YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR KATSAYILI DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN AĞIRLIKLI İZİNİN VE DÜZENLİ İZİNİN İNCELENMESİ

Akın TAŞDİZEN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 28 Aralık 1999
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÖZELOV (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ (Sakarya Ü)
: Prof. Dr. Elimhan MAHMUDOV (İÜ)

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince , bana gösterdiği çok yakın ilgi ve yardımlarından dolayı sayın Prof. Dr. Ehliman Adıgözelov'a teşekkür ederim.

Akın Taşdizen

Kasım 1999

ÖZET

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı, Ω da R^n Öklit uzayının ölçülebilir bir alt kümesi olsun. H uzayında iç çarpımı $(\,.\,,\,.\,)$, normu da $\|\,.\,\|$ ile gösterelim. Ω kümesinde tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_{\Omega} \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H;\Omega)$ ile gösterelim. H_1 e ait herhangi iki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımı

$$(f\,,g)_{H_1} = \int_{\Omega} (f(x)\,,g(x))\,dx$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 kümesi ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur.

"Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin ağırlıklı izinin ve düzenli izinin incelenmesi" adlı bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci ana bölümde $H_1 = L_2\left(H;R^3\right)$ uzayında

$$\ell(u) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + Q(x)u$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan kendine eş L operatörünün ağırlıklı izi için asimtotik formül bulunmuştur.

İkinci ana bölümde $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında

$$\ell(y) = -y'' + Q(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün spektrumu incelenmiş ve düzenli izi için formül bulunmuştur.

ABSTRACT

Let H be a separable Hilbert space and Ω a measurable subset of the R^n Euclidean space . Denote by $(\,.\,,\,.\,)$ and $\|\,.\,\|$ the inner products and norms in H space . Let $H_1 = L_2(H;\Omega)$ be the set of functions f that are defined in Ω , strongly measurable in H space and that meet the condition

$$\int_\Omega \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

If we define the inner product of two functions $f(x)$ and $g(x)$, elements of H_1 , as

$$(f\,,g)_{H_1} = \int_\Omega (f(x)\,,g(x))\,dx$$

the set H_1 is a separable Hilbert space .

This thesis, "Investigating the weighted and regular traces of operator coefficient differential operators" is composed of two main parts .

The first main part , an asymptotic formula is found for the weighted trace of the self adjoint L operator that is formed by the differential form

$$\ell(u) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + Q(x)u$$

in $H_1 = L_2\left(H;R^3\right)$ space .

The second main part , the spectrum of the L operator that is formed by the differential form

$$\ell(y) = -y'' + Q(x)y$$

and the boundary conditions

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

in $H_1 = L_2\left(H,[0,\pi]\right)$ space in investigated and a formula for its regular trace is found .

1. GİRİŞ

Bu çalışmada ikinci mertebeden operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin ağırlıklı izi ve düzenli izi incelenmiştir. Çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır.

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. R^n Öklit uzayının bir Ω alt kümesinde tanımlı, değerleri H ye ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_{\Omega} \|f(x)\|^2 \, dx < \infty \quad , \qquad x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \Omega$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H;\Omega)$ ile gösterelim. H_1 in herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f, g)_{H_1} = \int_{\Omega} (f(x), g(x)) \, dx$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 kümesi ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur. "Kısmi türevli sınırsız operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün ağırlıklı izinin asimtotik davranışı" başlığı altında $H_1 = L_2(H;R^3)$ uzayında

$\ell(u) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + Q(x)u$ diferansiyel ifadesi ile oluşturulan kendine eş L operatörü ele alınmıştır. $\ell(u)$ nun ifadesindeki kısmi türevler H uzayındaki norma göre ifade edilmişlerdir. Reel değerli $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ fonksiyonlarının R^3 uzayında sınırlı $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ $(i, j, k = 1,2,3)$ türevlerine sahip olduğunu varsayıyoruz. Her bir $x \in R^3$ için $D(Q(x)) \subset H$ olmak üzere $Q(x)$, $D(Q(x))$ den H ye kendine eş bir operatördür. $D(Q(x))$ $(x \in R^3)$ kümelerinin kesişimi olan D kümesi H de yoğundur. $Q(x) \geq I$ ve $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty(H)$ dır. $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1,2,3)$ ve $Q(x)$ belirli koşulları sağladığı takdirde L operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_n \leq \ldots$ ler L operatörünün özdeğerleri, $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_n(x), \ldots$ ler de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları olsun. $N_\nu(\lambda)$ ile

$$N_\nu(\lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} \int_{R^3} \left(Q^\nu(x) \Psi_k(x), \Psi_k(x) \right) dx \qquad (\lambda > 0)$$

sonlu toplamını gösterelim. $N_\nu(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün ağırlıklı izi denir.

Bu bölümde $\lambda \to \infty$ iken

$$N_v(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^3 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \sum_i \int_{\alpha_i(x)<\lambda} \Phi(x)\alpha_i^v(x)\left[\lambda-\alpha_i(x)\right]^{\frac{3}{2}} dx$$

asimtotik formülü bulunmuştur.

Diferansiyel operatörlerin ağırlıklı izinin asimtotik davranışı, Leviman, B. M., (1956) ; Kostyuchenko, A. G., (1968) ; Aslanov, H. İ. ve Bayramoğlu, M., (1977) ; Bayramoğlu, M. and Baykal, O., (1999) çalışmalarında incelenmiştir.

"Sonlu aralıkta verilmiş sınırlı operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün düzenli izinin incelenmesi" başlığı altında $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında

$$\ell(y) = -y'' + Q(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün spektrumu incelenmiş ve düzenli izi için formül bulunmuştur. $\ell(y)$ nin ifadesinde yer alan $Q(x)$ operatör fonksiyonunun, $[0,\pi]$ aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahip olduğu, her $x \in [0,\pi]$ için $Q^{(i)}(x)$ ($i = 0,1,2$) operatörlerinin H den H ye kendine eş çekirdek operatörleri olduğu ve

$$\|Q(x)\|_{H_1} < \frac{1}{2}$$

koşulunu sağladığı varsayılmıştır.

Ek olarak H uzayının $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty$ olacak şekilde bir $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazı mevcut olduğu takdirde, L operatörünün spektrumunun ikişerli ayrık $F_m = \left[m^2 - \|Q\|_{H_1}, m^2 + \|Q\|_{H_1}\right]$ ($m = 0,1,2, \ldots$) aralıklarının birleşiminin bir alt kümesi olduğu ve spektrumun aşağıdaki özelliklere sahip olduğu ispatlanmıştır.

1) L operatörünün spektrumunun F_m aralığına ait m^2 den farklı her bir noktası, katlılığı sonlu olan ayrık bir özdeğerdir.

2) m^2, L operatörünün katlılığı sonlu veya sonsuz olan bir özdeğeri olabilir.

3) $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ ler L operatörünün F_m aralığına ait olan özdeğerleri olmak üzere

$\lim_{n\to\infty} \lambda_{mn} = m^2$ dir.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn} - m^2\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{tr}\, Q(x)\, dx\right] \tag{1.1}$$

serisinin toplamı için

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-m^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tr}\ Q(x)\,dx\right]=\frac{1}{4}\left[\mathrm{tr}\ Q(0)+\mathrm{tr}\ Q(\pi)\right]-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tr}\ Q(x)\,dx$$

formülü bulunmuştur. (1.1) serisinin toplamına L operatörünün düzenli izi adı verilmiştir. Skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi, Geltand, İ. M. ve Levitan, B. M., (1953) ; Dikiy, L. A., (1953) ; Halberg, C. J. and Kramer, V. A, (1960) ; Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M., (1963) ; Levitan, B. M., (1964) ; Lidskiy, V. B. ve Sadorniçiy, V. A., (1967) ; Guseynov, G. Ş. ve Levitan, B. M., (1978) ve birçok başka çalışmalarda hesaplanmıştır. Bu konudaki çalışmaların listesi Levitan, B. M. and Sargsyan, İ. S., (1991) ; Fultan, İ. C. and Pruess, S. A., (1994) çalışmalarında verilmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izi, Adıgözelov, E. E., (1976) ; Halilova, R. Z., (1976) ; Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. and Adıgözelov, E. E., (1984) ; Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E. E., (1996) çalışmalarında incelenmiştir. Dubrovski, V. V., (1996) çalışmasında, saf ayrık spektruma sahip olan kendine eş operatörlerin düzenli izi incelenmiştir. Özlem Bakşi'nin "Sınırsız Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin İz Formülü" (1999) adlı doktora tezi çalışmasında, $A = A^* \geq I$ ve $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$ olmak üzere $H_1 = L_2\left(H;[0,\pi]\right)$ uzayında

$$\ell(y) = -y'' + Q(x)\,y + A\,y \tag{1.2}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L operatörünün düzenli izi incelenmiştir. (1.2) ifadesindeki $Q(x)$ operatör fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahip olduğu , her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x)$ in H den H ye kendine eş bir çekirdek operatör olduğu ve her $f \in H$ için

$$\int_0^{\pi}\left(Q(x)f\,,\,f\right)dx = 0$$

koşulunun sağlandığı varsayılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı, Ω da R^n Öklid uzayının ölçülebilir bir alt kümesi olsun. H uzayında iç çarpımı $(\,.\,,\,.\,)$, normu da $\|\,.\,\|$ ile göstereceğiz. Ω kümesinde tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_\Omega \|f(x)\|^2\,dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H;\Omega)$ ile gösterelim. H_1 in herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f\,,g)_{H_1} = \int_\Omega (f(x)\,,g(x))\,dx$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 kümesi bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur (Krillov,1976) .

Tanım 2.1 A ve B tanım kümeleri sırasıyla D(A) ve D(B) olan her hangi iki operatör olsun. Eğer $D(A) = D(B)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = Bx$ ise o zaman A operatörü B operatörüne eşittir denir ve $A = B$ şeklinde yazılır. $D(A) \subset D(B)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = Bx$ ise B operatörü A operatörünün genişletilmesidir denir ve $A \subset B$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.2 B_1, B_2 her hangi iki Banach uzayı ve $D(A) \subset B_1$ olmak üzere, A da D(A) dan B_2 ye bir lineer operatör olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n\to\infty}\|Ax_n - y_0\| = 0$$

koşullarını sağlayan her $\{x_n\}_1^\infty \subset D(A)$ dizisi ve $x_0 \in B_1$, $y_0 \in B_2$ elemanları için

$$x_0 \in D(A) \qquad \text{ve} \qquad Ax_0 = y_0$$

oluyorsa o zaman A ya kapalı operatör denir.

Örnek . $B_1 = B_2 = C[0,1]$, D(A) $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli türevi olan fonksiyonların kümesi ve A da D(A) dan $C[0,1]$ e

$$Ax(t) = x'(t)$$

şeklinde tanımlanmış bir lineer operatör olsun. $Z_n(t) = t^n$ $(n = 1,2, \ldots)$ dizisini ele alalım.

$\{Z_n\}_1^\infty \subset D(A)$ ve

$$AZ_n(t) = Z_n'(t) = n\,t^{n-1}$$

dir. Ayrıca

$$\|Z_n\| = \max_{t\in[0,1]} t^n = 1 \quad , \quad \|AZ_n\| = \max_{t\in[0,1]} n\,t^{n-1} = n \quad , \quad \|AZ_n\| = n\|Z_n\| \qquad (n = 1,2, \ldots)$$

dir. Görüldüğü gibi A sınırsız operatördür. A nın kapalı operatör olduğunu gösterelim. $\{x_n(t)\}_1^\infty \subset D(A)$, $C[0,1]$ uzayındaki norma göre

$x_n(t) \to x_0(t)$, $A x_n(t) = x_n'(t) \to y_0(t)$, $(x_0(t)\ ,\ y_0(t) \in C[0,1])$

koşullarını sağlayan herhangi bir dizi olsun. $\{x_n(t)\}_1^\infty$ fonksiyon dizisinin $x_0(t)$ fonksiyonuna, $A x_n(t) = x_n'(t)$ $(n = 1,2, \ldots)$ fonksiyon dizisinin de $y_0(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı açıktır. Bu durumda matematik analizden $x_0(t)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında sürekli türevi olduğu yani $x_0(t) \in D(A)$ olduğu ve

$x_0'(t) = y_0(t)$ veya $A x_0(t) = y_0(t)$

olduğu bilinmektedir ki , bu da tanıma göre A nın kapalı operatör olması demektir.

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı A da $D(A) \subset H$ olmak üzere $D(A)$ dan H ye kapalı olmayan bir lineer operatör olsun. Eğer aynı limiti olan herhangi iki $\{x_n\}_1^\infty$, $\{x_n'\}_1^\infty \subset D(A)$ dizileri için $\{A x_n\}_1^\infty$ ve $\{A x_n'\}_1^\infty$ dizileri farklı limitlere sahip ise A operatörünün kapalı genişletilmesinin yani $A \subset B$ olacak şekilde bir B kapalı operatörünün var olmayacağı açıktır. Oysa aynı limiti olan keyfi iki $\{x_n\}_1^\infty$, $\{x_n'\}_1^\infty \subset D(A)$ dizileri için $\{A x_n\}_1^\infty$ ve $\{A x_n'\}_1^\infty$ dizileri farklı limite sahip değilse A operatörünün kapalı genişletilmesi mevcut olacaktır. A operatörünün minimal kapalı genişletilmesine bu operatörün kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A operatörünün kapanışının nasıl oluşturulduğunu gösterelim. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0 \qquad \left(\{x_n\}_1^\infty \subset D(A)\ ,\ x_0 \in H\right)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \|A x_n - y_0\| = 0 \qquad (y_0 \in H)$$

ise o zaman $x_0 \in D(\overline{A})$ ve $\overline{A} x_0 = y_0$ kabul edilir.

H den H ye tam sürekli operatörlerin kümesi $\sigma_\infty(H)$ ile gösterilir. $A \in \sigma_\infty(H)$ sıfırdan farklı bir operatör olsun. Bu durumda $(A^* A)^{\frac{1}{2}}$ kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve $(A^* A)^{\frac{1}{2}} \subset \sigma_\infty(H)$ dır (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) . Bu operatörün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_i \geq \ldots$ olsun. Burada her bir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $(A^* A)^{\frac{1}{2}}$ negatif olmayan bir operatör olduğundan, $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$ pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. A nın s

sayıları bazen $s_i(A)$ $(i = 1,2, \ldots)$ şeklinde de yazılabilir. $s_1(A) = \|A\|$ olduğunu belirtelim. A normal operatör yani $A^*A = AA^*$ ise

$$s_i(A) = |\lambda_i(A)| \qquad (i = 1,2, \ldots)$$

dir (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) . Burada $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots$ A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir. A operatörünün s sayılarının sayısını $\nu(A)$ ile göstereceğiz. $\nu(A)$ sonlu ya da sonsuz olabilir. s sayıları

$$\sum_{i=1}^{\nu(A)} s_i^p(A) < \infty \qquad (p \geq 1)$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_\infty(H)$ kümesinin , "O" operatörle birleşimini σ_p veya $\sigma_p(H)$ simgesiyle göstereceğiz. Burada σ_p $(p \geq 1)$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) . Bu uzayın her $A \neq 0$ operatörünün normu

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{i=1}^{\nu(A)} s_i^p(A) \right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır ve $\|O\|_{\sigma_p(H)} = 0$ kabul edilir.

Tanım 2.3 σ_1 uzayına ait olan bir operatöre çekirdek operatörü denir.

$A \in \sigma_p(H)$, $B \in L(H,H)$ ise $AB, BA \in \sigma_p(H)$ ve

$$\|BA\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \, \|A\|_{\sigma_p(H)}$$

$$\|AB\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \, \|A\|_{\sigma_p(H)}$$

dır. Ayrıca $p_1 < p_2$ ise $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$ dir (Cohberg, İ. G. and Krein, M. G., 1969) .

Tanım 2.4 A , H den H ye bir sınırlı lineer operatör ve $\{e_i\}_1^\infty \subset H$ bir ortonormal taban olsun. $\sum_{i=1}^{\infty} (Ae_i, e_i)$ serisi yakınsak ise bu serinin toplamına A operatörünün $\{e_i\}_1^\infty$ ortonormal tabanında matris izi denir.

Teorem 2.1 A bir çekirdek operatörü ise her $\{e_i\}_1^\infty \subset H$ ortonormal tabanı için $\sum_{i=1}^{\infty} (Ae_i, e_i)$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_i\}_1^\infty$ ortonormal tabanının seçimine bağlı değildir (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) .

A çekirdek operatörünün matris izi tr A simgesi ile gösterilecektir :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A e_i , e_i \right)$$

Herhangi $A, B \in \sigma_1$ operatörleri ve α , β sayıları için

$$\text{tr } (\alpha A + \beta B) = \alpha \text{ tr } A + \beta \text{ tr } B \qquad \text{ve} \qquad \text{tr } A^* = \overline{\text{tr } A}$$

dır.

Teorem 2.2 Bir $A \in \sigma_1$ operatörünün matris izi

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{\nu(A)} \lambda_i(A)$$

dır. Burada her $\lambda_i(A)$ özdeğeri kendi katlılık sayısı kadar toplanmıştır.

Eğer $A \in \sigma_p(H)$ $(1 \le p \langle \infty)$ ve $\{e_i\}_1^{\nu}$ $(1 \le \nu \langle \infty)$, H de bir ortonormal elemanlar sistemi ise

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left| \left(A e_i , e_i \right) \right|^p \le \left(\| A \|_{\sigma_p(H)} \right)^p$$

dir. Bu eşitsizlikten özel olarak bir A çekirdek operatörü için $|\text{tr } A| \le \| A \|_{\sigma_1(H)}$ elde edilir (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) .

Tanım 2.5 Kendine eş bir A operatörünün spektrumu sadece her birinin katlılığı sonlu olan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ özdeğerlerinden ibaret ve

$$\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty$$

ise, A operatörü saf ayrık spektruma sahiptir denir.

3. KISMİ TÜREVLİ SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN AĞIRLIKLI İZİNİN ASİMTOTİK DAVRANIŞI

3.1 Problemin Ortaya Konulması

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(H;R^3)$ uzayında, $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ olmak üzere aşağıdaki diferansiyel ifadeyi göz önüne alalım.

$$\ell(u) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + Q(x)u \tag{3.1}$$

Bu ifadede bulunan $a_{ij}(x)$ (i,j=1,2,3) ve $Q(x)$ katsayılarının aşağıdaki koşulları sağladıklarını varsayıyoruz.

1^0) Reel değerli $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ fonksiyonları R^3 uzayında sınırlı $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ (i,j,k=1,2,3) türevlerine sahiptir.

2^0) Her ξ_1,ξ_2,ξ_3 reel sayıları için, aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan α ve β pozitif sabitleri vardır

$$\alpha\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \le \beta\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2$$

3^0) Her bir $x\in R^3$ için $D(Q(x))\subset H$ olmak üzere $Q(x): D(Q(x))\to H$ kendine eş operatördür. $D(Q(x))$ $(x\in R^3)$ kümelerinin kesişimi olan D kümesi H de yoğundur. $Q(x)\ge I$ ve $Q^{-1}(x)\in\sigma_\infty(H)$ dır.

4^0) ν bir reel sabit olmak üzere $|x-s|\le 1$ ve $\gamma = 0,\nu$ için

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\left[Q(s)-Q(x)\right]Q^{-\gamma-b}(s)\right\| \le A|x-s|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $b\in(0,\frac{3}{2})$ ve $A \rangle 0$ sabitleri vardır.

5^0) Her $x\in R^3$ için

$$Q^{-\ell}(x)\in\sigma_1(H) \quad \text{ve} \quad \int_{R^3}\left\|Q^{-\ell}(x)\right\|_1^i dx \,\langle\, \infty \qquad (i = 1,2)$$

olacak şekilde bir $\ell \rangle 0$ sabiti vardır.

6^0) Her $c\rangle 0$, $t\rangle 0$, $|x-s|\le 1$ için

$$\left\|Q^{\gamma}(s)e^{-ctQ(s)}\right\|_1 \le \text{sabit}\left\|Q^{\gamma}(x)e^{-f(c)tQ(x)}\right\|_1$$

$$\left\| Q^{\nu}(x) Q^{-\nu}(s) \right\| \le A_1$$

olacak şekilde bir pozitif değerli f fonksiyonu ve $A_1 > 0$ sabiti vardır. $(\gamma = 0, \nu)$

7^0) Her bir $M > 0$ sabiti için

$$\int_{R^3} \left\| Q^{\gamma}(x) e^{-MtQ(x)} \right\|_1 dx = O(1) \int_{R^3} \left\| Q^{\gamma}(x) e^{-tQ(x)} \right\|_1 dx$$

dir.

8^0) $\alpha_1(x) \le \alpha_2(x) \le \dots\dots\dots \le \alpha_n(x) \le \dots\dots$ $Q(x)$ operatörünün özdeğerleri olsun. $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots.$ fonksiyonlarının ölçülebilir olduklarını kabul edelim.

$$\rho(\lambda) = \sum_i \int_{\alpha_i(x) < \lambda} \Phi(x)\, \alpha_i^{\nu}(x) \left(\lambda - \alpha_i(x)\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

olsun. Burada

$$\Phi(x) = \int_{R^3} e^{-\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j} d\xi \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

dir. λ nın büyük pozitif değerleri için

$$\lambda \rho'(\lambda) \le a_0 \rho(\lambda)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $a_0 > 0$ sabitinin var olduğunu varsayalım.

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\dots\dots, \varphi_m(x)$ R^3 uzayında tanımlı, ikinci mertebeden sürekli türevlere ve kompakt desteğe haiz olan skaler fonksiyonlar ve $\{f_k\}_{k=1}^{m} \subset D$ olmak üzere H_1 uzayının

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) f_k$$

şeklinde olan elemanlarının kümesini D' ile gösterelim. Bilindiği gibi $\overline{D'} = H_1$ dir.

$$L'u = \ell(u) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + Q(x)u \qquad u \in D'$$

şeklinde tanımlanmış L' lineer operatörü H_1 uzayında bir simetrik ve pozitif operatördür. L' operatörünün kapanışı olan L operatörünün kendine eş olduğunu varsayalım. L operatörü saf ayrık spektruma sahiptir.

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots\dots \lambda_n \le \dots\dots$ ler L operatörünün özdeğerleri, $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots\dots, \Psi_n(x), \dots\dots$ ler de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar olsun. $N_\nu(\lambda)$ ile

$$N_\nu(\lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} \int_{R^3} \left(Q^{\nu}(x) \Psi_k(x), \Psi_k(x) \right) dx \qquad (\lambda > 0)$$

sonlu toplamını gösterelim. $N_\nu(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün ağırlıklı izi denir. $N_0(\lambda) = N(\lambda)$ nın L operatörünün λ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı olduğu açıktır.

Bu bölümde $\lambda \to \infty$ iken $N_\nu(\lambda)$ fonksiyonu için asimtotik formül bulunacaktır.

$$L_0(\eta, \frac{\partial}{\partial x}) = -\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$L_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olsun. (Bayramov, A. M., 1996) da e^{-tL} operatörünün, çekirdeği $G(x,y,t)$ olan bir integral operatör olduğu gösterilmiştir.

$$e^{-tL}\,\Psi(x) = \int_{R^3} G(x,y,t)\,\Psi(y)\,dy \qquad \Psi(x) \in L_2(H;R^3)$$

Burada

$$G(x,y,t) = G_1(x-y,y,t)e^{-tQ(y)} + \int_0^t d\tau \int_{R^3} G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\,\varphi(\xi,y,\tau)d\xi \tag{3.2}$$

$$G_1(x-y,y,t) = R(x-y)\,G_0(x-y,y,t) \tag{3.3}$$

dir. $R(x)$ fonksiyonu

$$R(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |x| \rangle 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olan bir fonksiyondur. $G_0(x-y,\eta,t)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -L_0(\eta, \dfrac{\partial}{\partial x})u \\ u(x,0) = \Psi(x) \quad , \quad \Psi(x) \in L_2(H;R^3) \end{cases} \tag{3.5}$$

probleminin Green fonksiyonudur.

$$u(x,t) = \int_{R^3} G_0(x-\xi,\eta,t)\Psi(\xi)\,d\xi$$

ve (3.2) formülündeki $\varphi(x,y,t)$ operatör fonksiyonu

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x,y,t) \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada

$$K_1(x,y,t) = K(x,y,t) = \overline{K}(x,y,t) - e^{-tQ(y)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]G_1(x-y,y,t) \tag{3.7}$$

$$\overline{K}(x,y,t)=[Q(y)-Q(x)]\,e^{-tQ(y)}\,G_1(x-y,y,t) \tag{3.8}$$

$$K_m(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{R^3}K(x,\xi,t-\tau)K_{m-1}(\xi,y,\tau)\,d\xi \qquad (m=2,3,....) \tag{3.9}$$

dir. Bu bölümde $c, c_1, c_2, c_3, ...$ v.b ile gösterilen pozitif sabitler aynı olmayabilir. Ayrıca $t\in(0,1)$ olduğunu varsayacağız.

3.2 K(x,y,t) Operatör Fonksiyonu İle İlgili Bazı Eşitsizlikler

(Eydelman , S. D. , 1969) dan $G_0(x-y,y,t)$ operatör fonksiyonu için

$$\left\|D_x^{(k)}G_0(x-y,y,t)\right\|\le c_1\,t^{-\frac{3+k}{2}}\,e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (k=0,1,2) \tag{3.10}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı bilinmektedir.

B_1 ve B_2 , H den H ye iki lineer operatör olsun. Eğer

$B_1\in L(H,H)$, $B_2\in\sigma_1(H)$

ise o zaman

B_1B_2 , $B_2B_1\in\sigma_1(H)$

ve

$$\|B_1B_2\|_1\le\|B_1\|.\|B_2\|_1 \quad , \quad \|B_2B_1\|_1\le\|B_1\|.\|B_2\|_1$$

dir. (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) Bu bölümde bu eşitsizlikler sık sık kullanılacaktır.

Teorem 3.2.1 Q(x) operatör fonksiyonu 3) , 4) koşullarını sağlıyor ve her bir $t\rangle 0$ ve $x\in R^3$ için $e^{-tQ(x)}\in\sigma_1(H)$ ise

$$\left\|Q^\gamma(x)\overline{K}(x,y,t)\right\|_1\le \text{sabit }t^{-b-1}\left\|Q^\gamma(y)\,e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$

dir.

İspat . (3.3) , (3.4) ve (3.8) formüllerinden aşağıdakiler elde edilir.

$$G_1(x-y,y,t)=0 \qquad (|x-y|\rangle 1) \tag{3.11}$$

$$\overline{K}(x,y,t)=0 \qquad (|x-y|\rangle 1) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\left\|Q^\gamma(x)\overline{K}(x,y,t)\right\|_1&=\left\|Q^\gamma(x)[Q(y)-Q(x)]\,e^{-t\,Q(y)}\,G_1(x-y,y,t)\right\|_1\\ &\le \text{sabit}\left\|Q^\gamma(x)[Q(y)-Q(x)]Q^{-\gamma-b}(y)\right\|.\left\|Q^{\gamma+b}(y)e^{-t\,Q(y)}\,G_0(x-y,y,t)\right\|_1\end{aligned} \tag{3.13}$$

Q(x) , 4) koşulunu sağladığından, bu bağıntılardan

$$\left\|Q^\gamma(x)\overline{K}(x,y,t)\right\|_1\le \text{sabit }|x-y|.\left\|Q^{\gamma+b}(y)e^{-t\,Q(y)}\,G_0(x-y,y,t)\right\|_1$$

$$\le \text{sabit}\,|x-y|.\left\|Q^b(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|.\left\|Q^\gamma(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|_1.\left\|G_0(x-y,y,t\right\|$$

$$\le \text{sabit}\,|x-y|\,t^{-b}\left\|t^b\,Q^b(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|.\left\|Q^\gamma(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|_1.\left\|G_0(x-y,y,t\right\| \qquad (3.14)$$

elde edilir. Her bir p, q, r pozitif sabitleri için

$$y^p\,e^{-qy^r} \le \text{sabit} \qquad (y \ge 0) \qquad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin yardımıyla

$$\left\|t^p\,Q^p(y)e^{-qtQ(y)}\right\| \le \text{sabit} \qquad (3.16)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. (3.10) ve (3.16) eşitsizlikleri (3.14) de göz önüne alınırsa

$$\left\|Q^\gamma(x)\overline{K}(x,y,t)\right\|_1 \le \text{sabit}.|x-y|.t^{-b-\frac{3}{2}}\left\|Q^\gamma(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$

$$= \text{sabit}.t^{-b-1}\left[\left(\frac{|x-y|^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2}.\frac{|x-y|^2}{t}}\right]\left\|Q^\gamma(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|_1 e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}}$$

olur. (3.15) in yardımıyla buradan

$$\left\|Q^\gamma(x)\overline{K}(x,y,t)\right\|_1 \le \text{sabit}.\,t^{-b-1}\left\|Q^\gamma(y)e^{-\frac{1}{2}t\,Q(y)}\right\|_1 e^{-c_2\frac{|x-y|^2}{t}}$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2 $a_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,3)$ fonksiyonları 1) ve 2) koşullarını sağladığı takdirde

$$\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})+L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]G_1(x-y,y,t)\right\| \le \text{sabit}.t^{-2}\,e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$

dir.

İspat . (3.3) ve (3.4) den görüldüğü gibi $|x-y| \le \frac{1}{2}$ olduğunda

$$G_1(x-y,y,t)=G_0(x-y,y,t)$$

dir. $G_0(x-y,\eta,t)$ (3.5) probleminin Green fonksiyonu olduğundan

$$\frac{\partial G_0(x-y,\eta,t)}{\partial t}=-L_0(\eta,\frac{\partial}{\partial x})\,G_0(x-y,\eta,t) \qquad (3.17)$$

olur. Bu eşitlik $\eta=y$ olduğunda da sağlandığından

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\right] G_1(x-y,y,t)=\left[L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})-L_0(y,\frac{\partial}{\partial x})\right] G_0(x-y,y,t)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\left[a_{ij}(x)-a_{ij}(y)\right]\frac{\partial^2 G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i\,\partial x_j} \tag{3.18}$$

dir. Hipotez gereği $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ (i ,j , k = 1,2,3) fonksiyonları R^3 de sınırlıdır. Bu nedenle

$$\left|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)\right|\le A\left|x-y\right|$$

olacak şekilde bir $A\rangle 0$ sabiti vardır. (3.10) eşitliğini ve bu son eşitsizliği (3.18) de göz önüne alırsak

$$\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\right] G_1(x-y,y,t)\right\|\le\sum_{i,j=1}^{3}\left|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)\right|\left\|\frac{\partial^2 G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|$$

$$\le c_2\, t^{-\frac{5}{2}}\left|x-y\right| e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$

$$=c_2\, t^{-2}\left[\left(\frac{\left|x-y\right|^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}}\right] e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}}$$

olur. (3.15) in yardımıyla buradan

$$\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\right] G_1(x-y,y,t)\right\|\le c_3\, t^{-2} e^{-c_4\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad \left(\left|x-y\right|\le\frac{1}{2}\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.11) den görüldüğü gibi

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\right] G_1(x-y,y,t)=0 \qquad \left(\left|x-y\right|\rangle 1\right) \tag{3.20}$$

olur. Şimdi de $\frac{1}{2}\langle\left|x-y\right|\le 1$ olduğunda (3.19) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. (3.3) formülünün yardımıyla

$$L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\, G_1(x-y,y,t)=L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\, R(x-y)\, G_0(x-y,y,t)$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 R(x-y)\, G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,[\;\frac{\partial^2 R(x-y)}{\partial x_i\,\partial x_j}\, G_0(x-y,y,t)+\frac{\partial R(x-y)}{\partial x_i}\;\frac{\partial G_0(x-y,y,t)}{\partial x_j}$$

$$+\frac{\partial R(x-y)}{\partial x_j}\frac{\partial G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}R(x-y)\ ] \tag{3.21}$$

bulunur. 2) koşulundan $a_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,3)$ fonksiyonlarının R^3 de sınırlı olduğu sonucu elde edilir. Öte yandan $R(x)$, R^3 de ikinci mertebeden sürekli türeve, kompakt desteğe haiz olan fonksiyon olduğundan (3.21) den

$$\left\| L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})G_1(x-y,y,t)\right\|$$

$$\le c_1\left[\ \|G_0(x-y,y,t)\|+\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i}\right\|+\sum_{i,j=1}^{3}\left\|\frac{\partial^2 G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|\ \right]$$

ve (3.2.1) eşitliklerini kullanarak $(t\in(0,1))$ buradan

$$\left\| L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\ G_1(x-y,y,t)\right\|\le c_5\,t^{-\frac{5}{2}}\,e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (\frac{1}{2}\langle|x-y|\le 1) \tag{3.22}$$

bulunur. Diğer yandan (3.3) ve (3.17) nin yardımıyla

$$\frac{\partial G_1(x-y,y,t)}{\partial t}=R(x-y)\frac{\partial}{\partial t}G_0(x-y,y,t)$$

$$=-R(x-y)\,L_0(y,\frac{\partial}{\partial x})\,G_0(x-y,y,t)$$

$$=R(x-y)\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(y)\frac{\partial^2 G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

olur. Yeniden (3.10) eşitsizliklerini kullanarak buradan

$$\left\|\frac{\partial G_1(x-y,y,t)}{\partial t}\right\|\le c_6\,t^{-\frac{5}{2}}\,e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (\frac{1}{2}\langle|x-y|\le 1)$$

bulunur. (3.22) den ve bu son eşitsizlikten

$$\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]G_1(x-y,y,t)\right\|\le c_7\,t^{-\frac{5}{2}}\,e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (\frac{1}{2}\langle|x-y|\le 1)$$

elde edilir. Burada (3.15) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]G_1(x-y,y,t)\right\|\le c_8\,e^{-c_4\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (\frac{1}{2}\langle|x-y|\le 1) \tag{3.23}$$

olur. (3.19) , (3.20) ve (3.23) den

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}+L_0(x,\frac{\partial}{\partial x})\ G_1(x-y,y,t)\right\|\le c_9\ t^{-2}\,e^{-c_4\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.24}$$

bulunur. Teoremin ispatını tamamlamak için şimdi de

$$\left\| L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\, G_1(x-y,y,t) \right\|$$

ifadesini sınırlandıralım. $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$ ve $\dfrac{\partial R(x-y)}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2,3)$ fonksiyonları R^3 de sınırlı olduğundan

$$\left\| L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\, G_1(x-y,y,t) \right\| = \left\| \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\, \frac{\partial [R(x-y)\, G_0(x-y,y,t)]}{\partial x_j} \right\|$$

$$\leq c_{10} \left[\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial G_0(x-y,y,t)}{\partial x_i} \right\| + \left\| G_0(x-y,y,t) \right\| \right]$$

olur. (3.10) nun yardımıyla buradan

$$\left\| L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\, G_1(x-y,y,t) \right\| \leq c_{11}\, t^{-2}\, e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (3.25)$$

bulunur. (3.24) ve (3.25) den

$$\left\| \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t) \right\| \leq c_{12}\, t^{-2}\, e^{-c_4\frac{|x-y|^2}{t}}$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

(3.7) den

$$\left\| Q^{\gamma}(x) K(x,y,t) \right\|_1$$

$$= \left\| Q^{\gamma}(x) \left\{ \overline{K}(x,y,t) - e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t) \right\} \right\|_1$$

$$\leq \left\| Q^{\gamma}(x) \overline{K}(x,y,t) \right\|_1 + \left\| Q^{\gamma}(x)\, Q^{-\gamma}(y)\, Q^{\gamma}(y)\, e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] * G_1(x-y,y,t) \right\|_1$$

$$\leq \left\| Q^{\gamma}(x) \overline{K}(x,y,t) \right\|_1 + \left\| Q^{\gamma}(x)\, Q^{-\gamma}(y) \right\| . \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] * G_1(x-y,y,t) \right\|_1$$

bulunur. Burada $|x-y| > 1$ olduğunda $G_1(x-y,y,t)=0$, $|x-y| \leq 1$ olduğun da ise $\left\| Q^{\gamma}(x)\, Q^{-\gamma}(y) \right\| \leq A_1$ $(A_1 > 0)$ koşulunun sağlandığı göz önüne alınırsa

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ K(x,y,t) \right\|_1 \le \left\| Q^{\gamma}(x)\ \overline{K}(x,y,t) \right\|_1 + A_1 \left\| Q^{\gamma}(y)\ e^{-tQ(y)} \right\|_1$$
$$* \left\| \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t) \right\|$$

elde edilir. Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den yararlanarak, buradan

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ K(x,y,t) \right\|_1 \le \text{sabit}\,.\,t^{-b-1} \left\| Q^{\gamma}(y)\ e^{-\frac{1}{2}tQ(y)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$
$$+ \text{sabit} \left\| Q^{\gamma}(y)\ e^{-tQ(y)} \right\|_1 t^{-2}\ e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$

veya

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ K(x,y,t) \right\|_1 \le \text{sabit}\,.\,t^{-d} \left\| Q^{\gamma}(y)\ e^{-\frac{1}{2}tQ(y)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \quad (d = \max(b+1,2)) \tag{3.26}$$

bulunur.

Teorem 3.2.3 1) – 4) koşulları ve

$$\left\| Q^{\nu}(x)\ Q^{-\nu}(y) \right\| \le A_1 \qquad (|x-y| \le 1)$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ K(x,y,t)\ Q^{-\gamma}(y) \right\| \le \text{sabit}\,.\,t^{-d}\ e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad d = \max\{b+1,2\}$$

dir.

İspat. (3.8) formülünden

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\overline{K}(x,y,t)Q^{-\gamma}(y) \right\| = \left\| Q^{\gamma}(x)[Q(y)-Q(x)]e^{-tQ(y)}\ G_1(x-y,y,t)Q^{-\gamma}(y) \right\|$$
$$= \left\| Q^{\gamma}(x)[Q(y)-Q(x)]\,Q^{-\gamma-b}(y)\ Q^{b}(y)\ e^{-tQ(y)}\ G_1(x-y,y,t) \right\|$$
$$\le \left\| Q^{\gamma}(x)[Q(y)-Q(x)]\,Q^{-\gamma-b}(y) \right\| t^{-b} \left\| t^{b}\ Q^{b}(y)\ e^{-tQ(y)} \right\| . \left\| G_1(x-y,y,t) \right\|$$

bulunur. $Q(x)$ in 4) koşulunu sağladığı ve (3.3), (3.4), (3.10), (3.16) bağıntıları burada göz önüne alınırsa, yukarıdaki bağıntıdan

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ \overline{K}(x,y,t)\ Q^{-\gamma}(y) \right\| \le \text{sabit}\,.\,t^{-b}\,|x-y|.\left\| G_0(x-y,y,t) \right\|$$
$$\le \text{sabit}\ |x-y|\ t^{-b-\frac{3}{2}}\ e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$
$$= \text{sabit}\,.\,t^{-b-1} \left[\left(\frac{|x-y|^2}{t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}} \right] e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}}$$

elde edilir. Buradan da (3.15) in yardımıyla

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, \overline{K}(x,y,t)\, Q^{-\gamma}(y) \right\| \le \text{sabit}\,.\, t^{-b-1}\, e^{-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.27}$$

bulunur. Teorem 3.2.2 nin yardımıyla

$$\left\| Q^{\gamma}(x) e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t) Q^{-\gamma}(y) \right\|$$

$$\le \left\| Q^{\gamma}(x)\, e^{-tQ(y)}\, Q^{-\gamma}(y) \right\| . \left\| \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t) \right\|$$

$$\le \text{sabit} \left\| Q^{\gamma}(x)\, Q^{-\gamma}(y) \right\| . \left\| e^{-tQ(y)} \right\| t^{-2}\, e^{-c \frac{|x-y|^2}{t}}$$

olur. $\left\| e^{-tQ(y)} \right\| \langle 1$, $\left\| Q^{\nu}(x)\, Q^{-\nu}(y) \right\| \le A_1$ $\quad (|x-y| \le 1)$ eşitsizliklerini ve (3.11) formülünü kullanarak buradan

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t)\, Q^{-\gamma}(y) \right\|$$

$$\le \text{sabit}\ t^{-2}\, e^{-c \frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.7) , (3.27) ve (3.28) den

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, K(x,y,t)\, Q^{-\gamma}(y) \right\|$$

$$= \left\| Q^{\gamma}(x) \left\{ \overline{K}(x,y,t) - e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] G_1(x-y,y,t) \right\} Q^{-\gamma}(y) \right\|$$

$$\le \left\| Q^{\gamma}(x) \overline{K}(x,y,t)\, Q^{-\gamma}(y) \right\| + \left\| \begin{matrix} Q^{\gamma}(x)\, e^{-tQ(y)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x,\frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) \right] \\ * \, G_1(x-y,y,t)\, Q^{-\gamma}(y) \end{matrix} \right\|$$

$$\le \text{sabit}\ (t^{-b-1} + t^{-2})\, e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}}$$

veya

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, K(x,y,t)\, Q^{-\gamma}(y) \right\| \le \text{sabit}\,.\, t^{-d}\, e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (\gamma = 0 \,,\, \nu)$$

olarak teoremin ispatı tamamlanmış olur.

(3.26) eşitsizliğinden ve Teorem 3.2.3 den görülüyor ki

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, K(x,y,t) \right\|_1 \le \text{sabit}\,.\, t^{-d} \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-ctQ(y)} \right\|_1 e^{-c \frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.29}$$

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\; K(x,y,t)\; Q^{-\gamma}(y) \right\| \le \text{sabit}\,.\, t^{-d}\; e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.30}$$

olacak şekilde aynı bir $c \rangle 0$ sabiti vardır.

3.3 $Q^{\gamma}(x)\, K_m(x,y,t)$ Operatör Fonksiyonlarının Sınırlandırılması

Bundan sonraki araştırmaların yapılabilmesi için

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\; K_m(x,y,t) \right\|_1 \quad , \quad \left\| K_m(x,y,t) \right\| \qquad (\, m = 2,3,.....)$$

fonksiyonlarının sınırlandırılması gerekir. Burada biz (Eydelman, S.D., 1969) da ispatlanmış olan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} - c\frac{(\xi-y)^2}{\tau}} \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{1}{2}} d\xi \le c(\varepsilon)\; t^{-\frac{1}{2}}\; e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.31}$$

$$\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} + \frac{(\xi-y)^2}{\tau} \ge \frac{(x-y)^2}{t} \tag{3.32}$$

eşitsizliklerini kullanacağız.

Teorem 3.3.1 1) – 4) ve 6) koşulları sağlandığı takdirde

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\; K_2(x,y,t) \right\|_1 \le \text{sabit}\,.\, t^{\frac{5}{2}-2d} \left\| Q^{\gamma}(y)\; e^{-c_1 t Q(y)} \right\|_1 e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}}$$

dir. Burada yer alan c pozitif sabiti, (3.29) ve (3.30) eşitsizliklerindeki c sabitine eşittir.

İspat . (3.9) formülüne göre

$$Q^{\gamma}(x)\; K_2(x,y,t) = \int_0^t d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\; K(x,\xi,t-\tau)\; K(\xi,y,\tau)\; d\xi$$

$$= \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x) K(x,\xi,t-\tau) K(\xi,y,\tau)\; d\xi + \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x) K(x,\xi,t-\tau) K(\xi,y,\tau)\; d\xi$$

$$= B_{21} + B_{22} \tag{3.33}$$

olur. Burada B_{21} ile 0 dan $\frac{t}{2}$ ye kadar olan integral, B_{22} ile de $\frac{t}{2}$ den t ye kadar olan integral gösterilmiştir. B_{21} integrali için,

$$\| B_{21} \|_1 = \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} Q^{\gamma}(x) K(x,\xi,t-\tau) K(\xi,y,\tau)\; d\xi \right\|_1$$

$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} \left\| Q^{\gamma}(x) K(x,\xi,t-\tau) \right\|_1 . \left\| K(\xi,y,\tau) \right\| d\xi$$

(3.29) ve (3.30) eşitsizliklerinin yardımıyla buradan

$$\| B_{21} \|_1 \leq \int_0^{\frac{t}{2}} [\tau(t-\tau)]^{-d} d\tau \int_{|\xi-y|\leq 1} \left\| Q^{\gamma}(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)\,Q(\xi)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} d\xi$$

ve $Q(x)$ 6) koşulunu sağladığından buradan da

$$\| B_{21} \|_1 \leq \text{sabit} \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-c_1 t Q(y)} \right\|_1 \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-d+\frac{3}{2}} d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\xi \tag{3.34}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.31) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\xi = \prod_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\frac{(x_i-\xi_i)^2}{t-\tau}-c\frac{(\xi_i-y_i)^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{1}{2}} d\xi_i$$

$$\leq c_1(\varepsilon) \prod_{i=1}^{3} t^{-\frac{1}{2}} e^{-(c-\varepsilon)\frac{(x_i-y_i)^2}{t}}$$

veya

$$\int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\xi \leq c_1(\varepsilon)\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.35}$$

buluruz. Bu son eşitsizliğin ve

$$B(m,k) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(k)}{\Gamma(m+k)} \quad , \qquad \Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

olmak üzere

$$\int_0^t \tau^{\alpha} (t-\tau)^{\beta} d\tau = t^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1) \qquad (\alpha, \beta > -1) \tag{3.36}$$

formülünün yardımıyla (3.34) den

$$\| B_{21} \|_1 \leq \text{sabit} \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-c_1 t Q(y)} \right\|_1 t^{\frac{5}{2}-2d} e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.37}$$

elde edilir. Böylece B_{21} integrali sınırlandırılmış olur.

Şimdi de (3.29) ve (3.30) eşitsizliklerini bir daha kullanarak B_{22} integralini sınırlandıralım.

$$\| B_{22} \|_1 = \left\| \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\|_1$$

$$\leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{R^3} \left\| Q^{\gamma}(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, Q^{-\gamma}(\xi) \right\| . \left\| Q^{\gamma}(\xi)\, K(\xi,y,\tau) \right\|_1 d\xi$$

$$\leq \text{sabit} \int_{\frac{t}{2}}^{t} [\tau(t-\tau)]^{-d} d\tau \int_{|\xi-y|\leq 1} \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-\frac{1}{2}\tau Q(y)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} d\xi$$

(3.35) ve (3.36) bağıntılarından yararlanarak buradan

$$\|B_{22}\|_1 \leq \text{sabit}\ \left\|Q^{\gamma}(y)e^{-c_1 t Q(y)}\right\|_1 \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{\frac{3}{2}-d} d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\tau$$

$$\leq \text{sabit}\ \left\|Q^{\gamma}(y)\ e^{-c_1 t Q(y)}\right\|_1 t^{\frac{5}{2}-2d}\ e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.38}$$

bulunur. B_{22} integrali de sınırlandırılmış oldu. Böylece (3.33), (3.37) ve (3.38) den

$$\left\|Q^{\gamma}(x)\ K_2(x,y,t)\right\|_1 \leq \text{sabit}\,.t^{\frac{5}{2}-2d} \left\|Q^{\gamma}(y)\ e^{-c_1 t Q(y)}\right\|_1 e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}}$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Bu kez de $\|K_2(x,y,t)\|$ yi sınırlandıralım. (3.9) ve (3.30) bağıntılarından

$$\|K_2(x,y,t)\| = \left\|\int_0^t d\tau \int_{R^3} K(x,\xi,t-\tau)\ K(\xi,y,\tau)\ d\xi\right\|$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{R^3} \|K(x,\xi,t-\tau)\|.\|K(\xi,y,\tau)\|\ d\xi$$

$$\leq \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-d} d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} d\xi$$

$$= \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{\frac{3}{2}-d} d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

bulunur. Burada (3.35) ve (3.36) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\|K_2(x,y,t)\| \leq \text{sabit}\,.t^{\frac{5}{2}-2d}\ e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.39}$$

elde edilir.

Her bir $x \in R^3$ için $Q^{-\ell}(x) \in \sigma_1(H)$ olduğunu varsayalım. Bu koşul altında $|x-y| \rangle 1$ için $\left\|Q^{\gamma}(x)\ K_2(x,y,t)\right\|_1$ ifadesini sınırlandıralım. Teorem 3.3.1 e göre

$$\left\|Q^{\gamma}(x)\ K_2(x,y,t)\right\|_1 \leq \text{sabit}\,.t^{\frac{5}{2}-d} \left\|Q^{\gamma}(y)\ e^{-c_1 t Q(y)}\right\|_1 e^{-\varepsilon\frac{|x-y|^2}{t}}\ e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.40}$$

dır. Diğer taraftan

$$\left\|Q^{\gamma}(y)\ e^{-c_1 t Q(y)}\right\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\gamma}(y)\ e^{-c_1 t \alpha_i(y)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} t^{-\ell-\gamma}\ \alpha_i^{-\ell}(y)\left[t^{\ell+\gamma}\ \alpha_i^{\ell+\gamma}(y)\ e^{-c_1 t \alpha_i(y)}\right]$$

$$\leq \text{sabit}\,.t^{-\ell-\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{-\ell}(y) = \text{sabit}\,.t^{-\ell-\gamma}\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1 \tag{3.41}$$

ve $|x-y| > 1$ olduğunda

$$e^{-\varepsilon\frac{|x-y|^2}{t}} \le \text{sabit } e^{-\varepsilon t^{-1}} \le \text{sabit}\,.t^p \tag{3.42}$$

dir. Burada p herhangi bir reel sabittir. $p=\ell+\gamma-\frac{5}{2}+d$ olmak üzere (3.40), (3.41) ve (3.42) bağıntılarından

$$\left\| Q^\gamma(x)\, K_2(x,y,t)\right\|_1 \le \text{sabit } \left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (|x-y|>1) \tag{3.43}$$

bulunur. (3.39) ve (3.42) den de

$$\left\|K_2(x,y,t)\right\| \le \text{sabit } e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (|x-y|>1) \tag{3.44}$$

elde edilir.

Şimdi de $Q^\gamma(x)\, K_3(x,y,t)$ operatör fonksiyonunu sınırlandıralım. (3.9) formülüne göre

$$\begin{aligned} Q^\gamma(x)\, K_3(x,y,t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^3} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \\ &= \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y|>1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \\ &= B_{31}+B_{32} \end{aligned} \tag{3.45}$$

dir. B_{31} integralini

$$\begin{aligned} B_{31} &= \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \\ &\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi = B_{31}^1 + B_{31}^2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

şeklinde gösterelim. (3.29) ve (3.39) eşitsizliklerinin yardımıyla $\left\|B_{31}^1\right\|_1$ için

$$\begin{aligned} \left\|B_{31}^1\right\|_1 &= \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\| \\ &\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} \left\| Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\right\|_1 . \left\| K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\| \\ &\le \text{sabit } \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} (t-\tau)^{-d}\, \tau^{\frac{5}{2}-2d} \left\| Q^\gamma(\xi)\, e^{-c(t-\tau)\xi}\right\|_1 e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-(c-\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}}\, d\xi \end{aligned}$$

elde edilir.Burada $Q(x)$ in 6) koşulunu sağladığı göz önüne alınıp (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left\| B_{31}^1 \right\|_1 \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_1 t Q(y)} \right\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{3}{2}-d}\, \tau^{4-2d} d\tau \int_{R^3} e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-(c-\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_1 t Q(y)} \right\|_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \int_0^t \tau^{4-2d} (t-\tau)^{\frac{3}{2}-d} d\tau$$

veya

$$\left\| B_{31}^1 \right\|_1 \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_1 t Q(y)} \right\|_1 t^{5-3d}\, e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.47}$$

elde edilir.

(3.30) eşitsizliğinden ve Teorem 3.3.1 den $\left\| B_{31}^2 \right\|_1$ için

$$\left\| B_{31}^2 \right\|_1 = \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\|_1$$

$$\le \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} \left\| Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, Q^{-\gamma}(\xi) \right\| . \left\| Q^\gamma(\xi)\, K_2(\xi,y,\tau) \right\|_1 d\xi$$

$$\le \text{sabit} \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y|\le 1} (t-\tau)^{-d}\, \tau^{\frac{5}{2}-2d} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_1 \tau Q(y)} \right\|_1 e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-(c-\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} d\xi$$

bulunur. Burada tekrar (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left\| B_{31}^2 \right\|_1 \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_2 t Q(y)} \right\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{3}{2}-d}\, \tau^{4-2d} d\tau \int_{R^3} e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-(c-\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_2 t Q(y)} \right\|_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \int_0^t \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{3}{2}} d\tau$$

veya

$$\left\| B_{31}^2 \right\|_1 \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_2 t Q(y)} \right\|_1 t^{5-3d}\, e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.46) ve (3.48) den

$$\left\| B_{31} \right\| \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c_3 t Q(y)} \right\| t^{5-3d}\, e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.49}$$

bulunur. Şimdi de (3.45) bağıntısının sonunda yer alan B_{32} ifadesini sınırlandıralım. (3.30) ve (3.43) den

$$\left\| B_{32} \right\|_1 = \left\| \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y|>1} Q^\gamma(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, K_2(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\|_1$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y|\rangle 1} \left\| Q^{\gamma}(x)\ K(x,\xi,t-\tau)\ Q^{-\gamma}(\xi) \right\| . \left\| Q^{\gamma}(\xi)\ K_2(\xi,y,\tau) \right\|_1 d\xi$$

$$\leq \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{-d}\, d\tau \int_{|\xi-y|\rangle 1} e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-2\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}}\, d\xi$$

bulunur. (3.35) ve (3.36) eşitsizliklerinin yardımıyla buradan

$$\left\| B_{32} \right\|_1 \leq \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\| \int_0^t (t-\tau)^{\frac{3}{2}-d}\, \tau^{\frac{3}{2}}\, d\tau \int_{R^3} e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-2\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\leq \text{sabit}\,.\, t^{-\frac{3}{2}} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 e^{-(c-3\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{3}{2}-d}\, \tau^{\frac{3}{2}}\, d\tau$$

veya

$$\left\| B_{32} \right\|_1 \leq \text{sabit}\,.\, t^{\frac{5}{2}-d} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 e^{-(c-3\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}}$$

elde edilir. (3.45) , (3.49) ve bu son eşitsizlikten

$$\left\| Q^{\gamma}(x) K_3(x,y,t) \right\|_1 \leq \text{sabit} \left[t^{5-3d} \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-c_3 t Q(y)} \right\|_1 + t^{\frac{5}{2}-d} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \right] e^{-(c-3\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.50}$$

bulunur. Burada (3.41) ve (3.42) eşitsizlikleri kullanılırsa, $|x-y|\rangle 1$ olduğunda

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ K_3(x,y,t) \right\|_1 \leq \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \left(t^{5-3d-\ell-\gamma} + t^{\frac{5}{2}-d}\right) e^{-(c-3\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}}$$

veya

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\ K_3(x,y,t) \right\|_1 \leq \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 e^{-(c-4\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (|x-y|\rangle 1) \tag{3.51}$$

elde edilir.

(3.30) , (3.39) ve (3.35) eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\left\| K_3(x,y,t) \right\| = \left\| \int_0^t d\tau \int_{R^3} K(x,\xi,t-\tau)\ K_2(\xi,y,\tau)\ d\xi \right\|$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{R^3} \left\| K(x,\xi,t-\tau) \right\| . \left\| K_2(\xi,y,\tau) \right\| d\xi$$

$$\leq \text{sabit} \int_0^t d\tau \int_{R^3} (t-\tau)^{-d}\, \tau^{\frac{5}{2}-d}\, e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}}\, d\xi$$

$$= \text{sabit} \int_0^t (t-\tau)^{-d+\frac{3}{2}}\, \tau^{4-2d}\, d\tau \int_{R^3} e^{-(c-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-\varepsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\leq \text{sabit}\,.\, t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \int_0^t (t-\tau)^{-d+\frac{3}{2}}\, \tau^{4-2d}\, d\tau$$

elde ederiz. Buradan (3.36) ve (3.42) nin yardımıyla

$$\|K_3(x,y,t)\| \le sabit\,.\,t^{5-3d}\, e^{-(c-2\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.52}$$

$$\|K_3(x,y,t)\| \le sabit\,.\,e^{-(c-3\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (|x-y| \rangle 1)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.50) , (3.51) ve son iki eşitsizlik $\|Q^{\gamma}(x)\,K_4(x,y,t)\|_1$ ve $\|K_4(x,y,t)\|$ fonksiyonlarının sınırlandırılması için kullanılır.

Bundan sonra $Q^{\gamma}(x)\,K_4(x,y,t)$, $Q^{\gamma}(x)\,K_5(x,y,t)$, ... $(\gamma = 0,\nu)$ operatör fonksiyonlarının sınırlandırılmasında (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri, t değişkeninin üzeri $\ell+\nu$ sayısından küçük olmayana kadar kullanılacaktır ve sonuçta bir m_0 doğal sayısı için

$$\|Q^{\gamma}(x)\,K_{m_0}(x,y,t)\|_1 \le sabit\,.\,t^{\ell+\gamma}\, e^{-[c-(2m_0-3)\varepsilon]\frac{|x-y|^2}{t}} \left[\|Q^{\gamma}(y)\, e^{-c_4 t Q(y)}\|_1 + \|Q^{-\ell}(y)\|_1\right]$$

ve

$$\|K_{m_0}(x,y,t)\| \le sabit\,.\,t^{\ell+\gamma}\, e^{-[c-(2m_0-3)\varepsilon]\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.53}$$

olacaktır. Buradan (3.41) in yardımıyla

$$\|Q^{\gamma}(x)\,K_{m_0}(x,y,t)\|_1 \le sabit\,\|Q^{-\ell}(y)\|_1\, e^{-[c-(2m_0-2)\varepsilon]\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.54}$$

bulunur. Burada biz $c \rangle 2(m_0-1)\varepsilon$ olduğunu yani ε sayısının $0 \langle \varepsilon \langle \dfrac{c}{2(m_0-1)}$ eşitsizliğini sağladığını varsayıyoruz.

$Q^{\gamma}(x)\,K_{m_0+1}(x,y,t)$, $Q^{\gamma}(x)\,K_{m_0+2}(x,y,t)$, ...$(\gamma = 0,\nu)$

operatör fonksiyonlarının sınırlandırılmasında (3.32) eşitsizliği kullanılacaktır. Bunu $Q^{\gamma}(x)\,K_{m_0+1}(x,y,t)$ nin sınırlandırılmasında gösterelim. (3.9) formülüne göre

$$\begin{aligned}
\|Q^{\gamma}(x)\,K_{m_0+1}(x,y,t)\|_1 &= \left\|\int_0^t d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\,K(x,\xi,t-\tau)\,K_{m_0}(\xi,y,\tau)\,d\xi\right\| \\
&\le \int_0^t d\tau \int_{R^3} \|Q^{\gamma}(x)K(x,\xi,t-\tau)Q^{\gamma}(\xi)\|.\|Q^{\gamma}(\xi)K_{m_0}(\xi,y,\tau)\|_1\, d\xi \\
&= \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi|\le(t-\tau)^{\aleph}} \|Q^{\gamma}(x)K(x,\xi,t-\tau)Q^{\gamma}(\xi)\|.\|Q^{\gamma}(\xi)K_{m_0}(\xi,y,\tau)\|_1\, d\xi
\end{aligned}$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{|x-\xi|>(t-\tau)^{\aleph}} \left\| Q^{\gamma}(x)K(x,\xi,t-\tau)Q^{\gamma}(\xi)\right\| . \left\| Q^{\gamma}(\xi)K_{m_0}(\xi,y,\tau)\right\|_1 d\xi$$

$$= B_{41} + B_{42} \tag{3.55}$$

olur. Burada $\aleph = \dfrac{2d+1}{12}$ dir. Şimdi B_{41} ve B_{42} integrallerini sınırlandıralım. (3.30), (3.32) ve (3.54) eşitsizliklerini kullanarak

$$B_{41} = \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi|\le(t-\tau)^{\aleph}} \left\| Q^{\gamma}(x)K(x,\xi,t-\tau)Q^{\gamma}(\xi)\right\| . \left\| Q^{\gamma}(\xi)K_{m_0}(\xi,y,\tau)\right\|_1 d\xi$$

$$\le \text{sabit} \int_0^t (t-\tau)^{-d} d\tau \int_{|x-\xi|\le(t-\tau)^{\aleph}} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\le \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{-d} d\tau \int_{|x-\xi|\le(t-\tau)^{\aleph}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} d\xi$$

$$= \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \int_0^t (t-\tau)^{3\aleph-d} d\tau$$

veya

$$B_{41} \le \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 t^{\frac{5-2d}{4}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.56}$$

olur. B_{42} için de tekrar (3.30) , (3.32) ve (3.54) eşitsizliklerini kullanarak

$$B_{42} = \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi|>(t-\tau)^{\aleph}} \left\| Q^{\gamma}(x)\, K(x,\xi,t-\tau)\, Q^{-\gamma}(\xi)\right\| . \left\| Q^{\gamma}(\xi)\, K_{m_0}(\xi,y,\tau)\right\|_1 d\xi$$

$$\le \text{sabit} \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi|\le 1} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\le \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi|\le 1} d\xi$$

$$= \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}\, t \tag{3.57}$$

elde ederiz. (3.55) , (3.56) ve (3.57) den

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, K_{m_0+1}(x,y,t)\right\|_1 \le \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}\, t^{\aleph_1} \qquad \left(\aleph_1 = \frac{5-2d}{4}\right) \tag{3.58}$$

bulunur.

ξ ye göre integrali yine $|x-\xi| \le (t-\tau)^{\aleph}$ ve $|x-\xi| > (t-\tau)^{\aleph}$ olmak üzere iki kısma bölüp, (3.30) ve (3.53) eşitsizliklerini kullanarak yukarıdaki yöntemle

$$\left\| K_{m_0+1}(x,y,t) \right\| \leq \text{sabit}\, . e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}\, t^{\aleph_1} \tag{3.59}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. Benzer şekilde

$Q^{\gamma}(x)\, K_{m_0+2}(x,y,t)$, $Q^{\gamma}(x)\, K_{m_0+3}(x,y,t)$, ... $(\gamma = 0 , \nu)$

fonksiyonları sınırlandırılırsa

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, K_{m_0+n}(x,y,t) \right\|_1 \leq a_n\, t^{\aleph_n} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.60}$$

$$\left\| K_{m_0+n}(x,y,t) \right\| \leq a_n\, t^{\aleph_n}\, e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.61}$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada a_n ,

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

olacak şekilde bir pozitif sayı dizisi ve $\aleph_n$ de

$$\lim_{n\to\infty} \aleph_n = \infty$$

dir. (3.60) dan görüldüğü gibi

$$Q^{\gamma}(x)\, \varphi(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q^{\gamma}(x)\, K_m(x,y,t)$$

operatör fonksiyon serisi $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre yakınsaktır.

(3.29) , Teorem 3.3.1 , (3.50) , (3.54) , (3.58) ve (3.60) dan

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, \varphi(x,y,t) \right\|_1 \leq \text{sabit}\;\; e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \left[t^{-d} \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-ctQ(y)} \right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \right] \tag{3.62}$$

bulunur. (3.30), (3.39), (3.52), (3.53), (3.59) ve (3.61) eşitsizliklerinden de

$$\left\| \varphi(x,y,t) \right\| \leq \text{sabit}\;\; e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}\, t^{-d} \tag{3.63}$$

elde edilir. (3.41) , (3.42) den ve bu son iki eşitsizlikten yararlanarak

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, \varphi(x,y,t) \right\|_1 \leq \text{sabit} \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 e^{-c_1\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (|x-y| > 1) \tag{3.64}$$

$$\left\| \varphi(x,y,t) \right\| \leq \text{sabit}\;\; e^{-c_1\frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (|x-y| > 1) \tag{3.65}$$

bulunur.

Böylece biz bu kısımda aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.3.2 Eğer 1) – 4) ve 6) koşulları sağlanır ve her bir $x \in R^3$ için $Q^{-\ell}(x) \in \sigma_1(H)$ $(\ell > 0)$ ise o zaman her bir $x, y \in R^3$ ve $t \in (0,1)$ için $Q^{\gamma}(x)\,\varphi(x,y,t) \in \sigma_1(H)$ olur ve (3.62) , (3.63) eşitsizlikleri sağlanır.

3.4 Ağırlıklı İzin Asimtotik Davranışı

Bu kısımda $N_v(\lambda)$ fonksiyonu için $\lambda \to \infty$ iken asimtotik formül bulunacaktır.

Teorem 3.4.1 Eğer 1) – 4) ve 6) koşulları sağlanır ve her bir $x \in R^3$ için $Q^{-\ell}(x) \in \sigma_1(H)$ ise

$$Q^{\gamma}(x)\,G(x,y,t) = G_1(x-y,y,t)\,Q^{\gamma}(x)\,e^{-tQ(y)} + t^{1-d}\,e^{-c_1\frac{|x-y|^2}{t}}$$
$$*\left[\left\|Q^{\gamma}(x)\,e^{-ctQ(x)}\right\|_1 + \left\|Q^{\gamma}(y)\,e^{-ctQ(y)}\right\|_1 + \left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1\right] O(1)$$

dir. Burada $O(1)$, x , y ve t $(t \in (0,1))$ değişkenlerine bağlı $\sigma_1(H)$ uzayındaki normu sınırlı olan bir operatör fonksiyondur.

İspat. (3.2) formülünden

$$\left\|Q^{\gamma}(x)\,G(x,y,t) - Q^{\gamma}(x)\,G_1(x-y,y,t)\,e^{-tQ(y)}\right\|_1$$
$$= \left\|\int_0^t d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\,G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\,\varphi(\xi,y,\tau)\,d\xi\right\|_1$$
$$\le \left\|\int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\,G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\,\varphi(\xi,y,\tau)\,d\xi\right\|_1$$
$$+ \left\|\int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\,G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\,\varphi(\xi,y,\tau)\,d\xi\right\|_1$$
$$= D_1 + D_2 \tag{3.66}$$

bulunur. Önce D_1 i sınırlandıralım.

$$D_1 = \left\|\int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{R^3} Q^{\gamma}(x)\,G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\,\varphi(\xi,y,\tau)\,d\xi\right\|_1$$
$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{R^3} \left\|Q^{\gamma}(x)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\right\|_1 . \left\|G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\,\varphi(\xi,y,\tau)\right\| d\xi$$
$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{R^3} \left\|Q^{\gamma}(x)\,Q^{-\gamma}(\xi)\,Q^{\gamma}(\xi)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\right\|_1 . \left\|G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\right\| . \left\|\varphi(\xi,y,\tau)\right\| d\xi$$
$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|x-\xi|\le 1} \left\|Q^{\gamma}(x)\,Q^{-\gamma}(\xi)\right\| \left\|Q^{\gamma}(\xi)\,e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\right\|_1 . \left\|G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\right\| \left\|\varphi(\xi,y,\tau\right\| d\xi$$

dir. Q(x) 'in 6) koşulunu sağladığı ve (3.3), (3.4) formülleri göz önüne alınırsa

$$D_1 \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(x)\, e^{-ctQ(x)} \right\|_1 \int_0^t d\tau \int_{R^3} \| G_0(x-\xi,\xi,t-\tau) \| . \| \varphi(\xi,y,\tau) \|\, d\xi$$

olur. (3.10), (3.35) ve (3.63) eşitsizliklerinin yardımıyla buradan

$$D_1 \le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(x)\, e^{-ctQ(x)} \right\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{-d}\, d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}}\, d\xi$$

$$= \text{sabit} \left\| Q^\gamma(x)\, e^{-ctQ(x)} \right\|_1 \int_0^t \tau^{\frac{3}{2}-d}\, d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}}\, d\xi$$

$$\le \text{sabit} \left\| Q^\gamma(x)\, e^{-ctQ(x)} \right\|_1 e^{-c_1\frac{|x-y|^2}{t}}\, t^{-\frac{3}{2}} \int_0^t \tau^{\frac{3}{2}-d}\, d\tau$$

$$= \text{sabit} \left\| Q^\gamma(x)\, e^{-ctQ(x)} \right\|_1 e^{-c_1\frac{|x-y|^2}{t}}\, t^{1-d} \tag{3.67}$$

bulunur. Şimdi de D_2 yi sınırlandıralım. Yine Q(x) in 6) koşulunu sağladığı göz önüne alınıp, (3.3) ve (3.4) formülleri kullanılırsa

$$D_2 = \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} Q^\gamma(x)\, G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\, e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\, \varphi(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\|_1$$

$$= \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} Q^\gamma(x)\, Q^{-\gamma}(\xi)\, G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\, e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\, Q^\gamma(\xi)\, \varphi(\xi,y,\tau)\, d\xi \right\|$$

$$\le \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} \left\| Q^\gamma(x)\, Q^{-\gamma}(\xi)\, G_1(x-\xi,\xi,t-\tau)\, e^{-(t-\tau)Q(\xi)} \right\| . \left\| Q^\gamma(\xi)\, \varphi(\xi,y,\tau) \right\|_1 d\xi$$

$$\le \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} \left\| Q^\gamma(x)\, Q^{-\gamma}(\xi) \right\| . \left\| G_1(x-\xi,\xi,t-\tau) \right\| . \left\| e^{-(t-\tau)Q(\xi)} \right\| . \left\| Q^\gamma(\xi)\, \varphi(\xi,y,\tau) \right\|_1 d\xi$$

$$\le \text{sabit} \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} \left\| G_0(x-\xi,\xi,t-\tau) \right\| . \left\| Q^\gamma(\xi)\, \varphi(\xi,y,\tau) \right\|_1 d\xi$$

olur. (3.10), (3.35) ve (3.62) eşitsizliklerinin yardımıyla buradan

$$D_2 \le \text{sabit} \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{R^3} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \left[\tau^{-d} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-c\tau Q(y)} \right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \right] e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}}\, d\xi$$

$$\le \text{sabit} \left[t^{-d} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-ctQ(y)} \right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \right] \int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{\frac{3}{2}}\, d\tau \int_{R^3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-y|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}}\, d\xi$$

$$\le \text{sabit}.t \left[t^{-d} \left\| Q^\gamma(y)\, e^{-ctQ(y)} \right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_1 \right] e^{-c_1\frac{|x-y|^2}{t}}$$

$$\leq \text{sabit}\,.\,t^{1-d}\left[\left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-ctQ(y)}\right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1\right] e^{-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}} \qquad (3.68)$$

elde edilir. (3.66), (3.67) ve (3.68) den

$$\left\| Q^{\gamma}(x)\, G(x,y,t) - Q^{\gamma}(x)\, G_1(x-y,y,t)\, e^{-tQ(y)}\right\|_1$$

$$\leq \text{sabit}\left[t^{1-d}\left\| Q^{\gamma}(x)\, e^{-ctQ(x)}\right\|_1 + t^{1-d}\left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-ctQ(y)}\right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1\right] e^{-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}}$$

veya

$$Q^{\gamma}(x)\, G(x,y,t) = G_1(x-y,y,t)\, Q^{\gamma}(x)\, e^{-tQ(y)} + t^{1-d}\, e^{-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}}$$
$$* \left[\left\| Q^{\gamma}(x)\, e^{-ctQ(x)}\right\|_1 + \left\| Q^{\gamma}(y)\, e^{-ctQ(y)}\right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(y)\right\|_1\right] O(1)$$

$(d = \max\{b+1, 2\})$ bulunur.

Teorem 3.4.2 1) – 4), i=1 için 5), 6), 7) koşulları sağlandığı takdirde her bir $t \in (0,1)$ için $\int_{R^3} tr\left[Q^{\gamma}(x)\, G(x,x,t)\right] dx$ integrali sonludur ve $t \to +0$ da

$$\int_{R^3} tr\left[Q^{\gamma}(x)\, G(x,x,t)\right] dx \sim \frac{1}{(2\pi\sqrt{t}\,)^3}\int_{R^3} \Phi(x)\, tr\left[Q^{\gamma}(x)\, e^{-tQ(x)}\right] dx$$

dir.

İspat. $G_0(x-y,y,t)$ operatör fonksiyonu

$$G_0(x-y,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^3} e^{-t\sum\limits_{j,k=1}^{3} a_{jk}(y)\, s_j s_k + i(s,x-y)}\, ds$$

şeklindedir. Burada $s_j = t^{-\frac{1}{2}}\xi_i$ alırsak

$$G_0(x-y,y,t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t}\,)^3}\int_{R^3} e^{-\sum\limits_{j,k=1}^{3} a_{jk}(y)\,\xi_j\xi_k + i\, t^{\frac{1}{2}}(\xi,x-y)}\, d\xi$$

olur. Buradan da

$$G_0(0,x,t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3}\int_{R^3} e^{-\sum\limits_{j,k=1}^{3} a_{jk}(x)\,\xi_j\xi_k}\, d\xi = \frac{\Phi(x)}{(2\pi\sqrt{t})^3}\, I$$

veya

$$G_0(0,x,t) = \frac{\Phi(x)\, I}{(2\pi\sqrt{t})^3}$$

bulunur. Teorem 3.4.1 ve bu son eşitlikten

$$\operatorname{tr} Q^{\gamma}(x) G(x,x,t) = \frac{\Phi(x)}{(2\pi\sqrt{t})^3} \operatorname{tr}\left[Q^{\gamma}(x) e^{-tQ(x)}\right] + O(1)\, t^{1-d}\left[\left\| Q^{\gamma}(x) e^{-ctQ(x)}\right\|_1 + \left\| Q^{-\ell}(x)\right\|_1\right]$$

elde edilir. Burada $i=1$ için 5) ve 7) koşulları göz önüne alınırsa

$$\int_{R^3} \operatorname{tr}\left[Q^{\gamma}(x)\ G(x,x,t)\right] dx = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3} \int_{R^3} \Phi(x)\ \operatorname{tr}\ Q^{\gamma}(x)\ e^{-tQ(x)}\ dx\ +$$

$$+ O(1)\ t^{1-d} \int_{R^3} \operatorname{tr}\left[Q^{\gamma}(x)\ e^{-tQ(x)}\right] dx + O(1)\ t^{1-d} \qquad (\gamma = 0, \nu) \tag{3.69}$$

olur. Öte yandan $\sum_{j,k=1}^{3} a_{jk}(x)\ \xi_j\ \xi_k$ ifadesi 2) koşulunu sağladığından

$$M_1 \le \Phi(x) \le M_2 \tag{3.70}$$

olacak şekilde iki M_1 ve M_2 pozitif sayıları vardır. $d = \max\{b+1, 2\} \langle \frac{5}{2}$ olduğunu göz önüne alıp (3.69) ve (3.70) den $t \to +0$ da

$$\int_{R^3} \operatorname{tr}\left[Q^{\gamma}(x)\ G(x,x,t)\right] dx \sim \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3} \int_{R^3} \Phi(x)\ \operatorname{tr}\left[Q^{\gamma}(x)\ e^{-tQ(x)}\right] dx$$

buluruz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$G(x,y,t)$ operatör fonksiyonu, pozitif ve sınırlı e^{-tL} $(t \in (0,1))$ operatörünün çekirdeğidir.

$$e^{-tL}\ \Psi(x) = \int_{R^3} G(x,y,t)\ \Psi(y)\ dy \qquad \Psi(x) \in H_1$$

Öte yandan Teorem 3.4.2 ye göre

$$\int_{R^3} \operatorname{tr}\ G(x,x,t)\ dx$$

integrali sonludur. Bu durumda e^{-tL} operatörünün bir çekirdek operatörü olduğu bellidir (Kirillov, A. A., 1976) . e^{-tL} ve L operatörlerinin spektrumları için

$$\sigma\left\{e^{-tL}\right\} = e^{-t\sigma(L)}$$

dir. Her t için e^{-tL} nin tam sürekli operatör olmasından ve bu son formülden L nin saf ayrık spektruma sahip olduğu sonucu çıkar.

Teorem 3.4.3 1) – 4) , i=2 için 5) , 6) , 7) koşulları sağlandığı takdirde $Q^{\nu}(x)\ e^{-tL}$ her bir $t \rangle 0$ için çekirdek operatörüdür.

İspat. f , H_1 uzayının normu bire eşit olan herhangi bir elemanı olsun. Cauchy – Schwartz eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdakiler yazılabilir.

$$\left\| Q^{v}(x)\, e^{-tL} f \right\|^{2} = \left\| \int_{R^3} Q^{v}(x)\, G(x,y,t)\, f(y)\, dy \right\|^{2}$$

$$\leq \left\{ \int_{R^3} \left\| Q^{v}(x)\, G(x,y,t) \right\| . \left\| f(y) \right\| dy \right\}^{2}$$

$$\leq \int_{R^3} \left\| Q^{v}(x)\, G(x,y,t) \right\|^{2} dy \int_{R^3} \left\| f(y) \right\|^{2} dy$$

$$= \int_{R^3} \left\| Q^{v}(x)\, G(x,y,t) \right\|^{2} dy \tag{3.71}$$

Teorem 3.4.1 yardımıyla

$$\left\| Q^{v}(x)\, G(x,y,t) \right\| \leq \left\| Q^{v}(x)\, G(x,y,t) \right\|_{1}$$

$$\leq \left\| G_1(x-y,y,t)\, Q^{v}(x)\, e^{-tQ(y)} \right\|_{1} + \text{sabit}\,.\,t^{1-d}\, g(x,y,t)\, e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.72}$$

elde edilir. Burada

$$g(x,y,t) = \left\| Q^{v}(x)\, e^{-ctQ(x)} \right\|_{1} + \left\| Q^{v}(y)\, e^{-ctQ(y)} \right\|_{1} + \left\| Q^{-\ell}(y) \right\|_{1}$$

dir. $|x-y| \leq 1$ için

$$\left\| Q^{v}(x)\, Q^{-v}(y) \right\| \leq A_1$$

olduğu ve (3.3) , (3.4) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\left\| G_1(x-y,y,t)\, Q^{v}(x)\, e^{-tQ(y)} \right\| \leq \left\| G_1(x-y,y,t) \right\| . \left\| Q^{v}(x)\, Q^{-v}(y)\, Q^{v}(y)\, e^{-tQ(y)} \right\|_{1}$$

$$\leq \left\| G_1(x-y,y,t) \right\| . \left\| Q^{v}(x)\, Q^{-v}(y) \right\| . \left\| Q^{v}(y)\, e^{-tQ(y)} \right\|_{1}$$

$$\leq \text{sabit}\, \left\| G_0(x-y,y,t) \right\| . \left\| Q^{v}(y)\, e^{-tQ(y)} \right\|_{1}$$

olur. (3.10) eşitsizliğinin yardımıyla buradan

$$\left\| G_1(x-y,y,t)\, Q^{v}(x)\, e^{-tQ(y)} \right\| \leq \text{sabit}\,.\,t^{-\frac{3}{2}} \left\| Q^{v}(y)\, e^{-tQ(y)} \right\|_{1} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}$$

bulunur. (3.72) ve bu son eşitsizlikten

$$\left\| Q^{v}(x)\, G(x,y,t) \right\| \leq \text{sabit}\,.\,t^{-\frac{3}{2}}\, g(x,y,t)\, e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{3.73}$$

elde edilir. (3.71) ve (3.73) den

$$\left\| Q^{v}(x)\, e^{-tL} f \right\|^{2} \leq \text{sabit}\,.\,t^{-3} \int_{R^3} g^{2}(x,y,t)\, e^{-2c\frac{|x-y|^2}{t}}\, dy$$

$$\left\| Q^{v}(x)\, e^{-tL} f \right\|_{H_1}^{2} = \int_{R^3} \left\| Q^{v}(x)\, e^{-tL} f \right\|^{2} dx$$

$$\le \text{sabit}.t^{-3}\int_{R^3}\left[\int_{R^3} g^2(x,y,t)\, e^{-2c\frac{|x-y|^2}{t}}\,dy\right]dx$$

$$\le \text{sabit}.t^{-3}\int_{R^3}\left\{\int_{R^3}\left[\left\|Q^v(x)e^{-ctQ(x)}\right\|_1^2+\left\|Q^v(y)e^{-ctQ(y)}\right\|_1^2+\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1^2\right]e^{-2c\frac{|x-y|^2}{t}}\,dy\right\}dx$$

$$\le \text{sabit}.t^{-3}\int_{R^3}\left\{\int_{R^3}\left[\left\|Q^v(y)\,e^{-ctQ(y)}\right\|_1^2+\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1^2\right]e^{-2c\frac{|x-y|^2}{t}}\,dy\right\}dx$$

$$= \text{sabit}.t^{-3}\int_{R^3}\left[\int_{R^3} e^{-2c\frac{|x-y|^2}{t}}\,dx\right].\left[\left\|Q^v(y)\,e^{-ctQ(y)}\right\|_1^2+\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1^2\right]dy$$

bulunur. Burada

$$\int_{R^3} e^{-2c\frac{|x-y|^2}{t}}\,dx \le \text{sabit} \qquad (t\in(0,1))$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left\|Q^v(x)\,e^{-tL}\,f\right\|_{H_1}^2 \le \text{sabit}.t^{-3}\int_{R^3}\left[\left\|Q^v(y)\,e^{-ctQ(y)}\right\|_1^2+\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1^2\right]dy$$

olur. (3.41) in yardımıyla buradan

$$\left\|Q^v(x)\,e^{-tL}\,f\right\|_{H_1}^2 \le \text{sabit}.t^{-\ell-v-3}\int_{R^3}\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1^2 dx$$

elde edilir. Diğer yandan $Q(x)$ operatör fonksiyonu 3) ve 5) koşullarını sağladığından

$$\int_{R^3}\left\|Q^{-\ell}(y)\right\|_1^2 dx < +\infty$$

olur. Bu nedenle

$$\left\|Q^v(x)\,e^{-tL}\,f\right\|_{H_1}^2 \le \text{sabit}.t^{-\ell-v-3}$$

$$\sup_{\|f\|_{H_1}=1}\left\|Q^v(x)\,e^{-tL}\,f\right\|_{H_1} \le C_t \qquad (C_t > 0)$$

veya

$$\left\|Q^v(x)\,e^{-tL}\right\|_{H_1} \le C_t$$

olur. Böylece biz her bir $t > 0$ için $Q^v(x)\,e^{-tL}$ operatörünün, bütün H_1 de tanımlı sınırlı bir operatör olduğunu göstermiş oluruz. Yukarıda her bir $t > 0$ için e^{-tL} nin çekirdek operatörü olduğunu göstermiştik. Bu durumda

$$Q^{v}(x)\, e^{-tL} = Q^{v}(x)\, e^{-\frac{t}{2}L}\, e^{-\frac{t}{2}L}$$

operatörünün de çekirdek operatörü olduğu bilinmektedir (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G.,1969). Yukarıda ispatladığımız teoremden

$$\operatorname{tr}\left[Q^{v}(x)\, e^{-tL}\right] = \int_{R^3} \operatorname{tr} Q^{v}(x)\, G(x,x,t)\, dx \qquad (3.74)$$

formülü elde edilir (Kirillov, A. A.,1976).

Kendine eş L operatörünün özdeğerlerini $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots\dots \le \lambda_n \le \dots\dots$, bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal öz fonksiyonlarını da $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots\dots, \Psi_n(x)$ ile göstermiştik. Bu durumda e^{-tL} operatörünün özdeğerleri $\left\{e^{-t\lambda_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonları da yine $\{\Psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ olacaktır.

e^{-tL} tam sürekli kendine eş operatör olduğundan $\{\Psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonları H_1 de bir ortonormal bazdır. Diğer yandan Teorem 3.4.3 e göre $Q^{v} e^{-tL}$, H_1 uzayında bir çekirdek operatörüdür. Bu takdirde

$$\operatorname{tr} Q^{v} e^{-tL} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Q^{v} e^{-tL}\Psi_n\, ,\, \Psi_n\right)_{H_1}$$

dir (Cohberg , İ.C. and Krein , M.G. ,1969). Buradan

$$\operatorname{tr} Q^{v} e^{-tL} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n}\left(Q^{v}\Psi_n, \Psi_n\right)_{H_1}$$

bulunur. $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_n, \dots\dots$ sayılarının pozitif oldukları göz önüne alınırsa bu son formülden

$$\operatorname{tr} Q^{v} e^{-tL} = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda}\, dN_v(\lambda) \qquad (3.75)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.4 $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1,2,3)$ fonksiyonları 1) , 2) koşullarını , Q(x) de 3) – 8) koşullarını sağlıyor ise L operatörünün $N_v(\lambda)$ ağırlıklı izi için $\lambda \to \infty$ iken

$$N_v(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^3\Gamma(\frac{5}{2})} \sum_i \int_{\alpha_i(x)<\lambda} \Phi(x)\, \alpha_i^{v}(x)\, [\lambda - \alpha_i(x)]^{\frac{3}{2}}\, dx$$

dir.

İspat. Teorem 3.4.2 , (3.74) ve (3.75) den $t \to \infty$ iken

$$\int_0^{\infty} e^{-t\lambda}\, dN_v(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3} \int_{R^3} \Phi(x)\, \operatorname{tr}\left[Q^{v}(x)\, e^{-tQ(x)}\right] dx \qquad (3.76)$$

elde edilir. Bu bağıntının sağ tarafındaki ifade

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3}\int_{R^3}\Phi(x)\,\mathrm{tr}\left[Q^{v}(x)\,e^{-tQ(x)}\right]dx = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3}\int_{R^3}\Phi(x)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{v}(x)\,e^{-t\alpha_i(x)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{R^3}\Phi(x)\,\alpha_i^{v}(x)\,e^{-t\alpha_i(x)}\,dx \qquad (3.77)$$

şeklinde yazılabilir. Bilindiği gibi

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3}\int_{R^3}\Phi(x)\,\alpha_i^{v}(x)\,e^{-t\alpha_i(x)}\,dx = \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\,d\rho_i(\lambda)$$

eşitliği sağlanır (Kostyuchenko, A .G .,1968). Burada

$$\rho_i(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3\,\Gamma(\frac{5}{2})}\int_{\alpha_i(x)\langle\lambda}\Phi(x)\,\alpha_i^{v}(x)\,[\lambda-\alpha_i(x)]^{\frac{3}{2}}\,dx$$

dir. (3.77) den ve bu son formüllerden

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^3}\int_{R^3}\Phi(x)\,\mathrm{tr}\left[Q^{v}(x)\,e^{-tQ(x)}\right]dx = \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\,d\rho(\lambda) \qquad (3.78)$$

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3\,\Gamma(\frac{5}{2})}\sum_i\int_{\alpha_i(x)\langle\lambda}\Phi(x)\,\alpha_i^{v}(x)\,[\lambda-\alpha_i(x)]^{\frac{3}{2}}\,dx$$

bulunur. (3.76) ve (3.78) den $t\to+0$ iken

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\,dN_v(\lambda) \sim \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\,d\rho(\lambda) \qquad (3.79)$$

elde edilir. Varsayım gereği

$\lambda\,\rho'(\lambda) \leq a_0\,\rho(\lambda)$

olduğundan (3.79) dan Korenblyum teoremine göre (Korenblyum, B . I .,1953)

$\lambda\to+\infty$ iken $N_v(\lambda) \sim \rho(\lambda)$

veya

$$N_v(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^3\,\Gamma(\frac{5}{2})}\sum_i\int_{\alpha_i(x)\langle\lambda}\Phi(x)\,\alpha_i^{v}(x)\,[\lambda-\alpha_i(x)]^{\frac{3}{2}}\,dx$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.5 Örnek

Burada 1) – 8) koşullarını sağlayan $a_{ij}(x)$ (i , j = 1,2,3) skaler fonksiyonlarına ve $Q(x)$ operatör fonksiyonuna bir örnek vereceğiz.

$a_{11} = 3$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{13} = a_{31} = 0$

$a_{22} = 5$, $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{33} = 2$

olsun. Bu fonksiyonların 1) koşulunu sağladığı açıktır. 2) koşulunu $\alpha = 1$ ve $\beta = 6$ için sağladığı kolayca gösterilebilir.

$H = L_2[0,\pi]$ ve $Q(x)$

$$Q(x)\,\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(2+|x|^{\frac{4}{3}}\right)\sin(n\,t)\int_0^{\pi}\varphi(s)\,\sin(n\,s)\,ds$$

şeklinde tanımlı bir operatör fonksiyon olsun. Bu $Q(x)$ operatör fonksiyonunun 3) - 8) koşullarını sağladığı gösterilebilir.

4. SONLU ARALIKTA VERİLMİŞ SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN DÜZENLİ İZİNİN İNCELENMESİ

4.1 Problemin Spektrumu Hakkında

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında sırasıyla

$\ell_0(y) = -y''(x)$

$\ell(y) = -y''(x) + Q(x)y(x)$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$y'(0) = y'(\pi) = 0$

sınır koşulları ile oluşturulan L_0 ve L operatörlerini göz önüne alalım. $\ell(y)$ nin ifadesindeki $Q(x)$ operatör fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

1^0) $Q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahiptir ve her $x \in [0,\pi]$ için $Q^{(i)}(x)$ $(i = 0,1,2)$ H den H ye kendine eş çekirdek operatörlerdir.

2^0) $\|Q\|_{H_1} < \frac{1}{2}$ dir.

3^0) H uzayının $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty$ olacak şekilde bir $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazı vardır.

4^0) $\|Q^i(x)\|_1$ $(i = 0,1,2)$ fonksiyonları , $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonlardır.

L_0 operatörünün spektrumu $\{m^2\}_{m=0}^{\infty}$ kümesidir. Bu kümenin her noktası L_0 operatörünün sonsuz katlılığı olan özdeğeridir. m^2 özdeğerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar

$$\Psi_{mn}^0(x) = d_m \cos mx \,.\, \varphi_n \qquad (n = 1,2,.....) \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada

$$d_m = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & m = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & m = 1,2,..... \end{cases} \tag{4.2}$$

dir.

R_λ^0 ve R_λ sırasıyla L_0 ve L operatörlerinin rezolventleri olsun.

Lemma 4.1.1 Q(x) 3. koşulunu sağlıyor ve $\lambda \notin \{m^2\}_{m=0}^{\infty} = \sigma(L_0)$ ise $QR_\lambda^0 : H_1 \to H_1$ çekirdek operatörüdür, yani $QR_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$ dir.

İspat. L_0 operatörünün (4.1) özfonksiyonlar sistemi H_1 uzayının bir ortonormal bazıdır. Bu takdirde (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) dan bilindiği gibi QR_λ^0 ın çekirdek operatörü olduğunu göstermek için $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\right\|_{H_1}$ serisinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir. (4.1) ve (4.2) den

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\right\|_{H_1} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left\|Q\Psi_{mn}^0\right\|_{H_1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left[\int_0^{\pi}(Q(x)d_m\cos mx.\varphi_n, Q(x)d_m\cos mx.\varphi_n)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left[\int_0^{\pi}d_m^2\cos^2 mx\left\|Q(x)\varphi_n\right\|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left[\int_0^{\pi}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}.\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1} \tag{4.3}$$

elde edilir. Varsayım gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1} \langle \infty$$

olduğu dikkate alınırsa (4.3) den

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\right\|_{H_1} \langle \infty$$

bulunarak Lemma ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.1 Q(x) operatör fonksiyonu 2. ve 3. koşulları sağlıyor ise L operatörünün spektrumu, ikişerli ayrık

$$F_m = \left[m^2 - \|Q\|_{H_1},\ m^2 + \|Q\|_{H_1}\right] \qquad (m = 0,1,2,....)$$

aralıklarının birleşiminin bir alt kümesidir ve

1) L operatörünün spektrumunun F_m aralığına ait m^2 den farklı her bir noktası, katlılığı sonlu olan ayrık bir özdeğerdir.

2) m^2 , L operatörünün katlılığı sonlu veya sonsuz olan bir özdeğeri olabilir.

3) $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, L operatörünün F_m aralığına ait olan özdeğerleri olmak üzere

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{mn} = m^2$ dir.

İspat. $\lambda \in R^1 \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\left[m^2 - \|Q\|_{H_1}, m^2 + \|Q\|_{H_1}\right]$ ise

$$\left|\lambda - m^2\right| > \|Q\|_{H_1} \quad (m = 0,1,2, ...) \tag{4.4}$$

olur. Kendine eş $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1}$ operatörü için

$$\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} = \max_m \left|\lambda - m^2\right|^{-1}$$

olduğundan (4.4) den

$$\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} < \|Q\|_{H_1}^{-1}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left\|QR_\lambda^0\right\|_{H_1} \le \|Q\|_{H_1} \cdot \left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} < 1$$

dir. Bu eşitsizlikten $L(H_1, H_1)$ den $L(H_1, H_1)$ e

$$A(B) = R_\lambda^0 - BQR_\lambda^0 \quad , \qquad B \in L(H_1, H_1)$$

operatörünün büzülme operatörü olduğu sonucu çıkar. Bu durumda

$$R_\lambda^0 - BQR_\lambda^0 = B$$

denkleminin $L(H_1, H_1)$ uzayına ait olan bir tek $B = B_0$ çözümünün olduğu bilinmektedir. Ayrıca $R_\lambda^0 - R_\lambda QR_\lambda^0 = R_\lambda$ olduğundan $R_\lambda = B_0 \in L(H_1, H_1)$ ve bu nedenle $\lambda \in \rho(L)$ dir. Böylece L operatörünün spektrumu ikişerli ayrık $\left[m^2 - \|Q\|_{H_1}, m^2 + \|Q\|_{H_1}\right]$ $(m = 0,1,2,......)$ aralıklarının birleşiminin bir alt kümesidir, yani $\sigma(L) \subset \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\left[m^2 - \|Q\|_{H_1}, m^2 + \|Q\|_{H_1}\right]$ dir.

Lemma 4.1.1 den ve $R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda QR_\lambda^0$ formülünden her $\lambda \in \rho(L_0) \cap \rho(L)$ için $R_\lambda - R_\lambda^0$ farkının H_1 den H_1 e bir çekirdek operatörü olduğu sonucu çıkar. Bu takdirde (Kato, T., 1980) den bilindiği gibi L_0 ve L operatörlerinin spektrumlarının sürekli kısımları çakışırlar. Buna göre ve L_0 operatörünün spektrumu sürekli olduğundan L operatörünün spektrumunun sürekli kısmı $\{m^2\}_{m=0}^{\infty}$ kümesi olacaktır ki bu da teoremin hükmünde belirtilen 1) , 2) , 3) koşullarının sağlandığını gösterir.

4.1 Düzenli İz İçin Formül

Bu kısımda

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-m^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{tr}Q(x)\,dx\right]$$

serisinin toplamı için formül bulacağız. Bu serinin toplamına L operatörünün düzenli izi diyeceğiz.

Lemma 4.2.1 $Q(x)$ 2. ve 3. koşullarını sağlıyorsa $R_\lambda - R_\lambda^0$ operatör fonksiyonu $\rho(L)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitiktir.

İspat. $R_\lambda - R_\lambda^0 = -R_\lambda Q R_\lambda^0$ olduğundan Lemmayı ispatlamak için $R_\lambda Q R_\lambda^0$ operatör fonksiyonunun $\rho(L)$ bölgesinde analitik olduğunu göstermek gerekir. Önce Teorem 4.1.1 den $\rho(L)\subset\rho(L_0)$ sonucunun çıktığını belirtelim. Ayrıca $R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$ formülünden yararlanarak

$$D(\lambda,\Delta\lambda)=\frac{R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda QR_\lambda^0}{\Delta\lambda}-R_\lambda^2QR_\lambda^0-R_\lambda Q\left(R_\lambda^0\right)^2$$

$$=\frac{1}{\Delta\lambda}\left[\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_\lambda^0\right)+\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_\lambda^0-R_\lambda QR_\lambda^0\right)\right]-R_\lambda^2QR_\lambda^0-R_\lambda Q(R_\lambda^0)^2$$

$$=\frac{1}{\Delta\lambda}R_{\lambda+\Delta\lambda}Q\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right)+\frac{1}{\Delta\lambda}\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda\right)QR_\lambda^0-R_\lambda^2QR_\lambda^0-R_\lambda Q\left(R_\lambda^0\right)^2$$

$$=R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_\lambda^0R_{\lambda+\Delta\lambda}^0+R_{\lambda+\Delta\lambda}R_\lambda QR_\lambda^0-R_\lambda^2QR_\lambda^0-R_\lambda Q\left(R_\lambda^0\right)^2$$

$$=\left[R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_\lambda^0R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_{\lambda+\Delta\lambda}Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right]+\left[R_{\lambda+\Delta\lambda}Q\left(R_\lambda^0\right)^2-R_\lambda Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right]$$
$$+\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}R_\lambda QR_\lambda^0-R_\lambda^2QR_\lambda^0\right)$$

$$=R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_\lambda^0\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right)+\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda\right)Q\left(R_\lambda^0\right)^2+\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda\right)R_\lambda QR_\lambda^0 \tag{4.5}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left\|D(\lambda,\Delta\lambda)\right\|_{\sigma_1(H_1)} &\le \left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right\|_{H_1}\\ &\quad+\left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda\right\|_{H_1}\left[\left\|Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right\|_{\sigma_1(H_1)}+\left\|R_\lambda QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\right]\\ &\le \left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}\right\|_{H_1}\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right\|_{H_1}\\ &\quad+\left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda\right\|_{H_1}\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left[\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1}+\left\|R_\lambda\right\|_{H_1}\right]\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. $\lim\limits_{\Delta\lambda\to0}\left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}-R_\lambda\right\|_{H_1}=\lim\limits_{\Delta\lambda\to0}\left\|R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right\|_{H_1}=0$ olduğundan (4.5) ve (4.6) dan

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\| \frac{R_{\lambda+\Delta\lambda} Q R^0_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda Q R^0_\lambda}{\Delta\lambda} - R^2_\lambda Q R^0_\lambda - R_\lambda Q \left(R^0_\lambda\right)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} = 0$$

bulunur ki bu da $R_\lambda - R^0_\lambda = -R_\lambda Q R^0_\lambda$ operatör fonksiyonunun $\rho(L)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitik olması demektir. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

$\{\Psi_{mn}(x)\}^\infty_{m=0,n=1}$ fonksiyonları, L operatörünün sırasıyla $\{\lambda_{mn}\}^\infty_{m=0,n=1}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları ve

$$\Gamma_p = \left\{ \lambda : \left|\lambda - p^2\right| = \frac{1}{2} \right\} \qquad B^0_{mn} = \left(\,.\,, \Psi^0_{mn}\right)_{H_1} \Psi^0_{mn} \qquad B_{mn} = \left(\,.\,, \Psi_{mn}\right)_{H_1} \Psi_{mn}$$

$$L^{(r)}_{0m} = \sum_{n=1}^{\infty} m^{2r} B^0_{mn} \qquad L^{(r)}_{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^r_{mn} B_{mn} \qquad (r = -1, 1)$$

olsun. L_0 ve L operatörlerinin spektrumları sadece özdeğerler ve onların yığılma noktalarından ibarettir. Bu durumda (Lysternik, L. A., and Sobolev, V. I. 1955) den

$$R^0_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^0_{mn}}{m^2 - \lambda} \qquad R_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn} - \lambda} \tag{4.7}$$

olduğu bilinmektedir.

Teorem 4.2.1 Q(x) 2. ve 3. koşullarını sağlıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{pn} - p^2\right)$ (p = 0,1, ...) serileri mutlak yakınsaktır.

İspat. $\{\lambda_{mn}\}^\infty_{n=1} \subset \left[m^2 - \|Q\|_{H_1}, m^2 + \|Q\|_{H_1}\right]$ (m = 0,1,2,....) ve varsayım gereği $\|Q\|_{H_1} < \frac{1}{2}$ olduğundan $m < p$ için

$$\lambda_{mn} \le m^2 + \|Q\|_{H_1} < m^2 + \frac{1}{2} \le (m+1)^2 - \frac{1}{2} \le p^2 - \frac{1}{2} \qquad (n = 1,2, ...)$$

dir. Buradan

$$\lambda_{mn} < p^2 - \frac{1}{2}$$

veya

$$\left|\lambda_{mn} - p^2\right| > \frac{1}{2} \qquad (m < p \;;\; n = 1,2,....) \tag{4.8}$$

bulunur. $p < m$ için

$$p^2 + \frac{1}{2} \le (p+1)^2 - \frac{1}{2} \le m^2 - \frac{1}{2} < m^2 - \|Q\|_{H_1} \le \lambda_{mn} \qquad (n = 1,2, ...)$$

dir. Buradan da

$\lambda_{mp} > p^2 + \frac{1}{2}$

veya

$$\left|\lambda_{mn} - p^2\right| > \frac{1}{2} \qquad (m > p \ ; \ n = 1,2,......) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.9) dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \lambda (R_\lambda - R_\lambda^0)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn} - \lambda} - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}^0}{m^2 - \lambda} \right] d\lambda$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{mn} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda_{mn} - \lambda} - B_{mn}^0 \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{m^2 - \lambda} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{pn}^0 \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda - p^2} - B_{pn} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda - \lambda_{pn}} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(p^2 B_{pn}^0 - \lambda_{pn} B_{pn} \right) = L_{0p}^{(1)} - L_p^{(1)} \qquad (p = 0,1,2, ...)$$

bulunur. Lemma 4.2.1 den ve bu son bağıntıdan

$$L_p^{(1)} - L_{0p}^{(1)} \in \sigma_1(H_1) \qquad p = 0,1,2, ... \tag{4.10}$$

elde edilir.

Bu kez $L_p^{(-1)} - L_{0p}^{(-1)} \in \sigma_1(H_1)$ ($p = 1,2, ...$) olduğunu gösterelim. Yine (4.7), (4.8) ve (4.9) dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \lambda^{-1}\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) d\lambda = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{mn} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda_{mn} - \lambda)} - B_{mn}^0 \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{d\lambda}{\lambda(m^2 - \lambda)} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{pn}^0 \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - p^2)} - B_{pn} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_p} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - \lambda_{pn})} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(p^{-2} B_{pn}^0 - \lambda_{pn}^{-1} B_{pn} \right) = L_{0p}^{(-1)} - L_p^{(-1)} \qquad (p = 1,2, ...) \tag{4.11}$$

bulunur. Lemma 4.2.1 e göre $\lambda^{-1}\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)$ operatör fonksiyonu $\rho(L)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitik fonksiyondur. O takdirde (4.11) den

$$L_{0p}^{(-1)} - L_p^{(-1)} \in \sigma_1(H_1) \qquad (p = 1,2, ...) \tag{4.12}$$

elde edilir.

Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_{pn}-p^2\right|$ ($p = 0,1,2, \ldots$) serilerinin yakınsak olduğunu gösterebiliriz. $L_{0p}^{(r)}$ operatörünün spektrumu sadece 0 ve p^{2r} noktalarından ibarettir. Bu durumda (Lysternik, L. A. and Sobolev, V. I. 1955) den

$$p^{2r} \geq \left(L_{0p}^{(r)}\Psi_{pn}\ ,\ \Psi_{pn}\right)_{H_1} \qquad (p = 1,2, \ldots.)$$

olduğu bilinmektedir. Diğer yandan

$$\lambda_{pn}^{r} = \left(L_{p}^{(r)}\Psi_{pn}\ ,\ \Psi_{pn}\right)$$

dir. Bu son iki bağıntıdan

$$\sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn}^{r} > p^{2r}}} \left(\lambda_{pn}^{r} - p^{2r}\right) \leq \sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn}^{r} > p^{2r}}} \left(\left(L_{p}^{(r)} - p_{0p}^{(1)}\right)\Psi_{pn}\ ,\ \Psi_{pn}\right)_{H_1}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\left(L_{p}^{(r)} - L_{0p}^{(r)}\right)\Psi_{mn}\ ,\ \Psi_{mn}\right)_{H_1}\right| \tag{4.13}$$

bulunur. (4.10) ve (4.12) ye göre

$$L_{p}^{(r)} - L_{0p}^{(r)} \in \sigma_1(H_1) \qquad (r = -1,1\ ;\ p = 1,2, \ldots)$$

dir. O zaman (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G. 1969) dan

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\left(L_{p}^{(r)} - L_{0p}^{(r)}\right)\Psi_{mn}\ ,\ \Psi_{mn}\right)_{H_1}\right| \leq \left\|L_{0p}^{(r)} - L_{p}^{(r)}\right\|_{\sigma_1(H_1)} \tag{4.14}$$

olduğu bilinmektedir. (4.13) ve (4.14) den

$$\sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn}^{r} > p^{2r}}} \left(\lambda_{pn}^{r} - p^{2r}\right) \leq \left\|L_{0p}^{(r)} - L_{p}^{(r)}\right\|_{\sigma_1(H_1)} \qquad (p \geq 1) \tag{4.15}$$

$$\sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn} > p^{2}}} \left(\lambda_{pn} - p^{2}\right) < \infty \qquad (p \geq 1)$$

$$\sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn} < p^{2}}} \left(p^{2} - \lambda_{pn}\right) \leq \text{sabit} \sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn} < p^{2}}} \left(p^{2} - \lambda_{pn}\right)p^{-2}\lambda_{pn}^{-1}$$

$$= \text{sabit} \sum_{\substack{n\\ \lambda_{pn}^{-1} > p^{-2}}} \left(\lambda_{pn}^{-1} - p^{-2}\right) < \infty \qquad (p \geq 1) \tag{4.16}$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_{pn} - p^{2}\right| < \infty \qquad (p = 1,2, \ldots.)$$

elde edilir. Ayrıca $L_{00}^{(1)} = 0$ olduğu dikkate alınırsa (4.10) dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_{0n} \right| \langle \infty$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Her $\lambda \in \rho(L)$ için $R_\lambda - R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$ olduğundan (4.7) formüllerinden ve teorem 4.2.1 den

$$tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^2 - \lambda} \right)$$

bulunur. Bu eşitliği $\frac{\lambda}{2\pi i}$ ile çarpıp $|\lambda| = b_p = p^2 + p \quad (p \geq 1)$ çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda\, tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^2 - \lambda} \right) d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^2 - \lambda} \right) d\lambda \qquad (4.17)$$

bulunur. $m \leq p$ ve $p \geq 1$ için

$$m^2 - \|Q\| \leq \lambda_{mn} \leq m^2 + \|Q\| \leq p^2 + \|Q\| \langle p^2 + p = b_p$$

dir. Dolayısıyla

$$\left| \lambda_{mn} \right| \langle b_p \quad ; \quad m \leq p \quad ; \quad p \geq 1 \quad ; \quad n = 1,2,.... \qquad (4.18)$$

dir. $m \rangle p$ için

$$\lambda_{mn} \geq m^2 - \|Q\| \geq (p+1)^2 - \|Q\| \rangle p^2 + p$$

veya

$$\lambda_{mn} \rangle b_p \quad ; \quad m \rangle p \quad ; \quad n = 1,2, ... \qquad (4.19)$$

dir. (4.17) , (4.18) ve (4.19) dan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda\, tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) d\lambda = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda - m^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda - \lambda_{mn}} \right]$$

$$+ \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda - m^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda - \lambda_{mn}} \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^2 - \lambda_{mn}\right) \qquad (4.20)$$

elde edilir.

$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0$ formülünden N herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^{N} (-1)^j R_\lambda^0 \left(QR_\lambda^0\right)^j + (-1)^{N+1} R_\lambda \left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}$$

bulunur. Bu ifade (4.20) de yerine konursa

$$\sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^2 - \lambda_{mn}\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \; tr\left[R_\lambda^0 \left(QR_\lambda^0\right)^j \right] d\lambda$$

$$+ \frac{(-1)^{N+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \; tr\left[R_\lambda \left(QR_\lambda^0\right)^{N+1} \right] d\lambda \qquad (4.21)$$

olur.

$$M_{pj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \; tr\left[R_\lambda^0 \left(QR_\lambda^0\right)^j \right] d\lambda \qquad (4.22)$$

$$M_p^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \; tr\left[R_\lambda \left(QR_\lambda^0\right)^{N+1} \right] d\lambda \qquad (4.23)$$

olsun. O zaman (4.21) formülü

$$\sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{mn} - m^2\right) = \sum_{j=1}^{N} M_{pj} + M_p^{(N)} \qquad (4.24)$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 4.2.1 in ispatına benzer şekilde QR_λ^0 operatör fonksiyonunun her $\lambda \neq m^2$ ($m = 0,1,2, \ldots$) noktasında $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitik olduğu ve bundan da yararlanarak

$$M_{pj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i \, j} \int_{|\lambda|=b_p} tr\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j \right] d\lambda \qquad (j = 1,2, \ldots.) \qquad (4.25)$$

eşitliklerinin sağlandığı ispatlanabilir.

Lemma 4.2.2 3. koşulu sağlanır ve $\|Q(x)\|_1$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında integre edilebilir ise

$$M_{p1} = \frac{2p+1}{2\pi} \int_0^\pi tr\, Q(x)\, dx + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} d_m^2 \int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_n \, , \varphi_n \right) \cos 2mx \; dx$$

dir.

İspat. (4.25) formülünden yararlanıp L_0 operatörünün Ψ_{mn}^0 ($m = 0,1,2, \ldots\ldots$; $n = 1,2, \ldots.$) özfonksiyonlar sisteminin H_1 uzayının bir ortonormal bazı olduğu dikkate alınırsa

$$M_{p1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} tr\left(QR_\lambda^0\right) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(QR_\lambda^0 \Psi_{mn}^0 \, , \Psi_{mn}^0 \right)_{H_1} d\lambda \qquad (4.26)$$

olur. (4.1) formülünden yararlanarak $\left|\left(QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\,,\,\Psi_{mn}^0\right)_{H_1}\right|$ ifadesini sınırlandıralım.

$$\left|\left(QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\,,\,\Psi_{mn}^0\right)_{H_1}\right| = \left|\int_0^\pi \left(QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0(x)\,,\,\Psi_{mn}^0(x)\right)dx\right|$$

$$= \left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left|\int_0^\pi \left(Q(x)\Psi_{mn}^0(x)\,,\,\Psi_{mn}^0(x)\right)dx\right|$$

$$= \left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left|\int_0^\pi \left(Q(x)d_m\cos mx.\varphi_n\,,\,d_m\cos mx.\varphi_n\right)dx\right|$$

$$\le \left|m^2-\lambda\right|^{-1}\int_0^\pi \left|\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\right|dx \le \left|m^2-\lambda\right|^{-1}\int_0^\pi \left\|Q(x)\varphi_n\right\|dx$$

$$\le \sqrt{\pi}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left(\int_0^\pi \left\|Q(x)\varphi_n\right\|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\left|m^2-\lambda\right|^{-1}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1}$$

$Q(x)$ operatör fonksiyonu 3. koşulunu sağladığından bu son bağıntıdan

$$\alpha_m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\,,\,\Psi_{mn}^0\right)_{H_1} \qquad (m=0,1,2,\ldots.) \qquad ; \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(\lambda)$$

serilerinin $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde λ ya göre mutlak ve düzgün yakınsaklığı elde edilir. Dolayısıyla (4.26) dan

$$M_{p1} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\lambda|=b_p}\left(QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\,,\,\Psi_{mn}^0\right)_{H_1}d\lambda$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(Q\Psi_{mn}^0\,,\,\Psi_{mn}^0\right)_{H_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\lambda-m^{2n}}$$

bulunur. (4.1), (4.18), (4.19) dan ve bu son bağıntıdan

$$M_{p1} = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(Q\Psi_{mn}^0\,,\,\Psi_{mn}^0\right)_1$$

$$= \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi\left(Q(x)d_m\cos mx.\varphi_n\,,\,d_m\cos mx.\varphi_n\right)dx$$

$$= \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}d_m^2\int_0^\pi\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos^2 mx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}d_m^2\int_0^\pi\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\left(1+\cos 2mx\right)dx \tag{4.27}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left|\sum_{n=1}^{q}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\right| \le \left\|Q(x)\right\|_1 \qquad (q=1,2,\ldots.)$$

ve varsayım gereği

$$\int_0^\pi \| Q(x) \|_1 \, dx < \infty$$

dir. O zaman Lebesque teoremine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_n)\, dx = \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} (Q(x)\varphi_n, \varphi_n) \right] dx = \int_0^\pi \operatorname{tr} Q(x)\, dx \tag{4.28}$$

olur. (4.2), (4.27) ve (4.28) den

$$M_{p1} = \frac{2p+1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{tr} Q(x)\, dx + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} d_m^2 \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_n) \cos 2mx \, dx$$

bulunarak Lemma ispatlanmış olur.

Aşağıda

$$\lim_{p\to\infty} M_{pj} = 0 \qquad (j = 2,3,4, \ldots) \tag{4.29}$$

eşitliklerinin sağlandığını göstereceğiz. Bunu önce $j = 2$ için yapalım. (4.25) den

$$M_{p2} = \frac{1}{4\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \operatorname{tr}\left[\left(QR_\lambda^0\right)^2 \right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(QR_\lambda^0\right)^2 \Psi_{mn}^0, \Psi_{mn}^0 \right)_{H_1} \right] d\lambda \tag{4.30}$$

bulunur. Ayrıca

$$QR_\lambda^0 \Psi_{mn}^0 = \frac{Q\Psi_{mn}^0}{m^2 - \lambda}$$

$$\left(QR_\lambda^0\right)^2 \Psi_{mn}^0 = \left(m^2 - \lambda\right)^{-1} QR_\lambda^0 Q\Psi_{mn}^0$$

$$= \left(m^2 - \lambda\right)^{-1} QR_\lambda^0 \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(Q\Psi_{mn}^0, \Psi_{rq}^0 \right)_{H_1} \Psi_{rq}^0 \right\}$$

$$= \left(m^2 - \lambda\right)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(r^2 - \lambda\right)^{-1} \left(Q\Psi_{mn}^0, \Psi_{rq}^0 \right)_{H_1} Q\Psi_{rq}^0$$

dir. $\left(QR_\lambda^0\right)^2 \Psi_{mn}^0$ ın bu ifadesi (4.30) da yerine konursa

$$M_{p2} = \frac{1}{4\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(Q\Psi_{mn}^0, \Psi_{rq}^0 \right)_{H_1} \left(Q\Psi_{rq}^0, \Psi_{mn}^0 \right)_{H_1}}{\left(\lambda - m^2\right)\left(\lambda - r^2\right)} \right] d\lambda \tag{4.31}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{|\lambda|=b_p} \frac{d\lambda}{\left(\lambda - m^2\right)\left(\lambda - r^2\right)} = 0 \qquad ; \qquad m, r \le p \tag{4.32}$$

dır. Gerçekten eğer $m = r$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\left(\lambda-m^2\right)^2} = 0$$

dır. $m \neq r$ ise öyle küçük $\varepsilon \rangle 0$ sayısı vardır ki

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\left(\lambda-m^2\right)\left(\lambda-r^2\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-m^2|=\varepsilon}\frac{d\lambda}{\left(\lambda-m^2\right)\left(\lambda-r^2\right)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-r^2|=\varepsilon}\frac{d\lambda}{\left(\lambda-m^2\right)\left(\lambda-r^2\right)}$$

$$= \frac{1}{m^2-r^2} + \frac{1}{r^2-m^2} = 0$$

olur. $m,r \rangle p$ için

$$\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\left(\lambda-m^2\right)\left(\lambda-r^2\right)} = 0$$

olduğu dikkate alınırsa (4.31) ve (4.32) den

$$M_{p2} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(Q\Psi_{mn}^{0}\,,\,\Psi_{rq}^{0}\right)_{H_1}\left(Q\Psi_{rq}^{0}\,,\,\Psi_{mn}^{0}\right)_{H_1}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{d\lambda}{\left(\lambda-m^2\right)\left(\lambda-r^2\right)}$$

$$= \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(Q\Psi_{mn}^{0}\,,\,\Psi_{rq}^{0}\right)_{H_1}\left(Q\Psi_{rq}^{0}\,,\,\Psi_{mr}^{0}\right)_{H_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{m^2-r^2}\left[\frac{1}{\lambda-m^2}-\frac{1}{\lambda-r^2}\right]d\lambda$$

$$= \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(m^2-r^2\right)^{-1}\left|\left(Q\Psi_{mn}^{0}\,,\,\Psi_{rq}^{0}\right)_{H_1}\right|^2$$

bulunur. Buradan

$$\left|M_{p2}\right| = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(r^2-m^2\right)^{-1}\left|\left(Q\Psi_{rq}^{0}\,,\,\Psi_{mn}^{0}\right)\right|^2$$

$$\leq \sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(r^2-p^2\right)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(Q\Psi_{rq}^{0}\,,\,\Psi_{mn}^{0}\right)\right|^2$$

$$= \sum_{r=p+1}^{\infty}\left(r^2-p^2\right)^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\left\|Q\Psi_{rq}^{0}\right\|_{H_1}^2 \qquad (4.33)$$

elde edilir. (4.1) , (4.2) formüllerinden ve $Q(x)$ in 3. koşulunu sağlamasından yararlanarak

$\sum_{q=1}^{\infty}\left\|Q\Psi_{rq}^{0}\right\|_{H_1}^2$ ifadesini sınırlandıralım.

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left\|Q\Psi_{rq}^{0}\right\|_{H_1}^2 = \sum_{q=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left\|Q(x)\,d_r\cos rx.\varphi_q\right\|^2 dx$$

$$\leq \sum_{q=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left\|Q(x)\varphi_q\right\|^2 dx = \sum_{q=1}^{\infty}\left\|Q(x)\varphi_q\right\|_{H_1}^2 \;\langle\; c \qquad (4.34)$$

Burada c pozitif bir sabittir. (4.33) ve (4.34) den

$$\left|M_{p2}\right| \langle\ c \sum_{r=p+1}^{\infty}\left(r^2-p^2\right)^{-1}$$

bulunur. Burada

$$\sum_{r=p+1}^{\infty}\left(r^2-p^2\right)^{-1} \langle\ 2p^{-\frac{1}{2}} \tag{4.35}$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla

$$\left|M_{p2}\right| \langle\ 2cp^{-\frac{1}{2}}$$

olur. Buradan

$$\lim_{p\to\infty} M_{p2}=0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{p\to\infty} M_{p3}=0$$

eşitliği ispatlanabilir.

(4.29) formülünü $j \geq 4$ için ispatlayalım. Bunun için $\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}$ ifadesini $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde sınırlandıralım. (Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., 1969) den bilindiği gibi

$$\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|QR_\lambda^0\Psi_{mn}^0\right\|_{H_1}$$

dir. (4.3) den ve Q(x) in 3. koşulunu sağlamasından yararlanarak buradan

$$\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} \langle\ c \sum_{m=0}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1} \tag{4.36}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1} &= \sum_{m=0}^{p}\left|m^2-\lambda\right|^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left|m^2-\lambda\right|^{-1} \\
&\leq \sum_{m=0}^{p}\left(|\lambda|-m^2\right)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(m^2-|\lambda|\right)^{-1} \\
&= \sum_{m=0}^{p}\left(p^2+p-m^2\right)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(m^2-p^2-p\right)^{-1} \\
&\langle\ \sum_{m=0}^{p}p^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(m^2-p^2-p\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{p+1}{p} + \sum_{m=p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(m^2 - p^2\right) + \frac{1}{2}\left(m^2 - p^2\right) - p \right]^{-1}$$

$$< 2 + \sum_{m=p+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}\left(m^2 - p^2\right) + \frac{1}{2}\left[(p+1)^2 - p^2\right] - p \right\}^{-1} < 2 + \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{2}{m^2 - p^2}$$

dir. Burada (4.35) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| m^2 - \lambda \right|^{-1} < 6$$

elde edilir. (4.36) dan ve bu son eşitsizlikten

$$\left\| QR_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} < c_1 \quad ; \quad |\lambda| = b_p = p^2 + p \quad , \quad c_1 > 0 \tag{4.37}$$

bulunur.

Bu kez $\left\| R_\lambda^0 \right\|_{H_1}$ i $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde sınırlandıralım. $m \le p$ için

$$\left| m^2 - \lambda \right| \ge |\lambda| - m^2 = p^2 + p - m^2 \ge p$$

ve $m \ge p+1$ için

$$\left| m^2 - \lambda \right| \ge m^2 - |\lambda| = m^2 - p^2 - p \ge (p+1)^2 - p^2 - p > p$$

dir. Dolayısıyla

$$\left| m^2 - \lambda \right|^{-1} \le p^{-1} \quad ; \quad |\lambda| = b_p = p^2 + p$$

dir. Diğer yandan $\left\| R_\lambda^0 \right\|_{H_1} = \max_m \left\{ \left| m^2 - \lambda \right|^{-1} \right\}$ olduğundan

$$\left\| R_\lambda^0 \right\|_{H_1} \le p^{-1} \tag{4.38}$$

elde edilir.

(4.25) den

$$M_{pj} = \frac{1}{2\pi j} \left| \int_{|\lambda|=b_p} \operatorname{tr} \left[\left(QR_\lambda^0 \right)^j \right] d\lambda \right| \le \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \left\| \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \left\| QR_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \left\| \left(QR_\lambda^0 \right)^{j-1} \right\|_{H_1} |d\lambda|$$

bulunur. (4.37), (4.38) den ve Q(x) in 2. koşulunu sağlamasından yararlanarak buradan

$$\left| M_{pj} \right| \le \frac{c_1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \left\| Q \right\|_{H_1}^{j-1} \left\| R_\lambda^0 \right\|_{H_1}^{j-1} |d\lambda| < \frac{c_1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} 2^{(1-j)} p^{1-j} |d\lambda| < c_2 p^{3-j}$$

Bu bağıntıdan

$$\lim_{p \to \infty} M_{pj} = 0 \quad ; \quad j \ge 4$$

elde edilir. Böylece (4.29) eşitlikleri ispatlanmış oldu.

Teorem 4.1.1 e göre

$$\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty} \subset \left[m^2 - \|Q\|_{H_1}, m^2 + \|Q\|_{H_1}\right] \qquad (m = 0,1,2,.....)$$

dir. Diğer yandan varsayım gereği $\|Q\|_{H_1} < \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\left|\lambda_{mn} - m^2\right| < \frac{1}{2} \qquad (m = 0,1,2,\ldots ; \; n = 1,2,3,.....)$$

dir. Bu eşitsizliklerden yararlanarak (4.38) eşitsizliğinin ispatına benzer şekilde p nin büyük değerleri için $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde

$$\|R_\lambda\|_{H_1} < c_3\, p^{-1} \qquad ; \qquad c_3 > 0 \tag{4.39}$$

eşitsizliğinin sağlandığı ispatlanabilir. (4.23), (4.37), (4.38) ve (4.39) dan

$$\left|M_p^{(N)}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\lambda|=b_p} \lambda\, \mathrm{tr}\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right] d\lambda\right| \le \int_{|\lambda|=b_p} |\lambda| \left|\mathrm{tr}\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right]\right| |d\lambda|$$

$$\le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \left\|R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \|R_\lambda\|_{H_1} \left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le c_3\, b_p\, p^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \left\|QR_\lambda^0\right\|_{H_1}^N \left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le c_3\, b_p\, p^{-1} \|Q\|^N p^{-N} c_1\, 2\pi b_p \le c_4\, p^{3-N} \qquad (c_4 > 0)$$

bulunur. Bu son bağıntıdan

$$\lim_{p\to\infty} M_p^{(N)} = 0 \qquad ; \qquad N \ge 4 \tag{4.40}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 Q(x) operatör fonksiyonu 1. – 4. koşullarını sağlıyor ise L operatörünün düzenli izi için

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn} - m^2\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{tr}\, Q(x)\, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\mathrm{tr}\, Q(0) + \mathrm{tr}\, Q(\pi)\right] - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{tr}\, Q(x)\, dx$$

formülü sağlanır.

İspat. (4.24), (4.40) formüllerinden ve Lemma 4.2.2 den

$$\lim_{p\to\infty}\left[\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn} - m^2\right) - \frac{2p+1}{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{tr}\, Q(x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty} d_m^2 \int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_n, \varphi_n\right)\cos 2mx\, dx$$

veya

$$\lim_{p\to\infty}\left[\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-m^2\right)-\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{tr} Q(x)\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos 2mx\,dx\;-\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{tr} Q(x)\,dx$$

ya da

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-m^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{tr} Q(x)\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos 2mx\,dx\;-\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{tr} Q(x)\,dx$$

bulunur. Bu eşitliğin ikinci tarafındaki

$$I=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos 2mx\,dx$$

ifadesini hesaplıyalım. Kolayca gösterilebilir ki 1. ve 4. koşulları sağlandığı takdirde

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_m^2\left|\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos 2mx\,dx\right|\;\langle\;\infty$$

dir. Dolayısıyla

$$I=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos 2mx\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos mx\,dx+d_m^2\,(-1)^m\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos mx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\;\sum_{m=0}^{\infty}\left[d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\varphi_n\right)\cos mx\,dx\right]\cos m0$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left[d_m^2\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\cos mx\,dx\right]\cos m\pi\;\Big\}$$

dir. d_m in (4.2) şeklinde olduğu dikkate alınırsa bu son bağıntının sonundaki m e göre olan toplamlar, ikinci mertebeden türevi olan $\left(Q(x)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında $\{\cos mx\}_{m=0}^{\infty}$ fonksiyonlarına göre Fourier serisinin sıra ile 0 ve π noktalarındaki değerleridir. Bu nedenle

$$I=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(Q(0)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)+\left(Q(\pi)\varphi_n\,,\,\varphi_n\right)\right]=\frac{1}{4}\left[\operatorname{tr} Q(0)+\operatorname{tr} Q(\pi)\right]$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-m^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tr}\; Q(x)\, dx\right]=\frac{1}{4}[\mathrm{tr}\; Q(0)+\mathrm{tr}\; Q(\pi)]-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tr}\; Q(x)\, dx$$

dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Eğer $Q(x)$ 1.- 4. koşullarından başka ek olarak

$$\int_0^{\pi}\mathrm{tr}\; Q(x)\, dx = 0$$

koşulunu da sağlıyorsa o zaman L operatörünün düzenli izi için formül

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-m^2\right) = \frac{1}{4}\left[\mathrm{tr}\; Q(0)+\mathrm{tr}\; Q(\pi)\right]$$

şekline gelir.

4.3 Örnek

Burada 1.- 4. koşullarını sağlayan $Q(x)$ operatör fonksiyonuna örnek vereceğiz. $H = L_2[0,1]$ ve $a=\frac{1}{4}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}\right)^{-1}$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $L_2[0,1]$ den $L_2[0,1]$ e

$$Q(x)f(t) = a\cos\pi x \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}\sin m\pi t \int_0^1 f(s)\sin m\pi s\, ds \qquad \left(f = f(t)\in H\right)$$

olsun. Kendine eş $Q(x) \; : \; H \rightarrow H$ operatörünün özdeğerleri

$$\left\{\frac{a\cos\pi x}{2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

şeklindedir. Dolayısıyla her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x)$, H den H ye kendine eş bir çekirdek operatörüdür. $Q(x)$ operatör fonksiyonunun 1.- 4. koşullarını sağladığı gösterilebilir.

SONUÇ

Bu tez çalışmasının birinci ana bölümünde $H_1 = L_2(H;R^3)$ uzayında

$$\ell(u) = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + Q(x)u$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan kendine eş L operatörünün ağırlıklı izinin asimtotik davranışı incelenmiştir. Burada reel değerli $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ (i , j = 1,2,3) fonksiyonlarının R^3 uzayında sınırlı $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ (i ,j , k = 1,2,3) türevlerine sahip olduğu varsayılmıştır. Her bir $x \in R^3$ için $D(Q(x)) \subset H$ olmak üzere $Q(x)$, $D(Q(x))$ den H ye kendine eş operatördür ve

$$\overline{\bigcap_{x \in R^3} D(Q(x))} = H_1 \qquad Q(x) \geq I \qquad Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty(H)$$

dır.

İkinci ana bölümde $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında

$$\ell(y) = -y'' + Q(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün spektrumu incelenmiş ve düzenli izi hesaplanmıştır. Burada $Q(x)$ her $x \in [0,\pi]$ için H den H ye kendine eş çekirdek operatörüdür.

KAYNAKLAR

Adıgözelov, E. E., (1976),"Operatör katsayılı iki Sturm-Lioville operatörünün farkının izi hakkında", İz. AN AZ SSR, seriya fiz-tekn. i mat. nauk, No:5, 20-24, (R) *

Aslanov, H. İ., Bayramoğlu, M., (1977), "Schrödinger operatör denkleminin ağırlıklı izinin asimtotik davranışı", İz. AN AZ SSR, seriya fiz-tekn. i mat. nauk, No:1, 46-51, (R)

Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E. E., (1997), "On a regularized trace formula for the Sturm-Liouville operator with a bounded operator coefficient and with a singularity", Differential Equations 32 (1996), No : 12, 1581-1585

Bayramoğlu, M., Baykal, O., July (1999), "Asymptotic Behavior of the Weighted Trace of Schrodinger Equation With Operatör Coefficient Given in n-Dimensional Space", Proyecciones Vol. 18, No:1, pp. 91-106, Universidad Catolica del Norte Antofagoste-Chile

Bayramov, A., (1996), "Eliptik tipteki ikinci mertebeden denklemlerin spektrumu hakkında", Az NIINTI, No:2400 – Az 35 s.

Cohberg, İ. C. and Krein, M. G., (1969), "İntroduction to the theory of linear non-self adjoint operators",Translation of Mathematical Monographs, Volume 18, Amer. math. Sos., Providence, R. I.

Dikiy, L. A., (1953), "Gelfand-Levitan'ın bir formülü hakkında", Uspeki Matem. Nauk, T. B., No:2, 119-123, (R)

Dubrovski, V. V., (1966), "Regularized trace of selfadjoint operators", Vestsi Akad.,nauk Belarusi, Ser. Fiz. Mat. Navuk, No:1, 30-33

Eydelman, S. D., (1969), "Parabolic Systems, North-Holland Publishing Company Amsterdam

Fulton, T. C. and Pruess, S. A., (1994), "Eigenvalue and eigenfunction asypmtotics for regular Sturm-Liouville problems", J. Math. Anal. Appl. 188, 297-340

Gasımov, M. G., ve Levitan, B. M., (1963), "İki tekil Sturm-Liouville operatörünün özdeğerlerinin farklarının toplamı hakkında", Dokl. AN SSSR, T.151, No:5, (R)

Gelfand, İ. M. ve Levitan, B. M., (1953), "İkinci mertebeden bir diferansiel operatörün özdeğerleri için bir formül hakkında",Dokl. AN SSSR, T.88, No:4 593-596, (R)

Guseynov, G. Ş. ve Levitan, B. M., (1978), "Sturm-Liouville operatörü için iz formülleri hakkında", Vestnik MGU, ser. matem-mekan, No:1, 40-49, (R)

Halberg, C. J. and Kramer, V. A., (1960), "A Generalization of the trace concept", Duke Mathematical Journal, Vol. 27, No:4, 607-618

Halilova, R. Z., (1976), "Sturm-Liouville operatör denkleminin izinin düzenlenmesi hakkında", Funks. Analiz, teoriya funksiy i ik pril.-Mahaçkala, No:3, 1.Bölüm, 154-161, (R)

Kirillov, A. A., (1976), "Elementary theory representations", Springer verlag ,New York

Kostyuchenko, A. G., (1968), "Kendine eş eliptik tipteki operatörlerin spektral fonksiyonunun asimtotik davranışı", V kn. "Çetvyortaya matem. Şkola", Kiev, 42-117, (R)

Korenblyum, B. I., (1953), "Fonksiyonların oranı için genel Tauber teoremleri", Dokl. AN SSSR, T. 88, No:5, 745-748, (R)

Levitan, B. M., (1956), "$\Delta u+\{\lambda-q(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}u=0$ denkleminin özfonksiyonlarına göre açılım hakkında", İzv. AN SSSR, ser. matem., T. 20, 437-468, (R)

Levitan, B. M., (1964), "Sturm-Liouville operatörü için düzenli izin hesaplanması", Uspeki Matem. Nauk, T. 19, No:1, 161-164, (R)

Levitan, B. M. and Sargsyan, İ. S., (1991), "Sturm-Liouville and Dirac operators", Kluzer, Dordrechz

Lidskiy, V. B. ve Sadovniçiy, V. A., (1967), "Bir sınıfa ait olan tam fonksiyonların köklerinin düzenli toplamı", Funks. analiz i ego plil., T.1, No:2, 52-59, (R)

(R), kaynağın Rusça olduğunu gösteriyor.

ÖZGEÇMİŞ

Adı soyadı	:	Akın TAŞDİZEN
Doğum tarihi	:	21 . 12 . 1940
Doğum yeri	:	Edirne
Lise	:	1955 – 1958 Pertevniyal Lisesi
Lisans	:	1958 – 1963 İstanbul Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Askerlik	:	1964 – 1966
Çalıştığı kurumlar	:	1966 – 1970 Galatasaray Mühendislik Yüksek Olulu 1970 İ.D.M.M.A de Asistan Halen , Y.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Üyesi olarak görevini sürdürmektedir