

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

85068

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN NORMAL OPERATÖR
KATSAYILI DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN
REZOLVENTİNİN VARLIĞI VE ÖZELLİKLERİ

Kevser ÖZDEN KÖKLÜ

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tez Savunma Tarihi
Tez Danışmanı
Jüri Üyeleri

: 30 Nisan 1999

: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (YTÜ)

: Prof.Dr. Gülseren AYDIN (MSÜ)

: Prof.Dr. Mehmet CAN (İTÜ)

İSTANBUL, 1999

85068

TEŐEKKÖR

Çalışmalarım sırasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOğLU' na teőekkÖrlerimi sunarım.

Ayrıca destek ve yardımlarından dolayı Sayın Prof. Tahir őİőMAN' a, eőim HÖseyin Ali KÖKLÖ' ye ve aileme teőekkÖr ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
SUMMARY.....	ii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Bazı Ön Bilgiler.....	5
2. YARI EKSENDE VERİLMİŞ y^{IV} DİFERANSİYEL İFADESİNİN GREEN FONKSİYONU.....	9
3. YARI EKSENDE VERİLEN 4. MERTEBEDEN OPERATÖR KATSAYILI DİFERANSİYEL İFADE İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ.....	16
3.1 Problemin Belirlenmesi.....	16
3.2 Green Fonksiyonunun Türevleri.....	38
3.3 Green Fonksiyonunun Dördüncü Türevi.....	68
3.4 Green Fonksiyonunun Diferansiyel Denklemi Sağlaması.....	76
3.5 Sınır Koşullarının Sağlanması.....	79
4. ÖRNEKLER.....	83
SONUÇ.....	90
KAYNAKLAR.....	91
ÖZGEÇMİŞ.....	93

ÖZET

H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $H_1=L_2(0,\infty;H)$, x 'in $[0,\infty)$ ' dan alınmış her bir değerinde, değeri H' ye ait Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_0^{\infty} \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlar kümesi olsun. $L_2(0,\infty;H)$ ' ye ait iki $f(x)$ ve $g(x)$ H değerli fonksiyonlarının iç çarpımı

$$(f,g)_{H_1} = \int_0^{\infty} (f,g)_H dx$$

formülü ile tanımlanırsa, H_1 kümesi bu iç çarpımla Ayrılabilir Hilbert Uzayı olur.

Bu çalışmada H_1 uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty,$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(j)}(0) - h_{(j+1)/2} y^{(j-1)}(0) = 0, \quad j=1,3,$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün rezolventinin varlığı ve özellikleri incelenmiştir. Burada $Q(x)$, her $x \in [0,\infty)$ değerinde H' da tanımlanmış saf ayırık spektruma sahip normal operatördür. $Q(x)$ ' in tanım kümesinin x 'den bağımsız olduğu ve rezolvent kümesinin λ kompleks düzleminin $|\arg \lambda - \pi| < \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \pi$) bölgesine ait olduğu varsayılmaktadır. Ek olarak $Q(x)$ operatör fonksiyonunun Titchmarsh-Levitan koşullarını sağladığı da kabul edilmiştir. $h_{(j+1)/2}$ ' ler ise herhangi kompleks sayılardır.

Elde edilen sonuçlar bazı örneklerle uygulanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Operatör Değerli Fonksiyon
Normal Operatör
Rezolvent
Spektrum
Spektral Açılım

ABSTRACT

Let H be a separable Hilbert space. Let show the space of functions $H_1 = L_2(0, \infty; H)$. The functions are defined in $[0, \infty)$ range, their values belongs to space H , they are measurable in the meaning of Bochner and provides the condition of

$$\int_0^{\infty} \|f(x)\|^2 dx < \infty.$$

If the scalar product is defined in H_1 by the formula

$$(f, g)_{H_1} = \int_0^{\infty} (f, g)_H dx \quad f(x), g(x) \in H,$$

H_1 forms a separable Hilbert space.

In this study, in space H_1 , it is investigated that Green's function (resolvent) of operator formed by the differential expression

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty,$$

and boundary conditions

$$y^{(j)}(0) - h_{(j+1)/2} y^{(j-1)}(0) = 0, \quad j=1, 3$$

where $Q(x)$ is a normal operator that has pure discrete spectrum for every $x \in [0, \infty)$ in H . Assumed that domain of $Q(x)$ is independent from x and resolvent set of $Q(x)$ belongs to $|\arg \lambda - \pi| < \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \pi$) of complex plane λ . In addition assumed that the operator function $Q(x)$ satisfies the Titchmarsh-Levitan conditions. $h_{(j+1)/2}$'s are arbitrary complex numbers.

