

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

85031

YÜZEYLERİN BİRBİRİ ÜZERİNE
İZOMETRİK TASVİRİ

Filiz KANBAY

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

85031

DOKTORA TEZİ

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tez Savunma Tarihi : 11 Ekim 1999
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Füsun URAS (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Belgin MAZLUMOĞLU (MSÜ)
: Prof. Dr. Afet ÖZOK (MÜ)

[Handwritten signatures]
B. M. ...
A. Ö.

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
1. GİRİŞ.....	1
2. BİRBİRİ ÜZERİNE İZOMETRİK OLARAK TASVİR EDİLEBİLEN DOĞRUSAL YÜZEYİN BÜYÜKLÜKLERİ.....	4
2.1 Ön Bilgiler.....	4
2.2 Açılabilir Yüzeyler Özel Hali.....	4
2.3 Doğuranların Korunması Koşulu Altındaki İzometrik Tasvir.....	5
2.4 Genel Hal.....	8
2.4.1 Doğuranları korumayan izometrik tasvir.....	8
2.4.2 S^0 kuvadriğinin bir parçalı hiperboloid olma hali.....	9
2.4.3 S^0 kuvadriğinin bir hiperbolik paraboloid olma hali.....	12
3. ASAL EĞRİLİKLERİ KORUYAN İZOMETRİK TASVİR.....	17
3.1 Ön Bilgiler.....	17
3.2 Doğrusal Yüzeylerden Bonnet Yüzeyi Örnekleri.....	19
3.3 (3.8) Yüzey Sınıfındaki Yüzeylerin Ortak Geometrik Özellikleri.....	22
3.3.1 Bazı özel haller.....	22
3.3.2 Boğaz çizgisine ait özellikler.....	23
3.3.3 Bu özel hallerin uygulanması.....	27
4. DİK DURUMLU YÜZEYLER.....	31
4.1 Ön Bilgiler.....	31
4.2 Açılabilir Yüzeyler Özel Hali.....	32
4.3 Genel Hal.....	34
4.4 Sonsuz Küçük Bükülme Problemi İle İlgili Sonuçlar.....	37
4.5 Ayrıcalıklı Bir Özel Hal.....	39
4.6 Dik Durumlu Yüzeylerden Bonnet Çifti Oluşturan Yüzeyle Geçiş.....	42
5. SONUÇLAR.....	47
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	49

TEŞEKKÜR

Doktoramı yöneten ve çalışmalarımnda yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen; her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; hocam Sayın Doç. Dr. Füsun URAS ' a minnet ve şükranlarımı sunarım.

ÖZET

Çalışma, giriş ve üç bölüm halinde sunulmuştur.

I.Bölümde, O. Bonnet'in yüzeyle teorisine ait çok ünlü bir teoremi ele alınmıştır. N_{2.1}.de, konuyla ilgili teoremler hatırlatılmış; N_{2.2}. de de açılabilir yüzeyler özel halindeki sonuçlar özetlenmiştir. N_{2.3}. de doğuranları birbirine karşılıklı gelecek şekilde izometrik tasvir edilebilen yüzeylerin büyüklükleri verilmiştir. N_{2.4}.de, genel hal, yani birbiri üzerine doğuranlar karşılıklı gelmeksizin izometrik tasvir edilebilen yüzeyler problemi ele alınmış ve bu yüzeylerin büyüklükleri hesap edilmiştir.

II.Bölümde, bir Bonnet yüzey çifti oluşturan yüzeyler konusu üzerinde durulmuştur. N_{3.1} de bu konunun son aşamasını oluşturan temel teoremin ifadesi verilmiştir. N_{3.2}. de doğrusal Bonnet yüzeyi üzerinde durulmuştur.

III.Bölümde, dik durumlu yüzeylerin belirtilmesi problemi ele alınmıştır. N_{4.1}. de genel açıklamalar yapıldıktan sonra N_{4.2}. de, açılabilir yüzeylere dik durumlu yüzeylerin tümü belirtilmiştir. N_{4.3}. de problem genel olarak ele alınmış ve problemin, A ,B bilinmeyen fonksiyonlarına ait diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. B=0 , A≠0 özel halı incelenmiştir. N_{4.4}. de bir yüzeyin sonsuz küçük bükülmesi probleminin dik durumlu yüzeylerle doğrudan ilgili olduğu hatırlatılmıştır. N_{4.5}. de de bulunan diferansiyel denklemler oldukça genel bir özel halde çözümlenerek A , B fonksiyonları belirtilmiştir. N_{4.6}. da dik durumlu yüzeyler yardımı ile belirtilen izometrik yüzey çiftlerinin büyüklükleri belirtilmiş, sonra da bu izometrik yüzey çiftlerinin bir Bonnet yüzey çifti oluşturması koşulu elde edilmiştir. Bu koşul çok sade ve çözülebilir bir diferansiyel denklem olarak ortaya çıktığından , genel incelemeler için önemli bir adım oluşturmuştur.

ABSTRACT

This work, is presented with an introduction and three chapters.

In the first chapter, O. Bonnet's very famous theorem, related to the surfaces theory, is explained. In section 2.1., some theorems about this topic are mentioned. In section 2.2., in special case of developable surfaces, some results are summarized. In section 2.3., the magnitudes of isometrically mapped surfaces, are given so that, the generators of these surfaces are preserved. In section 2.4., the problem in which a ruled surface is isometrically mapped to another, with non-preserved generators are studied, and the magnitudes of these surfaces are calculated.

In the second chapter, surfaces that form Bonnet's surface pair are studied. In section 3.1., basic theorem that forms the last part of this subject is expressed. In section 3.2. ruled Bonnet surface is discussed.

In the third chapter, the specification of the problem of the surfaces in ortogonal position (i.e. the surfaces correspond with ortogonality of corresponding directions) is explained. In section 4.2., all of the surfaces in ortogonal positions with developable surfaces are mentioned. In section 4.3., the problem is observed in general and differential equations belonging to the unknown functions of A, B are obtained. Special case; $B=0$, $A \neq 0$ is examined. In section 4.4. it is remarked that the problem of infinitesimal bending of a surface is directly related to the surfaces in ortogonal position. In section 4.5., equations found are solved in a special case and functions A and B expressed. In section 4.6., the magnitudes of isometric surface pairs, expressed with the surfaces in ortogonal position, are given and than the condition of this isometric surface pairs forming a Bonnet surface pair is obtained. Since this condition occurs as a very basic solvable differantial equation it has found an important step for general examinations.

YÜZEYLERİN BİRBİRİ ÜZERİNE İZOMETRİK TASVİRİ PROBLEMİ

1.GİRİŞ

Bu çalışmada, 3 boyutlu Euclid uzayında göz önüne alınan iki yüzey arasında karşılıklı noktalardaki metriği koruyan yani izometrik olan tasvirler söz konusu edilecektir. Bu konu, diferansiyel geometrinin en eski ve en önemli konularından biri olup çok incelenmiştir. Bununla birlikte bu klasik konuda bir çok yönden yeni araştırmalar da yapılmaktadır. Çalışmamızda:

I. Bölümde, O. Bonnet' nin açılabilir olmayan doğrusal yüzeyler arasındaki izometrik tasvir ile ilgili ve her diferansiyel geometri kitabında yer alan klasik bir teoreminin konusunu oluşturan doğrusal yüzeylerin büyüklüklerini belirteceğiz.

II. Bölüm, ilk defa yine O. Bonnet' nin ortaya attığı özel bir izometrik tasvir problemi ile ilgili olacaktır. Bu problem, izometrik tasvirde özel olarak asal eğriliklerin de korunması koşulunu içermektedir. Böyle özel bir izometrik tasvir ile birbiri üzerine tasvir edilebilen yüzey çiftlerinin araştırılması oldukça ilginç bulunmuş ve bir çok çalışmaya konu olmuştur.

III. Bölümde, izometrik tasvir problemine eşdeğer olan karşılıklı doğrultuları dik olacak şekilde karşılık gelen yüzeylerin araştırılması konusunu ele aldık. Genel bir örnek olmak üzere önce, açılabilir yüzeylere bu şekilde karşılık gelen yüzeyleri belirttik. Sonra da problemin genel haldeki denklemlerini verdik. Bu arada, oldukça genel bazı özel haller üzerinde de durulmuştur.

Çalışmamızda g_{ij} metrik tensörünün ve b_{ij} ikinci form tensörünün bileşenlerini, klasik teorideki gösterimle,

$$g_{11}=E, \quad g_{12}=g_{21}=F, \quad g_{22}=G; \quad b_{11}=L, \quad b_{12}=b_{21}=M, \quad b_{22}=N \quad (1.1)$$

şeklinde göstereceğiz. Yüzeyin asal eğrilikleri r, r^* ile Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri de K ve H ile gösterilecektir. Buna göre

$$K=rr^* \quad , \quad 2H=r+r^* \quad (1.2)$$

olacaktır. Eğrilik çizgilerinin geodezik eğriliklerine $(-q), q^*$ dersek, (u,v) eğrilik çizgileri parametrelerinde

$$q=\frac{e_v}{eg} \quad , \quad q^*=\frac{g_u}{eg} \quad , \quad [e=+\sqrt{E} \quad , \quad g=+\sqrt{G} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial u}=P_u \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial v}=P_v \quad] \quad (1.3)$$

olacaktır. Eğrilik çizgileri dışındaki bir (u,v) dik koordinat sisteminde $v=sbt.$ eğrilerinin normal eğriliğini , geodezik eğriliğini ve geodezik burulmasını $k, (-p), t$ ile; $u=sbt.$ lerinkini de $k^*, p^*, -t$ ile göstereceğiz. Buna göre bu dik koordinat sisteminde

$$k=\frac{L}{E} \quad , \quad p=\frac{e_v}{eg} \quad , \quad t=\frac{M}{eg} \quad ; \quad k^*=\frac{N}{G} \quad , \quad p^*=\frac{g_u}{eg} \quad , \quad (e=+\sqrt{E} \quad , \quad g=+\sqrt{G} \quad) \quad (1.4)$$

$$K=kk^*-t^2 \quad , \quad 2H=k+k^*$$

yazılabilecektir. Bir dik koordinat sisteminin $v=sbt.$ ve $u=sbt.$ eğrileri doğrultusunda , onların yay uzunluklarına göre alınan türevlerini de 1,2 alt indisleri ile göstereceğiz.

O halde

$$P_1(u,v)=\frac{P_u(u,v)}{e} \quad , \quad P_2(u,v)=\frac{P_v(u,v)}{g} \quad (1.5)$$

yazılabilecektir. $v=sbt.$ eğrileri ile θ açısı yapan bir eğri boyunca alınan türev de, bilindiği gibi

$$P_\theta=P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta \quad (1.6)$$

şeklinde olacaktır.(1.5) tanımları gereğince $P_{uv} = P_{vu}$ uygunluk koşulu

$$P_{12} + p P_1 = P_{21} + p^* P_2 \quad (1.7)$$

şeklinde ifade edilebilecektir.

Yüzeyin, sözü edilen dik koordinat sisteminde yazılmış, Weingarten türev formüllerini, Mainardi-Codazzi (M.C.) ve Gauss (G.) uygunluk denklemlerini de buraya alıyoruz:

Yüzeyin yer vektörü $\vec{x}(u,v)$; normal birim vektörü de $\vec{n}(u,v)$ olmak üzere türev formülleri:

$$\vec{x}_{11} = -p \vec{x}_2 + k \vec{n} \quad , \quad \vec{x}_{12} = p^* \vec{x}_2 + t \vec{n} \quad , \quad \vec{x}_{21} = p \vec{x}_1 + t \vec{n} \quad , \quad \vec{x}_{22} = -p^* \vec{x}_1 + k^* \vec{n} \quad (1.8)$$

$$\vec{n}_1 = -k \vec{x}_1 - t \vec{x}_2 \quad , \quad \vec{n}_2 = -t \vec{x}_1 - k^* \vec{x}_2 \quad , \quad (\vec{n} = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2);$$

uygunluk denklemleri de

$$k_2 = p(k^* - k) + t_1 + 2p^* t \quad , \quad k_1^* = p^*(k - k^*) + t_2 + 2pt \quad , \quad (M. C.) \quad (1.9)$$

$$K = kk^* - t^2 = -(p_1^* + p_2 + p^{*2} + p^2) \quad (G.)$$

şeklindedir. Bu denklemlerden eğrilik çizgileri özel halindeki denklemlere geçmek için $t=0$ koymanın yeteceği apaçıktır.

Çalışmamız süresince ele alınan yüzeylerin söz konusu edilen noktaları civarında yeterince düzgün olduğu varsayılacak ve bu husus ayrıca ifade edilmeyecektir.

2. BİRBİRİ ÜZERİNE İZOMETRİK OLARAK TASVİR EDİLEBİLEN DOĞRUSAL YÜZEYLERİN BÜYÜKLÜKLERİ

2.1 Ön Bilgiler

Bilindiği gibi açılabilir olmayan bir doğrusal yüzey; [doğrusal yüzey deyince, doğal olarak, doğuranların reel olduğunu da varsaymış oluyoruz], doğuranlar karşılıklı gelmek koşulu ile, doğrultman konisi tamamen keyfi seçilebilecek olan, başka bir doğrusal yüzey üzerine izometrik tasvir edilebilir (Uras , 1992).

Açılabilir olmayan iki doğrusal yüzeyin, doğuranları karşılıklı gelmeksizin, birbiri üzerine izometrik tasviri ile ilgili olarak da, ilk kez O.Bonnet tarafından şu teorem ispatlanmıştır: "Açılabilir olmayan iki doğrusal yüzey, doğuranları karşılıklı gelmeksizin, birbiri üzerine izometrik tasvir edilebiliyorsa bu yüzeyler aynı bir kuvadriğe izometrik tasvir edilebilirler ve bu izometrik tasvirde bir yüzeyin doğuran sistemi kuvadriğin iki doğuran sisteminden birine, ikinci yüzeyin doğuran sistemi de kuvadriğin öteki doğuran sistemine karşılık gelirler". (Darboux,1894; Bianchi, 1910; Einsenhard ,1960; Uras, 1992).

Bu bölümün konusu bakımından, özellikle ikinci teoremde sözü geçen doğrusal yüzeyler ilginç görülmektedir. Çünkü bu teorem, doğuranları karşılıklı gelmeksizin izometrik tasvir edilebilen iki doğrusal yüzeyin var olması hipotezine dayanmaktadır. Burada, teoremde sözü edilen doğrusal yüzeylerin büyüklükleri belirtilecek ve böylece var olma sorunu da çözülmüş olacaktır.

Önce, düzlemleri konu dışı bırakarak, açılabilir yüzeyler özel halini göz önüne alacağız.

2.2 Açılabilir Yüzeyler Özel Hali

Bir açılabilir yüzeyin ancak yine bir açılabilir yüzey üzerine ve her açılabilir yüzeyin her açılabilir yüzey üzerine izometrik tasvir edilebileceğini biliyoruz. Bu tasvirde doğuranlar genellikle birbirine karşılık gelmezler. O halde sorun, hangi açılabilir yüzeyler arasındaki izometrik tasvirde doğuranların birbirine karşılık geleceğinin belirtilmesi sorunudur. Bir açılabilir yüzeyde, doğuranlar ve dik yörüngeleri, yüzeyin eğrilik çizgilerini oluşturduğu

için bu, izometrik tasvirde eğrilik çizgilerinin korunması demektir. Bu hal, yani bir açılabilir yüzeyin eğrilik çizgileri korunarak izometrik tasvir edilebilmesi, Blaschke (Çev. Kerim Erim ,1949) tarafından incelenmiş ve şu sonuçlara varılmıştır:

- 1) Bütün silindirler birbiri üzerine doğuranlar (eğrilik çizgileri) korunarak izometrik tasvir edilebilirler.
- 2) Ancak, doğrusal olmayan eğrilik çizgilerinin karşılıklı noktalardaki geodezik eğrilikleri eşit olan koniler birbiri üzerine doğuranlar (eğrilik çizgileri) korunarak izometrik tasvir edilebilirler.
- 3) Ancak, yay uzunlukları aynı olmak üzere karşılıklı noktalardaki eğrilikleri eşit olacak şekilde (burulmalar keyfi) tekabül ettirilmiş iki uzay eğrisinin teğetler yüzeyleri birbiri üzerine doğuranlar (eğrilik çizgileri) korunarak izometrik tasvir edilebilirler.

O halde, iki açılabilir yüzey arasında daima gerçekleşebilecek olan izometrik tasvirlerin, bu üç özel hal dışındakilerinde doğuranlar birbirlerine karşılıklı gelmezler. Bu durumu böylece saptadıktan sonra artık aşağıdaki incelemelerimizde ele aldığımız doğrusal yüzeylerimizin açılabilir yüzeyler olmadığını varsayabiliriz.

2.3 Doğuranların Korunması Koşulu Altındaki İzometrik Tasvir

Burada ele alacağımız açılabilir olmayan doğrusal yüzeyler için Uras' ın (1992) kitabında sözü edilen yöntem ve büyüklükleri kullanacağız. Buna göre yüzey üzerinde doğuranları ve dik yörüngelerini koordinat sistemi olarak alıyoruz ve doğrultman eğri olarak da dik yörüngelerden birinin seçildiğini varsayıyoruz. Doğuranların birim vektörünü \vec{T} ile gösterirsek, bu birim vektör, sadece $\vec{r}(t)$ doğrultman eğrisinin t parametresine bağlı olacaktır; yani $\vec{T} = \vec{T}(t)$ dir. $\vec{T}(t)$ ile belirecek olan "doğrultman koninin" birim küre ile arakesit eğrisinin (s) yay uzunluğunu v parametresi olarak alırsak $t=t(v)$ olacağı için

$$\vec{T} = \vec{T}(v), \quad \vec{r} = \vec{r}(v), \quad (v, \vec{T}(v) \text{ birim küresel eğrinin } s \text{ yay uzunluğu}) \quad (2.1)$$

yazılabilecektir. O halde

$$\vec{T}^2(v)=\vec{T}'^2(v)=1, \quad \vec{r}'(v).\vec{T}(v)=0 \quad (\vec{T}.\vec{T}'=0) \quad (2.2)$$

dır. Buna göre yüzeyin vektörel denklemi

$$\vec{x}(u,v)=\vec{r}(v)+u\vec{T}(v) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilecek ve burada v =sbt. ler doğuranları u =sbt. ler de dik yörüngeleri gösterecektir. Uras'ın (1992) kitabından biliyoruz ki, yüzeyin dağılma parametresi β , boğaz noktasının apsisi de σ ise

$$\beta=\beta(v), \quad \sigma=\sigma(v), \quad \vec{r}'^2=\beta^2+\sigma^2, \quad \vec{r}'.\vec{T}'=-\sigma \quad (2.4)$$

dır. Bu bilgilerle (2.3) den, yüzeyin 1.ve 2.esas form katsayılarını

$$\begin{aligned} E=1, \quad F=0, \quad G=(u-\sigma)^2+\beta^2, \quad (+\sqrt{EG-F^2}=w=+\sqrt{G} \equiv g); \\ L=0, \quad M=-\frac{\beta}{w}, \quad N=\frac{1}{w} \{D(v)[(u-\sigma)^2+\beta^2]+(u-\sigma)\beta'+\beta\sigma'\}, \quad (2.5) \\ \left(K = \frac{LN-M^2}{w^2} = \frac{-\beta^2}{w^4} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Hemen görülüyor ki açılabilir yüzeyler ($K=0$) $\beta=0$ ile tanımlanır. O halde açılabilir yüzeyleri konu dışı bırakmak için gerek ve yeter koşul

$$\beta \neq 0 \quad (2.6)$$

dır.

(2.5) deki $D(v)$ fonksiyonu $\beta \neq 0$ için

$$D(v) = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{T}''}{\beta} = (\vec{T}, \vec{T}', \vec{T}'') \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı olup, yüzeyin doğrultman konisini belirler. Gerçekten, doğrultman koniyi belirleyen $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrinin eğriliği κ , burulması τ ise

$$\kappa^2 = D^2 + 1, \quad \tau = \frac{D'}{1 + D^2} \quad (2.8)$$

dir (Uras, 1992).

Görülüyor ki bir S doğrusal yüzeyinin büyüklükleri, doğuranlar ve dik yörüngeleri koordinat sisteminde $\beta(v)$, $\sigma(v)$, $D(v)$ fonksiyonları ile belirmektedir.

S yüzeyine, doğuranları koruyan bir izometrik tasvir ile tasvir edildiği varsayılan bir \bar{S} doğrusal yüzeyi üzerinde de koordinat sistemi doğuranlar ve dik yörüngelerinden oluşacaktır. Çünkü izometrik tasvirde açılar da korunur. S ile \bar{S} arasındaki tasvirin u, v parametrelerinin aynı değeri ile yapıldığını ve \bar{S} 'nin $\bar{\beta}, \bar{\sigma}$ fonksiyonlarının da

$$\bar{\beta} = \varepsilon \beta, \quad \bar{\sigma} = \sigma, \quad (\varepsilon = \mp 1) \quad (2.9)$$

şeklinde olduğunu varsayarsak, (2.5) gereğince, tasvirin izometrik olacağı apaçıktır. Öte yandan \bar{S} yüzeyinin $D(v)$ fonksiyonu tamamen keyfi alınabilecektir. O halde Nu-2.1. de sözünü ettiğimiz teoreme göre, büyüklükleri (2.9) daki $\bar{\beta}(v)$, $\bar{\sigma}(v)$ ve keyfi bir $\bar{D}(v)$ fonksiyonu ile beliren \bar{S} doğrusal yüzeyi, S doğrusal yüzeyinin doğuranları koruyan, en genel izometrik tasvirini oluşturur.

2.4 Genel Hal

2.4.1 Doğuranları Korumayan İzometrik Tasvir

Bir $S(\vec{x})$ doğrusal yüzeyinin $\bar{S}(\vec{y})$ doğrusal yüzeyi üzerine, doğuranlar karşılıklı gelmeksizin, izometrik tasvir edildiğini varsayalım. Bu tasvirde, S üzerindeki doğuranlar ile \bar{S} nin doğuranlarının S deki tasvir ailesinin oluşturduğu şebekenin açı ortay şebekesini gözönüne alalım. Dik olacağı doğal olan bu şebekenin, S nin \bar{S} üzerindeki izometrik tasvirde, \bar{S} nin doğuranları ile S ninkilerin \bar{S} üzerindeki tasvirlerin oluşturduğu şebekenin açı ortay şebekesine tasvir olunacağı apaçıktır; çünkü izometrik tasvir açıları da korur. Şimdi, S ve \bar{S} doğrusal yüzeyleri üzerinde saptadığımız bu dik şebekelerin Nu -2.1. de sözünü ettiğimiz Bonnet teoreminde sözü geçen S^0 kuvadriği üzerindeki karşılığını düşünelim:

S^0 üzerine olan izometrik tasvirde, S nin doğuranları S^0 in bir doğuran sistemine, \bar{S} ninkiler de öteki doğuran sistemine karşılık geldiğinden, S , \bar{S} üzerinde sözünü ettiğimiz dik şebekeler S^0 kuvadriği üzerinde, iki doğuran şebekesinin açı ortay şebekesine karşılık gelecektir. S^0 in doğuranları, S^0 in asimptotik çizgileri de olduğu için, bunların açıortay şebekesi S^0 in eğrilik çizgilerinden oluşur.

Böylece şu önemli sonucu elde etmiş oluyoruz: S , \bar{S} , S^0 arasındaki izometrik tasvirde, (u, v) koordinat şebekesi olarak S^0 in eğrilik çizgilerini alırsak, bu şebekeye S , \bar{S} üzerinde karşılık geldiğini söylediğimiz dik şebekeler de S , \bar{S} nin (u, v) koordinat şebekeleri olacaktır. Fazla olarak, S^0 in bir doğuran sistemi v =sbt. eğrilik çizgisi ile φ açısı yapıyorsa, S nin doğuranları v =sbt. koordinat eğrisi ile aynı φ açısını, \bar{S} ninkiler ise $(-\varphi)$ açısını yapacaktır. Bu yüzden S den \bar{S} ye geçerken φ yerine $(-\varphi)$ koymak yetecektir.

Bu genel saptamalardan sonra S ve \bar{S} nin büyüklüklerinin araştırılmasına geçebiliriz. Bu büyüklüklerin S^0 kuvadriğinininkiler ile doğrudan ilgili olacağı apaçıktır. Doğrusal yüzeylerimizde doğuranlar reel olduğu için S^0 kuvadriği de reel doğuranlı olmak zorundadır. Yani S^0 , ya bir parçalı hiperboloid yada hiperbolik paraboloiddir. Bu iki yüzey

karakter bakımından tamamen farklı (biri merkezli öteki değil) olduğundan , S ve \bar{S} doğrusal yüzeylerin büyüklüklerini elde etmek için iki hal ayırmak zorunluluğu vardır.

2.4.2 S^0 kuvadriğinin bir parçalı hiperboloid olma hali

S^0 kuvadriği bir parçalı hiperboloid olsun.

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \quad (a, b, c = \text{sbt.})$$

merkezli kuvadriği, (u, v) eğrilik çizgileri parametrelerinde

$$x^2 = \frac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}, \quad y^2 = \frac{b(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}, \quad z^2 = \frac{c(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)} \quad (2.10)$$

şeklinde parametrelendir. Bu kuvadrik,

$$v < c < 0 < b < u < a \quad (2.10')$$

koşulu altında bir parçalı hiperboloiddir ve büyüklükleri

$$E = \frac{u(u-v)}{f(u)}, \quad F=0, \quad G = \frac{v(v-u)}{f(v)}; \quad (2.11)$$

$$L = -\sqrt{\frac{abc}{uv}} \cdot \frac{(u-v)}{f(u)}, \quad M=0, \quad N = \sqrt{\frac{abc}{uv}} \cdot \frac{(u-v)}{f(v)}; \quad [f(x) \equiv 4(a-x)(b-x)(c-x)]$$

şeklinde hesaplanır, (Eisenhart, 1960). Buna göre r ve r^* asal eğrilikleri:

$$r = -\frac{1}{u} \sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad r^* = -\frac{1}{v} \sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad \left(K = rr^* = \frac{abc}{u^2 v^2} \right) \quad (2.11')$$

şeklinde olacaktır. Öte yandan, S^0 kuvadriğinin doğuranlarının $v=sbt.$ eğrilik çizgisi ile yaptığı açılara φ ve $(-\varphi)$ dersek, bu doğuranlar yüzeyin asimptotiklerini oluşturduğundan, (2.11) büyüklüklerine göre,

$$\operatorname{tg} \varphi = +\sqrt{-\frac{v}{u}} \quad , \quad \left(\sin \varphi = \sqrt{\frac{-v}{u-v}}, \cos \varphi = \sqrt{\frac{u}{u-v}} \right) \quad (2.12)$$

olarak bulunacaktır.

Önce S doğrusal yüzeyinin büyüklüklerini arayalım. (1.4) e göre, (u,v) dik koordinat sisteminde, bu büyüklüklerin, 1.esas form katsayıları ve $v=sbt.$, $u=sbt.$ koordinat eğrilerinin k, k^* normal eğrilikleri ve $t, -t$ geodezik burulmaları ile belirlediğini biliyoruz. S, S^0 a izometrik tasvir edilebildiğinden 1.esas form katsayılarının (2.11) de verilen E, F, G ile aynı olacağı doğaldır. Yukarıda $N_{\underline{u}}$ 2.4.1. de, S nin doğuranlarının (u,v) dik koordinat sisteminin $v=sbt.$ eğrileri ile yaptığı açının S^0 da sözünü ettiğimiz φ açısına eşit olduğunu söylemiştik. O halde normal eğriliğin tanımını ve $v=sbt.$ ler ile φ açısı yapan doğuranların normal eğriliklerinin sıfır olduğunu kullanırsak (1.4) gereğince

$$k \cos^2 \varphi + k^* \sin^2 \varphi + 2t \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad (2.13)$$

elde ederiz. S nin Gauss eğriliği S^0 inkine eşit yani

$$K = k k^* - t^2 = r r^* = \frac{abc}{u^2 v^2} \quad (2.14)$$

dir. (2.13) ve (2.14) den önce

$$k = \operatorname{tg} \varphi \left(\sqrt{-\frac{abc}{u^2 v^2}} + t \right) \quad , \quad k^* = \operatorname{cotg} \varphi \left(\sqrt{-\frac{abc}{u^2 v^2}} - t \right)$$

sonra da (2.12) kullanılarak

$$k = -t \sqrt{-\frac{v}{u} - \frac{abc}{u^3 v}} , \quad k^* = -t \sqrt{-\frac{u}{v} + \frac{abc}{uv^3}} \quad (2.15)$$

buluruz. Bu k, k^* değerlerinin , (1.9) daki M.C. uygunluk denklemlerini sağlaması zorunludur.

$$k_v = \frac{e_v}{e} (k^* - k) + \frac{g}{e} (t_u + 2 \frac{g_u}{g} t) \quad (2.15^0)$$

$$k_u^* = \frac{g_u}{g} (k - k^*) + \frac{e}{g} (t_v + 2 \frac{e_v}{e} t)$$

şeklinde olan bu denklemlerde (2.11) deki E, G ve (2.15) deki k, k^* değerleri korunursa, her iki denklemin de

$$\sqrt{f(u)} t_u + \sqrt{f(v)} t_v + \frac{t}{u-v} (\sqrt{f(u)} - \sqrt{f(v)}) = 0 \quad (2.16)$$

denklemine dönüştüğünü görmek kolaydır.

Birinci mertebeden kısmi türevli lineer denklemlerin çözüm yöntemi kullanılarak bu denklemin genel çözümü,

$$\alpha'(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} , \quad [\alpha(x) \text{ bir eliptik integral}] \quad (2.17)$$

ve T bir keyfi fonksiyon olmak üzere,

$$t = \frac{T[\alpha(u) - \alpha(v)]}{u - v} \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir. (2.14) gereğince Gauss uygunluk denkleminin kendiliğinden sağlanacağı (çünkü bu denklem S^0 için sağlanmaktadır) apaçıktır. Böylece S doğrusal yüzeyinin büyüklükleri E, F, G nin (2.11), t nin (2.18), k, k^* ın (2.15) değerleri ile ve keyfi $T[\alpha(u) - \alpha(v)]$ fonksiyonuna bağlı olarak elde edilmiş olmaktadır.

\bar{S} doğrusal yüzey için yapılacak işlemler, yukarıda φ yerine $(-\varphi)$ olarak gelişeceği için o işlemlere tamamen benzer olacaktır. Bu yüzden buraya ayrıntı yazmıyor sadece sonuçları alıyoruz:

$$\bar{k} = \sqrt{-\frac{v}{u}} t - \sqrt{\frac{abc}{u^3v}} \quad , \quad \bar{k}^* = \sqrt{-\frac{u}{v}} t + \sqrt{\frac{abc}{uv^3}} \quad (2.15')$$

$$\sqrt{f(u)} t_u - \sqrt{f(v)} t_v + \frac{t}{u-v} [\sqrt{f(u)} + \sqrt{f(v)}] = 0 \quad (2.16')$$

$$t = \frac{P[\alpha(u) + \alpha(v)]}{u-v} \quad , \quad (P \text{ bir keyfi fonksiyon}) \quad (2.18')$$

Buna göre \bar{S} nin büyüklükleri de, E, F, G nin (2.11), t nin (2.18'), \bar{k}, \bar{k}^* ın (2.15') değerleri ile ve keyfi $P[\alpha(u) + \alpha(v)]$ fonksiyonuna bağlı olarak belirtilmiş olmaktadır.

2.4.3 S^0 kuvadriğinin hiperbolik paraboloid olma hali

S^0 kuvadriği bir hiperbolik paraboloid olsun. Genel bir

$$2z = ax^2 + by^2 \quad , \quad (a, b = \text{sbt.}) \quad (2.19)$$

paraboloidinin, $a, b < 0$ için, yani genelliği bozmadan yapılabilecek olan

$$a > 0 \quad , \quad b < 0 \quad (2.19')$$

hipotezi ile , hiperbolik paraboloid olacağını biliyoruz.(2.19) genel paraboloidi (u,v) eğrilik çizgileri parametrelerinde

$$x^2 = \frac{a-b}{b}uv, y^2 = \frac{b-a}{ab^2}(au+1)(av+1), z = \frac{1}{2} \frac{b-a}{ab}(au+av+1) \quad (2.20)$$

şeklinde parametrelendir. Buradan yüzeyin 1.ve 2.esas formunun katsayıları

$$E = \frac{a-b}{4b^2}(u-v) \frac{a(a-b)u-b}{u(au+1)}, G = \frac{b-a}{4b^2}(u-v) \frac{a(a-b)v-b}{v(av+1)}, F=0;$$

$$L = \frac{-\varepsilon' \sqrt{a^3}}{4\sqrt{b}[a(a-b)u-b][a(a-b)v-b]} \frac{(a-b)(u-v)}{u(au+1)}, M=0, \quad (2.21)$$

$$N = \frac{\varepsilon' \sqrt{a^3}}{4\sqrt{b}[a(a-b)u-b][a(a-b)v-b]} \frac{(a-b)(u-v)}{v(av+1)}, \quad (\varepsilon' = \mp 1),$$

olarak hesaplanır (Eisenhard, 1909). (2.19)' hiperbolik paraboloid koşulumuza ek olarak (2.20) den

$$u.v < 0, \quad (au+1)(av+1) < 0 \quad (2.22)$$

koşullarının da –reellik gerekçesi ile – varsayılmasının doğal olduğu apaçiktır. (2.19'), (2.22) koşullarından

$$[a(a-b)u-b][a(a-b)v-b] < 0 \quad (2.22')$$

koşulunun da elde edilmesi kolaydır. Böylece (2.21) de, kök içlerinin pozitif olması sağlanmış olduğu gibi, $E.G > 0$, $E+G > 0$ olduğu gösterilerek, $E > 0$, $G > 0$ olmasının da sağlandığı kanıtlanmış olur. Genelliği bozmayacağı için aşağıda, (2.21) de $\varepsilon' = 1$ alınacaktır. Artık Nu 2.4.2. de yapılanlara paralel olarak gelişeceği doğal olan işlemlere geçebiliriz. Önce yazılıştaki kısıtlığı sağlamak amacı ile

$$a(a-b)u-b \equiv U, \quad a(a-b)v-b \equiv V \quad (2.23)$$

diyelim. Hiperbolik paraboloidimizin doğuranlarının $v=sbt$. eğrilik çizgisi ile yaptığı açılara φ ve $(-\varphi)$ dersek (2.21) den

$$\operatorname{tg} \varphi = + \sqrt{-\frac{V}{U}} \quad (2.24)$$

bulunur. Nu 2.4.2. de söylediklerimize göre , S doğrusal yüzeyi için, (2.13) denklemi φ nin (2.24) değeri için geçerli olacaktır. Öte yandan (2.21) den, S^0 ve dolayısıyla S ve \bar{S} doğrusal yüzeylerinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{a^3 b^3}{U^2 V^2} \quad (= k k^* - t^2) \quad (2.25)$$

dir. (2.13), (2.24), (2.25) den S doğrusal yüzeyi için önce,

$$k = \operatorname{tg} \varphi (t + \varepsilon \sqrt{-K}) \quad \left(= -\sqrt{-\frac{V}{U}} t + \frac{ab\sqrt{-ab}}{U\sqrt{-UV}} \right), \quad (2.26)$$

$$k^* = -\operatorname{cotg} \varphi (t - \varepsilon \sqrt{-K}) \quad \left(= -\sqrt{-\frac{U}{V}} t + \frac{ab\sqrt{-ab}}{V\sqrt{-UV}} \right),$$

yazılabilecek, sonra da $t=0$ için $k = r$, $k^* = r^*$ olacağından

$$\varepsilon = \operatorname{iş}a(U) = -\operatorname{iş}a(V) \quad (2.26')$$

olması gerektiği saptanacaktır.

(2.21) deki E, G değerleri gözönünde bulundurularak k, k^* ın (2.26) daki ifadeleri (2.15⁰) denklemlerine konursa her iki denklemin de, t için lineer ve homogen olan

$$\sqrt{|u(au+1)|}t_u + \sqrt{|v(av+1)|}t_v + \left(\sqrt{|u(au+1)|} - \sqrt{|v(av+1)|} \right) \frac{t}{u-v} = 0 \quad (2.27)$$

denklemine dönüştüğü görülür.

Bu denklemin (2.16) ile olan benzerliği apaçık görülmektedir. Gerçekten (2.16) daki $f(x)$ fonksiyonu yerine burada $h(x)=x(ax+1)$ fonksiyonu gelmektedir ve (2.17) de tanımlanan $\alpha(x)$ fonksiyonu burada elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Sonuçta, (2.27) denkleminin genel çözümünü, bir değişkenli T keyfi fonksiyonuna bağlı olarak:

$$-\frac{1}{a} < u, v < 0, [u(au+1) < 0, v(av+1) < 0] \quad (2.27^0)$$

ise,

$$t = \frac{1}{u-v} T \left[(2au+1)\sqrt{-v(av+1)} - (2av+1)\sqrt{-u(au+1)} \right] \quad (2.28)$$

(2.27⁰) koşulu dışındaki hal için de

$$t = \frac{1}{u-v} T \left[\frac{2\sqrt{au(au+1)} + au + 1}{2\sqrt{av(av+1)} + av + 1} \right] \quad (2.29)$$

şeklinde elde ederiz.

Gauss denkleminin de kendiliğinden sağlandığını biliyoruz. Böylece, S doğrusal yüzeyinin bu ikinci hal için oluşan büyüklüklerini, (2.21) deki E, F, G değerleri ve t nin (2.28) deki değeri ile (2.26) dan elde edilecek k, k^* değeri ile keyfi bir T fonksiyonu cinsinden ifade etmiş oluyoruz.

\bar{S} doğrusal yüzeyi için bu halde yapılacak işlemlerin de, yukarıda φ yerine $(-\varphi)$ alınarak gelişeceğini biliyoruz. O halde ayrıntıya girmeden sadece sonuçları yazmakla yetinebiliriz.

$$\bar{k} = t \sqrt{-\frac{V}{U} + \frac{ab\sqrt{-ab}}{U\sqrt{-UV}}} \quad (2.26')$$

$$\bar{k}^* = t \sqrt{-\frac{U}{V} + \frac{ab\sqrt{-ab}}{V\sqrt{-UV}}}$$

$$\sqrt{|u(au+1)|} t_u - \sqrt{|v(av+1)|} t_v + \frac{t}{u-v} \left(\sqrt{|u(au+1)|} + \sqrt{|v(av+1)|} \right) = 0 \quad (2.27')$$

(2.27⁰) koşulu altında

$$t = \frac{1}{u-v} P \left[(2au+1)\sqrt{-v(av+1)} + (2av+1)\sqrt{-u(au+1)} \right] \quad (2.28')$$

(2.27⁰) koşulu dışında

$$t = \frac{1}{u-v} P \left[(2\sqrt{au(au+1)} + au+1)(2\sqrt{av(av+1)} + av+1) \right] \quad (2.29')$$

Burada, (2.17) ye karşılık olmak üzere $\alpha(x)$ fonksiyonunun

$$\alpha'(x) = \frac{1}{\sqrt{|x(ax+1)|}}$$

şeklinde tanımlandığına ve $\alpha(x)$ in integral olarak elde edildiğine dikkat edilmelidir.

3. ASAL EĞRİLİKLERİ KORUYAN İZOMETRİK TASVİR

3.1 Ön Bilgiler

Bilindiği gibi izometrik tasvirlerde Gauss eğriliği korunur. O. Bonnet (1867) çalışmasında ilk kez asal eğrilikleri de koruyan bir izometrik tasvirin araştırmasını yapmıştır. Bu çalışmasında Bonnet böyle bir tasvirin gerçekleştiği yüzeylerin (Bonnet yüzeyleri) belirtilmesi probleminin genel haldeki çözümünün olanaksız görüldüğünü ve ancak özel hallerde araştırılabileceğini belirtmiştir. Bu özel hallerin en önemlisi, iki yüzey arasındaki bu tasvirin bir bükülme (deformasyon) olması halidir; yani genel halde yüzeylerin karşılıklı noktaları civarında söz konusu olan izometrik tasvirin, yüzeylerin bölgesel olarak birbiri üzerine açılımlarını sağlayacak şekilde olmasıdır. Bonnet bu özel hali de ele almış ve büyük ölçüde çözmüştür. Buna karşın genel haldeki incelemeler bir yana bırakılmış olmakla birlikte bu özel hal sonraları bir çok çalışmaya konu oluşturmuştur. Bu konuda bazıları Soyuçok (1995) tarafından belirtilmiş olan araştırmalara bakılabilir. Bonnet problemi konusunda son ve genel hali esas alan kapsamlı bir araştırma Soyuçok (1995) tarafından yapılmıştır. Bu araştırmada iki yüzey arasında asal eğrilikleri koruyan genel bir izometrik tasvirin gerçekleşebilmesi için (bir yüzeyin Bonnet yüzeyi olması için) gerek ve yeter koşulu ifade eden bir kriter ispatlanmıştır. Fazla olarak aynı çalışmada birbiri üzerine asal eğrilikleri koruyacak şekilde bükülebilen yüzeyler için en son ve en doğru sonuçlar da verilmiştir. Yine aynı çalışmada, verilen kriterin ilk uygulaması olarak, bütün helikoidlerin Bonnet yüzeyi olduğu kanıtlanmıştır.

Bu çalışmamızda, bükülme hali tamamen çözüldüğüne göre, özel yüzeyler arasında gerçekleşebilecek olan Bonnet izometrik tasvirleri üzerinde durulacaktır.

İzometrik tasvirde K Gauss eğriliği korunduğundan bu tasvirin bir Bonnet tasviri olması için yüzeylerin H ortalama eğriliğini de koruması gerek ve yeter koşuldur. Bunun geometrik anlamı ise şöyle açıklanabilir: Metrik ve ortalama eğrilik yüzeyi belirtmeye yettiğine göre, Bonnet yüzeyleri sadece metriği ile belirlenebilen yüzeyler olarak ortaya çıkar. Bu çalışmamızda Soyuçok (1995) tarafından ispatlanmış olan temel kriteri kullanacağımız için, bu kriteri buraya alıyoruz:

Teorem: Bir $S (E, F, G ; L, M, N)$ yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin

$$E=G , F=0 , M=c = \text{sbt.} \quad (3.1)$$

koşullarını sağlayan bir izometrik şebeke içermesidir; böyle bir şebeke içeren yüzeyin izometrik olarak tasvir olunduğu $S' (E', F', G' ; L', M', N')$ yüzeyinin metrik ve ikinci esas form tensörünün katsayıları ise

$$E'=E=G=G' , F'=F=0 , M'=-M=-c = \text{sbt.} , L'=L , N'=N \quad (3.2)$$

şeklinde belirlidir.

Görüldüğü gibi bu kriter Bonnet probleminin en genel haldeki çözümünü, (3.1) özelliğini sağlayan bir izometrik şebeke içeren yüzeylerin araştırılmasına indirgemıştır. Fazla olarak bulunacak her Bonnet yüzeyine karşılık olan Bonnet çiftinin büyüklüklerini de doğrudan doğruya yazma olanağını vermektedir. (3.1) ile tanımlı olan ve Soyuçok' da (1995) A şebekesi diye adlandırılan bu şebeke $c = 0$ özel halinde izotermik yüzeylerdeki eğrilik çizgileri şebekesine özelleşir. O halde Bonnet yüzeyleri, bir yönden, izotermik yüzeylerin genelleştirilmiş gibi düşünülebilir. Soyuçok' un (1995) çalışmasında S, S' , Bonnet çiftlerine birbirine yandaş (asosie) yüzeyler denilmiştir.

Bir $S (\vec{x} ; E, F, G ; L, M, N)$ yüzeyinin noktasal $\bar{S} (-\vec{x})$ simetriğinin esas form büyüklükleri için $\bar{S} (E, F, G ; -L, -M, -N)$ yazılabildiği gibi aynı özelliğin düzlemsel simetrisi için de geçerli olduğu hemen görülebilir. Gerçekten , örneğin, $S \left[\vec{x}(x, y, z) \right]$, $\bar{S} \left[\vec{y}(x, y, -z) \right]$ ise $\vec{N}_{(S)}(n_1, n_2, n_3)$ iken $\vec{N}_{(\bar{S})}(-n_1, -n_2, n_3)$ olacağı için yine $\bar{E} = E , \bar{F} = F , \bar{G} = G ; \bar{L} = -L , \bar{M} = -M , \bar{N} = -N$ bulunacaktır. Bu simetri özelliğinden, S bir Bonnet yüzeyi ise bunun \bar{S} simetriğinin de bir Bonnet yüzeyi olacağı

kolayca görülebilir. Gerçekten \bar{S} nin \bar{S}' yandaşı S in S' yandaşının \bar{S}' simetriği olacaktır. Bu bağlantıları şema olarak aşağıya yazıyoruz:

$$\begin{aligned} S(E, F, G; L, M, N) &, \bar{S}(E, F, G; -L, -M, -N) ; S'(E, F, G; L, -M, N), \\ \bar{S}'(E, F, G; -L, M, -N) &, \bar{S}'(E, F, G; -L, M, -N), \\ (\bar{S}' \equiv \bar{S}') \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bu özellikler gereğince, araştırmalarda simetrik yüzeyler terk edilir; doğal olarak homotetik yüzeylerin de ayrıca araştırılmasına gerek yoktur. Çünkü $S(\vec{x})$ in $\bar{S}(c\vec{x})$ homotetiği için $\bar{S}(c^2 E, c^2 F, c^2 G; cL, cM, cN)$ yazılabileceği dolayısıyla S , Bonnet yüzeyi ise \bar{S} nin de , Bonnet yüzeyi olacağı ve bu halde $\bar{S}' \equiv \bar{S}'$ bulunacağı apaçıktır.

3.2 Doğrusal Yüzeylerden Bonnet Yüzeyi Örnekleri

Bu açıklamalardan sonra ilk akla gelen soru S yüzeyi ile bunun S' yandaşı arasındaki geometrik bağıntının nasıl olduğu sorusudur. (3.3) de görüldüğü gibi, yani temel kritere göre, S ve S' nün birbirine karşılık gelen A şebekelerindeki esas form katsayılarından sadece sabit olan M nin işareti değişmekte ötekiler aynı olmaktadır. Büyüklükler bakımından bu kadar yakın olan bu ilişkiyi geometrik olarak açıklamak o kadar kolay olmamaktadır. Aşağıda bu nokta üzerinde duracağız.

Soyuçok' un (1995) çalışmasında, genel haldeki Bonnet problemi ile ilgili olmak üzere, tüm helikoidlerin Bonnet yüzeyi olduğu gösterilerek oldukça genel bir örnek verildiğine değinmiştik. Aynı çalışmada açılabilir Bonnet yüzeyleri örneği de incelenmiş ve genel hal için başka bir örnek verilmemiştir. Burada önce doğrusal yüzeylerden bir örnek vermek istiyoruz.

Doğrusal yüzeyler için (2.5) de verdiğimiz sonuçları kullanacağız. Buna göre, ilk akla gelen, doğuranlar ve dik yörüngelerinin bir A şebekesi oluşturup oluşturamayacağı sorusudur. Çünkü eğer böyle bir olanak varsa, genel kritere göre , bir doğrusal Bonnet

yüzeyi elde edilmiş olacaktır. Bunun için ilk koşul, söz konusu şebekenin izometrik olmasıdır. (2.5) gereğince $E=1$, $F=0$, $G=[u-\sigma(v)]^2 + \beta^2(v)$ olduğuna göre, çok kolay bir irdeleme bu izometriklik koşulunun sağlanması için $\beta'(v)=\sigma'(v)=0$ yani β ve σ fonksiyonlarının sabit olmasının yeter ve gerek olduğunu gösterir. O halde $\beta'=\sigma'=0$ varsayarak koordinat şebekemizin, A şebekesi olma koşulunun ikincisini gerçekleyip gerçeklemeyeceğini araştıracağız. $\sigma = \text{sbt.}$ olduğundan u parametresine uygun başlangıç seçildiği varsayılarak yani $(u-\sigma)=\bar{u}$ deyip, \bar{u} yi yeniden u ile göstererek, (2.5) de $\sigma=0$ alınabileceği doğaldır. Bu işlem $\vec{r}(v)$ doğrultman eğrisinin boğaz çizgisi olarak alınması anlamındadır. Şimdi (2.5) de ($\sigma=0$),

$$u = |\beta| \text{sh } \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad (3.4)$$

skala dönüşümünü uygularsak ($P_{\bar{u}} = |\beta| \text{ch } \bar{u} \cdot P_u$, $P_{\bar{v}} = P_v$)

$$\begin{aligned} \bar{E} = \bar{G} &= \beta^2 \text{ch}^2 \bar{u} \quad (= u^2 + \beta^2), \quad \bar{F} = 0, \\ \bar{L} &= \beta^2 \text{ch}^2 \bar{u} \cdot L = 0, \quad \bar{M} = |\beta| \text{ch } \bar{u} \cdot M = |\beta| \text{ch } \bar{u} \cdot \left(\frac{-\beta}{|\beta| \text{ch } \bar{u}} \right) = -\beta \\ \bar{N} &= |\beta| \text{ch } \bar{u} \cdot D(\bar{v}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. Artık (\bar{u}, \bar{v}) yerine (u, v) yazılabileceği ve büyüklükler üzerindeki $(-)$ lerin de kaldırılabilceği apaçiktır. Burada β sabitinin, ($\beta \neq 0$) gelişigüzel bir parametre değil, yüzeyin dağılma parametresi olma nedeni ile geometrik bir anlama sahip olduğuna dikkat edilmelidir. β nın Uras' ın (1992) tanımı gereğince

$$\beta = \vec{r}' \cdot \vec{T} \wedge \vec{T}' \quad (3.6)$$

dir. Buna göre \vec{r}' için, (3.2) ve (3.4), ($\sigma = 0$) gereğince $\vec{r}' \cdot \vec{T} = \vec{r}' \cdot \vec{T}' = 0$ olduğundan, ya da Uras' ın (1992) kitabında $\sigma = 0$ koyarak doğrudan doğruya

$$\vec{r}' = \beta \vec{T} \wedge \vec{T}' \quad (3.7)$$

sonucunu elde ederiz. Artık (3.5) büyüklüklerinin, (3.7) göz önünde bulundurularak hesaplanmak koşulu ile

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(v) + |\beta| \operatorname{sh} u \vec{T}(v) \quad (3.8)$$

doğrusal yüzeyine ait olduğunu sağlamak çok kolaydır. Hesaplamalarda (3.7) ile birlikte, (2.2) ve $\sigma = 0$ olmak üzere (2.4) bağıntılarından bulunacak olan

$$\vec{T}'' = -\vec{T} + D \vec{T} \wedge \vec{T}' \quad (3.9)$$

sonucu da göz önünde bulundurulmaktadır. (3.5) den görülüyor ki, ($E=G$, $F=0$, $M=-\beta = \text{sbt.}$) (3.8) doğrusal yüzeyinde doğuranlar ve dik yörüngeleri bir A şebekesi oluşturur; yani bu yüzey bir Bonnet yüzeyidir.

Bu örnek şu bakımdan çok önemlidir:

Büyüklükleri (3.5) de verilen ve Bonnet yüzeyi olduğunu bildiğimiz yüzeyin yandaş yüzeyine ait büyüklüklerin M sabiti yerine $(-M)$ alarak bulunacağını biliyoruz. (3.5) deki M değerinden görüldüğü gibi bu, yüzeyin β dağılma parametresi yerine $(-\beta)$ alınması demektir. (3.7) ye göre ise bu değişim $\vec{r}(v)$ boğaz çizgisi yerine $[-\vec{r}(v)]$ alınarak sağlanabilir. O halde yandaş yüzeyin denklemini elde etmek için (3.8) de $\vec{r}(v)$ yerine $-\vec{r}(v)$ koymak yetecektir. Böylece ,

$$\vec{y} = -\vec{r}(v) + |\beta| \operatorname{sh} u \vec{T}(v) \quad (3.10)$$

yüzeyi (3.8) deki $\vec{x}(u,v)$ yüzeyine yandaş yüzey olarak elde edilmiş oluyor. Bu hususu, (3.7) , (3.9) bağıntılarını göz önünde bulundurarak fiilen gerçeklemek kolaydır.

\vec{x} ve yandaşı olan \vec{y} yüzeyinin denklemlerinin karşılaştırılmasından görülüyor ki, iki yüzeyin boğaz çizgileri birbirinin simetriği (noktasal) olmakta, geri kalan bütün özellikler aynı kalmaktadır. Bu özellik bir yarı simetri gibi nitelenebilir. Yani yandaş Bonnet yüzeyleri arasında bir tam simetri bulunamamakla birlikte, bu çeşitten bazı simetri özelliklerinin bulunması gerekeceği bu örnekten sezilenmektedir. Yandaş Bonnet yüzeyleri arasındaki geometrik ilginin araştırılmasına çok önemli bir ışık tuttuğu için bu örneği önemsiyoruz. Bu yüzden (3.8) deki $\vec{x}(u, v)$ yüzeylerinin geometrik özelliklerini daha yakından inceleyeceğiz.

3.3 (3.8) Yüzey Sınıfındaki Yüzeylerin Ortak Geometrik Özellikleri

3.3.1 Bazı özel haller

Bu yüzeylerde, $\sigma = 0$ olması nedeni ile $\vec{r}(v)$ doğrultman eğrisinin yüzeyin boğaz çizgisi olduğunu yukarıda söylemiştik. $\vec{r}' \cdot \vec{T} = 0$ olması nedeni ile de boğaz çizgisi doğuranları dik olarak (sabit açı ile) keser. Bu ise, boğaz çizgisinin yüzeye ait bir geodezik olduğunu gösterir. Yüzeylerin β dağılma parametreleri sabit olmakla birlikte, $D(v)$ fonksiyonunun keyfi olması nedeni ile doğrultman koni de keyfidir. Yani $\vec{x}(u, v)$ yüzeyleri oldukça genel bir doğrusal yüzey sınıfı oluşturur. Burada bu sınıfa ait olduğu hemen görülebilecek olan şu iki özel hali belirtiyoruz:

1°) Uras' ın (1992) kitabından biliyoruz ki $\vec{x}(u, v)$ yüzeyi $D(v)=0$ (çok özel) halinde doğrusal minimal yüzeye özelleşir. Uras (1992) tarafından belirtildiği gibi, doğrusal minimal yüzeyler dışında, ortalama eğriliği sabit olan bir doğrusal yüzey yoktur. Tüm ortalama eğriliği sabit yüzeylerin ise Bonnet yüzeyi olduğu zaten bilindiğine göre (Soyuçok, 1995), $\vec{x}(u, v)$ doğrusal Bonnet yüzeyleri sınıfımızın doğrusal minimal yüzeyleri içermesi, (doğrusal minimal yüzeyler için de $\beta' = \sigma' = 0$ olduğundan), doğaldır.

2°) Yine Uras' ın (1992) kitabından biliyoruz ki, $D'(v)=0$ ($D(v)=sbt.$) özel halinde ise $\vec{x}(u,v)$ doğrusal Bonnet yüzey sınıfımız ,doğrusal Weingarten yüzeylerinin $a_0 = 0$ (yani doğuranların boğaz çizgisini kestiği sabit açının dik olması) halindeki özel hallerini içerir.

3.3.2 Yüzeyin boğaz çizgisine ait özellikler

$\vec{r}(v)$ boğaz çizgisine ait özelliklere gelince v parametresinin, doğrultman koniyi belirten $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrinin yay uzunluğu olduğunu ve (2.2) gereğince de $D(v)$ fonksiyonunun κ eğriliğini ve τ burulmasını (yani eğriyi) belirtmeye yettiğini biliyoruz. $\vec{r}(v)$ eğrisinin yay uzunluğuna s , eğriliğine κ^o , burulmasına τ^o ve Frenet üçyüzlüsünün birim vektörlerine de $\vec{t}^o, \vec{n}^o, \vec{b}^o$ diyelim. Buna göre (3.7) den, önce

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dv} = \vec{t}^o \cdot \frac{ds}{dv} = \beta \vec{T} \wedge \vec{T}'$$

yazılabileceği için,

$$\vec{t}^o = \varepsilon \vec{T} \wedge \vec{T}', \quad \varepsilon = \text{işa}(\beta), \quad \frac{ds}{dv} = |\beta| = \varepsilon \beta \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada, $\frac{ds}{dv} = sbt.$ olduğu için, $\vec{r}(v)$ de s yay uzunluğunun artma yönünün

$\vec{T}(v)$ deki v yay uzunluğunun artma yönü ile aynı seçilebileceği açık olduğundan $\frac{ds}{dv} > 0$

varsayılmıştır. (3.11) den türev alarak ve (3.9) kullanılarak,

$$\kappa^o \vec{n}^o = \frac{dv}{ds} \cdot \varepsilon \vec{T} \wedge \vec{T}'' = \frac{1}{\varepsilon \beta} \cdot \varepsilon \vec{T} \wedge \left(-\vec{T} + D\vec{T} \wedge \vec{T}' \right) = -\frac{D}{\beta} \vec{T}'$$

yani

$$\vec{n}^0 = \varepsilon^0 \vec{T}' \quad , \quad \kappa^0 = -\varepsilon^0 \frac{D}{\beta} \quad , \quad (\varepsilon^0 = \mp 1) \quad (3.12)$$

bulunur. O halde

$$\vec{b}^0 = \vec{t}^0 \wedge \vec{n}^0 = -\varepsilon \varepsilon^0 \vec{T} \quad (3.13)$$

olacaktır. (3.12) ya da (3.13) den türev alarak

$$\tau^0 = \frac{1}{\beta} \quad (3.14)$$

ilginç sonucunu buluruz. Artık bu bilgileri kullanarak aşağıdaki sonuçları kolaylıkla elde ederiz:

a) (3.13) den görülüyor ki doğrusal yüzeyimiz; boğaz çizgisinin binormallerinden oluşmaktadır. Burada şu soru akla gelmektedir: $S(\vec{x})$ yüzeyinin , boğaz çizgisinin binormalleri ile değil de herhangi bir normali ile oluştuğu varsayılırsa durum ne olur ? Basit bir inceleme, boğaz çizgileri $\vec{r}(v)$ ve $-\vec{r}(v)$ olan iki doğrusal yüzey, bu eğrilerin normallerinden oluşuyorsa, yüzeylerin ancak bu normallerin binormaller olması halinde yandaş olabileceklerini göstermektedir. Sabit burulmalı bir eğrinin binormalleri ile ilgili olan bu sonucun ilginç olduğu apaçiktir.

b) (3.14) bize doğrudan doğruya şu teoremi verir:

Teorem 3.1. (3.8) doğrusal Bonnet yüzeylerine ait boğaz çizgilerinin burulmaları sabit ve dağılma parametresinin tersine eşittir.

c) Kolay bir irdeleme, $\vec{r}(v) [\kappa^0, \tau^0, \vec{t}^0, \vec{n}^0, \vec{b}^0]$ eğrisinin $-\vec{r}(v) = \vec{r}^* [\kappa^*, \tau^*, \vec{t}^*, \vec{n}^*, \vec{b}^*]$ simetriğine ait sonuçların

$$\kappa^* = \kappa^o \quad , \quad \tau^* = -\tau^o \quad ; \quad \vec{t}^* = -\vec{t}^o \quad , \quad \vec{n}^* = -\vec{n}^o \quad , \quad \vec{b}^* = \vec{b}^o \quad (3.15)$$

şeklinde olacağını gösterir. Yani bir eğrinin noktasal simetrisinde eğrilikler eşit, yay uzunlukları yön ve mutlak değerce eşit, burulmalar ise ters işaretli eşittir. Bir eğrinin κ, τ büyüklüklerinin $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ doğal denklemleri ile verilmesi halinde, uzayda durum farkı ile, tamamen belirli olduğunu biliyoruz. O halde $\kappa^*(s) = \kappa^o(s)$, $\tau^*(s) = -\tau^o(s)$ denklemleri ile verilen eğri $[\kappa^o(s), \tau^o(s)]$ eğrisinin noktasal simetrisi olmak zorundadır; çünkü bu doğal denklemleri sağlayan bir eğri vardır ve o da $[\kappa^o, \tau^o]$ eğrisinin noktasal simetrisidir. Söz konusu doğal denklemleri sağlayabilecek olan öteki eğriler bu simetrik eğrinin uzaydaki değişik konumlarından ibarettir.

Bu açıklamadan sonra, (3.8) , (3.10) ve (3.13) göz önünde bulundurularak şu teorem ifade edilebilir:

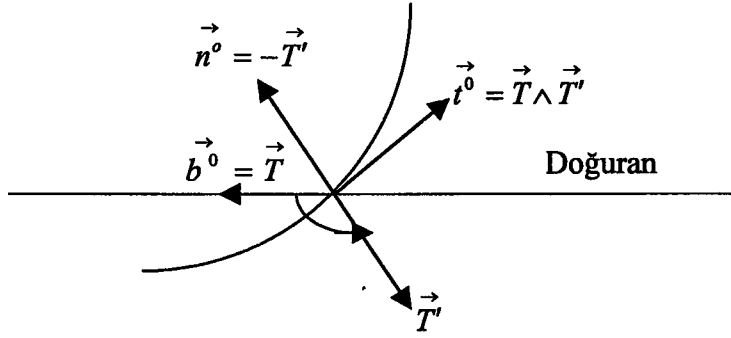
Teorem 3.2. Burulması sabit olan bir eğriye ait binormallerin, eğrinin; burulmanın mutlak değeri ve eğrilik aynı kalmak üzere, sağa burulması ($\tau > 0$) halinde oluşturduğu doğrusal yüzey, sola burulması ($\tau < 0$) halinde oluşturduğu doğrusal yüzeye yandaştır.

d) $\beta > 0$ ($\varepsilon = 1$) ise, boğaz çizgisinin burulması da pozitif olacak yani eğri sağ vidalanma

şeklinde burulacaktır. \vec{n}^o asal normalinin yönünü boğaz çizgisinin konkav tarafına doğru alırsak; $\kappa^o > 0$ olacağından, $\varepsilon^o D < 0$ olmak zorundadır. O halde,

$D > 0$ ise ($\beta > 0$): $\varepsilon^o = -1$ olup

$$\vec{b}^o = \vec{T} \quad , \quad \vec{n}^o = -\vec{T}' \quad , \quad \vec{t}^o = \vec{T} \wedge \vec{T}' \quad , \quad \kappa^o = \frac{D}{\beta} > 0 \quad , \quad \tau^o = \frac{1}{\beta} > 0 \quad (3.16)$$

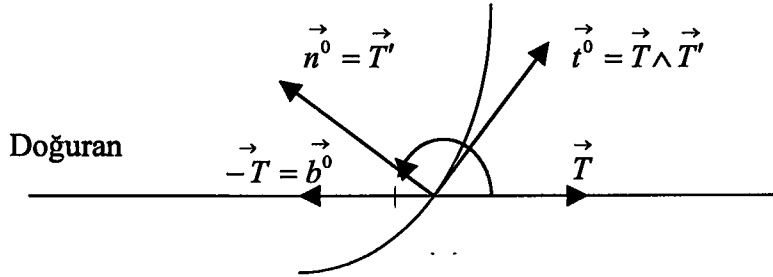


Şekil 3.1

$D < 0$ ise ($\beta > 0$): $\varepsilon^0 = 1$ olup

$$\vec{b}^0 = -\vec{T}, \quad \vec{n}^0 = \vec{T}, \quad \vec{t}^0 = \vec{T} \wedge \vec{T}', \quad \kappa^0 = -\frac{D}{\beta} > 0, \quad \tau^0 = \frac{1}{\beta} > 0 \quad (3.17)$$

yazılabilecektir.



Şekil 3.2

Benzer değerlendirmelerin, $\beta < 0$ için de, aynı şekilde yapılabileceği apaçktır.

3.3.3 Özel hallerin uygulaması

Şimdi de bu bilgileri Nu 3.3.1 de sözünü ettiğimiz iki özel hali uygulayacağız.

i) (1°) özel halinde, $D=0$ olduğu için, (3.12) ye göre $\kappa^o=0$ olacaktır. Bu ise boğaz çizgisinin bir doğru olduğunu gösterir. Oxyz dik eksen sisteminin Oz eksenini bu doğru üzerinde alırsak, eksen sistemimizin birim vektörleri $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ olduğuna göre, (3.11) den

$$\vec{t}^o = \varepsilon \vec{T} \wedge \vec{T}' = \varepsilon \vec{k} \quad (= \text{sbt.}) \quad (3.18)$$

yazılabilecektir. $\vec{t}^o = \frac{d\vec{r}(v)}{ds}$ ve $\frac{ds}{dv} = \varepsilon \beta$ olduğundan $[d\vec{r}(v) = (\varepsilon \vec{k})(\varepsilon \beta dv)]$

uygun başlangıç seçilerek yani $\vec{r}(0) = 0$ varsayılarak

$$\vec{r}(v) = \beta v \vec{k} \quad (3.19)$$

bulunur. $\vec{T}(v)$ için de $(\vec{t}^o \cdot \vec{T} = \vec{T} \cdot \vec{k} = 0)$ önce $\vec{T} = \cos \alpha(v) \vec{i} + \sin \alpha(v) \vec{j}$ yazılarak (3.18) den $\alpha'(v) = \varepsilon$ yani $\alpha(v) = \varepsilon v$ (uygun başlangıç seçiliyor yani $\alpha(0) = 0$ alınıyor) bulunur yani

$$\vec{T} = \cos(\varepsilon v) \vec{i} + \sin(\varepsilon v) \vec{j} = (\cos v) \vec{i} + \varepsilon (\sin v) \vec{j} \quad (3.20)$$

dir. Böylece (1°) özel halindeki, \vec{x}, \vec{y} yandaş minimal yüzeylerimizin denklemleri

$$\vec{x} : [|\beta| \operatorname{sh} u \cdot \cos v, \beta \operatorname{sh} u \cdot \sin v, \beta v]$$

$$\vec{y} : [|\beta| \operatorname{sh} u \cdot \cos v, \beta \operatorname{sh} u \cdot \sin v, -\beta v] \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerden görülüyor ki her iki yüzeyde, Ox ekseninin Oz eksenli birer helisel hareketi ile oluşurlar. Bu helisel hareketlerde aynı yönde dönülürken birinde kot artıyorsa ötekinde azalır. Artma ve azalma oranları ve öteki bütün özellikler aynıdır.

ii) (2°) özel halinde ise $D(v)=\text{sbt.}$ olduğu için, (3.12) ve (3.14) e göre, boğaz çizgisinin κ° eğriliği ve τ° burulması sabittir. Bu ise eğrinin bir dairesel helis olduğunu gösterir. O halde (2°) de sözü edilen özel doğrusal Weingarten yüzeyi bir dairesel helisin binormallerinin oluşturduğu doğrusal yüzeydir yani bir doğrusal helikoiddir. Bu bilgilerle helikoidin denklemini yazabiliriz. Ancak yandaş yüzeyin denklemini de birlikte yazabilmek için $\vec{T}(v)$ ve $\vec{r}(v)$ vektörlerinin belirtilmesi gerekir. v parametresinin $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrisinin yay uzunluğu ve $\vec{T}(v)$ nin de bir (a,b) dairesel helisinin \vec{b}^0 binormal birim vektörü olduğunu biliyoruz. Dairesel helisin denklemlerinin

$$\vec{r}(\alpha) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, b\alpha) \quad , \quad (a > 0) \quad (3.22)$$

şeklinde yazıldığı düşünülürse, Frenet üçyüzlüsü, eğrilik ve burulma için,

$$\begin{aligned} \vec{t}^0 &= \frac{(-a \sin \alpha, a \cos \alpha, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad \vec{n}^0 = (-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \\ \vec{b}^0 &= \frac{(b \sin \alpha, -b \cos \alpha, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \kappa^\circ = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad , \quad \tau^\circ = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

yazılabileceği apaçiktır. $\vec{T} = \vec{b}^0(\alpha)$ birim küresel eğrinin yay uzunluğunu v ile göstermiştik. Buna göre,

$$\frac{d\vec{b}^0}{dv} = \frac{d\vec{b}^0}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dv} = \frac{d\alpha}{dv} \left(\frac{b \cos \alpha, b \sin \alpha, 0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

bağıntısından, uygun başlangıç seçerek ve α ile v nin yönünü aynı alarak önce

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|} \cdot v \quad (3.24)$$

buluruz. Öte yandan $\vec{b}^{0'}(v) = -\tau^o \vec{n}^o$ Frenet formülü uyarınca $\tau^{o^2} = 1$ yani (3.23) ye göre $a^2 + b^2 = |b|$ olacak ve böylece α ,

$$\alpha = \frac{v}{\sqrt{|b|}} \quad , \quad (a^2 + b^2 = |b|, a = \sqrt{|b| - b^2}, |b| < 1) \quad (3.24')$$

olarak elde edilir. O halde

$$\vec{r}(v) = \left(a \cos \frac{v}{\sqrt{|b|}}, a \sin \frac{v}{\sqrt{|b|}}, \varepsilon' \sqrt{|b|} v \right) \quad , \quad (\varepsilon' = \text{işş} (b)) \quad (3.25)$$

ve

$$\vec{T}(v) = \left(\varepsilon' \sqrt{|b|} \sin \frac{v}{\sqrt{|b|}}, -\varepsilon' \sqrt{|b|} \cos \frac{v}{\sqrt{|b|}}, \frac{a}{\sqrt{|b|}} \right) \quad (3.25')$$

yazılabilecektir. (3.14) den (3.23) e göre $\beta = \frac{1}{\tau^o} = \frac{a^2 + b^2}{b}$ yani

$$\beta = \varepsilon' \quad (= \text{işş} (\beta) = \varepsilon) \quad (3.26)$$

bulunur. Bu sonuçları genel halde elde edilen (3.12'), (3.13) sonuçları ile karşılaştırırsak: (3.23), (3.26) ve bu eşitliklerden

$$\varepsilon^o \varepsilon' = -1 = \varepsilon^o \varepsilon \quad , \quad \kappa^o = \frac{a}{|b|} = D \quad , \quad \vec{T} = \vec{b}^0 \quad (3.27)$$

bulunacaktır. Artık \vec{x}, \vec{y} yandaş yüzeylerinin denklemleri (3.8) ve (3.10) dan doğrudan doğruya yazılabilecektir. kontrol amacı ile, (3.8) deki S ve (3.10) daki S' yüzeylerinin büyüklükleri, bu şekilde elde edilmiş olan denklemlerinden hesaplanırsa :

$$E=G=E'=G'=ch^2 u \quad , \quad F=F'=0$$

$$L=L'=0 \quad , \quad N=N'=\frac{a}{|b|}ch u = D(v)ch u \quad , \quad \left(D = \left(\vec{T}, \vec{T}', \vec{T}'' \right) = \frac{a}{|b|} = \frac{\sqrt{|b|-b^2}}{|b|} \right) \quad (3.28)$$

$$M = -\varepsilon' \quad , \quad M' = \varepsilon' \quad , \quad (M = -M')$$

bulunacaktır. Bu sonuçların, (3.5) teki genel sonuçlardan, göz önüne aldığımız özel hali simgeleyen (3.26) koşulu altında, elde edildikleri görülmektedir. Fazla olarak (3.28) sonuçlarından, genel halin aydınlatılmasında çok önemli bir rol oynadığını gördüğümüz bu özel hal üzerinde, yukarıda ifade ettiğimiz Teorem (3.2) nin gerçekleştiğini de görmekteyiz. Gerçekten : (3.25') deki \vec{T} , (3.25) eğrisinin \vec{b}^0 binormal birim vektörüdür ve (3.25) e göre $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ ise $\vec{r}(v)$ eğrisi sağa, $\varepsilon' = -1$ ise sola burulacaktır. (3.28) den \vec{x} yüzeyi için elde edilen bütün büyüklüklerin, bu iki halde de aynı kaldığı sadece M sabitinin işaret değiştirdiği apaçık görülmektedir; o halde $\varepsilon = 1$ için bulunacak yüzey $\varepsilon = -1$ için elde edilene yandaştır. $D(v)=sbt.$ olduğu için, (2.8)₂ gereğince $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrisinin düzlemsel yani birim kürenin bir küçük çemberi olduğunu biliyoruz. Bu çemberin yarıçapı R ise eğriliği $\frac{1}{R}$ olacak ve (2.8)₁ gereğince

$$\frac{1}{R^2} = 1 + D^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{|b|-b^2}}{|b|} \right)^2 = \frac{1}{|b|} \quad , \text{ yani}$$

$$R = \sqrt{|b|} \quad (3.29)$$

bulunacaktır. Böylece $|b|$ sabitinin geometrik anlamı belirtilmiş ve (3.24') deki $|b| < 1$ koşulunun uyumluluğu da görülmüş olmaktadır.

4. DİK DURUMLU YÜZEYLER

4.1 Ön Bilgiler

Bilindiği gibi, $S^\circ[\vec{a}(u,v)]$, $\bar{S}[\vec{b}(u,v)]$ yüzeyleri izometrik ise [yani birbirine izometrik olarak karşılık geliyorsa], hiçbir işleme gerek kalmadan, birbirine karşılıklı doğrultular dik olacak şekilde karşılık gelen iki $S(\vec{x})$, $S'(\vec{y})$ yüzeyi [S , S' yüzeylerine kısaca dik durumlu yüzeyler diyeceğiz] kendiliğinden belirir. Bunun terside doğrudur. Gerçekten bu sonuçların

$$\vec{a} = \vec{x} + \vec{y} \quad , \quad \vec{b} = \vec{x} - \vec{y} \quad (4.1)$$

alınarak sağlanabileceği hemen görülür. Çünkü $\left(d\vec{a}\right)^2 = \left(d\vec{b}\right)^2$ eşitliğinin $d\vec{x} \cdot d\vec{y} = 0$ eşitliğine eşdeğer olduğu apaçıktır. O halde izometrik yüzey çiftleri bulma problemi ile dik durumlu yüzey çiftleri bulma problemi eşdeğerdir ve bu problemler genel halde çözümsüz olduğundan, araştırmalar özel haller üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu özel hallerin en ünlüsü sayılabilecek olanı, Bonnet problemi, asal eğrilikleri de eşit olan izometrik yüzey çiftlerinin belirtilmesi problemidir ki bu problem de genel halde çözülememiştir (Soyuçok, 1995).

Öte yandan, bir yüzeyin sonsuz küçük bükülmesi probleminin çözümü de bilindiği gibi , bu yüzeye dik durumlu bir yüzeyin belirtilmesine indirgenir (Uras,1996). Gerçekten, bir yüzey ile, yer vektörü bu yüzeyin sonsuz küçük bükülmesindeki yer değiştirme vektörü olan yüzey dik durumludur.

Bu bölümde öncelikle dik durumlu yüzey çiftlerinden ve bunlarla ilgili sonsuz küçük bükülmeden söz edeceğiz. Bir $S[\vec{x}(u, v)]$ yüzeyi verilmiş olduğuna göre, bu yüzeye dik durumlu olan $S'[\vec{y}(u, v)]$ yüzeyinin belirtilmesi,

$$d\vec{x} \cdot d\vec{y} = 0 \quad (4.2)$$

eşitliğini sağlayan bir $\vec{y}(u, v)$ vektörünün bulunması problemidir. İncelemelerimizde $S(\vec{x})$ yüzeyi üzerindeki (u, v) koordinat sistemini dik olarak alacağız. $S[\vec{x}(u, v)]$ yüzeyine ait (1.1), (1.4) gösterimleri ve (1.5) deki 1,2 türetme işlemlerini kullanacağız.

4.2 Açılabilir Yüzeyler Özel Hali

Önce dik durumlu yüzeylerin belirtilmesi problemine bir örnek vermek istiyoruz. Bunun için $S(\vec{x})$ yüzeyini açılabilir bir yüzey varsayarak buna dik durumlu olan $S'(\vec{y})$ yüzeyini araştıracağız.

1°) $S(\vec{x})$ bir silindir olsun. Silindirin Oxy taban düzlemi üzerindeki taban eğrisinin yay uzunluğuna v , eğriliğine $\kappa(v)$, Frenet vektörlerine $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B} = \vec{k}$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, Oxyz dik eksenlerinin birim vektörleri) ve

$$\int_0^v \kappa(v) dv = \alpha(v) \quad (4.3)$$

diyelim. O halde bu taban eğrisinin $\vec{r}(v)$ yer vektörü ve \vec{T}, \vec{N} birim vektörleri

$$\vec{r}(v) = \left(\int \cos \alpha dv, \int \sin \alpha dv, 0 \right), \vec{T} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0), \vec{N} = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \quad (4.4)$$

şeklinde verilmiş olacaktır. Buna göre

$$\vec{x}(u, v) = \vec{r}(v) + u\vec{k} \quad (4.5)$$

dır. $\vec{y}(u, v) = A\vec{T} + B\vec{N} + C\vec{k}$, der ve (4.2) koşulunu uygularsak $a=a(v)$, $b=b(v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{y}(u, v) = [b(v) - a'(v)u]\vec{T} + \frac{b' - a''u}{\kappa}\vec{N} + a(v)\vec{k}, \quad \left(= \vec{R}(v) + u\vec{S}(v) \right) \quad (4.5')$$

sonucunu buluruz .

2°) $S(\vec{x})$ bir koni olsun. Koninin O tepesi merkezli birim küre üzerindeki $\vec{R}(v)$ doğrulman eğrisinin yay uzunluğunu v , eğrilik, burulma ve Frenet vektörlerini de κ , τ , \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} ile gösterelim. O halde

$$\vec{x}(u, v) = u\vec{R}(v), \quad [\vec{R}' = \vec{T}, \vec{R}^2 = \vec{T}^2 = 1, \vec{R} \cdot \vec{T} = 0] \quad (4.6)$$

olacaktır.

$$(\vec{R}, \vec{R}', \vec{R}'') = \kappa (\vec{R}, \vec{T}, \vec{N}) = \kappa \cdot \vec{R} \cdot \vec{B} = D(v) \quad (4.6)$$

diyelim ; $D=0$ için koni düzleme bozulacağından $D \neq 0$ dir. Bu bilgilerle

$$\vec{R} = -\frac{1}{\kappa}\vec{N} + \frac{D}{\kappa}\vec{B}, \quad \kappa^2 = 1 + D^2, \quad \tau = \frac{D'}{1 + D^2}$$

sonuçlarını kolayca elde ederiz. $\vec{y}(u, v) = A\vec{T} + B\vec{N} + C\vec{B}$, diyerek (4.6) dan ve (4.2) koşulundan, $a(v)$, $b(v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{y}(u,v) &= (au + b')\vec{T} + \frac{1}{\kappa}(a'u + b'')\vec{N} + \frac{1}{\kappa D}(a'u + b'' + \kappa^2 b)\vec{B} \\ & (= \vec{R}(v) + u \vec{S}(v))\end{aligned}\quad (4.6')$$

bulunur.

3°) $S(\vec{x})$ yüzeyi, yay uzunluğu v ; eğrilik ve burulması $\kappa, \tau (\neq 0)$, Frenet vektörleri $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olan bir $\vec{r}(v)$ eğrisinin teğetler yüzeyi olsun. O halde

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(v) + u\vec{T} \quad (4.7)$$

dir. Yukarıdaki gibi $\vec{y}(u,v) = a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}$ diyelim ve (4.2) koşulunu sağlayalım: bilinen işlemlerin sonunda, $a(v), b(v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{y}(u,v) = a\vec{T} + \left(ub + \frac{a'}{\kappa}\right)\vec{N} + \frac{1}{\tau}\left[\left(\frac{a'}{\kappa}\right)' + ub' + a\kappa - b\right]\vec{B}, \quad (= \vec{R}(v) + u \vec{S}(v)) \quad (4.7')$$

buluruz. (4.5'), (4.6'), (4.7') den görülüyor ki, her üç halde de $S'(\vec{y})$ yüzeyi bir doğrusal yüzeydir. Bu $S'(\vec{y})$ doğrusal yüzeyleri ile onlarla dik durumlu olan $S(\vec{x})$ yüzeylerinden, (4.1) ile elde edilecek olan $S^o(\vec{a}), \bar{S}(\vec{b})$ izometrik yüzey çiftlerinin ilginç olacağı açıktır.

4.3 Genel Hal

Problemi genel halde ele alırken, $S(\vec{x})$ yüzeyi üzerindeki dik koordinat şebekesinin buna dik durumlu olan $S'(\vec{y})$ yüzeyi üzerinde de bir dik şebekeye karşılık geldiğini varsayabiliriz. Gerçekten ünlü Tissot teoremi bu olanağı sağlamaktadır (Darboux, 1894). O

halde $S(\vec{x})$ ve $S'(\vec{y})$ yüzeyleri üzerinde (u,v) koordinat şebekelerimiz dik olduğundan (4.2) koşulumuza ek olarak, genelliği bozmadan

$$\vec{x}_1 \vec{x}_2 = \vec{y}_1 \vec{y}_2 = 0 \quad (4.8)$$

varsayılmış olmaktadır. (4.2) koşulunun

$$\vec{x}_1 \vec{y}_1 = \vec{x}_2 \vec{y}_2 = \vec{x}_1 \vec{y}_2 + \vec{x}_2 \vec{y}_1 = 0 \quad (4.8')$$

koşullarına eşdeğer olduğu da apaçık olduğundan,

$$\vec{y}_1 = A\vec{x}_2, \vec{y}_2 = -A\vec{x}_1 + B\vec{n}, \quad (\text{ya da } \vec{y}_1 = -A\vec{x}_2 + B\vec{n}, \vec{y}_2 = A\vec{x}_1) \quad (4.9)$$

yazılabilecektir. Bu eşitliklerin (1.7) ye göre yazılacak olan uygunluk koşullarından da

$$A_1 + Bk = 0, \quad A_2 + Bt = 0, \quad B_1 + Bp^* - A(k + k^*) = 0 \quad (4.10)$$

elde ederiz. Bu denklemlerin ilk ikisinin uygunluk koşulu ise B_2 için

$$kB_2 + B(pk^* + 2p^*t) - At(k + k^*) = 0 \quad (4.11)$$

denklemini verir. Böylece, bir $S(\vec{x})$ yüzeyine dik durumlu olan $S'(\vec{y})$ yüzeyinin belirtilmesi problemi ilk aşamada (4.10), (4.11) denklemlerini sağlayan A, B fonksiyonlarının bulunmasına indirgenmiş olmaktadır. İkinci aşama, bulunan bu A, B değerleri ile uyumlu olmaları sağlanan (4.9) denklemlerinin integrasyonudur. Bu ikinci aşama $S'(\vec{y})$ yüzeyinin denklemlerini elde etmek için gereklidir ve bu yüzden önemli değildir. Çünkü yüzeyin denklemlerini belirtmeden de A ve B fonksiyonları yardımı ile tüm büyüklüklerini, dolayısıyla tüm özelliklerini belirtebiliriz. Bu büyüklükleri (') işareti ile gösterirsek (4.9), (4.10) dan ,

$$E' = EA^2, \quad G' = G(A^2 + B^2), \quad F' = 0, \quad p' = \frac{Ap - Bt}{A\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \varepsilon p'^* = \frac{Bk^* + Ap^*}{A^2 + B^2}$$

$$k' = \frac{At + Bp}{A\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \varepsilon t' = \frac{Ak^* - Bp^*}{A^2 + B^2}, \quad k'^* = \frac{A(B_2 - At)}{\sqrt{A^2 + B^2}(A^2 + B^2)}, \quad [\varepsilon = \text{işareti}(A)] \quad (4.12)$$

$$\left\{ k \cdot k'^* = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}(A^2 + B^2)} [Atk^* - B(pk^* + 2p^*t)] \right\}$$

elde ederiz.

İncelemelerimiz boyunca

$$A \cdot B \neq 0 \quad (4.13)$$

varsayabiliriz. Gerçekten $A=0, B \neq 0$ için, (4.9) dan $\vec{y} = \vec{y}(v)$ elde edilir; yani $S'(\vec{y})$ yüzeyi bir eğriye bozulur. $A \neq 0, B=0$ için durum biraz değişiktir. (4.6) dan, bu halde, $A=A_0 = \text{sbt. bulunur}$ ve (4.9) a göre A_0 bir homoteti sabiti olacağı için $A_0=1$ alınabilir.

Çünkü $S'(\vec{y})$ yüzeyi zaten bir homoteti ve doğal olarak öteleme farkı ile belirlidir, $[d\vec{x} \cdot d\vec{y} = 0 \text{ ise } d\vec{x} \cdot d(A_0\vec{y}) = 0 \text{ dır.}]$ ve bu yüzden homotetik yüzeyleri farklı saymayacağız. $A=1, B=0$ için (4.9), (4.10) ve (4.12) den

$$E' = E, \quad F' = 0, \quad G' = G, \quad k + k^* = 0, \quad p' = p, \quad p'^* = p^* \quad (4.14)$$

$$k' = t, \quad kk'^* = k^*t, \quad (k'^* = -t), \quad t' = k^*$$

elde ederiz. Görülüyor ki $S(\vec{x})$ bir minimal yüzey ve $S'(\vec{y})$ de S ye izometrik ikinci bir minimal yüzeydir. $(k' + k'^* = t - t = 0)$

Bir $S(\vec{x})$ minimal yüzeyinin denklemleri, u kompleks değişkeninin bir $f(u)$ fonksiyonu ile yazılmış Weierstrass formülleri ile verilmiştir (Uras , 1992). $f(u)$ ile beliren minimal yüzeye izometrik olan bir \vec{y} minimal yüzeyinin $f(u)$ fonksiyonu ise $e^{ia} f(u)$ (a =reel sbt.) dur (Uras ,1992). Bu iki yüzeyin $d\vec{x} \cdot d\vec{y} = 0$ özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşulun $\cos a = 0$ olduğunu görmek kolaydır. o halde $S'(\vec{y})$ yüzeyi , $S(\vec{x})$ minimal yüzeyine ek (adjuan) $S'(\vec{x}_0)$ minimal yüzeyidir (Uras ,1992). Bu $S(\vec{x})$ ve $S'(\vec{x}_0)$ ek minimal yüzeyleri ile (4.1) gereğince elde edilecek olan $S^o(\vec{a})$, $\bar{S}(\vec{b})$ yüzeylerinin izometrik olacağını biliyoruz. Uras 'ın (1992) kitabından görülüyor ki bu S^o , \bar{S} yüzeyleri $S(\vec{x})$ yüzeyinden yukarıdaki a sabitinin $a = \frac{\pi}{4}$ ve $a = -\frac{\pi}{4}$ değerleri ile elde edilen minimal yüzeylerin $\sqrt{2}$ çarpanlı homotetikleridir.

O halde ek minimal yüzey çiftleri ile $S'(\vec{y})$ yüzeyinin bir eğriye bozulması halini bir yana bırakırsak (4.13) koşulunu geçerli varsayabiliriz.

4.4 Sonsuz Küçük Bükülme Problemi İle İlgili Sonuçlar

Şimdi de , $\vec{y}(u,v)$ vektörünün , $S(\vec{x})$ yüzeyinin sonsuz küçük bükülmesine ait yer değiştirme vektörü olduğunu varsayarak, sonsuz küçük bükülmenin denklemlerini Uras'ın (1996) çalışmasından buraya alıyoruz: (4.2) ya da (4.2') koşulları

$$d\vec{y} = z \wedge d\vec{x} \quad (4.15)$$

olacak şekilde bir $\vec{z}(u,v)$ vektörünün (dönme vektörü) bulunmasına eşdeğerdir. T^j , sonsuz küçük bükülmenin kontravaryant (simetrik) tensörü olduğuna ve

$$E T^{11} \equiv \alpha \quad , \quad w T^{12} = w T^{21} \equiv \gamma \quad , \quad G T^{22} \equiv \beta$$

dendiğine göre

$$\vec{z}_1 = -(\gamma \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2) \quad , \quad \vec{z}_2 = \alpha \vec{x}_1 + \gamma \vec{x}_2 \quad (4.16)$$

dır. Buradan , uygunluk koşulu yazılırsa,

$$\alpha_1 + \gamma_2 + 2p\gamma + p^*(\alpha - \beta) = 0 \quad , \quad \beta_2 + \gamma_1 + 2p^*\gamma + p(\beta - \alpha) = 0 \quad (4.17)$$

$$k\alpha + 2t\gamma + k^*\beta = 0$$

denklemleri bulunur.

α , β , γ fonksiyonları ile (4.9) daki A , B fonksiyonları arasındaki bağıntılar ise şöyledir:

(4.15) eşitliği, $\vec{y}_1 = \vec{z} \wedge \vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = \vec{z} \wedge \vec{x}_2$ eşitliklerine eşdeğer olduğundan , (4.9) gereğince ,

$$\vec{z} = \beta \vec{x}_1 + A \vec{n} \quad (4.18)$$

olarak hesaplanacaktır. \vec{z} nin bu değeri (4.16) da konursa (4.10) denklemleri ile birlikte α , β , γ için

$$\alpha = B_2 - At \quad , \quad \beta = At + Bp \quad , \quad \gamma = Bp^* - Ak^* \quad (4.19)$$

değerleri bulunur. B_2 nin değeri α nın ifadesinde konursa

$$\alpha k = k^*(At - Bp) - 2p^*tB \quad (= -\beta k^* - 2\gamma t) \quad (4.20)$$

bulunacaktır. (4.19) dan

$$A = \frac{\beta p^* - \gamma p}{pk^* + tp^*}, \quad B = \frac{\beta k^* + \gamma t}{pk^* + tp^*}, \quad (pk^* + tp^* \neq 0) \quad (4.21)$$

yazılabileceği de apaçıktır.

4.5 Ayrıcalıklı Bir Özel Hal

(4.11) ve (4.12) den görülüyor ki $k=0$ özel halini ayrıca ele almak gerekmektedir. Şimdi bu özel hali ele alacağız:

$k=0$ olduğuna göre, $t=0$ ise $S(\vec{x})$ bir açılabilir yüzey olur ve bu hal Nu 4.2 de incelenmiştir. O halde $k=0, t \neq 0$ dir. $S(\vec{x})$ yüzeyinin (1.9) daki uygunluk denklemleri $k=0$ için

$$t_1 = -(pk^* + 2p^*t), \quad k_1^* = -p^*k^* + t_2 + 2pt, \quad t^2 = p^2 + p^{*2} + p_1^* + p_2 \quad (4.22)$$

şeklini alacaktır. (4.11) ve (4.10) dan yazılabilecek olan

$$Bt_1 = -Atk^*, \quad B_1t = -p^*Bt + Ak^*t$$

denklemlerinden

$$(Bt)_u = -\frac{g_u}{g}Bt \quad \text{yani} \quad Bt = \frac{V(v)}{g}$$

elde ederiz. v parametresi üzerinde yapıldığını varsayabileceğimiz uygun bir skala dönüşümü ile $V(v) = -1$ alınabileceğini biliyoruz. O halde

$$B = -\frac{1}{gt} \quad (4.23)$$

olarak bulunacaktır. B nin bu değeri ile (4.10) ve (4.11) den

$$A=v \quad , \quad k^*(p+vg t^2)+2p^*t=0 \quad (4.23')$$

elde edilir. O halde $S(\vec{x})$ yüzeyi , $k=0$ ile yazılmış (4.22) uygunluk denklemlerine ek olarak , (4.23')₂ denklemini de sağlayan bir yüzey olarak verilmiş ise; bu yüzeye dik durumlu olan $S'(\vec{y})$ yüzeyinin büyüklükleri A , B nin (4.23')₁ ve (4.23) de verilen değerleri ile (4.12) den elde edilecektir. İstenirse A , B nin yukarıdaki değerleri ile (4.19) dan , bu hal için geçerli olmak üzere, α , β , γ nin değerleri de yazılabilir. $k=0$ olması , $S(\vec{x})$ üzerinde $v=$ sbt. koordinat çizgilerinin bir asimptotik ailesinden oluştuğunu gösterir. O halde $S(\vec{x})$ de koordinat çizgileri , bir asimptotik ailesi ve dik yörüngelerinden oluşur. Burada çok özel bir hali ele alacağız ve asimptotik ailesinin aynı zamanda geodezik olduğunu yani $k=0$ ile birlikte $p=0$ olduğunu varsayacağız. O halde asimptotik ailemiz doğrulardan oluşacak yani $S(\vec{x})$ yüzeyi bir doğrusal yüzey olacaktır. Ancak bu doğrusal yüzey genel bir doğrusal yüzey olmayıp, doğuranlar ve dik yörüngeleri , kendisine dik durumlu olan $S'(\vec{y})$ yüzeyi üzerinde yine bir dik şebekeye karşı gelen çok özel bir doğrusal yüzeydir. Şimdi bu özel $S(\vec{x})$ ve $S'(\vec{y})$ yüzey çiftini daha yakından inceleyelim:

Doğuranlar ve dik yörüngeleri koordinat sisteminde, açılabilir olmayan $S(\vec{x})$ doğrusal yüzeyinin büyüklüklerinin

$$E=1 \quad , \quad G=(u-\sigma)^2+\beta^2 \quad , \quad F=0 \quad , \quad L=0 \quad , \quad M=-\frac{\beta}{g}=gt \neq 0 \quad (4.24)$$

$$N=\frac{1}{g}[DG+\beta'(u-\sigma)+\beta\sigma'] \quad , \quad \beta=\beta(v) \quad , \quad \sigma=\sigma(v) \quad , \quad D=D(v) \quad , \quad (p=k=0)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz (Uras , 1992).

(4.10) , (4.11) denklemlerinden, bu değerlerle, önce

$$A = A(v) \quad , \quad A'(v) = -g B t \quad , \quad B_u = A k^* - B p^* \quad , \quad 2 B p^* = A k^*$$

bulunur. Buradan da

$$B = \frac{A' g}{\beta} \quad , \quad 2 \frac{A'}{\beta} g_u = A k^* \left(= A \frac{N}{G} \right) \quad .$$

elde edilir. Çok kolay bir irdeleme, (4.24) gereğince bu son eşitliğin ancak $A' = N = 0$, $[D(v) = \beta'(v) = \sigma'(v) = 0]$ için sağlanabileceğini gösterir. O halde

$$A' = B = k^* = 0 \quad (4.25)$$

dır ve bu sonuçlarla (4.10) , (4.11) denklemleri sağlanır. Görülüyor ki bu sonuç N_u 4.3 de $A=A_0$, $B=0$ için elde ettiğimiz, ek minimal yüzeyler sonucunun , $p = k = k^* = 0$ koşulları ile özelleşmiş olan halidir; yani $S(\vec{x})$ yüzeyi bir doğrusal minimal yüzeydir. Halbuki doğrusal minimal yüzey, sadece dairesel helisin asal normallerinden oluşan dik konoid yüzeyidir. Bu dik konoidin, söz konusu (u,v) parametre sistemindeki denklemlerinin

$$\vec{x} = (u \cos v, u \sin v, a v) \quad (4.26)$$

$$\left[E = 1 \quad , \quad G = u^2 + a^2 \quad , \quad F = L = N = 0 \quad , \quad M = -\frac{a}{g} \quad ; \quad p = k = k^* = 0 \quad , \quad t = -\frac{a}{u^2 + a^2} \right]$$

şeklinde olacağını görmek kolaydır. Buna göre (4.25) koşulları göz önünde bulundurularak ve $A=A_0$ homoteti sabiti 1 alınarak (4.9) dan

$$\vec{y}_v = -(g \cos v, g \sin v, 0) \quad , \quad \vec{y}_u = \left(-\frac{u \sin v}{g}, \frac{u \cos v}{g}, \frac{a}{g} \right)$$

yazılabilecektir. Buradan da integrasyonla , öteleme sabitlerini terk ederek ,

$$\vec{y} = \left[-\sqrt{u^2 + a^2} \sin v , \sqrt{u^2 + a^2} \cos v , a \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2}) \right] \quad (4.27)$$

sonucunu buluruz. Bu yüzeyin bir döneel minimal yüzey olan zincir yüzeyi olduğu da kolayca gösterilebilir. Ek minimal yüzeyler olduğunu Nu 4.3. den bildiğimiz bu $S(\vec{x})$ ve $S'(\vec{y})$ yüzeylerinin birbirine izometrik tasvirinde $S'(\vec{y})$ nin eğrilik çizgileri $S(\vec{x})$ in doğuran ve dik yörüngelerine (daireysel helislere) karşılık gelir. Öte yandan , bu özel halde, (4.19) dan bulunan $\alpha = \frac{a}{u^2 + a^2}$, $\beta = -\frac{a}{u^2 + a^2}$, $\gamma = 0$ değerlerinin (4.17)

denklemlerini sağladığı da kolayca gerçekleştirilebilir. \vec{x} , \vec{y} nin (4.26) ve (4.27) deki değerleri ile (4.1) gereğince oluşturulan $S^\circ[\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}]$, $\bar{S}[\vec{b} = \vec{x} - \vec{y}]$ yüzeylerinin birbirlerine izometrik olarak tasvir olunabileceğini biliyoruz. Gerçekten bu yüzeylerin büyüklükleri :

$$S^\circ : E^\circ = 2 , F^\circ = 0 , G^\circ = 2(u^2 + a^2) ; L^\circ = -\frac{a}{u^2 + a^2} , M^\circ = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} , N^\circ = a$$

$$\bar{S} : \bar{E} = 2 , \bar{F} = 0 , \bar{G} = 2(u^2 + a^2) ; \bar{L} = \frac{a}{u^2 + a^2} , \bar{M} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} , \bar{N} = -a$$

olarak hesaplanır. Nu 4.2 den de bildiğimiz gibi bu yüzey çifti de minimaldir.

4.6 Dik Durumlu Yüzeylerden Bonnet Çifti Oluşturan Yüzeylere Geçiş

Burada dik durumlu olan $S(\vec{x})$, $S'(\vec{y})$ yüzeyleri yardımı ile (4.1) deki şekilde elde edilen $S^\circ(\vec{a})$ ve $\bar{S}(\vec{b})$ izometrik yüzey çiftinin bir Bonnet çifti oluşturması , yani bu izometride asal eğriliklerin de korunması, koşulunu araştıracağız. Doğal olarak bunun için $S^\circ(\vec{a})$, $\bar{S}(\vec{b})$ yüzeylerinin büyüklüklerini hesaplamak gerekecektir. Aranılan koşul S° in

H^o ortalama eğriliğinin, \bar{S} nin \bar{H} ortalama eğriliğine eşit olması koşulundan ibarettir; çünkü izometriden dolayı zaten $K^o = \bar{K}$ dir.

$$\vec{a}(u, v) = \vec{x}(u, v) + \vec{y}(u, v) \quad , \quad \vec{b}(u, v) = \vec{x}(u, v) - \vec{y}(u, v)$$

olduğundan sadece $S^o(\vec{a})$ yüzeyine ait büyüklükleri hesaplamakla yetinebiliriz. $\bar{S}(\vec{b})$ ninkiler , bu büyüklüklerde \vec{y} yerine $(-\vec{y})$ konarak doğrudan doğruya yazılabilecektir. Bu ise (4.9) gereğince A yerine $(-A)$, B yerine $(-B)$ konması demektir. (4.9) dan

$$\vec{a}_1 = \vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \quad , \quad \vec{a}_2 = -A\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + B\vec{n} \quad (4.28)$$

yazılabilir. Buradan da

$$E^o = (1 + A^2)E \quad , \quad F^o = 0 \quad , \quad G^o = (1 + A^2 + B^2)G \quad ; \quad (\bar{E} = E^o \quad , \quad \bar{F} = 0 \quad , \quad \bar{G} = G^o) \quad (4.29)$$

bulunur. Bu sonuçlar çok önemli saydığımız bir teoremi içermektedir. Gerçekten $S(\vec{x})$ üzerinde seçilen ve $S'(\vec{y})$ üzerindeki karşılığı da dik olan dik kordinat şebekesi, $S^o(\vec{a})$ ve dolayısıyla buna izometrik olan $\bar{S}(\vec{b})$ yüzeyi üzerinde de bir dik şebekeye karşılık gelmektedir. O halde

Teorem 4.1 Birbirine dik durumlu olan iki yüzey üzerinde, karşılığı da dik olan dik şebekeler, bu iki yüzey yardımı ile (4.1) deki şekilde tanımlanan izometrik iki yüzey üzerinde de dik şebekelere tekabül ederler.

Bu genel saptamadan sonra, $S^o(\vec{a})$ yüzeyinin öteki büyüklüklerinin bulunmasına geçebiliriz. Burada kök işaretlerinden kurtulmak için, A , B fonksiyonları yerine

$$A \equiv \operatorname{sh} a \quad , \quad B \equiv \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b} \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlanan a, b fonksiyonlarını kullanacağız. S° dan \bar{S} ye geçerken a, b yerine $(-a), (-b)$ konulacağı da apaçıktır. Buna göre

$$e^\circ = e \operatorname{ch} a, \quad g^\circ = g \operatorname{ch} a |\operatorname{cth} b| \quad (4.31)$$

dir. S° üzerindeki $1^\circ, 2^\circ$ türevleri de

$$P_{1^\circ} = \frac{1}{\operatorname{ch} a} P_1, \quad P_{2^\circ} = \frac{|\operatorname{th} b|}{\operatorname{ch} a} P_2 \quad (4.32)$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$\begin{aligned} \vec{a}_{1^\circ} &= \frac{1}{\operatorname{ch} a} \vec{x}_1 + \operatorname{th} a \vec{x}_2, \quad \vec{a}_{2^\circ} = |\operatorname{th} b| \left[-\operatorname{th} a \vec{x}_1 + \frac{1}{\operatorname{ch} a} \vec{x}_2 + \frac{1}{\operatorname{sh} b} \vec{n} \right] \\ \vec{n}^\circ &= |\operatorname{th} b| \left[\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b} \vec{x}_1 - \frac{1}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh} b} \vec{x}_2 + \vec{n} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

dir. (1.8) e göre $S^\circ(a)$ yüzeyinin büyüklüklerini hesaplamak için $\vec{a}_{1^\circ}, \vec{a}_{2^\circ}, \vec{n}^\circ$ türevlerinin hesaplanması gerekir. (4.33) den (4.32) kullanılarak yapılacak olan bu işlemler sonucunda :

$$\begin{aligned} k^\circ &= \frac{|\operatorname{th} b|}{\operatorname{ch}^2 a} \left(k \frac{\operatorname{ch}^2 b}{\operatorname{sh}^2 b} + p \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b} + t \operatorname{sh} a \right), \quad k^* = \frac{|\operatorname{th} b|}{\operatorname{ch}^2 a} \left(-b_2 \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} b} + k^* - t \operatorname{sh} a \right) \\ p^\circ &= \frac{|\operatorname{th} b|}{\operatorname{ch}^2 a} \left(p \operatorname{ch} a - t \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} b} \right), \quad p^* = \frac{\operatorname{th}^2 b}{\operatorname{ch}^2 a} \left(p^* \operatorname{ch} a + k^* \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} b} \right) \\ t^\circ &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b} \left(t \operatorname{ch}^2 b - p^* \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b + k^* \operatorname{sh} a \operatorname{sh}^2 b \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

bulunur. $\bar{S}(\vec{b})$ yüzeyinin, (4.34) de a , b yerine $(-a)$, $(-b)$ koyarak bulunacak olan, büyüklüklerini buraya ayrıca yazmıyoruz.

Artık S^o , \bar{S} yüzeylerinin bir Bonnet yüzey çifti oluşturması koşulu olan

$$k^o + k^{*o} = \bar{k} + \bar{k}^* \quad , \quad (\text{Ya da} \quad k^o - \bar{k} = \bar{k}^* - k^{*o})$$

eşitliğini (4.34) den kolayca oluşturabiliriz. Sonuçta, önce çok sade olan

$$b_2 = \frac{\text{ch } b}{\text{sh } b} p \quad (4.35)$$

koşulunu elde ederiz. Bu koşulun, u parametresi üzerinde yapıldığı varsayılan uygun bir skala dönüşümü ile

$$e = \text{ch } b \quad (4.35')$$

koşuluna eşdeğer olduğu hemen görülmektedir: (4.35') koşulunun (4.30) tanımları gereğince

$$B^2 = \frac{A^2 - 1}{E - 1} \quad (4.36)$$

koşulundan ibaret olduğu apaçıktır.

Böylece, en genel şekilde Bonnet çiftleri elde etmek için: (4.10) ve (4.11) denklemlerinde $B(u,v)$ fonksiyonu yerine (4.36) daki değerinin konması ve $S(\vec{x})$ yüzeyinin bilindiği varsayılarak $S'(\vec{y})$ yüzeyini elde etmek amacı ile $A(u,v)$ fonksiyonunun çözülmesine çalışılması gerekmektedir. Doğal olarak (4.10) , (4.11) , (4.36) denklemlerinin uyumluluk koşulları $S(\vec{x})$ yüzeyi üzerine de bir takım koşullar getirecektir. Gerçekten her $S(\vec{x})$

yüzeyi ve buna dik durumlu olan $S'(\vec{y})$ yüzeyi ile (4.1) deki şekilde tanımlanan S° ve \bar{S} izometrik yüzeylerinin bir Bonnet çifti oluşturamayacağı apaçiktır.

Bu yöntemin, özellikle özel yüzey sınıfları arasında Bonnet çifti oluşturabilecek yüzeylerin araştırılmasında bir aşama sağladığı, (4.35) koşulundan (4.35') sonucuna geçerken bir integrasyonun yapılabilmiş olması nedeni ile doğaldır.



5. SONUÇLAR

- 1) Bir doğrusal yüzeye, doğuranları koruyan bir izometrik tasvir ile tasvir edilebilen doğrusal yüzeylerin büyüklükleri (2.9).
- 2) Doğuranları karşılıklı gelmeksizin, izometrik olarak tasvir edilebilen doğrusal yüzeylerin büyüklüklerinin belirtilmesini sağlayan (2.16) ve (2.16') diferansiyel denklemleri.
- 3) (2.16) ve (2.16') diferansiyel denklemlerinin (2.18) ve (2.18') genel çözümleri.
- 4) (2.27) ve (2.27') diferansiyel denklemleri ve bunların (2.28), (2.29), (2.28'), (2.29') genel çözümleri.
- 5) Bir doğrusal Bonnet yüzeyi gösterdiği kanıtlanan (3.8) denklemi.
- 6) (3.8) doğrusal Bonnet yüzeyine yandaş olan Bonnet yüzeyini veren (3.10) denklemi.
- 7) Doğrusal minimal yüzeyler ve doğrusal Weingarten yüzeyi özel halleri.
- 8) (3.8) doğrusal Bonnet yüzeylerinin yandaşlarının geometrik özelliklerini saptayan teorem 3.1. ve teorem 3.2.
- 9) Doğrusal minimal yüzeyin ve yandaşının (3.21) denklemleri.
- 10) Doğrusal Weingarten yüzeyi özel halinde, yüzeyin ve yandaşının denklemlerini verecek olan (3.25) ve (3.25') sonuçları.
- 11) a) Bir silindire dik durumlu olan yüzeylerin (4.5') denklemi
b) Bir koniye dik durumlu olan yüzeylerin (4.6') denklemi,
c) Bir genel açılabilir yüzeye dik durumlu olan yüzeylerin (4.7') denklemi.
- 12) Dik durumlu yüzeylerin belirtilmesi probleminin A, B fonksiyonları ile, sonsuz küçük bükülme probleminin α, β, γ fonksiyonlarının sağladığı (4.19) ve (4.21) bağıntıları
- 13) Dik durumlu yüzeylere ait denklemlerin, bir özel hal için çözümünden oluşan (4.26) ve (4.27) dik durumlu yüzeyleri
- 14) Dik durumlu yüzeylerin önemli bir özelliğini içeren teorem 4.1.
- 15) Dik durumlu yüzeyler aracılığı ile tanımlanan izometrik yüzey çiftinin bir Bonnet çifti oluşturması için A, B fonksiyonlarının sağladığı, çok sade olan, (4.36) bağıntısı.

KAYNAKLAR

Bianchi, L., (1910), Vorlesungen Über Differential Geometrie, (Deutsche Übersetzung Von Max Lukaz), Teubner Verlag, Berlin.

Blaschke, W., (1949), Diferensiyel Geometri Dersleri, (Çev. K. Erim), İstanbul Üniversitesi Yayını Nu. 433, İstanbul.

Bonnet, O., (1867), Memorié sur la Théorie Des Surfaces, Applicable Sur Une Surface Donnée , Journale de L'Ecole Polytechnique, T.25, France.

Darboux, G., (1894), Leçons Sur La Théorie Générale Des Surfaces Et Les Applications Geometriques Du calcul Infinitesimal, T. III. Gautier-Villars Paris.

Eisenhart, L.P., (1960), A Treatise On The Differential Geometry Of Curves And Surfaces, Dover Publications, Inc., New York.

Soyuçok, Z., (1995), "The Problem Of Non-Trivial Isometries Of Surfaces Preserving Principal Curvatures", Journal Of Geometry Vol.52., Basel.

Uras, F., (1992), Diferansiyel Geometri II. Dersleri, Yıldız Üniversitesi Yayınları , 261, İstanbul.

Uras, F., (1996), "On The Net Of The Principal Stresses Related With The Infinitesimal Bending", Bulletin Of The Technical Un. Of İstanbul, V.49, Number 3-4, PP.663-674, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	26.09.1971	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1985-1988	Kandilli Kız Lisesi
Lisans	1988-1992	Yıldız Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1992-1994	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı
Doktora	1995-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı
Çalıştığı Kurumlar	1993-Devam Ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi