

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

L-BULANIK ÖKLİD İDEALLERİ

85057

Ayten KOÇ

**F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 30 Haziran 1999
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erol BALKANAY (Y.T.Ü)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hülya ŞENKON (İ.Ü)
: Prof. Dr. Haluk ORAL (B.Ü)

Erol Balkanay
Hülya Şenkön
Haluk Oral

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİZASYON MERKEZİ**

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. BULANIK GRUP	1
1.1 Bulanık Küme ve Bulanık Grup	1
1.2 Seviye Alt Grupları	3
2. BULANIK İDEALLER	6
2.1 Halkalar	6
2.2 Bölüm Halkaları	9
2.3 Bulanık İdealler	10
2.4 Asal Bulanık İdealler	16
2.5 İki Değerli Bulanık İdealler	20
2.6 Güçlü Asal Bulanık İdealler	22
3. <i>L</i> -BULANIK ÖKLİD İDEAL	24
3.1 <i>L</i> -Bulanık öklid idealleri	24
3.2 Bulanık-Bölüm Halkaları	31
4. SONUÇLAR	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGE LİSTESİ

A	Bulanık (fuzzy) alt küme
A_t	A bulanık alt kümesinin bir seviye (level) alt kümesi
f	R den R' üne bir halka homomorfizması
\bar{f}	R/I dan R ye bir halka homomorfizması
G	Grup
H	G grubunun bir alt grubu
I	10. ve 24. sayfalarda indis kümesi, diğer sayfalarda R halkasının bir ideali
J	10. ve 24. sayfalarda indis kümesi, diğer sayfalarda bir L -bulanık ideal
J_α	Seviye kesimler (level cuts)
K	Cisim
$Ker f$	f homomorfizmasının çekirdeği
L	Örgü (lattice)
nat_I	Doğal homomorfizma
R	Değişmeli ve birimli bir halka
R'	Değişmeli ve birimli bir halka
R_J	J nin $J(0)$ -seviye kesimi
S	Küme
δ	R tamlık bölgesinden N ye bir fonksiyon

TEŞEKKÜR

Doktoramı yöneten ve çalıŐmalarımnda yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof.Dr.Erol BALKANAY'a ve bana her zaman destek olan aileme teŐekkürlerimi sunarım.

Ayten KOÇ
İstanbul, 1999



ÖZET

L-bulanık Öklid ideal adlı çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm de bulanık alt küme, bulanık alt grup, bulanık alt kümenin seviye alt kümesi kavramlarına değinilmiştir. Bulanık alt küme ve bulanık alt grup ile ilgili temel teoremler verilmiş ve bir grubun alt grubu ile bulanık alt grubun seviye alt grubu arasındaki ilişki anlatılmıştır.

II. bölümde homomorfilerin çarpım teoremini, Öklid bölgesi tanımını ve bölüm halkaları ile ilgili bazı temel teoremleri verdik. Bu bölümde ayrıca *L*-bulanık ideal, bulanık bölüm halkası tanımları ve *L*-bulanık idealleri ile ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir.

Tezimizin özgün bölümünü oluşturan son bölümde ise birimli, değışmeli halkalarda *L*-bulanık ideal tanımına bir koşul daha eklenerek yeni bir yapı tanımlanmış, verilen ek koşul Öklid bölgesi koşullarından sonuncusuna benzediğinden, bu yapıya *L*-bulanık Öklid ideali denilmiştir. Bu yolla elde edilen *L*-bulanık Öklid ideali incelenmiş ve bununla ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir.

ABSTRACT

Our thesis named *L*-fuzzy Euclidean Ideal consists of three chapters.

First chapter deals with concepts of fuzzy subset, fuzzy subgroup, a level subset of the fuzzy subset. We give basic theorems about fuzzy subset and fuzzy subgroup. Certain basic relationship between a subgroup of any group and a level subgroup of fuzzy subgroup is given.

In chapter II, we give the theorem of Factorization of Homomorphisms, definition of a Euclidean Domain, some structural theorems for quotient ring. Also in this chapter, there exist definition of *L*-fuzzy ideal and fuzzy quotient ring, and some theorems about *L*-fuzzy ideals.

In last chapter, the original part of the thesis, we define an *L*-fuzzy Euclidean ideal on a commutative ring with identity. The concept of fuzzy ideals is restricted by introducing *L*-fuzzy Euclidean ideals in rings. So we examine *L*-fuzzy Euclidean ideals of a ring. In particular we give some structural theorems for an *L*-fuzzy Euclidean ideal.

1. BULANIK (FUZZY) GRUP

Bu bölümde tezimizle ilgili bulanık küme ve bulanık grup kavramları özetlenmiştir.

1.1. Bulanık Küme ve Bulanık Grup

Tanım 1.1.1. S bir küme olsun.

$$A : S \rightarrow [0, 1] \quad (1.1)$$

fonksiyonuna S in bir bulanık (fuzzy) alt kümesi denir. (Sivaramakrishna Das, 1981)

Tanım 1.1.2. G bir grup olsun. G nin bir A bulanık alt kümesi

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \text{her } x, y \in G \text{ için } A(xy) \geq \min\{A(x), A(y)\} \\ \text{(ii)} \quad & A(x^{-1}) \geq A(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

koşullarını sağlıyorsa bu A bulanık alt kümesine G nin bir bulanık alt grubu denir. (Sivaramakrishna Das, 1981)

Tanım 1.1.3. S kümesinin bir $A : S \rightarrow [0, 1]$ bulanık alt kümesi ele alınsın.

Bir $t \in [0, 1]$ için

$$A_t = \{x \in S \mid A(x) \geq t\} \quad (1.3)$$

kümesine A bulanık alt kümesinin bir seviye (level) alt kümesi denir. (Sivaramakrishna Das, 1981)

A , G nin bir bulanık alt grubu ise her $x \in G$ için

$$A(x) \leq A(e) \quad (1.4)$$

dir. (Sivaramakrishna Das, 1981)

Teorem 1.1.1. G bir grup ve A , G nin bir bulanık alt grubu olsun. O zaman $t \in [0, 1]$ için G nin etkisiz elemanı e ve $t \leq A(e)$ olmak üzere A_t seviye alt kümesi, G nin bir alt grubudur. (Sivaramakrishna Das, 1981)

İspat.

$A_t = \{x \in G \mid A(x) \geq t\}$ ve $A(e) \geq t$ olduğundan $e \in A_t$ dir. Böylece

$$A_t \neq \emptyset \quad (1.5)$$

dir. $x, y \in A_t$ alalım.

$$A(x) \geq t, \quad A(y) \geq t \quad (1.6)$$

dir. A bir bulanık alt grup olduğundan $A(xy) \geq \min\{A(x), A(y)\}$ dir.

$$\Rightarrow A(xy) \geq t$$

$$\Rightarrow xy \in A_t. \quad (1.7)$$

$x \in A_t$ alalım. O zaman $A(x) \geq t$ olur. A bir bulanık alt grup olduğundan $A(x^{-1}) \geq A(x)$ dir. Buradan $A(x^{-1}) \geq t$ bulunur. Bu ise $x^{-1} \in A_t$ demektir. Sonuç olarak A_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubudur.

Teorem 1.1.2. G bir grup ve A da G nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer $t \leq A(e)$ koşuluna uyan her $t \in [0, 1]$ için A_t , G nin bir alt grubu ise A , G nin bir bulanık alt grubudur. (Sivaramakrishna Das, 1981)

İspat.

$x, y \in G$ alalım. Burada $A(x) = t_1, A(y) = t_2$ ve $t_1 < t_2$ olsun.

O zaman $A_{t_2} \subseteq A_{t_1}$, $x \in A_{t_1}$, $y \in A_{t_2}$ bulunur. Yani $y \in A_{t_1}$ dir.

Hipotezden A_{t_1} , G nin bir alt grubu olduğundan $xy \in A_{t_1}$ dir.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(xy) &\geq t_1 = \min\{A(x), A(y)\} \\ \Rightarrow A(xy) &\geq \min\{A(x), A(y)\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Şimdi de her $x \in G$ için $A(x^{-1}) \geq A(x)$ olduğunu gösterelim. $A(x) = t_k$ olsun. Bu da $x \in A_{t_k}$ demektir. A_{t_k} , G nin bir alt grubu olduğundan $x^{-1} \in A_{t_k}$ dir. Böylece

$$A(x^{-1}) \geq t_k \quad (1.9)$$

olur. $t_k = A(x)$ olduğundan $A(x^{-1}) \geq A(x)$ elde edilir. Dolayısıyla A , G nin bulanık alt grubudur.

1.2. Seviye Alt Grupları

Tanım 1.2.1. G bir grup ve A , G nin bir bulanık alt grubu olsun. $t \in [0, 1]$ ve $t \leq A(e)$ olmak üzere A_t alt gruplarına A nın seviye alt grupları denir. (Sivaramakrishna Das, 1981)

G sonlu bir grup ise G nin alt gruplarının sayısı sonludur. Fakat bir A bulanık alt grubunun seviye alt gruplarının sayısı sonsuz gözükür. Gerçekte her seviye alt grup, G nin bir alt grubu olduğundan bu seviye alt grupların hepsi farklı değildir. Dolayısıyla sonsuz değil sonludur. (Sivaramakrishna Das, 1981)

Teorem 1.2.1. G bir grup ve A , G nin bir bulanık alt grubu olsun. $t_1 < t_2$ olmak üzere A nın iki A_{t_1}, A_{t_2} seviye alt gruplarının eşit olması için gerek ve yeter koşul $t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde bir $x \in G$ varolmamasıdır. (Sivaramakrishna Das, 1981)

İspat.

(\Rightarrow) nin ispatı ; $A_{t_1} = A_{t_2}$ olsun. $t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde bir $x \in G$ elemanının varolduğunu farzedelim. $t_1 < A(x) < t_2$ olduğundan $x \in A_{t_1}$ $x \notin A_{t_2}$ olur ve $A_{t_1} \neq A_{t_2}$ elde edilir. Dolayısıyla $t_1 < A(x) < t_2$ olacak

şekilde $x \in G$ yoktur.

(\Leftarrow) nin ispatı ; $t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde G nin bir x elemanı olmadığını düşünelim. $t_1 < t_2$ olduğundan

$$A_{t_2} \subseteq A_{t_1} \quad (1.10)$$

elde edilir. $x \in A_{t_1}$ alalım. Bu $A(x) \geq t_1$ demektir.

$t_1 < t_2$ olduğundan ve ayrıca hipotezden $A(x)$, t_1 ve t_2 arasında olamayacağından $A(x) \geq t_2$ dir. Bu durumda $x \in A_{t_2}$ olur. Yani $A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$ dir. Sonuçta

$$A_{t_1} = A_{t_2} \quad (1.11)$$

elde edilir.

Teorem 1.2.2. Bir G grubunun herhangi bir H alt grubu, G nin bir bulanık alt grubunun bir seviye alt grubudur. (Sivaramakrishna Das, 1981)

İspat. A, G nin

$$A(x) = \begin{cases} t, & x \in H \text{ ise } (0 < t < 1) ; \\ 0, & x \notin H \text{ ise,} \end{cases} \quad (1.12)$$

şeklinde tanımlı bir bulanık alt kümesi olsun. A nın, G nin bir bulanık alt grubu olduğunu ispatlayacağız. $x, y \in G$ alalım.

$x, y \in H$ olduğunu farzedelim, o zaman $xy \in H$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} A(xy) = t \quad \text{ve} \quad A(x) = A(y) = t \quad \text{dir.} \\ \Rightarrow A(xy) \geq \min\{A(x), A(y)\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Eğer $x \in H$ ise H alt grup olduğundan $x^{-1} \in H$ dır. Bu da $A(x^{-1}) = t$ demektir. Sonuçta $A(x^{-1}) \geq A(x)$ elde edilir.

$x \in H$ ve $y \notin H$ olduğunu farzedelim; o zaman $xy \notin H$ dir. Böylece $A(x) = t$, $A(y) = 0$, $A(xy) = 0$ dir. Buradan

$$A(xy) \geq \min\{A(x), A(y)\} \quad (1.14)$$

çıkar. Eğer $x \in H$ veya $x \notin H$ ise $A(x^{-1}) \geq A(x)$ dir.

Şimdi $x, y \notin H$ olduğunu farzedelim; bu durumda $xy \in H$ veya $xy \notin H$ dir. Herbir durumda

$$A(xy) \geq \min\{A(x), A(y)\} \quad ve \quad A(x^{-1}) \geq A(x) \quad (1.15)$$

elde edilir. Böylece tüm durumlarda A , G nin bir bulanık alt grubudur. Bu bulanık alt grup için $A_t = H$ dir.



2. BULANIK İDEALLER

Bu bölümde ise çalışmamızda kullanılan veya esinlenmemizi sağlayan halkalarla ilgili teoremlere ve bulanık ideal kavramına yer verilmiştir.

2.1. Halkalar

Teorem 2.1.1 (Factorization of Homomorphisms). f , R den R' ne örten bir halka homomorfizması ve I , R nin $I \subseteq \ker f$ şartını sağlayan bir ideali olsun. O zaman $f = \bar{f} \circ \text{nat}_I$ özelliğini sağlayan tek bir $\bar{f}: R/I \rightarrow R'$ homomorfizması mevcuttur. (Burton, 1970)

İspat.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \text{nat}_I \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & R/I & \end{array}$$

Öncelikle $\bar{f}: R/I \rightarrow R'$ fonksiyonunu $a \in R$ için $\bar{f}(a + I) = f(a)$ şeklinde tanımlayalım. Bunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim;

$a + I = a' + I$ olsun. Böylece $a = a' + i$ olacak şekilde $i \in I$ vardır.

$$\begin{aligned} \bar{f}(a + I) &= f(a) = f(a' + i) \\ &= f(a') + f(i) \\ &= f(a') + 0 \\ &= f(a') \\ &= \bar{f}(a' + I) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dolayısıyla \bar{f} iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}
\bar{f}[(a+I) + (b+I)] &= \bar{f}[(a+b) + I] = f(a+b) \\
&= f(a) + f(b) \\
&= \bar{f}(a+I) + \bar{f}(b+I)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{f}[(a+I).(b+I)] &= \bar{f}[(a.b) + I] = f(ab) \\
&= f(a).f(b) \\
&= \bar{f}(a+I).\bar{f}(b+I)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

olduğundan \bar{f} homomorfizmadır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
[\bar{f} \circ nat_I](a) &= \bar{f}[nat_I(a)] \\
&= \bar{f}(a+I) \\
&= f(a)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

olduğundan $\bar{f} \circ nat_I = f$ elde edilir.

Şimdi bu şartları sağlayan \bar{f} nin tek olduğunu gösterelim. Bu şartları sağlayan bir tane daha homomorfizma h olsun. $h \circ nat_I = f$ dir.

$$\begin{aligned}
\bar{f}(a+I) = f(a) &= [h \circ nat_I](a) \\
&= h[(nat_I)(a)] \\
&= h(a+I)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sonuçta $h = \bar{f}$ elde edilir. Böylece \bar{f} tektir.

Tanım 2.1.1. R tamlık bölgesi olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir δ fonksiyonu varsa R ye Öklid bölgesi (Euclidean Domain) denir.

- 1) Her $0 \neq a \in R$ için $\delta(a)$, negatif olmayan bir tamsayı,
- 2) sıfırdan farklı $a, b \in R$ için $\delta(ab) \geq \delta(a)$,
- 3) $a, b \in R$, $b \neq 0$ için $a = bq + r$ olmak üzere $r = 0$ veya $\delta(r) < \delta(b)$ olacak şekilde $q, r \in R$ elemanları vardır. (Burton, 1970)

Teorem 2.1.2. Öklid bölgesi tanımının (3) şartındaki bölüm ve kalanın tek olması için gerek ve yeter koşul

$$\delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\} \quad (2.6)$$

olmasıdır. (Burton, 1970)

İspat.

(3) koşulundaki bölüm ve kalan tek olsun. Ayrıca

$$\delta(a+b) > \max\{\delta(a), \delta(b)\} \quad (2.7)$$

şartını sağlayan, sıfırdan farklı $a, b \in R$ elemanlarının var olduğunu farzedelim. O zaman $\delta(-a) = \delta(a) < \delta(a+b)$ ve $\delta(b) < \delta(a+b)$ olmak üzere $b = 0(a+b) + b = 1(a+b) - a$ dır. Bu, (3) koşulundaki bölüm ve kalanın tekliğiyle çelişir. Yani

$$\delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\}$$

dır.

Karşıt olarak $\delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\}$ olsun. Bir $a \in R$ elemanı, $r \neq r'$ ve $q \neq q'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= qb + r && (r = 0 \text{ veya } \delta(r) < \delta(b)) \\ a &= q'b + r' && (r' = 0 \text{ veya } \delta(r') < \delta(b)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

olacak şekilde yazılabilir. O zaman

$$\delta(b) \leq \delta((q-q')b) = \delta(r-r') \leq \max\{\delta(r), \delta(-r')\} < \delta(b) \quad (2.9)$$

dir. Bu ise $r-r'$ veya $q-q'$ nün sıfır olması ile mümkündür. Birinin sıfır olması, diğerinin de sıfır olmasını gerektirdiğinden bölüm ve kalan birer tektir.

2.2. Bölüm Halkaları

Teorem 2.2.1. I, R nin bir ideali ve $a, b \in R$ olsun. O zaman aşağıdakilerin herbiri doğrudur :

- 1) $a + I = I$ olması için gerek ve yeter koşul $a \in I$ olmasıdır.
- 2) $a + I = b + I$ olması için gerek ve yeter koşul $a - b \in I$ olmasıdır.
- 3) Ya $a + I = b + I$ yada $a + I, b + I$ ayrıktyrlar. (Burton, 1970)

I, R nin bir ideali olsun. I nın R deki tüm kalan sınıflarının ailesi R/I ile gösterilir.

Yani $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ dir.

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I,$$

$$(a + I).(b + I) = ab + I \quad (2.12)$$

şeklinde toplama ve çarpmayı tanımlayalım. Bu işlemlerin iyi tanımlı olduğunu gösterelim ; $a + I = a' + I$ ve $b + I = b' + I$ olsun. O zaman $a - a' = i_1$ ve $b - b' = i_2$ olacak şekilde $i_1, i_2 \in I$ elemanları vardır.

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') = i_1 + i_2 \in I$$

Teorem 2.2.1. ile $(a + b) + I = (a' + b') + I$ dir.

$$(a + I) + (b + I) = (a' + I) + (b' + I)$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= a(b - b') + (a - a')b' \\ &= ai_2 + i_1b' \in I \end{aligned} \quad (2.13)$$

dir. Sonuçta $ab + I = a'b' + I$ elde edilir. Böylece işlemler iyi tanımlıdır. (Burton, 1970)

Teorem 2.2.2. I, R nin bir ideali ise R/I bir halkadır. Bu R/I halkasına, bölüm halkası denir. (Burton, 1970)

Teorem 2.2.3. I, R nin bir ideali olsun. $nat_I(a) = a + I$ şeklinde tanımlanan $nat_I: R \rightarrow R/I$ fonksiyonu R den R/I bölüm halkasına örten bir homomorfizmadır; nat_I nın çekirdeği (kernel) I kümesidir. (Burton, 1970)

İspat.

$$\begin{aligned} nat_I(a + b) &= a + b + I = (a + I) + (b + I) \\ &= nat_I(a) + nat_I(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nat_I(ab) &= ab + I = (a + I).(b + I) \\ &= nat_I(a).nat_I(b) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Yani nat_I homomorfizmadır. Ayrıca örtendir. Çünkü her $a + I \in R/I$ için $nat_I(a) = a + I$ şeklinde tanımlı $a \in R$ vardır. R/I nın sıfırı $I = 0 + I$ dir.

$$\begin{aligned} Ker(nat_I) &= \{a \in R \mid nat_I(a) = I\} \\ &= \{a \in R \mid a + I = I\} \\ &= \{a \in R \mid a \in I\} \\ &= I \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3. Bulanık İdealler

R birimli, değişmeli bir halka ve halka homomorfizmasında birimi birime götürsün. L en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 olan bir örgü (lattice) olsun. Aksi belirtilmedikçe L tam (complete) ve aşağıdaki şartı sağlayacaktır;

Her $a_i, b_j \in L$ için

$$\bigvee \{a_i \mid i \in I\} \wedge \bigvee \{b_j \mid j \in J\} = \bigvee \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J\} \tag{2.16}$$

(Kumbhojkar ve Bapat, 1993)

Tanım 2.3.1. $J: R \rightarrow L$ fonksiyonu

- (i) $J(x + y) \geq J(x) \wedge J(y)$
- (ii) $J(-x) = J(x)$
- (iii) $J(xy) \geq J(x) \vee J(y)$ (2.17)

koşullarını sağlıyorsa J ye bir L -bulanık ideal denir.

L -bulanık idealleri aynı örgü üzerinde incelendiği zaman L -bulanık ideal deyimi yerine kısaca bulanık ideal denilebilir. (Kumbhojkar ve Bapat, 1993)

Teorem 2.3.1.

- (i) $J: R \rightarrow L$ fonksiyonunun bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} J(x - y) &\geq J(x) \wedge J(y) \\ J(xy) &\geq J(x) \vee J(y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

olmasıdır.

- (ii) Eğer $J: R \rightarrow L$ bir bulanık ideal ise

(a) her $x \in R$ için $J(0) \geq J(x) \geq J(1)$

(b) $x, y \in R$ için $J(x - y) = J(0)$ ise $J(x) = J(y)$ dir.

(c) Seviye kesimler (cuts) $J_\alpha = \{x \in R \mid J(x) \geq \alpha\}$, R nin idealleridir.

Karşıt olarak herbir J_α bir ideal ise J bir bulanık idealdir. (Kumbhojkar ve Bapat, 1993)

İspat.

(a) $x \in R$ için $J(x) = J(-x)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
J(0) &= J(x - x) \geq J(x) \wedge J(-x) \\
&= J(x) \\
&= J(x.1) \geq J(x) \vee J(1) \geq J(1) \\
\Rightarrow J(0) &\geq J(x) \geq J(1)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir.

(b) $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
J(x) &= J(x - y + y) \geq J(x - y) \wedge J(y) \\
&= J(0) \wedge J(y) \\
&= J(y) \\
\Rightarrow J(x) &\geq J(y)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$J(y - x) = J(x - y) = J(0)$ kullanarak, benzer şekilde $J(y) \geq J(x)$ elde edilir. Buradan $J(x) = J(y)$ bulunur.

(c) $x, y \in J_\alpha$ olsun. Böylece $J(x) \geq \alpha$, $J(y) \geq \alpha$ dir. J bulanık ideal olduğundan $J(x - y) \geq J(x) \wedge J(y)$ dir.

$$\Rightarrow J(x - y) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow x - y \in J_\alpha$$

Şimdi de $x \in R$, $y \in J_\alpha$ alalım.

$$\Rightarrow J(y) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow J(xy) \geq J(x) \vee J(y) \geq J(y) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow xy \in J_\alpha$$

Böylece J_α , R nin bir idealidir.

Karşıt olarak her bir J_α , R nin bir ideali ise J nin bir bulanık ideal olduğunu gösterelim;

$x, y \in R$ alalım. $J(x) = t$, $J(y) = k$ ve $k \leq t$ olsun. Bu da

$x \in J_t$, $y \in J_k$ demektir. J_k ideal olduğundan $x - y \in J_k$ dır.

$$\Rightarrow J(x - y) \geq k$$

$$\Rightarrow J(x - y) \geq k = J(y) = J(y) \wedge J(x)$$

Ayrıca $x \in J_t$, $y \in J_k \subseteq R$ ve J_t ideal olduğundan $xy \in J_t$ dır.

$$\Rightarrow J(xy) \geq t = J(x) \vee J(y)$$

$$\Rightarrow J(xy) \geq J(x) \vee J(y)$$

Örnek 2.3.1. R tamsayılar halkası ve $L = [0, 1]$ olsun. J de, R nin çift tamsayılarının ideali olsun.

$$P(x) = \begin{cases} 2/3, & x = 0 \text{ ise ;} \\ 1/2, & x \in J - \{0\} \text{ ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlı $P: R \rightarrow L$ bir bulanık idealdir. (Kumbhojkar ve Bapat, 1993)

Yardımcı Teorem 2.3.1. Eğer μ herhangi bir R halkasının bir bulanık ideali ve $x, y \in R$ için $\mu(x) < \mu(y)$ ise o zaman

$$\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$$

dir. (Kumar, 1991)

R değişmeli ve birimli bir halka, R' de birimli bir halka, $f: R \rightarrow R'$

$$f(1) = 1' \quad (2.22)$$

olacak şekilde bir halka homomorfizması ve $I = [0, 1]$ olsun. (Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

Tanım 2.3.2. Eğer $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal ise J nin bir bulanık kalan sınıfı

$$(x + J)(y) = J(y - x) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlı bir $x + J: R \rightarrow I$ fonksiyondur. Bir J bulanık idealinin tüm kalan sınıflarının kümesi

$$(x+J)+(y+J) = (x+y)+J \quad (2.24)$$

ve

$$(x+J).(y+J) = (xy)+J \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanan $+$ ve $.$ işlemleri altında bir halkadır. Bulanık bölüm halkası denilen bu halka R/J ile gösterilir.

$$R_J = \{x \in R \mid J(x) = J(0)\} \quad (2.26)$$

olsun. Bu, J nin bir $J(0)$ -seviye kesimidir ve R nin bir idealidir. (Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

Teorem 2.3.2. R/J ve R/R_J halkaları izomorftur.

Teorem 2.3.3. $f: R \rightarrow R'$ bir epimorfizma ise kerf üzerinde sabit olan R nin bulanık idealleri ile R' nün bulanık idealleri arasında sırayı koruyan bire-bir bir eşleme vardır. Ayrıca $J: R \rightarrow I$ ve $J': R' \rightarrow I$ bulanık idealleri ise o zaman

$$\begin{aligned} (i) \quad f(R_J) &= R'_{f(J)} \\ (ii) \quad f^{-1}(R'_{J'}) &= R_{f^{-1}(J')} \end{aligned} \quad (2.27)$$

dır. (Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

Tanım 2.3.3. X herhangi bir küme ve $r \in [0, 1]$ olmak üzere

$$x_r(y) = \begin{cases} r, & y = x \text{ ise;} \\ 0, & y \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bulanık alt kümesine bir x_r bulanık noktası denir. (Kuraoka ve Kuroki, 1992)

0_1 bulanık noktası bir bulanık idealdir.

Tanım 2.3.4. $f: R \rightarrow R'$ bir homomorfizma olsun.

(1) R' nün 0_1 bulanık noktası için $K\bar{e}rf = f^{-1}(0_1)$ dır ve $K\bar{e}rf$ e, f in bulanık çekirdeği denir.

(2) $I\bar{m}f = f(R)$ dır ve $I\bar{m}f$ e, f in bulanık görüntüsü denir. (Kuraoka ve Kuroki, 1992)

Teorem 2.3.4. $f: R \rightarrow R'$ bir homomorfizma olsun. O zaman

- (1) $K\bar{e}rf = \lambda_{Kerf}$,
 (2) $I\bar{m}f = \lambda_{Imf}$ dır. (Kuraoka ve Kuroki, 1992)

Teorem 2.3.5. $f: R \rightarrow R'$ bir homomorfizma, I R nin bir bulanık ideali ve I' de R' nün bir bulanık ideali olsun. O zaman

- (1) $f^{-1}(f(I)) = I + K\bar{e}rf$,
 (2) $f(f^{-1}(I')) = I' \cap I\bar{m}f$ dır.

$f: R \rightarrow R'$ örten bir homomorfizma ve

$$\mathcal{A} = \{ I: I, \quad R \text{ nin bir bulanık ideali ve } I \supseteq K\bar{e}rf \}$$

$\mathcal{B} = \{ I': I', \quad R' \text{ nün bir bulanık ideali } \}$ olsun. (Kuraoka ve Kuroki, 1992)

Teorem 2.3.6. \mathcal{A} dan \mathcal{B} ye örten, bire-bir bir fonksiyon vardır. (Kuraoka ve Kuroki, 1992)

İspat.

Her $I \in \mathcal{A}$ için $\Psi(I) = f(I)$

şeklinde \mathcal{A} dan \mathcal{B} ye bir fonksiyon tanımlıyalım. Her $I \in \mathcal{A}$ için $\Psi(I) = f(I) \in \mathcal{B}$ dir. Ψ nin bire-bir olduğunu göstermek için $I, J \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\Psi(I) = \Psi(J)$ olduğunu farzedelim. Bu da $f(I) = f(J)$ demektir. Ayrıca $I = I + K\bar{e}rf$ ve $J = J + K\bar{e}rf$ dir. Buradan

$$I = I + K\bar{e}rf = f^{-1}(f(I)) = f^{-1}(f(J)) = J + K\bar{e}rf = J$$

elde edilir. Yani Ψ bire-bir dir. I', \mathcal{B} nin herhangi bir elemanı olsun. O zaman $f^{-1}(I')$, R nin bir bulanık idealidir. $z, Kerf$ in herhangi bir elemanı olsun. Böylece

$$f^{-1}(I')(z) = I'(f(z)) = I'(0) = 1$$

çıkar. Bu da $f^{-1}(I') \supseteq K\bar{e}rf$ demektir, yani $f^{-1}(I') \in \mathcal{A}$ dir. Teorem 2.3.5 den

$$\Psi(f^{-1}(I')) = f(f^{-1}(I')) = I' \cap I\bar{m}f = I'$$

elde edilir. Böylece Ψ örtendir. Sonuçta Ψ , \mathcal{A} dan \mathcal{B} ye bire-bir, örten bir fonksiyondur.

2.4. Asal Bulanık (Prime fuzzy) İdealler

Tanım 2.4.1. $P: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal olsun. Eğer $x, y \in R$ için $P(xy) = P(0)$ olduğunda $P(x) = P(0)$ veya $P(y) = P(0)$ oluyorsa P

ye bir asal bulanık (prime fuzzy) ideal denir. (Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

Teorem 2.4.1. Eğer $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal ise aşağıdakiler denktir:

- (a) J bir asal bulanık idealdir;
- (b) R_J bir asal idealdir;
- (c) R/R_J bir tamlık bölgesidir;
- (d) R/J bir tamlık bölgesidir.

(Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

İspat. Tanım 2.4.1. den (a) ve (b) ifadeleri denk çıkar. (b) ve (c) ifadelerinin denkliği cebirde iyi bilinen bir sonuçtur. (c) ve (d) ifadelerinin denkliği teorem 2.3.2. nin bir sonucudur.

Sonuç 2.4.1. Teorem 2.3.3. deki bire-bir eşleme asal idealler içinde geçerlidir.

İspat. $f(R_J) = R'_{f(J)}$ ve $f^{-1}(R'_{J'}) = R_{f^{-1}(J')}$ sonuçları ile bağlantılı olan yukardaki teorem kullanılarak ispat yapılır.

Tanım 2.4.2. $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal olsun. Eğer her $x \neq 0$ elemanı için $J(x) = J(1)$ ise J ye aşık bulanık ideal denir.

Teorem 2.4.2. R nin bir μ bulanık idealinin $(s < t)$ iki μ_s ve μ_t seviye ideallerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul $s \leq \mu(x) < t$ olacak şekilde $x \in R$ elemanının olmamasıdır.

Teorem 2.4.2 den bir μ bulanık idealinin seviye ideallerinin farklı olması gerekmediği çıkar. Eğer $t_0 > t_1 > \dots > t_n$ olmak üzere $Im\mu = \{t_0, \dots, t_n\}$ ise o zaman μ nun seviye ideallerinin F_μ ailesi, $\{\mu_{t_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ i içerir ve $\mu_{t_0} \subset \mu_{t_1} \subset \dots \subset \mu_{t_n} = R$ zincirine sahip oluruz. (Kumar, 1992)

Teorem 2.4.3. R nin $cardIm\mu < \infty$, $cardIm\theta < \infty$ olacak şekilde iki μ ve θ bulanık ideallerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul $Im\mu = Im\theta$ ve $F_\mu = F_\theta$ olmasıdır. (Kumar ve Ajmal, 1992)

Tanım 2.4.3. Eğer $\{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\}$ ideali R nin bir asal ideali ise R nin μ bulanık idealine bulanık asal denir. (Kumar, 1992)

Gerçekte bu ideal F_μ ailesinde en küçüktür.

Ön Teorem 2.4.1. R nin sabit bir bulanık alt kümesi R nin bir bulanık asal idealidir. (Dixit, Kumar ve Ajmal, 1991)

Tanım 2.4.4. μ , R nin bir bulanık ideali olsun. Eğer her $a, b \in R$ için ya $\mu(ab) = \mu(a)$ yada $\mu(ab) = \mu(b)$ ise μ ya bulanık asal denir. (Kumar, 1992)

Teorem 2.4.4. Eğer A , $A \neq R$ olacak şekilde, R nin bir asal ideali ise $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ve $\alpha > \beta$ olmak üzere

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in A \text{ ise;} \\ \beta, & x \in R \setminus A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı μ bulanık ideali R nin bir bulanık asal idealidir. (Kumar, 1992)

Teorem 2.4.5. R nin bir μ bulanık idealinin bulanık asal olması için gerek ve yeter koşul $t \in Im\mu$ olmak üzere μ_t seviye ideallerinin R nin asal idealleri olmasıdır. (Kumar, 1992)

Teorem 2.4.6. R nin bir μ bulanık idealinin bulanık asal olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in R$ için $\mu(ab) = \max\{\mu(a), \mu(b)\}$ olmasıdır. (Kumar, 1992)

μ , R nin bir bulanık asal ideali ise her $x \in R$, her $n \in Z_+$ için $\mu(x^n) = \mu(x)$ dir.

Teorem 2.4.7. Eğer $\{\mu_n \mid n \in Z_+\}$, $\mu_1 \subseteq \dots \subseteq \mu_n \subseteq \dots$ olacak şekilde R nin bulanık asal ideallerinin bir ailesi ise o zaman $\bigcup \mu_n$ ve $\bigcap \mu_n$, R nin bulanık asal idealleridir. (Kumar, 1992)

İspat. $a, b \in R$ olsun. Herhangi $i, j \in Z_+$ için

$$\mu_i(a), \mu_j(b) \leq \mu_k(a), \mu_k(b) \quad (2.28)$$

olacak şekilde $k \in Z_+$ vardır ve böylece

$$\min\{\mu_i(a), \mu_j(b)\} \leq \mu_k(a - b) \quad (2.29)$$

dır. $\mu = \bigcup \mu_n$ olsun.

$$\begin{aligned} \min\{\mu(a), \mu(b)\} &= \min\{\sup(\mu_n(a)), \sup(\mu_n(b))\} \\ &= \sup\{\min(\mu_i(a), \mu_j(b))\} \\ &\leq \sup \mu_k(a - b) = \mu(a - b) \end{aligned}$$

Yani $\mu(a - b) \geq \min\{\mu(a), \mu(b)\}$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mu(ab) &= \sup(\mu_n(ab)) \geq \mu_i(ab) \\ &\geq \mu_i(a), \mu_i(b) \quad \forall i \in Z_+ \end{aligned}$$

dır. Buradan $\mu(ab) \geq (\bigcup \mu_i)(a), (\bigcup \mu_i)(b)$ ve

$$\mu(ab) \geq \mu(a), \mu(b) \quad (2.30)$$

elde edilir. Böylece μ , R nin bir bulanık idealidir. Şimdi μ nun bulanık asal olduğunu gösterelim. $\alpha = \mu(ab)$ ve $\beta = \max\{\mu(a), \mu(b)\}$ olsun. $\alpha \geq \beta$ olduğu açıktır. O zaman $\alpha - \varepsilon < \sup \mu_n(ab)$ dir. Öyle bir $j \in Z_+$ vardır ki

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon &< \mu_j(ab) = \max\{\mu_j(a), \mu_j(b)\} \\ &\leq \max\{\mu(a), \mu(b)\} = \beta \end{aligned}$$

dır. Böylece $\alpha \leq \beta$ dır. Buradan $\alpha = \beta$ elde edilir.

2.5. İki-Değerli (Two-valued) Bulanık İdealler

Tanım 2.5.1. $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal olsun. Eğer $J(R)$ n elemanlı sonlu bir küme ise J bulanık idealine n -değerli denir.

$n = 2$ olduğu zaman $J(0) > J(1)$ olmak üzere $J(R) = \{J(0), J(1)\}$ dir. Bu durumda J , bir anlamda $R_J = \{x \in R \mid J(x) = J(0)\}$ idealinin karakteristik fonksiyonu olan bir idealdir. Apaçık bellidir $J(0) = J(1)$ olması için gerek ve yeter koşul $R_J = R$ olmasıdır. (Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

Tanım 2.5.2. $R \neq \{0\}$ bir halka olsun. Eğer R nin $\{0\}$ ve R den başka iki taraflı ideali yoksa R ye basit (simple) halka denir. (Burton, 1970)

R bir basit halka olsun. Eğer $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal ise ya $R_J = R$ yada $R_J = \{0\}$ dir. Eğer $R_J = \{0\}$ ve $x \in R$ de $J(x) \neq J(1)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir eleman ise o zaman $K = \{y \in R \mid J(y) \geq J(x)\}$ idealini gözden geçirelim. $1 \notin K$ için $K \neq R$ ve $0 \neq x \in K$ için $K \neq \{0\}$ dir. Fakat bu R nin basitliğiyle çelişir. Böylece aşağıdakini elde ederiz.

Teorem 2.5.1. $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal olsun. Eğer R bir basit halka ise o zaman $0 \neq x \in R$ olmak üzere $J(x) = J(1)$ dir. Başka bir deyişle J , R nin veya $\{0\}$ ın bir karakteristik fonksiyonudur.

R herhangi bir halka ve R_J , R nin bir maksimal ideali olacak şekilde $J: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal olsun. R_J maksimal ideal olduğundan R/R_J bir cisimdir ve bir cismin $\{0\}$ ve R den başka ideali olmadığından R/R_J basittir. Eğer $J^*: R/R_J \rightarrow I$

$$J^*(x + R_J) = J(x) \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlı bir bulanık ideal ise o zaman teorem 2.5.1. den

$$\begin{aligned}
x \in R_J & \text{ ise } J^*(x + R_J) = J(0) \\
x \notin R_J & \text{ ise } J^*(x + R_J) = J(1)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir.

Teorem 2.5.2. Eğer $J: R \rightarrow I$, R_J maksimal olacak şekilde bir bulanık ideal ise J , R_J nin karakteristik fonksiyonudur. Böylece öz olmayan (no proper) J bulanık ideali için R_J bir maksimal idealdir.

Teorem 2.5.3. $P: R \rightarrow I$ bir asal bulanık ideal ve $R_P \neq \{0\}$ olsun. Eğer R

- (i) esas ideal bölgesi,
- (ii) Boolean halka ,
- (iii) Artinian halka ,

halkalardan biri ise P , R_P nin karakteristik fonksiyonudur. Başka bir deyişle eğer P bir öz asal bulanık ideal ise $R_P = \{0\}$ dır. (Kumbhojkar ve Bapat, 1990)

İspat. P asal bulanık bir ideal olduğundan R_P asaldır. Yukardaki durumlarda aşikar olmayan asal idealler maksimal ideal olduğundan teorem ispatlanır.

Uyarı 2.5.1. Yukardaki teoremde $R_P \neq \{0\}$ gerekli bir şarttır.

R bir bölge (domain) olmadığı zaman örneğin R bir Boolean halka olsun. O zaman tüm asal bulanık P idealleri için $R_P \neq \{0\}$ dır. $R_P = \{0\}$ asal olması için gerek ve yeter koşul R nin bir bölge olmasıdır. Böylece bir Boolean halka bir öz asal bulanık ideal içermez.

R bir bölge olduğu zaman $0 < t < 1$ ve Q , R nin aşikar olmayan bir ideali olmak üzere $P: R \rightarrow I$

$$P(0) = 1,$$

$$x \in Q \sim \{0\} \quad \text{için,} \quad P(x) = t$$

$$x \notin Q \quad \text{için;} \quad P(x) = 0$$

gözden geçirelim. P nin bir asal bulanık olduğu kolayca görülür. $R_P = \{0\}$ ve P bir karakteristik fonksiyon değildir.

2.6. Güçlü Asal (Strongly Prime) Bulanık İdealler

P asal olduğu zaman bir $P: R \rightarrow I$ bulanık idealinin her seviye kesiminde asal olması arzu edilir. Fakat tanım 2.4.1. bunu gerçekleştirmekte çok zayıftır. Bunun için aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 2.6.1. $P: R \rightarrow I$ bir bulanık ideal olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $P(xy) = P(x)$ veya $P(xy) = P(y)$ ise P ye güçlü (strongly) asal denir.

Açıktır ki bir P asal bulanık idealinin güçlü asal olması için gerek ve yeter koşul

$$P(xy) = \max\{P(x), P(y)\} \quad (2.33)$$

olmasıdır.

Ayrıca her güçlü asal bulanık ideal asal bulanık idealdir. Aşağıdaki örnek her asal bulanık idealinin güçlü asal olmadığını gösterir.

Örnek 2.6.1. Z tamsayılar halkası ve $J: Z \rightarrow I$

$$J(0) = 1,$$

$$m \neq 0 \quad \text{ise} \quad J(4m) = 1/2$$

$$\text{her } m \in Z \quad \text{için} \quad J(4m + 1) = J(4m + 2) = J(4m + 3) = 0$$

şeklinde tanımlı bir bulanık ideal olsun. J bir asal bulanık idealdir.

$J(4) = 1/2$, $J(2) = 0$ dir ve böylece $J(2.2) \neq \max\{J(2), J(2)\}$ olduğundan J güçlü asal değildir.

Teorem 2.6.1. Bir $P: R \rightarrow I$ bulanık idealinin güçlü asal olması için gerek ve yeter koşul her $P_t = \{x \in R \mid P(x) \geq t\}$ seviye kesiminin R nin bir asal ideali olmasıdır.

İspat. $P: R \rightarrow I$ bulanık ideali güçlü asal olsun. Böylece

$P(xy) = \max\{P(x), P(y)\} \geq t$ dir. Bu da $P(x) \geq t$ veya $P(y) \geq t$ demektir. Dolayısıyla P_t, R nin bir asal idealidir.

Karşıt olarak eğer her seviye kesim asal ve $x, y \in R$ ise $P_{P(xy)}$ bir asal idealdir.

$x, y \in P_{P(xy)}$ olduğundan $P(x) \geq P(xy)$ veya

$P(y) \geq P(xy)$ dir. Böylece $\max\{P(x), P(y)\} \geq P(xy) \geq \max\{P(x), P(y)\}$

olur. Buradan

$$P(xy) = \max\{P(x), P(y)\}$$

ve P nin güçlü asal olduğu bulunur.

3. L-BULANIK ÖKLİD İDEAL

Bu bölümde aksi söylenmedikçe R değişmeli ve birimli bir halka olarak ele alınacaktır.

L en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 olan bir örgü olsun. Çalışmamızda aksi belirtilmedikçe L tam ve

her $a_i, b_j \in L$ için

$$\bigvee\{a_i \mid i \in I\} \wedge \bigvee\{b_j \mid j \in J\} = \bigvee\{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J\} \quad (3.1)$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir. Bu çalışmada $L = [0, 1]$ alınacaktır.

3.1. L -Bulanık Öklid İdealleri

Bu bölümde L -bulanık ideal tanımına bir koşul daha eklenerek yeni bir yapı tanımlanmış, verilen ek koşul Öklid bölgesi koşullarından sonuncusuna benzediğinden bu yapıya L -bulanık Öklid ideal denilmiştir.

Tanım 3.1.1. $\theta: R \rightarrow L$, R nin sabit olmayan bir bulanık alt kümesi olsun. $\varphi: R \rightarrow L$ fonksiyonu

- (i) her $x, y \in R$ için $\varphi(x + y) \geq \min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$
- (ii) $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- (iii) $\varphi(xy) \geq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$
- (iv) her $x, y \in R$, $y \neq 0$ için $x = yq + r$ olmak üzere $r = 0$ veya $\max\{\varphi(r), \theta(r)\} > \max\{\varphi(y), \theta(y)\}$ olacak şekilde $q, r \in R$ elemanları vardır.

şartlarını sağlıyorsa φ ye bir L -bulanık θ -Öklid ideal diyeceğiz.

Bu tanımı açıklamak açısından aşağıdaki örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1.1. $\varphi: Z \rightarrow L$ fonksiyonu

$$\varphi(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \text{ ise;} \\ 1/2, & a \in (2) \text{ ise;} \\ 0, & a \in Z - (2) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $\theta: Z \rightarrow L$

$$\theta(a) = \begin{cases} 0, & a = 0 \text{ ise;} \\ 1/2, & a = 3 \text{ ise;} \\ 1/|a|, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir bulanık alt küme olsun. φ , Z nin bir L -bulanık idealidir. Yani $\forall a, b \in Z$ için

- (i) $\varphi(a + b) \geq \min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$
- (ii) $\varphi(-a) = \varphi(a)$
- (iii) $\varphi(ab) \geq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$

şartları sağlanır. Fakat φ , Z nin bir L -bulanık θ -Öklid ideali değildir. Çünkü tanımımızdaki (iv) şartını sağlamıyor. 8 ve 6 sayıları için q ve r bulunamıyor. Örneğin

$$8 = 6.1 + 2 \quad \text{için} \quad \max\{\varphi(2), \theta(2)\} = \max\{1/2, 1/2\} = 1/2 \quad \text{ve}$$

$$\max\{\varphi(6), \theta(6)\} = \max\{1/2, 1/6\} = 1/2 \quad \text{dir.}$$

Yani $\max\{\varphi(2), \theta(2)\} \not\geq \max\{\varphi(6), \theta(6)\}$ elde edilir.

$$8 = 6.2 - 4 \quad \text{için} \quad \max\{\varphi(4), \theta(4)\} = \max\{1/2, 1/4\} = 1/2 \quad \text{ve}$$

$$\max\{\varphi(6), \theta(6)\} = \max\{1/2, 1/6\} = 1/2 \quad \text{dir.}$$

Yani $\max\{\varphi(4), \theta(4)\} \not\geq \max\{\varphi(6), \theta(6)\}$ elde edilir.

$$8 = 6.3 - 10 \quad \text{için} \quad \max\{\varphi(10), \theta(10)\} = \max\{1/2, 1/10\} = 1/2 \quad \text{ve}$$

$$\max\{\varphi(6), \theta(6)\} = \max\{1/2, 1/6\} = 1/2 \quad \text{dir.}$$

Yani $\max\{\varphi(10), \theta(10)\} \not\geq \max\{\varphi(6), \theta(6)\}$ elde edilir.

Sonuçta her $a, 0 \neq b \in Z$ için $a = bq + r$ olmak üzere $r = 0$ veya $\max\{\varphi(r), \theta(r)\} > \max\{\varphi(b), \theta(b)\}$ olacak şekilde $q, r \in Z$ elemanları yoktur.

Böylece φ, Z nin bir L -bulanık θ -Öklid ideali değildir.

Örnek 3.1.2. $\varphi: Z \rightarrow L$ fonksiyonu

$$\varphi(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \text{ ise;} \\ 1/3, & a \in (2) \text{ ise;} \\ 0, & a \in Z - (2) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $\theta: Z \rightarrow L$

$$\theta(a) = \begin{cases} 0, & a = 0 \text{ ise;} \\ 1/2, & a = 3 \text{ ise;} \\ 1/|a|, & \text{diğer durumlarda ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir bulanık alt küme olsun. φ, Z nin bir L -bulanık idealidir. Yani L -bulanık ideal olması için gerekli olan üç koşulu da sağlar. Ayrıca φ, Z nin bir L -bulanık θ -Öklid idealidir.

L -bulanık θ -Öklid ideal tanımına bağlı olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.1. $f: R \rightarrow R'$ bir halka izomorfizması ve $\varphi': R' \rightarrow L$ R' nün bir L -bulanık θ' -Öklid ideali olsun. Bu durumda $\varphi' \circ f: R \rightarrow L$, R nin bir L -bulanık $\theta' \circ f$ -Öklid idealidir.

Burada $(\varphi' \circ f)(x) = \varphi'(f(x))$ dır.

İspat. $\varphi = \varphi' \circ f$, $\theta = \theta' \circ f$ ve $a, b \in R$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & L \\ f \searrow & & \nearrow \varphi' \\ & R' & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(i) \quad \varphi(a+b) &= (\varphi' \circ f)(a+b) = \varphi'(f(a+b)) \\
&= \varphi'(f(a) + f(b)) \\
&\geq \min\{\varphi'(f(a)), \varphi'(f(b))\} \\
&= \min\{(\varphi' \circ f)(a), (\varphi' \circ f)(b)\} \\
&= \min\{\varphi(a), \varphi(b)\} \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Sonuçta $\varphi(a+b) \geq \min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \varphi(-a) &= (\varphi' \circ f)(-a) = \varphi'(f(-a)) \\
&= \varphi'(-f(a)) \\
&= \varphi'(f(a)) \\
&= (\varphi' \circ f)(a) \\
&= \varphi(a) \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Sonuçta $\varphi(-a) = \varphi(a)$ bulunur.

$$\begin{aligned}
(iii) \quad \varphi(ab) &= (\varphi' \circ f)(ab) = \varphi'(f(ab)) \\
&= \varphi'(f(a) \cdot f(b)) \\
&\geq \max\{\varphi'(f(a)), \varphi'(f(b))\} \\
&= \max\{(\varphi' \circ f)(a), (\varphi' \circ f)(b)\} \\
&= \max\{\varphi(a), \varphi(b)\} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Böylece $\varphi(ab) \geq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ bulunur.

(iv) $a, b \in R$ olsun. O zaman $f(a), f(b) \in R'$ dir. φ', R' nün bir L -bulanık θ' -Öklid ideali olduğundan $f(a) = f(b)f(q) + f(r)$ olmak üzere $f(r) = 0$ veya $\max\{\varphi'(f(r)), \theta'(f(r))\} > \max\{\varphi'(f(b)), \theta'(f(b))\}$ olacak şekilde $f(r), f(q) \in R'$ elemanları vardır. f bir izomorfizm olduğundan $f(a) = f(bq) + f(r)$ şeklinde yazabiliriz. Böylece $f(a) = f(bq + r)$ olur ve f bire-bir olduğundan

$$a = bq + r \quad (3.5)$$

elde edilir.

Eğer $f(r) = 0$ ise ve f bire-bir olduğundan $r = 0$ dır.

Eğer $\max\{\varphi'(f(r)), \theta'(f(r))\} > \max\{\varphi'(f(b)), \theta'(f(b))\}$ ise

$\max\{(\varphi' \circ f)(r), (\theta' \circ f)(r)\} > \max\{(\varphi' \circ f)(b), (\theta' \circ f)(b)\}$ dir. Böylece

$$\max\{\varphi(r), \theta(r)\} > \max\{\varphi(b), \theta(b)\} \quad (3.6)$$

elde ederiz.

Sonuçta $\varphi: R \rightarrow L$, R nin bir L -bulanık θ -Öklid idealidir.

Teorem 3.1.2. $f: R \rightarrow R'$ örten bir halka homomorfizması olsun. Eğer $\varphi: R \rightarrow L$ kerf üzerinde sabit olan bir L -bulanık θ -Öklid ideal ve $a - b \in Kerf$ olduğunda $\theta(a) = \theta(b)$ ise $f(\varphi): R' \rightarrow L$, R' nün bir L -bulanık $f(\theta)$ -Öklid idealidir.

İspat.

$x', y' \in R'$ alalım. O zaman $x' = f(x_0)$, $y' = f(y_0)$ şeklinde $x_0, y_0 \in R$ elemanları vardır. Ayrıca $x'y' = f(x_0y_0)$ dır. φ kerf üzerinde sabit olduğundan tüm $z \in f^{-1}(x')$ için $\varphi(z) = \varphi(x_0)$ dır. Çünkü $f(z) = x'$, $f(x_0) = x'$ olarak alırsak $f(z - x_0) = 0$ dan $z - x_0 \in Kerf$ elde edilir.

$$\varphi(z - x_0) = \varphi(0) \Rightarrow \varphi(z) = \varphi(x_0) \quad (3.7)$$

dır. Böylece $f(\varphi)(x') = \bigvee\{\varphi(z) \mid z \in f^{-1}(x')\} = \varphi(x_0)$

$(f(\varphi)(x'), x'$ nü f altında görüntü kabul eden z lerin φ altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümenin supremumuna eşittir.) dir.

Benzer şekilde $f(\varphi)(y') = \varphi(y_0)$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
(i) \quad f(\varphi)(x' + y') &= \varphi(x_0 + y_0) \geq \min\{\varphi(x_0), \varphi(y_0)\} \\
&= \min\{f(\varphi)(x'), f(\varphi)(y')\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad f(\varphi)(-x') &= \varphi(-x_0) = \varphi(x_0) \\
&= f(\varphi)(x')
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dolayısıyla $f(\varphi)(-x') = f(\varphi)(x')$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
(iii) \quad f(\varphi)(x'y') &= \varphi(x_0y_0) \geq \max\{\varphi(x_0), \varphi(y_0)\} \\
&= \max\{f(\varphi)(x'), f(\varphi)(y')\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olduğundan $f(\varphi)(x'y') \geq \max\{f(\varphi)(x'), f(\varphi)(y')\}$ elde edilir.

(iv) $x', y' \in R'$ alalım. $f(x_0) = x', f(y_0) = y'$ şeklinde $x_0, y_0 \in R$ vardır. $\varphi: R \rightarrow L$ L -bulanık ideal olduğundan $x_0 = y_0q_0 + r_0$ olmak üzere $r_0 = 0$ veya $\max\{\varphi(r_0), \theta(r_0)\} > \max\{\varphi(y_0), \theta(y_0)\}$ olacak şekilde $q_0, r_0 \in R$ elemanları vardır. Böylece $f(x_0) = f(y_0q_0 + r_0)$ dir. Bu da $f(x_0) = f(y_0)f(q_0) + f(r_0)$ demektir. $q_0, r_0 \in R$ olduğundan $f(q_0) = q', f(r_0) = r' \in R'$ elde edilir.

Eğer $r_0 = 0$ ise $f(r_0) = f(0) = 0$ dır. Buradan $f(r_0) = 0$ elde edilir.

Ayrıca $a - b \in Ker f$ olduğunda $\theta(a) = \theta(b)$ olacağından

$$f(\theta)(r') = \bigvee \{\theta(z) \mid z \in f^{-1}(r')\} = \theta(r_0)$$

dir. Burada $f(\theta)(r')$, r' nü f altında görüntü kabul eden z lerin θ altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümenin supremumuna eşittir.

Eğer $\max\{\varphi(r_0), \theta(r_0)\} > \max\{\varphi(y_0), \theta(y_0)\}$ ise $\max\{f(\varphi)(r') = \varphi(r_0), f(\theta)(r') = \theta(r_0)\} > \max\{\varphi(y_0) = f(\varphi)(y'), \theta(y_0) = f(\theta)(y')\}$ olur. $f(\varphi)$, R' nün bir L -bulanık $f(\theta)$ -Öklid idealidir.

Teorem 3.1.3.

$f: R \rightarrow R'$ örten bir homomorfizma ve

$\mathcal{A} = \{ I: I, R \text{ nin } a - b \in \text{Ker} f \text{ olduğunda } \theta(a) = \theta(b) \text{ olacak şekilde bir } L\text{-} \\ \text{bulanık } \theta\text{-Öklid ideali ve } I \supseteq \text{Ker} f \}$

$\mathcal{B} = \{ I': I', R' \text{ nün bir } L\text{-bulanık } f(\theta)\text{-Öklid ideali } \}$

olsun. O zaman \mathcal{A} dan \mathcal{B} ye örten, bire-bir bir fonksiyon vardır.

İspat.

$\forall I \in \mathcal{A}$ için $\Psi(I) = f(I)$

şeklinde \mathcal{A} dan \mathcal{B} ye bir fonksiyon tanımlıyalım. Her $I \in \mathcal{A}$ için

$\Psi(I) = f(I) \in \mathcal{B}$ dir. Ψ nin bire-bir olduğunu göstermek için $I, J \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\Psi(I) = \Psi(J)$ olduğunu farzedelim. Bu da $f(I) = f(J)$ demektir. Ayrıca $I = I + \text{Ker} f$ ve $J = J + \text{Ker} f$ dir. Buradan

$$I = I + \text{Ker} f = f^{-1}(f(I)) = f^{-1}(f(J)) = J + \text{Ker} f = J$$

elde edilir. Yani Ψ bire-bir dir. I', \mathcal{B} nin herhangi bir elemanı olsun. O zaman $f^{-1}(I')$, R nin bir bulanık θ -Öklid idealidir. $z, \text{Ker} f$ in herhangi bir elemanı olsun. Böylece

$$f^{-1}(I')(z) = I'(f(z)) = I'(0) = 1 \quad (3.11)$$

çıkar. Bu da $f^{-1}(I') \supseteq \text{Ker} f$ demektir, yani $f^{-1}(I') \in \mathcal{A}$ dir. Teorem 2.3.5 den

$$\Psi(f^{-1}(I')) = f(f^{-1}(I')) = I' \cap I\bar{m}f = I' \quad (3.12)$$

elde edilir. Böylece Ψ örtendir. Sonuçta Ψ , \mathcal{A} dan \mathcal{B} ye bire-bir, örten bir fonksiyondur.

3.2. Bulanık-Bölüm Halkaları

L -bulanık Öklid ideal için aşağıdaki teoremi verebiliriz. Bu teoremle R den R/R_J e geçiş sağlanarak L -bulanık Öklid ideal olan $\varphi: R/R_J \rightarrow L$ elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1 $J: R \rightarrow L$ bir L -bulanık θ -Öklid ideal, $n: R \rightarrow R/R_J$ doğal homomorfizma ve $a - b \in Ker n$ olduğunda $\theta(a) = \theta(b)$ olsun. O zaman $\varphi: R/R_J \rightarrow L$ bir L -bulanık $\theta^*(= n(\theta))$ -Öklid idealdir.

İspat. $\varphi: R/R_J \rightarrow L$ fonksiyonu $\varphi(a + R_J) = J(a)$ şeklinde tanımlayalım. Öncelikle bu fonksiyonun iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $a + R_J = b + R_J$ olsun. Böylece $a - b = x$ olacak şekilde $x \in R_J$ vardır. R_J nin tanımından $J(x) = J(0)$ dır.

$$\begin{aligned} J(0) &= J(x) = J(a - b) \\ &\Rightarrow J(0) = J(a - b) \\ &\Rightarrow J(a) = J(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da

$$\varphi(a + R_J) = \varphi(b + R_J) \tag{3.13}$$

demektir. φ iyi tanımlıdır.

$a + R_J, b + R_J \in R/R_J$ alalım.

$$\begin{aligned}
(i) \quad \varphi[(a + R_J) + (b + R_J)] &= \varphi[(a + b) + R_J] \\
&= J(a + b) \\
&\geq \min\{J(a), J(b)\} \\
&= \min\{\varphi(a + R_J), \varphi(b + R_J)\} \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \varphi[-(a + R_J)] &= \varphi[(-a + R_J)] \\
&= J(-a) \\
&= J(a) \\
&= \varphi[(a + R_J)] \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad \varphi[(a + R_J).(b + R_J)] &= \varphi[(ab) + R_J] \\
&= J(ab) \\
&\geq \max\{J(a), J(b)\} \\
&= \max\{\varphi(a + R_J), \varphi(b + R_J)\} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

(iv) $a + R_J, R_J \neq b + R_J \in R/R_J$ olsun.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow b \notin R_J &\Rightarrow J(b) \neq J(0) \\
&\Rightarrow b \neq 0
\end{aligned}$$

Böylece $a, 0 \neq b \in R$ dir ve J, R nin bir L -bulanık θ -Öklid ideali olduğundan $a = bq + r$ olmak üzere $r = 0$ veya $\max\{J(r), \theta(r)\} > \max\{J(b), \theta(b)\}$ olacak şekilde $q, r \in R$ elemanları mevcuttur.

$$\begin{aligned}
a = bq + r &\Rightarrow a + R_J = bq + r + R_J \\
&\Rightarrow a + R_J = (bq + R_J) + (r + R_J) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Böylece $a + R_J = (b + R_J).(q + R_J) + (r + R_J)$ elde ederiz. Eğer $r = 0$ ise $r + R_J = 0 + R_J$ dir. Dolayısıyla $r + R_J = R_J$ dir. $r, q \in R$ olduğundan $r + R_J, q + R_J \in R/R_J$ dir.

Ayrıca $r + R_J = r'$ olsun ve

$$n(\theta)(r') = \bigvee \{ \theta(z) \mid z \in n^{-1}(r') \} = \theta(r)$$

dir. Çünkü $n(z) = r'$ ve $n(r) = r'$ ise $n(z - r) = 0'$ dir. Bu da $z - r \in Ker n$ demektir. Hipotezden $\theta(z) = \theta(r)$ elde edilir.

(Açıklama : $n(\theta)(r')$, r' nü n altında görüntü kabul eden z lerin θ altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümenin supremumuna eşittir.)

$max\{\varphi(r + R_J) = J(r), \theta(r) = n(\theta)(r')\} > max\{J(b) = \varphi(b + R_J), \theta(b) = n(\theta)(b')\}$ olduğundan $max\{\varphi(r + R_J), \theta^*(r + R_J)\} > max\{\varphi(b + R_J), \theta^*(b + R_J)\}$ elde ederiz. Sonuçta eğer J, R nin bir L -bulanık θ -Öklid ideali ise R/R_J den L ye bir L -bulanık θ^* -Öklid ideal vardır.

Sonuç 3.2.1 $J: R \rightarrow L$ bir L -bulanık θ -Öklid ideal ve $a - b \in Ker n$ olduğunda $\theta(a) = \theta(b)$ olsun. O zaman R/J den L ye bir L -bulanık θ^* -Öklid ideal vardır.

İspat. $J: R \rightarrow L$ bir L -bulanık θ -Öklid ideal olduğundan ve teorem 3.2.1. den $\varphi: R/R_J \rightarrow L$ bir L -bulanık θ^* -Öklid ideal vardır. Ayrıca teorem 2.3.1 den R/J ve R/R_J halkaları izomorftur. Dolayısıyla R/J den L ye bir L -bulanık θ^* -Öklid ideal vardır.

SONUÇLAR

Literatürdeki L -bulanık ideal kavramı ek bir koşul verilerek kısıtlanmış ve L -bulanık Öklid ideali tanımlanmış ve örnek verilmiştir. Halkalardaki homomorfizmayla ilgili teoremlerin bu yeni yapıda geçerli olduğu saptanmıştır.



KAYNAKLAR

Ajmal, N., Dixit, V.N., ve Kumar, R., (1991), "Fuzzy Ideals and Fuzzy Prime Ideals of a Ring", *Fuzzy Sets and Systems*, 44:127-138.

Ajmal, N., Dixit, V.N., ve Kumar, R., (1992), "On Fuzzy Rings", *Fuzzy Sets and Systems*, 49:205-213.

Burton, M.D., (1970), *A First Course in Rings and Ideals*, Addison-Wesley, London.

Herstein, I.N., (1964), *Topics in Algebra*, Blaisdell Publishing Company, Toronto.

Hungerford, T.W., (1974), *Algebra*, Springer-Verlag, New York.

Kumar, R., (1991), "Fuzzy Semiprimary Ideals of Rings", *Fuzzy Sets and Systems*, 42:263-272.

Kumar, R., (1992), "Certain Fuzzy Ideals of Rings Redefined", *Fuzzy Sets and Systems*, 46:251-260.

Kumbhojkar, H.V., ve Bapat, M.S., (1990), "Not-So-Fuzzy Fuzzy Ideals", *Fuzzy Sets and Systems*, 37:237-243.

Kumbhojkar, H.V., ve Bapat, M.S., (1993), "On Semiprime Fuzzy Ideals", *Fuzzy Sets and Systems*, 60:219-223.

Kuraoka, T., ve Kuroki, N., (1992), "On Fuzzy Quotient Rings Induced by Fuzzy Ideals", *Fuzzy Sets and Systems*, 47:381-386.

Rosenfeld, A., (1971), "Fuzzy Groups", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35:512-517.

Sivaramakrishna Das, P., (1981), "Fuzzy Groups and Level Subgroups", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 84:264-269.

Yehia, S.E-B., (1993), "Fuzzy Partitions and Fuzzy-Quotient Rings", Fuzzy Sets and Systems, 54:57-62.

Zadeh, L.A., (1965), "Fuzzy Sets", Inform and Control 8:338-353.



**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	18.11.1971	
Doğum yeri	Şişli	
Lise	1983-1988	Ümraniye Lisesi Haydarpaşa Lisesi
Lisans	1988-1992	Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1993-1995	Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	1995-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Çalıştığı kurum	1993-Devam ediyor	YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi