2(y - k))$  dir.  $\mathbf{m}_1, R_1$  in bir ideali olduğundan dolayı

$\forall x, z \in \mathbf{m}_1$  için  $x - z \in \mathbf{m}_1$  dir. Buradan  $\mathbf{m}_1(x - z) \geq t$  olur. Benzer şekilde  $\mathbf{m}_2, R_2$  in bir ideali

olduğundan dolayı  $\forall y, k \in \mathbf{m}_2$  için  $y - k \in \mathbf{m}_2$  dir. Buradan  $\mathbf{m}_2(y - k) \geq t$  dir. Dolayısıyla

$\min(\mathbf{m}_1(x - z), \mathbf{m}_2(y - k)) \geq t$  dir. Şu halde  $(x - z, y - k) \in (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t$ .

$\mathbf{m}_1, R_1$  in bir ideali olduğundan dolayı  $\forall x \in \mathbf{m}_1$  ve  $\forall a \in R_1$  için  $xa, ax \in \mathbf{m}_1$  dir. Buradan  $\mathbf{m}_1(xa) \geq t$

ve  $\mathbf{m}_1(ax) \geq t$  dir. Benzer şekilde  $\mathbf{m}_2, R_2$  in bir ideali olduğundan dolayı  $\forall y \in \mathbf{m}_2$  ve  $\forall b \in R_2$  için

$yb, by \in \mathbf{m}_2$  dir. Buradan  $\mathbf{m}_2(yb) \geq t$  ve  $\mathbf{m}_2(by) \geq t$  dir.  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 (xa, yb) = \min(\mathbf{m}_1(xa), \mathbf{m}_2(yb))$

dir.  $\min(\mathbf{m}_1(xa), \mathbf{m}_2(yb)) \geq t$  olduğundan  $(xa, yb) \in (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t$ . Şu halde  $(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)_t, R_1 \times R_2$  nin

bir idealidir. Teorem 2.4.2 den  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2, R_1 \times R_2$  nin bir bulanık idealidir. Şimdi  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  nin Euclid koşulunu sağladığını gösterelim.

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$  için  $\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) < \mathbf{m}_1(y_1)$  veya

$\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}_1(y_1) \in \{\mathbf{m}_1(0_{R_1}), \mathbf{m}_1(1_{R_1})\}$  ve  $\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_2(y_2)$  veya

$\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_2(y_2) \in \{\mathbf{m}_2(0_{R_2}), \mathbf{m}_2(1_{R_2})\}$  olacak şekilde

$\exists q_1 \in R_1$  ve  $\exists q_2 \in R_2$  olduğunu biliyoruz. Şimdi aşağıdaki durumları inceleyelim.

(i)  $\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}_1(y_1) \in \{\mathbf{m}_1(0_{R_1}), \mathbf{m}_1(1_{R_1})\}$  ve  $\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_2(y_2) \in \{\mathbf{m}_2(0_{R_2}), \mathbf{m}_2(1_{R_2})\}$

ise o zaman

$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2) \in \{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(0_{R_1}, 0_{R_2}), \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(1_{R_1}, 1_{R_2})\}$ .

(ii)  $\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) < \mathbf{m}_1(y_1)$  ve  $\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_2(y_2)$  o zaman

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2).$$

(iii)  $\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}_1(y_1) \in \{\mathbf{m}_1(0_{R_1}), \mathbf{m}_1(1_{R_1})\}$  ve  $\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_2(y_2)$  olsun. Eğer

$\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}_1(y_1) = \min \mathbf{m}_1(1_{R_1})$  ise

$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(1_{R_1}, 1_{R_2})$  dir.

Eğer  $\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) = \mathbf{m}_1(y_1) = \mathbf{m}_1(0_{R_1})$  ise  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2)$  dir.

(iv)  $\mathbf{m}_1(x_1 - q_1 y_1) < \mathbf{m}_1(y_1)$  ve  $\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_2(y_2) \in \{\mathbf{m}_2(1_{R_2}), \mathbf{m}_2(0_{R_2})\}$  olsun. Eğer

$\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_2(y_2) = \min \mathbf{m}_2(1_{R_2})$  ise

$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(1_{R_1}, 1_{R_2})$  dir.

Eğer  $\mathbf{m}_2(x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_2(y_2) = \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  ise  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2)$

Sonuç olarak  $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$  için  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) < \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2)$  veya

$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x_1 - q_1 y_1, x_2 - q_2 y_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y_1, y_2) \in \{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(0_{R_1}, 0_{R_2}), \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(1_{R_1}, 1_{R_2})\}$  olacak

şekilde bir  $(q_1, q_2) \in R_1 \times R_2$  vardır. Şu halde  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ ,  $R_1 \times R_2$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.3.7:**  $\mathbf{m}_1$  ve  $\mathbf{m}_2$  sırasıyla  $R_1$  ve  $R_2$  nin benzer bulanık alt kümeleri olmak  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ ,  $R_1 \times R_2$  nin bir bulanık Euclid ideali olsun. O zaman  $\mathbf{m}_1$  veya  $\mathbf{m}_2$ , sırasıyla  $R_1$  veya  $R_2$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Proof:** Teorem 2.8.9 a benzer şekilde gösterebiliriz ki  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$   $R_1 \times R_2$  nin bir bulanık ideali ise o zaman  $\mathbf{m}_1$  veya  $\mathbf{m}_2$ ,  $R_1$  veya  $R_2$  nin bulanık idealidir.

Şu halde  $\mathbf{m}_1$  veya  $\mathbf{m}_2$  nin Euclid koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. Bunun için  $\forall x, y \in R_1, R_2$  için

$\mathbf{m}_1(x - q_1 y) < \mathbf{m}_1(y)$  veya  $\mathbf{m}_1(x - q_1 y) = \mathbf{m}_1(y) \in \{\mathbf{m}_1(1_{R_1}), \mathbf{m}_1(0_{R_1})\}$

$\mathbf{m}_2(x - q_2 y) < \mathbf{m}_2(y)$  veya  $\mathbf{m}_2(x - q_2 y) = \mathbf{m}_2(y) \in \{\mathbf{m}_2(1_{R_2}), \mathbf{m}_2(0_{R_2})\}$

olacak şekilde  $\exists q_1 \in R_1$  ve  $\exists q_2 \in R_2$

olduğunu gösterelim.

Aynı zamanda  $\forall x \in R_1$  ve  $\forall y \in R_2$  için  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(0_{R_1}, 0_{R_2}) \geq \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x, y)$  olduğunu biliyoruz.

$\mathbf{m}_1(x) \leq \mathbf{m}_1(0_{R_1})$  olduğunu kabul edelim. O halde  $\mathbf{m}_1(x) \leq \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  veya  $\mathbf{m}_2(y) \leq \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  dir. Şimdi bu iki durumu inceleyelim.

1)  $\mathbf{m}_1(x) \leq \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  olsun. O zaman  $\forall x \in R_1$  için  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x, 0_{R_2}) = \mathbf{m}_1(x)$  dir.  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  bulanık Euclid ideali olduğundan

$\forall (x, 0_2), (y, 0_2) \in R_1 \times R_2$  için  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2((x, 0_{R_2}) - (y, 0_{R_2})(q_1, q_2)) < \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y, 0_{R_2})$  veya

$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2((x, 0_{R_2}) - (y, 0_{R_2})(q_1, q_2)) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y, 0_{R_2}) \in \{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(1_{R_1}, 1_{R_2}), \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(0_{R_1}, 0_{R_2})\}$

olacak şekilde  $\exists (q_1, q_2) \in R_1 \times R_2$  vardır.

O zaman  $\forall x, y \in R_1$  için

$\mathbf{m}_1(x - yq_1) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x - yq_1, 0_{R_2}) < \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y, 0_{R_2}) = \mathbf{m}_1(y)$  veya

$\mathbf{m}_1(x - yq_1) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(x - yq_1, 0_{R_2}) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(y, 0_{R_2}) = \mathbf{m}_1(y) \in \{\mathbf{m}_1(1_{R_1}), \mathbf{m}_1(0_{R_2})\}$

olacak şekilde  $\exists q_1 \in R_1$  vardır.

2)  $\forall y \in R_2$  için  $\mathbf{m}_2(y) \leq \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  olduğunu ve (1) in sağlanmadığını kabul edelim. O zaman

$\mathbf{m}_1(b) > \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  olacak şekilde  $b \in R_1$  vardır. Buradan  $\mathbf{m}_1(0_{R_1}) \geq \mathbf{m}_1(b) > \mathbf{m}_2(0_{R_2})$  dir. Dolayısıyla

$\forall x \in R_2$  için  $\mathbf{m}_2(x) = \min(\mathbf{m}_1(0_{R_1}), \mathbf{m}_2(x)) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2(0_{R_1}, x)$  dir.

Benzer şekilde  $m_1 \times m_2$  bir bulanık Euclid ideal olduğundan dolayı

$$\forall (0_{R_1}, x), (0_{R_1}, y) \in R_1 \times R_2 \text{ için } m_1 \times m_2((0_{R_1}, x) - (0_{R_1}, y)(q_1, q_2)) < m_1 \times m_2(0_{R_1}, b)$$

$$\text{veya } m_1 \times m_2((0_{R_1}, x) - (0_{R_1}, y)(q_1, q_2)) = m_1 \times m_2(0_{R_1}, y) \in \{m_1 \times m_2(1_{R_1}, 1_{R_2}), m_1 \times m_2(0_{R_1}, 0_{R_2})\}$$

olacak şekilde  $\exists (q_1, q_2) \in R_1 \times R_2$  olduğunu biliyoruz. Buradan  $\forall x, y \in R_2$  için

$$m_2(x - yq_2) = m_1 \times m_2(0_{R_1}, x - yq_2) < m_1 \times m_2(0_{R_1}, y) = m_2(y) \text{ veya}$$

$$m_2(x - yq_2) = m_1 \times m_2(0_{R_1}, x - yq_2) = m_1 \times m_2(0_{R_1}, y) = m_2(y) \in \{m_2(0_{R_2}), m_2(1_{R_2})\}$$

olacak şekilde  $\exists q_2, r_2 \in R_2$  vardır. Şu halde  $m_1$  veya  $m_2$  sırasıyla  $R_1$  veya  $R_2$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.3.8:**  $m_1$  ve  $m_2$  sırasıyla  $R_1$  ve  $R_2$  nin benzer bulanık alt kümeleri olmak üzere  $m_1 \times m_2$ ,

$R_1 \times R_2$  nin bir bulanık Euclid ideali olsun. Eğer  $\forall x \in R_1$  ve  $\forall y \in R_2$  için

$$m_1(0_{R_1}) = m_2(0_{R_2}), m_1(x) \leq m_1(0_{R_1}) \text{ ve } m_2(y) \leq m_2(0_{R_2}) \text{ ise sırasıyla } m_1 \text{ ve } m_2, R_1 \text{ ve } R_2 \text{ nin}$$

bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Teorem 3.3.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

### 3.4 Bulanık Bölüm İdeali, Bulanık Lokal Alt Halkalar ve Bulanık Esas İdealler

Bu kısımda bazı bulanık cebirsel yapılarla bulanık Euclid ideal arasındaki ilişki incelenecektir.

**Teorem 3.4.1:**  $m, R$  halkasının bir bulanık Euclid ideali ve  $m', m$  tarafından belirlenen

bulanık bölüm ideali olsun.  $m', R_m$  nün bulanık Euclid idealidir.

**İspat:**  $m': R_m \longrightarrow [0,1]$  bulanık bölüm ideali olsun.  $\forall x, y \in R$  için

$m, R$  halkasının bir bulanık Euclid ideali olduğundan

$$m(x - qy) < m(y) \text{ ise}$$

$$m'(m_{x-xy}^*) = m(x - qy) < m(y) = m'(m_y^*)$$

dir.

$$m(x - qy) = m(y) = m(1) \text{ ise}$$

$$m'(m_{x-xy}^*) = m(x - qy) = m(y) = m'(m_y^*) = \min m'(1_{R_m}) \text{ ve}$$

$$m(x - qy) = m(y) = m(0) \text{ ise}$$

$$m'(m_{x-xy}^*) = m(x - qy) = m(y) = m'(m_y^*) = m'(0_{R_m})$$

dir. Sonuç olarak  $\mathfrak{m}'$ ,  $R_m$  nün bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.4.2:** Eğer  $m$ , Sup ve M- özelliğine sahip olmak üzere  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali ise  $m, R$  nin bir bulanık esas idealidir.

**İspat:** Teorem 2.7.8 den  $\mathfrak{m}_t$  nin  $R$  nin esas ideali olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Eğer  $\mathfrak{m}_t = \{0\}$  ise o zaman  $\mathfrak{m}_t$ ,  $R$  nin bir esas idealidir.  $\mathfrak{m}_t \neq \{0\}$  olsun. Bir  $0 \neq y \in \mathfrak{m}_t$  için  $m(y)$  nin  $\text{Im } m$  nün  $[t, m(0)]$  daki minimum elemanı olduğunu kabul edelim. Biz burada  $\mathfrak{m}_t = (y)$  olduğunu göstereceğiz.  $\forall x, y \in \mathfrak{m}_t$  ise

$$m(x) \geq t \text{ ve } m(y) \geq t$$

dir. Buradan  $m, R$  nin bir ideali olduğundan

$$m(qy) \geq t \text{ dir ve dolayısıyla } m(x-xy) \geq t \text{ olup } x-xy \in \mathfrak{m}_t \text{ dir.}$$

dir. Şimdi  $y \in \mathfrak{m}_t$  ise  $(y) \subset \mathfrak{m}_t$  (1)

dir. Tersine  $m, R$  nin bulanık Euclid ideali olduğundan  $\forall x \in \mathfrak{m}_t$  için  $m(x-xy) < m(y)$  veya  $m(x-xy) = m(y) \in \{m(0), m(1)\}$  olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır.  $m(y)$ ,  $\text{Im } m$  nün minimum elemanı olduğundan  $m(x-xy) < m(y)$  olamaz. Şu halde  $m(x-xy) = m(y) \in \{m(0), m(1)\}$  dir. M-özelliğinden  $y \mid x$  olur. O zaman en az bir  $k \in R$  için  $x = y(q+k)$  dir. Dolayısıyla  $x \in (y)$  dir. Buradan  $\mathfrak{m}_t \subset (y)$  dir. (2)

(1) ve (2) den  $\mathfrak{m}_t = (y)$  olur. Sonuç olarak  $\mathfrak{m}_t$ ,  $R$  nin bir esas ideali ve Teorem 2.7.8 den  $m$  bir bulanık esas idealdir.

Şimdi  $0 \notin S$  olmak üzere  $R$  nin saturated olan  $S$  çarpımsal kapalı alt kümesini ve  $RS^{-1}$  olarak kesir halkasını ele alalım.

**Tanım 3.4.3:**  $m$  ve  $\mathfrak{m}'$ , sırasıyla  $R$  ve  $RS^{-1}$  in bulanık idealleri olsun. O zaman  $\forall t \in \text{Im } m$  için eğer  $\text{Im } m = \text{Im } \mathfrak{m}'$  ve  $\mathfrak{m}'_t = \mathfrak{m}_t S^{-1}$  ise  $\mathfrak{m}'$ ,  $RS^{-1}$  içinde  $m$  nün bulanık lokal alt halkası olarak adlandırılır. (Alkamees ve Mordeson, 1997)

**Teorem 3.4.4:** Eğer  $m, R$  nin bulanık Euclid ideali ise  $\mathfrak{m}'$ ,  $RS^{-1}$  in bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** İlk olarak  $\forall a/s \in RS^{-1}$  için  $m(a) = m'(a/s)$  olduğunu gösterelim.  $m'(a/s) = t$  olsun. O zaman

$$a/s \in m'_t \Rightarrow a \in m_t \Rightarrow m(a) \geq t \Rightarrow m'(a/s) \leq m(a) \quad (1)$$

dir. Tersine  $m(a) = t$  olsun. O zaman

$$a \in m_t \Rightarrow a/s \in m_t S^{-1} = m'_t \Rightarrow m'(a/s) \geq t \Rightarrow m(a) \leq m'(a/s) \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) den  $m(a) = m'(a/s)$  elde edilir.

$\forall a/s, b/s_1 \in RS^{-1}$  alalım.  $m, R$  nin bulanık Euclid ideali olduğundan dolayı  $\forall a, b \in R$  için  $m(a - qb) < m(b)$  veya  $m(a - qb) = m(b) \in \{m(1), m(0)\}$  olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır.

Buradan

$$\begin{aligned} m'(a/s - qs_1/s \ b/s_1) &= m'(a - qb/s) \\ &= m(a - qb) \\ &< m(b) \\ &= m'(b/s_1) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} m'(a/s - qs_1/s \ b/s_1) &= m'(a - qb/s) \\ &= m(a - qb) \\ &= m(b) \\ &= m'(b/s_1) \in \{m'(1_{RS^{-1}}), m'(0_{RS^{-1}})\} \end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists qs_1/s \in RS^{-1}$  vardır. Şu halde  $m', RS^{-1}$  in bulanık Euclid idealidir.

### 3.5 Bulanık Maksimal İdeal ve Bulanık Asal İdeal

**Teorem 3.5.1:**  $R$  nin her iki değerli bulanık ideali bulanık Euclid idealdir.

**İspat:**  $a, b \in [0, 1]$  ve  $I, R$  nin bir ideali olsun.  $a > b$  olmak üzere  $m$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$m(x) = \begin{cases} a, & x \in I \\ b, & x \in R - I \end{cases}$$

Şimdi  $\forall x, y \in R$  için  $m(x - qy) < m(y)$  veya  $m(x - qy) = m(y) \in \{m(1_R) = b, m(0_R) = a\}$  olacak şekilde bir  $q \in R$  elemanının olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Eğer  $x, y \in I$  ise  $I, R$  nin bir ideali olduğundan  $\forall q \in R$  için  $x - qy \in I$  dir. Buradan  $m(x - qy) = m(y) = a$  dir. Eğer  $x, y \notin I$  ise  $\forall q \in R$  için  $x - qy \notin I$  dir. Buradan  $m(x - qy) = m(y) = b$  dir. Eğer  $x \in I$  ve  $y \notin I$  ise  $\exists q \in R - I$  için  $x - qy \notin I$  dir. Buradan  $m(x - qy) = m(y) = b$  dir. Eğer  $x \notin I$  ve  $y \in I$  ise  $\forall q \in R$  için  $x - qy \notin I$  dir. Buradan  $m(x - qy) < m(y)$  dir. Şu halde  $m, R$  nin bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.5.2:**  $R$  nin her bulanık maksimal ideali bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Teorem 2.5.2 den  $m$   $R$  nin maksimal ideali olduğu zaman  $t = m(0)$  için  $m_* = m_t, R$  nin bir maksimal ideali ve  $card(\text{Im } m) = 2$  olduğunu biliyoruz. Şu halde  $a < t$  olmak üzere  $m$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$m(x) = \begin{cases} t, & x \in m_* \\ a, & x \in R - m_* \end{cases}$$

Teorem 3.5.1 den  $m$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.5.3:**  $R$  nin her bulanık asal ideali bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Teorem 2.4.8 den  $m$   $R$  nin bir bulanık asal ideali olduğu zaman  $1 = m(0)$  için  $m_* = m_1, R$  nin bir asal ideali ve  $card(\text{Im } m) = 2$  yani  $c, [0, 1]$  arasında bir asal eleman olmak üzere  $m(R) = \{1, c\}$  olduğunu biliyoruz. Şu halde  $m$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$m(x) = \begin{cases} 1, & x \in m_* \\ c, & x \in R - m_* \end{cases}$$

Teorem 3.5.1 den  $m$   $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

Fakat Teorem 3.5.2 ve Teorem 3.5.3 ün tersi her zaman doğru değildir. Yani her bulanık Euclid ideal bulanık maksimal ideal ve bulanık asal ideal olmayabilir.

**Örnek 3.5.4:**  $m(x) = \begin{cases} 1, & x \in (4) \\ a, & x \in ! - (4) \end{cases}$  ideali  $!$  nin bir bulanık Euclid idealidir. Fakat  $!$  nin

bir bulanık maksimal ideali değildir.  $m_* = \{x \in ! \mid m(x) = m(0)\} = (4)$  ideali  $!$  nin maksimal ideali değildir. Çünkü  $(4) \subseteq (2) \subseteq !$  olacak şekilde ve  $(4) \neq (2)$  ve  $(2) \neq !$   $(2)$  ideali vardır. Şu halde  $m !$  nin bir bulanık maksimal ideali değildir.

Benzer şekilde  $m !$  nin bir bulanık asal ideal değildir. Çünkü



$\forall x \in X$  için  $f^{-1}(\mathbf{m}) = \mathbf{m}(f(x))$  kümesi  $\mathbf{m}$  nün  $f$  altındaki ters görüntüsü olarak adlandırılır. (Malik ve Mordeson, 1998)

**Teorem 3.6.2:**  $f: R \longrightarrow R'$  bir örten halka homomorfizması ve  $\mathbf{m}: R' \longrightarrow [0,1]$ ,  $R'$  nün bir bulanık Euclid ideali olsun.  $f^{-1}(\mathbf{m})(x) = \mathbf{m}(f(x))$  ile tanımlı  $\mathbf{m}(f): R \longrightarrow [0,1]$  fonksiyonu da  $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**İspat:**  $\forall x \in R$  için  $\mathbf{d}(x) = \mathbf{m}(f(x)) = f^{-1}(\mathbf{m})(x)$  ile tanımlanan  $\mathbf{d}$  nin  $R$  nin bir bulanık ideali olduğunu gösterelim.

$\forall x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x-y) &= \mathbf{m}(f)(x-y) \\ &= \mathbf{m}(f(x-y)) \\ &= \mathbf{m}(f(x) - f(y)) \\ &\geq \min(\mathbf{m}(f(x)), \mathbf{m}(f(y))) \\ &= \min(\mathbf{d}(x), \mathbf{d}(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(xy) &= \mathbf{m}(f)(xy) \\ &= \mathbf{m}(f(xy)) \\ &= \mathbf{m}(f(x)f(y)) \\ &\geq \max(\mathbf{m}(f(x)), \mathbf{m}(f(y))) \\ &= \max(\mathbf{d}(x), \mathbf{d}(y)). \end{aligned}$$

Şu halde  $\mathbf{d}$ ,  $R$  nin bir bulanık idealidir.

Şimdi Euclid koşulunun sağlandığını gösterelim.  $\forall x, y \in R$  için  $x - qy \in R$  olduğundan  $f(x - qy), f(y) \in R'$  dür.  $\mathbf{m}$ ,  $R'$  nün bulanık Euclid ideali olduğundan

$\mathbf{m}(f(x - qy)) < \mathbf{m}(f(y))$  veya  $\mathbf{m}(f(x - qy)) = \mathbf{m}(f(y)) \in \{\mathbf{m}(1_{f(R)}), \mathbf{m}(0_{f(R)})\}$  dir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x - qy) &= \mathbf{m}(f)(x - qy) \\ &= \mathbf{m}(f(x - qy)) \\ &= \mathbf{m}(f(x) - f(q)f(y)) \\ &< \mathbf{m}(f)(y) \\ &= \mathbf{d}(y) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x - qy) &= \mathbf{m}(f)(x - qy) \\ &= \mathbf{m}(f(x - qy)) \\ &= \mathbf{m}(f(x) - f(q)f(y)) \\ &= \mathbf{m}(f)(y) \\ &= \mathbf{d}(y) \\ &= \mathbf{d}(y) \in \{\mathbf{d}(0), \mathbf{d}(1)\} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $\forall x, y \in R$  için

$d(x - qy) < d(y)$  veya  $d(x - qy) = d(y) \in \{d(0), d(1)\}$  olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Şu halde  $d$  fonksiyonu  $R$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.6.3:**  $f : R \longrightarrow R'$  bir örten halka homomorfizması ve  $m : R \longrightarrow [0, 1]$ ,  $\check{c}ek$   $f$  nin elemanlarını sabit bırakan bir bulanık Euclid ideal olsun. O zaman  $f(m) : R' \longrightarrow [0, 1]$  fonksiyonu da  $R'$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**İspat:**  $f$  örten bir halka homomorfizması olduğundan  $x', y' \in R'$  için

$f(x_0) = x'$  ve  $f(y_0) = y'$  olacak şekilde  $x_0, y_0 \in R$  vardır. Buradan  $x' y' = f(x_0) f(y_0)$  dir.  $m$ ,  $\check{c}ek$   $f$  üzerinde sabit olduğundan bir  $a \in R$  için  $f(x_0) = x'$  ve  $f(a) = x'$  ise  $f(x_0) = f(a)$  dir. Buradan  $f(x_0 - a) = 0_R$  dir.  $0_R \in \check{c}ek$   $f$  olduğunu biliyoruz. Buradan  $f(x_0 - a) = f(0_R)$  olur.  $m$ ,  $\check{c}ek$   $f$  üzerinde sabit olduğundan  $m(x_0 - a) = m(0_R)$  dir.

$$m(x_0) = m(x_0 - a - a) \geq \min(m(x_0 - a), m(a)) = m(a)$$

$$m(a) = m(x_0 - (x_0 - a)) \geq \min(m(x_0 - a), m(x_0)) = m(x_0) \text{ dir. Buradan } m(x_0) = m(a) \text{ elde edilir.}$$

Böylece  $f(m)(x') = \sup\{m(a) \mid a \in f^{-1}(x')\} = m(x_0)$  olur. Benzer şekilde

$$f(m)(y') = \sup\{m(a) \mid a \in f^{-1}(y')\} = m(y_0) \text{ dir. Şimdi } f(m) : R' \longrightarrow [0, 1] \text{ fonksiyonunun } R' \text{ nin}$$

bir bulanık ideali olduğunu gösterelim.  $\forall x', y' \in R'$  için

$$\begin{aligned} f(m)(x' - y') &= m(x_0 - y_0) \\ &\geq \min(m(x_0), m(y_0)) \\ &= \min(f(m)(x'), f(m)(y')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m)(x' y') &= m(x_0 y_0) \\ &\geq \max(m(x_0), m(y_0)) \\ &= \max(f(m)(x'), f(m)(y')) \end{aligned}$$

olduğundan  $f(m)$   $R'$  nin bir bulanık idealdir.

Şimdi Euclid koşulunun sağlandığını yani  $\forall x', y' \in R'$  için

$$f(m)(x' - q'y') < f(m)(y') \text{ veya } f(m)(x' - q'y') = f(m)(y') \in \{f(m)(1_{R'}), f(m)(0_{R'})\} \text{ olacak}$$

şekilde  $\exists q' \in R'$  elemanının varlığını gösterelim.  $m$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olduğundan  $\exists q' \in R'$

için  $f(m)(x' - q'y') = m(x_0 - q_0 y_0) < m(y_0) = f(m)(y')$  veya

$$f(m)(x' - q'y') = m(x_0 - q_0 y_0) = m(y_0) = f(m)(y') \in \{f(m)(1_{R'}), f(m)(0_{R'})\} \text{ dir. Şu}$$

halde  $f(\mathbf{m}) : R' \longrightarrow [0,1]$  fonksiyonu da  $R'$  nin bir bulanık Euclid idealidir.

**Teorem 3.6.4:**  $\mathbf{m}$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali,  $f : R \longrightarrow R/\mathbf{m}_*$  doğal homomorfizma olsun. O zaman

$S : R/\mathbf{m}_* \longrightarrow [0,1]$  e,  $S(x + \mathbf{m}_*) = \mathbf{m}(x)$  şeklinde tanımlanan  $S$ ,  $R/\mathbf{m}_*$  in bir bulanık Euclid idealidir.

**İspat:** Öncelikle  $S : R/\mathbf{m}_* \longrightarrow [0,1]$ ,  $S(x + \mathbf{m}_*) = \mathbf{m}(x)$  şeklinde tanımlı  $S$  nin iyi tanımlı olduğunu

gösterelim. Bunun için  $x + \mathbf{m}_* = y + \mathbf{m}_*$  olsun. Buradan  $x - y \in \mathbf{m}_*$  dir.  $\mathbf{m}_*$  in tanımından  $\mathbf{m}(x - y) = \mathbf{m}(0)$  dir. Buradan  $\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y)$  elde edilir. Dolayısıyla

$S(x + \mathbf{m}_*) = \mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y) = S(y + \mathbf{m}_*)$  dir yani  $S$  fonksiyonu iyi tanımlıdır. Şimdi  $S$

fonksiyonunun bir bulanık ideal olduğunu gösterelim. Bunun için  $\forall x + \mathbf{m}_*, y + \mathbf{m}_* \in R/\mathbf{m}_*$  için

$$\begin{aligned} S((x + \mathbf{m}_*) - (y + \mathbf{m}_*)) &= S(x - y + \mathbf{m}_*) \\ &= \mathbf{m}(x - y) \\ &\geq \min(\mathbf{m}(x), \mathbf{m}(y)) \\ &= \min(S(x + \mathbf{m}_*), S(y + \mathbf{m}_*)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S((x + \mathbf{m}_*)(y + \mathbf{m}_*)) &= S(xy + \mathbf{m}_*) \\ &= \mathbf{m}(xy) \\ &\geq \max(\mathbf{m}(x), \mathbf{m}(y)) \\ &= \max(S(x + \mathbf{m}_*), S(y + \mathbf{m}_*)) \end{aligned}$$

dir. Şu halde  $S$ ,  $R/\mathbf{m}_*$  nin bulanık idealidir. Şimdi Euclid koşulunun sağlandığını yani

$\forall x + \mathbf{m}_*, y + \mathbf{m}_* \in R/\mathbf{m}_*$  için  $S(x + \mathbf{m}_* - (q + \mathbf{m}_*)(y + \mathbf{m}_*)) < S(y + \mathbf{m}_*)$  veya

$S(x + \mathbf{m}_* - (q + \mathbf{m}_*)(y + \mathbf{m}_*)) = S(y + \mathbf{m}_*) \in \left\{ S(1_{R/\mathbf{m}_*}), S(0_{R/\mathbf{m}_*}) \right\}$  olacak şekilde  $\exists q + \mathbf{m}_* \in R/\mathbf{m}_*$  var

olduğunu gösterelim.  $\mathbf{m}$ ,  $R$  nin bir bulanık Euclid ideali olduğundan  $\forall x, y \in R$  için  $\mathbf{m}(x - qy) < \mathbf{m}(y)$

veya  $\mathbf{m}(x - qy) = \mathbf{m}(y) \in \{ \mathbf{m}(1), \mathbf{m}(0) \}$  olacak şekilde  $\exists q \in R$  vardır. Buradan

$$\begin{aligned} S(x + \mathbf{m}_* - (q + \mathbf{m}_*)(y + \mathbf{m}_*)) &= S(x - qy + \mathbf{m}_*) \\ &= \mathbf{m}(x - qy) \\ &< \mathbf{m}(y) \\ &= S(y + \mathbf{m}_*) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x + \mathbf{m}_* - (q + \mathbf{m}_*)(y + \mathbf{m}_*)) &= \mathcal{S}(x - qy + \mathbf{m}_*) \\
&= \mathbf{m}(x - qy) \\
&= \mathbf{m}(y) \\
&= \mathcal{S}(y + \mathbf{m}_*) \in \left\{ \mathcal{S}(1_{R/\mathbf{m}_*}), \mathcal{S}(0_{R/\mathbf{m}_*}) \right\}
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists q + \mathbf{m}_* \in R/\mathbf{m}_*$  vardır. Şu halde  $\mathcal{S}, R/\mathbf{m}_*$  nün bir bulanık Euclid idealidir.

#### 4. TARTIŞMA

Literatürdeki bulanık Euclid idealleri bizden önce de  $L$ -bulanık  $q$ -Euclid idealleri adı altında çalışılmıştır. (Koç ve Balkanay, 2002) Ancak bizim çalışmamızdaki ve Koç ve Balkanay da verilen bulanık Euclid ideali tanımları birbirinden bağımsız ve de farklıdır. Bu tanımların eşdeğer olmadığı da örneklerle gösterilebilir. Koç ve Balkanaydaki  $L$ -bulanık  $q$ -Euclid ideali tanımını aşağıdaki gibidir.

**Tanım 4.1:**  $q : R \longrightarrow L$ ,  $R$  nin sabit olmayan bir bulanık alt kümesi olsun.  $j : R \longrightarrow L$  fonksiyonu

(i) her  $x, y \in R$  için  $j(x+y) \geq \min\{j(x), j(y)\}$

(ii)  $j(x) = j(-x)$

(iii)  $j(xy) \geq \max\{j(x), j(y)\}$

(iv) her  $x, y \in R$ ,  $y \neq 0$  için  $x = qy + r$  olmak üzere  $r = 0$  veya

$\max\{j(r), q(r)\} \geq \max\{j(y), q(y)\}$  olacak şekilde  $q, r \in R$  elemanları vardır.

şartları sağlanıyorsa  $j$  ye bir  $L$ -bulanık  $q$ -Euclid ideali denir.

Şimdi bu tanımların eşdeğer olmadığını gösteren iki örnek verelim..

**Örnek 4.2:**  $m(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2) \\ 0, & x \notin (2) \end{cases}$

Tanım 3.1.3 e göre  $!$  nin bir bulanık Euclid idealidir. Fakat Koç ve Balkanay da verilen tanıma göre  $m$ ,  $!$  'nin  $L$ -bulanık  $m$ -Euclid ideali değildir. Çünkü  $x=5$  ve  $y=4$  alınırsa, her zaman için  $r$  bir tek tamsayıdır.  $m$  nün bir  $L$ -bulanık  $m$ -Euclid ideali olması için

$\max\{m(r), m(r)\} \geq \max\{m(4), m(4)\}$  olması gerekir.  $\max\{m(r), m(r)\} = 0$ ,

$\max\{m(4), m(4)\} = 1$  olduğundan mümkün değildir.

**Örnek 4.3:**  $j(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1/3, & x \in (2) - 0 \\ 0, & x \in ! - (2) \end{cases}$  ve  $q(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1/3, & x = \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \\ 1/|x|, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$

! nin bulanık alt kümeleri Koç ve Balkanay daki tanıma göre  $j$  bir  $L$ -bulanık  $q$ -Euclid idealidir. Fakat Tanım 3.1.3 e göre, bir bulanık Euclid ideali değildir. Çünkü  $x = 6$  ve  $y = 4$  alınırsa  $j(x - qy) < j(y)$  veya  $j(x - qy) = j(y) \in \{j(0) = 1, j(1) = 0\}$  olacak şekilde en az bir  $q \in !$  bulunamaz. Yani  $\forall q \in !$  için  $\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$  veya  $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \in \{0, 1\}$  olmasını gerektirir ki bu önerme doğru olacak şekilde bir  $q \in !$  bulunamaz.

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada bulanık idealler için yeni bir şart getirilerek bulanık Euclid ideali tanımı yapılmış ve onunla ilgili örnekler verilmiştir. Bulanık Euclid ideallerin kesişimlerinin ve birleşimlerinin de bulanık Euclid ideali olduğu gösterilmiştir. Bulanık Euclid ideallerin kartezyen çarpımlarının bulanık Euclid ideali olduğu ve bununla ilgili benzer teoremlere yer verilmiştir. Bulanık halkalardaki bulanık asal, bulanık maksimal ideal, bulanık bölüm ideali, bulanık lokal alt halkalar ve bulanık temel idealler gibi bazı cebirsel yapılarla bulanık Euclid idealler arasındaki ilişki incelenmiştir. Bulanık Euclid idealin bir halka homomorfizması olan  $f$  altındaki görüntüsü ve ters görüntüsünün de bulanık Euclidean ideali olduğu gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

**Ajmal, N., Dixit, V. N., ve Kumar, R., (1991), "Fuzzy Ideals and Fuzzy Prime Ideals of a Ring", Fuzzy sets and Systems, 44:127-138.**

Ajmal, N., Dixit, V. N., ve Kumar, R., (1992), "On Fuzzy Rings", Fuzzy sets and Systems, 49:205-213.

Alkamees, Y. ve Mordeson, J. N., (1997), "Fuzzy Localized Subrings", Information Sciences, 99:183-193.

Alkamees, Y. ve Mordeson, J. N., (1998) "Fuzzy Principal Ideals and Fuzzy Simple Field Extensions", Fuzzy Sets and Systems, 96:247-253.

Bhattacharya, P. ve Mukherjee, N. P., (1985) "Fuzzy Relations and Fuzzy Groups", Information Sciences, 36:267-282.

Burton, M. D., (1970) "A First Course in Rings and Ideals", Addison-Wesley, London.

Chang, L.D., (1968) "Fuzzy Topological Spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24:182-190.

Das, P. S., (1981) "Fuzzy Groups and Level Subgroups", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 84:264-269.

Hungerford, T. W., (1974) "Algebra", Springer-Verlag, New-York.

Jaballah, A. ve Mordeson, J. N., (1995) "Minimal Generating Systems For Fuzzy Ideals", Soochow Journal of Mathematics, 21:183-192.

Koç, A. ve Balkanay, E., (2002) " $q$ -Euclidean  $L$ -Fuzzy Ideals of Rings", Turkish Journal of Mathematics, 26:149-158.

Kumar, R., (1992) "Certain Fuzzy Ideals of Rings Redefined", Fuzzy Sets and Systems, 46:251-260.

Kumbhojkar, H.V. ve Bapat, M.S., (1991) "Correspondence Theorem For Fuzzy Ideals", Fuzzy Sets and Systems, 41:213-219.

Liu, W. L., (1982) "Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals", Fuzzy Sets and Systems, 8:133-139.

Malik, D. S. ve Mordeson, J. N., (1998) "Fuzzy Commutative Algebra", World Scientific Publishing, Singapore.

Malik, D. S. ve Mordeson, J. N., (1991) "Fuzzy Maximal, Radical and Primary Ideals of a Ring", Information Sciences, 53:237-250.

Malik, D. S. ve Mordeson, J. N., (1990) "Fuzzy Prime Ideals of a Ring", Fuzzy Sets and Systems, 37:93-98.

Malik, D. S. ve Mordeson, J. N., (1991) "Fuzzy Relations on Rings and groups", Fuzzy Sets and Systems, 43:117-123.

Mukherjee, T. K. ve Sen, M. K., (1987) "On Fuzzy Ideals of a Ring", Fuzzy Sets and Systems, 21:99-104.

Nagata, M., (1987) "On the definition of a Euclid Ring", Adv. Stud. Pure Maths., 11:167-171.

Rosenfeld, A., (1975) "Fuzzy Graphs in: L.A. Zadeh, K.S. Fu and M. Shimira, Fuzzy Sets and Their Applications", Academic Press, New York.

Rosenfeld, A., (1971) "Fuzzy Groups", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35:512-517.

Swamy, U.M. ve Swamy, K.L.N., (1988) "Fuzzy Prime Ideals of Rings", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 134:94-103.

Zadeh, L. A., (1965) "Fuzzy Sets", Information Sciences, 8:338-353.

Zadeh, L. A., (1971) "Similarity Relations and Fuzzy Ordering", *Information Sciences*, 3:117-220.

Zhang, Y., (1988) "Prime  $L$ -Fuzzy Ideals and Primary  $L$ -Fuzzy Ideals", *Fuzzy Sets and Systems*, 27:345-350.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum Tarihi: 01 Şubat 1974

Doğum Yeri İsparta

Lise 1988-1991 İstanbul Bayrampaşa Tuna Lisesi

Lisans 1991-1996 Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim  
Fakültesi Matematik Bölümü

**Yüksek Lisans 1998-1999 YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik  
Ana Bilim Dalı**

**Çalıştığı kurum**

1998- Devam ediyor. YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,  
Araştırma Görevlisi.