106287

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN k. DÜZENLİ İZİ

Mat.Yük.Müh. Hülya ŞAHİNTÜRK

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez savunma Tarihi : 28 Şubat 2001
Tez Danışmanı : Prof.Dr.Mehmet Bayramoğlu (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Gülseren Aydın (M.S.Ü)
Prof.Dr. Yusuf Avcı (İ.Ü.)

İSTANBUL, 2001

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR...........iii

ÖZET...........iv

ABSTRACT...........v

1. GİRİŞ...........1

1.1 Genel Bilgiler...........7

2. PROBLEMİN ORTAYA KONULMASI VE SPEKTRUMUN İNCELENMESİ...13

3. REZOLVENT İLE İLGİLİ BAZI FORMÜLLER...........31

4. DÜZENLİ İZ FORMÜLÜ...........46

5. SONUÇ...........65

KAYNAKLAR...........66

ÖZGEÇMİŞ...........70

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda her zaman beni destekleyen, değerli bilgilerini benimle paylaşan, sıkıldığım her anda daima yanımda olan ve kendisi ile çalışmanın mutluluğuna eriştiğim saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU'na ;

Ayrıca akademik ilerlememin şu ana kadar olan her safhasında gerek düşünceleriyle gerek desteğiyle bazen bir hoca olarak ama çoğunlukla bir baba şefkatiyle varlığını hissettiğim benim için çok önemli bir kişi olan Sayın Prof. Tahir ŞİŞMAN'a ;

Yardımlarından dolayı arkadaşım Yrd.Doç.Dr.İbrahim EMİROĞLU'na;

Anlayışı, desteği ve yardımlarıyla eşim Mehmet ŞAHİNTÜRK'e ve aynı zamanda fedakarlığı ile bana her zaman örnek olan ve en değerli hazinem sevgili annem Aysen ve babam Bahattin SERAB'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

ÖZET

H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $H_1= L_2\left([0,1],H\right)\oplus H$ Hilbert uzayında

$$-y''+Q(x)y=\lambda y \qquad 0\leq x\leq 1$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ve

$$y'(0)=0$$

$$-y(1)=\lambda y'(1)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatör L olsun. Burada Q(x) [0 , 1] aralığında tanımlanmış değerleri H uzayında kendine eş çekirdek operatör olan fonksiyon, λ ise kompleks değerler alan spektral parametredir. Sunulan bu çalışmada L operatörü için k ($k\geq 2$) herhangi doğal sayı olmak üzere k. düzenli iz kavramı verilmiş ve düzenli iz için formül elde edilmiştir. Sözü edilen Q(x) reel değerli skaler fonksiyon, H=C olduğu halde de yüksek mertebeden düzenli iz formülü ilk bu çalışmada bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Zayıf türev, analitik operatör-fonksiyon, esas spektrum, spektral açılım, düzenli iz

ABSTRACT

Let H seperable Hilbert space.In Hilbert space $H_1 = L_2([\,0,1\,], H) \oplus H$ define operator L generated by Sturm-Liouville differantial equation

$$-y'' + Q(x)y = \lambda y \qquad 0 \le x \le 1$$

and boundary conditions

$$y'(0) = 0$$

$$-y(1) = \lambda y'(1)$$

Here Q(x) is a operator-function defined in [0 , 1] interval. Its values self-adjoint kernel operators in space H, and λ is a komplex spectral parameter. In this study for the L operator, k ($k \ge 2$) is a any natural number which is given a regularized trace concept and obtained formula for k regularized trace.In this thesis, while Q(x) mentioned here is a reel valued skaler function and H=C, investigated first as a higher regularized trace formula.

Key words: Weak derivative, analytic operator-function, essential spectrum, spectral expansion, regularized trace

1. GİRİŞ

Bu çalışmada H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere

$L_2([0,1], H) \oplus H$ Hilbert uzayında

$$-y'' + Q(x)y = \lambda y \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1.1}$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ve

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ -y(1) &= \lambda y'(1) \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün yüksek mertebeden düzenli iz formülleri elde edilmiştir. (1.1) diferansiyel ifadesinde yer alan Q(x) [0,1] aralığında tanımlanmış bazı özellikleri sağlayan H uzayında kendine eş çekirdek operatör değerli fonksiyon, λ ise kompleks spektral parametredir.

İz kavramı matrisler teorisinin kavramı olmak üzere, n×n boyutlu $A=(a_{ij})$ matrisinin izi denildiğinde

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$

köşegen elemanların toplamı

$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$

olarak tanımlanır ve

$trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$

şeklinde yazılır. Burada tr=trace=iz' dir. A matrisinin özdeğerlerini $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ ile gösterelim (herbir özdeğer cebirsel katlılığı sayısı kadar yazılır).

Lineer cebirden

$$trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n$$

olduğu bellidir. Yani A matrisinin izi bu matrisin özdeğerlerinin toplamına eşittir. k doğal sayı olmak üzere

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k$$

toplamlarının da (yüksek mertebeden =k. mertebeden izler) A matrisinin elemanları ile ifade edildiği bellidir (Strang,1976) .

Kendine eş diferansiyel operatörlerinin iz formülü (düzenli iz) ilk olarak I.M.Gelfand ve B.M.Levitan (Gelfand ve Levitan, 1953) tarafından incelenmiştir. Sözü edilen bu çalışmada $L_2\,[\,0, \pi\,]$ uzayında

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad\qquad 0 \le x \le \pi$$

Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan L operatörü ele alınmıştır.

Burada q(x) $[\,0, \pi\,]$ aralığında ikinci türevi sürekli, reel değerli fonksiyondur. L operatörünün spektrumu sadece

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

öz değerlerinden ibaret olmakla $n \to \infty$ iken

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimtotik ifadeye sahiptir. Burada $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(t)dt$ dir. Matrislerde olduğu gibi L operatörünün izi doğal olarak

$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \ldots$

şeklinde tanımlanmalıdır . Ancak λ_n – nin asimtotik ifadesinden görüldüğü gibi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

serisi ıraksaktır. Eğer $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ yerine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - c_0\right)$$

serisini alırsak

$$\lambda_n - n^2 - c_0 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik ifadesinden görüldüğü gibi bu seri yakınsaktır. Bu seriye L operatörünün düzenli izi denir. Bir başka deyişle λ_n' nin asimtotik ifadesinden seriyi ıraksak yapan toplamları çıkarmakla elde edilen yakınsak seriye L operatörünün düzenli izi denir.

L operatörünün düzenli izi yukarıda bahsettiğimiz gibi I. M. Gelfand ve B.M..Levitan tarafından bulunmuştur. Elde edilen formül

$$trL = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n - c_0 - n^2\right) = \frac{q(0) + q(\pi)}{4}$$

şeklindedir.

Sonraları ise I. M. Gelfand (Gelfand,1956) ve L.A. Dikiy (Dikiy,1958) tarafından Sturm-Liouville operatörünün yüksek mertebeden (k. mertebeden)

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \lambda_n^k$$

izleri hesaplanmıştır. Burada $\sum'$ sembolu λ_n^k sayılarından bu serinin yakınsaklığını sağlayan terimlerin çıkarıldığını gösterir.

Bilindiği gibi iz formüllerinin incelenmesi matematiğin iç problemi olmanın yanı sıra, bu formüller diferansiyel denklemlerin spektral analizinin ters problemlerinde, yüksek iz formülleri ise öz değerlerin yaklaşık bulunmasında kullanılabilir. (Dikiy,1957).

Adı geçen yazarların ardından çeşitli diferansiyel operatörlerin iz formüllerinin bulunması ile Gasımov (1963), Hüseyinov ve Levitan (1978), Kostiyuçenko (1968), Lidskiy ve Sadovniçiy (1967) v.s. gibi matematikçiler uğraşmışlardır. Bu konu ile ilgili çok sayıda makalelerin listesi Levitan ve Sargsyanın kitabında (1991) ve (Fulton ve Pruesses, 1994) çalışmasında verilmiştir.

Gelfand ve Levitan'nın adı geçen çalışmasından yararlanarak ilk olarak Faddeev (1957), Faddeev ve Buslayev (1960) sürekli spektruma sahip Sturm-Liouville operatörünün yüksek mertebeden düzenli iz formüllerini elde etmişlerdir.

Karmaşık spektruma sahip soyut kendine eş operatörlerin düzenli iz formülleri ilk olarak Krein (1953) tarafından incelenmiştir. Krein bu çalışmasında Lifşitsin (1952) kuantum istatistiği ve kristal teorisinde fiziksel teorilerden yararlanarak elde ettiği formülde matematiksel olarak kanıtlamıştır. Sonsuz aralıkta verilmiş sürekli spektruma sahip sınırlı kendine eş operatör katsayılı Sturm-Liouville probleminin 1. mertebeden düzenli iz formülleri ise Adıgüzelov'un (1976) çalışmalarında ele alınmışlardır. Adıgüzelov'un elde ettiği formülü (1976) ifade edelim. L_1 ve L_2 sırasıyla

$L_2([0,\infty), H)$ uzayında

$$-y'' + Q_1(x)y \quad , \qquad 0 \le x < \infty$$

ve

$$-y'' + Q_2(x)y \quad , \qquad 0 \le x < \infty$$

diferansiyel ifadeleri ve

y(0)=0

aynı sınır koşulu ile oluşturulan operatörler olsun . Burada $Q_j(x)$ (j=1,2) operatörleri x'in [0, ∞) dan alınmış her bir değerinde H'da kendine eş çekirdek operatörü olmak üzere bazı belli koşulları sağladığı varsayılır. Sözü edilen çalışmada L_1 ve L_2 operatörlerinin farkının izi Faddeev'in tanımından (1957) yararlanarak

$$tr(L_1 - L_2) = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{R} \lambda \, d \, tr\left(E_\lambda^{(1)} - E_\lambda^{(2)}\right)$$

formülü ile tanımlanmış

ve

$$tr(L_1 - L_2) = -\frac{1}{4} tr[\, Q_1(0) - Q_2(0)]$$

iz formülü ispatlanmıştır. $tr(L_1 - L_2)$ nin ifadesinde yer alan $E_\lambda^{(1)}$ *ve* $E_\lambda^{(2)}$ operatör-fonksiyonları sırasıyla L_1 ve L_2 operatörlerini için birimin açılımıdır.

L_1 ve L_2 operatörleri farkının k. düzenli iz formülü Bayramoğlu'nun (1986) çalışmasında gösterilmiştir. Sonlu aralıkta verilmiş kendine eş sınırlı operatör katsayılı Sturm-Liouville diferansiyel denklemin düzenli iz formülü Halilova (1976) tarafından incelenmiştir. Sıfırda tekilliğe sahip sınırlı operatör katsayılı

$$-y'' + \frac{\gamma^2 - 1/4}{x^2} y + Q(x)y \quad , \quad 0 < x \le 1 \quad , \qquad \gamma \ge \frac{1}{2} \quad \text{keyfi sabit sayıdır}$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Sturm-Liouville sınır değer probleminin düzenli iz formülü Bayramoğlu ve Adıgüzelov'un (1996) çalışmasında bulunmuştur.

Bu çalışmada elde edilen formül

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-K_m^2\right)-\int_0^1 trQ(x)dx\right]=\frac{2\gamma+1}{4}\int_0^1 trQ(x)dx-\frac{2\gamma trQ(0)+trQ(1)}{4}$$

şeklindedir.

Burada $\{\lambda_{mn}\}$ sayıları L operatörünün öz değerleri K_m $(0 < K_1 < K_2 < \ldots)$ sayıları ise Bessel fonksiyonu $J_\gamma(x)$ 'in sıfırlarıdır. Belirtmemiz gerekir ki $\nu=1/2$ değerinde ifade ettiğimiz son formülden Halilovanın (1976) bulduğu formül elde edilir.

Sınırsız operatör katsayılı Sturm-Liouville operatörünün düzenli izi ilk olarak Maksudov, Bayramoğlu ve Adıgüzelov'un (1984) çalışmasında incelenmiştir. Sözü edilen operatör için yüksek iz formülleri ise Bayramoğlu , Taşçı ve İsmailov (1997) çalışmasında bulunmuştur.

Saf ayrık spektruma sahip soyut operatörler için düzenli iz formülleri Sadovniçiyin (1984) çalışmasında yer almıştır. Bu doğrultuda son çalışmalardan Dubrovski'nin (1996) çalışmasını ve Bakşi' nin doktora tezini gösterelim (1999) .

Bizim ele aldığımız sınır koşulunda spektral parametre bulunan sonlu aralıkta verilmiş sınır değer probleminin 1.düzenli izi diğer sınır koşulları altında Adıgüzelov ve Bayramov'un (1996) çalışmasında incelenmiştir.

1.1 GENEL BİLGİLER

H ile ayrılabilir Hilbert uzayını, B(H) ile bu uzayda dönüşüm yapan lineer sınırlı operatörlerin Banach uzayını gösterelim. H'da iç çarpımı (. , .) sembolü , normu ise $\|\ .\ \|$ sembolü ile gösterelim. [a , b] aralığında tanımlanmış değerleri H'ya (B(H) ya) ait fonksiyona vektör fonksiyon (operatör fonksiyon)denir. Eğer $x_0 \in [a,b]$ iken

$$\lim_{h\to 0}\|f(x_0+h)-f(x_0)\|=0$$

ise o zaman f(x) vektör fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right\|=0$$

olacak şekilde $f'(x_0)\in H$ vektörü varsa o zaman f(x) vektör fonksiyonu x_0 noktasında kuvvetli türeve sahiptir denir ve türevi $f'(x_0)$ ile gösterilir. Benzer şekilde

$$f:[\,a\,,b\,]\to B(H)$$

fonksiyonu için de süreklilik ve türev kavramları verilir. $f:[\,a\,,b\,]\to H$ olmak üzere $\forall g\in H$ için

(f(x), g)

skaler fonksiyonu sürekli (türeve sahip) ise f(x)' e zayıf sürekli (zayıf türeve sahip) fonksiyon denir.

$$f:[\,a\,,b\,]\to B(H)$$

olmak üzere $\forall g\in H$ için

$$(f(x),g)' = (\varphi(x),g)$$

olacak şekilde

$$\varphi : [a,b] \to B(H)$$

operatör fonksiyonu varsa o zaman f operatör fonksiyonunun zayıf türevi φ dir denir. Yüksek mertebeden türev kavramı indüktif olarak tanımlanır (Hille ve Phillips,1957).

T : G kompleks düzlemin herhangi bölgesi ve f: G→B(H) olan operatör fonksiyon olsun. Eğer f(z) operatör fonksiyonu G-nin her bir noktasında türeve sahip ise o zaman bu fonksiyona <u>operatör değerli analitik fonksiyon</u> denir. z_0 noktasında analitik-operatör fonksiyon denildiğinde merkezi z_0 da yarıçapı herhangi ε>0 sayısı olan $|z - z_0| < \varepsilon$ açık dairesinde analitik fonksiyon anlaşılır. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde olduğu gibi $|z - z_0| < \varepsilon$ çemberinde analitik T(z) operatör-fonksiyonu $T_i \in B(H)$ olmak üzere B(H)' ın normuna göre yakınsak $\sum_{i=1}^{\infty} T_i(z - z_i)^i$ serisinin toplamı şeklinde gösterilir (Kato,1980) .

H'da dönüşüm yapan T lineer operatörünün tanım kümesini D(T) ile gösterelim ve D(T) nin H'da yoğun olduğunu varsayalım
Eğer D(T) ye ait tüm x vektörleri (elemanları) için

$$(Tx , y)=(x , y^*)$$

eşitliğini sağlayan $y, y^* \in H$ çifti varsa o zaman y^* elemanı y ile tek türlü tanımlanır. Böylece sözü geçen eşitliği sağlayan y elemanına y^* karşılık getirilmiş olur. Bu karşı getirme bir operatör tanımlar ki buna <u>T'nin eşleniği</u> denir ve T^* ile gösterilir. Böylece

$$(Tx , y)=(x , y^*)$$

eşitliği

$$(Tx , y)=(x , T^*y)$$

şeklinde yazılır. T^* 'nin lineer operatör olduğu açıktır. Eğer

$T = T^*$

ise o zaman T'ye kendine eş operatör denir. Bilindiği gibi kendine eş operatörün spektrumu reel eksene aittir.

$T = T^*$

olsun. Eğer

$(Tx, x) \geq \alpha(x, x) \qquad (Tx, x) \leq \beta(x, x)$

olacak şekilde $\alpha(\beta)$ sayısı varsa T operatörü alttan (üstten) sınırlıdır denir. Eğer $\alpha>0$ ($\beta<0$) ise T ye pozitif (negatif) tanımlı operatör denir. Eğer $(Tx, x) \geq 0$ $((Tx, x) \leq 0)$ ise T operatörüne non-negatif (non- pozitif) operatör denir. Non-negatif (pozitif) T operatörü sembolik olarak
$T \geq 0$ $(T \leq 0)$ şeklinde yazılır. T bütün H'da tanımlanmış kompakt (tam sürekli) operatör ise o zaman T^*T operatörü non-negatif kendine eş tam sürekli operatördür (Kato,1980). T^*T nin öz değerlerini

$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \ldots \geq s_n^2 \geq \ldots$

ile gösterelim. $s_k > 0$ (k= 1,2, . . .) sayılarına T operatörünün singuler veya s-sayıları denir (Gokhberg ve Krein,1969). $p \geq 1$ olmak üzere s-sayıları

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p < \infty$$

koşulunu sağlayan kompakt operatörler kümesi ile O(sıfır) operatörünün birleşimini σ_p ile gösterelim. σ_p $(p \geq 1)$ ye ait operatörler kümesi $\|T\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^k \right)^{1/p}$ normuna göre bir Banach uzayı oluşturduğu bellidir. P=2 halinde s_p 'ye ait her bir operatöre Hilbert-Schmidt operatörü , p=1 halinde ise çekirdek operatörü denir (Kato,1980). Eğer $T = T^* \geq 0$ ise o zaman T kompakt operatörünün s-sayıları bu operatörün sıfırdan farklı öz değerinden ibaret olur. Bu tez çalışmasında kullanacağımız aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

Teorem 1.1 (Gokhberg ve Krein,1969): $S \in B(H)$, $T \in \sigma_1$ olsun. Bu takdirde

$$S\,T \in \sigma_1 \ , \quad T\,S \in \sigma_1 \qquad \text{dir.}$$

ve

$$\| ST \|_1 \leq \| S \| . \| T \|_1 \quad , \quad \| TS \|_1 \leq \| T \| . \| S \|_1$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 1.2 (Gokhberg ve Krein,1969) **:** Eğer $T \in \sigma_1$ ve $\{e_n\}$ H'nin keyfi ortonormal bazı ise o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Te_n , e_n)$$

serisi mutlak yakınsaktır ve serinin toplamı $\{e_n\}$ bazının seçilmesinden bağımsızdır. Buradaki

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Te_n , e_n)$$

sayısına T operatörünün matris izi denir ve sembolik olarak

$$trT = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n , e_n)$$

şeklinde yazılır. Eğer $T=T^* \geq 0$ ise o zaman $\{e_n\}$ bazı olarak T operatörünün

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$ öz değerlerine karşılık gelen ortonormalize edilmiş olan öz vektörlerini alırsak tr$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ olacaktır (matrisin izinin benzeri).

Hatırlatalım ki, kendine eş operatörün esas spektrumu denildiğinde bu operatörün izole edilmemiş spektrum noktaları ile spektrumun izole edilmiş sonsuz katlı öz değerler kümesinin birleşimi anlaşılır (Weidman,1980) . Çalışmamızda yararlanacağımız aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 1.3 (Birman ve Solomyak,1987): Eğer $A=A^*$, $B=B^*$ operatörlerinin her ikisinin rezolvent kümesine ait bir regular ζ noktasında rezolventler farkı

$$C = (A - \zeta I)^{-1} - (B - \zeta I)^{-1}$$

kompakt ise o zaman A ile B nin esas spektrumu çakışır.

H_1 ve H_2 soyut Hilbert uzayları olsun. $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ keyfi elemanlar olmak üzere (x_1, x_2) çiftlerini oluşturalım. Böyle çiftler kümesine H_1 ile H_2 nin kartezyen çarpımı denir ve $H_1 \times H_2$ ile gösterilir.

$$(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2 \quad , \quad (x_1', x_2') \in H_1 \times H_2$$

elemanlarının toplamı

$$(x_1', x_2') + (x_1, x_2) = (x_1' + x_1, x_2' + x_2)$$

şeklinde (x_1, x_2) elemanı ile α sayısının çarpımını

$$\alpha (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

şeklinde tanımlarsak $H_1 \times H_2$ kümesi bir lineer uzay oluşturur. Eğer bu uzayın keyfi elemanı

$$(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2 \quad , \quad (x_1', x_2') \in H_1 \times H_2$$

lerin iç çarpımını

$$((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = (x_1, x_1')_{H_1} + (x_2, x_2')_{H_2}$$

formülü ile tanımlarsak $H_1 \times H_2$ lineer uzayı bu iç çarpımı bir Hilbert uzayı oluşturur. Böyle tanımlanmış Hilbert uzayı

$H_1 \oplus H_2$

sembolu ile gösteriliyor. Elde edilen

$H = H_1 \oplus H_2$

Hilbert uzayına H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarının dik toplamı denir. Bilindiği gibi, eğer biz

$(x_1, 0)$ ve $(0, x_2)$, $x_j \in H_j$ (i=1,2)

elemanlarını sırası ile x_1 ve x_2 elemanları ile özdeşleştirirsek H_1 ve H_2 uzayları H'nin alt uzayları olacaktır. Bu tez çalışmasında işimize yarayan uzay, H_1 ayrılabilir, C ise kompleks sayılar uzayı olmak üzere

$H = H_1 \oplus C$

uzayı olacaktır.

2. PROBLEMİN ORTAYA KONULMASI VE SPEKTRUMUN İNCELENMESİ:

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun $H_1 = L_2$ ([0.1], H) ile [0,1] aralığında tanımlanmış değerleri H' e ait Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_0^1 \|y(x)\|^2 \, dx < \infty$$

(Burada $\|..\|$, H uzayında normu ifade eder.) koşulunu sağlayan y(x), fonksiyonlar kümesini H_1 ile gösterelim. H_1'e ait iki y(x) ve z(x) fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(y(x), z(x))_{H_1} = \int_0^1 (y(x), z(x)) \, dx$$

(Burada (. , .) H' da iç çarpımı gösterir.) formülü ile tanımlarsak H_1 uzayı bir Hilbert uzayı (Hille ve Phillips,1957) oluşturur. Burada özel olarak H=C (C kompleks sayılar uzayını gösterir) ise H_1 adi $L_2[\,0\,,\,1\,]$ uzayı olur.
Bu tez çalışmasında

$L_2([0,1],H) \oplus H$ Hilbert uzayında

$$\ell[y] = -y'' + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ -y(1) &= \lambda y'(1) \end{aligned}\right\} . \tag{2.2}$$

sınır değer probleminin k. düzenli izini bulacağız ($k \ge 2$ doğal sayıdır). Düzenli iz kavramı bazı incelemelerden sonra verilecektir. (2.1) ve (2.2) eşitliklerinde λ kompleks parametredir.

(2.1) de Q(x) H'de dönüşüm yapan operatör fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağladığı varsayılır.

1. Q(x) [0,1] aralığında 2k. zayıf türeve sahip ve $Q^{(\ell)}(x)$ ($\ell = 0,1,\ldots,2k$) operatör fonksiyonunun [0,1] den alınmış her bir değerinde H'da kendine eş çekirdek operatördür.

2. $\|Q(x)\|_{H_1} < \frac{1}{2}\min_{m}(\mu_{m+1} - \mu_m)$, burada $\mu_1 < 0 < \mu_2 < \ldots$

$\cos\sqrt{\mu} = \mu^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{\mu}$ denkleminin kökleridir.

3. H uzayında $\sum_{n=1}^{\infty}\|Q(x)\varphi_n\|_H < \infty$ koşulunu sağlayan $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal baz vardır.

4. $\int_0^1 (Q(x)^{(2k-4)}f, f)_H\, dx = 0 \qquad \forall f \in H$

5. $\|Q^{(\ell)}(x)\|_1$ ($\ell = 0,1,\ldots,2k$) fonksiyonları [0,1] de ölçülebilir ve sınırlıdırlar;

6. $Q^{(2j-1)}(0) = 0$ (j=1,2,…,k-1), $Q^{(j)}(1) = 0$ (j=0,1,…,2k-1)

(1.1) , (1.2) probleminin spektrumunu inceleyelim. Bu amaçla $H_2 = H_1 \oplus H$ uzayında (1.1) , (1.2) problemine karşılık gelen operatörü tanımlayalım. H_2 uzayının elemanları

$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}$, şeklindedir. Burada $F_1(x) \in H_1$, $F_2 \in H$

H_2 uzayında F elemanı ile α sayısı ile çarpımı

$$\alpha\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha F_1(x) \\ \alpha F_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde , iki $\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} \in H_2$, $\begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix} \in H_2$ elemanlarının toplamı ise

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x)+G_1(x) \\ F_2+G_2 \end{pmatrix}$$

formülü ile, iç çarpım ise

$$(F,G)_{H_2} = \left(F_1(x),G_1(x)\right)_{H_1} + \left(F_2,G_2\right)_H$$

eşitliği ile tanımlanır. Böyle tanımlanmış H_2 uzayının kendisi de bir Hilbert uzayı oluşturur. H_2 uzayında tanım kümesi

D(L)= $\{F \in H_2 : F_1(x), F_1'(x)$ [0,1] aralığında mutlak sürekli,

$\ell[F_1] \in H_1, F_1'(0)=0, F_2 = F_1'(1) \}$

olan ve $F \in D(L)$ iken

$$L(F) = \begin{pmatrix} \ell[F_1] \\ -F_1(1) \end{pmatrix}$$

kendine eş L operatörünü tanımlayalım. Bu takdirde (1.1), (1.2) probleminin spektrumu ile L operatörünün spektrumu çakışır. Bundan dolayı biz <u>(2.1), (2.2) probleminin spektrumuna L operatörünün spektrumu ve düzenli izine ise L'nin düzenli izi</u> diyeceğiz. L operatörünün spektrumunu inceleyelim.

L'in spektrumunu incelemek için L'in ifadesinde $Q(x)\equiv 0$ varsayarak elde edilen L_0 operatörünü dikkate alalım. L ile L_0 arasında

$$L = L_0 + \overline{Q}$$

ilişkisi bulunmaktadır. Burada $\overline{Q}$ operatörünün etkisi

$$\bar{Q}F = \begin{pmatrix} Q(x)F_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F \in H_2 \tag{2.3}$$

formülü ile tanımlanır.

$\|\bar{Q}\|_{H_2} = \|Q\|_{H_1}$ olduğu gösterilebilir.

Gerçekten operatörün normunun tanımına göre

$$\|\bar{Q}\|_{H_2} = \sup_{\|F\|_{H_2}=1} \|\bar{Q}F\|_{H_2} = \sup_{\|F_1\|_{H_2}\le 1} \|QF_1\|_{H_1} = \sup_{\|F_1\|_{H_1}=1} \|QF_1\|_{H_1} = \|Q\|_{H_1}$$

L_0 operatörünün spektrumu $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$

$$\cos\sqrt{\mu} = \mu^{\frac{3}{2}} \sin\sqrt{\mu} \tag{2.4}$$

denkleminin $\mu_1 < 0 < \mu_2 < \ldots$ köklerinden ibarettir. Bunu ispatlayalım. $Q(x) \equiv 0$ iken (2.1) , (2.2) sınır değer problemi

$$-y'' = \mu\, y \tag{2.1a}$$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ -y(1) &= \mu y'(1) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

şeklini alır. Bu sınır değer problemi H_2 uzayında simetriktir. Yani yukarıda tanımladığımız L operatörü $Q(x) \equiv 0$ iken simetriktir $Q(x) \equiv 0$ iken L operatörünü L_0 ile gösterelim.

$Y, Z \in D(L_0)$ iken

$$(L_0 Y, Z)_{H_2} = (Y, L_0 Z)_{H_2}$$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir. D(L_0) ' ın tanımına göre

$$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(1) \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(1) \end{pmatrix} \tag{2.2a}$$

şeklindedir.

$$L_0 Y = L_0 \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y''(x) \\ -y(1) \end{pmatrix}$$

$$L_0 Z = L_0 \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z''(x) \\ -z(1) \end{pmatrix} \tag{2.3a}$$

(2.2a) ve (2.3a) den

$$(L_0\ Y\ , Z\ )_{H_2} = (-y'',\ z)_{H_1} + (-y(1), z'(1)) = \int_0^1 (-y'', z)dx \quad + \quad (y(1), z(1)) =$$

$$= (-y', z)_H \Big|_0^1 - \int_0^1 (-y', z')dx + (-y(1), z'(1)) =$$

$$= (-y'(1), z(1)) - (-y'(0), z(0)) - (-y, z')\Big|_0^1 + \int_0^1 (-y, z'')dx \quad + \quad (-y(1), z'(1)) =$$

$$= (-y'(1), z(1)) - (0, z(0)) + (-y(1), z'(1)) + (-y(0), z'(0)) + (-y(1), z'(1))$$

$$+ \int_0^1 (y, -z'')dx = \int_0^1 (y, -z'')dx + (y'(1) - z(1)) = \left(\begin{pmatrix} y \\ y'(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z'' \\ -z(1) \end{pmatrix} \right)_{H_2}$$

$$= (Y, L_0 Z)_{H_2}$$

Böylece

$\forall Y, Z \in D(L_0)$ için

$$(L_0 Y, Z)_{H_2} = (Y, L_0 Z)_{H_2}$$

eşitliği sağlanır ki bu da L_0 operatörünün H_2 uzayında bir simetrik operatör olduğunu gösterir. Şimdi L_0 'ın spektrumunu inceleyelim. Bunun için H ayrılabilir Hilbert uzayında herhangi bir $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal bazını seçelim. Bu bazda $y(x) \in H_1$ elemanı

$$y(x) = y_1(x)\varphi_1 + y_2(x)\varphi_2 + \ldots + y_n(x)\varphi_n + \ldots$$

şeklinde yazılır. Bunu göz önünde bulundurursak H_1 uzayında

$$y'' = \mu y$$

denklemi

$$y_j''(x) = \mu y_j(x) \qquad (2.3b) \quad j = 1,2,\ldots$$

denklemler sistemi şeklinde, (2.2) sınır koşulları ise

$$\left.\begin{aligned} y_j'(0) &= 0 \\ -y_j(1) &= \mu y_j'(1) \end{aligned}\right\} \qquad (2,2a) \quad j = 1,2,\ldots$$

şeklinde yazılır. Basitlik için $y_j(x)$ in indisini yazmayalım. O zaman $(2.1b)$ *ve* $(2,2a)$ Sınır değer problemi bir $y_j(x)$ için $L_2(0,1)$ uzayında adi

$$-y'' = \mu y \qquad (2.1c)$$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ -y(1) &= \mu y'(1) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2b)$$

sınır değer problemi olur. Bu sınır değer probleminin $L_2\ (0,1) \oplus C$ uzayında simetrik olduğunu gösterdik. Daha doğrusu özel olarak H=C ise $H_2 = L_2(0,1) \oplus C$ dir.

Şimdi (2.1c), (2.2b) probleminin öz değerlerini inceleyelim. Bu sınır değer problemi simetrik olduğundan dolayı bunun öz değerleri reel sayılardan ibarettir (Weidman,1980). Bundan dolayı biz $\mu > 0, \mu = 0 \quad ve \quad \mu < 0$ hallerini dikkate alacağız.

<u>**μ > 0 hali :**</u> Bu halde (2.1c) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = A \sin\sqrt{\mu}\, x + B \cos\sqrt{\mu}\, x$$

şeklinde yazılır. Burada A ve B sabit sayılardır. (2.2c) nin birinci koşulundan

$$y'(0) = A\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}0 - B\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu} \ = 0$$

A=0 bulunur.

(2.2c) ün ikinci koşulundan

$$-y(1) = -B\cos\sqrt{\mu} = \mu(B\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu})$$

veya $(B \neq 0$ kabul edilir)

$$\cos\sqrt{\mu} = \mu^{3/2}\sin\sqrt{\mu}$$

((2.2d))

elde edilir. Son denklemin sonsuz sayıda (Fulton,1977) pozitif çözüme sahiptir. Bu çözümleri

$$0 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \ldots$$

ile gösterelim. Bu dizi (2.1c),(2.2b) probleminin pozitif öz değerlerini oluşturur.
Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler

$$\psi_m = \begin{pmatrix} \alpha_m & \cos\sqrt{\mu_m}\,x \\ -\alpha_m & \sqrt{\mu_m}\sin\sqrt{\mu_m} \end{pmatrix} \quad , \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{2.2e}$$

şeklindedir. Burada α_m'ler sıfırdan farklı keyfi sabitlerdir. Bu sabitleri

$$(\psi_m, \psi_m)_{H_2} = 1$$

olacak şekilde seçelim. Sonuncu eşitlikten kolayca

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m}}}, \qquad m = 2,3,\ldots$$

olduğu bulunur. α_m'in bu değerleri ψ_m'in ifadesinde yerine yazalım ve elde edilen vektörü ψ_m^0 ile gösterelim. Böylece bununla biz $\{\mu_m\}_{m=2}^{\infty}$ pozitif öz değerlerine karşılık gelen ortonormal, yani

$$(\psi_m^0, \psi_k^0)_{H_2} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

koşulunu sağlayan, $\{\mu_m^0\}_{m=2}^{\infty}$ vektörler dizisini elde ettik Belirtelim ki , simetrik operatörün farklı (değişik) öz değerlerine karşılık gelen öz vektörlerin ortogonal olduklarını göz önünde bulundurduk.

<u>$\mu = 0$ **hali :**</u> Bu halde (2.1*c*) denklemi

$-y'' = 0$ 'ın genel çözümü

y(x)=A+Bx (A,B keyfi sabitlerdir)

şeklinde olur. (2.2*b*) birinci koşulunda

$y'(0) = B = 0$

ikinci koşulunda

-A=0

elde edilir. Böylece $\mu = 0$ iken $(2.1c), (2.2b)$ problemi sadece $y(x) \equiv 0$ çözümüne sahiptir. Buradan $\mu = 0$ iken bu sınır değer probleminin H_2 uzayında sadece $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şeklinde çözüme sahip olduğu görülür ki, buda $\mu = 0$'ın öz değer olmadığı anlamına gelir.

<u>μ < 0 **hali :**</u> Bu halde $(2.1c)$ denkleminin genel çözümü A,B keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = Ae^{\sqrt{-\mu}x} + Be^{-\sqrt{-\mu}x}$$

şeklinde olur. $(2.2b)$'nin birinci koşulundan

$$y'(0) = A\sqrt{-\mu} - B\sqrt{\mu} = 0$$

yani A=B olduğu, ikinci koşulundan

$$-\left(Ae^{\sqrt{-\mu}} + Ae^{-\sqrt{-\mu}}\right) = \mu\left(A\sqrt{-\mu}e^{\sqrt{-\mu}} - A\sqrt{-\mu}e^{-\sqrt{-\mu}}\right)$$

veya

$$e\sqrt{-\mu}\left(1 + \mu\sqrt{-\mu}\right) = e^{-\sqrt{-\mu}}\left(\mu\sqrt{-\mu} - 1\right)$$

bulunur. $\sqrt{-\mu} = t \quad (t > 0)$ diyelim. O zaman en son denklem

$$e^{t}(1 - t^{3}) = e^{-t}(-t^{3} - 1)$$

şeklinde yazılır. Görüldüğü gibi t=1 bu denklemin çözümü değil. Bundan dolayı bu denklemi

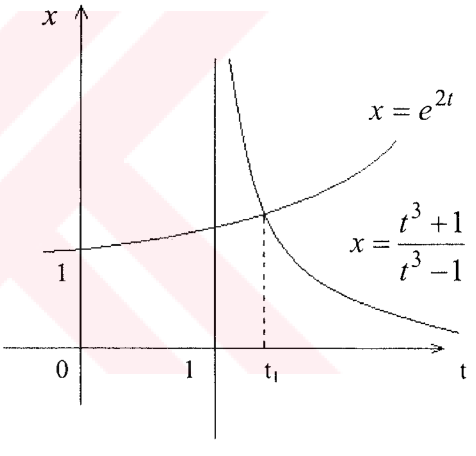
$$e^{2t} = \frac{t^3+1}{t^3-1}$$

şeklinde yazabiliriz. 0<t<1 iken $e^{2t} \geq 1$, $\dfrac{t^3+1}{t^3-1} < 0$ olduğundan

$$e^{2t} = \frac{t^3+1}{t^3-1}$$

denkleminin $(0,1)$ açık aralığına ait kökü yoktur. Bu ise $(2.1b),(2.2c)$ probleminin $(0,1)$ e ait öz değerinin olmadığını gösterir. $1 < t < \infty$ olsun.

$x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$ fonksiyonunun grafiğinden görüldüğü gibi. t=1 doğrusu bu fonksiyonunun asimtotudur. $x = e^{2t}$ fonksiyonunun t > 0 değerlerinde monoton artarak sonsuza gider. Yani e^{2t} ve $\dfrac{t^3+1}{t^3-1}$ fonksiyonlarının grafiği tek noktada kesişir, bu da



$$e^{2t} = \frac{t^3+1}{t^3-1}$$

denkleminin tek çözüme (t > 0) sahip olduğunu gösterir. Bu çözüme t_1 diyelim

$\sqrt{-\mu} = t$ den

$$-\mu_1 = t_1^2 \quad veya \quad -t_1^2 = \mu_1 < 0$$

elde edilir. Buradan $(2.1c),(2.2b)$ sınır değer probleminin tek negatif öz değerine sahip olduğu görülür.

Belirtmek gerekirse μ_1 sayısı da (2.2d) denklemini sağlar. Böylece $(2.1c),(2.2b)$ sınır değer probleminin bütün öz değerleri (2.2d) denkleminin köklerinden ibarettir ve bu kökler $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\mu_1 < 0 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots$$

şeklindedir. μ_1 öz değerine karşılık gelen normalize edilmiş öz vektörü ψ_1 ile gösterelim.

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos\sqrt{\mu_1}\,x \\ -\alpha_1\sqrt{\mu_1}\sin\sqrt{\mu_1} \end{pmatrix}$$

(2.2e) gözönüne alınırsa $(2.1c),(2.2b)$ probleminin $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ öz değerlerine karşılık gelen ortonormal öz vektörler sistemi

$$\psi_m = \begin{pmatrix} \alpha_m \cos\sqrt{\mu_m}\,x \\ -\alpha_m\sqrt{\mu_m}\sin\sqrt{\mu_m} \end{pmatrix}, \quad m = 1,2,\cdots$$

dizisinden ibaretir. $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ ortonormal vektörler sisteminin $H_2 = L_2(0,1)\oplus C$ uzayında bir baz oluşturduğu (Fulton,1977) çalışmasında gösterilmiştir.

$H_2 = L_2([0,1],H)\oplus H = (L_2(0,1)\oplus C)\otimes H$ olduğu bellidir (Weidman,1980).

Burada $\otimes$ sembolu iki Hilbert uzayının tensör çarpımını gösterir (Weidman,1980) . Teorem 3.12 (Weidman,1980) ye göre sırasıyla $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi H , H' Hilbert uzaylarında tam ortonormal sistem oluşturuyorsa $\{\psi_k \otimes \psi'_m\}_{k,m=1}^{\infty}$ elemanlar sistemi $H\otimes H'$ Hilbert uzayında ortonormal baz oluşturur. Buradan $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ H'da herhangi ortonormal baz ise

$$\Psi_{mn}^{0} = \begin{cases} \alpha_m \cos\sqrt{\mu_m}\,\chi\varphi_n \\ -\alpha_m\sqrt{\mu_m}\sin\sqrt{\mu_m}\,\varphi_n \end{cases} \quad , \quad m\,,\, n = 1,2, \ldots \text{ dir.}$$

vektörler sistemi $H_2 = L_2([0,1],H)\oplus H$ uzayında ortonormal baz oluşturur. $\{\psi_{mn}^{0}\}_{n=1}^{\infty}$ vektörler sisteminin L_0 operatörünün μ_m özdeğerine karşılık gelen özvektörleri olduğu açıkça görülür. Bununla H_2'de dönüşüm yapan L_0 operatörünün spektrumunun her birisi sonsuz katlı olmak üzere

$$\mu_1 < 0 < \mu_2 < \ldots$$

öz değerlerinden ibaret olduğu gösterilir ki , bunu da ispatlamak gerekirdi .

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m}}} \quad , \quad m = 1,2, \ldots$$

R_λ ve R_λ^{0} sırası ile L ve L_0 operatörünün rezolventi olsun. Bu takdirde

$$R_\lambda^{0} - R_\lambda \overline{Q} R_\lambda^{0} = R_\lambda \tag{2.5}$$

denklemi sağlanır. Bunu ispatlayalım. Rezolventin tanımına göre

$$R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1} \quad , \quad R_\lambda^{0} = (L_0-\lambda I)^{-1}$$

(Burada I , H_2 de birim operatörüdür) dır. f H_2' nin keyfi elemanı iken

$$(L-\lambda I)u = f \tag{2.5a}$$

denklemi

$$(L_0 + \overline{\mathrm{Q}} - \lambda I)u = f$$

veya

$$(L_0 - \lambda I)u + \overline{\mathrm{Q}}u = f \tag{2.5b}$$

şeklinde yazılabilir. (2.5a) den u=$R_\lambda f$ olduğunu (2.5b) de göz önüne alalım. Bu takdirde (2.5b) denklemi

$$(L_0 - \lambda I)R_\lambda f + \overline{\mathrm{Q}}R_\lambda f = f \tag{2.5c}$$

şeklinde yazılır.(2.5c) denkleminin her iki yanına $R_\lambda{}^0$ operatörünü uygulayalım. Sonuçta

$$R_\lambda f + R_\lambda{}^0 \mathrm{Q} R_\lambda f = R_\lambda{}^0 f \tag{2.5d}$$

olur. (2.5d) Denkleminde f 'in keyfi H_2' ye ait eleman olduğunu göz önüne alırsak

$$R_\lambda + R_\lambda{}^0 \mathrm{Q} R_\lambda = R_\lambda{}^0$$

yani (2.5) denklemi elde edilir.

Eğer

$\lambda \in R \setminus \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\mu_m - \|\mathrm{Q}\|_{H_1}, \mu_m + \|\mathrm{Q}\|_{H_1}\right]\right],$ (burada R- reel ekseni gösterir.)

o zaman

$$\left\|R_\lambda^0\right\| < \|\mathrm{Q}\|_{H_1}^{-1} \tag{2.6a}$$

olur. Bunu ispatlayalım. R_λ^0 'in spektrumu $\{(\mu_m - \lambda)^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ kümesinden ibarettir.

Dolayısıyla

$$\|R_\lambda^0\|_{H_2} = \max_m \{|\lambda - \mu_m|^{-1}\} \tag{2.6b}$$

dir. Eğer

$$\lambda \in R \Big\backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\mu_m - \|Q\|_{H_1}, \mu_m + \|Q\|_{H_1}\right],$$

ise

$$\lambda \notin \left[\left[\mu_m - \|Q\|_{H_1}, \mu_m + \|Q\|_{H_1}\right]\right] \text{ veya } \quad |\lambda - \mu_m| \; \rangle \; \|Q\| \quad (m=1,2,\ldots)$$

olur. Buna göre

$$\max_m \left\{ |\lambda - \mu_m|^{-1} \right\} < \|Q\|_{H_1}^{-1} \tag{2.6c}$$

olur. (2.6b) ve (2.6c) den

$$\|R_\lambda^0\| \; \langle \; \|Q\|_{H_1}^{-1}$$

bulunur. Bununla (2.6a) ispatlandı

Böylece H_2 de dönüşüm yapan sınırlı lineer operatörler uzayı $B(H_2)$ de

$$A(B) = R_\lambda^0 - B\overline{Q}R_\lambda^0$$

operatörü büzen operatördür. Bundan dolayı

$$A(R_\lambda) = R_\lambda$$

yani (2.5) denkleminin tek $R_\lambda \in B(H_2)$ çözümü vardır. Buna göre

$$\lambda \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m \equiv \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\mu_m - \|Q\|_{H_1}, \mu_m + \|Q\|_{H_1}\right]$$

koşulunu sağlayan λ sayısı L operatörünün regular noktasıdır. Böylece kendine eş L operatörünün spektrumu ikişer ikişer ayrık $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ aralıklarının toplamına aittir.

$$\sigma(L) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m \quad , \quad \text{(burada } \sigma(L) \text{ L operatörünün spektrumunu gösterir.)}$$

Aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 1.1 : Eğer Q(x) operatör fonksiyonu 3. koşulunu sağlıyorsa ve $\lambda \in \rho(L_0)$ ise o zaman $\bar{Q}R_\lambda^0$ H_2 uzayında çekirdek operatörüdür, yani $\bar{Q}R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_2)$.

Ispat: (Fulton,1977) çalışmasının sonuçlarının birinde L_0 operatörünün öz elemanlarının H_2 uzayında ortonormal baz oluşturduğu bellidir. Bundan dolayı lemmayı ispatlamak için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \bar{Q}\, R_\lambda^0\, \Psi_{mn}^0 \right\|_{H_2}$$

serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir (Gokhberg ve Krein 1969).

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \bar{Q}\, R_\lambda^0\, \Psi_{mn}^0 \right\|_{H_2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_m - 1|^{-1} \left\| \bar{Q}\, \Psi_{mn}^0 \right\|_{H_2} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_m - 1|^{-1} \left(\int_0^1 \left(\alpha_m \cos\sqrt{\mu_m}\, x\right)^2 \|Q(x)\varphi_n\|_H^2 \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

x'in [0.1] aralığına ait bütün değerlerinde

$$\alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m}\, x = \frac{2\cos^2\sqrt{\mu_m}\, x}{1 + 3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m}} \ \langle\ 2 \tag{2.7}$$

olduğu açıkça görülür.

Buradan ve (2.6) dan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \bar{Q}\, R_\lambda^0\, \Psi_{mn}^0 \right\|_{H_2} \le \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_m - \lambda|^{-1} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} \tag{2.8}$$

bulunur. $m \to \infty$ iken

$$\sqrt{\mu_m} = (m-1)\pi + 0\left(\frac{1}{m^2}\right) \tag{2.9}$$

olduğu bellidir (Fulton,1977)

Buradan ve (2.8) eşitsizliğinden

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \bar{Q}\, R_\lambda^0\, \Psi_{mn}^0 \right\|_{H_2} \le C_\lambda \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \| Q(x)\varphi_m \|_{H_1}$$

elde edilir. Burada C_λ sabit sayı almakla sadece λ 'ya bağlıdır. Lemmanın

$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty$ koşulu ve son eşitsizlikten

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\| \overline{Q}\, R_{\lambda}^{0}\, \Psi_{mn}^{0} \right\|_{H_2} < \infty$$

olduğu görülür. Bununla lemma ispatlandı.

L operatörünün Ω_m aralığına ait spektrumunu inceleyelim.

Eğer λ sayısı L ve L_0 operatörlerinin regular noktası ise Lemma 1.1 ve (2.5) formülüne göre $R_\lambda - R_\lambda^0$ farkı H_2 uzayında çekirdek operatörüdür, yani $R_\lambda - R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_2)$. Bu takdirde teorem 3'e göre L_0 ve L operatörlerinin spektrumunun esas kısmı çakışır. L_0 operatörünün spektrumu sürekli olduğundan dolayı L operatörünün sürekli spektrumu $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ kümesinden ibaret olacak. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 1.1: Eğer Q(x) operatör-fonksiyonu 2. ve 3. koşulları sağlıyorsa o zaman

a) L operatörünün $\Omega_m = \left[\mu_m - \|Q\|_{H_1}, \mu_m + \|Q\|_{H_2}\right.$ aralığına ait μ_m den farklı spektrum noktası L'nin izole edilmiş sonlu katlı öz değeridir.

b) μ_m noktası L operatörünün sonlu veya sonsuz katlı öz değeridir.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{mn} = \mu_m$ formülü doğrudur. Burada $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin elemanları L operatörünün Ω_m aralığına ait öz değerleridir.

Bu teoremden $\rho(L) \subset \rho(L_0)$ olduğu açık görülür. H_2 uzayında dönüşüm yapan L_0 operatörünün μ_m değerine karşılık gelen öz alt uzayına izdüşüm operatörünü P_m, aynı uzayda dönüşüm yapan L_0 operatörünün λ_{mn} öz değerine karşılık gelen öz alt uzayına izdüşüm operatörünü ise P_{mn} ile gösterelim.Bu takdirde L ve L_0 operatörleri

$$L_0 F = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m P_m F \quad , \quad F \in D(L_0)$$

$$L\ F = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} P_{mn} F \quad , \quad F \in D(L)$$

şeklinde gösterilir. Sembolik olarak bu eşitlikler

$$L_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m P_m \tag{2.9a}$$

$$L = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} P_m \tag{2.9b}$$

şeklinde yazılır.

$\lambda \in \rho(L)$ ise (2.9a) ve (2.9b) ifadelerinden

$$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m}{\mu_{m-\lambda}} \tag{2.10a}$$

$$R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\lambda_{mn-\lambda}} \tag{2.10b}$$

olur.

3. REZOLVENT İLE İLİŞKİLİ BAZI FORMÜLLER

$\{\mu_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ L operatörünün $\{\lambda_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortanormal öz elemanları olsun. Aşağıdaki sembolleri kabul edelim.

$$\Gamma_p = \left\{\lambda : \left|\lambda - \mu_p\right| = 2^{-1} \min_m \left(\mu_{m+1} - \mu_m\right)\right\},$$

$$B_{mn}^0 = (\ .\ ,\Psi_{mn}^0)\Psi_{mn}^0 \quad ,B_{mn} = (\ .\ ,\Psi_{mn})\Psi_{mn},$$

$$L_{om}^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m^r \quad B_{mn}^0 , \qquad L_m^{(r)} = \sum_{\substack{n=1 \\ \lambda_{mn} \neq 0}}^{\infty} \lambda_{mn}^r \quad B_{mn} \qquad (r=1,-1)$$

B_{mn} sembolleri ile P_m izdüşüm operatörü

$$P_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^0 \tag{3.1a}$$

P_{mn} operatörü ise

$$P_{mn} = B_{mn} \tag{3.1b}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeleri sırasıyla $(2.10a)$ ve $(2.10b)$ de yazarsak

$$R_\lambda^0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^0}{\mu_{m-\lambda}} \tag{3.1c}$$

$$R_\lambda = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\mu_{m-\lambda}} \tag{3.1d}$$

olur.

Teorem 2.1: Q(x) operatör- fonksiyonu 2. ve 3. koşulları sağlıyorsa, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{pn}-\mu_p\right)\ , \quad p=1,2,...$$

serileri mutlak yakınsaktırlar.

Bu teoremi ispatlamak için önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Lemma 2.1: Eğer Q(x) operatör-fonksiyonu 2. ve 3. koşulları sağlıyorsa o zaman $R_\lambda - R_\lambda^0$ operatörü ρ(L) bölgesinde $\sigma_1(H_2)$ nin normuna göre analitiktir.

İspat: Önce $\overline{Q}R_\lambda^0$ operatör- fonksiyonunun ρ(L) bölgesinde $\sigma_1(H_2)$ nin normu anlamında analitik olduğunu gösterelim.

Teorem 1.1 e göre $\rho(L)\subset\rho(L_0)$ olduğunu dikkate alarak ve lemma 1.1' i kullanarak yazabiliriz.

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\|\frac{\overline{Q}R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-\overline{Q}R_\lambda^0}{\Delta\lambda}-\overline{Q}(R_\lambda^0)^2\right\|_{\sigma_1(H_2)}=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\|\frac{\overline{Q}(R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda)}{\Delta\lambda}-\overline{Q}(R_\lambda^0)^2\right\|_{\sigma(H_2)}$$

Burada Hilbert özdeşliğine göre

$$R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0=\Delta\lambda\quad R_{\lambda+\Delta\lambda}^0\,R_\lambda^0$$

olduğunu göz önüne alırsak yazabiliriz:

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\|\frac{\overline{Q}R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-\overline{Q}R_\lambda^0}{\Delta\lambda}-\overline{Q}(R_\lambda^0)^2\right\|_{\sigma_1(H_2)}=$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \left\| \overline{Q} R^0_{\lambda+\Delta\lambda} R^0_\lambda - \overline{Q}(R^0_\lambda)^2 \right\|_{\sigma(H_2)}$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \left\| \overline{Q} R^0_\lambda R^0_{\lambda+\Delta\lambda} - \overline{Q} R^0_\lambda R^0_\lambda \right\|_{\sigma_1(H_2)} \leq \lim_{\Delta\lambda \to 0} \left\| \overline{Q} R^0_\lambda (R^0_{\lambda+\Delta\lambda} - R^0_\lambda) \right\|_{\sigma(H_2)} \leq$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \left\| \overline{Q} R^0_\lambda \right\|_{\sigma_1(H_2)} \left\| R^0_{\lambda+\Delta\lambda} - R^0_\lambda \right\|_{\sigma_2(H_2)} = \left\| \overline{Q} R^0_\lambda \right\|_{\sigma_1(H_2)} \lim_{\Delta\lambda \to 0} \left\| (R^0_{\lambda+\Delta\lambda} - R^0_\lambda) \right\|_{H_2} = 0.$$

Biz en son eşitlikte R^0_λ operatör-fonksiyonunun λ nın sürekli fonksiyonu olduğunu dikkate aldık. Buradan $\overline{Q} R^0_\lambda$ operatör-fonksiyonunun $\sigma_1(H_2)$ uzayında analitik olduğu görülür.

R_λ operatör- fonksiyonu $\rho(L)$ bölgesinde H_2 nin normu anlamında analitik $\overline{Q} R^0_\lambda$ ise $\sigma_1(H_2)$'nin normu anlamında analitik olduğundan dolayı $R_\lambda \overline{Q} R^0_\lambda$ operatörü ve buna göre $R_\lambda - R^0_\lambda = -R_\lambda \overline{Q} R^0_\lambda$ operatör-fonksiyonuda gösterilen bölgede $\sigma_1(H_2)$ normu anlamında analitik olacaktır.

Lemma ispatlandı.

Şimdi teorem 2.1 'in ispatına dönelim.

(3.1c) ve (3.1d) deki

$$R_\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn} - \lambda}$$

ve

$$R_\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^0_{mn}}{\mu_m - \lambda}$$

formüllerini göz önüne alırsak

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn}-\lambda} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^0}{\mu_m - \lambda} \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir. L_0 ve L operatörlerinin sırasıyla μ_p ve $\{\lambda_{pn}\}_{n=1}^{\infty}$ öz değerleri hariç geri kalan bütün öz değerleri Γ_p çemberi dışında yerleştiğinden dolayı (3.1) formülünden yazabiliriz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \lambda(R_\lambda - R_\lambda^0)d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{pn}^0 \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda-\mu_p} - B_{pn}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda - \lambda_{pn}}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_p B_{pn}^0 - \lambda_{pn}B_{pn}\right) = L_{op}^{(1)} - L_p^{(1)} \tag{3.2}$$

Biz burada $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda-\mu_p} = \mu_p$ olduğunu dikkate aldık.

Lemma 2.1'i kullanırsak (3.2) den

$$L_p^{(1)} - L_{op}^{(1)} \in \sigma_1(H_2), \quad p = 1,2,...$$

olduğu elde edilir.

Benzer şekilde

$$L_p^{(-1)} - L_{op}^{(-1)} \in \sigma_1(H_2), \quad p = 1,2,...$$

olduğu gösterilir.

L operatörünün negatif öz değerleri olsa olsa sonlu sayıda olduğundan ve geri kalan öz değerlerin hepsi pozitif olduğundan teoremi ispatlamak için

$$\sum_{\substack{n \\ \lambda_{np} > \mu}} \left|\lambda_{np} - \mu_p\right|, \quad p = 1,2,... \tag{3.3}$$

serilerinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Bundan dolayı, yani negatif öz değerlerinin sonlu sayıda olduğundan, ileride

$$\lambda_{pn} > 0, \quad p,n = 1,2,...$$

olduğunu varsayacağız.

$L_{op}^{(r)}$ operatörünün spektrumunun 0 ve μ_p^2 lerden ibaret olduğunu dikkate alırsak yazabiliriz:

$$\mu_p^2 \geq \left(L_{op}^{(r)}\psi_{pn}, \psi_{pn}\right)_{H_2}, \lambda_{pn}^r = \left(L_p^{(r)}\psi_{pn}, \psi_{pn}\right)_{H_2}$$

$$\sum_{\lambda_{pn}^2 > \mu_p^2} \left(\lambda_{pn}^r - \mu_p^r\right) \leq \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^2 > \mu_p^2}} \left(\left(L_p^{(r)} - L_{op}^{(r)}\right)\psi_{pn}, \psi_{pn}\right)_{H_2} \leq \tag{3.4}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\left(L_p^{(r)} - L_{op}^{(r)} \right)\psi_{mn}, \psi_{mn}\right)_{H_2} \right| \leq$$

$$\leq \left\| L_p^{(r)} - L_{op}^{(r)} \right\|_{\sigma_1(H_2)}$$

(3.3) ve (3.4) formüllerinden aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn} > \mu_p}} \left(\lambda_{pn} - \mu_p\right) < \infty \tag{3.5}$$

$$\sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn} < \mu_p}} \left(\mu_p - \lambda_{pn}\right) \leq const \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn} < \mu_p}} \left(\mu_p - \lambda_{pn}\right)\mu_p^{-1}\lambda_{pn}^{-1}$$

$$= const \sum_{\substack{n \\ \lambda_{pn}^{-1} > \mu_p^{-1}}} \left(\lambda_{pn}^{-1} - \mu_p^{-1}\right) < \infty \tag{3.6}$$

(3.5) ve (3.6) dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_{pn}-\mu_p\right| < \infty \quad , p=1,2,... \tag{3.7}$$

eşitsizlikleri alınır. Biz bunu ispatlamak istiyorduk. Yani teorem 2.1 ispatlandı.

$\lambda \in \rho(L)$ *iken* $R_\lambda - R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_2)$ olduğundan (3.1) formülü ve teorem 2.1 den

$$tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{mn}-\lambda} - \frac{1}{\mu_m-\lambda}\right) \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir (burada tr=trace=iz ifade eder).

Bu eşitliğin her iki yanını $\frac{\lambda^k}{2\pi i}$ ile çarpalım ve $|\lambda| = b_p = \frac{1}{2}\left(\mu_{p+1}+\mu_p\right)$ çemberi üzerine integral alalım. Bu takdirde

(3.7) ve (3.8) ifadelerinden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k\, tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) d\lambda = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_m^k - \lambda_{mn}^k\right) \tag{3.9}$$

bulunur.

$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda \overline{Q} R_\lambda^0$ formülünde R_λ yerine ardışık olarak R_λ nın sağ taraftaki ifadesini birkaç kez yazmakla

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^{N}(-1)^j R_\lambda^0(\overline{Q}R_\lambda^0)^j + (-1)^{N+1}R_\lambda(\overline{Q}R_\lambda^0)^{N+1} \tag{3.10}$$

olduğunu elde ederiz. Burada N keyfi doğal sayıdır.

$$R_\lambda^0(\overline{Q}R_\lambda^0)^j \quad (j=1,2,\ldots) \quad R_\lambda(\overline{Q}R_\lambda^0)^{N+1}$$

operatörlerinin H_2 uzayında çekirdek operatörler olduklarını dikkate alırsak (3.9) ve (3.10) formüllerinden

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_m^k - \lambda_{mn}^k\right) = \sum_{J=1}^{N}\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^k tr\left[R_\lambda^0\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda \; + \tag{3.11a}$$

$$+\frac{(-1)^{N+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^k tr\left[R_\lambda\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^{N+1}\right]d\lambda$$

elde edilir. M_p^j sembolü ile

$$M_p^j = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^k\, tr\left[R_\lambda^0\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j d\lambda\right] \tag{3.11}$$

işaret edelim. Bu sembolle (3.11a) eşitliği

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}^k - \mu_m^k\right) = \sum_{J=1}^{N}M_p^j + \frac{(-1)^N}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^k tr\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right]d\lambda \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır.

Aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

<u>**Lemma 2.2:**</u> M_p^j için

$$M_p^j = \frac{(-1)^j k}{2\pi ij}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda^{k-1}\, tr\left[\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j d\lambda\right] \tag{3.13}$$

formülü doğrudur.

İspat: $\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)$ operatör- fonksiyonunun $\sigma_1(H_2)$ uzayının normu anlamında

$$\mu_p + \|Q\|_{H_1} \langle\ |\lambda|\ \langle\ \mu_{p+1} - \|Q\|_{H_1}$$

halkasında analitik olduğundan

$$tr\left[\ R_\lambda^0 \left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j \right] = tr\left[\ \left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^{j-1}\overline{Q}\left(R_\lambda^0\right)^2\ \right] = \ tr\left[\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^{j-1}\frac{d}{d\lambda}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)\ \right]$$

eşitlikleri sağlanır. Diğer yandan

$$tr\frac{d}{dt}\left[\left(\ \overline{Q}R_\lambda^0\ \right)^j\right] = j\ tr\left[\left(QR_\lambda^0\right)^{j-1}\ \frac{d}{d\lambda}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)\right]$$

olduğu kolayca görülür.

Bundan dolayı

$$tr\left[R_\lambda^0\left(\ \overline{Q}R_\lambda^0\ \right)^j\right] = \frac{1}{j}\quad tr\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j\right]\quad .$$

(3.11) formülünde $tr\left[R_\lambda^0\left(\ \overline{Q}R_\lambda^0\ \right)^j\right]$ yerine son ifadesini yazarsak.

$$M_p^j = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\int\limits_{|\lambda|=b_p}\lambda^k tr\left[\frac{d}{dt}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\ tr\int\limits_{|\lambda|=b_p}\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^k\ \left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j\right) - k\ \lambda^{k-1}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda =$$

$$=\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\, tr \int\limits_{|\lambda|=b_p} \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^k \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda + \frac{(-1)^{j+2}}{2\pi ij}\, tr \int\limits_{|\lambda|=b_p} \lambda^{k-1} \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j d\lambda$$

olur.

$|\lambda| = b_p$ çemberi içerisinde , $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ noktaları hariç

$\mathrm{tr}\dfrac{d}{d\lambda}\left[\lambda^k \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right] = \dfrac{d}{d\lambda} tr\left[\lambda^k \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right]$ olduğundan $\mathrm{tr}\left[\lambda^k \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right]$

fonksiyonunun analitikliğinden

$$tr \int\limits_{|\lambda|=b_p} d\left[\lambda^k \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda = 0$$

olduğu bulunur. Böylece,

$$M_p^j = \frac{(-1)^j k}{2\pi ij} \int\limits_{|\lambda|=b_p} tr\left[\lambda^{k-1} \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda$$

bulunur ki, bunu da ispatlamak gerekirdi. Böylece,

$$\int\limits_{|\lambda|=b_p} \lambda^{k-1} tr\left[\left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda = 2\pi i \sum_{m=1}^{p} \mathrm{Res}\left[\lambda^{k-1}\, tr\left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right]$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$M_p^j = \frac{(-1)^j k}{j} \sum_{m=1}^{p} \mathrm{Res}_{\lambda=\mu_m}\left[\lambda^{k-1} tr\left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^j\right]$$

olduğu görülür.

Lemma 2.3: Eğer Q(x) operatör-fonksiyonu 2. ve 3. koşulları sağlıyor ise o zaman

$$\lim_{p\to\infty} M_p^j = 0, \quad j \geq 2k+2 \tag{3.14}$$

ve

$$\lim_{p\to\infty} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k tr\left[R_\lambda \left(\overline{Q}R_\lambda^0\right)^{N+1}\right] d\lambda = 0 \quad , \ N \geq 2k+2 \tag{3.15}$$

eşitlikleri sağlanır.

__İspat:__ Önce (3.13) 'ü ispatlayalım. Bunu ispatlamak için $\left\|\overline{Q}R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_2)}$ ifadesini $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde sınırlandırmamız gerekir.

$$\left\|\overline{Q}R_\lambda^0\right\| \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\overline{Q}R_\lambda^0 \, \psi_{mn}^0\right\|_{H_2}$$

olduğunu (Gokhberg ve Krein,1969) ve Q(x) operatör-fonksiyonunun 3. koşulunu sağladığını dikkate alırsak (2.8) eşitsizliğinden

$$\left\|\overline{Q}R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_2)} \quad sbt\sum_{m=1}^{\infty}\left|\mu_m - \lambda\right|^{-1} = sbt\left[\sum_{m=1}^{p}\left|\mu_m - \lambda\right|^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left|\mu_m - \lambda\right|^{-1}\right] \leq$$

$$\leq sbt\left[\sum_{m=1}^{p}\left(|\lambda| - \mu_m\right)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\mu_m - |\lambda|\right)^{-1}\right] <$$

$$< \quad sbt\left[\sum_{m=1}^{p}\left(\mu_p + \mu_{p+1} - 2\mu_m\right)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{p}\left(2\mu_m - \mu_p - \mu_{p+1}\right)^{-1}\right] \quad \leq$$

$$\leq \quad sbt\left[\sum_{m=1}^{p}\left(\mu_{p+1} - \mu_m\right)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{p}\left(\mu_m - \mu_p\right)^{-1}\right] \quad \leq$$

$$\leq \; sbt\left[p\left(\mu_{p+1} - \mu_m\right)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{p}\left(\mu_m - \mu_p\right)^{-1} \right] \tag{3.16}$$

bulunur.

Bize gerekli olan

$$\sum_{m=p+1}^{\infty}\left((m-1)^2 - (p-1)^2\right)^{-1} \;<\; sbt. \;\; p^{-1/6}$$

eşitliğini ispatlayalım:

$$\sum_{m=p+1}^{\infty}\left((m-1)^2 - (p-1)^2\right)^{-1} = \sum_{i=p}^{p}\left[i^2 - (p-1)^2\right]^{-1} <$$

$$< \; sbt. \;\; p^{-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\frac{1}{2}}} = sbt \;\; p^{-1/6}$$

Bu eşitsizliği kullanarak ve $\left|\mu_m - \mu_p\right| \;\; \geq \;\; sbt\left|(m-1)^2 - (p-1)^2\right|$ olduğunu göz önüne alırsak (3.16) dan

$$\left\| \overline{Q}R_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_2)} \;\; \leq \;\; sbt\left[1 + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left((m+1)^2 - (p-1)^2\right)^{-1} \right] \leq$$

$$\leq \;\; sbt, \;\; \left(|\lambda| = b_p\right). \tag{3.18}$$

elde edilir.

Şimdi $\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_2}$ yi $|\lambda| = b_p$ çemberinde sınırlandıralım. $\mu_m \;\; < \;\; |\lambda| = b_p$ yani $m \leq p$ iken

$$\left|\mu_m - \lambda\right| \geq |\lambda| - \mu_m = \frac{1}{2}\left(\mu_{p+1} - \mu_p\right) - \mu_m > \frac{1}{2}\left(\mu_{p+1} - \mu_p\right) \geq sbt\, p \tag{3.19}$$

$\mu_p > |\lambda| = b_p$ yani m≥p+1 iken

$$|\mu_m - \lambda| \geq \mu_m - |\lambda| = \mu_m - \frac{1}{2}(\mu_{p+1} - \mu_p) > \frac{1}{2}(\mu_{p+1} - \mu_p) \geq sbt\ p \tag{3.20}$$

(3.19) ve (3.20) eşitsizliklerinden

$$\left\| R_\lambda^o \right\|_{H_2} \leq sbt\ p^{-1} \qquad (|\lambda| = b_p)$$

elde edilir.

Eğer C_1 ve C_2 H uzayında sınırlı operatörler ve $B \in \sigma_1(H)$ ise o zaman bu çalışmada ifade edilmiş **teorem 1.1** (Gokhberg ve krein,1969) 'e göre $C_1BC_2 \in \sigma_1(H)$ ve

$$\left\| C_1 B C_2 \right\|_{\sigma_1(H)} \leq \left\| C_1 \right\| \cdot \left\| C_2 \right\| \cdot \left\| B \right\|_{\sigma_1(H)} \tag{3.22}$$

eşitsizliği sağlanır .

Bu eşitsizliği kullanırsak (3.13) formülünden ve (3.18), (3.21) eşitsizliklerinden

$$\left| M_p^j \right| = \frac{k}{2\pi j} \left| \int_{|\lambda| = b_p} \lambda^{k-1} tr\left[\left(\overline{Q} R_\lambda^o \right)^j \right] d\lambda \right| \leq \frac{k}{2\pi j} \int_{|\lambda| = b_p} |\lambda|^{k-1} \left\| \left(\overline{Q} R_\lambda^o \right)^j \right\|_{\sigma_1(H_2)} d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{k}{2\pi j} b_p^{k-1} \int_{|\lambda| = b_p} \left\| \left(\overline{Q} R_\lambda^o \right) \right\|_{\sigma_1(H_2)} \left\| \left(\overline{Q} R_\lambda^o \right)^{j-1} \right\|_{H_2} d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{k b_p^{k-1}}{2\pi j} \int_{|\lambda| = b_p} \left\| \left(\overline{Q} R_\lambda^o \right) \right\|_{\sigma_1(H_2)} \left\| \left(\overline{Q} \right) \right\|_{H_2}^{j-1} \left\| \left(R_\lambda^o \right) \right\|_{H_2}^{j-1} |d\lambda| \leq$$

$$\leq c_j b_p^k p^{-(j-1)} \leq d_j p^{2k-j+1} \tag{3.23}$$

bulunur. Burada c_j ve d_j sadece j'ye bağlı sabitlerdir. j≥2k+2 iken (3.23) eşitsizliğinden

$$\lim_{p\to\infty} M_p^j = 0$$

alınır.

Bununla (3.14) formülü ispatlandı. (3.15) formülünü ispatlayalım. $|\lambda_{mn} - \mu_m| < sbt$ olduğundan (3.12) eşitsizliğinden

$$\|R_\lambda\|_{H_2} \leq \quad sbt. \quad p^{-1} \quad \left(|\lambda| = b_p \right)$$

elde edilir.

(3.18), (3.21), (3.22) ve son eşitsizliği dikkate alırsak yazabiliriz:

$$\left| \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k tr\left[R_\lambda \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^{N+1} \right] d\lambda \right| \leq \int_{|\lambda|=b_p} |\lambda^k| \left\| R_\lambda \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^{N+1} \right\|_{\sigma_1(H_2)} |\, d\lambda \,| \leq$$

$$\leq b_p^k \int_{|\lambda|=b_p} |\lambda^k| \left\| R_\lambda \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^{N} \right\|_{H_2} \left\| \overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_2)} |\, d\lambda \,| \leq$$

$$\leq sbt.\, b_p^{k+1} \,.\, p^{-(N+1)} \leq sbt.\; p^{2k+1-N}$$

Buradan $N \geq 2k+2$ iken

$$\lim_{p\to\infty} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^k \; tr\left[R_\lambda \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0\right)^{N+1} \right] d\lambda = 0.$$

Böylece (3.15) formülü ispatlandı. Bununla **Lemma 2.3** tamamıyla ispatlandı.

Lemma 2.4: Eğer Q(x) operatör-fonksiyonu 1.- 3. koşulları sağlıyor ise o zaman

$$M_p^1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} k \int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m} x \, dx$$

formülü doğrudur. Burada $f_n(x) = (\mathrm{Q}(x)\varphi_n, \varphi_n)$ dir.

İspat: (3.13) formülünden

$$M_p^1 = \frac{-k}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^{k-1} \, tr(\mathrm{Q}R_\lambda^0) \, d\lambda \quad \text{dir.}$$

Diğer yandan, QR_λ^0 çekirdek operatörü olduğundan ve L_0 operatörünün $\{\psi^\circ_{mn}\}$ öz elemanları H_2 uzayında ortanormal baz oluşturduğundan

$$M_p^1 = \frac{-k}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^{k-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2} \right] d\lambda \tag{3.24}$$

olduğu elde edilir.

(2.3) ve (2.7) yi göz önünde bulundurarak $\left|\left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2}\right|$ ifadesini sınırlandıralım.

$$\left|\left(\overline{\mathrm{Q}}R_\lambda^0 \, \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2}\right| =$$

$$\frac{1}{|\mu_m - \lambda|}\left|\int_0^1 \left(\mathrm{Q}(x)\, \alpha_m \cos \sqrt{\mu_m}\, x\, \varphi_n, \alpha_m \cos \sqrt{\mu_m}\, x\, \varphi_n\right)_H dx\right| \le$$

$$\frac{2}{|\mu_m - \lambda|}\left|\int_0^1 \left(\mathrm{Q}(x)\, \varphi_n, \varphi_n\right)_H dx\right| \le \frac{2}{|\mu_m - \lambda|}\int_0^1 \|\mathrm{Q}(x)\, \varphi_n\|_H \, dx \le$$

$$\leq \frac{2}{|\mu_m - \lambda|}\left(\int_0^1 \|Q(x)\,\varphi_n\|^2{}_H \;dx\right)^{1/2}.$$

Bu sınırlandırma , 3. koşulu ve (2.9) formülüne göre

$$\beta_m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\,\psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2} \quad (m = 1,2,\ldots) \quad \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m(\lambda)$$

serileri λ' ya göre $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktırlar. Bundan dolayı (3.24) ifadesindeki seriyi terim terim integre edilebilir.

Böylece,

$$M_p^1 = \frac{-k}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \lambda^{k-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2}\right] d\lambda =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\overline{Q}R_\lambda^0\psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2} \frac{-k}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda^{k-1}}{\mu_m - \lambda}\; d\lambda\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{Q}R_\lambda^0\psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0\right)_{H_2} k\mu_m^{k-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty} k\int_0^1 \left(Q(x)\;\varphi_n,\;\varphi_n\right)_H\; \mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2\sqrt{\mu_m}\;\; xdx.$$

Bununla lemma ispatlandı.

4. DÜZENLİ İZ FORMÜLÜ

Önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Lemma 3.1: Eğer Q(x) operatör-fonksiyonu 1. , 4. ,5. ve 6. koşulları sağlarsa o zaman

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)\quad \mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2\sqrt{\mu_m}\quad xdx\right|$$

tekrar serisi yakınsaktır.

İspat: Birkaç kez kısmi integral formülünü uygularsak

$$\int_0^1 f_n(x)\quad \mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2\sqrt{\mu_m}\quad xdx=\frac{\mu_m^{k-1}}{2}\int_0^1 f_n(x)\quad \left[1+\cos 2\sqrt{\mu_m}\quad x\right]dx=$$

$$=\frac{\mu_m^{k-1}}{2}\int f_n(x)\left[1+\cos 2\sqrt{\mu_m}x\right]dx=\frac{\mu_m^{k-1}}{2}\frac{1}{2\sqrt{\mu_m}}\int_0^1 f_n(x)\quad d\sin 2\sqrt{\mu_m}\quad x$$

$$=\frac{\mu_m^{k-1-\frac{1}{2}}}{4}\left[f_n(x)\sin 2\sqrt{\mu_m}\quad x\Big|_0^1-\int_0^1\sin 2\sqrt{\mu_m}f_n'(x)dx\right]=$$

$$=-\frac{\mu_m^{k-1-\frac{1}{2}}}{4}\left(-\frac{1}{2\sqrt{\mu_m}}\right)\int_0^1 f_n'(x)d\cos 2\sqrt{\mu_m}xdx=$$

$$=-\frac{\mu_m^{k-1}}{2^3}\left[f_n'(x)\cos 2\sqrt{\mu_m}x\Big|_0^1-\int f_n''(x)\cos 2\sqrt{\mu_m}dx\right]=$$

$$= \ldots = -\frac{(-1)^{k-2}\mu_m}{2^{2k-3}}\int_0^1 f_n^{2(k-1)}(x)d\sin\sqrt{\mu_m}x$$

$$= -\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}2\sqrt{\mu_m}}\int_0^1 f_n^{2(n-1)}(x)d\sin\sqrt{\mu_m}x =$$

$$= -\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}\sqrt{\mu_m}}\left[f_n^{2(k-1)}(x)\sin\sqrt{\mu_m}x\Big|_0^1 - \int_0^1 f_n^{2(k-1)}(x)\sin\sqrt{\mu_m}xdx\right] =$$

$$= -\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}\sqrt{\mu_m}}f_n^{2(k-1)}(1)\sin\sqrt{\mu_m} + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}\mu_m}\int_0^1 f_n^{2(k-1)}(x)d\cos 2\sqrt{\mu_m}x =$$

$$= -\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}\sqrt{\mu_m}}f_n^{2(k-1)}(1)\sin\sqrt{\mu_m} +$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k+1}\mu_m}\left[f_n^{2(k-1)}(x)\cos 2\sqrt{\mu_m}x\Big|_0^1 - \int_0^1 f_n^{2(k)}(x)\cos 2\sqrt{\mu_m}xdx\right]$$

olduğu bulunur.

Buradan,

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\cos 2\sqrt{\mu_m}xdx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{2k}\sqrt{\mu_m}}\left|f_n^{2(k-1)}(1)\right|\left|\sin 2\sqrt{\mu_m}\right| + \frac{1}{2^{2k+1}\mu_m}\left[\left|f_n^{(2k-1)}(1)\right| + \left|f_n^{(2k-1)}(0)\right| + \int_0^1\left|f_n^{(2k-1)}(x)\right|dx\right] \qquad (4.1)$$

elde edilir.

(2.9) formülünden aşağıdaki eşitsizlikler bulunur.

$$\sin\sqrt{\mu_m} \leq \frac{sbt}{m^2}$$

$$\sqrt{\mu_m} \leq sbt.m$$

(4.1) formülü ve bu iki eşitsizlikten $\alpha_m^2 < 2$ (m=1,2,...) olduğu göz önüne alınırsa şöyle yazabiliriz:

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx\right| \leq$$

$$\leq \frac{sbt}{m^2}\left[\left|f_n^{(2k-2)}(1)\right| + \left|f_n^{(2k-1)}(1)\right| + \left|f_n^{(2k-1)}(0)\right| + \int_0^1 \left|f_n^{(2k)}(x)\right|dx\right].$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını n ve m' e göre toplarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx\right| \leq$$

$$\leq sbt\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|f_n^{(2k-2)}(1)\right| + \left|f_n^{(2k-1)}(1)\right| + \left|f_n^{(2k-1)}(0)\right| + \int_0^1 \left|f_n^{(2k-2)}(x)\right|dx\right] \tag{4.2}$$

Lemmanın koşul gereği $\left\|Q^{(\ell)}(x)\right\|_1 \leq sbt \quad (\ell = 0,1\ldots,2k)$ dir. Bu takdirde bilindiği gibi (Gokhberg ve Krein, 1969);

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n^{(2k)}(x)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(Q^{(2k)}(x)\varphi_n,\varphi_n\right)\right| \leq \left\|Q^{(2k)}(x)\right\|_1 \leq sbt$$

Buradan Lebesgue teoremine göre (4.2) eşitsizliğinde n'ye göre toplam işaretini integral altında yazılabilir. Bundan dolayı

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2\cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx\right| \le sbt + \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n^{(2k)}(x)\right|dx\right) < sbt\,.$$

Böylece

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2\cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx\right| < \infty\,.$$

Bununla lemma 3.1 ispatlandı

Şimdi

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2\cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx$$

limitini hesaplamakla uğraşalım.

Lemma 3.1'e göre

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2\cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2\cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx \qquad (4.3)$$

dir.

4. ve 6. koşulları göz önünde bulundurarak aşağıdaki integrale 2k-4 kez kısmi integrasyon formülünü uygulayalım

$$\int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\cos^2\sqrt{\mu_m}\,xdx = \mu_m^{k-1}\int_0^1 f_n(x)\frac{1+\cos 2\sqrt{\mu_m}\,x}{2}dx$$

$$= \frac{\mu_m^{k-1}}{2} \int_0^1 f_n(x) \cos 2\sqrt{\mu_m} x dx = \frac{\mu_m^{k-1}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\mu_m}} \left[f_n(x) \sin 2\sqrt{\mu_m} x \Big|_0^1 - \int_0^1 f_n'(x) \sin 2\sqrt{\mu_m} x dx \right]$$

$$= \frac{\mu_m^{k-1}}{2} \cdot \frac{1}{\left(2\sqrt{\mu_m}\right)^2} \left[f_n'(x) \cos 2\sqrt{\mu_m} x \Big|_0^1 - \int_0^1 f_n''(x) \cos 2\sqrt{\mu_m} x dx \right] =$$

$$= \ldots = \mu_m^{k-1} \cdot \frac{(-1)^{k-2}}{\left(2\left(2\sqrt{\mu_m}\right)\right)^{2k-4}} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x) \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx$$

$$= \frac{(-1)^{k-2} \mu_m^{k-1-k+2}}{2.2^{2k-4}} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x) \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx$$

$$= \frac{\mu_m (-1)^{k-2}}{2^{2k-4}} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x) \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx$$

Böylece

$$\int_0^1 f_n(x) \mu_m^{k-1} \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx = \frac{\mu_m (-1)^{k-2}}{2^{2k-4}} \int_0^1 f_n^{(2K-4)}(x) \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx$$

dir. Bu eşitliği (4.3) formülünde dikkate alırsak

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) \mu_m^{k-1} \alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx$$

$$= \frac{(-1)^{k-2}}{2^{2k-4}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x) \alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m} x dx \qquad (4.4)$$

$T_p(x)$ ile aşağıdaki sonlu toplamı gösterelim.

$$T_p(x) = \sum_{m=1}^{p} \mu_m \alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m} x \quad , \quad x \in [\,0,1\,] \qquad (4,5)$$

Aşağıdaki fonksiyonları göz önüne alalım.

$$\varphi(z) = 2z^2 \cos^2 xz \quad , \quad \psi(z) = z^3 \sin^2 z - \sin z \cos z \quad ,$$

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

F(z) fonksiyonunun ifadesinden görüldüğü gibi bu fonksiyon olsa olsa

$$z = \sqrt{\mu_m} \quad (m = 1,2,\cdots) \quad ve \quad z = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

noktaları hariç C kompleks düzlemin bütün noktalarında analitiktir.

Lemma 3.2: Eğer $z = \sqrt{\mu_m}$ veya $z = k\pi$ noktaları F(z) fonksiyonunun tekil noktaları ise, o zaman bu noktalar F(z)' nin basit kutuplarıdır.

İspat: Yazabiliriz

$$\psi'(z) = \left[\sin z\left(z^3 \sin z - \cos z\right)\right]' = \cos z(z^3 \sin z - \cos z) +$$

$$+ \sin z(3z^2 \sin z + z^3 \cos z + \sin z).$$

$\cos\sqrt{\mu_m} = \mu_m^{3/2} \sin\sqrt{\mu_m}$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\psi\left(\sqrt{\mu_m}\right) = 0 \quad ve \quad \psi'\left(\sqrt{\mu_m}\right) = \sin\sqrt{\mu_m}\,(3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m} +$$

$$+ \left(\sqrt{\mu_m}\right)^3 \cos\sqrt{\mu_m} + \sin\sqrt{\mu_m}) = 3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m} + \mu^{3/2} \sin\sqrt{\mu_m} \cos\sqrt{\mu_m}$$

$$+ \sin^2\sqrt{\mu_m} = 3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m} + \cos^2\sqrt{\mu_m} + \sin^2\sqrt{\mu_m} =$$

$$= 1 + 3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m} \neq 0 \qquad (4.6)$$

üstelik

$$\psi(k\pi) = (k\pi)^3 \sin^2 k\pi - \sin k\pi \cos k\pi = 0$$

ve

$$\psi'(k\pi) = -\cos^2 k\pi = -1 \neq 0. \tag{4.7}$$

(4.6) ve (4.7) eşitsizliklerinden lemmanın ispatı çıkar.

Eğer $z = \sqrt{\mu_m}$ F(z) fonksiyonunun basit kutpu ise, yani $\cos\sqrt{\mu_m}x \neq 0$ ise, o zaman rezüdi teorisinin belli formülüne göre

$$\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\mu_m}} F(z) = \frac{\varphi(\sqrt{\mu_m})}{\varphi'(\sqrt{\mu_m})} = \frac{2\mu_m \cos^2\sqrt{\mu_m}x}{1 + 3\mu_m \sin^2\sqrt{\mu_m}} = \mu_m \alpha_m^2 \cos^2\sqrt{\mu_m}x \tag{4.8}$$

Belirtelim ki, bu formül F(z)'nin $z = \sqrt{\mu_m}$ noktasında analitik olduğu halde de yani $\cos\sqrt{\mu_m}x = 0$ iken de doğrudur. Aynı zamanda z=xπ F(z) nin basit kutpu, yani eğer cosπx≠0 ise, o zaman

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} F(z) = \frac{\varphi(k\pi)}{\varphi'(k\pi)} = -2k^2\pi^2 \cos^2 k\pi x. \tag{4.9}$$

Bu formül F(z) nin z=kπ noktasında analitik halinde yani cos k π x = 0 iken de geçerlidir.

İntegralleme eğrisi olarak tepeleri ±Bi, A_p+Bi noktalarında olan dikdörtgeni alalım ve B'yi sonsuza yaklaştıralım. $A_p=(p-\frac{1}{2})\pi$ olmak üzere p istenildiği kadar büyük olduğunda A_p sayısının p nin büyük değerlerinde $\sqrt{\mu_p}$ ve $\sqrt{\mu_{p+1}}$, (p-1)π ve pπ arasında olduğunu dikkate alacağız. Bu takdirde rezüdi teorisinin esas teoremine göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L F(z)dz=\sum_{p=1}^{p}\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\mu_m}}F(z)+\sum_{m=1}^{p-1}\operatorname*{Res}_{z=m\pi}F(z)$$

olur.

(4.5), (4.8) ve son formülden

$$T_p(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L F(z)dz-\sum_{m=1}^{p-1}\operatorname*{Res}_{z=m\pi}F(z) \tag{4.10}$$

elde edilir.

Gerekli olan aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Lemma 3.3 $x\in[0,1)$ iken

$$\int_L F(z)dz=\int_{A_p-i\infty}^{A_p+i\infty}F(z)dz \tag{4.11}$$

formülü doğrudur.

İspat : $\int_L F(z)dz$ integralini

$$\int_L F(z)dz=\lim_{B\to\infty}\sum_{j=1}^{4}\int_{L_j}F(z)dz \tag{4.12}$$

şeklinde yazalım.

Burada L_j (j=1,2,3,4) L dikdörtgeninin kenarlarıdır.

Böylece

$$\int_{L_1}F(z)dz=\int_{iB}^{-iB}F(z)dz=\lim_{r\to 0}\left[\int_{iB}^{ir}F(z)dz+\int_{\substack{|z|=r\\ \operatorname{Re}z\geq 0}}F(z)dz+\int_{-ir}^{-iB}F(z)dz\right], \tag{4.13}$$

F(z) nin tek fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla

$$\int_{iB}^{ir} F(z)dz + \int_{-ir}^{-iB} F(z)dz = 0 \text{ dır.} \tag{4.14}$$

Böylece

$$\lim_{z\to 0} F(z) = \lim_{z\to 0} \frac{2z^2\cos^2 xz}{z^3\sin^2 z - \sin z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z\cos^2 xz}{z^2\sin^2 z - \dfrac{\sin z}{z}\cos z} = 0\,.$$

(4.13), (4.14) ifadeleri ve son ifadeden

$$\int_{L_1} F(z)dz = 0 \tag{4.15}$$

bulunur.

Eğer z=u+iv ve $|v| \to \infty$ ise o zaman aşağıdaki asimtotik formüller (u değişkenine göre düzgün) doğrudur;

$$|\sin z| \sim \frac{1}{2}e^{|v|}, \quad |\cos z| \sim \frac{1}{2}e^{|v|}$$

Bunlardan F(z) nin aşağıdaki eşitsizliği sağlaması kolayca görülür.

$$|F(z)| \le sbt \cdot e^{-(2-2x)|v|}$$

Böylece $x \in [0,1)$ iken A_p nin verilen her bir değerinde dikdörtgenin yukarı ve aşağı kenarları olmak üzere integraller $B \to \infty$ iken sıfıra yaklaşıyor.

$$\lim_{B\to\infty} \int_{L_2} F(z)dz = \lim_{B\to\infty} \int_{L_4} F(z)dz = 0.$$

(4.12), (4.15) ifadeleri ve sonuncudan (4.11) ifadesi elde edilir. Lemma ispatlandı.

(4.9), (4.10) ve (4.11) formüllerinden

$$T_p(x) = 2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \cos^2 m\pi + \frac{1}{2\pi i}\int_{A_p-i\infty}^{A_p+i\infty} F(z)dz$$

olduğu çıkar.

$T_p'(x)$ ile

$$T_p'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_p-i\infty}^{A_p+i\infty} F(z)dz$$

integralini gösterelim. Bu takdirde

$$T_p(x) = 2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \cos^2 m\pi + T_p'(x) \quad , \quad x \in [\,0.1\,) \tag{4.16}$$

Bize ileride gerekli olacak $T_p'(x)$ ifadesinin p'nin büyük değerlerinde sınırlamak gerekecektir.

$$T_p'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_p-i\infty}^{A_p+i\infty} F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_p-i\infty}^{A_p+i\infty} \frac{2z^2\cos^2 xz}{z^3\sin^2 z - \sin z\cos z}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{A_p-i\infty}^{A_p+i\infty} \frac{z^2(1+\cos 2kz)}{z^3(1-\cos 2z) - \sin 2z}dz$$

yazılabilir.

$A_p = \left(p - \frac{1}{2}\right)\pi$ olmak üzere $z = A_p + iv$ diyelim . O zaman

$$\cos 2xz = \cos 2xA_p ch2xv - i\sin 2xA_p sh2x$$

$$\cos 2z = \cos 2A_p ch2v - i\sin 2A_p sh2v = -ch2v$$

$$\sin 2z = \sin 2A_p chv + i\cos 2A_p sh2v = -ish2v$$

Böylece aşağıdaki ifade elde edilir:

$$T_p'(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(A_p+iv\right)^2\left(1+\cos 2xA_p ch2xv-i\sin 2xA_p sh2xv\right)}{\left(A_p+iv\right)^3\left(1+ch2v\right)+ish2v}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(A_p{}^2+2A_pv-v^2\right)\,\left(1+\cos 2xA_p ch2xv-i\sin 2xA_p sh2xv\right)}{\left(A_p{}^3-3A_pv^2+i\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+ish2v\right)}dv=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\left(A_p{}^2-v^2\right)\,\left(1+\cos 2xA_p ch2xv+2A_pv\sin 2xA_p sh2xv\right)}{\left(A_p{}^3-3A_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)+i\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]}+\right.$$

$$\left.+\frac{i\left[2A_pv\left(1+\cos 2xA_p ch2xv\right)-\left(A_p{}^2-v^2\right)\sin 2xA_p sh2xv\right]}{\left(A_p{}^3-3A_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)+i\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]}\right\}dv=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\left[\left(A_p^2-v^2\right)\left(1+\cos 2xA_p ch2xv\right)+2A_pv\sin 2xA_p sh2xv\right]\left(A_p^3-3A_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)}{\left(A_p^3-3a_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)^2+\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left[2A_pv\left(1+\cos 2xA_p ch2xv\right)-\left(A_p^2-v^2\right)\sin 2xA_p sh2xv\right]\left[\left(3A_pv-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]}{\left(A_p^3-3A_Pv^2\right)+\left(1+ch2v\right)^2+\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]^2}\right\}dv\,.$$

Biz burada

$$i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\left(A_p^3-3A_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)\left[2A_pv\left(1+\cos 2xA_p ch2xv\right)-\left(A_p^2-v^2\right)\sin 2xA_{p'}sh2xv\right]}{\left(A_p^3-3A_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)^2+\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\left(A_p^2-v^2\right)\left(1+\cos 2xA_p ch2xv\right)+2A_pv\sin 2xA_p sh2xv\right]\left[\left(3A_p^3-v^2\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]}{\left(A_p^3-3A_pv^2\right)\left(1+ch2v\right)^2+\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)\left(1+ch2v\right)+sh2v\right]^2}\right\}dv=0$$

eşitliğini integralaltı fonksiyonunun v değişkeninin tek fonksiyonu olduğunu dikkate alarak yazdık.

Şimdi (4.17) integralinde integralaltı ifadenin paydasını sınırlandıralım:

$$\left[\left(A_p^3-3A_pv^2\right)(1+ch2v)\right]^2+\left[\left(3A_p^2v-v^3\right)(1+ch2v)+sh2v\right]^2=$$

$$=\left(A_p^6-6A_p^4v^2+9A_p^2v^4\right)(1+ch2v)^2+\left(9A_p^4v^2-6A_p^2v^4+v^6\right).(1+ch2v)^2+$$

$$+2\left(3A_pv-v^3\right)(1+ch2v)sh2v+sh^2 2v=\ \frac{1}{2}\left(A_p^6+3A_p^4v^2+3A_p^2v^4+v^6\right)(1+ch2v)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(A_p^6+3A_p^4v^2+3A_p^2v^4+v^6\right)(1+ch2v)^2+\quad 2\left(3A_pv-v^3\right)(1+ch2v)sh2v+sh^2 2v=$$

$$=\frac{1}{2}\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)^2+\frac{1}{2}\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)^2+2\left(3A_pv-v^3\right)(1+ch2v)sh2v$$

$$+sh^2 2v>\ \frac{1}{2}\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)^2. \tag{4.18}$$

v'nin büyük değerlerinde

$$ch2v\sim\frac{e^{2v}}{2},\qquad sh2v\sim\frac{e^{2v}}{2},\qquad \text{ve}\quad v^6\ >\ v^3 \ \text{olduğundan}$$

$$\frac{1}{2}\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)^2+2\left(3A_pv-v^3\right)(1+ch2v)sh2v+sh^2 2v\quad>\quad 0$$

olur.

v'nin küçük değerlerinde gösterilen eşitsizlik A_p yardımı ile elde edilir. A_p nin kendisi ise istenildiği kadar büyük pozitif bir sayıdır. (4.18) i (4.17) de dikkate alırsak

$$\left|T_p'(x)\right| \leq 4\int_0^{\infty}\left(A_p^2+v^2\right)^{-3}(1+ch2v)^{-1} \,.$$

$$\Big\{\Big|A_p^5-4A_p^4v^2+3A_pv^4-4A_p^3v^2\cos 2xA_p\,.\,ch2xv+3A_pv^4\cos 2xA_p ch2xv-$$

$$-6A_p^2v^3\sin 2xA_p sh2xv+A_p^5\cos 2xA_p ch2xv+2A_p^4v\ \ \sin 2xA_p sh2xv\Big|\Big\}dv+$$

$$+2\int_0^{\infty}\Big|\left(A_p^2+v^2\right)^{-3}(1+ch2v)^{-2}\,.\,\Big[2A_pv\ \ (1+\cos 2xA_p ch2xv)-$$

$$-\left(A_p^2-v^2\right)\sin 2xA_p sh2xv\Big]\Big[\left(3A_pv-v^3\right)(1+ch2v)+sh2v\Big]\Big|\quad dv \qquad (4.19)$$

bulunur.

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeleri teker teker sınırlandıralım.

$$\int_0^{\infty}\frac{A_p^5}{\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)}\,dv \;\leq\; \int_0^{\infty}\frac{A_p^5}{A_p^6 ch2v}\,dv \;\leq\; \frac{1}{A_p}\int_0^{\infty}\frac{dv}{ch2v}\quad dv \;\leq$$

$$\leq \frac{1}{A_p}\int_0^{\infty}\frac{2}{e^{2v}}\,dv=\frac{1}{A_p}\quad ;$$

$$\int_0^{\infty}\frac{4A_p^3v^2}{\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)}\,dv \;\leq\; \int_0^{\infty}\frac{4A_p^3v^2}{3A_p^4v^2ch2v}\,dv \;=$$

$$=\frac{4}{3A_p}\int_0^{\infty}\frac{dv}{ch2v}=\frac{8}{3A_p}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{3A_pv^4}{\left(A_p^2+v^2\right)^3(1+ch2v)}\,dv \;\leq\; \int_0^{\infty}\frac{3A_pv^4}{A_p^6ch2v}\quad dv \leq$$

$$\leq \frac{3}{A_p^5}\int_0^\infty \frac{v^4}{e^{2v}}dv \;\leq\; \frac{sbt}{A_p^5}$$

$$\int_0^\infty \left|\frac{4A_p^3 v^2 \cos 2xA_p ch2v}{\left(A_p^2+v^2\right)^3\left(1+ch2z\right)}\right| dv \;\leq\; \int_0^\infty \frac{4A_p^3 v^2 ch2xv}{3A_p^4 v^2 ch2v}\, dv \;=$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{A_p}\int_0^\infty \frac{ch2xv}{ch2v}\,dv \;\leq\; \frac{sbt}{A_p}\int_0^\infty \frac{e^{2xv}}{e^{2v}}\,dv \;=$$

$$= \frac{sbt}{A_p}\int_0^\infty e^{(2x-2)v}\,dv = \frac{sbt}{(1-x)A_p} \qquad (0 \leq x < 1)$$

(4.19) da geri kalan toplamları da benzer şekilde sınırlandırıp ve bu sınırlandırmaları (4.19) da göz önüne alırsak;

$$\left|T_p'(x)\right| \leq \frac{sbt}{A_p\left(1-x\right)^2} \quad , \qquad (0 \;\leq\; x \;<\; 1) \tag{4.20}$$

elde ederiz.

Şimdi (Hüseyinov ve Levitan,1978) de bulunan

$$\alpha_m \cos\sqrt{\mu_m}\,x = \sqrt{2}\cos(m-1)\pi\, x + 0\left(\frac{1}{m}\right) \tag{4.21}$$

asimtotik ifadeyi kullanarak

$$T_p'(x) = T_p(x) - 2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \cos^2 m\pi\, x$$

ifadesini sınırlandıralım.

(2.9), (4.5) ve (4.21) ifadelerinden yazabiliriz.

$$\left|T_p'(x)\right| = \left|\sum_{m=1}^{p} \mu_m \alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m}\, x - 2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \cos^2 m\pi\, x\right| =$$

$$= \left|\sum_{m=1}^{p}\left[(m-1)^2\pi^2 + 0\left(m^{-1}\right)\right] \;.\; \left[2\cos^2(m-1)\pi\, x\right] + 0\left(m^{-1}\right) - \right. \tag{4.22}$$

$$\left. -2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \cos^2 m\pi\, x\right| \leq \quad sbt\;.\;p^2$$

Aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.1: Eğer Q(x) operatör-fonksiyonu 1.- 6. koşulları sağlıyorsa, o zaman

$$\lim_{p\to\infty} M_1^p = \frac{(-1)^{k-1}.k}{2^{2k}}\left[tr\ Q^{(2k-2)}(0) + tr\ Q^{(2k-2)}(1)\right] \qquad \text{dir.}$$

İspat: (4.5) ve (4.16) dan

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{m=1}^{p} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\mu_m\ \alpha^2 \cos\sqrt{\mu_m}\, x\ dx = \lim_{p\to\infty} \sum_{m=1}^{p} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\ T_p(x)\ dx =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\left[2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \cos^2 m\pi\ x + T_p'(x)\right]dx = \tag{4.23}$$

$$= \lim_{p\to\infty} 2\sum_{m=1}^{p-1} m^2\pi^2 \int_0^1 f_n^{(2k-4)} \cos^2 m\pi\ xdx + \lim_{p\to\infty} \int_0^1 f_n^{(2k-4)} T_p'(x)\ dx$$

elde edilir.

Şimdi

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^1 f_n^{(2k-4)} T_p'(x)\,dx = 0$$

olduğunu gösterelim.

5., 6. koşullardan ve $f^{(2k-2)}(1)=f^{(2k-3)}(1)=0$ dan

$$\left|f_n^{(2k-4)}(x)\right| \le sbt.\,|x-1|$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.20) , (4.22) ve en son eşitsizliğe göz önünde bulundurarak yazabiliriz:

$$\left|\int_0^1 f_n^{(2k-4)} T_p'(x)dx\right| \le \int_0^{1-p^{-2}}\left|f_n^{(2k-4)}\right|\left|T_p'(x)dx\right| + \int_{1-p^{-2}}^1 \left|f_n^{(2k-4)}\right|\left|T_p'(x)dx\right| \le$$

$$\le sbt.\int_0^{1-p^{-2}}\frac{|x-1|}{(1-x)^2}dx + sbt.\int_{1-p^{-2}}^1 |x-1|p^2 dx \le \frac{sbt.\ln p}{A_p} + sbt.\ p^2\left(p^{-2}\right)^2.$$

Buradan ve (4.23) den

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\mu_m\,\alpha^2\cos^2\sqrt{\mu_m}\,x\,dx = 2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2\int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\cos^2 m\,\pi\,xdx \qquad (4.24)$$

Şimdi

$$2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2\int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\cos^2 m\,\pi\,xdx$$

Serisinin toplamını hesaplayalım.

4. ve 6. koşulları göz önüne alırsak.

$$2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2 \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\cos^2 m\pi\, x dx = \sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2 \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)[1+\cos 2m\pi\, x]dx =$$

$$= \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\cos 2m\pi\, x dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2 \left[\frac{f_n^{(2k-4)}}{2m\pi} \sin 2m\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{2m\pi} \int_0^1 f_n^{(2k-3)}(x)\sin 2m\pi\, x dx \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m\pi \left[-\frac{f_n^{(2k-3)}}{2m\pi} \cos 2m\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{2m\pi} \int_0^1 f_n^{(2k-2)}(x)\cos 2m\pi\, x dx \right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_n^{(2k-2)}(x)\cos 2m\pi\, x dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_n^{(2k-2)}(x)\cos m\pi\, x dx - \frac{1}{8}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_0^1 f_n^{(2k-2)}(x)\cos m\pi\, x dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2}\cos(m\pi\, 0) \int_0^1 f_n^{(2k-2)}(x)\sqrt{2}\cos m\pi\, x dx - \frac{1}{16}\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2}\cos m\pi \int_0^1 f_n^{(2k-2)}\sqrt{2}\cos m\pi\, x dx$$

bulunur.

$f_n^{(2k-2)}(x)$ elde edilen eşitsizliğin sağ tarafındaki 1. seri $[0.1]$ aralığında verilmiş $f_n^{(2k-2)}$ fonksiyonunun 0 (sıfır) noktasında kosinüs Fourier serisinin toplamı, 2.seri ise bu fonksiyonun 1 noktasında kosinüs Fourier serisinin toplamıdır.

Bundan dolayı

$$2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\pi^2 \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\cos^2 m\pi\, x dx = -\frac{f_n^{(2k-2)}(0) + f_n^{(2k-2)}(1)}{16} \quad \text{dır.}$$

Bu formül ve (4.24) den

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_n^{(2k-4)}(x)\mu_m\, \alpha^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m} x\, dx = -\frac{f_n^{(2k-2)}(0) + f_n^{(2k-2)}(1)}{16} \qquad (4.25)$$

yazılabilir.

Böylece lemma 2.4 ve (4.3) , (4.4), (4.25) formüllerinden

$$\lim_{p\to\infty} M'_p = \lim_{p\to\infty} \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty} k \int_0^1 f_n(x)\mu_m^{k-1}\alpha_m^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m}\, x\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}k}{16.2^{2k-4}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n^{(2k-2)}(0) + f_n^{(2k-2)}(1) \right] =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}k}{2^{2k}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(Q^{(2k-2)}(0)\varphi_n, \varphi_n \right)_H + \sum_{n=1}^{\infty} \left(q^{(2k-2)}(1)\varphi_n, \varphi_n \right)_H \right],$$

veya

$$\lim_{p\to\infty} M'_p = \frac{(-1)^{k-1}k}{2^{2k}} \left[tr Q^{(2k-2)}(0) + tr Q^{(2k-2)}(1) \right]$$

olur.

Bununla teorem ispatlandı.

(3.12), (3.14), (3.15) formülleri ve teorem 3.1 den aşağıdaki formül elde edilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{mn}^k - \mu_m^k \right) - k \sum_{j=2}^{2k+1} j^{-1}(-1)^j \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_m} \left[\lambda^{k-1}\, tr\left(\overline{Q} R_\lambda^0 \right)^j \right] \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}k}{4^k} \left[tr Q^{(2k-2)}(0) + tr Q^{(2k-2)}(1) \right] \qquad (4.26)$$

Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ifadeye (2.1) ve (2.2) sınır değer probleminin **k. düzenli izi** denir. Bununla aşağıdaki esas teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 3.2: Q(x) operatör fonksiyonu 1.- 6. koşulları sağlıyorsa (2.1) , (2.2) sınır değer probleminin k. düzenli izi için (4.26) formülü sağlanır.

Belirtelim ki elde ettiğimiz (4.26) formülü Hilbert uzayı H=C halinde de ilk olarak bu çalışmamızda bulunmuştur. Bu halde Q(x) 'in reel değerli skaler fonksiyon, (2.1), (2.2) problemi ise ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer problemi olacaktır ve 1. koşulunda Q(x) 'in zayıf türevi kelimesi adi türev kelimesi ile 4. koşulu

$$\int_0^1 Q(x)^{(2k-2)}\,dx = 0$$

koşulu ile değiştirilecek , 5. koşulunda $\left\| Q^{(\ell)}(x) \right\|$ yerine $\left| Q^{(\ell)}(x) \right|$ yazılacak, 3. koşulu ise kalkacaktır.

Sözü edilen, yani ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için (2.1), (2.2) sınır değer problemine karşılık gelen (4.26) formülünün sağ tarafı

$$\frac{(-1)^{k-1}k}{4^k}\left[Q^{(2k-2)}(0) + Q^{(2k-2)}(1)\right]$$

şeklinde olacaktır.

SONUÇ

Sonraki çalışmalarımızda elde edilen düzenli iz formülünü 2n. mertebeden diferansiyel ifade için sınır değer problemine genelleştirilecektir.

KAYNAKLAR

Adıgüzelov, E.E., (1976), Operatör Katsayılı İki Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörünün İzi Üzerine, Izv. AN Azerb.SSR, Ser.Fiz-Tech. I Mat.N., No.5, 20-24. (R).

Adıgüzelov, E.E. ve Bayramov, A.M., (1996) Sınır Koşulunda Spektral Parametre Bulunan Sonlu Aralıkta Verilmiş Sturm-Lioville Operatör Probleminin Düzenli İzi, Trudi Inst. Matem. İ Mekan. AN Azerb.

Bakşi, Ö., (1999), Sınırsız Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin İz Formülü, Doktora Tezi, İstanbul.

Bayramoğlu, M., (1986) Somut Sturm-Liouville Operatörünün Yüksek İzleri Bakü, Preprint, AN Azerb. SSR, Inst. Fiziki; No.6, 34s. (R).

Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., (1996), On A Regularized Trace Formula For The Sturm-Liouville Operator With Bounded Operator Coefficient And With A Singularity, Differ. Uravn.32, No.12, 1587-1592; Translation in Differantial Equations 32 (1997) , No.12, 1581-1585.

Bayramoğlu, M., Taşçı, F. and İsmailov,S., (1997), Higher Trace Formulas For Sturm-Liouville Equation With Unbounded Operator Coefficient In Finite Interval, J. Inst.Comput. Sci. Math. Ser 10,No.3,199-208.

Birman, M.S. and Solomyak, M.Z., (1987), Spectral Theory Of Self Adjoint Operators, D. Reidel Published co. Dordrecht.

Buslayev, V.S. ve Faddaev, L.D., (1960), Singüler Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörünün İz Formülleri Üzerine, Dokl. AN SSSR, C.132, No 1, 13-16. (R).

* (R), Kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

Dikiy, L.A. , (1957), Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerlerinin Yaklaşık Bulunması İçin Yeni Bir Yöntem, Dokl. AN SSSR, C.156, No 1, 12-14. (R).

Dikiy, L.A. , (1958), Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörünün İz formülleri , Usp. Mat. Nauk., XIII, Vıp.3 (81), 111-143. (R).

Dubrovski, V. V., (1996), Regularized Traces Of Self-Adjoint Operators, Vestsi Akad. Navuk Belarusi, Ser.Fiz. Mat. Navuk, No:1,30-33,124.

Faddaev, L.D. , (1957), Sturm-Liouville Tipten İki Singüler Operatörlerin Farkının İz Formülleri İfadesi, Dokl. AN SSSR, 115, No 5, 878-881. (R).

Fulton, T.C. and Pruesses, S. A., (1994), Eigenvalue And Eigenfunctions Asymptotics For Regular Sturm-Liouville Problems , J. Math. Anal. Appl. 188,297-340 .

Fulton, T.C., (1977), Two-Point Boundary value Problems With Eigenvalue Parameter Contained In The Boundary Conditions, Proceeding of The Royal Society Edinburgh, 77A,293-308.

Gasımov, M.G. (1953), Kendine Eş İki Operatörün Özdeğerler Farkının Toplamı Üzerine, Dokl. AN SSSR, C.150, No 6, 1202-1205. (R).

Gelfand, I.M. ve Levitan, B.M., (1953), İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemin Özdeğerlerine Ait Basit bir Özdeşlik Üzerine , Dokl. AN SSSR, C.88, No 4, 593-596. (R).

Gokhberg, I.C. and Krein, M.G., (1969), Introduction To The Theory of Linear Non-Self Adjoint Operators In Hilbert Space, Translations, Math. Monographs, Vol.18, Amer. Math. Soc. Providence,R. I.

Halilova, R. Z., (1976), Sturm-Liouville Operatör Denkleminin İzinin Düzenlenmesi Hakkında, Funks. Analiz, Teoriya Funksiy. İ pril No.3 , 1. Bölüm,159-161. (R).

Hille, E. and Phillips, R. S., (1957), Functional Analysis and Semi-Groups, Collog. Publ.Math. Soc.

Hüseyinov, H.Ş. ve Levitan, B.M, (1978), Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörü İçin İz Formülleri Üzerine, Vestnik MGU, Ser. Matem., Mech., No.1, 40-49 . (R). .

Kato, T., (1980), Perturbation Theory For Linear Operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Kostiyuçenko, A.G.,(1968), Kendine Eş Eliptik Operatörlerin Spektral Fonksiyonunun Asimptotik İfadesi, Dördüncü Yaz Matematik Okulu, Kiyev,42-117 . (R).

Krein, M.G., (1953), Pertüsbasyon Teorisinde İz Formülleri Üzerine Matem.Sb.,C.33 (75) No.3,597-626 . (R).

Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., (1991), Sturm-Liouville And Dirac Operators, Kluzeer, Dordrechz.

Lidskiy, V.B. ve Sadovniçiy, V.A. (1967), Bir Sınıf Tam Fonksiyonların köklerinin Düzenli Toplamı , Fonks. Analiz İ Pril, I, No.2, 52-59 . (R).

Liftşitz, I.M., (1952), Kuantum İstatistiki İle İlgili Pertüsbasyon Teorisinin Bir Problemi Üzerine, Usp.Mat. Nauk, C. VII,Vıp. 1(47), 171-180.

Maksudov, F.G., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., (1984), Sonlu Aralıkta Verilmiş Sınırsız Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin İzi, DAN SSSR, C.277, No 4, English Translation (1984) : Soviet Math. Dokl. 30 N.1,169-173

Sadovniçiy, V.A., (1967), Adi Diferansiyel Operatörler İçin İz Formülleri, Matem. Zametki, 1, No.2 , 179-188 . (R).

Sadovniçiy, V.A., (1984), Ayrık Operatörlerin Özdeğerlerinden Oluşan Düzenli Toplamlar, Akt. Probl. Mat. Fiz. İ Vıçisl. Mat., Moskova, 167-174 . (R).

Strang , G., (1976), Linear Algebra and Applications, Academic Press, New York.

Weidman, J., (1980), Linear Operators In Hilbert Space, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Adı soyadı	: Hülya Şahintürk	
Doğum Tarihi	: 20.09.1966	
Doğum Yeri	: İstanbul	
Lise	: 1977-1983	İstanbul Etiler Lisesi
Lisans:	: 1983-1987	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	: 1990-1992	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Müh. Ana Bilim Dalı
Doktora	: 1993-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Müh. Ana Bilim Dalı

Çalıştığı Kurumlar

: 1987-1990	Çeşitli Firmalar
: 1990-Devam ediyor	Y.T.Ü. Matematik Müh. Bölümünde Araştırma görevlisi