

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI
STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN İZ FORMÜLÜ**

Özlem BAKŞI

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

**Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ehliman ADIGÖZELOV

İSTANBUL, 1999

84939

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI
STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN İZ FORMÜLÜ

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 17 Haziran 1999
Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ehliman ADIGÖZELOV
Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Metin ARIK (BÜ)
: Prof.Dr. Ahmet DERNEK (MÜ)

Adigözelov
Met. Arık
A. Dernek

İSTANBUL, 1999


İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	5
3. SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LİOUVILLE DENKLEMİNİN İZ FORMÜLÜ.....	9
3.1. Problemin ortaya konması ve rezolventle ilgili bazı eşitlikler.....	9
3.2. Düzenli izin hesaplanması.....	35
3.3. Örnek.....	50
4. SONUÇ.....	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	57

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince bana yol gösteren ve benden yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ehliman ADIGÖZELOV 'a , anabilim dalı başkanımız Sayın Prof. Dr. Erol Balkanay'a , sevgili babam , kardeşim ve özellikle anneme , tezin yazılmasını üstlenen eşim Sayın Hakan Bakşı 'ye teşekkürlerimi sunarım.



Özlem BAKŞI
İstanbul, 1999

ÖZET

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı (\cdot, \cdot) , normu da $\|\cdot\|$ ile gösterelim. $[0, \pi]$ aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H; [0, \pi])$ ile gösterelim. H_1 e ait herhangi iki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımı

$$(f, g)_1 = \int_0^\pi (f(x), g(x)) dx$$

şeklinde tanımlırsa, H_1 kümesi bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur.

“Sınırsız operatör katsayılı Sturm-Liouville denkleminin iz formülü” adlı bu tez çalışmasında $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, $H_1 = L_2(H; [0, \pi])$ uzayında sırasıyla

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x),$$

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri, $n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$ de belirli özelliğe sahip olan doğal sayı dizisi olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$$

limiti için formül bulunmuştur. “ $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$ ” limitine L operatörünün düzenli izi adı verilmiştir.

ABSTRACT

Let H be a separable Hilbert space. We denote by (\cdot, \cdot) the inner product in H , and by $\|\cdot\|$ the norm in H . We denote by $H_1 = L_2(H; [0, \pi])$ the set of all functions f satisfying condition

$$\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

and strongly measurable belonging to H defined on $[0, \pi]$ and with the values in H .

If we defined the inner product of arbitrary two elements f and g of the space H_1 ,

$$(f, g)_1 = \int_0^\pi (f(x), g(x)) dx$$

then H_1 becomes a separable Hilbert space.

In this thesis with the title “the trace formula of Sturm-Liouville equation with the unbounded operator coefficient”, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$, and $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ are the eigenvalues of L_0 and L , respectively; L_0 and L are formed by the differential expressions

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x),$$

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

in H_1 space, respectively; and their boundary condition is

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

In this work for the limit the formula

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$$

has been found, where $n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$ is a natural numbers sequence with special

property. The limit “ $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$ ” is called the regularized trace of operator L .

1.GİRİŞ

Bu çalışmada ikinci mertebeden operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün düzenli izi incelenmiştir. H sonsuz boyutlu bir ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir (Hille ve Philips , 1957) ve

$$\int_0^{\pi} \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H; [0, \pi])$ ile gösterelim. H_1 uzayının herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f, g)_1 = \int_0^{\pi} (f(x), g(x)) dx$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 uzayı sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur.

H_1 den H_1 e sırasıyla

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x),$$

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan L_0 ve L gibi iki kendine eş operatör göz önüne alınmıştır.

$l_0(y)$ ve $l(y)$ ifadelerindeki $y''(x)$ türevi H uzayındaki norma göre anlaşılmaktadır. Yani

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - y'(x) \right\| = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} - y''(x) \right\| = 0$$

dır.

Ayrıca bu ifadelerde yer alan A operatörü H uzayında

$$A = A^* \geq I \quad , \quad A^{-1} \in \sigma_{\infty}(H)$$

koşullarını sağlayan bir operatördür.

$Q(x)$ operatör fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahip olduğunu yani herhangi iki $u, v \in H$ için

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} - Q'(x) \right] u, v \right) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{Q'(x + \Delta x) - Q'(x)}{\Delta x} - Q''(x) \right] u, v \right) = 0$$

olduğunu varsayıyoruz. Ek olarak her $x \in [0, \pi]$ için $Q(x)$ in H den H ye kendine eş çekirdek operatör olduğu

$$\|Q^{(m)}(x)\|_{\sigma_1(H)} \quad (m=0,1,2)$$

fonksiyonlarının $[0, \pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilirliği , her $u \in H$ için

$$\int_0^{\pi} (Q(x)u, u) dx = 0$$

eşitliğinin sağlandığı varsayılmıştır.

L_0 ve L kendine eş operatörleri saf ayrık spektruma sahiptirler.

$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, sırasıyla L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri olsun. Burada her bir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

A operatörünün $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_j \leq \dots$ özdeğerlerinin

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_j}{a j^{\alpha}} = 1 \quad (a > 0, \alpha > 2)$$

koşulunu sağladığı kabul edilmiştir.

Bu koşul altında $\{\mu_n\}_1^\infty$ dizisinin

$$\mu_k - \mu_{n_m} > d_1(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}), \quad (k = n_m + 1, n_m + 2, \dots)$$

olacak şekilde bir $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisine sahip olduğu ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasında

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{1}{4} (trQ(0) + trQ(\pi))$$

formülü ispatlanmıştır.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$$

limitine L operatörünün düzenli izi denir. Bu limite L operatörünün düzenli izi adı verilmesi doğaldır. Çünkü bilindiği gibi matrisin veya herhangi bir çekirdek operatörün izi onun özdeğerlerinin toplamına eşittir. Burada ise $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$$

serisi ıraksak bir seridir ve dolayısıyla

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$$

limitine L operatörünün düzenli izi adı verilmiştir.

Skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi hakkındaki araştırmalar ilk olarak Gelfand ve Levitan'ın, (1953) çalışması ile başlamıştır. Bu çalışmadan sonra Dikiy , (1953) , Halberg ve Kramer ,(1960), Gasimov ve Levitan ,(1963), Levitan ,(1964) ,Lidskiy ve Sadovniçiy , (1967),Guseynov ve Levitan, (1978) ve birçok başka çalışmalarda çeşitli skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi incelenmiştir. Bu konudaki çalışmaların listesi Levitan ve Sargsyan, (1991) ve Fulton ve Pruess, (1994) çalışmalarında verilmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izi Halilova, (1976),Adıgözelov, (1976) , Maksudov, Bayramoğlu ve Adıgözelov, (1984) , Bayramoğlu ve Adıgözelov,

(1996) çalışmalarında incelenmiştir. Dubrovskii, (1996) çalışmasında saf ayrık spektruma sahip olan kendine eş operatörlerin düzenli izi incelenmiştir.



2. ÖN BİLGİLER

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı (\cdot, \cdot) , normuda $\|\cdot\|$ ile göstereceğiz. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere bir (a,b) aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir (Hille ve Philips, 1957) ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H; (a,b))$ ile gösterelim. H_1 in herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f, g)_1 = \int_a^b (f(x), g(x)) dx$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 kümesi bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur (Kirillov, 1976). H_1 uzayında normu $\|\cdot\|_1$ ile göstereceğiz.

$\overline{D(A)} = H$ olmak üzere A $D(A)$ dan H a kendine eş bir operatör olsun.

Her $x \in D(A)$, $x \neq 0$ için $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) < 0$) ise A ya pozitif (negatif) operatör denir ve bu $A > 0$ ($A < 0$) şeklinde yazılır. Her $x \in D(A)$ için $(Ax, x) \geq 0$ ($(Ax, x) \leq 0$) ise A ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatör denir ve $A \geq 0$ ($A \leq 0$) şeklinde gösterilir.

A ve B kendine eş herhangi iki operatör olsun. $D(A) \subset D(B)$ ve $D(A)$ dan H a A-B operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise A ya B den büyüktür (küçük değildir) denir ve $A > B$ ($A \geq B$) olarak yazılır. A, H dan H a tam sürekli bir operatör ise $A \in \sigma_\infty(H)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1. A negatif olmayan kendine eş bir operatör ve B de $B^2 = A$ olacak şekilde kendine eş bir operatör ise B ye A nın karekökü denir.

Teorem 2.1. Negatif olmayan kendine eş bir A operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş B karekökü vardır. Eğer C ,

$$AC=CA$$

olacak şekilde herhangi bir lineer operatör ise

$$BC=CB$$

dir (Lysternik ve Sobolev, 1955).

A operatörünün pozitif karekökü $A^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir. $A \in \sigma_{\infty}(H)$ sıfırdan farklı bir operatör olsun. Bu durumda A^*A kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_{\infty}(H)$ dir (Cohberg ve Krein, 1969). Bu operatörün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq \dots$ olsun. Burada her bir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

$(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ negatif olmayan bir operatör olduğundan, $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$ pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. A nın s sayıları bazen $s_k(A)$ ($k=1,2,\dots$) şeklinde de yazılabilir. $s_1(A) = \|A\|$ olduğunu belirtelim. Eğer A normal operatör yani $A^*A=AA^*$ ise, o takdirde

$$s_k(A) = |\lambda_k(A)|, \quad (k=1,2,\dots)$$

dir (Cohberg ve Krein, 1969). Burada $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots$, A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir. A operatörünün s sayılarının sayısını $\nu(A)$ ile göstereceğiz. $\nu(A)$ sonlu ya da sonsuz olabilir. s sayıları

$$\sum_{k=1}^{\nu(A)} s_k^p(A) < \infty, \quad (p \geq 1)$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_{\infty}(H)$ kümesinin “0” operatörle birleşimini σ_p veya $\sigma_p(H)$ simgesiyle göstereceğiz Burada σ_p ($p \geq 1$) bir ayrılabilir Banach uzayıdır (Cohberg ve Krein, 1969). Bu uzayın her $A \neq 0$ operatörünün normu

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{k=1}^{\nu(A)} s_k^p(A) \right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır ve $\|0\|_{\sigma_p(H)} = 0$ kabul edilir.

Tanım 2.2. σ_1 uzayına ait olan başka bir deyişle s sayıları

$$\sum_{k=1}^{v(A)} s_k(A) < \infty$$

özelliğine sahip olan $A \in \sigma_1(H)$ operatörüne çekirdek operatörü denir. $A \in \sigma_p(H)$, $B \in L(H, H)$ ise $AB, BA \in \sigma_p(H)$ dir ve

$$\|BA\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \|A\|_{\sigma_p(H)}$$

$$\|AB\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \|A\|_{\sigma_p(H)}$$

dir. Ayrıca $p_1 < p_2$ ise $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$ dir (Cohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.3. A H dan H a bir sınırlı lineer operatör ve $\{e_k\}_1^\infty \subset H$ bir ortonormal taban

olsun. $\sum_{k=1}^\infty (Ae_k, e_k)$ serisi yakınsak ise bu serinin toplamına A operatörünün $\{e_k\}_1^\infty$

ortonormal tabanında matris izi denir.

Teorem 2.2. A bir çekirdek operatörü ise her $\{e_k\}_1^\infty \subset H$ ortonormal tabanı için $\sum_{k=1}^\infty (Ae_k, e_k)$

serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_k\}_1^\infty$ tabanının seçimine bağlı değildir (Cohberg ve Krein, 1969).

Çekirdek operatörünün matris izi $\text{tr}A$ ile gösterilecektir:

$$\text{tr}A = \sum_{k=1}^\infty (Ae_k, e_k)$$

A ve B herhangi iki çekirdek operatörü ve α, β herhangi iki sayı ise

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}A + \beta \text{tr}B \quad ,$$

$$\operatorname{tr}A^* = \overline{\operatorname{tr}A}$$

dır.

Teorem 2.3. $A \in \sigma_\infty(H)$, $B \in L(H, H)$ ve $AB, BA \in \sigma_1(H)$ ise

$$\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB)$$

dir (Cohberg ve Krein, 1969).

Teorem 2.4. A çekirdek operatörünün matris izi için

$$\operatorname{tr}A = \sum_{k=1}^{v(A)} \lambda_k(A)$$

dır. Burada her λ_k özdeğeri kendi katlılık katsayısı kadar toplanmıştır. Eğer $A \in \sigma_p(H)$ ($1 \leq p < \infty$) ve $\{e_k\}_1^w$ ($1 \leq w \leq \infty$) H da bir ortonormal elemanlar sistemi ise

$$\sum_{k=1}^w |(Ae_k, e_k)|^p \leq \left(\|A\|_{\sigma_p(H)} \right)^p$$

dır. Bu eşitsizlikten özel olarak A çekirdek operatörü için $|\operatorname{tr}A| \leq \|A\|_{\sigma_1(H)}$ elde edilir (Cohberg ve Krein, 1969).

3. SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN İZ FORMÜLÜ

3.1. Problemin Ortaya Konması ve Resolvent ile İlgili Bazı Eşitlikler

H bir ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(H; [0, \pi])$ uzayında

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x)$$

diferansiyel ifadesini gözönüne alalım. Bu ifadede $A \in D(A) \subset H$ olmak üzere $D(A)$ dan H ye

$$A = A^* \geq I, \quad A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri de sırasıyla $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık katsayısı kadar yazılmıştır.

D'_0 ile H_1 uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonları kümesini gösterelim:

- 1) $y(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türevelere sahiptir.
- 2) $Ay(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre sürekli dir.
- 3) $y'(0) = y'(\pi) = 0$ dır.

D'_0 manifoldu H_1 uzayında yoğundur ve D'_0 den H_1 e $L'_0 y = l_0(y)$ şeklinde tanımlanmış L'_0 operatörü simetrik bir operatördür. Bu operatörün özdeğerleri

$$K^2 + \gamma_j \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları da sırasıyla

$$M_K \cos Kx \cdot \varphi_j \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

şeklindedir.

Burada

$$M_K = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & K = 0 \quad \text{ise} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & K = 1, 2, \dots \quad \text{ise} \end{cases}$$

dır. Görüldüğü gibi L'_0 operatörünün ortonormal özfonksiyonlar sistemi H_1 uzayının bir ortonormal bazıdır.

Teorem 3.1.1. Özelemanlar sistemi kapalı olan her kapalı simetrik operatör kendine eştir.

İspat. H bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $D(B) \subset H$ olmak üzere

$$B : D(B) \rightarrow H$$

bir simetrik operatör, $\{e_i\}_1^\infty$, bu operatörün özelemanlarından oluşan ortonormal sistem ve λ da reel olmayan bir sayı olsun.

$(B - \lambda I)^{-1}$ sınırlı kapalı operatör olduğundan $D((B - \lambda I)^{-1}) = R(B - \lambda I)$ manifoldu kapalıdır. Yani H nin bir altuzayıdır. Öte yandan $R(B - \lambda I)$ alt uzayı $\{e_i\}_1^\infty$ kapalı sistemini içerdiğinden

$$R(B - \lambda I) = H$$

olmalıdır. Benzer şekilde

$$R(B - \bar{\lambda} I) = H$$

olur. Bu durumda bilindiği gibi B kendine eş operatördür.

L'_0 simetrik operatörünün özelemanlar sistemi kapalı olduğundan, bu teoreme göre

$$L_0 = \overline{L'_0}$$

operatörü kendine eştir.

L_0' simetrik operatörünün özelemanlar sistemi kapalı olduğundan teorem 3.1.1 e göre L_0' operatörünün kapanışı olan $L_0 = \overline{L_0'}$ operatörü $D(L_0)$ dan H_1 e kendine eş bir operatördür.

$Q(x)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan operatör fonksiyonu gösterelim:

1) $Q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahiptir. $Q''(x)$ zayıf ölçülebilir bir operatör fonksiyondur ve her $x \in [0, \pi]$ için

$$Q^{(i)}(x) \quad (i = 0,1,2)$$

H den H ye kendine eş çekirdek operatörlerdir. Yani $[Q^{(m)}(x)]^* = Q^{(m)}(x) \in \sigma_1(H)$ dir.

2) $\|Q^{(i)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$ ($i = 0,1,2$) fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir.

3) Her $f \in H$ için

$$\int_0^\pi (Q(x)f, f)_H dx = 0 \quad \text{dır.}$$

$Q(x)$ 2) koşulunu sağladığından her $x \in [0, \pi]$ için $\|Q(x)\|_{\sigma_1(H)} \leq c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Öte yandan $\|Q(x)\| \leq \|Q(x)\|_{\sigma_1(H)}$ olduğundan $[0, \pi]$ aralığında $\|Q(x)\| \leq c$ olacaktır. Dolayısıyla H_1 uzayının her $y=y(x)$ elemanı için

$$\|Q(y)\|_1^2 = \int_0^\pi \|Q(x)y(x)\|_H^2 dx \leq \int_0^\pi \|Q(x)\|_H^2 \|y(x)\|_H^2 dx \leq c^2 \int_0^\pi \|y(x)\|_H^2 dx = c^2 \|y\|_1^2$$

veya

$$\|Qy\|_1 \leq c \|y\|_1$$

olur. Görüldüğü gibi Q H_1 den H_1 e bir sınırlı lineer operatördür ve $\|Q\|_1 \leq c$ dir. Ayrıca herhangi iki $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x) \in H_1$ elemanları için

$$\begin{aligned} (Qy_1, y_2)_1 &= \int_0^\pi (Q(x)y_1(x), y_2(x))_H dx = \int_0^\pi (y_1(x), Q(x)y_2(x))_H dx \\ &= (y_1, Qy_2)_1 \end{aligned}$$

dir.

Böylece Q , H_1 den H_1 e sınırlı kendine eş operatördür. Buna göre

$$L = L_0 + Q$$

$D(L) = D(L_0)$ dan H_1 e kendine eş bir operatör olacaktır. L_0 ve L operatörlerinin rezolventleri sırasıyla R_λ^0 ve R_λ olsun.

$$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1}, \quad R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$$

dir. Ayrıca L_0 operatörünün özdeğerleri $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$ olsun. Burada her bir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. L_0 operatörünün özdeğerleri

$$K^2 + \gamma_j \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

ve $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = \infty$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$ dir.

Dolayısıyla R_μ^0 operatörünün $\left\{ \frac{1}{\mu_n - \mu} \right\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerler dizisinin limiti sıfırdır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n - \mu} = 0 \quad (\mu \neq \mu_n; n=1,2,3,\dots)$$

Öte yandan L_0 operatörünün özdeğeri olmayan her μ reel sayısı için $R_\mu^0 = (L_0 - \mu I)^{-1}$ operatörü kendine eştir ve bu operatörün

$$M_K \cos kx \varphi_j \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

ortonormal özfonksiyonlar sistemi tamdır. Bu durumda Smirnov (1964) dan R_μ^0 operatörünün tam sürekli olduğu bilinmektedir ve

$$R_\lambda^0 - R_\mu^0 = (\lambda - \mu) R_\lambda^0 R_\mu^0$$

formülünden her $\lambda \neq \mu_n$ ($n=1,2,\dots$) sayısı için R_λ^0 operatörünün tam sürekliliği elde edilir.

Bu nedenle L_0 operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. Q , H_1 den H_1 e kendine eş sınırlı operatör olduğundan

$$L = L_0 + Q$$

operatörünün de spektrumu saf ayrık olacaktır (Smirnov, 1964). L operatörünün özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ olsun. L nin özdeğeri olmayan her μ reel sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu} = 0$$

dır ve dolayısıyla kendine eş $R_\mu = (L - \mu I)^{-1}$ operatörü tam sürekli olacaktır

(Naimark, 1968). Diğer yandan

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$$

formülünden her $\lambda \neq \mu_n$ ($n=1,2,\dots$) için R_λ nın tam sürekli operatör olduğu sonucu çıkar. L_0 operatörünün bir λ pozitif sayısından büyük olmayan özdeğerlerinin sayısını $N(\lambda)$ ile gösterelim.

Teorem 3.1.2. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a, \alpha > 0$) yani

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_j}{aj^\alpha} = 1 \quad (3.1)$$

ise $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}$$

dir. Burada

$$d = \frac{2}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^\pi \cos^2 t \sin^{\frac{2}{\alpha}-1} t dt$$

dir.

İspat . $N(\lambda)$

$$K^2 + \gamma_j \leq \lambda \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

eşitsizliğini sağlayan (K, j) ikililerinin sayısına eşittir. $N(\lambda)$ nın

$$K^2 + \gamma_j \leq \lambda \quad (K, j=1,2,\dots)$$

eşitsizliğini sağlayan (K, j) ikililerinin $N_1(\lambda)$ sayısı ile

$$\gamma_j \leq \lambda$$

eşitsizliğini sağlayan j doğal sayılarının $N_2(\lambda)$ sayısının toplamına eşit olduğu yani

$$N(\lambda) = N_1(\lambda) + N_2(\lambda) \quad (3.2)$$

olduğu açıktır. (3.1.) den görülüyor ki keyfi $j \geq n_0$ için

$$\frac{\gamma_j}{aj^\alpha} > \frac{1}{2} \quad \text{yani} \quad \gamma_j \geq \frac{a}{2} j^\alpha$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Öte yandan $A \geq I$ olduğundan $\gamma_1 \geq 1$ dir ve dolayısıyla

$$\gamma_j \geq a_1 j^\alpha \quad (j=1,2,\dots)$$

olacak şekilde bir a_1 sayısı vardır. Buradan $\gamma_j \leq \lambda$ eşitsizliğini sağlayan j doğal sayılarının $N_2(\lambda)$ sayısının $a_1 j^\alpha \leq \lambda$ eşitsizliğini sağlayan j doğal sayılarının sayısından büyük olmadığı yani

$$N_2(\lambda) \leq \left(\frac{\lambda}{a_1} \right)^{1/\alpha}$$

olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_2(\lambda)}{\lambda^{2\alpha}} \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{a_1^{-\frac{1}{\alpha}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda^{2\alpha}} = a_1^{-\frac{1}{\alpha}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} = 0$$

veya

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_2(\lambda)}{\lambda^{2\alpha}} = 0$$

olur. Diğer yandan Gorbaçuk, (1975) den $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$N_1(\lambda) \sim d \lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}, \quad \left(d = \frac{2}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^\pi \cos^2 t \sin^{\frac{2}{\alpha}-1} t dt \right)$$

olduğu bilinmektedir. (3.2) eşitliğinden ve bu son bağıntılardan

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{N_1(\lambda) + N_2(\lambda)}{d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_1(\lambda)}{d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} + d^{-1} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_2(\lambda)}{\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 1$$

veya $\lambda \rightarrow \infty$ için

$$N(\lambda) \sim d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a, \alpha > 0$) ise $n \rightarrow \infty$ iken

$$\mu_n \sim d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \quad \left(d_0 = d^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \right)$$

dır.

İspat. μ_n ye eşit olan özdeğerlerin sayısı yani bir başka deyişle μ_n özdeğerlerin katlılığı q_n olsun. O takdirde

$$\mu_{p_n} < \mu_{p_n+1} = \mu_{p_n+2} = \dots = \mu_{p_n+q_n} = \mu_n < \mu_{p_n+q_n+1},$$

$$p_n + 1 \leq n \leq p_n + q_n \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir p_n doğal sayısı vardır. Dolayısıyla teorem 3.1.2 ye göre

$$N(\mu_n) = p_n + q_n \sim d \cdot \mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \quad (3.4)$$

olacaktır. μ_n ye eşit olan özdeğerlerin q_n sayısı

$$K^2 + \gamma_j = \mu_n \quad (3.5)$$

denklemini sağlayan (k, j) ($k=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots$) ikililerinin sayısına eşittir. (3.5) denklemini sağlayan (k, j) ikililerini

$$K_1 < K_2 < \dots < K_{q_n}$$

olmak üzere $(K_1, j_1), (K_2, j_2), \dots, (K_{q_n}, j_{q_n})$ şeklinde düzenleyelim.

$K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_{q_n}$ sayıları negatif olmayan tamsayılar olduğundan

$$K_{q_n} \geq q_n - 1 \quad (3.6)$$

dır. Ayrıca $K_{q_n}^2 + \gamma_{j_{q_n}} = \mu_n$ eşitliğinden

$$K_{q_n}^2 < \mu_n \text{ veya } K_{q_n} < \sqrt{\mu_n}$$

bulunur. Bunu (3.6) da göz önüne alırsak

$$q_n < \sqrt{\mu_n} + 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 < \frac{q_n}{\mu_n^{2\alpha}} < \frac{\sqrt{\mu_n} + 1}{\mu_n^{2\alpha}} \leq 2\mu_n^{-\frac{1}{\alpha}}$$

olur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$ olduğundan buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{\mu_n^{2\alpha}} = 0$$

bulunur. (3.4) bağıntısından ve bu son eşitlikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{d\mu_n^{2\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\mu_n) - q_n}{d\mu_n^{2\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\mu_n)}{d\mu_n^{2\alpha}} = 1 \quad (3.7)$$

elde edilir. Diğer yandan (3.3) den ve $N(\mu_n) = p_n + q_n$ eşitliğinden

$$\frac{p_n + 1}{d\mu_n^{2\alpha}} \leq \frac{n}{d\mu_n^{2\alpha}} \leq \frac{p_n + q_n}{d\mu_n^{2\alpha}} = \frac{N(\mu_n)}{d\mu_n^{2\alpha}}$$

bulunur. Burada $n \rightarrow \infty$ iken limite geçerek (3.7) bağıntısı dikkate alınır

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n + 1}{d\mu_n^{2\alpha}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{d\mu_n^{2\alpha}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\mu_n)}{d\mu_n^{2\alpha}} = 1$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 1$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{d^{-1}n} \right]^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{d^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}$$

veya $n \rightarrow \infty$ iken

$$\mu_n \sim d^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu kez $L = L_0 + Q$ operatörünün özdeğerleri için asimtotik formül bulalım. Q H_1 den H_1 e sınırlı kendine eş bir operatör olduğundan her $y \in H_1$ elemanı için

$$|(Qy, y)_1| \leq \|Qy\|_1 \|y\|_1 \leq \|Q\|_1 \|y\|_1^2$$

veya

$$(-\|Q\|_1 \|y, y\|_1) \leq (Qy, y)_1 \leq (\|Q\|_1 \|y, y\|_1)$$

olur. Buradan

$$-\|Q\|_1 I \leq Q \leq \|Q\|_1 I$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$L_0 - \|Q\|_1 I \leq L = L_0 + Q \leq L_0 + \|Q\|_1 I$$

olacaktır. Bu durumda

$$\mu_n - \|Q\|_1 \leq \lambda_n \leq \mu_n + \|Q\|_1 \tag{3.8}$$

olduğu bilinmektedir (Smirnov, 1964). Buna göre

$$1 - \frac{\|Q\|_1}{\mu_n} \leq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \leq 1 + \frac{\|Q\|_1}{\mu_n}$$

olur. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{d_0 n^{2+\alpha}} = 1$ olduğu dikkate alınarak $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{d_0 n^{2+\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{\mu_n} \cdot \frac{\mu_n}{d_0 n^{2+\alpha}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{d_0 n^{2+\alpha}} = 1$$

veya $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lambda_n \sim d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \quad (3.9)$$

olur.

Lemma 3.1.1. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a, \alpha > 0$) ise $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin

$$\mu_k - \mu_{n_m} > d_0 \left(K^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \right), \quad (K = n_m + 1, n_m + 2, \dots) \quad (3.10)$$

olacak şekilde bir $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisi vardır. Burada d_0 bir pozitif sabittir.

İspat. Teorem 3.1.3 e göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{n^{2+\alpha}} = d_0, \quad (d_0 > 0)$$

dır. Buna göre keyfi $n \geq n_0$ için

$$\frac{\mu_n}{n^{2+\alpha}} \geq \frac{d_0}{2}$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için

$$a_n = \mu_n - \frac{d_0}{4} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \geq \frac{d_0}{4} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

dır. Buradan görüldüğü gibi

$$a_n = \mu_n - \frac{d_0}{4} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \quad (n=1,2,\dots)$$

dizisi alttan sınırlıdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ dur. Bu özelliğe sahip olan $\{a_n\}_1^\infty$ dizisinin aşağıdaki

koşulları sağlayan bir $\{a_{n_m}\}_1^\infty$ alt dizisi vardır:

$$a_{n_1} = \min_n \{a_n\} \text{ ve } k > n_1 \text{ ise } a_k > a_{n_1} \text{ dir.}$$

$$a_{n_2} = \min_{n > n_1} \{a_n\} \text{ ve } k > n_2 \text{ ise } a_k > a_{n_2} \text{ dir.}$$

.....

$$a_{n_m} = \min_{n > n_{m-1}} \{a_n\} \text{ ve } k > n_m \text{ ise } a_k > a_{n_m} \text{ dir.}$$

.....

Dolayısıyla $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin

$$\mu_K - \frac{d_0}{4} k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} > \mu_{n_m} - \frac{d_0}{4} n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \quad (k > n_m)$$

veya

$$\mu_K - \mu_{n_m} > \frac{d_0}{4} (k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}), \quad (K = n_m + 1, n_m + 2, \dots)$$

olacak şekilde bir $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisi vardır. Teorem ispatlanmıştır.

$\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin (3.10) eşitsizliğini sağlayan bir alt dizisi olmak üzere

$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k)$ limitine L operatörünün düzenli izi diyeceğiz. Bu çalışmada L

operatörünün düzenli izi için bir formül bulunmuştur.

Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta} > x^\delta \quad (x > 1, \delta > 0) \quad (3.11)$$

dır. Gerçekten

$$\frac{x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta}}{x^\delta} = x - \left(\frac{x-1}{x}\right)^\delta (x-1) > x - (x-1) = 1$$

veya

$$x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta} > x^\delta$$

dır.

Lemma 3.1.2. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a > 0, \alpha > 2$) ise m nin büyük değerleri için

$$\lambda_{n_m} < \frac{1}{2}(\mu_{n_m+1} + \mu_{n_m}) < \lambda_{n_m+1}$$

dir. Burada $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ Lemma 3.1.1 in hükmünü sağlayan bir dizidir.

İspat. $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ dizisi Lemma 3.1.1 in hükmünü sağladığından

$$\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} > d_1((n_m+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}) \quad (\delta = \frac{2\alpha}{2+\alpha} - 1)$$

dir. Bu eşitsizlikten ve (3.11) den

$$\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} > d_1 n_m^\delta \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.8) ve bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\begin{aligned} 2\lambda_{n_m+1} - (\mu_{n_m+1} + \mu_{n_m}) &= 2(\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m+1}) + \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} \\ &> d_1 n_m^\delta + 2(\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m+1}) \geq d_1 n_m^\delta - 2\|Q\|_1 \end{aligned}$$

bulunur. $\delta > 0$ olduğundan buradan m nin büyük değerleri için

$$2\lambda_{n_m+1} - (\mu_{n_m+1} + \mu_{n_m}) > 0$$

veya

$$\frac{1}{2}(\mu_{n_m+1} + \mu_{n_m}) < \lambda_{n_m+1} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.12) eşitsizliklerinden bir daha yararlanırsak m nin büyük değerleri için

$$2(\lambda_{n_m} - \mu_{n_m}) < \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m}$$

veya

$$\lambda_{n_m} < \frac{1}{2}(\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1}) \quad (3.14)$$

bulunur. (3.13) ve (3.14) den

$$\lambda_{n_m} < \frac{1}{2}(\mu_{n_m+1} + \mu_{n_m}) < \lambda_{n_m+1}$$

elde edilir. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.4. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a > 0, \alpha > 2$) ise m nin büyük değerleri için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_k - \lambda} \right)$$

serileri $|\lambda| = b_m = 2^{-1}(\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1})$ çemberi üzerinde düzgün yakınsak serilerdir.

İspat. Lemma (3.1.2) ye göre m nin büyük değerleri için

$$\lambda_{n_m} < b_m < \lambda_{n_m+1} \quad (3.15)$$

dir. Öte yandan $\mu_k > 0$ olduğundan (3.8) den

$$\lambda_k > -\|Q\|_1 \quad (k=1,2,\dots) \quad (3.16)$$

bulunur. $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = +\infty$ olduğu dikkate alınır (3.15) ve (3.16) dan

$$|\lambda_k| \neq b_m \quad (k=1,2,\dots)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \quad (k=1,2,\dots)$$

fonksiyonları m nin büyük değerleri için $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde tanımlıdır ve

$$\left| \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right| \leq \frac{|\lambda|}{\left| |\lambda_k| - |\lambda| \right|} = \frac{b_m}{\left| |\lambda_k| - b_m \right|}$$

olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda}$ serisinin $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığını

göstermek için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\lambda_k - b_m\|}$$

serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ olduğundan keyfi $k > N$ için

$$\lambda_k > 2b_m$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu nedenle $k > N$ için

$$\|\lambda_k - b_m\| = \lambda_k - b_m > \lambda_k - \frac{\lambda_k}{2} = \frac{\lambda_k}{2}$$

veya

$$\frac{1}{\|\lambda_k - b_m\|} < \frac{2}{\lambda_k} \quad (3.17)$$

dır. Ayrıca (3.9) formülüne göre keyfi $k > N$ için

$$\lambda_k > d_1 k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \quad (3.18)$$

olacak şekilde bir $d_1 > 0$ sayısı vardır. (3.17) ve (3.18) den

$$\frac{1}{\|\lambda_k - b_m\|} < \frac{2}{d_1 k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} \quad (k > N) \quad (3.19)$$

bulunur. Varsayım gereği $\alpha > 2$ dir ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} 2d_1^{-1} k^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$ serisi yakınsak seridir.

O takdirde (3.19) dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\lambda_k - b_m\|}$$

serisinin yakınsaklığı elde edilir. Benzer şekilde $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_k - \lambda} \right)$ serisinin de $|\lambda| = b_m$

çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığı gösterilebilir. Teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.3 ve (3.9) formülüne göre $k \rightarrow \infty$ iken

$$\lambda_k, \mu_k \sim d_0 k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

dır. Buradan görülüyor ki $\alpha > 2$ ve $\lambda \neq \lambda_k, \mu_k$ ($k=1,2,\dots$) ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k - \lambda|} \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|}$$

serileri yakınsak serilerdir. Dolayısıyla R_λ^0 ve R_λ operatörleri çekirdek operatörlerdir ve

$$\text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) = \text{tr}R_\lambda - \text{tr}R_\lambda^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} - \frac{1}{\mu_k - \lambda} \right)$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969). Bu eşitliği $\frac{\lambda}{2\pi i}$ ile çarpıp $|\lambda| = b_m = 2^{-1}(\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1})$

çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_k - \lambda} \right) d\lambda \quad (3.20)$$

elde edilir. Teorem 3.1.4 e göre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_k - \lambda} \right)$$

serileri $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde düzgün yakınsak serilerdir. Dolayısıyla (3.20) den

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda}{\mu_k - \lambda} d\lambda \quad (3.21)$$

bulunur. $\mu_{n_m} < b_m < \mu_{n_m+1}$ bağıntısından ve Lemma (3.1.2) den m nin büyük değerleri için

$$\{\lambda_k, \mu_k\}_1^{n_m} \subset K(0, b_m) = \{\lambda : |\lambda| < b_m\}$$

$$\lambda_k, \mu_k \notin \overline{K(0, b_m)} = \{\lambda : |\lambda| \leq b_m\} \quad (k \geq n_m + 1)$$

elde edilir.

Bu nedenle

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda - \mu_k} = \begin{cases} \mu_k & , k \leq n_m \quad \text{ise} \\ 0 & , k \geq n_m + 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda - \lambda_k} = \begin{cases} \lambda_k & , k \leq n_m \quad \text{ise} \\ 0 & , k \geq n_m + 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olur. Bunlar (3.21) de yerine konulursa

$$\sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda \quad (3.22)$$

bulunur. Aşağıdaki formülün sağlandığı bilinmektedir :

$$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0 \quad (\lambda \in \rho(L) \cap \rho(L_0))$$

Buradan $p \geq 2$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^p (-1)^j R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j + (-1)^{p+1} R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{p+1}$$

formülü elde edilir. Bu da (3.22) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} \left[\sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j + (-1)^p R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{p+1} \right] d\lambda$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \sum_{j=1}^p D_{mj} + D_m^{(p)} \quad (3.23)$$

bulunur. Burada

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} [R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (j=1,2,\dots) \quad (3.24)$$

$$D_m^{(p)} = \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \cdot \operatorname{tr} [R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{p+1}] d\lambda$$

dır.

Teorem 3.1.5. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a > 0, \alpha > 2$) ise QR_λ^0 operatör fonksiyonu $\rho(L_0)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitiktir ve

$$(QR_\lambda^0)' = Q(R_\lambda^0)^2$$

dır.

İspat. Her $\lambda \in \rho(L_0)$ için R_λ^0 in çekirdek operatörü olduğundan ve

$$R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0 = \Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 R_\lambda^0$$

formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \left\| \frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - QR_\lambda^0}{\Delta\lambda} - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} &= \left\| QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 R_\lambda^0 - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \\ &= \left\| QR_\lambda^0 R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \\ &= \left\| QR_\lambda^0 (R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0) \right\|_{\sigma_1(H_1)} \\ &\leq \left\| QR_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \left\| (R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0) \right\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0 \right\|_1 = 0$ olduğundan buradan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - QR_\lambda^0}{\Delta\lambda} - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} = 0$$

bulunur ki bu da $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - QR_\lambda^0}{\Delta\lambda} = Q(R_\lambda^0)^2$$

veya

$$(QR_\lambda^0)' = Q(R_\lambda^0)^2$$

olması demektir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.6. $B(\lambda)$ kompleks düzlemin bir açık G bölgesinde tanımlı , değerleri $\sigma_1(H)$ uzayına ait ve bu uzayın normuna göre analitik bir operatör fonksiyon ise her n doğalsayı için

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = \text{tr}\left[\frac{dB^n(\lambda)}{d\lambda}\right] = n.\text{tr}[B'(\lambda)B^{n-1}(\lambda)]$$

dır.

İspat. Teoremi ispatlamak için önce tümevarımla

$$(B^n(\lambda))' = \sum_{i=0}^{n-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda) \quad (3.25)$$

formülünün sağlandığını göstereyim. Bu formülün $n=1$ için sağlandığı açıktır. $n=2$ olduğunda

$$(B^2(\lambda))' = (B(\lambda)B(\lambda))' = B'(\lambda)B(\lambda) + B(\lambda)B'(\lambda)$$

veya

$$(B^2(\lambda))' = \sum_{i=0}^1 B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{1-i}(\lambda)$$

dır. (3.25) formülünün $n=m$ için sağlandığını yani

$$(B^m(\lambda))' = \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-1-i}(\lambda) \quad (3.26)$$

olduğunu varsayıp $n=m+1$ için sağlandığını göstermek gerekir.

$$(B^{m+1}(\lambda))' = (B^m(\lambda)B(\lambda))' = (B^m(\lambda))'B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda)$$

dır. $(B^m(\lambda))'$ nün (3.26) ifadesi burada yerine konursa

$$\begin{aligned} (B^{m+1}(\lambda))' &= \left[\sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-1-i}(\lambda) \right] B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-i}(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda) \end{aligned}$$

veya

$$(B^{m+1}(\lambda))' = \sum_{i=0}^m B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-i}(\lambda)$$

elde edilir ki bununla da (3.25) formülü ispatlanmış olur. Varsayım gereği her $\lambda \in G$ için $B(\lambda) \in \sigma_1(H)$ olduğundan (3.25) den

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}[B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda)]$$

elde edilir. $B'(\lambda) \in \sigma_1(H)$ ve her $i \geq 0$ tamsayısı için $B^i(\lambda) \in \sigma_1(H)$ olduğundan bu son eşitlikten

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}[B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda)B^i(\lambda)]$$

veya

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = n \text{tr}[B'(\lambda)B^{n-1}(\lambda)]$$

bulunur (Cohberg ve Krein, 1969). Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.7. Eğer değerleri $\sigma_1(H)$ uzayına ait olan bir $B(\lambda)$ operatör fonksiyonu bir $\lambda = \lambda_0$ noktasında $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitik ise o zaman $\text{tr}B(\lambda)$ skaler fonksiyonu da bu $\lambda = \lambda_0$ noktasında analitiktir ve

$$\text{tr}B'(\lambda_0) = [\text{tr}B(\lambda)]'_{\lambda=\lambda_0}$$

dir.

İspat. $B(\lambda)$ λ_0 noktasında $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitik olduğundan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)} = 0 \quad (3.27)$$

dır. Öte yandan

$$\left| \text{tr} \left[\frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right] \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)}$$

veya

$$\left| \frac{\text{tr}B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \text{tr}B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \text{tr}B'(\lambda_0) \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)}$$

olduğundan (3.27) den

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{\text{tr}B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \text{tr}B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \text{tr}B'(\lambda_0) \right| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\text{tr}B'(\lambda_0) = [\text{tr}B(\lambda)]'_{\lambda=\lambda_0}$$

dir. Teorem ispatlanmıştır.

Yukarıda ispatladığımız teorem 3.1.5. , teorem 3.1.6. ve teorem 3.1.7. aşağıdaki teoremin ispatında kullanılacaktır.

Teorem 3.1.8. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a > 0, \alpha > 2$) ise

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_m} \text{tr}[(QR_\lambda^0)^j] d\lambda$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.5 e göre her j doğal sayısı için $(QR_\lambda^0)^j$ operatör fonksiyonu $\rho(L_0)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitiktir. O takdirde teorem 3.1.6 ya göre

$$\text{tr}\{[(QR_\lambda^0)^j]'\} = j \text{tr}[(QR_\lambda^0)^j (QR_\lambda^0)^{j-1}]$$

dir. Teorem 3.1.5 e göre

$$(QR_\lambda^0)' = Q(R_\lambda^0)^2$$

dir. Bu son iki eşitlikten

$$\text{tr}\{[(QR_\lambda^0)^j]'\} = j \text{tr}[(QR_\lambda^0)^{j-1} Q(R_\lambda^0)^2] = j \text{tr}[(QR_\lambda^0)^j R_\lambda^0] = j \text{tr}[R_\lambda^0 (QR_\lambda^0)^j]$$

bulunur. Bu bağıntı D_{mj} nin (3.24) ifadesinde gözönüne alınırsa

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} \left\{ \left[(QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} d\lambda$$

elde edilir. Bu formül

$$\begin{aligned} D_{mj} &= \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right]' - (QR_\lambda^0)^j \right\} d\lambda \\ &= \frac{(-1)^j}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left[(QR_\lambda^0)^j \right] d\lambda + \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.1.7 ye göre

$$\operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} = \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}'$$

dır. Dolayısıyla

$$\int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} d\lambda = \int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali aşağıdaki gibi iki eğri üzerindeki integralin toplamı şeklinde gösterelim:

$$\int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda = \int_{\substack{|\lambda|=b_m \\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0}} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda + \int_{\substack{|\lambda|=b_m \\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0}} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda \quad (3.29)$$

ε_0 , $b_m + \varepsilon_0 < \mu_{n_m+1}$ olacak şekilde bir pozitif sayı olmak üzere $\operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right]$ fonksiyonunun

$$G_1 = \left\{ \lambda : b_m - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_m + \varepsilon_0, \operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ \lambda : b_m - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_m + \varepsilon_0, \operatorname{Im} \lambda < \varepsilon_0 \right\},$$

basit bağlantılı bölgelerin analitik ve

$$\left\{ \lambda : |\lambda| = b_m, \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \right\} \subset G_1$$

$$\left\{ \lambda : |\lambda| = b_m, \operatorname{Im} \lambda \leq 0 \right\} \subset G_2$$

olduğu dikkate alınırsa Leibnitz formülünü kullanarak (3.29) dan

$$\int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda = \operatorname{tr} \left[-b_m (QR_{-b_m}^0)^j \right] - \operatorname{tr} \left[b_m (QR_{b_m}^0)^j \right] + \left\{ \operatorname{tr} \left[b_m (QR_{b_m}^0)^j \right] - \operatorname{tr} \left[-b_m (QR_{-b_m}^0)^j \right] \right\} = 0$$

elde edilir. (3.28) ve bu son eşitlikten

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left[(QR_\lambda^0)^j \right] d\lambda$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1}$ limitinin hesaplanmasında kullanacağımız aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.1.9. $\{e_i\}_1^w$ ($w \leq \infty$) H uzayının herhangi bir ortonormal elemanlar sistemi olsun. Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1) ve 2) koşullarını sağlıyorsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^w \left| \int_0^{\pi} (Q(x)e_i, e_i)_H \cos 2kx dx \right| < c$$

olacak şekilde $\{e_i\}_1^w$ ortonormal sistemine bağlı olmayan bir c pozitif sayısı vardır.

İspat. $f_i(x) = (Q(x)e_i, e_i)_H$ olsun. Kısmi integrasyon yönteminden yararlanarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f_i(x) \cos 2kx dx &= \int_0^{\pi} f_i(x) \left(\frac{1}{2k} \sin 2kx \right)' dx \\ &= \frac{1}{2k} f_i(x) \sin 2kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2k} \int_0^{\pi} f_i'(x) \sin 2kx dx \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^{\pi} f_i'(x) \left(\frac{1}{2k} \cos 2kx \right)' dx \\ &= \frac{1}{4k^2} f_i'(x) \cos 2kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4k^2} \int_0^{\pi} f_i''(x) \cos 2kx dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| \int_0^{\pi} f_i(x) \cos 2kx dx \right| \leq \frac{1}{4k^2} \left[|f_i'(0)| + |f_i'(\pi)| + \int_0^{\pi} |f_i''(x)| dx \right]$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı i ye göre 1 den w ye ve k ya göre 1 den ∞ a kadar toplamı alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^w \left| \int_0^{\pi} f_i(x) \cos 2kx dx \right| \leq \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^w |f_i'(0)| + |f_i'(\pi)| + \int_0^{\pi} |f_i''(x)| dx \right] \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \quad (3.30)$$

elde edilir. w sonlu olduğunda

$$\sum_{i=1}^w \int_0^{\pi} |f_i''(x)| dx = \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=1}^w |f_i''(x)| \right] dx$$

dır $w = \infty$ olduğunda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |f_i''(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=1}^n |f_i''(x)| \right] dx \leq \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i''(x)| \right] dx$$

dir. Bu son bağıntılardan

$$\sum_{i=1}^w \int_0^{\pi} |f_i''(x)| dx \leq \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=1}^w |f_i''(x)| \right] dx$$

bulunur. Bu eşitsizlik (3.30) da göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^w \left| \int_0^{\pi} f_i(x) \cos 2kx dx \right| \leq c_0 \sum_{i=1}^w \left[|f_i'(0)| + |f_i'(\pi)| \right] + c_0 \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=1}^w |f_i''(x)| \right] dx \quad (3.31)$$

elde edilir. Burada $c_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ dir. Cohberg ve Krein de (1969) ispatlanmış

$$\sum_{i=1}^w |f_i^{(m)}(x)| = \sum_{i=1}^w |(Q^{(m)}(x)e_i, e_i)_H| \leq \|Q^{(m)}(x)\|_{\sigma_1(H)} \quad (m=1,2)$$

eşitsizliğinden yararlanarak (3.31) den

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^w \left| \int_0^{\pi} f_i(x) \cos 2kx dx \right| \leq c_0 \left[\|Q'(0)\|_{\sigma_1(H)} + \|Q'(\pi)\|_{\sigma_1(H)} \right] + c_0 \int_0^{\pi} \|Q''(x)\|_{\sigma_1(H)} dx$$

elde edilir. Hipotez gereği $\|Q''(x)\|_{\sigma_1(H)}$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir

olduğundan bu son eşitsizlikten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \left| \int_0^{\pi} f_i(x) \cos 2kx dx \right| < c$$

bulunur. Teorem ispatlanmıştır.

L_0 operatörünün $\{\mu_q\}_1^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar sistemi sırasıyla $\{\Psi_q(x)\}_1^{\infty}$ olsun. L_0 operatörünün

$$K^2 + \gamma_j \quad (k=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar sistemi sırasıyla $M_k \cos kx \cdot \varphi_j$ olduğundan

$$\psi_q(x) = M_{K_q} \cos K_q x \cdot \varphi_{j_q} \quad (q=1,2,\dots) \quad (3.32)$$

dir.

Teorem 3.1.10. $Q(x)$ 1) – 3) koşullarını sağlıyor ve $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim a \cdot j^{\alpha}$

($0 < a < \infty$, $2 < \alpha < \infty$) ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{4} [tr Q(0) + tr Q(\pi)]$$

dir.

İspat : Teorem 3.1.8 e göre

$$D_{m1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} tr(QR_{\lambda}^0) d\lambda \quad (3.33)$$

dir. QR_{λ}^0 her $\lambda \in \rho(L_0)$ için çekirdek operatörü ve $\{\Psi_q(x)\}_1^{\infty}$ de H_1 uzayının bir ortonormal bazı olduğundan

$$tr(QR_{\lambda}^0) = \sum_{q=1}^{\infty} (QR_{\lambda}^0 \Psi_q, \Psi_q)_1$$

olur (Cohberg ve Krein, 1969).

Bu ifade (3.33) de yerine konulup

$$R_\lambda^0 \Psi_q = (L_0 - \lambda I)^{-1} \cdot \Psi_q = (\mu_q - \lambda)^{-1} \Psi_q$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} D_{m1} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left[\sum_{q=1}^{\infty} (Q R_\lambda^0 \Psi_q, \Psi_q)_1 \right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_q - \lambda} (Q \Psi_q, \Psi_q)_1 \right] d\lambda \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} (Q \Psi_q, \Psi_q)_1 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_q} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.32) den ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_q} = \begin{cases} 1, & q \leq n_m \text{ ise} \\ 0, & q > n_m \text{ ise} \end{cases}$$

formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} D_{m1} &= \sum_{q=1}^{n_m} (Q \Psi_q, \Psi_q)_1 = \sum_{q=1}^{n_m} \int_0^\pi (Q(x) \Psi_q(x), \Psi_q(x)) dx \\ &= \sum_{q=1}^{n_m} \int_0^\pi (Q(x) M_{K_q} \cos K_q x \varphi_{j_q}, M_{K_q} \cos K_q x \varphi_{j_q}) dx \\ &= \sum_{q=1}^{n_m} M_{K_q}^2 \int_0^\pi \cos^2 K_q x (Q(x) \varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n_m} M_{K_q}^2 \int_0^\pi (1 + \cos 2K_q x) (Q(x) \varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}) dx \end{aligned}$$

bulunur. $Q(x)$ 3) koşulunu sağladığından ve

$$M_K = \sqrt{2\pi^{-1}} \quad (K=1,2,\dots)$$

olduğundan buradan

$$D_{m1} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^{n_m} \int_0^\pi \cos 2K_q x (Q(x) \varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}) dx \quad (3.34)$$

elde edilir. Teorem 3.1.9 a göre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos 2Kx dx$$

iki kat serisi mutlak yakınsaktır. Bu durumda bilindiği gibi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{n_m} \int_0^{\pi} (\cos 2K_q x (Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q})) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos 2Kx dx$$

dir. (3.34) de $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilir ve bu son eşitlik göz önüne alınır

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos 2Kx dx$$

bulunur. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos Kx dx + (-1)^k \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos Kx dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos Kx dx \right] \cos K \cdot 0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_j, \varphi_j) \cos Kx dx \right] \cos K\pi \right\} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. 3) koşulunun sağlandığı dikkate alınırsa bu son bağıntının sağ

tarafındaki K ya göre olan toplamlar ikinci mertebeden türevi olan $(Q(x)\varphi_j, \varphi_j)_H$

fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında $\{\cos Kx\}_{K=0}^{\infty}$ fonksiyonlarına göre Fourier serisinin sıra ile

0 ve π noktalarındaki değerlerdir. Dolayısıyla

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} [(Q(0)\varphi_j, \varphi_j) + (Q(\pi)\varphi_j, \varphi_j)]$$

veya

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{4} [trQ(0) + trQ(\pi)]$$

olur. Teorem ispatlanmıştır.

3.2. Düzenli İzin Hesaplanması

(3.23) formülüne ve teorem 3.1.8 e göre

$$\sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \sum_{j=1}^p D_{mj} + D_m^{(p)} \quad (3.35)$$

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \text{tr}[(QR_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (3.36)$$

$$D_m^{(p)} = \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \cdot \text{tr}[R_\lambda^0 (QR_\lambda^0)^{p+1}] d\lambda$$

dir. $\{\Psi_q(x)\}_1^\infty$ de H_1 uzayının bir ortonormal bazı olduğundan her $y \in H_1$ için

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, \Psi_k)_1 \Psi_k$$

ve

$$R_\lambda^0 y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, \Psi_k)_1 R_\lambda^0 \Psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, \Psi_k)_1}{\mu_k - \lambda} \Psi_k$$

dir. Buna göre

$$QR_\lambda^0 \Psi_{k_1} = \frac{Q\Psi_{k_1}}{\mu_{k_1} - \lambda}$$

$$(QR_\lambda^0)^2 \Psi_{k_1} = QR_\lambda^0 \left(\frac{Q\Psi_{k_1}}{\mu_{k_1} - \lambda} \right) = \frac{1}{\mu_{k_1} - \lambda} QR_\lambda^0 (Q\Psi_{k_1})$$

$$= \frac{1}{\mu_{k_1} - \lambda} Q \left[\sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{(Q\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2})_1}{\mu_{k_2} - \lambda} \Psi_{k_2} \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_{k_1} - \lambda} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{(Q\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2})_1}{\mu_{k_2} - \lambda} Q\Psi_{k_2},$$

(3.36) ve (3.38) den

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi ij} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_j=1}^{\infty} \left[\left(\int_{|\lambda|=b_m} \prod_{q=1}^j (\mu_{k_q} - \lambda)^{-1} d\lambda \right) \prod_{q=1}^j (Q\Psi_{k_q}, \Psi_{k_{g(q)+1}})_1 \right] \quad (3.39)$$

bulunur.

Lemma 3.2.1. $n \geq 2$ olmak üzere a_1, a_2, \dots, a_n herhangi kompleks sayılar ve $\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| < R$ ise

$$I = \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)} = 0$$

dır.

İspat. Keyfi $d > 0$ sayısı için

$$I = \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)} = \int_{|z|=R+d} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}$$

olduğundan

$$I = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{|z|=R+d} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)} \quad (3.40)$$

dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)} \right| &\leq \int_{|z|=R+d} \frac{|dz|}{|z-a_1||z-a_2|\dots|z-a_n|} \\ &\leq \int_{|z|=R+d} \frac{|dz|}{(|z-a_1|)(|z-a_2|)\dots(|z-a_n|)} \end{aligned}$$

dir.

$$|z| - |a_i| > (R+d) - R = d \quad (i=1,2,\dots,n)$$

olduğundan buradan

$$\left| \int_{|z|=R+d} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)} \right| \leq d^{-n} \int_{|z|=R+d} |dz| = 2\pi(R+d)d^{-n} \quad (3.41)$$

bulunur. $n \geq 2$ olduğundan (3.40) ve (3.41) den

$$|I| = \lim_{d \rightarrow \infty} \left| \int_{|z|=R+d} \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)} \right| \leq 2\pi \lim_{d \rightarrow \infty} (R+d)d^{-n} = 0$$

veya

$$I=0$$

elde edilir. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

(3.39) formülünden ve Lemma 3.2.1 den

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_j=1}^{\infty} * \left[\left(\int_{|\lambda|=b_m} \prod_{q=1}^j (\mu_{k_q} - \lambda)^{-1} d\lambda \right) \prod_{q=1}^j (Q\Psi_{k_q}, \Psi_{k_{g(q)+1}})_1 \right] \quad (3.42)$$

elde edilir. Bu ifadedeki * işareti $\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \dots, \mu_{k_j}$ sayıları arasında b_m den küçük ve b_m den büyük olanların var olduklarını gösterir.

D_{m2} ve D_{m3} ü sınırlandırılalım. (3.42) formülüne göre

$$\begin{aligned} D_{m2} &= \frac{1}{4\pi i} \sum_{k_1=1}^{n_m} \sum_{k_2=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_{k_1})(\lambda - \mu_{k_2})} \right] (Q\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2})_1 (Q\Psi_{k_2}, \Psi_{k_1})_1 \\ &\quad + \frac{1}{4\pi i} \sum_{k_1=n_m+1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{n_m} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_{k_1})(\lambda - \mu_{k_2})} \right] (Q\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2})_1 (Q\Psi_{k_2}, \Psi_{k_1})_1 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_k)(\lambda - \mu_j)} \right] (Q\Psi_k, \Psi_j)_1 (Q\Psi_j, \Psi_k)_1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

dir. Bu ifadede $k \leq n_m$ ve $j \geq n_{m+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_k)(\lambda - \mu_j)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{1}{(\mu_k - \mu_j)} \left[\frac{1}{\lambda - \mu_k} - \frac{1}{\lambda - \mu_j} \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{\mu_k - \mu_j} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_k} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_j} \right] = \frac{1}{\mu_k - \mu_j} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.43) de yerine konulursa

$$\begin{aligned}
|D_{m2}| &= \left| \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} (\mu_k - \mu_j)^{-1} (\Psi_k, \mathcal{Q}\Psi_j)_1 \overline{(\Psi_k, \mathcal{Q}\Psi_j)_1} \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} (\mu_j - \mu_k)^{-1} |(\Psi_k, \mathcal{Q}\Psi_j)_1|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} (\mu_j - \mu_{n_m})^{-1} |(\Psi_k, \mathcal{Q}\Psi_j)_1|^2 \\
&\leq \sum_{j=n_m+1}^{\infty} (\mu_j - \mu_{n_m})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |(\Psi_j, \mathcal{Q}\Psi_k)_1|^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ H_1 uzayının kapalı bir ortonormal sistemi olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\Psi_j, \mathcal{Q}\Psi_k)_1|^2 = \|\mathcal{Q}\Psi_j\|_1^2 \leq \|\mathcal{Q}\|_1^2$$

dir ve dolayısıyla

$$|D_{m2}| \leq \|\mathcal{Q}\|_1^2 \Omega_m \quad (3.44)$$

olacaktır. Burada

$$\Omega_m = \sum_{j=n_m+1}^{\infty} (\mu_j - \mu_{n_m})^{-1} \quad (m=1,2,\dots) \quad (3.45)$$

dir.

Bu kez D_{m3} ü sınırlandırılm. Bunun için önce (3.42) den yararlanarak bu ifadeyi

$$\begin{aligned}
D_{m3} &= -\frac{1}{6\pi i} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} * \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\mu_i - \lambda)(\mu_j - \lambda)(\mu_k - \lambda)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_i)(\lambda - \mu_j)(\lambda - \mu_k)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_i)(\lambda - \mu_j)(\lambda - \mu_k)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \\
&= I_1 + I_2 \quad (3.46)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterelim. Bu ifadede yer alan I_1 için aşağıdakiler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda-\mu_i)(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i - \mu_j)} (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \right| \\
&\leq \|\mathcal{Q}\|_1 \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_m} \frac{|(\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1| |(\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1|}{(\mu_j - \mu_i)(\mu_k - \mu_i)} \\
&\leq \|\mathcal{Q}\|_1 \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})(\mu_k - \mu_{n_m})} \left[\sum_{i=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\mathcal{Q}\|_1 \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k - \mu_{n_m})} \frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})} \sum_{i=1}^{\infty} |(\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_i)_1|^2
\end{aligned}$$

burada

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_i)_1|^2 = \|\mathcal{Q}\Psi_k\|_1^2 \leq \|\mathcal{Q}\|_1^2$$

olduğu ve (3.45) göz önüne alınırsa

$$|I_1| \leq \|\mathcal{Q}\|_1^3 \Omega_m^2 \tag{3.47}$$

olur. (3.46) in sonundaki I_2 ifadesi

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda-\mu_i)(\lambda-\mu_j)(\lambda-\mu_k)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda-\mu_i)^2(\lambda-\mu_j)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_i)_1 |(\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_j)_1|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{1}{(\lambda-\mu_j)(\mu_i - \mu_k)} \left(\frac{1}{\lambda-\mu_i} - \frac{1}{\lambda-\mu_k} \right) d\lambda \cdot \\
&\quad \quad \quad \mu_i \neq \mu_k \quad \quad \quad (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda-\mu_i)^2(\lambda-\mu_j)} \right] (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1
\end{aligned}$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. Burada q_i ile önce olduğu gibi μ_i özdeğerinin katlılığı gösterilmiştir. Aşağıda I_{21}, I_{22}, I_{23} ifadelerini sınırlandıracağız.

$$\begin{aligned} |I_{21}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_i)^2 (\lambda - \mu_j)} \right] (Q\Psi_i, \Psi_i)_1 |(Q\Psi_i, \Psi_j)_1|^2 \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_i - \mu_j)^2} (Q\Psi_i, \Psi_i)_1 |(Q\Psi_i, \Psi_j)_1|^2 \right| \\ &\leq \|Q\|_1 \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})(\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})} |(Q\Psi_i, \Psi_j)_1|^2 \\ &\leq \|Q\|_1 \frac{1}{(\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})} \sum_{i=1}^{\infty} |(Q\Psi_i, \Psi_j)_1|^2 \\ &\leq \|Q\|_1^3 \frac{1}{(\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})} \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.1.1 ve (3.11) eşitsizliğinden yararlanarak buradan

$$|I_{21}| \leq d_1^{-1} n_m^{-\delta} \|Q\|_1^3 \Omega_m, \quad (\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2}) \quad (3.49)$$

elde edilir. I_{22} yi sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} |I_{22}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{1}{(\lambda - \mu_j)(\mu_i - \mu_k)} \left(\frac{1}{\lambda - \mu_i} - \frac{1}{\lambda - \mu_k} \right) d\lambda \cdot \right. \\ &\quad \left. (Q\Psi_i, \Psi_k)_1 (Q\Psi_k, \Psi_j)_1 (Q\Psi_j, \Psi_i)_1 \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j - \mu_i)(\mu_j - \mu_k)} (Q\Psi_i, \Psi_k)_1 (Q\Psi_k, \Psi_j)_1 (Q\Psi_j, \Psi_i)_1 \right| \\ &\quad \mu_i \neq \mu_k \\ &\leq \|Q\|_1 \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})(\mu_j - \mu_{n_m})} |(Q\Psi_k, \Psi_j)_1| |(Q\Psi_j, \Psi_i)_1| \\ &= \|Q\|_1 \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})^2} \left(\sum_{k=1}^{n_m} |(Q\Psi_k, \Psi_j)_1| \right) \left(\sum_{i=1}^{n_m} |(Q\Psi_j, \Psi_i)_1| \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_{22}| &\leq \|Q\|_1 n_m \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})(\mu_j - \mu_{n_m})} \left(\sum_{k=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq \|Q\|_1 n_m (\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})^{-1} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})} \sum_{k=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1|^2 \right] \\
&\leq \|Q\|_1^3 n_m (\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})^{-1} \Omega_m
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.1 ve (3.11) eşitsizliği burada tekrar kullanılırsa

$$|I_{22}| \leq d_1^{-1} n_m^{1-\delta} \Omega_m \|Q\|_1^3, \quad (\delta = \frac{\alpha-2}{\alpha+2}) \quad (3.50)$$

bulunur. Şimdi de I_{23} ü sınırlandıralım:

$$\begin{aligned}
|I_{23}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{(\lambda - \mu_i)^2 (\lambda - \mu_j)} (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1 (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 \right] \right| \\
&\quad \begin{array}{l} i \neq k \\ \mu_i \neq \mu_k \end{array} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} [(\mu_j - \mu_i)^{-2} (\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1 (\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1 (\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1] \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} [(\mu_j - \mu_i)^{-2} |(\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1| |(\mathcal{Q}\Psi_i, \Psi_k)_1| |(\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1|] \\
&\leq \|Q\|_1 \sum_{j=n_m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_j - \mu_{n_m})^2} \left(\sum_{k=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_k, \Psi_j)_1| \right) \left(\sum_{i=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1| \right) \right] \\
&\leq \|Q\|_1 n_m (\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})^{-1} \sum_{j=n_m+1}^{\infty} (\mu_j - \mu_{n_m})^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n_m} |(\mathcal{Q}\Psi_j, \Psi_i)_1|^2 \right) \\
&\leq \|Q\|_1^3 n_m (\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})^{-1} \Omega_m
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.1. ve (3.11) eşitsizliğinden yararlanarak buradan

$$|I_{23}| \leq d_1^{-1} n_m^{1-\delta} \Omega_m \|Q\|_1^3 \quad (3.51)$$

(3.48), (3.49), (3.50) ve (3.51) den

$$|I_2| \leq 3d_1^{-1} n_m^{1-\delta} \Omega_m \|Q\|_1^3 \quad (3.52)$$

elde edilir.

(3.46) , (3.47) ve (3.52) den D_{m_3} için

$$|D_{m_3}| \leq \|Q\|_1^3 \Omega_m (\Omega_m + 3d_1^{-1}n_m^{1-\delta}) \quad , \quad \left(\delta = \frac{\alpha-2}{\alpha+2} \right) \quad (3.53)$$

bulunur.

Teorem 3.2.1. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim a \cdot j^\alpha$ ($0 < a < \infty$, $2 < \alpha < \infty$) ise $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} < \text{const.} n_m^{1-\delta} \left(\delta = \frac{\alpha-2}{\alpha+2} \right)$$

dir.

İspat . $\lambda \notin \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ için R_λ^0 normal operatör olduğundan

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k - \lambda|}$$

dir (Cohberg ve Krein, 1969). $|\lambda| = b_m = 2^{-1}(\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1})$ olduğundan buradan

$$\begin{aligned} \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda| - \mu_k} \leq \sum_{k=1}^{n_m} \frac{2}{\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2\mu_k} + \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{2}{2\mu_k - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_m} \frac{2}{\mu_{n_m+1} - \mu_k} + \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k - \mu_{n_m}} = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{2}{\mu_{n_m+1} - \mu_k} + 2\Omega_m \end{aligned} \quad (3.54)$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 ve (3.11) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{\mu_{n_m+1} - \mu_k} < \frac{n_m}{\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m}} < \frac{n_m}{d_1[(n_m+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}]} < \frac{n_m}{d_1 n_m^\delta} = d_1^{-1} n_m^{1-\delta} \quad (3.55)$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 bir daha kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \mu_{n_m}} < \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{d_1(K^{1+\delta} - n_m^{1+\delta})} \\ &= \frac{1}{d_1[(n_m+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}]} + d_1^{-1} \sum_{k=n_m+2}^{\infty} \frac{1}{K^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{k=n_m+2}^{\infty} \frac{1}{K^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{n_m+i}^{n_m+i+1} \frac{dx}{(n_m+i+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}}$$

ve $x \in [n_m+i, n_m+i+1]$ için

$$\frac{1}{(n_m+i+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} \leq \frac{1}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}}$$

olduğundan

$$\int_{n_m+i}^{n_m+i+1} \frac{dx}{(n_m+i+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} \leq \int_{n_m+i}^{n_m+i+1} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}}$$

ve

$$\sum_{k=n_m+2}^{\infty} \frac{1}{K^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{n_m+i}^{n_m+i+1} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} = \int_{n_m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}}$$

olur. Bu son bağıntı (3.56) de göz önüne alınırsa

$$\Omega_m < \frac{1}{d_1[(n_m+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}]} + d_1^{-1} \int_{n_m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} \quad (3.57)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali sınırlandırmak için

$$x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta} = t$$

dönüşümünü yapalım. O takdirde

$$\int_{n_m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} = \int_{\alpha_m}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)t} (t + n_m^{1+\delta})^{-\frac{\delta}{1+\delta}} dt \quad (3.58)$$

bulunur. Burada $\alpha_m = (n_m+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}$ dır. (3.58) den

$$\begin{aligned} \int_{n_m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} &< \frac{1}{1+\delta} \int_{\alpha_m}^{\infty} t^{-1-\frac{\delta}{1+\delta}} dt = -\frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{1+\delta}{\delta} \cdot t^{-\frac{\delta}{1+\delta}} \Big|_{\alpha_m}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\delta} [(n_m+1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}]^{\frac{\delta}{1+\delta}} < \delta^{-1} n_m^{\frac{\delta^2}{1+\delta}} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.57) den ve bu son bağıntıdan

$$\Omega_m < d_1^{-1} n_m^{-\delta} + d_1^{-1} \delta^{-1} n_m^{\frac{\delta^2}{1+\delta}} \quad (3.59)$$

bulunur. (3.54) , (3.55) ve (3.59) den

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} < \frac{6}{d_1 \delta} \cdot n_m^{1-\delta}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$|\lambda| = b_m$ ve m nin büyük değerleri için R_λ operatörünün normunu sınırlandıralım. $|\lambda| = b_m$ için

$$\|\lambda_k - |\lambda|\| = \left\| \lambda_k - \frac{1}{2} \cdot (\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1}) \right\| = \frac{1}{2} |\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2|\lambda_k|| \quad (3.60)$$

dir. $k \leq n_m$ ve m nin büyük değerleri için $|\lambda_k| < \lambda_{n_m}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2|\lambda_k| &\geq \mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2\lambda_{n_m} = \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} + 2(\mu_{n_m} - \lambda_{n_m}) \\ &\geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} - 2|\mu_{n_m} - \lambda_{n_m}| \end{aligned}$$

dir. (3.8) eşitsizliğine göre buradan

$$\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2|\lambda_k| \geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} - 2\|Q\|_1 \quad (3.61)$$

elde edilir. $k \geq n_m + 1$ ve m nin büyük değerleri için $|\lambda_k| = \lambda_k \geq \lambda_{n_m+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2|\lambda_k| - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1} &\geq 2\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1} \\ &= 2(\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m+1}) + \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} \\ &\geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} - 2|\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m+1}| \end{aligned}$$

olur. Buradan (3.8) eşitsizliği bir daha kullanılırsa

$$2|\lambda_k| - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1} \geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} - 2\|Q\|_1 \quad (3.62)$$

bulunur. $\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m}) = \infty$ olduğundan (3.60) , (3.61) ve (3.62) den

$$\|\lambda_k - |\lambda|\| > \frac{1}{4} (\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m})$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 den ve (3.11) eşitsizliğinden yararlanarak bu son eşitsizlikten

$$\|\lambda_k - |\lambda|\| > \frac{d_1}{4} [(n_m + 1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}] > \frac{d_1}{4} n_m^\delta \quad \left(\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right)$$

bulunur. Dolayısıyla $|\lambda| = b_m$ ve m nin büyük değerleri için

$$|\lambda_k - \lambda| > \frac{d_1}{4} n_m^\delta \quad (3.63)$$

dır. Diğer yandan R_λ operatörünün s sayıları $\{|\lambda_k - \lambda|^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ olduğundan

$$\|R_\lambda\|_1 = \max_k \{|\lambda_k - \lambda|^{-1}\} \quad (3.64)$$

olacaktır (Cohberg ve Krein, 1969). (3.63) ve (3.64) dan

$$\|R_\lambda\|_1 < \frac{4}{d_1} \cdot n_m^{-\delta}, \quad \left(\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right) \quad (3.65)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim a \cdot j^\alpha$ ($0 < a < \infty$, $2 < \alpha < \infty$) olduğunu varsayalım.

Bu takdirde eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1) ve 2) koşullarını sağlıyorsa $j \geq 2$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{mj} = 0$$

dir.

İspat . (3.36) formülünden yararlanarak D_{mj} aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned} |D_{mj}| &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} |tr(QR_\lambda^0)^j| \cdot |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \|(QR_\lambda^0)^j\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|QR_\lambda^0\|_1^{j-1} |d\lambda| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|D_{mj}| &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \|Q\|_1 \cdot \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|QR_\lambda^0\|_1^{j-1} |d\lambda| \\
&\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \|Q\|_1^j \cdot \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|R_\lambda^0\|_1^{j-1} |d\lambda|
\end{aligned} \tag{3.66}$$

dir. $Q(x) \equiv 0$ halinde $R_\lambda = R_\lambda^0$ olduğu dikkate alınırsa (3.65) eşitsizliğine göre

$$\|R_\lambda^0\|_1 < \frac{4}{d_1} \cdot n_m^{-\delta}, \quad \left(\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right) \tag{3.67}$$

olur. Teorem 3.2.1 , (3.66) ve (3.67) bağıntılarından

$$|D_{mj}| \leq \text{const} \int_{|\lambda|=b_m} n_m^{1-\delta} \cdot n_m^{-\delta(j-1)} \cdot |d\lambda| \leq \text{const} \cdot \mu_{n_m} \cdot n_m^{1-\delta j}$$

elde edilir. $\mu_{n_m} \leq \text{const} \cdot n_m^{1+\delta}$ olduğundan buradan

$$|D_{mj}| \leq \text{const} \cdot n_m^{2-\delta(j-1)} \tag{3.68}$$

bulunur. Buradan görüldüğü gibi $j > 1 + 2\delta^{-1}$ olduğunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{mj} = 0$$

dir. Teoremin ispatının tamamlanması için bu eşitliğin $2 \leq j \leq 1 + 2\delta^{-1}$ için sağlandığını

göstermek gerekir. Basit olsun diye bunu $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ hali için gösterelim. (3.44) , (3.45) ve

(3.59) den

$$|D_{m2}| \leq \|Q\|_1^2 d_1^{-1} \left(n_m^{-\delta} + \delta^{-1} n_m^{\frac{\delta^2}{1+\delta}} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m2} = 0$$

bulunur. (3.53) ve (3.59) den

$$\begin{aligned}
|D_{m3}| &\leq \|Q\|_1^3 \Omega_m (\Omega_m + 3d_1^{-1}n_m^{1-\delta}) \\
&\leq 2\|Q\|_1^3 d_1^{-1}\delta^{-1}n_m^{\frac{\delta^2}{1+\delta}} \left(2d_1^{-1}\delta^{-1}n_m^{\frac{\delta^2}{1+\delta}} + 3d_1^{-1}n_m^{1-\delta} \right) \\
&\leq 2\|Q\|_1^3 d_1^{-2}\delta^{-2} \left(2n_m^{\frac{2\delta^2}{1+\delta}} + 3n_m^{\frac{1-2\delta^2}{1+\delta}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m3} = 0$$

bulunur. Öte yandan $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ halinde $j \geq 4$ için (3.68) den

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{mj} = 0$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu çalışmanın esas sonucu aşağıdaki teoremden ibarettir.

Teorem 3.2.3. $Q(x)$ operatör fonksiyonununun 1) - 3) koşullarını sağladığını varsayalım.

Eğer ek olarak $j \rightarrow \infty$ iken $\gamma_j \sim a \cdot j^\alpha$ ($0 < a < \infty$, $2 < \alpha < \infty$) ise L operatörünün düzenli izi için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{1}{4} [trQ(0) + trQ(\pi)]$$

formülü sağlanır.

İspat. Teorem 3.1.10 ve teorem 3.2.2 yi kullanarak (3.35) formülünden L operatörünün düzenli izi için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{1}{4} [trQ(0) + trQ(\pi)] + \lim_{m \rightarrow \infty} D_m^{(p)} \quad (3.69)$$

bulunur.

Burada

$$D_m^{(p)} = \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr}[R_\lambda(QR_\lambda^0)^{p+1}] d\lambda$$

dır. $D_m^{(p)}$ yi sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} |D_m^{(p)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=b_m} |\lambda| |\operatorname{tr}[R_\lambda(QR_\lambda^0)^{p+1}]| d\lambda \\ &\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda(QR_\lambda^0)^{p+1}\|_{\sigma_1(H_1)} d\lambda \\ &\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda\|_1 \| (QR_\lambda^0)^{p+1} \|_{\sigma_1(H_1)} d\lambda \\ &\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda\|_1 \| (QR_\lambda^0)^p \|_1 \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} d\lambda \\ &\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda\|_1 \|Q\|_1^p \|R_\lambda^0\|_1^p \|Q\|_1 \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} d\lambda \end{aligned}$$

Teorem 3.2.1 ve (3.65) eşitsizliğinden yararlanarak buradan

$$|D_m^{(p)}| \leq \operatorname{const} \cdot b_m^2 n_m^{-(p+1)\delta} n_m^{1-\delta}$$

veya $b_m \leq \operatorname{const} \cdot n_m^{1+\delta}$ olduğu hatırlanırsa

$$|D_m^{(p)}| \leq \operatorname{const} \cdot n_m^{-(p+2)\delta+1} n_m^{2(1+\delta)} = \operatorname{const} \cdot n_m^{3-p\delta}$$

elde edilir. Buradan görülüyor ki $p > 3\delta^{-1}$ olduğunda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_m^{(p)} = 0$$

dır. (3.69) formülünden ve bu eşitlikten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{1}{4} [\operatorname{tr}Q(0) + \operatorname{tr}Q(\pi)]$$

bulunur. Teorem ispatlanmıştır.

Örnek 3.3.

$H = L_2[0,1]$ olsun. $D(A)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi(t)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim:

a) $\varphi'''(t)$ $[0,1]$ aralığında mutlak süreklidir ve $\varphi^{(4)}(t) \in L_2[0,1]$

b) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0$

A , $D(A)$ dan $L_2[0,1]$ e

$$A\varphi = \frac{d^4\varphi(t)}{dt^4}$$

şeklinde bir operatör olsun. Bu operatör

$$A = A^* \geq I \text{ ve } A^{-1} \in \sigma_\infty(L_2[0,1])$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri

$$\gamma_j = (j\pi)^4 \quad (j=1,2,3,\dots)$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da

$$\varphi_j(t) = \sqrt{2} \sin j\pi t \quad (j=1,2,3,\dots)$$

şeklinde. $Q(x)$ olarak her $x \in [0,\pi]$ için $L_2[0,1]$ den $L_2[0,1]$ e

$$Q(x)\varphi(t) = \cos x \int_0^1 (t+s)^2 \varphi(s) ds$$

operatör fonksiyonunu alalım. Bu operatör fonksiyonun 1), 2) ve 3) koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Ayrıca $H_1 = L_2(L_2[0,1]; [0,\pi]) = L_2([0,\pi] \times [0,1])$ olduğu gösterilebilir. Ele aldığımız bu örnekte L_0 ve L , $D(L_0) = D(L) \subset H_1$ olmak üzere $D(L_0)$ dan H_1 e sırasıyla

$$l_0(u) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4},$$

$$l(u) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cos x \int_0^1 (t+s)^2 u(x,s) ds$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = u''_t(x,0) = u(x,1) = u''_t(x,1) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş operatörlerdir. $l_0(u)$ ve $l(u)$ ifadelerinde yer alan

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ türevi $L_2[0,1]$ uzayındaki norma göre anlaşılacaktır. Yani

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_0^1 \left| \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|^2 dt = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_0^1 \left| \frac{u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|^2 dt = 0$$

dır. L_0 operatörünün özdeğerleri

$$K^2 + \pi^4 j^4 \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,3,\dots)$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da

$$M_K = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & , K = 0 & \text{ise} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} & , K = 1,2,\dots & \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\sqrt{2} M_K \cos Kx \sin j\pi t \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,3,\dots)$$

şeklindedir.

Bu kez de $H_1 = L_2([0,\pi] \times [0,1])$ uzayında

$$l_1(u) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$$

diferansiyel ifadesini gözönüne alalım. Bu ifadedeki $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ veya $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$ türevleri adi

bildiğimiz kısmi türevler olarak alınmıştır.

D_0 ile

c) $u(x,t)$ $[0,\pi] \times [0,1]$ dikdörtgeninde $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$ sürekli türevlerine sahiptir.

d) $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$

$$u(x,0) = u''_t(x,0) = u(x,1) = u''_t(x,1) = 0$$

koşullarını sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim. D_0 , H_1 uzayının yoğun bir manifoldu D_0 dan H_1 e

$$L'_1 = L_1(u)$$

operatörü de bir simetrik operatördür. L'_1 operatörünün özdeğerleri de

$$K^2 + \pi^4 j^4 \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,3,\dots)$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da

$$\sqrt{2} M_K \cos Kx \sin j\pi t \quad (K=0,1,2,\dots; j=1,2,3,\dots)$$

şeklinindedir. Görüldüğü gibi L'_1 operatörünün ortonormal özelemanlar sistemi H_1 uzayının

bir ortonormal bazıdır. Bu durumda teorem 3.1.1 e göre $L_1 = \overline{L'_1}$ operatörü kendine eş operatördür. Diğer yandan H_1 den H_1 e

$$Qu = \cos x \int_0^1 (t+s)^2 u(x,s) ds$$

operatörü sınırlı ve kendine eş olduğundan

$$L_2 = L_1 + Q$$

operatörü de kendine eş olacaktır. Böylece L_0 ve L_1 , H_1 uzayında aşağıdaki özelliklere sahip olan operatörlerdir:

- 1) $L_0 = L_0^*$ ve $L_1 = L_1^*$
- 2) L_0 ve L_1 operatörleri saf ayrık spektruma sahiptirler.
- 3) L_0 ve L_1 operatörleri aynı özdeğerlere ve aynı özfonksiyonlara sahiptirler.

Bu takdirde $L_0 = L_1$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $L = L_2$ olacaktır.

$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ sırasıyla L_1 ve L_2 operatörlerinin özdeğerleri ise teorem 3.2.3 e göre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{1}{4} [\text{tr}Q(0) + \text{tr}Q(\pi)]$$

dir. $Q(0) = -Q(\pi)$ olduğundan $\text{tr}Q(0) = -\text{tr}Q(\pi)$ dir ve dolayısıyla $L = L_2$ operatörünün düzenli izi sifıra eşittir. Yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = 0$$

dir.



SONUÇ

Bu tez çalışmasında $H_1 = L_2(H; [0, \pi])$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L operatörünün düzenli izi incelenmiştir. Burada A , H uzayında

$$A = A^* \geq I \text{ ve } A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. $Q(x)$ de her $x \in [0, \pi]$ için H den H ye kendine eş çekirdek operatördür.

KAYNAKLAR

Adıgözelov, E.E., (1976), “Operatör katsayılı iki Sturm-Liouville operatörünün farkının izi hakkında” , iz. An Az SSR, seriya fiz-tekn. i mat. nauk, No:5, 1976, 20-24 (R)*.

Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E.E., (1996), “Sınırlı operatör katsayılı tekil Sturm-Liouville operatörünün düzenli izi hakkında” , Differens. uravneniya, 1996, T.32 ,No:12, 1587-1592.

Cohberg, İ.C. ve Krein, M.G. ,(1969), “İntroduction to the theory of linear non-self adjoint operators” , translation of Mathematical Monograph, Volume 18, Amer.math.Sos. , 1969, Providence , R.I.

Dikiy, L.A. , (1953) , “Gelfand-Levitanın bir formülü hakkında” ,Uspeki matem.Nauk , 1953, T.8, No:2 , 119-123 (R).

Dubrovski, V.V.,(1996), “Regularized traces of selfadjoint operators”, Vestsi Akad., Navuk Belarusi, Ser.Fiz.Mat.Navuk, 1996, No:1,30-33,124.

Fulton, T.C. ve Pruess, S.A.,(1994), “Eigenvalue and eigenfunction asympmtotics for regular Sturm-Liouville problems”, J.Math.Anal. Appl.188,1994, 297-340.

Gasimov, M.G. ve Levitan, B.M. , (1963), “İki tekil Sturm-Liouville operatörünün özdeğerlerinin farklarının toplamı hakkında” Dokl. AN SSSR,1963 , T.151 , No:5 , 1014-1017 (R).

Gelfand, İ.M. ve Levitan , B.M. , (1953), “İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için bir formül hakkında”, Dokl.Akad.Nauk SSSR, 1953, T.88, No:4 , 593-596 , (R).

Gorbaçuk, V.İ., (1975), “Vektör fonksiyonu uzayında diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin asimtotik davranışı hakkında” , Ukr. Matem. Jurnal, 1975, T.27, No:5, 657-664, (R).

Guseynov, G.Ş. ve Levitan, B.M., (1978), “Sturm-Liouville operatörü için iz formülleri hakkında” , Vestnik MGU, ser.matem-mekan.,1978, No:1, 40-49 (R).

Halberg, C.J. , and Kramer, V.A., (1960) “A Generalization of the trace concept”, Duke Mathematical Journal,1960, Vol.27, No:4, 607-618.

Halilova, R.Z., (1976), “Sturm-Liouville operatör denkleminin izinin düzenlenmesi hakkında” , Funks.analiz,teoriya funksi i ik pril.-Mahaçkala , 1976, No:3 , 1.bölüm , 154-161 , (R).

Hille, E. ve Philips, R.S., (1957) , “Functional Analysis and Semi-Groups.” Collog.Publ.Math.Soc., 1957.

* :R, kaynağın Rusça olduğunu gösteriyor.

Levitan, B.M., (1964) , “Sturm-Liouville operatörü için düzenli izin hesaplanması” , Uspeki matem.nauk,1964, T.19, No:1, 161-164 (R).

Levitan, B.M. ve Sargsyan, İ.S., (1991) , “Sturm-Liouville and Dirac operators” , Kluzer , Dordrechz, 1991.

Lidskiy V.B. ve Sadovniçiy, V.A. , (1967) “Bir sınıfa ait olan tam fonksiyonlarının köklerinin düzenli toplamı” , Funks.analiz i ego pril.,1967, T.1, No:2, 52-59 (R).

Lysternik, L.A., and Sobolev, V.I., (1955), “Elements of functional analysis”, (English Translation), 1955,New York Fredrick Ungar.

Maksudov, F.G., Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E.E., (1984), “On a regularized trace of Sturm-Liouville operator on a finite interval with the unbounded operator coefficient”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, English translation: Soviet Math. Dokl.30, 1984, no:1, 169-173.

Naimark, M.A., (1968) , “Linear differential operators”, part I,II,1968, London.

Smirnov, V.I., (1964) , “A course of Higher Mathematics”,1964, Vol.5, New York pergamon press.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	19.04.1970	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1981-1987	Kadıköy Kız Lisesi
Lisans	1988-1992	Yıldız Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi , Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1992-1994	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü , Matematik Anabilim Dalı
Doktora	1994-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü , Matematik Anabilim Dalı
Çalıştığı Kurum(lar)	1992-Devam ediyor	YTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi.