

93754

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KENDİ KENDİNE EŞLENİK OLMAYAN BİRİNCİ  
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER  
SİSTEMİ İÇİN DÜZ VE TERS SAÇILMA PROBLEMİ**

**Dilek ÇAĞIRGAN GÜLTEN**

**F.B.E. Matematik Anabilimdalında  
Hazırlanan**

**DOKTORA TEZİ**

**Tez Savunma Tarihi:** 31 Mayıs 2000

**Tez Danışmanı** : Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (YTÜ)

**Jüri Üyeleri** : Prof.Dr. Metin ARIK (BÜ)

: Prof.Dr. Mehmet HAMİDOĞLU TAGİYEV (MSÜ)

*met. Arık*  
*Jüri*

**İSTANBUL, 2000**

İÇİNDEKİLER	Sayfa
ÖNSÖZ .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
1. GİRİŞ .....	1
2. BÜTÜN EKSENDE SAÇILMA PROBLEMİ .....	5
2.1 Düz Saçılma Problemi .....	5
2.2 Çözümün İntegral Temsilleri .....	13
2.3 Çözümün Analitik İntegral Temsilleri .....	31
2.4 Bütün Eksende Ters Saçılma Problemi .....	39
3. KENDİ-KENDİNE EŞLENİK OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN YARI EKSENDE SAÇILMA PROBLEMİ .....	41
3.1 Saçılma Problemi .....	41
3.2 $S(\lambda)$ Matris Fonksiyonunun Özellikleri .....	49
3.3 Ters Saçılma Problemi .....	66
4. SONUÇLAR .....	70
KAYNAKLAR .....	71
EKLER .....	74
Ek 1. Riemann-Hilbert Problemi .....	74
ÖZGEÇMİŞ .....	79

## ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim süresince değerli bilgi ve yardımlarıyla her zaman destek olan Sayın hocam Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezin başlangıç ve gelişme aşamasında bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren Sayın hocam Prof.Dr. Nizamettin Ş. İSKENDEROV'a ve kararsızlığa düştüğüm durumlarda yardımlarını esirgemeyen Sayın Yard.Doç.Dr. Coşkun GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca; her zaman ve her konuda, maddi ve manevi destek ve yardımlarını esirgemeyen annem Z.Ayhan ÇAĞIRGAN ve babam Fethi ÇAĞIRGAN'a ve yanımda olmalarından mutluluk duyduğum eşim İsmail GÜLTEN ve oğlum Cemre GÜLTEN'e teşekkür ederim.



## ÖZET

Pozitif yarı ekseninde verilmiş

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = 1, 2, 3$$

diferansiyel denklemler sistemi gözönüne alınmıştır. Burada  $c_{kj}(x)$  katsayıları  $c_{kk}(x) = 0$  olmak üzere

$$|c_{kj}(x)| \leq c \exp(-\varepsilon x), \quad k, j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon \text{ ve } c \text{ sabitlerdir.})$$

koşulunu sağlayan kompleks değerli fonksiyonlardır.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ler ise  $\xi_1 > 0 > \xi_2 > \xi_3$  koşulunu sağlayan sayılar olmak üzere fiziksel olarak  $\xi_i > 0$  gelen dalga,  $\xi_i < 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ise saçılan dalgaya karşılık gelmektedir. Bu çalışmada, gözönüne alınan diferansiyel denklemler sistemi için bir gelen dalga olduğu halde iki problem ele alınarak  $S(\lambda)$  matris fonksiyonu tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.  $S(\lambda)$  verildiğinde denklemler sisteminin  $c_{kj}(x)$  katsayılarının bulunmasına ait ters saçılma problemi çözülmüştür. Sonlu sayıda noktalar haricinde  $S(\lambda)$  matris fonksiyonunun, tüm ekseninde tanımlanmış matris fonksiyonunu ( $x < 0$  iken katsayıları sıfır) tek türlü tanımladığı gösterilmiştir.

## ABSTRACT

The system of differential equations given on a semi-axis

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = 1, 2, 3$$

are considered, where  $c_{kj}(x)$  coefficients are complex-valued functions, satisfying  $c_{kk}(x) = 0$  and

$$|c_{kj}(x)| \leq c \exp(-\varepsilon x), \quad k, j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon \text{ and } c \text{ constant}),$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$  are the figures that provide  $\xi_1 > 0 > \xi_2 > \xi_3$  condition and the figures mentioned are physically equivalent to  $\xi_i > 0$  means coming wave, and also  $\xi_i < 0$  ( $i = 1, 2, 3,$ ) is equivalent to scattering wave.

In this work, however, there is just one coming wave for the system of differential equations the two problems are examined as a basis and matrix function is defined and analysed minutely. As  $S(\lambda)$  is given, inverse scattering problem, that is for finding  $c_{kj}(x)$  coefficients of simultaneous equations, is solved. On finite number except points, the matrix function (since  $x < 0$ , these its are zero) is defined on the whole axis only by one way by  $S(\lambda)$  matrix function.

## 1. GİRİŞ

Kuantum mekaniğinden bildiğimiz gibi potansiyel alanda zerreciklerin saçılması, sonsuzlukta dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı ile belirlenebilir. V. Heisenberg 'e göre dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı fiziksel anlama sahiptir. Doğal olarak bir soru ortaya çıkıyor ki dalga fonksiyonunun asimptotik davranışına göre potansiyel alanı belirlemek mümkün mü? Bu tür problemler *ters saçılma problemi* olarak adlandırılır. Ters problemin çözülmesinde, potansiyelle dalga fonksiyonu arasında ilişkilerin kurulması (mesela Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi, saçılma verilerinin yardımıyla oluşturulan Riemann-Hilbert problemi vs.) çok büyük rol oynar.

Sturm Liouville operatörü için (bir boyutlu lineer Schrödinger denklemi) ters problem, sistematik olarak Borg (1946), Gelfand ve Levitan (1951), Marchenko (1977) ve Krein (1951) tarafından öğrenilmeye başlanmıştır. Bu yönde araştırmaların genişlendirilmesine Gardner, Green, Kruskal, Miura (1967) 'nın yılında verdikleri "*ters problemler yöntemi*" çok büyük etki göstermiştir.

Bir çok dalga denklemleri az sayıda evrensel matematik modelle gösterilebilir. Mesela non-lineer Korteweg-de Vries (KdV), Sin-Gordon gibi universal matematik modele sahip denklemler geçen asırda fizikçilerce belliydi. O zaman, bu denklemlerin lokalize olunmuş açık çözümlere (solitonlara) sahip olduğu mevcuttu. Yalnız Gardner, Green, Kruskal, Miura (1967), KdV denklemi ile tüm eksende verilmiş lineer Schrödinger denklemi arasında önemli bir ilişki olduğunu görebilmişlerdir. Onlar göstermişlerdir ki non-lineer KdV denklemini lineer teori yöntemlerinin yardımıyla çözümlenmek mümkündür.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

KdV denklemini,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (1.2)$$

lineer Sturm-Liouville denkleminin yardımıyla çözmek için Sturm-Liouville denklemine

karşılık gelen saçılma verilerinden yararlanılır. Gösterilir ki, bu iki denklem arasında kurulan ilişkiler (denklemler vs.) lineerdir.

Ters saçılma yöntemine (solitonlar yöntemine), Fourier transformasyonu yönteminin geliştirilmesi gibi bakılabilir.

Lax (1968), 'solitonlar yöntemi' ni daha da geliştirdi. Zakharov ve Shabat (1971) ise gösterdiler ki bu yöntem, çok önemli fiziki uygulamalara sahip olan non-lineer

$$i q_t = q_{xx} + \chi q |q|^2, \quad \chi > 0 \quad (1.3)$$

Schrödinger denkleminde uygulanabilir ve düz ve ters saçılma problemleri düşüncesinden yararlanılarak, sonsuzlukta sifira hızla yaklaşan başlangıç verileri için (1.3) denklemleri çözülebilir. Wadati (1972), benzer olarak

$$q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

modified KdV (MKdV) denklemini çözmek için yöntem vermiştir.

Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur (1973) ise Sin-Gordon

$$u_{xt} = \sin u \quad (1.5)$$

denklemini için aynı yöntemi uygulamışlardır. Onlar aynı zamanda göstermişlerdir ki KdV, MKdV, Sin-Gordon ve non-lineer Schrödinger denklemleri aynı bir saçılma problemi ile bağlıdır.

Sonsuz aralıkta saçılma problemi Faddeev (1963), Deift ve Trubowitz (1979) 'in çalışmalarında öğrenilmiştir. Yukarıda adları geçen non-lineer denklemler için aşağıdaki Dirak denklemler sistemi (Zakharov- Shabat denklem sistemi),

$$v_{1x} = -i \xi v_1 + q v_2$$

$$v_{2x} = i \xi v_2 + r v_1$$

yardımcı denklem rolünü oynayabilir.

Belirtelim ki Dirak denklemler sistemi için bazı özel hallerde ters saçılma problemi Gasimov ve Levitan (1966), Nizhnik ve Vu (1974) tarafından incelenmiştir.

Spektral verilere göre (özdeğerler, spektral fonksiyon vs.) sonlu aralıkta ters saçılma problemi ilk defa Borg (1946) tarafından öğrenilmiştir. Borg göstermiştir ki Sturm-Liouville operatörü için ters saçılma problemi yalnız iki spektruma göre (yani iki problem gözönüne alındığında onların öz değerlerine göre) tek türlü bulunabilir.

Non-linear yansıyan ve birbirini etkilemeyen üç dalga

$$\begin{aligned} Q_{1t} + c_1 Q_{1x} &= i \gamma_1 Q_2^* Q_3^*, \\ Q_{2t} + c_2 Q_{2x} &= i \gamma_2 Q_1^* Q_3^*, \\ Q_{3t} + c_3 Q_{3x} &= i \gamma_3 Q_1^* Q_2^* \end{aligned}$$

denklemler sistemi için birinci mertebeden adi lineer

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

denklemler sistemi yardımcı denklem rolünü oynar. Bu ilişki Zakharov ve Manakov (1973), Kaup (1976) tarafından öğrenilmiştir.

Bu yardımcı denklem sistemi için ters saçılma problemi genel halde (katsayılar kompleks değerli fonksiyonlar,  $\lambda_k$  lar kompleks sabitlerdir ve denklemin öğrenildiği uzay daha genel şekildedir) ciddi şekilde Beels (1982) ve Beels ve Coifman (1984) tarafından incelenmiştir. Caudrey (1983) üç tane adi diferansiyel denklemler sistemi için ters saçılma problemini non-

linear Klein-Gordon

$$\sigma_{xt} = e^{2\sigma} - e^{-\sigma}$$

denklemine uygulamıştır. (1.6) denklemler sistemi için daha sonraki çalışmalar Beels ve Coifman (1987,1989), Sattinger (1989, 1990), Zhou (1989) tarafından yapılmıştır.

Non-stationer iki tane hiperbolik denklemler sistemi için düz ve ters saçılma problemi, tüm ekseninde Nizhnik (1973,1974,1988) tarafından öğrenilmiş ve non-linear Davey A. ve Stewartson denklemlerine uygulanmıştır. Denklemlerin sayısı  $n > 2$  olduğunda tüm ekseninde düz ve ters saçılma problemi Nizhnik ve Tarasov (1977,1981), yarı ekseninde ise İskenderov (1985, 1988), Nizhnik ve İskenderov (1990), İskenderov ve Yıldız (1996) tarafından öğrenilmiştir.

Bu çalışmamızda, (1.6) denklemler sistemi için bir gelen dalga olduğu halde iki problem gözönüne alınmıştır. Bu iki probleme göre  $S(\lambda)$  matris fonksiyonu tanımlanmıştır. Gösterilmiştir ki sonlu sayıda noktalar haricinde bu  $S(\lambda)$  matris fonksiyonu, tüm ekseninde tanımlanmış  $S^h(\lambda)$  matris fonksiyonunu tek türlü tanımlar. Yarı ekseninde tanımlanmış  $S(\lambda)$  matris fonksiyonu ile  $S^h(\lambda)$  matris fonksiyonu arasındaki ilişki Riemann-Hilbert problemi yardımıyla kurulur.

Krein (1958), Gohberg ve Krein (1958) 'ın çalışmalarında Riemann-Hilbert problemi (faktörizasyon problemi) iyice incelenmiştir. Tezin ek kısmında bu çalışmalara kısaca yer verilmiştir.

Gelen dalgaların sayısı iki olduğunda (1.6) denklemler sistemi için yarı ekseninde düz ve ters saçılma problemi Güler (1996)'in doktora tezinde incelenmiştir. Ters problemin öğrenilmesi yöntemi benzer olduğundan dolayı, yani her iki halde yarı ekseninde ters saçılma probleminin öğrenilmesi tüm eksenindeki ters saçılma problemine indirgeniğinden tüm ekseninde ters saçılma problemine ait bilgiler bu tezden alınmıştır.

## 2. BÜTÜN EKSENDE SAÇILMA PROBLEMİ

### 2.1. Düz Saçılma Problemi

Bu bölümde birinci mertebeden olan aşağıdaki üç adi diferansiyel denklemler sistemi için

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = 1, 2, 3 \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

bütün ekseninde saçılma problemi incelenmiştir. Burada kompleks değerli  $c_{kj}(x)$  fonksiyonları

$c_{kk}(x) = 0$  ( $k=1,2,3$ ) ve

$$|c_{kj}(x)| \leq c \exp(-\varepsilon|x|), \quad k, j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon \text{ ve } c \text{ sabitlerdir}) \quad (2.2)$$

şartını sağlıyorlar.  $\lambda$  spektral parametre,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ler ise  $\xi_1 > 0 > \xi_2 > \xi_3$  şartını sağlayan sabitlerdir.

İleride (2.1) sistemi için yarı ekseninde gözönüne alacağımız ters saçılma problemini  $x < 0$  olduğunda

$$c_{kj}(x) = 0, \quad k, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

hali için bütün eksenindeki probleme indirgeyeceğimizden aşağıda (2.1) sistemi için her zaman sadece bu hali gözönüne alacağız. O zaman, (2.2) şartı yerine

$$|c_{kj}(x)| \leq c \exp(-\varepsilon x), \quad x > 0 \quad (2.2')$$

yazabiliriz.

Denklemin katsayıları keyfi  $x \in (-\infty, \infty)$  için sıfır olduğunda (2.1) sistemi,

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = 1, 2, 3$$

biçiminde olur. Bu denklemler sisteminin genel çözümü

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 \exp(i\lambda \xi_1 x), \\ y_2(x) &= c_2 \exp(i\lambda \xi_2 x), \\ y_3(x) &= c_3 \exp(i\lambda \xi_3 x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

olur. Burada  $c_1, c_2, c_3$  ler  $x$  'den bağımsız sabitlerdir. (2.3) 'e göre  $x < 0$  olduğunda (özel halde  $x \rightarrow -\infty$  için) (2.1) sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_1(0) \exp(i\lambda \xi_1 x), \\ y_2(x) &= y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x), \\ y_3(x) &= y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde dir. Denklemin katsayıları (2.2) şartını sağladığından  $x \rightarrow +\infty$  halinde de denklemler sisteminin çözümünün (2.4) çözümüne yakın olduğunu beklemek mümkündür. Başka bir deyişle aşağıdaki lemma doğrudur.

**Lemma 2.1.**  $c_{kj}(x)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) katsayılarının (2.2) şartını sağladığını farzedelim. O zaman  $\lambda$  reel olduğunda keyfi sınırlı  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$  çözümü aşağıdaki asimptota,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) + o(1), \\ y_2(x) &= B_1(\lambda) \exp(i\lambda \xi_2 x) + o(1), \\ y_3(x) &= B_2(\lambda) \exp(i\lambda \xi_3 x) + o(1) \end{aligned} \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.6)$$

sahiptir.

**İspat.**

$$v_k(x) = y_k(x) - i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_k (x - x')) dx', \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

yardımcı fonksiyonlarına bakalım. Kolayca görüldüğü gibi

$$v'_k(x) = i\lambda\xi_k v_k(x), \quad k = 1, 2, 3$$

olur. Buradan anlaşılacağı gibi  $x$  'den bağımsız öyle  $A, B_1, B_2$  sabitleri vardır ki, bu denklemler sisteminin çözümü

$$v_1(x) = A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x),$$

$$v_2(x) = B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x),$$

$$v_3(x) = B_2(\lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)$$

şeklindedir.

Bu çözümleri (2.7) 'de yazarsak,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_1(x-x')) dx', \\ y_2(x) &= B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_2(x-x')) dx', \\ y_3(x) &= B_2(\lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_3(x-x')) dx' \end{aligned} \quad (2.8)$$

integral denklemler sistemi elde edilir.

Bu integral denklemler sisteminin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlayalım.

(2.8) integral denklemler sistemini aşağıdaki şekilde düzenler,

$$y_1(x) \exp(-i\lambda\xi_1 x) = A + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(-i\lambda\xi_1 x') dx',$$

$$y_2(x) \exp(-i\lambda\xi_2 x) = B_1 + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(-i\lambda\xi_2 x') dx',$$

$$y_3(x) \exp(-i\lambda\xi_3 x) = B_2 + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(-i\lambda\xi_3 x') dx'$$

ve

$$z_1(x) = y_1(x) \exp(-i\lambda\xi_1 x), \quad z_2(x) = y_2(x) \exp(-i\lambda\xi_2 x), \quad z_3(x) = y_3(x) \exp(-i\lambda\xi_3 x)$$

dönüşümlerini yaparsak,

$$z_1(x) = A + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') z_j(x') \exp(i\lambda(\xi_j - \xi_1)x') dx',$$

$$z_2(x) = B_1 + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') z_j(x') \exp(i\lambda(\xi_j - \xi_2)x') dx',$$

$$z_3(x) = B_2 + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') z_j(x') \exp(i\lambda(\xi_j - \xi_3)x') dx'$$

olur. Bu denklemin

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix}$$

çözümünü, ardışık yaklaşım yönteminin yardımıyla

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(x) \tag{2.9}$$

şeklinde arayalım. Burada

$$z^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} z_1^{(k)}(x) \\ z_2^{(k)}(x) \\ z_3^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \quad z^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

$$z^{(k)} = i \int_x^\infty \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \exp(i\lambda(\xi_2 - \xi_1)x') & c_{13} \exp(i\lambda(\xi_3 - \xi_1)x') \\ c_{21} \exp(i\lambda(\xi_1 - \xi_2)x') & 0 & c_{23} \exp(i\lambda(\xi_3 - \xi_2)x') \\ c_{31} \exp(i\lambda(\xi_1 - \xi_3)x') & c_{32} \exp(i\lambda(\xi_2 - \xi_3)x') & 0 \end{pmatrix} z^{(k-1)}(x') dx' \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

dir.

(2.9) serisinin yakınsaklığını göstermek için  $\sum_{k=0}^{\infty} |z_j^{(k)}(x)|$  serisinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir.

$$z_1^{(0)}(x) = A,$$

$$z_2^{(0)}(x) = B_1,$$

$$z_3^{(0)}(x) = B_2,$$

$$\max(|A|, |B_1|, |B_2|) = \tilde{A}$$

olsun. O zaman (2.10) 'a göre

$$z_j^{(k)}(x) = i \int_x^\infty \sum_{l=1}^3 c_{jl}(x') \exp(i\lambda(\xi_l - \xi_j)x') z_l^{(k-1)}(x') dx', \quad j = 1, 2, 3$$

dir. (2.2) şartına göre  $j = 1, 2, 3$  için

$$|z_j^{(1)}(x)| \leq 2 \tilde{A} c \int_x^{\infty} \exp(-\varepsilon x') dx' = \frac{2 \tilde{A} c}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon x),$$

$$\begin{aligned} |z_j^{(2)}(x)| &\leq \int_x^{\infty} \frac{2 \tilde{A} c}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon x') 2c \exp(-\varepsilon x') dx' = \frac{2^2 \tilde{A} c^2}{\varepsilon} \frac{\exp(-2\varepsilon x)}{2\varepsilon} \\ &= \tilde{A} \left( \frac{2c}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{2!} \exp(-2\varepsilon x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_j^{(3)}(x)| &\leq \int_x^{\infty} \frac{2^2 \tilde{A} c^2}{2\varepsilon^2} \exp(-2\varepsilon x') 2c \exp(-\varepsilon x') dx' = \frac{2^3 \tilde{A} c^3}{2 \cdot 3 \varepsilon^3} \exp(-3\varepsilon x) \\ &= \tilde{A} \left( \frac{2c}{\varepsilon} \right)^3 \frac{1}{3!} \exp(-3\varepsilon x), \end{aligned}$$

olur. Tümevarım yöntemi ile  $\forall k > 3$  için,

$$|z_j^{(k)}(x)| \leq \tilde{A} \left( \frac{2c}{\varepsilon} \right)^k \frac{1}{k!} \exp(-k\varepsilon x) \leq \tilde{A} \left( \frac{2c}{\varepsilon} \right)^k \frac{1}{k!}$$

olduğunu gösterebiliriz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2c}{\varepsilon} \right)^k \frac{1}{k!}$$

majorant serisi yakınsak olduğundan (2.9) serisi düzgün yakınsaktır.

Çözüm sınırlı fonksiyonlar sınıfından olduğundan dolayı, öyle  $M$  sabiti vardır ki

$$|y_k(x)| \leq M, \quad k = 1, 2, 3$$

dir. O zaman (2.2) şartını ve  $\lambda$ 'nın reel olduğunu gözönüne alarak büyük pozitif  $x$  ler için (2.8)'den

$$\begin{aligned}
|y_1(x) - A \exp(i\lambda\xi_1 x)| &= \left| i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_1(x-x')) dx' \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^3 \int_x^\infty |c_{1j}(x')| |y_j(x')| |\exp(i\lambda\xi_1(x-x'))| dx' \leq M \sum_{j=1}^3 \int_x^\infty |c_{1j}(x')| dx' \\
&\leq Mc \sum_{j=1}^3 \int_x^\infty \exp(-\varepsilon x') dx' = \frac{3Mc}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,  $\varepsilon > 0$  olduğundan  $x \rightarrow +\infty$  için

$$y_1(x) - A \exp(i\lambda\xi_1 x) \rightarrow 0$$

olur. Yani,

$$y_1(x) = A \exp(i\lambda\xi_1 x) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty$$

asimptotu doğrudur.

Benzer olarak, (2.8) denklemler sisteminin ikinci ve üçüncü eşitliğinden (2.6) 'nın diğer eşitliklerini de ispatlayabiliriz.

**Tanım.** (2.1) denklemler sisteminin  $x \rightarrow +\infty$  daki çözümünü  $x \rightarrow -\infty$  daki çözümüne dönüştüren matris fonksiyonuna, bütün ekseninde *saçılma matrisi* denir.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi verilen başlangıç  $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$  Cauchy verilerine göre (2.1) denklemler sisteminin çözümü var ve bu çözüm tektir. Lemma 2.1 'e göre ise her bir çözüm için (2.6) asimptotik formülü doğrudur.

(2.1) denklemler sisteminin katsayıları (2.2) şartını sağladığından, bu halde bütün ekseninde saçılma matrisi

$$(A \exp(i\lambda\xi_1 x), B_1 \exp(i\lambda\xi_2 x), B_2 \exp(i\lambda\xi_3 x))^T = \text{diag}(\exp(i\lambda\xi_1 x), \exp(i\lambda\xi_2 x), \exp(i\lambda\xi_3 x)) (A, B_1, B_2)^T$$

vektörünü,

$$(y_1(0) \exp(i\lambda\xi_1 x), y_2(0) \exp(i\lambda\xi_2 x), y_3(0) \exp(i\lambda\xi_3 x))^T = \text{diag}(\exp(i\lambda\xi_1 x), \exp(i\lambda\xi_2 x), \exp(i\lambda\xi_3 x)) (y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T$$

vektörüne dönüştüren bir matris olur. Bu matrisi  $S^{\lambda}$  ile gösterirsek

$$S^{\lambda} \begin{pmatrix} A \exp(i\lambda\xi_1 x) \\ B_1 \exp(i\lambda\xi_2 x) \\ B_2 \exp(i\lambda\xi_3 x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \exp(i\lambda\xi_1 x) \\ y_2(0) \exp(i\lambda\xi_2 x) \\ y_3(0) \exp(i\lambda\xi_3 x) \end{pmatrix}$$

veya

$$S^{\lambda} \begin{pmatrix} \exp(i\lambda\xi_1 x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\lambda\xi_2 x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\lambda\xi_3 x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \exp(i\lambda\xi_1 x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\lambda\xi_2 x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\lambda\xi_3 x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise

$$\begin{pmatrix} \exp(-i\lambda\xi_1 x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\lambda\xi_2 x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\lambda\xi_3 x) \end{pmatrix} S^{\lambda} \begin{pmatrix} \exp(i\lambda\xi_1 x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\lambda\xi_2 x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\lambda\xi_3 x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) 'de  $x=0$  yazılırsa,  $S^f$  saçılma matris fonksiyonunun,  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T$  vektörünü  $(A, B_1, B_2)$  vektörüne dönüştürdüğü görülür.

## 2.2. Çözümün İntegral Temsilleri

(2.1) sisteminin çözümünün integral temsili denildiğinde homojen denklemin  $(c_{kj}(x) = 0, k, j = 1, 2, 3)$  çözümünü homojen olmayan denklemin çözümüne dönüştüren ve sonsuzluktaki asimptotları, homojen denklemin çözümü ile aynı olan matris fonksiyonlar anlaşılır. Bu integral temsilleri, homojen denklemin çözümü olan aşağıdaki altı vektörü

$$h_1(x, \lambda) = (y_1(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)),$$

$$h_2(x, \lambda) = (A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)),$$

$$h_3(x, \lambda) = (A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)),$$

(2.12)

$$h_4(x, \lambda) = (A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), B_2(\lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)),$$

$$h_5(x, \lambda) = (y_1(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), B_2(\lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)),$$

$$h_6(x, \lambda) = (y_1(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), B_2(\lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x)),$$

(2.1) sisteminin çözümüne dönüştürür.

Yukarıda görüldüğü gibi,

$$h_4(x, \lambda) = (A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x), B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x), B_2(\lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x))$$

asimptotuna ( $x \rightarrow \infty$  için sınır şartına) sahip olan çözüm (2.8) denklemini sağlıyor. Buna benzer olarak  $h_1(x, \lambda), h_2(x, \lambda), h_3(x, \lambda), h_5(x, \lambda), h_6(x, \lambda)$  sınır şartlarına sahip çözümlerin

sağladığı integral denklemler sistemlerini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$h_1(x, \lambda)$  için,

$$y_1(x, \lambda) = y_1(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_1(x-x')) dx',$$

$$y_2(x, \lambda) = y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_2(x-x')) dx',$$

$$y_3(x, \lambda) = y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_3(x-x')) dx'$$

$h_2(x, \lambda)$  için,

$$y_1(x, \lambda) = A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_1(x-x')) dx',$$

$$y_2(x, \lambda) = y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_2(x-x')) dx',$$

$$y_3(x, \lambda) = y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_3(x-x')) dx'$$

$h_3(x, \lambda)$  için,

$$y_1(x, \lambda) = A(\lambda) \exp(i\lambda\xi_1 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_1(x-x')) dx',$$

$$y_2(x, \lambda) = B_1(\lambda) \exp(i\lambda\xi_2 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_2(x-x')) dx',$$

$$y_3(x, \lambda) = y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda\xi_3 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_3(x-x')) dx'$$

$h_3(x, \lambda)$  için,

$$y_1(x, \lambda) = y_1(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_1 (x - x')) dx',$$

$$y_2(x, \lambda) = B_1(\lambda) \exp(i\lambda \xi_2 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_2 (x - x')) dx',$$

$$y_3(x, \lambda) = B_2(\lambda) \exp(i\lambda \xi_3 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_3 (x - x')) dx'$$

$h_6(x, \lambda)$  için,

$$y_1(x, \lambda) = y_1(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_1 (x - x')) dx',$$

$$y_2(x, \lambda) = y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_2 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_2 (x - x')) dx',$$

$$y_3(x, \lambda) = B_2(\lambda) \exp(i\lambda \xi_3 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_3 (x - x')) dx'.$$

Aşağıdaki lemma doğrudur.

**Lemma 2.2.** (2.1) denklemler sisteminin  $c_{kj}(x)$  ( $k, j = 1, 2, 3$ ) katsayılarının (2.2) ve (2.3) şartlarını sağladıklarını farzedelim. O zaman,  $\text{Im } \lambda = 0$  olduğunda (2.12) deki her bir vektör için (2.1) sisteminin tek bir sınırlı çözümü var ve bu çözümler aşağıdaki şekilde gösterilen integral temsillere sahiptirler.

### 1. tip integral temsili

$$y_1(x) = y_1(0) \exp(i\lambda \xi_1 x) + y_1(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{11}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

$$+ y_2(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{12}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{13}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) + y_1(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{21}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\
&+ y_2(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{22}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{23}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) + y_1(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{31}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\
&+ y_2(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{32}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{33}^1(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau
\end{aligned}$$

## 2.tip integral temsili

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= A \exp(i\lambda \xi_1 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{11}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\
&+ y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{12}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{13}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{21}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\
&+ y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{22}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{23}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{31}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\
&+ y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{32}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{33}^2(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau
\end{aligned}$$

### 3.tip integral temsili

$$y_1(x) = A \exp(i\lambda \xi_1 x) + A \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{12}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{13}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2(x) = B_1 \exp(i\lambda \xi_2 x) + A \int_{-\infty}^{\infty} R_{21}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{22}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{23}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau, \quad (2.15)$$

$$y_3(x) = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) + A \int_{-\infty}^{\infty} R_{31}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{32}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{33}^3(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

### 4.tip integral temsili

$$y_1(x) = A \exp(i\lambda \xi_1 x) + A \int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{11}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{13}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2(x) = B_1 \exp(i\lambda \xi_2 x) + A \int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{21}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{22}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{23}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau, \quad (2.16)$$

$$y_3(x) = B_2 \exp(i\lambda \xi_3 x) + A \int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{31}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{32}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{33}^4(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

### 5.tip integral temsili

$$y_1(x) = y_1(0) \exp(i\lambda \xi_1 x) + y_1(0) \int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{11}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{12}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{13}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2(x) = B_1 \exp(i\lambda \xi_2 x) + y_1(0) \int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{21}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{22}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{23}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau, \quad (2.17)$$

$$y_3(x) = B_2 \exp(i\lambda \xi_3 x) + y_1(0) \int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{31}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + B_1 \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{32}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{33}^5(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

### 6.tip integral temsili

$$y_1(x) = y_1(0) \exp(i\lambda \xi_1 x) + y_1(0) \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{11}^6(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + y_2(0) \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{12}^6(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{\xi_3 x}^{\infty} R_{13}^6(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2(x) = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) + y_1(0) \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{21}^6(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + y_2(0) \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{22}^6(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + B_2 \int_{\xi_3 x}^{\infty} R_{23}^6(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) = & B_2 \exp(i\lambda\xi_3 x) + y_1(0) \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{31}^6(x, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \\
& + y_2(0) \int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{32}^6(x, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau + B_2 \int_{\xi_3 x}^{\infty} R_{33}^6(x, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Burada integral temsillerin çekirdekleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlamaktadır.

$$|R_{k2}^2(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2}\right), \quad \tau \leq \xi_2 x, \quad k = 1, 2, 3$$

$$|R_{k1}^2(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_1 x,$$

$$|R_{k3}^2(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3}\right), \quad \tau \leq \xi_2 x,$$

$$|R_{k3}^4(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \leq \xi_3 x, \quad k = 1, 2, 3$$

$$|R_{k2}^4(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_2 x,$$

$$|R_{k1}^4(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_1 x,$$

$$|R_{k3}^3(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \leq \xi_3 x, \quad k = 1, 2, 3$$

$$|R_{k2}^3(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2}\right), \quad \tau \leq \xi_2 x$$

$$|R_{k1}^3(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \leq \xi_1 x,$$

$$|R_{k1}^5(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_1 x, \quad k = 1, 2, 3$$

$$|R_{k2}^5(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_2 x$$

$$|R_{k3}^5(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3}\right), \quad \tau \leq \xi_2 x,$$

$$|R_{k1}^6(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_1 x, \quad k = 1, 2, 3$$

$$|R_{k2}^6(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3}\right), \quad \tau \geq \xi_2 x$$

$$|R_{k3}^6(x, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3}\right), \quad \tau \leq \xi_2 x.$$

İntegral temsillerin bu çekirdekleri, (2.1) denklemler sisteminin katsayılarıyla aşağıdaki şekilde ilişkilidir.

$$R_{13}^1(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{13}(x), \quad R_{21}^1(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{21}(x),$$

$$R_{12}^1(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{12}(x), \quad R_{32}^1(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{32}(x),$$

$$R_{23}^1(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{23}(x), \quad R_{31}^1(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{31}(x),$$

$$R_{12}^2(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12}(x), \quad R_{21}^2(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{21}(x),$$

$$R_{13}^2(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13}(x), \quad R_{23}^2(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{23}(x),$$

$$R_{31}^2(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{31}(x), \quad R_{32}^2(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{32}(x),$$

$$R_{12}^3(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12}(x), \quad R_{13}^3(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13}(x),$$

$$R_{21}^3(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{21}(x), \quad R_{31}^3(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{31}(x),$$

$$R_{23}^3(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{23}(x), \quad R_{32}^3(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{32}(x),$$

$$R_{21}^4(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{21}(x), \quad R_{31}^4(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{31}(x),$$

(2.19)

$$R_{13}^4(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13}(x), \quad R_{23}^4(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{23}(x),$$

$$R_{12}^4(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12}(x), \quad R_{32}^4(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{32}(x),$$

$$R_{21}^5(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{21}(x), \quad R_{31}^5(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{31}(x),$$

$$R_{12}^5(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{12}(x), \quad R_{32}^5(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{32}(x),$$

$$R_{13}^5(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13}(x), \quad R_{23}^5(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{23}(x),$$

$$R_{12}^6(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{12}(x), \quad R_{32}^6(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{32}(x),$$

$$R_{13}^6(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{13}(x), \quad R_{23}^6(x, \xi_3 x) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{23}(x)$$

$$R_{21}^6(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{21}(x), \quad R_{31}^6(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13}(x),$$

**İspat.** Örneğin 2. tip integral temsili için lemmanın ispatını verelim. İspatı vermeden önce çözümün niçin (2.14) şeklinde arandığını anlamaya çalışalım.

(2.1) denklemler sisteminin  $x \rightarrow +\infty$  'daki asimptotu,

$$h_2(x, \lambda) = (A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x), y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x), y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x))$$

olan çözümünün aranması,

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_1 (x-x')) dx', \\ y_2(x, \lambda) &= y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_2 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_2 (x-x')) dx', \\ y_3(x, \lambda) &= y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_3 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda \xi_3 (x-x')) dx' \end{aligned} \quad (2.20)$$

integral denklemler sisteminin çözümünün aranmasına eşdeğerdir.

(2.20) 'nin yardımıyla alınan ikinci

$$y_1^{(2)}(x, \lambda) = A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j^{(1)}(x') \exp(i\lambda \xi_1 (x - x')) dx',$$

$$y_2^{(2)}(x, \lambda) = y_2(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_2 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j^{(1)}(x') \exp(i\lambda \xi_2 (x - x')) dx',$$

$$y_3^{(2)}(x, \lambda) = y_3(0, \lambda) \exp(i\lambda \xi_3 x) - i \int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j^{(1)}(x') \exp(i\lambda \xi_3 (x - x')) dx'$$

yaklaşımında,

$$y_1^{(1)}(x) = A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x),$$

$$y_2^{(1)}(x) = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x),$$

$$y_3^{(1)}(x) = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x)$$

birinci yaklaşımını gözönüne alırsak,

$$y_1^{(2)}(x) = A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) + i y_2(0) \int_x^\infty c_{12}(x') \exp[i\lambda(\xi_1 x - (\xi_1 - \xi_2)x')] dx' \\ + i y_3(0) \int_x^\infty c_{13}(x') \exp[i\lambda(\xi_1 x - (\xi_1 - \xi_3)x')] dx',$$

$$y_2^{(2)}(x) = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) - i A(\lambda) \int_0^x c_{21}(x') \exp[i\lambda(\xi_2 x + (\xi_1 - \xi_2)x')] dx' \\ - i y_3(0) \int_0^x c_{23}(x') \exp[i\lambda(\xi_2 x - (\xi_2 - \xi_3)x')] dx',$$

$$y_3^{(2)}(x) = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) - iA(\lambda) \int_0^x c_{31}(x') \exp[i\lambda(\xi_3 x + (\xi_1 - \xi_3)x')] dx' \\ - i y_2(0) \int_0^x c_{32}(x') \exp[i\lambda(\xi_3 x + (\xi_2 - \xi_3)x')] dx',$$

olur. İfadeleri düzenlersek,

$$y_1^{(2)}(x) = A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) + \frac{i y_2(0)}{\xi_1 - \xi_2} \int_{-\infty}^{\xi_2 x} c_{12} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + \frac{i y_3(0)}{\xi_1 - \xi_3} \int_{-\infty}^{\xi_3 x} c_{13} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2^{(2)}(x) = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) - \frac{i A(\lambda)}{\xi_1 - \xi_2} \int_{\xi_2 x}^{\xi_1 x} c_{21} \left( \frac{\tau - \xi_2 x}{\xi_1 - \xi_2} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + \frac{i y_3(0)}{\xi_2 - \xi_3} \int_{\xi_3 x}^{\xi_2 x} c_{23} \left( \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_3^{(2)}(x) = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) - \frac{i A(\lambda)}{\xi_1 - \xi_3} \int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} c_{31} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ - \frac{i y_2(0)}{\xi_2 - \xi_3} \int_{\xi_3 x}^{\xi_2 x} c_{32} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

olur. Buradan,

$$y_1^{(2)}(x) = A(\lambda) \exp(i\lambda \xi_1 x) + \frac{i y_2(0)}{\xi_1 - \xi_2} \int_{-\infty}^{\xi_2 x} c_{12} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2} \right) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + \frac{i y_3(0)}{\xi_1 - \xi_3} \int_{-\infty}^{\xi_3 x} c_{13} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3} \right) H(\xi_3 x - \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2^{(2)}(x) = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) - \frac{i A(\lambda)}{\xi_1 - \xi_2} \int_{-\infty}^{\xi_1 x} c_{21} \left( \frac{\tau - \xi_2 x}{\xi_1 - \xi_2} \right) H(\tau - \xi_2 x) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + \frac{i y_3(0)}{\xi_2 - \xi_3} \int_{-\infty}^{\xi_2 x} c_{23} \left( \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_3^{(2)}(x) = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) - \frac{i A(\lambda)}{\xi_1 - \xi_3} \int_{-\infty}^{\xi_1 x} c_{31} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ - \frac{i y_2(0)}{\xi_2 - \xi_3} \int_{-\infty}^{\xi_2 x} c_{32} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

olur. Burada,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Heaviside fonksiyonudur.

$$R_{12}^{(2)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2} \right), \quad R_{13}^{(2)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3} \right) H(\xi_3 x - \tau),$$

$$R_{21}^{(2)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{21} \left( \frac{\tau - \xi_2 x}{\xi_1 - \xi_2} \right) H(\tau - \xi_2 x), \quad R_{23}^{(2)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{23} \left( \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x),$$

$$R_{31}^{(2)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{31} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x), \quad R_{32}^{(2)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{32} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x),$$

ile gösterirsek,

$$y_1^{(2)} = A \exp(i\lambda \xi_1 x) + y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{12}^{(2)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{13}^{(2)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2^{(2)} = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{21}^{(2)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{23}^{(2)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_3^{(2)} = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{31}^{(2)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{32}^{(2)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

olacaktır. Çözümün üçüncü yaklaşımını yazarsak,

$$y_1^{(3)}(x) = A \exp(i\lambda \xi_1 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{11}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{12}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{13}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_2^{(3)}(x) = y_2(0) \exp(i\lambda \xi_2 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{21}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{22}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{23}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau,$$

$$y_3^{(3)}(x) = y_3(0) \exp(i\lambda \xi_3 x) + A \int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{31}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau \\ + y_2(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{32}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau + y_3(0) \int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{33}^{(3)}(x, \tau) \exp(i\lambda \tau) d\tau$$

olduğu görülür.

Çözümün ikinci ve üçüncü yaklaşımı için aldığımız ifadeler, bizi çözümün (2.14) şeklinde aranabileceği düşüncesine getirir. Diğer integral temsilleri için de benzer şekilde ispat yapılır.

Şimdi de Lemma 2.2 'yi 2.tip integral temsili için ispatlayalım.

(2.14) integral temsili (2.20) integral denklemler sisteminde yazıp,  $A, B_1, B_2$  sabitlerinin keyfi olduklarını gözönüne alırsak,  $R_{kj}^2$  ( $k, j= 1, 2, 3$  için) fonksiyonları için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz.

$-\infty < \tau \leq \xi_1 x$  için,

$$R_{11}^2(x, \tau) - i \int_x^\infty \left[ R_{21}^2(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{12}(x') + R_{31}^2(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{13}(x') \right] dx' = 0,$$

$$\begin{aligned} R_{21}^2(x, \tau) + \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{21} \left( \frac{\tau - \xi_2 x}{\xi_1 - \xi_2} \right) H(\tau - \xi_2 x) \\ + i \int_0^x \left[ R_{11}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{21}(x') + R_{31}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{23}(x') \right] H(\xi_2 x - \tau) dx' \\ + i \int_{\frac{\tau - \xi_2 x}{\xi_1 - \xi_2}}^x \left[ R_{11}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{21}(x') + R_{31}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{23}(x') \right] H(\tau - \xi_2 x) dx' = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} R_{31}^2(x, \tau) + \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{31} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3} \right) + i \int_0^x \left[ R_{11}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') + R_{21}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\xi_3 x - \tau) dx' \\ + i \int_{\frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_1 - \xi_3}}^x \left[ R_{11}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') + R_{21}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\tau - \xi_3 x) dx' = 0, \end{aligned}$$

$-\infty < \tau \leq \xi_2 x$  için,

$$R_{12}^2(x, \tau) - \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2} \right) - i \int_x^{\frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2}} \left[ R_{22}^2(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{12}(x') + R_{32}^2(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{13}(x') \right] dx' = 0,$$

$$R_{22}^2(x, \tau) + i \int_0^x R_{12}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{21}(x') dx' + i \int_0^x R_{32}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{23}(x') dx' = 0, \quad (2.22)$$

$$R_{32}^2(x, \tau) + \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{32} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right) H(\tau - \xi_3 x) + i \int_0^x \left[ R_{12}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') + R_{22}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\xi_3 x - \tau) dx' + i \int_{\frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3}}^x \left[ R_{12}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') + R_{22}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\tau - \xi_3 x) dx' = 0,$$

$-\infty < \tau \leq \xi_2 x$  için,

$$R_{13}^2(x, \tau) - \frac{i}{\xi_1 - \xi_3} c_{13} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3} \right) H(\xi_3 x - \tau) - i \int_x^{\frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_3}} \left[ R_{23}^2(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{12}(x') + R_{33}^2(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{13}(x') \right] dx' = 0,$$

$$R_{23}^2(x, \tau) + \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{23} \left( \frac{\xi_2 x - \tau}{\xi_3 - \xi_2} \right) H(\tau - \xi_3 x) + i \int_0^x \left[ R_{13}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{21}(x') + R_{33}^2(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{23}(x') \right] dx' = 0,$$

$$\begin{aligned}
R_{33}^2(x, \tau) + i \int_0^x & \left[ R_{13}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') \right. \\
& \left. + R_{23}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\xi_3 x - \tau) dx' \\
+ i \int_{\frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3}}^x & \left[ R_{13}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') \right. \\
& \left. + R_{23}^2(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\tau - \xi_3 x) dx' = 0.
\end{aligned}$$

Bu integral denklemler sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği ardışık yaklaşım yönteminin yardımıyla ispatlanır. Örneğin (2.22) 'yi ispatlayalım.

$\tau \leq \xi_2 x$  için,

$$R_{12}^{2(0)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12} \left( \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2} \right),$$

$$R_{22}^{2(0)}(x, \tau) = 0,$$

$$R_{32}^{2(0)}(x, \tau) = \frac{i}{\xi_3 - \xi_2} c_{32} \left( \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right),$$

almakla,

$$\begin{aligned}
R_{12}^{2(n)}(x, \tau) = i \int_x^{\frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2}} & \left[ R_{22}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{12}(x') \right. \\
& \left. + R_{32}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_1 x + \xi_1 x') c_{13}(x') \right] dx',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22}^{2(n)}(x, \tau) = -i \int_0^x & \left[ R_{12}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{21}(x') \right. \\
& \left. + R_{32}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_2 x + \xi_2 x') c_{23}(x') \right] dx',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{32}^{2(n)}(x, \tau) = & -i \int_0^x \left[ R_{12}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') \right. \\
& \left. + R_{22}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\xi_3 x - \tau) dx' \\
& -i \int_{\frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3}}^x \left[ R_{12}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{31}(x') \right. \\
& \left. + R_{22}^{2(n-1)}(x', \tau - \xi_3 x + \xi_3 x') c_{32}(x') \right] H(\tau - \xi_3 x) dx'
\end{aligned}$$

olacaktır.

$$\max \left\{ \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}, \frac{1}{\xi_2 - \xi_3} \right\} = a$$

olsun.

$$\max \left\{ \exp \left( -\varepsilon \frac{\xi_1 x - \tau}{\xi_1 - \xi_2} \right), \exp \left( -\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right) \right\} = \exp \left( -\varepsilon \frac{\tau - \xi_3 x}{\xi_2 - \xi_3} \right)$$

olduğundan,

$$|R_{12}^{2(0)}(x, \tau)| \leq a \exp \left( \varepsilon \frac{\xi_3 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3} \right),$$

$$|R_{22}^{2(0)}(x, \tau)| = 0,$$

$$|R_{32}^{2(0)}(x, \tau)| \leq a \exp \left( \varepsilon \frac{\xi_3 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3} \right),$$

yazılabilir.

Tümevarım yönteminin yardımıyla,

$$|R_{k2}^{2(n)}(x, \tau)| \leq N \exp\left(\varepsilon \frac{\xi_3 x - \tau}{\xi_2 - \xi_3}\right) \quad k = 1, 2, 3$$

olduğunu gösterebiliriz.

(2.21) ve (2.22) denklemlerinde  $\tau = \xi_1 x$  ve  $\tau = \xi_2 x$  yazarsak, (2.19) eşitliğinin

$$R_{12}^2(x, \xi_2 x) = \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} c_{12}(x), \quad R_{21}^2(x, \xi_1 x) = \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{21}(x)$$

ifadelerini elde etmiş oluruz. Benzer olarak, diğer eşitlikleri de göstermek mümkündür.

### 2.3. Çözümün Analitik İntegral Temsilleri

2.2 'de altı tane integral temsili olduğunu görmüştük. Bu integral temsillerinde sınırlar  $-\infty$  'dan  $+\infty$  'a kadar değiştiğinde, bu integral temsillerini (veya çözümlerini) reel eksenden analitik olarak devam ettirmek mümkün değildir.

Reel eksenden analitik devam ettirilebilen integral temsillere çözümün analitik integral temsilleri diyeceğiz. Analitik temsile sahip çözümler, bütün eksende ters problemin öğrenilmesinde çok önemli bir yer tutar.

**Lemma 2.3.** (2.1) denklemler sisteminin keyfi sınırlı çözümü aşağıdaki analitik integral temsillere sahiptir.

$$y(x, \lambda) = (I + W_-(x, \lambda)) \exp(i\lambda Jx) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$y(x, \lambda) = (I + W_+(x, \lambda)) \exp(i\lambda Jx) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Burada,

$$J = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$W_-(x, \lambda) = \int_{-\infty}^0 \tilde{W}_-(x, \tau, \lambda) \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$$W_+(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \tilde{W}_+(x, \tau, \lambda) \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$$\tilde{W}_-(x, \tau, \lambda) = \begin{pmatrix} H[\tau - (\xi_3 - \xi_1)x] R_{11}^1(x, \tau + \xi_1 x) & R_{12}^2(x, \tau + \xi_2 x) & R_{13}^3(x, \tau + \xi_3 x) \\ H[\tau - (\xi_3 - \xi_1)x] R_{21}^1(x, \tau + \xi_1 x) & R_{22}^2(x, \tau + \xi_2 x) & R_{23}^3(x, \tau + \xi_3 x) \\ H[\tau - (\xi_3 - \xi_1)x] R_{31}^1(x, \tau + \xi_1 x) & R_{32}^2(x, \tau + \xi_2 x) & R_{33}^3(x, \tau + \xi_3 x) \end{pmatrix} \quad (2.23')$$

$$\tilde{W}_+(x, \tau, \lambda) = \begin{pmatrix} R_{11}^4(x, \tau + \xi_1 x) & R_{12}^5(x, \tau + \xi_2 x) & R_{13}^6(x, \tau + \xi_3 x) \\ R_{21}^4(x, \tau + \xi_1 x) & R_{22}^5(x, \tau + \xi_2 x) & R_{23}^6(x, \tau + \xi_3 x) \\ R_{31}^4(x, \tau + \xi_1 x) & R_{32}^5(x, \tau + \xi_2 x) & R_{33}^6(x, \tau + \xi_3 x) \end{pmatrix} \quad (2.24')$$

şeklindedir.

Burada  $C = (C_1, C_2, C_3)^T$  ve  $D = (D_1, D_2, D_3)^T$  vektörleri  $y(x, \lambda)$  çözümüne göre tek türlü tanımlanırlar ve tersine, keyfi  $C$  ve  $D$  vektörleri için (2.23) ve (2.24) formülleri sınırlı fonksiyonlar sınıfında (2.1) denklemler sisteminin çözümlerini verir.

$\tilde{W}_-(x, \tau, \lambda)$  ve  $\tilde{W}_+(x, \tau, \lambda)$  matris çekirdekleri katsayılarla tek türlü tanımlanır ve  $x \geq 0$  için aşağıdaki şekilde ilişki vardır:

$$i[J, \tilde{W}_-(x, 0, \lambda)] = -c(x),$$

$$x > 0 \quad (2.25)$$

$$i[J, \tilde{W}_+(x, 0, \lambda)] = c(x),$$

$$i[J, \tilde{W}_+(x, 0, \lambda) - \tilde{W}_-(x, 0, \lambda)] = c(0), \quad (2.26)$$

burada  $[A, B] = AB - BA$  iki matrisin komutantıdır.

**İspat.** (2.23) ve (2.24) analitik matris integral temsillerinin sütunları, (2.13)-(2.18) integral temsillerinden oluşturulduğundan bu temsillerin denklemler sistemini sağladığı görülmüştür.

(2.23) ve (2.24) 'den aşağıdaki

$$(I + W_-(x, \lambda)) \exp(i\lambda Jx) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = (I + W_+(x, \lambda)) \exp(i\lambda Jx) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

eşitliğini yazabiliriz.

$C = (C_1, C_2, C_3)^T$  vektörünü  $D = (D_1, D_2, D_3)^T$  vektörüne dönüştüren matrise geçit matrisi denir. Geçit matrisini  $S^{f_2}(\lambda)$  ile gösterelim. Yani

$$(D_1, D_2, D_3)^T = S^{f_2}(\lambda) (C_1, C_2, C_3)^T$$

dir.(2.27) 'den

$$S^{f_2}(\lambda) = \exp(-i\lambda Jx) (I + W_+(x, \lambda))^{-1} (I + W_-(x, \lambda)) \exp(i\lambda Jx)$$

veya

$$\exp(i\lambda Jx) S^{f_2}(\lambda) \exp(-i\lambda Jx) = (I + W_+(x, \lambda))^{-1} (I + W_-(x, \lambda)) \quad (2.28)$$

elde edilir. Burada  $x = 0$  yazılırsa,

$$S^{f_2}(\lambda) = (I + W_+(0, \lambda))^{-1} (I + W_-(0, \lambda)) \quad (2.29)$$

olur.

(2.20), (2.23'), (2.24') ifadelerinden (2.25) ve (2.26) kolayca ispatlanır.

Aşağıda vereceğimiz lemma  $S^{f_1}(\lambda)$  ve  $S^{f_2}(\lambda)$  matris fonksiyonlarının üçgen matrislerin çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini göstermektedir.

**Lemma 2.4.**  $(A, B_1, B_2)^T$ ,  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T$  vektörleri  $C = (C_1, C_2, C_3)^T$ ,  $D = (D_1, D_2, D_3)^T$  vektörleri ile aşağıdaki üçgen matrislerin yardımıyla,

$$\begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_{11}^-(\lambda) & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 1 + b_{22}^-(\lambda) & 0 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & 1 + b_{33}^-(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f_{12}(\lambda) & f_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & f_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0, \lambda) \\ y_2(0, \lambda) \\ y_3(0, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^-(\lambda) & a_{13}^-(\lambda) \\ 0 & 1 & a_{23}^-(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0, \lambda) \\ y_2(0, \lambda) \\ y_3(0, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + d_{11}^+(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^+(\lambda) & 1 + d_{22}^+(\lambda) & 0 \\ d_{31}^+(\lambda) & d_{32}^+(\lambda) & 1 + d_{33}^+(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

ifade edilir. Burada,  $b_{ii}^-(\lambda)$  ( $i=1,2,3$ ),  $a_{12}^-(\lambda), a_{13}^-(\lambda), a_{23}^-(\lambda)$  aşağı yarı düzlemde ( $\text{Im} \lambda < 0$  için) analitik fonksiyonlar,  $d_{ij}^+(\lambda)$  lar ( $\text{Im} \lambda > 0$  için) ise yukarı yarı düzlemde analitik fonksiyonlardır.

$$b_{ii}^-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 b_{ii}(\tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$d_{11}^+(\lambda) = \int_0^{\infty} R_{11}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad d_{21}^+(\lambda) = \int_0^{\infty} R_{21}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$$d_{22}^+(\lambda) = \int_0^{\infty} R_{22}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad d_{31}^+(\lambda) = \int_0^{\infty} R_{31}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad (2.34)$$

$$d_{33}^+(\lambda) = \int_0^{\infty} R_{33}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad d_{32}^+(\lambda) = \int_0^{\infty} R_{32}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$$a_{12}^-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 R_{12}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad a_{13}^-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 R_{13}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$$a_{23}^-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 R_{23}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$b_{21}(\lambda), b_{31}(\lambda), b_{32}(\lambda), f_{12}(\lambda), f_{13}(\lambda), f_{23}(\lambda)$  fonksiyonları ise reel ekseninde tanımlanmış

$\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau$  şeklinde olan fonksiyonlardır.

**İspat.** (2.30) ifadesini ispatlamak için çözümün  $C = (C_1, C_2, C_3)^T$  vektörü ile ifade edilen (2.23) analitik temsilini (2.8) integral denklemler sisteminde yerine yazalım.

(2.23) analitik temsilinin çekirdeklerinin sağladığı denklemleri gözönüne alırsak, (2.30) 'u ispatlamış oluruz.

Benzer şekilde (2.31), (2.32), (2.33) ifadeleri de ispatlanabilir.

(2.30)-(2.33) formüllerinin  $S^{f_1}(\lambda)$  ve  $S^{f_2}(\lambda)$  matris fonksiyonlarının tanımlarını gözönüne alırsak, bu matris fonksiyonları iki taraflı üçgen matrislerin çarpımları şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
 S^{f_1}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^-(\lambda) & a_{13}^-(\lambda) \\ 0 & 1 & a_{23}^-(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+b_{11}^-(\lambda) & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 1+b_{22}^-(\lambda) & 0 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & 1+b_{33}^-(\lambda) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & f_{12}(\lambda) & f_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & f_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+d_{11}^+(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^+(\lambda) & 1+d_{22}^+(\lambda) & 0 \\ d_{31}^+(\lambda) & d_{32}^+(\lambda) & 1+d_{33}^+(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S^{f_2}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & f_{12}(\lambda) & f_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & f_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+b_{11}^-(\lambda) & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 1+b_{22}^-(\lambda) & 0 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & 1+b_{33}^-(\lambda) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1+d_{11}^+(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^+(\lambda) & 1+d_{22}^+(\lambda) & 0 \\ d_{31}^+(\lambda) & d_{32}^+(\lambda) & 1+d_{33}^+(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^-(\lambda) & a_{13}^-(\lambda) \\ 0 & 1 & a_{23}^-(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

(2.29) ' dan

$$W_+(0, \lambda) = \begin{pmatrix} d_{11}^+(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^+(\lambda) & d_{22}^+(\lambda) & 0 \\ d_{31}^+(\lambda) & d_{32}^+(\lambda) & d_{33}^+(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$W_-(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^-(\lambda) & a_{13}^-(\lambda) \\ 0 & 1 & a_{23}^-(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Bu formüllerden görüldüğü gibi  $S^{f_1}(\lambda)$  ve  $S^{f_2}(\lambda)$  matris fonksiyonları birbiri ile tek türlü tanımlanır.

(2.35) ve (2.36) formüllerinden ise  $S^{f_1}(\lambda)$  matris fonksiyonunun sıfırlarının,  $S^{f_2}(\lambda)$  matris fonksiyonunun sıfırları kutup noktalarının ise,  $S^{f_2}(\lambda)$  matris fonksiyonunun kutup noktaları olduğunu kolayca görebiliriz.

(2.35) formülünden kolayca görüldüğü gibi  $S^{f_1}(\lambda)$  matris fonksiyonunun sıfırları  $1+b_{kk}^-(\lambda)=0$  ( $k=1,2,3$ ) denkleminin, kutup noktaları ise  $1+d_{ii}^+(\lambda)=0$  ( $i=1,2,3$ ) denkleminin kökleridir.

$S^{f_1}(\lambda)$  ve  $S^{f_2}(\lambda)$  fonksiyonlarının sıfırları ve kutup noktalarının sonlu sayıda olduğu aşağıdaki lemmadan alınır.

**Lemma 2.5.** Öyle  $\varepsilon_0 > 0$  vardır ki,

$$1. \quad 1+d_{ii}^+(\lambda)=0 \quad (i=1,2,3) \quad \text{fonksiyonları} \quad \text{Im } \lambda > -\varepsilon_0,$$

$$1+b_{kk}^-(\lambda)=0 \quad (k=1,2,3) \quad \text{fonksiyonları ise} \quad \text{Im } \lambda < \varepsilon_0$$

için analitik fonksiyonlardır.  $|\lambda| \rightarrow \infty$  olduğunda aşağıdaki asimptotik ifade doğrudur.

$$1+d_{ii}^+(\lambda)=1+o(1) \quad (i=1,2,3) \quad \text{Im } \lambda \geq -\varepsilon_0,$$

$$1+b_{kk}^-(\lambda)=1+o(1) \quad (k=1,2,3) \quad \text{Im } \lambda \leq \varepsilon_0,$$

2.  $1+d_{11}^+(\lambda)$  ve  $1+b_{kk}^-(\lambda)$  fonksiyonlarının sıfırları sonlu sayıdadır.

3.  $0 < |\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon_0$  olduğunda,

$$1 + d_{11}^+(\lambda) \neq 0 \quad (i=1,2,3) \quad \text{ve} \quad 1 + b_{kk}^-(\lambda) \neq 0 \quad (k=1,2,3) \quad \text{olacaktır.}$$

**İspat.**  $|R_{11}^4(0, \tau)| \leq N \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau}{\xi_1 - \xi_3}\right)$  olduğundan,

$$\begin{aligned} |d_{11}^+(\lambda)| &\leq N \int_0^{\infty} |R_{11}^4(0, \tau)| |\exp(i\lambda\tau)| d\tau \\ &\leq N \int_0^{\infty} \exp\left(-\varepsilon \frac{\tau}{\xi_1 - \xi_3}\right) |\exp(i \operatorname{Re} \lambda \tau)| |\exp(-\operatorname{Im} \lambda \tau)| d\tau \\ &= N \int_0^{\infty} \exp\left[-\tau \left(\operatorname{Im} \lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}\right)\right] d\tau = \frac{N}{\operatorname{Im} \lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im} \lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3} > 0$  veya  $\operatorname{Im} \lambda > -\frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}$  olduğunda integral yakınsaktır.

Keyfi  $\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}$  için,  $\operatorname{Im} \lambda > \frac{-\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}$  olduğundan dolayı  $1 + d_{11}^+(\lambda)$  fonksiyonu  $\operatorname{Im} \lambda \geq -\varepsilon_0$

için analitik olur.

$d_{11}^+(\lambda)$  fonksiyonu için  $|d_{11}^+(\lambda)| < \frac{N}{\operatorname{Im} \lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}}$  olduğundan,

$|\lambda| \rightarrow \infty$  için  $|d_{11}^+(\lambda)| \rightarrow 0$  olur. Buradan da  $1 + d_{11}^+(\lambda) = 1 + o(1)$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$  için olduğu görülür.

$1 + d_{11}^+(\lambda)$  fonksiyonu,  $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0$  'da analitik olduğundan ve  $|\lambda| \rightarrow \infty$  için 1 'e yaklaştığından bu fonksiyonun sıfırları sınırlı bir bölgede olabilir. Analitik fonksiyonlar için teklilik teoremine göre ise, bu sıfırlar sonlu sayıdadır.

Diğer fonksiyonlar için de lemmanın birinci, ikinci kısmı ve sıfırların sonlu sayıda olması benzer şekilde ispatlanır.

$\varepsilon_1$  ile reel eksen den sıfırlara kadar olan uzaklığı gösterelim.

$\varepsilon_0 = \min\left(\varepsilon_1, \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}\right)$  olsun. O zaman lemmanın üçüncü kısmı  $\varepsilon_0$  'ın bu tanımından alınır.

#### 2.4. Bütün Eksende Ters Saçılma Problemi

(2.1) denklemler sistemi için ters saçılma problemi denildiğinde, verilmiş  $S^{f_1}(\lambda)$  matris fonksiyonuna, bu matris fonksiyonunun sıfırlarına ve kutup noktalarına göre denklemin katsayılarının bulunması anlaşılır.

$S^{f_1}(\lambda)$  matris fonksiyonunun sıfırları,  $1 + b_{kk}^-(\lambda) = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) kutup noktaları ise,  $1 + d_{ii}^+(\lambda) = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denklemlerinin çözümleri olduğundan lemma 2.5 'e göre sıfırların ve kutup noktalarının sayısı sonludur.  $S^{f_1}(\lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarını  $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_n^-$  ile kutup noktalarını ise  $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_m^+$  ile gösterelim.

Bütün eksende ters problemin çözümü aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**Teorem.** (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının (2.2) ve (2.3) şartlarını sağladığını farzedelim. O zaman (2.28), (2.29) formülleri ile verilmiş  $\exp(i\lambda Jx) S^{f_2}(\lambda) \exp(-i\lambda Jx)$  ve  $S^{f_2}(\lambda)$  fonksiyonları için sıfırları olan Riemann-Hilbert probleminin çözümünün varlığı ve teklifi şartları dahilinde  $S^{f_1}(\lambda)$  matris fonksiyonu, bu matris fonksiyonunun  $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_n^-$  sıfırları,  $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_m^+$  kutup noktalarına göre (2.1) denklemler sisteminin katsayıları tek türlü tanımlanır.

**İspat.**  $S^{f_1}(\lambda)$  matris fonksiyonunun verildiğini farzedelim. (2.35) formülünün yardımıyla  $S^{f_2}(\lambda)$  matris fonksiyonunu (2.36) 'nın yardımıyla oluşturabiliriz.

$S^{f_1}(\lambda)$  'nın sıfırları  $S^{f_2}(\lambda)$  'nın sıfırları,  $S^{f_1}(\lambda)$  'nın kutup noktaları ise  $S^{f_2}(\lambda)$  'nın kutup noktaları olması nedeniyle ters problemin çözümlenebilmesi,  $S^{f_2}(\lambda)$  fonksiyonuna,  $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_n^-$  kutup noktalarına ve  $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_m^+$  sıfırlarına göre (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının bulunması problemine indirgenir.

$S^{f_2}(\lambda)$  fonksiyonu verildiğinde (2.28)-(2.29) formüllerine göre,  $W_+(x, \lambda)$  ve  $W_-(x, \lambda)$  matris fonksiyonlarını teoremin şartlarına göre bulabiliriz.

(2.25) ve (2.26) formüllerine göre ise denklemin katsayıları belirlenebilir.



### 3. KENDİ-KENDİNE EŞLENİK OLMAYAN ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN YARI EKSENDE SAÇILMA PROBLEMİ

Bu çalışmada,

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

denklemler sistemi için  $\xi_1 > 0 > \xi_2 > \xi_3$  olduğunda yarı ekseninde ( $x \geq 0$ ) saçılma problemi incelenmiştir. Burada denklemin  $c_{kj}(x)$  katsayıları; kompleks değerli, ölçülebilir fonksiyonlardır ve  $c_{kk}(x) = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ),

$$|c_{kj}(x)| \leq c \exp(-\varepsilon x), \quad (c > 0 \text{ ve } \varepsilon > 0 \text{ sabitlerdir.}) \quad (3.2)$$

şartlarını sağlıyorlar.

#### 3.1 Saçılma Problemi

Verilmiş sınır şartlarına ve çözümün asimptotik ifadesine göre yarı eksenindeki (3.1) denklemler sistemi için çözümün aranması problemine *saçılma problemi* denir.

(3.1) denklemler sistemi için yarı ekseninde aşağıdaki iki problem gözönüne alınır:

Birinci problemde (3.1) denklemler sisteminin  $x \rightarrow +\infty$  'da

$$y_1^1(x, \lambda) = A_1 \exp(i\lambda \xi_1 x) + o(1) \quad (3.3)$$

şartını ve  $x = 0$  noktasında

$$\begin{aligned} y_2^1(0, \lambda) &= y_1^1(0, \lambda), \\ y_3^1(0, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

şartlarını sağlayan çözümü; ikinci problemde ise (3.1) denklemler sisteminin  $x \rightarrow +\infty$  'da

$$y_1^2(x, \lambda) = A_2 \exp(i\lambda \xi_1 x) + o(1) \quad (3.5)$$

şartını ve  $x = 0$  noktasında

$$\begin{aligned} y_3^2(0, \lambda) &= y_1^2(0, \lambda), \\ y_2^2(0, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

şartlarını sağlayan çözümü aranır.

**Lemma 3.1.** (3.1) denklemler sisteminin (3.2) şartını sağladığını farz edelim. Bu durumda birinci ve ikinci problem için saçılma problemi,  $L_\infty(E, E_3)$  ( $E = (0, \infty)$  dur.) uzayında aşağıdaki integral denklemler sistemine eşdeğer olur:

$$y_1^p = A_p \exp(i\lambda \xi_1 x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j^p(x') \exp(i\lambda \xi_1(x-x')) dx',$$

$$p = 1, 2, \quad k = 2, 3 \quad (3.7)$$

$$y_k^p = B_{k-1}^p \exp(i\lambda \xi_k x) + i \int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x') y_j^p(x') \exp(i\lambda \xi_k(x-x')) dx'$$

Burada,

$$B_1^1 = A_1 + i \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 [c_{1j}(x') \exp(-i\lambda \xi_1 x') - c_{2j}(x') \exp(-i\lambda \xi_2 x')] y_j^1(x') dx',$$

$$B_2^1 = -i \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') \exp(-i\lambda \xi_3 x') y_j^1(x') dx'$$

(3.8)

$$B_1^2 = -i \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') \exp(-i\lambda \xi_2 x') y_j^2(x') dx',$$

$$B_2^2 = A_2 + i \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^3 [c_{1j}(x') \exp(-i\lambda\xi_1 x') - c_{3j}(x') \exp(-i\lambda\xi_3 x')] y_j^2(x') dx'$$

dir.

**İspat.** (3.1) denklemler sistemine eşdeğer olan

$$y_1(x) = A \exp(i\lambda\xi_1 x) + i \int_x^{\infty} \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_1(x-x')) dx' ,$$

$$y_2(x) = B_1 \exp(i\lambda\xi_2 x) + i \int_x^{\infty} \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_2(x-x')) dx' , \quad (3.9)$$

$$y_3(x) = B_2 \exp(i\lambda\xi_3 x) + i \int_x^{\infty} \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x') y_j(x') \exp(i\lambda\xi_3(x-x')) dx'$$

denklemler sisteminde (3.4) ve (3.6) sınır şartlarını gözönüne alırsak lemma ispatlanmış olur.

(3.7) denklemler sisteminde (3.2) şartını gözönüne alırsak,

$$y_1^p = A_p \exp(i\lambda\xi_1 x) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad p = 1, 2 \quad (3.10)$$

olur.

**Teorem 3.1.** (3.1) denklemler sisteminin katsayılarının (3.2) şartını sağladığını farzedelim. O zaman birinci ve ikinci problemin tek bir çözümü vardır.

**İspat.** Lemma 3.1'e göre (3.1) denklemler sistemi için yarı eksende saçılma problemi (3.7) integral denklemler sistemine eşdeğerdir. (3.2) şartından ve denklemler sisteminin Volterra tipinden integral denklemler sistemi olmasından dolayı, ardışık yaklaşım metodunun yardımıyla (3.7) integral denklemler sisteminin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek mümkündür. Böylelikle, teorem ispatlanmış olur.

(3.7) integral denklemler sisteminde (3.2) şartını gözönüne alırsak, kolayca göstermek olur ki, birinci problemin çözümü

$$\begin{aligned} y_1^1(x) &= A_1 \exp(i\lambda\xi_1 x) + o(1), \\ y_2^1(x) &= B_1^1 \exp(i\lambda\xi_2 x) + o(1), \\ y_3^1(x) &= B_2^1 \exp(i\lambda\xi_3 x) + o(1) \end{aligned} \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.11)$$

asimptotikasına; ikinci problemin çözümü ise

$$\begin{aligned} y_1^2(x) &= A_2 \exp(i\lambda\xi_1 x) + o(1), \\ y_2^2(x) &= B_1^2 \exp(i\lambda\xi_2 x) + o(1), \\ y_3^2(x) &= B_2^2 \exp(i\lambda\xi_3 x) + o(1) \end{aligned} \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.12)$$

asimptotikasına sahiptir. Burada,  $B_1^1, B_2^1, B_1^2, B_2^2$  (3.8) formülü ile verilir.

Yukarıda gördüğümüz gibi, verilmiş (3.3) asimptotikası için birinci problemin tek bir çözümü var ve bu çözüm (3.11) asimptotik gösterilişine sahiptir. Yani öyle  $S_{11}(\lambda), S_{21}(\lambda)$  fonksiyonları vardır ki

$$\begin{aligned} B_1^1 &= S_{11}(\lambda)A_1, \\ B_2^1 &= S_{21}(\lambda)A_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

dir. Aynı şekilde ikinci problem için öyle  $S_{12}(\lambda), S_{22}(\lambda)$  fonksiyonları vardır ki

$$\begin{aligned} B_1^2 &= S_{12}(\lambda)A_2, \\ B_2^2 &= S_{22}(\lambda)A_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

dir.

$S_{11}(\lambda), S_{12}(\lambda), S_{21}(\lambda), S_{22}(\lambda)$  fonksiyonlarından oluşan

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

matris fonksiyonuna, yarı eksende (3.1) sistemi için *saçılma matrisi* denir.

(3.8) ifadesinden görüldüğü gibi (3.1) denklemler sisteminin katsayıları sıfır olduğunda,

$$\begin{aligned} B_1^1 &= A_1, & B_1^2 &= 0, \\ B_2^1 &= 0, & B_2^2 &= A_2 \end{aligned}$$

olur. Başka bir deyişle,

$$\begin{aligned} S_{11}(\lambda) &= 1, & S_{12}(\lambda) &= 0, \\ S_{21}(\lambda) &= 0, & S_{22}(\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

olur; yani  $S(\lambda)$  matrisi birim matris olur:

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det S(\lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarına  $S$  matrisinin *sıfırları* denir. Böylelikle (3.1) denklemler sisteminde, birinci ve ikinci problem için  $S(\lambda)$  matris fonksiyonu ve onun sıfırlarını tanımlamak mümkündür. Bu tür probleme *düz saçılma* problemi denir.

(3.1) denklemler sistemi için *ters problem* denildiğinde,  $S(\lambda)$  matris fonksiyonuna ve bazı verilere göre denklemin katsayılarının bulunması problemi anlaşılır.

Yukarıda verdiğimiz problemde ters problemin çözülebilirliğini genel şekilde kanıtlamadan önce, birinci yaklaşımda  $S(\lambda)$  matrisinin elemanlarının (3.1) denklemler sisteminin katsayılarıyla nasıl bağlı olduğunu görmeye çalışalım:

(3.8) ifadesinde;

$$y_1^1(x) = A_1 \exp(i\lambda\xi_1 x),$$

$$y_2^1(x) = A_1 \exp(i\lambda\xi_2 x),$$

$$y_3^1(x) = 0$$

alırsak,

$$B_1^1 = A_1 \left[ 1 + i \int_0^{\infty} c_{12}(x') \exp[i\lambda(\xi_2 - \xi_1)x'] dx' - \int_0^{\infty} c_{21}(x') \exp[i\lambda(\xi_1 - \xi_2)x'] dx' \right], \quad (3.15)$$

$$B_2^1 = -i A_1 \left[ \int_0^{\infty} c_{31}(x') \exp[i\lambda(\xi_1 - \xi_3)x'] dx' - \int_0^{\infty} c_{32}(x') \exp[i\lambda(\xi_2 - \xi_3)x'] dx' \right]$$

olur. (3.8) ifadesinde;

$$y_1^2(x) = A_2 \exp(i\lambda\xi_1 x),$$

$$y_2^2(x) = 0,$$

$$y_3^2(x) = A_2 \exp(i\lambda\xi_3 x)$$

alırsak;

$$B_1^2 = -i A_2 \left[ \int_0^{\infty} c_{21}(x') \exp[i\lambda(\xi_1 - \xi_2)x'] dx' - \int_0^{\infty} c_{23}(x') \exp[i\lambda(\xi_3 - \xi_2)x'] dx' \right], \quad (3.16)$$

$$B_2^2 = A_2 \left[ 1 + i \int_0^{\infty} c_{13}(x') \exp[i\lambda(\xi_3 - \xi_1)x'] dx' - \int_0^{\infty} c_{31}(x') \exp[i\lambda(\xi_1 - \xi_3)x'] dx' \right]$$

olur.

Bazı işlemlerden sonra (3.13) ve (3.14) 'ü, (3.15) ve (3.16) 'da gözönüne alırsak;

$$\begin{aligned}
S_{11}(\lambda) &= 1 - \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} \int_{-\infty}^0 c_{12} \left( \frac{y}{\xi_2 - \xi_1} \right) e^{i\lambda y} dy - \frac{i}{\xi_1 - \xi_2} \int_0^{\infty} c_{21} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_2} \right) e^{i\lambda y} dy \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} F_{11}(y) e^{i\lambda y} dy,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
S_{21}(\lambda) &= -\frac{i}{\xi_1 - \xi_3} \int_0^{\infty} c_{31} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_3} \right) e^{i\lambda y} dy + \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} \int_0^{\infty} c_{32} \left( \frac{y}{\xi_2 - \xi_3} \right) e^{i\lambda y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_{21}(y) e^{i\lambda y} dy
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir, burada

$$F_{11}(y) = \begin{cases} \frac{-i}{\xi_2 - \xi_1} c_{12} \left( \frac{y}{\xi_2 - \xi_1} \right), & -\infty < y < 0 \\ \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{21} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_2} \right) & 0 < y < \infty \end{cases} \tag{3.17'}$$

$$F_{21}(y) = \begin{cases} 0, & -\infty < y < 0 \\ \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{31} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_3} \right) + \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{32} \left( \frac{y}{\xi_2 - \xi_3} \right) & 0 < y < \infty \end{cases} \tag{3.18'}$$

ve

$$\begin{aligned}
S_{12}(\lambda) &= -\frac{i}{\xi_1 - \xi_2} \int_0^{\infty} c_{21} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_2} \right) e^{i\lambda y} dy + \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} \int_{-\infty}^0 c_{23} \left( \frac{y}{\xi_3 - \xi_2} \right) e^{i\lambda y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(y) dy,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
S_{22}(\lambda) &= 1 - \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} \int_{-\infty}^0 c_{13} \left( \frac{y}{\xi_3 - \xi_1} \right) e^{i\lambda y} dy + \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} \int_0^{\infty} c_{31} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_3} \right) e^{i\lambda y} dy \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} F_{22}(y) dy
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir, burada

$$F_{12}(y) = \begin{cases} \frac{i}{\xi_2 - \xi_3} c_{23} \left( \frac{y}{\xi_3 - \xi_2} \right), & -\infty < y < 0 \\ \frac{i}{\xi_2 - \xi_1} c_{21} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_2} \right) & 0 < y < \infty \end{cases} \tag{3.19'}$$

$$F_{22}(y) = \begin{cases} \frac{-i}{\xi_3 - \xi_1} c_{13} \left( \frac{y}{\xi_3 - \xi_1} \right), & -\infty < y < 0 \\ \frac{i}{\xi_3 - \xi_1} c_{31} \left( \frac{y}{\xi_1 - \xi_3} \right) & 0 < y < \infty \end{cases} \tag{3.20'}$$

dır. (3.17'), (3.18'), (3.19') ve (3.20') 'den ,

$$\begin{aligned}
c_{12}(x) &= i(\xi_2 - \xi_1) F_{11}[x(\xi_2 - \xi_1)] \\
c_{13}(x) &= i(\xi_3 - \xi_1) F_{22}[x(\xi_3 - \xi_1)] \\
c_{21}(x) &= i(\xi_1 - \xi_2) F_{11}[x(\xi_1 - \xi_2)] = i(\xi_1 - \xi_2) F_{12}[x(\xi_1 - \xi_2)] \\
c_{23}(x) &= i(\xi_3 - \xi_2) F_{12}[x(\xi_3 - \xi_2)] \\
c_{31}(x) &= i(\xi_1 - \xi_3) F_{22}[x(\xi_1 - \xi_3)] \\
c_{32}(x) &= i(\xi_3 - \xi_2) \{ F_{21}[x(\xi_2 - \xi_3)] + F_{22}[x(\xi_1 - \xi_3)] \}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

(3.21) formüllerinden görüldüğü gibi bir probleme göre denklemin katsayılarını tek türlü belirlemek mümkün değildir. Ancak iki probleme göre denklemin katsayıları tamamen bulunabilir.

### 3.2. $S(\lambda)$ Matris Fonksiyonunun Özellikleri

(3.1) denklemler sistemi için yarı ekseninde ters saçılma probleminin çözümü için  $S(\lambda)$  matris fonksiyonunun ve tersinin elemanlarının farklı bölgelerde analitik olan, sınırda ise çarpımları veya farkları verilen iki fonksiyonun çarpımı veya farkı şeklinde gösterilebilmesi özellikleri (Riemann-Hilbert problemi) çok önemlidir. İleride ters problemi çözerken (3.1) denklemler sisteminin yardımıyla tanımlanan  $S(\lambda)$  fonksiyonunun ve onun tersinin elemanlarının bu tür çarpanlarla ifade edilebildiğini göstereceğiz.

Yarı ekseninde (3.1) denklemler sisteminin çözümünün integral temsilleri,  $h_j(\lambda)$  vektörlerinin bileşenleri arasında önemli bir ilişki kurmaya imkan verir. Bu ilişki bazı özel durumlarda analitik fonksiyonların yardımıyla verilir.

**Lemma 3.2.** Keyfi verilmiş  $A_1, A_2$  için

$$y_1^1(0, \lambda) = y_2^1(0, \lambda) = (1 + G_{1-}^1(\lambda)) A_1, \quad (3.22)$$

$$y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) = (1 + G_{1-}^2(\lambda)) A_2 \quad (3.23)$$

dir. Burada,

$$G_{1-}^1(\lambda) = \left( 1 - \int_{-\infty}^0 R_{12}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{11}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - 1, \quad (3.22')$$

$$G_{1-}^2(\lambda) = \left( 1 - \int_{-\infty}^0 R_{13}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{11}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - 1 \quad (3.23')$$

dir.

**İspat.** 2. tip integral temsiliinde

$$1 - \int_{-\infty}^0 R_{12}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0, \quad 1 - \int_{-\infty}^0 R_{13}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$y_1^1(0, \lambda) = \left( 1 - \int_{-\infty}^0 R_{12}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{11}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) A_1,$$

$$y_1^2(0, \lambda) = \left( 1 - \int_{-\infty}^0 R_{13}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{11}^2(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) A_2$$

olup, (3.22) ve (3.23) ispatlanmış olur.

**Lemma 3.3.**  $B_2^1, B_2^2$  için

$$y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) = (1 + E_+(\lambda)) B_2^2, \quad (3.24)$$

$$B_2^1 = e_+(\lambda) y_1^1(0, \lambda) \quad (3.25)$$

dir. Burada,

$$E_+(\lambda) = \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{33}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - 1 \quad (3.24')$$

$$e_+(\lambda) = - \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{33}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( \int_0^{\infty} [R_{31}^6(0, \tau) + R_{32}^6(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \quad (3.25')$$

**İspat.** 6. tip integral temsilinde,

$$1 - \int_0^{\infty} R_{31}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0, \quad 1 + \int_0^{\infty} R_{33}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0$$

olmak üzere

$$y_1^2(0, \lambda) = \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{33}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) B_2^2$$

ve

$$B_2^1 = - \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{33}^6(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( \int_0^{\infty} [R_{31}^6(0, \tau) + R_{32}^6(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) y_1^1(0, \lambda)$$

olup, (3.24) ve (3.25) ispatlanmış olur.

**Lemma 3.4.** Eğer  $A_1 = A_2$  ise

$$y_1^1(0, \lambda) = y_2^1(0, \lambda) = (1 + F_-(\lambda)) (B_1^1 - B_1^2), \quad (3.26)$$

$$y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) = (1 + L_-(\lambda)) (B_1^1 - B_1^2) \quad (3.27)$$

dir. Burada,

$$F_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 R_{22}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau - \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{22}^3(0, \tau) - R_{12}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^3(0, \tau) - R_{13}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( \int_{-\infty}^0 R_{23}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right), \quad (3.26')$$

$$L_-(\lambda) = \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^3(0, \tau) - R_{13}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{22}^3(0, \tau) - R_{12}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - 1 \quad (3.27')$$

dir.

**İspat.** 3. tip integral temsilinde,

$$1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^3(0, \tau) - R_{13}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0$$

olmak üzere

$$y_1^1 - y_1^2 \left( 1 - \int_{-\infty}^0 R_{13}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) = (B_1^1 - B_1^2) \int_{-\infty}^0 R_{12}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad (3.28)$$

$$y_1^1 = (B_1^1 - B_1^2) \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{22}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - y_1^2 \int_{-\infty}^0 R_{23}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \quad (3.29)$$

olup, (3.28) ve (3.29) 'dan

$$y_1^1 = (B_1^1 - B_1^2) \left[ \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{22}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{22}^3(0, \tau) - R_{12}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^3(0, \tau) - R_{13}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \int_{-\infty}^0 R_{23}^3(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right],$$

$$y_1^2 = (B_1^1 - B_1^2) \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^3(0, \tau) - R_{13}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \\ \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{22}^3(0, \tau) - R_{12}^3(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)$$

elde edilir. Böylelikle (3.26) ve (3.27) ispatlanmış olur.

**Lemma 3.5.** Eğer  $B_2^1 = B_2^2$  ise,

$$y_1^1(0, \lambda) = y_2^1(0, \lambda) = (1 + m_+(\lambda)) (B_1^1 - B_1^2), \quad (3.30)$$

$$y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) = M_+(\lambda) (B_1^1 - B_1^2) \quad (3.31)$$

olur. Burada,

$$m_+(\lambda) = \left[ \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{21}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \right. \\ \left. \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right]^{-1} \left[ \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{22}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \right. \\ \left. + \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( \int_0^{\infty} R_{32}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \right] - 1, \quad (3.30')$$

$$M_+(\lambda) = - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left[ (1 + m_+(\lambda)) \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} R_{32}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right]. \quad (3.31')$$

**İspat.** 5. tip integral temsilinde

$$1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0$$

olmak üzere,

$$y_1^1 = (B_1^1 - B_1^2) \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{22}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) + (y_1^1 - y_1^2) \int_0^{\infty} R_{21}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad (3.32)$$

$$y_1^2 = - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( y_1^1 \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau + (B_1^1 - B_1^2) \int_0^{\infty} R_{32}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \quad (3.33)$$

olup (3.33), (3.32) 'de yazılırsa,

$$y_1^1 = \left[ 1 - \int_0^{\infty} R_{21}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \right]^{-1} \left[ 1 + \int_0^{\infty} R_{22}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau + \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \int_0^{\infty} R_{32}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right] (B_1^1 - B_1^2)$$

olur ve böylelikle (3.30) ifadesi ispatlanır.

Sonuncu ifade (3.33) 'de yazılırsa,

$$y_1^2 = - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left[ (1 + m_+(\lambda)) \int_0^{\infty} R_{31}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau + \int_0^{\infty} R_{32}^5(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right] (B_1^1 - B_1^2)$$

olur ve böylelikle (3.31) ifadesi elde edilmiş olur.

**Lemma 3.6.** Eğer  $B_1^1 = B_1^2$  ise, o zaman

$$y_1^1(0, \lambda) = y_2^1(0, \lambda) = d_1(\lambda)(B_2^1 - B_2^2), \quad (3.34)$$

$$y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) = d_2(\lambda)(B_2^1 - B_2^2), \quad (3.35)$$

$$A_1 - A_2 = R(\lambda)(B_2^1 - B_2^2) \quad (3.36)$$

dir. Burada,

$$1 + \int_0^{\infty} [R_{11}^4(0, \tau) - R_{21}^4(0, \tau) - R_{31}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0$$

olmak üzere

$$R(\lambda) = \left( 1 + \int_0^{\infty} [R_{11}^4(0, \tau) - R_{21}^4(0, \tau) - R_{31}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^4(0, \tau) + R_{33}^4(0, \tau) - R_{13}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \quad (3.34')$$

$$d_1(\lambda) = \left( \int_0^{\infty} R_{21}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) R(\lambda) + \int_{-\infty}^0 R_{23}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau, \quad (3.35')$$

$$d_2(\lambda) = - \left[ \left( \int_0^{\infty} R_{31}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) R(\lambda) + 1 + \int_{-\infty}^0 R_{33}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right]. \quad (3.36')$$

**İspat.** 4. tip integral temsilinde  $B_1^1 = B_1^2$  alınmakla,

$$y_1^1 - y_1^2 = \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{11}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (A_1 - A_2) + \left( \int_{-\infty}^0 R_{13}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (B_2^1 - B_2^2), \quad (3.37)$$

$$y_1^1 = \left( \int_0^{\infty} R_{21}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (A_1 - A_2) + \left( \int_{-\infty}^0 R_{23}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (B_2^1 - B_2^2), \quad (3.38)$$

$$-y_1^2 = \left( \int_0^{\infty} R_{31}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (A_1 - A_2) + \left( 1 + \int_{-\infty}^0 R_{33}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (B_2^1 - B_2^2) \quad (3.39)$$

olup, (3.38) ve (3.39) taraf tarafa toplanır ve (3.37) ile karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \int_0^{\infty} [R_{11}^4(0, \tau) - R_{21}^4(0, \tau) - R_{31}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (A_1 - A_2) \\ & = \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^4(0, \tau) + R_{33}^4(0, \tau) - R_{13}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (B_2^1 - B_2^2) \end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2) & = \left( 1 + \int_0^{\infty} [R_{11}^4(0, \tau) - R_{21}^4(0, \tau) - R_{31}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \\ & \quad \left( 1 + \int_{-\infty}^0 [R_{23}^4(0, \tau) + R_{33}^4(0, \tau) - R_{13}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) (B_2^1 - B_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^1(0, \lambda) = y_2^1(0, \lambda) & = \left[ \left( \int_0^{\infty} R_{21}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) R(\lambda) \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^0 R_{23}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right] (B_2^1 - B_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) & = - \left[ \left( \int_0^{\infty} R_{31}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) R(\lambda) + 1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^0 R_{33}^4(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right] (B_2^1 - B_2^2) \end{aligned}$$

olup, (3.34), (3.35), (3.36) ispatlanmış olur.

**Lemma 3.7.** Eğer  $B_2^1 + B_2^2 = 0$  ise keyfi verilmiş  $B_1^1, B_1^2$  için

$$y_1^1(0, \lambda) = y_2^1(0, \lambda) = (1 + H_+(\lambda)) (B_1^1 + B_1^2), \quad (3.40)$$

$$y_1^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda) = F_+(\lambda) (B_1^1 + B_1^2) \quad (3.41)$$

dir. Burada,

$$1 - \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0, \quad 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \neq 0$$

olmak üzere,

$$H_+(\lambda) = \left[ \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \right. \\ \left. \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right]^{-1} \\ \left[ \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{22}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) + \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right)^{-1} \right. \\ \left. \int_0^{\infty} R_{32}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right]^{-1}, \quad (3.40')$$

$$\begin{aligned}
F_+(\lambda) = & \left[ \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) - \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \right]^{-1} \\
& \left[ \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \cdot \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right]^{-1} \\
& \left[ \int_0^{\infty} R_{32}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau + \left( 1 - \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \right]^{-1} \\
& \left[ \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{22}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right) \cdot \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau \right].
\end{aligned} \tag{3.41'}$$

**İspat.** 5.tip integral temsilinden  $B_2^1 + B_2^2 = 0$  alınmakla,

$$y_1^1(0, \lambda) = (B_1^1 + B_1^2) + (y_1^1 + y_1^2) \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) d\tau + (B_1^1 + B_1^2) \int_0^{\infty} R_{22}^s(0, \tau) d\tau,$$

ve

$$y_1^2(0, \lambda) = (y_1^1 + y_1^2) \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) d\tau + (B_1^1 + B_1^2) \int_0^{\infty} R_{32}^s(0, \tau) d\tau$$

olup,

$$\left( 1 - \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) d\tau \right) y_1^1 - y_1^2 \int_0^{\infty} R_{21}^s(0, \tau) d\tau = (B_1^1 + B_1^2) \left( 1 + \int_0^{\infty} R_{22}^s(0, \tau) d\tau \right) \tag{3.42}$$

ve

$$\left( 1 - \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) d\tau \right) y_1^2 - y_1^1 \int_0^{\infty} R_{31}^s(0, \tau) d\tau = (B_1^1 + B_1^2) \left( \int_0^{\infty} R_{32}^s(0, \tau) d\tau \right) \tag{3.43}$$

dir. (3.43) ifadesi, (3.42) 'de yazılırsa (3.40) ve (3.42) ifadesi, (3.43) 'te yazılırsa (3.41) ispatlanmış olur.

**Teorem 3.2.** (3.1) denklemler sisteminin (3.2) şartlarını sağladığını farzedelim. O zaman,  $S(\lambda)$  matris fonksiyonunun, sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde  $S^{-1}(\lambda) = \|\gamma_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^2$  tersi vardır.

$$S_{22}(\lambda), \gamma_{11}(\lambda), \gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda)$$

fonksiyonları ise aşağıdaki

$$S_{22}(\lambda) = (1 + E_+(\lambda))^{-1} (1 + G_{1-}^2(\lambda)), \quad (3.44)$$

$$\gamma_{11}(\lambda) = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} (1 + H_+(\lambda)) = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} (1 + m_+(\lambda)), \quad (3.45)$$

$$\gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda) = (1 + R_+(\lambda))^{-1} (1 + R_-(\lambda)) \quad (3.46)$$

çarpanlarına sahiptirler.

$$S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda), \gamma_{21}(\lambda), \gamma_{12}(\lambda), \gamma_{22}(\lambda)$$

fonksiyonları ise,

$$S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda) = (1 + F_-(\lambda))^{-1} (1 + G_{1-}^1(\lambda)) \quad (3.47)$$

$$\gamma_{21}(\lambda) = (1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} F_+(\lambda) = (1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} M_+(\lambda) \quad (3.48)$$

$$\gamma_{12}(\lambda) = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} d_1(\lambda) \quad (3.49)$$

$$\gamma_{22}(\lambda) = -(1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} d_2(\lambda) \quad (3.50)$$

şeklindedir.

Burada  $G_{-}^1(\lambda)$ , (3.22');  $G_{-}^2(\lambda)$ , (3.23');  $F_{-}(\lambda)$ , (3.26');  $F_{+}(\lambda)$ , (3.41');  $m_{+}(\lambda)$ , (3.30')  $M_{1}(\lambda)$ , (3.31');  $d_{1}(\lambda)$ , (3.35');  $d_{2}(\lambda)$ , (3.36');  $H_{1}(\lambda)$ , (3.40') şeklindedir.

**İspat.** Önce  $S(\lambda)$  matrisinin sonlu sayıdaki noktalar haricinde tersinin varlığını ispatlayalım. Saçılma matrisinin tanımından kolayca göstermek olur ki,

$$\begin{pmatrix} B_1^1 + B_1^2 \\ B_2^1 + B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

dir.  $S(\lambda)$  matrisinin tersinin olduğunu göstermek için sol tarafın, yani  $B_1^1 + B_1^2 = 0$ ,  $B_2^1 + B_2^2 = 0$  halinde  $A_1 = A_2 = 0$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $B_1^1 + B_1^2 = 0$  ve  $B_2^1 + B_2^2 = 0$  olduğunda lemma 3.7 'den  $y_1^1(0, \lambda) = y_1^2(0, \lambda) = 0$  alınır ve sınır şartlarını da gözönüne alırsak, her iki problem için

$$y_1(0, \lambda) = y_2(0, \lambda) = y_3(0, \lambda) = 0$$

olur. (3.1) adi diferansiyel denklemler sisteminin bu tür homojen başlangıç şartları için yalnız sıfır çözümü mevcuttur. Lemma 3.2 'den ise  $1 + G_{-}^1(\lambda)$ ,  $1 + G_{-}^2(\lambda)$  fonksiyonlarının (3.2) şartı dahilinde sonlu sayıda sıfırları olduğunu gözönüne alırsak,

$$A_1 = 0, A_2 = 0$$

alırız. Bu tersi,  $\gamma(\lambda) = \|\gamma_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^2$  ile işaretleyelim. Böylelikle, sonlu sayıdaki  $\lambda$  lar haricinde  $S^{-1}(\lambda)$  'nın varlığı ispatlanmış oldu.

1.  $S_{22}(\lambda)$  fonksiyonu için (3.44) formülünün doğruluğunu gösterelim. Lemma 3.2 ve lemma 3.3 'ten

$$(1 + G_{-}^2(\lambda)) A_2 = (1 + E_{+}(\lambda)) B_2^2$$

alınır. Buradan ise ( sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde),

$$B_2^2 = (1 + E_+(\lambda))^{-1} (1 + G_{1-}^2(\lambda)) A_2$$

dir.  $S_{22}(\lambda)$  fonksiyonunun tanımından (3.44) formülü elde edilir.

2.  $\gamma_{11}(\lambda)$  fonksiyonu için (3.45) gösterilişini ispatlayalım. Lemma 3.2 ve lemma 3.7 'den

$$(1 + G_{1-}^1(\lambda)) A_1 = (1 + H_+(\lambda)) (B_1^1 + B_1^2) \quad (3.52)$$

elde edilir. (3.51) 'den görüldüğü gibi,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda) & \gamma_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^1 + B_1^2 \\ B_2^1 + B_2^2 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan ise lemma 3.7 'nin şartı dahilinde (yani  $B_2^1 + B_2^2 = 0$  olduğu için),

$$A_1 = \gamma_{11}(\lambda) (B_1^1 + B_1^2)$$

olur. Sonuncu ifadeyi (3.52) ile karşılaştırırsak, sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde

$$\gamma_{11}(\lambda) = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} (1 + H_+(\lambda))$$

elde edilir.

3. Sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde  $\gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda)$  için (3.46) formülünün doğruluğunu gösterelim.

$S(\lambda)$  fonksiyonunun tanımından kolayca görmek olur ki sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde

$$\begin{pmatrix} B_1^1 - B_1^2 \\ B_2^1 - B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) - S_{22}(\lambda) & S_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 - A_2 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

ve

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 - A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^1 - B_1^2 \\ B_2^1 - B_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

doğrudur. Lemma 3.6 'daki (3.36) formülünden ve lemmanın şartı dahilinde

$$A_1 - A_2 = (\gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda)) (B_2^1 - B_2^2)$$

olduğundan

$$\gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda) = R(\lambda) = (1 + R_+(\lambda))^{-1} (1 + R_-(\lambda))$$

alınır. Burada,

$$R_+(\lambda) = \int_0^{\infty} [R_{11}^4(0, \tau) - R_{21}^4(0, \tau) - R_{31}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau,$$

$$R_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 [R_{23}^4(0, \tau) + R_{33}^4(0, \tau) - R_{13}^4(0, \tau)] \exp(i\lambda\tau) d\tau$$

dır.

4.  $S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda)$  için (3.47) formülünün doğruluğunu gösterelim.  $A_1 = A_2$  olduğunda lemma 3.2 ve 3.4 'ten sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde,

$$(1 + G_{1-}^1(\lambda)) A_1 = (1 + F_-(\lambda)) (B_1^1 - B_1^2)$$

veya

$$B_1^1 - B_1^2 = (1 + F_-(\lambda))^{-1} (1 + G_{1-}^1(\lambda)) A_1$$

olur. Sonuncuyu,  $A_1 = A_2$  olduğunda (3.53) ile karşılaştırırsak,

$$S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda) = (1 + F_-(\lambda))^{-1} (1 + G_{1-}^1(\lambda))$$

elde edilir.

**5.**  $\gamma_{21}(\lambda)$  fonksiyonu için (3.48) formülünün doğruluğunu gösterelim.

$B_2^1 + B_2^2 = 0$  olsun. Lemma 3.2 ve 3.7 'den uygun olarak,

$$y_1^2(0, \lambda) = (1 + G_{1-}^2(\lambda)) A_2$$

ve

$$y_1^2(0, \lambda) = F_+(\lambda) (B_1^1 + B_1^2)$$

yazabiliriz. Buradan ise sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde

$$A_2 = (1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} F_+(\lambda) (B_1^1 + B_1^2)$$

elde edilir. Bu ifadeyi,

$$A_2 = \gamma_{21}(\lambda) (B_1^1 + B_1^2)$$

ile karşılaştırırsak

$$\gamma_{21}(\lambda) = (1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} F_+(\lambda)$$

olur.

**6.**  $\gamma_{12}(\lambda)$  ve  $\gamma_{22}(\lambda)$  fonksiyonları için (3.49) ve (3.50) formüllerinin doğru olduğunu gösterelim.

$B_1^1 = B_1^2$  olsun. (3.54) 'ten

$$A_1 = \gamma_{12}(\lambda) (B_2^1 - B_2^2), \quad (3.55)$$

$$A_1 - A_2 = (\gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda)) (B_2^1 - B_2^2)$$

veya

$$A_2 = -\gamma_{22}(\lambda) (B_2^1 - B_2^2) \quad (3.56)$$

alınır. Diğer taraftan, lemma 3.2 ve 3.6 'ya göre sonlu sayıda  $\lambda$  lar haricinde

$$A_1 = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} d_1(\lambda) (B_2^1 - B_2^2),$$

$$A_2 = (1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} d_2(\lambda) (B_2^1 - B_2^2)$$

dir. (3.55) ve (3.56) 'yı sonuncu ifadelerle karşılaştırsak

$$\gamma_{12} = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} d_1(\lambda),$$

$$\gamma_{22} = -(1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} d_2(\lambda)$$

olur.

7. (3.45) ve (3.48) formüllerinin ikinci kısımlarını ispatlayalım.  $B_1^1 = B_1^2$  olduğunda,

$$A_1 = \gamma_{11}(\lambda) (B_1^1 - B_1^2),$$

$$A_1 - A_2 = (\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda)) (B_1^1 - B_1^2)$$

veya

$$A_2 = -\gamma_{21}(\lambda) (B_1^1 - B_1^2)$$

olur. Lemma 3.2 ve 3.5 'ten ise,

$$(1 + m_+(\lambda)) (B_1^1 - B_1^2) = (1 + G_{1-}^1(\lambda)) A_1$$

ve

$$M_+(\lambda) (B_1^1 - B_1^2) = (1 + G_{1-}^2(\lambda)) A_2$$

olduğundan, sonuçta

$$\gamma_{11}(\lambda) = (1 + G_{1-}^1(\lambda))^{-1} (1 + m_+(\lambda)),$$

$$\gamma_{21}(\lambda) = -(1 + G_{1-}^2(\lambda))^{-1} M_+(\lambda)$$

elde edilir.

$\gamma_{11}(\lambda)$  ve  $\gamma_{21}(\lambda)$  'in (3.45) ve (3.48) formüllerinden görülüyor ki

$$H_+(\lambda) = m_+(\lambda),$$

$$F_+(\lambda) = -M_+(\lambda)$$

dır. Böylelikle teorem ispatlanmış oldu.

### 3.3 Ters Saçılma Problemi

Yarı ekseninde ters saçılma problemi denildiğinde  $S(\lambda)$  matris fonksiyonuna göre (3.1) denklemler sisteminin katsayılarının bulunması anlaşılır. Yarı ekseninde ters problemin çözülmesi algoritması, tüm ekseninde ters saçılma probleminin çözülmesi algoritmasına indirgenir. Bu algoritma aşağıdaki teoremden verilmektedir.

**Teorem 3.3.** Farzedelim ki (3.1) denklemler sisteminin katsayıları (3.2) şartını sağlıyorlar. O zaman sonlu sayıda noktalar haricinde verilmiş  $S(\lambda)$  matris fonksiyonuna göre denklemin katsayıları tek türlü tanımlanır.

**İspat.** Tüm ekseninde tanımlanan  $\Pi(\lambda)$  fonksiyonu  $(A_1, B_1, B_2)$  vektörünü başlangıç şartlarına, yani  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))$  vektörüne dönüştürür. Bildiğimiz gibi (4. tip integral temsilinden görüldüğü gibi)  $\Pi(\lambda)$  fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$\Pi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + R_{11+}^4 & R_{12}^4 & R_{13-}^4 \\ R_{21+}^4 & 1 + R_{22}^4 & R_{23-}^4 \\ R_{31+}^4 & R_{32}^4 & 1 + R_{33-}^4 \end{pmatrix}$$

Şimdi göstereceğiz ki, yarı ekseninde  $S(\lambda)$  matris fonksiyonu verildiğinde sonlu sayıda noktalar haricinde  $\Pi(\lambda)$  fonksiyonunu tek türlü tanımlamak mümkündür.  $\Pi(\lambda)$  fonksiyonuna göre ise denklemin katsayıları tek türlü tanımlandığından, o zaman (3.1) denkleminin katsayıları  $S(\lambda)$  matris fonksiyonuna göre de tek türlü tanımlanmış olacaktır.

$S(\lambda)$  matris fonksiyonuna göre  $\Pi(\lambda)$  fonksiyonunun nasıl tanımlandığını gösterelim. Teorem 3.2 'den,

$$\gamma_{12}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda) = (1 + R_+(\lambda))^{-1} (1 + R_-(\lambda)) = R(\lambda)$$

olduğundan Riemann-Hilbert problemine göre  $R_+(\lambda)$  ve  $R_-(\lambda)$  'yı, yani

$$R_+(\lambda) = R_{11+}^4 - R_{21+}^4 - R_{31+}^4, \quad (3.57)$$

$$R_-(\lambda) = R_{33-}^4 + R_{23-}^4 - R_{13-}^4$$

ifadelerini bulmak mümkündür.

Teorem 3.2 'den Riemann probleminin yardımıyla  $S_{22}(\lambda)$  ve  $\gamma_{11}(\lambda)$  fonksiyonlarının çarpanlarını, özel halde

$$G_{1-}^1(\lambda), G_{1-}^2(\lambda)$$

fonksiyonlarını bulabiliriz.  $\gamma_{12}(\lambda)$  ve  $\gamma_{22}(\lambda)$  fonksiyonlarının ifadesinden ( (3.45) ve (3.50) formüllerinden)

$$d_1(\lambda) = \gamma_{12}(\lambda) \cdot (1 + G_{1-}^1(\lambda)),$$

$$d_2(\lambda) = -\gamma_{22}(\lambda) \cdot (1 + G_{1-}^2(\lambda))$$

alınır.

Lemma 3.6 'dan,

$$d_1(\lambda) = R_{21+}^4 (\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda)) + R_{23-}^4,$$

$$d_2(\lambda) = -R_{31+}^4 (\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda)) + 1 + R_{33-}^4$$

veya

$$d_1(\lambda) = R_{21+}^4 (1 + R_+(\lambda))^{-1} (1 + R_-(\lambda)) + R_{23-}^4,$$

$$d_2(\lambda) = -R_{31+}^4 (1 + R_+(\lambda))^{-1} (1 + R_-(\lambda)) + 1 + R_{33-}^4$$

olur. Sonuçta  $(R_{21+}^4, R_{23-}^4)$  ve  $(R_{31+}^4, R_{33-}^4)$  bilinmeyenlerine göre aşağıdaki iki Riemann-Hilbert problemini elde ederiz.

$$R_{21+}^4 (1 + R_+(\lambda))^{-1} + R_{23-}^4 ((1 + R_-(\lambda))^{-1} = d_1(\lambda) ((1 + R_-(\lambda))^{-1}, \quad (3.58)$$

$$-R_{31+}^4 (1 + R_+(\lambda))^{-1} + R_{33-}^4 ((1 + R_-(\lambda))^{-1} = (d_2(\lambda) - 1) ((1 + R_-(\lambda))^{-1}.$$

(3.58) 'den

$$R_{21+}^4, R_{31+}^4, R_{23-}^4, R_{33-}^4$$

fonksiyonları, Riemann-Hilbert probleminin yardımıyla bulunur. (3.57) ifadelerini de gözönüne alırsak,

$$R_{11+}^4 = R_+(\lambda) + R_{21+}^4 + R_{31+}^4,$$

$$R_{13-}^4 = +R_{33-}^4 + R_{23-}^4 - R_-(\lambda)$$

elde edilir. Başka bir deyişle,  $\Pi(\lambda)$  matrisinin birinci ve üçüncü sütunları bulunmuş olur.

Şimdi ise  $\Pi(\lambda)$  matris fonksiyonunun ikinci sütununun elemanlarını, yani  $R_{12}^4, R_{22}^4, R_{32}^4$  fonksiyonlarını bulalım. Bu amaçla 4. tip integral temsilinden başlangıç  $x = 0$  noktasında uygun olarak birinci problemin çözümünden ikinci problemin çözümünü çıkartırsak ve  $B_2^1 = B_2^2$  olduğunu gözönüne alırsak aşağıdakileri elde etmiş oluruz:

$$y_1^1(0, \lambda) - y_1^2(0, \lambda) = (1 + R_{11+}^4)(A_1 - A_2) + R_{12}^4(B_1^1 - B_1^2),$$

$$y_2^1(0, \lambda) - y_2^2(0, \lambda) = y_1^1(0, \lambda) = R_{21+}^4(A_1 - A_2) + (1 + R_{22}^4)(B_1^1 - B_1^2),$$

$$y_3^1(0, \lambda) - y_3^2(0, \lambda) = -y_1^2(0, \lambda) = R_{31+}^4(A_1 - A_2) + R_{32}^4(B_1^1 - B_1^2).$$

Lemma 3.5 'i,  $A_1 - A_2 = (\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda))(B_1^1 - B_1^2)$  ifadesini ve  $B_1^1, B_1^2$  'nin keyfi olduğunu yukarıdaki eşitliklerde gözönüne alırsak,

$$1 + m_+(\lambda) - M_+(\lambda) = (1 + R_{11+}^4)(\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda)) + R_{12}^4,$$

$$m_+(\lambda) = R_{21+}^4(\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda)) + R_{22}^4,$$

$$-M_+(\lambda) = R_{31+}^4(\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda)) + R_{32}^4$$

olur.

$m_+(\lambda)$  fonksiyonu Teorem 3.2 'den  $\gamma_{11}(\lambda)$  fonksiyonunun çarpanı gibi,  $M_+(\lambda)$  fonksiyonu ise  $S_{22}(\lambda)$  'nin çarpanı olan  $G_{1-}^2(\lambda)$  'nin ve  $\gamma_{21}(\lambda)$  fonksiyonunun yardımıyla

$$M_+(\lambda) = -\gamma_{21}(\lambda) \cdot (1 + G_{1-}^2(\lambda))$$

şeklinde bulunur. Böylelikle  $R_{12}^4, R_{22}^4, R_{32}^4$  fonksiyonları,

$$R_{12}^4 = 1 + m_+(\lambda) - M_+(\lambda) - (1 + R_{11+}^4)(\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda)),$$

$$R_{22}^4 = m_+(\lambda) - R_{21+}^4(\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda)),$$

$$R_{32}^4 = -M_+(\lambda) - R_{31+}^4(\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{21}(\lambda))$$

elde edilmiş olur. Bununla da teorem ispatlanmış olur.

#### 4. SONUÇLAR

Yarı ekseninde verilmiş saçılma matrisiyle, tüm ekseninde verilmiş saçılma matrisi arasında sonlu sayıda noktalardan dolayı önemli bir ilişki olduğu görülmüştür.

Elde edilen sonuçlar, kısmi türevli non-lineer problemlerin çözümünde kullanılacaktır.



**KAYNAKLAR**

Ablowitz, M.J. ve Segur H., (1981), Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM Philadelphia

Ablowitz, M.J., Kaup D.J., Newell A.C. ve Segur H. (1973), Method for Solving the Sin-Gordon Equation, Phys. Rev. Lett., 30: 1262-1264.

Beals R., Coifman R.R., (1981,1982), Scattering Transformations Spectrales et Equations d'evolution Nonlineare, I and II, Presented at Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-1981, exp. 22 and 1981-1982, exp. 21, Ecole Polytechnique, Palaiseau..

Beals R.ve Coifman R.R., (1984), Scattering and Inverse Scattering for First Order Systems, Commun. Pur. Appl. Math., 37:39-90.

Beals R.ve Coifman R.R., (1987), Scattering and Inverse Scattering for First Order Systems II, Inverse Problems, 3: 577-593.

Beals R.ve Coifman R.R., (1989), Linear Spectral Problems Nonlinear Equations and the  $\bar{\partial}$ -method, Inverse Problems, 5: 87-130.

Borg G., (1946), Eine Umkehrung der Sturm-liouvillschen Eigenwertaufgabe. -Acta Math., 78(1):1-96.

Caudrey P.J., (1982), The Inverse Problem for a General  $N \times N$  Spectral Equation., Physica, 6D: 51-66.

Caudrey P.J.,(1983), The Inverse Spectral Problem for a System of Three Coupled First Order Equations. Proceedings of the Royal Irish Academy-1983-Vol. 83A(1):23-31.

Deift P. ve Trubowitz E., (1979), Inverse Scattering on the Line, Commun. Pure Appl. Math., 32: 121-251.

Faddeev L.D., (1964), Bir Boyutlu Schrödinger Denklemiinde S Matrisinin Özellikleri, Tr. Mat. in. AN. SSSR., 73:314-336.

Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. ve Miura R.M., (1967), Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation , Phys. Rev. Lett., 19: 1095-1097.

Gasimov M.G. ve Levitan B.M., (1966),Dokl. Akad. Nauk SSSR 167, 967=Soviet Math. Dokl. 7 , 495 MR. 33#2859.

Gelfand I.M. ve Levitan B.M.,( 1951), Diferansiyel Denklemiın Spektral Fonksiyona Göre Belirlenmesi, Izv. AN. SSSR., Matematik konuları, 15: 309-360.

Gelfand I.M. ve Levitan B.M., (1955), On the Determination of a Differential Equation from its Spectral Function, , Amer. Math. Soc. Transl., 2(1): 253-304.

Gohberg I.T. ve Krein M., (1958), Systems of Integral Equations on the Semiaxis with Kernels Depending on the Difference of the Arguments, *Uspekhi Mat. Nauk.*, 13(2): 3-72.

Güler C., (1996), Yarı Eksende Üç Adi Diferansiyel Denklemden Oluşan Sistem İçin Ters Saçılma Problemi, Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

Iskenderov N.Sh., (1985), Direct and Inverse Scattering Problem for a System of Three Hyperbolic Equations of the First Order on Semi-Axis with Given Scattering Waves, Kiev, 20p. (Preprint/ AN Ukr SSR, Institute of Mathematics, 85.87).

Iskenderov N.Sh., (1988a), Inverse Nonstationary Scattering Problem for a System of Four Hyperbolic Equations of the First Order on Semi-Axis. Kiev, 52p. ( Preprint/ AN Ukr SSR, Institute of Mathematics, 88.38).

Iskenderov N.Sh., (1988b), Scattering Problem for a Hyperbolic System of Four Equations of the First Order on Semi-Axis. // *Boundary Value Problems for Differential Equations.* - Kiev. Institute of Mathematics, / AN Ukr SSR, 1988- p53-55.

Iskenderov N.Sh. ve Yıldız A., (1996), The Inverse Nonstationary Scattering Problem for a Hyperbolic System of Equations on Semi-Axis, *Turkish Journal of Mathematics*, Volume 20, Number 4.

Kaup D.J., (1976), The Three-Wave Interaction, A Jondisper Sive, *Studies in Applied Math.* 55: 9-44.

Krein M.G., (1951), Sturm-Liouville İçin Ters Problemin Çözümü. *Dok. Ak. Nauk SSSR*, 76(1): 21-24.

Krein M.G., (1958), Integral Equations on the Half-Line with a Kernel Depending on the Difference of the Arguments, *Uspekhi Mat. Nauk.*, 13(5): 3-120.

Lax P.D., (1968), Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Commun. Pure. Appl. Math.*, 21: 467-490.

Levitan B.M., (1984), Sturm-Liouville 'in Ters Problemleri, *Nauka*.

Marchenko V.A., (1977), Sturm-Liouville Operatörleri ve Uygulamaları, Kiev, *Naukova Dumka*.

Nizhnik L.P. ve Vu F.L., ( 1974), Kendi Kendine Eşlenik Olmayan Potansiyeller İçin Yarı Eksende Saçılma Problemi, Kiev, *Ukr. Mat. z.*, C.XXXVI, 4.

Nizhnik L.P. ve Iskenderov N.Sh., (1990), Inverse Nonstationary Scattering Problem for a Hyperbolic System of Three Equations of the First Order on Semi-Axis. // *Ukr. Mat. z.*, 42(7):931-938.

Nizhnik L.P. ve Tarasov V.G.,(1981), The Inverse Nonstationary Scattering Problem for a Hyperbolic system of Equations, Direct and Inverse Scattering Problems, Kiev, Institute of

Mathematics, / AN Ukr SSR, 1981. P.61-76.

Nizhnik L.P. ve Tarasov V.G., (1977), The Inverse Nonstationary Scattering Problem for a Hyperbolic System of Equations, Soviet Math. Dokl. Vol. 18, No.2.

Nizhnik L.P., (1988) The Inverse Scattering Problems for the Hyperbolic Equations and Their Applications to the Nonlinear Integrable System // Nonlinear and Turbulent process: Proc. of III. International Workshop, Kiev, USSR, 1987.-Kiev: Naukova Dumka, 1988, 2:118-121.

Nizhnik L.P., (1988), The Inverse Scattering Problems for the Hyperbolic Equations and Their Applications of the Nonlinear Integrable System // Reports on Math. Phys., 26(2):261-283.

Nizhnik L.P., (1973), The Nonstationary Scattering Problem, "Naukova Dumka", Kiev.

Sattinger D.H., (1989), Flat Connections and Integrable Systems, Int. J. Mod. Phys. 3B, 211-233.

Sattinger D.H., (1990), Flat Connections and Scattering Theory on the Line, SIAM J. Math. Anal. 21: 729-756.

Shabat A.B., (1978), An Inverse Scat. Problem, Diff. Uravn, 15, 1978, pp. 1824-1834, Diff. Equations 15, 1980, pp. 1299-1307.

Sung L.Y. ve Fokas A.S., (1991), Inverse Problem for  $N \times N$  Hyperbolic Systems on the Plane and the  $N$ -Wave Interactions, Clarkson University, Commun. on Pure Appl. Math. Vol XLIV, 535-571.

Wadati M., (1972), The Modified Korteweg-de Vries Equation, J.Phys. Soc. Japan 32:168.

Zakharov V.E. ve Manakov S.V., (1973), Resonant Interaction of Wave Packets in Nonlinear Media, Sov. Phys. JETD Lett., 18: 243-245.

Zakharov V.E. ve Manakov S.V.,(1974), On the Complete Integrability of the Nonlinear Schrödinger Equation, Theo. Math. Phys., 19: 551-559.

Zakharov V.E. ve Shabat A.B., (1971), Zh. Eksp. Ter. Fiz. 61, 118. [Sov. Phys.- JETP 34, 62 (1972)].

Zhou X., (1989a), Direct and Inverse Scattering Transforms with Arbitrary Spectral Singularities, Commun. Pure Appl. Math., 42: 895-938.

Zhou X., (1989b), The Riemann-Hilbert Problem and Inverse Scattering, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM J. Math. Anal. 20(4): 966-986, July 1989.

## Ek 1. Riemann-Hilbert Problemi

Riemann-Hilbert problemi aşağıdaki şekilde verilir:

Kompleks düzlemde kapalı  $\Gamma$  konturu (bu kontur sonsuzluktan da geçebilir), kontur üzerinde tanımlanmış  $N$ . mertebeden  $G(\lambda)$  matris fonksiyonu verilmiştir. Kontur üzerinde,

$$\Psi_1(\lambda)\Psi_2(\lambda) = G(\lambda) \quad (\text{E.1})$$

şartını sağlayan, konturun içinde ve dışında analitik olan  $\Psi_1(\lambda)$  ve  $\Psi_2(\lambda)$  fonksiyonlarının bulunması problemi Riemann-Hilbert problemi olarak adlandırılır. Burada görüldüğü gibi Riemann-Hilbert probleminin çözümü tek türlü değildir. Gerçekten  $\Psi_1(\lambda)$ ,  $\Psi_2(\lambda)$  aranan çözüm  $g$  'de tersi olan matris fonksiyon ise, o zaman  $\Psi_1 g$  ve  $g^{-1}\Psi_2$  matris fonksiyonları da aynı  $G(\lambda)$  fonksiyonu için Riemann-Hilbert probleminin çözümü olacaktır. Bu durumdan kurtulmak için Riemann-Hilbert problemini normalize etmek gerekir. Bunun için  $\Psi_1$  veya  $\Psi_2$  fonksiyonlarının analitiklik bölgesinin herhangi bir noktasında değerini vermek yeterlidir.

$$\lambda \rightarrow \infty \text{ için } \Psi_1 \rightarrow I,$$

veya

$$\lambda \rightarrow \infty \text{ için } \Psi_2 \rightarrow I$$

ise buna kanonik normalize denir.

$\Psi_1$  ve  $\Psi_2$  matris fonksiyonları, analitiklik bölgelerinde  $\det \Psi_1 \neq 0$ ,  $\det \Psi_2 \neq 0$  şartını sağlıyorsa bu tür Riemann-Hilbert problemine, regüler Riemann-Hilbert problemi denir. Kolayca göstermek olur ki normalize edilmiş regüler Riemann-Hilbert probleminin çözümü tektir.

### Skaler homojen Riemann-Hilbert problemi.

Farzedelim ki, kapalı  $\Gamma$  konturu üzerinde verilmiş skaler  $G(\lambda)$  fonksiyonu,  $\Gamma$  üzerinde sıfırdan farklıdır ve  $\Gamma$  'dan alınmış keyfi iki  $\lambda_1, \lambda_2$  noktası için

$$|G(\lambda_2) - G(\lambda_1)| < M |\lambda_2 - \lambda_1|^\alpha, \quad M > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (\text{E.2})$$

Hölder şartını sağlıyor

Konturun ayırdığı iç bölgeyi  $D_+$ , dış bölgeyi  $D_-$  ile ve  $D_+$  'da analitik fonksiyonu  $X_+(\lambda)$ ,  $D_-$  'de analitik fonksiyonu ise  $X_-(\lambda)$  ile işaretleyelim. Bu fonksiyonlar kanonik normalize fonksiyonlar olsun. O zaman Riemann-Hilbert problemini aşağıdaki gibi de yazmak mümkündür:

$$X_+(\lambda) = G(\lambda)X_-(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma$$

Bu problemin çözümü açık şekilde verilebilir.

Çözümü vermeden önce Riemann-Hilbert probleminin çözülmesinde önemli rol oynayan index kavramını verelim:

$$\text{ind } G(\lambda) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(\lambda)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d(\ln G(\lambda)).$$

Burada argümanın değişmesi eğri boyunca pozitif yönde anlaşılır. Farzedelim ki,

$$\kappa = \text{ind } G(\lambda)$$

dır. O zaman

$$X(\lambda) = \begin{cases} X_+(\lambda), & \lambda \in D_+ \\ X_-(\lambda), & \lambda \in D_- \end{cases}$$

çözümü, aşağıdaki gibi verilir.

$$X(\lambda) = \begin{cases} \exp(H(\lambda)), & \lambda \in D_+ \\ z^{-\kappa} \exp(H(\lambda)), & \lambda \in D_- \end{cases}$$

$$\text{burada, } H(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln(t^{-\kappa} G(t))}{t - \lambda} dt.$$

Bu tür çözüm temel çözüm olarak adlandırılır.

1958 'de Krein ve Gohberg çekirdek fonksiyonunun yalnız argümanların farkına bağlı olduğu halde yarı eksende integral denklemleri öğrenirken klasik Hölder şartları dışında daha genel halde kendi çözüm (faktörizasyon) yöntemlerini vermişlerdir.

Farzedelim ki,  $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$  dir ve  $R_0$  ile  $f(t)$  fonksiyonunun Fourier transformasyonları uzayını işaret edelim. Yani,

$$R_0 = \left\{ F(\lambda): F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\lambda t) dt, f(t) \in L_1(\mathbb{R}) \right\}$$

dir. Uygun olarak  $R_a, R_a^+, R_a^-$  ile

$$R_a = \left\{ F(\lambda, a): F(\lambda, a) = a + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\lambda t) dt, f(t) \in L_1(\mathbb{R}) \right\},$$

$$R_a^+ = \left\{ F_+(\lambda, a): F_+(\lambda, a) = a + \int_0^{\infty} f(t) \exp(i\lambda t) dt, f(t) \in L_1(\mathbb{R}) \right\},$$

$$R_a^- = \left\{ F_-(\lambda, a): F_-(\lambda, a) = a + \int_{-\infty}^0 f(t) \exp(i\lambda t) dt, f(t) \in L_1(\mathbb{R}) \right\}$$

işaret edelim. Kolayca göstermek olur ki  $R_a^+$  'dan olan fonksiyonlar üst yarı  $\pi_+$  düzleminde,  $R_a^-$  'den olan fonksiyonlar ise  $\pi_-$  alt yarı düzleminde analitik fonksiyonlardır.

Gohberg ve Krein,

$$\chi(t) - \int_0^{\infty} K(t-s)\chi(s)ds = f(t)$$

denkleminin çözümünü Riemann-Hilbert probleminin yardımıyla açık şekilde ifade etmişlerdir. Burada,  $\chi(t)$  ve  $f(t)$  vektörler,  $K(t)$  ise elemanları  $L_1(R)$  'den olan  $N \times N$  matris fonksiyondur.  $\chi(t)$  ve  $f(t)$  vektör fonksiyonlarının bileşenleri ise  $L_1(0, \infty)$  'a dahildir.

Farzedelim ki  $G(\lambda) \in R$  skaler fonksiyonu kapalı  $L = [-\infty, \infty]$  aralığında tanımlanmıştır ve  $G(\lambda) \neq 0$ ,  $\lambda \in R$ .

Riemann-Hilbert problemi yukarıdaki işaretlemeler dahilinde aşağıdaki gibi verilebilir:

$$G = G_+ G_-, \quad G_{\pm}(\infty) = 1, \quad G_{\pm} \in R_{\pm}. \quad (E.3)$$

Krein, 1958 'de aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

1. Farzedelim ki  $G(\lambda)$  fonksiyonu yukarıdaki (E.3) şartlarını sağlıyor. Bu fonksiyon kanonik faktörizasyona yalnız ve yalnız o zaman sahiptir ki eğer  $G(\lambda) \neq 0$  ve  $\text{ind } G = 0$  olsun.

2. Farzedelim ki  $G(\lambda) \neq 0$  ve  $\text{ind } G = \kappa \neq 0$  dir.

i) Eğer  $\kappa > 0$  ise o zaman öyle  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \pi_+$  noktaları ve  $p_1 + \dots + p_m = \kappa$  şartını sağlayan  $p_1, \dots, p_m$  tamsayıları vardır, öyle ki  $G_+(\lambda) \in R_+$ . Bundan başka öyle  $G_-(\lambda) \in R_-$  fonksiyonu vardır, öyle ki  $G = G_+ G_-$  ve  $G_-$  fonksiyonu  $\pi_-$  'de sıfırdan farklıdır. Burada  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ler  $G_+(\lambda)$  'nın  $p_1, p_2, \dots, p_m$  .ci mertebeden sıfırlarıdır.

ii) Eğer  $\kappa < 0$  ise yukarıdakiler benzer şekilde söylenebilir. Burada,  $p_1 + \dots + p_m = -\kappa$ . Burada  $G_{\pm}(\lambda)$  fonksiyonları,

$$G_{\pm}(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} \exp(i\lambda t) \gamma_{\pm}(t) dt, \quad \lambda \in \pi_{\pm}$$

gibi gösterilebilir.

Bu teorem Gohberg ve Krein [1958] tarafından matris fonksiyonlar için benzer şekilde genelleştirilmiştir.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	7.5.1970	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1980-1986	Fatih Kız Lisesi
Lisans	1986-1990	Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1990-1992	Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	1993-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Çalıştığı kurum	1992-Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Görevlisi