The results which were obtained have been applied to some examples.

Key words: Operator-valued Function
Normal Operator
Resolvent
Spectrum
Spectral Expansion

1. GİRİŞ

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(0, \infty; H)$ ile $[0, \infty)$ aralığında tanımlanmış, değerleri H uzayına ait, Bochner anlamında ölçülebilir[19] ve

$$\int_0^{\infty} \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayını gösterelim. Eğer iki $f(x), g(x) \in H_1$ elemanın iç çarpımını

$$(f, g)_1 = \int_0^{\infty} (f(x), g(x)) dx$$

formülü ile tanımlarsak H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur[3]. Burada $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ sırasıyla H' da normu ve iç çarpımı gösterir.

Bu tez çalışmasında $H_1 = L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$(-1)^n y^{(2n)} + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.1)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(j)}(0) - h_{(j+1)/2} y^{(j-1)}(0) = 0, \quad j=1, 3, \dots, 2n-1 \quad (1.2)$$

sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün $n=2$ halindeki rezolventi (Green fonksiyonu) incelenmiştir. Burada $Q(x)$, x' in $[0, \infty)$ ' dan alınmış her bir değerinde H Hilbert uzayında normal, tersi kompakt bir operatördür. $h_{(j+1)/2}$ ($j=1, 3$) ler ise kompleks sayılardır.

Bu konu ile ilgili ilk çalışma B.M.Levitan [16] tarafından yapılmıştır. [16] çalışmasında $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y, \quad -\infty < x < \infty$$

Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu incelenmiştir. Burada $Q(x)$, x 'in her bir $(-\infty, \infty)$ değerinde, kendine eş, pozitif tanımlı ve tersi kompakt bir operatördür.

1971 yılında M. Bayramoğlu [8] çalışmasında $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayında kendine eş operatör katsayılı

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)} \quad -\infty < x < \infty \quad (1.3)$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonunu ve özdeğerlerin asimtotik ifadesini elde etmiştir.

1973 yılında K.CH. Boymatov [9] çalışmasında kendine eş operatör katsayılı kısmi türevli bir diferansiyel denklemin Green fonksiyonunu ve özdeğerlerin asimtotik ifadesini elde etmiştir.

1976 yılında G.I. Aslanov [5] çalışmasında $L_2(0, \infty; H)$ uzayında (1.3) diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün Green Fonksiyonunu ve özdeğerlerin asimtotik ifadesini incelemiştir.

E.G. Kleiman 1977 yılında [13] çalışmasında bütün eksende verilmiş normal operatör katsayılı Sturm-Liouville denkleminin Green fonksiyonunu bulmuştur.

1981 yılında Aliyev ve Bayramoğlu [4], yarı eksende verilmiş normal operatör katsayılı

$$(-1)^n y^{(2n)} + Q(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(j)}(0) = 0 \quad j=0,1,\dots,n-1$$

sınır koşulları ile tanımlanmış operatörün Green fonksiyonunu incelemişlerdir.

1994 senesinde G.I. Aslanov [6] tarafından

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

şeklinde verilmiş diferansiyel ifadenin rezolventi incelenmiştir. Burada $A_\alpha(x)$, x 'in her bir değerinde H uzayında dönüşüm yapan sınırlı operatördür.

A.A. Abudov [1], $-\infty < x < \infty$ ekseninde

$$(-1)^n (P(x)y^{(n)})^{(n)} + Q(x)y$$

ifadesi ile verilmiş operatörün Green fonksiyonunu incelemiştir. Burada $P(x)$, $f \in H$ iken

$$m(f, f) \leq (P(x)f, f) \leq m(f, f), \quad m > 0$$

koşulunu sağlayan sınırlı operatör, $Q(x)$ ise pozitif tanımlı kendine eş bir operatördür.

Abudov diğer bir çalışmasında [2] yukarıdaki problemi $[0, \infty)$ yarı ekseninde ele almıştır.

Sıfırda sınır koşulları olarak da

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j=0,1,\dots,n-1$$

kabul etmiştir.

Abudov'un $(-\infty, \infty)$ aralığı için Green fonksiyonunu bulma çalışması [1], $Q(x)$ ' in normal operatör fonksiyon olması halinde 1987 yılında S.M. İsmailov [11] tarafından yapılmıştır.

Bizim problemimizin Green fonksiyonu, $Q(x)$ 'in kendine eş operatör olması, $|x-\xi|>1$ iken bir ek koşul sağlaması ve $h_1=h_2$ olması halinde I.Albayrak [3] tarafından incelenmiştir. Yukarıda bahsettiğimiz gibi, bizde $Q(x)$ normal operatör değerli fonksiyondur. $Q^*(x)=Q(x)$ halinde bilindiği gibi spektrum sadece reel eksen üzerindedir. $Q(x)$ normal operatör olduğunda ise spektrum kompleks düzleme dağılmıştır. Bundan dolayı, $Q(x)$ ' in normal operatör olması halinde daha genel bir problem çözülmüş olur. Ayrıca biz burada yeni bir parametrik kullanmakla, $|x-\xi|>1$ iken $\left\| Q(\xi) e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}|x-\xi|Q^{1/4}(x)} \right\| \leq c$ ($c=sbt$) olması geleneksel koşulundan kurtularak, $Q(x)$ ' in kendine eş olması haline göre daha genel bir problemi çözmüş olduk.

Bu konu ile ilgili çalışmaların geniş referansı Kostyuchenko, A.G., Sargsyan, I.S. [15], Otelbayev, M. [20] kitaplarında verilmiştir. Ayrıca adi diferansiyel denklemlerin Green fonksiyonu için Stakgold, I. [23] kitabını kaynak gösterebiliriz.

1.1 Bazı Ön Bilgiler

Tez çalışmasında sık sık kullanacağımız bazı ön bilgileri verelim.

H ile ayrılabilir Hilbert uzayını, $D(A)$ ile H' da dönüşüm yapan lineer A operatörünün tanım kümesini gösterelim. $D(A)'$ nin H' da her yerde yoğun küme olduğunu varsayacağız. Bu takdirde A nın eşleniği A^* mevcuttur [24]. Eğer $AA^* = A^*A$ ise A ya normal operatör denir. Normal operatörler için aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 1: [12]. A operatörü H de normal operatör olsun. O zaman

$$D(A^*A) = D(AA^*) \text{ ve } f \in D(A^*A) \text{ iken}$$

$$\|Af\| = \|A^*f\|$$

olur.

A' nın tersi A^{-1} varsa, A^{-1} de normal operatördür. Eğer A^{-1} kompakt (tam sürekli) operatör ise A' nın spektrumu saf ayırıktır denir. Bu halde A' nın spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir. Bu özdeğerler, modüllerinin artma yönünde sıralanabilir:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$$

Burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ sayıları A nın özdeğerlerini gösterir. Normal operatörün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri diktir. $B: H \rightarrow H$ olan normal kompakt operatör ve 0 bu operatörün özdeğeri olmasın. O zaman B^{-1} operatörü saf ayırık spektruma sahiptir. B' nin özdeğerlerini $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ ile, bunlara karşılık gelen ortonormalize edilmiş özvektörleri ise $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ ile gösterelim. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2: [18]. Sıfır, B Normal kompakt operatörünün özdeğeri olmasın. O zaman B' nin özvektörleri H' da baz oluşturur. Yani keyfi $f \in H$ elemanı

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \quad (1.4)$$

şeklinde gösterilir.

(1.4) formülünden

$$Bf = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, e_k) e_k \quad (1.5)$$

elde edilir. (1.4) ve (1.5) formülleri sırasıyla sembolik olarak

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} (., e_k) e_k \quad (1.6)$$

ve

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (., e_k) e_k \quad (1.7)$$

şeklinde yazılır. Burada I , H uzayında birim operatörü gösterir. (1.6), (1.7) ifadelerine sırasıyla birim ve B operatörünün spektral açılım formülleri denir. Teoreme ise, Hilbert-Schmidt spektral açılım teoremi denir. A operatörünün özvektörleri ile A^{-1} operatörünün özvektörleri aynı olduğundan dolayı Hilbert-Schmidt teoremi tersi kompakt olan normal operatörler için de geçerlidir. O halde (1.5) formülü $f \in D(B)$ için doğrudur. (1.6) ifadesi ile B' nin spektrumunda tanımlı $\varphi(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen B' nin fonksiyonu (operatörün fonksiyonu)

$$\varphi(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k) (., e_k) e_k$$

formülü ile tanımlanır. Eğer $\varphi(\lambda)$, B' nin spektrum kümesi $S=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ de sınırlı ise, $\varphi(B)$ sınırlı normal operatördür ve

$$\|\varphi(B)\| = \sup_j |\varphi(\lambda_j)|$$

olur. Ters kompakt normal A operatörünün $g(A)$ fonksiyonu da benzer şekilde tanımlanır. O zaman $g(A)$ operatörünün tanım kümesi $D(g(A))$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(\lambda_k)|^2 |(f, e_k)|^2 < \infty$$

koşulunu sağlayan $f \in H$ elemanlarından ibarettir ve $f \in D(g(A))$ iken

$$g(A)f = \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k) (f, e_k) e_k$$

olur. Eğer $g(\lambda)$ fonksiyonu sınırlı ise, $g(A)$ operatörü de sınırlı normal operatör olur.

$\sigma_p(1 \leq p < \infty)$ sınıfları: T , H uzayında dönüşüm yapan kompakt operatör olsun. Bu takdirde T^*T operatörü tam sürekli, negatif olmayan kendine eş operatör olur. T^*T nin sıfırdan farklı özdeğerlerini

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_n^2 \geq \dots$$

ile gösterelim. $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ sayılarına T operatörünün s -sayıları denir [6].

s -sayıları

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p < \infty$$

özelliğini sağlayan operatörler kümesini σ_p ile gösterelim. σ_p ' ye ait T operatörünün normu

$$\|T\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p \right)^{1/p}$$

formülü ile tanımlanırsa σ_p , p' nin $[1, \infty)$ aralığına ait herbir değerinde Banach uzayı oluşturur[10]. σ_1 ' e ait operatöre çekirdek operatörü, σ_2 ' ye ait operatöre ise Hilbert-Schmidt operatörü denir. Daha sonra kullanacağımız aşağıdaki teoremi şimdiden ifade edelim.

Teorem 3: [10]. A ve B, H uzayında herhangi sınırlı operatörler, $T \in \sigma_p$ ise

$$ATB \in \sigma_p$$

ve

$$\|ATB\|_p \leq \|A\| \|B\| \|T\|_p$$

olur.

Biz bu teoremin $p=2$ halini kullanacağız.

2. YARI EKSENDE VERİLMİŞ y^{IV} DİFERANSİYEL İFADESİNİN GREEN FONKSİYONU

3. Bölümde operatör katsayılı diferansiyel ifadenin Green fonksiyonunu incelemek için bu bölümde aşağıdaki sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulmamız gerekir.

$L_2(0, \infty)$ Hilbert uzayında

$$(-1)^n y^{(2n)}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2.1)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(j)}(0) - h_{(j+1)/2} y^{(j-1)}(0) = 0, \quad j=1, 3, \dots, 2n-1, \quad (2.2)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörü T ile gösterelim burada $h_{(j+1)/2}$ ' ler herhangi kompleks sayılardır. T operatörünün tanım kümesi $D(T)$ ' ye ait $y(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

- 1- $y^{(2n-1)}(x)$, $[0, \infty)$ ' un her sonlu kapalı aralığında mutlak sürekli,
- 2- $y^{(2n)}(x) \in L_2(0, \infty)$,
- 3- $y(x)$, (2.2) koşullarını sağlar.

T nin $y(x) \in D(T)$ ' deki değeri

$$Ty(x) = (-1)^n y^{(2n)}(x)$$

formülü ile tanımlanır. Biz bu problemin rezolventini (Green fonksiyonunu), yani $(T + \alpha^{2n})^{-1}$ ($\alpha > 0$) operatörünü, $n=2$ değerinde inceleyeceğiz. Bu takdirde (2.1), (2.2) probleminin rezolventinin bulunması, $\forall f(x) \in L_2(0, \infty)$ olmak üzere

$$Ty + \alpha^4 y = f(x)$$

operatör denklemini çözmek, bir başka ifade ile

$$y^{IV} + \alpha^4 y = f(x) \quad (2.3)$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \quad (2.4)$$

$$y'''(0) - h_2 y''(0) = 0 \quad (2.5)$$

sınır değer probleminin $L_2(0, \infty)$ ' a ait çözümün bulunması anlamına gelir. Burada α herhangi pozitif sayıdır. Önce $f(x)$ ' in sonlu supporta (desteğe) sahip olduğunu varsayarak (2.3)-(2.5) denklemini sabitin değişimi yöntemi ile çözelim. Denklemin genel çözümünü, c_1, c_2, c_3, c_4 ' ler x 'e bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$y = c_1 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} + c_2 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} + c_3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} + c_4 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} \quad (2.6)$$

şeklinde arayalım. $b > 0$ herhangi sabit sayı olmak üzere $x > b$ iken $f(x) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (1+i) \int_x^b f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} ds + \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (1+i) \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(s-x)} ds$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \int_x^b f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(s-x)} ds - \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(s-x)} ds$$

$$+ \frac{\left(-h_2 \alpha^2 i - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2\alpha^2)} \int_0^x \left\{ \left(\frac{1}{4} \alpha^{-2} i - h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (1+i) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(s-x)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{4} \alpha^{-2} i + h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(-x+s)]} \Big\} f(s) ds \\
& - \frac{\left(h_1 - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_0^x \left\{ \left(-\frac{1}{4} - h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (-1+i) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(s+x)} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} + h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(-x+s)]} \right\} f(s) ds \\
& + \frac{\left(h_1 + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_0^x \left\{ \left(-\frac{1}{4} - h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (-1+i) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(x-s)]} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} + h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)(x+s)} \right\} f(s) ds \\
& - \frac{\left(h_2 \alpha^2 i + \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_0^x \left\{ \left(\frac{1}{4} \alpha^{-2} i - h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(x-s)]} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} \alpha^{-2} i + h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)(x+s)} \right\} f(s) ds \\
& + \frac{\left(-h_2 \alpha^2 i - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_x^b \left\{ \left(\frac{1}{4} \alpha^{-2} i - h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (1+i) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(s+x)} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} \alpha^{-2} i + h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(-x+s)]} \right\} f(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(h_1 - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_x^b \left\{ \left(-\frac{1}{4} + h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (-1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(s+x)} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} + h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(-x+s)]} \right\} f(s) ds \\
& + \frac{\left(h_1 - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_x^b \left\{ \left(-\frac{1}{4} - h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (-1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(x-s)]} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} + h_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)(x+s)} \right\} f(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(h_2 \alpha^2 i + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (-1+i) \right)}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \int_x^b \left\{ \left(\frac{1}{4} \alpha^{-2} i - h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(x-s)]} \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4} \alpha^{-2} i + h_1 \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)(x+s)} \right\} f(s) ds
\end{aligned}$$

olur. Eğer

$$g(x, s; \alpha) =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(1+i) e^{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}(1+i)(s-x)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(-1+i) e^{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}(1-i)(s-x)} \right. \\
& + \frac{\left(\frac{1}{4}(1+i)h_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)\alpha^{-1}h_1h_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha(-1+i) + \frac{1}{4}(1+i)h_1 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(s+x)} \\
& + \frac{\left(-\frac{1}{2}h_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)\alpha + \frac{1}{2}h_1 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}[-(x+s)+i(-x+s)]} \\
& + \frac{\left(-\frac{1}{2}h_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha i + \frac{1}{2}h_2 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}[-(x+s)+i(x-s)]} \\
& + \frac{\left(\frac{1}{4}(-1+i)h_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)\alpha^{-1}h_1h_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha(1+i) + \frac{1}{4}(-1+i)h_2 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(s+x)} \Big] , s < x \\
= & \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(1+i) e^{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(-1+i) e^{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}(-1+i)(s-x)} \right. \\
& + \frac{\left(\frac{1}{4}(-1+i)h_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\alpha^{-1}h_1h_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha(1+i) + \frac{1}{4}(-1+i)h_2 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(s+x)} \\
& + \frac{\left(-\frac{1}{2}h_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)\alpha + \frac{1}{2}h_1 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}[-(x+s)+i(-x+s)]} \\
& + \frac{\left(-\frac{1}{2}h_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha i + \frac{1}{2}h_2 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}[-(x+s)+i(x-s)]} \\
& + \frac{\left(\frac{1}{4}(-1+i)h_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\alpha^{-1}h_1h_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha(1+i) + \frac{1}{4}(-1+i)h_2 \right)}{\alpha^2 i (-2h_1h_2 - \sqrt{2}\alpha(h_1+h_2) - 2\alpha^2)} \cdot e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(s+x)} \Big] , s > x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [|x-s|+i|x-s|]} - \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (-1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [|x-s|-i|x-s|]} \\
&+ \frac{\left[\frac{1}{4} (1+i) h_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} (-1+i) h_1 h_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha (-1+i) + \frac{1}{4} (1+i) h_1 \right]}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \cdot e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(x+s)} \\
&+ \frac{\left[-\frac{1}{2} h_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha (-1+i) + \frac{1}{2} h_1 \right]}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(-x+s)]} \\
&+ \frac{\left[-\frac{1}{2} h_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha i + \frac{1}{2} h_2 \right]}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} [-(x+s)+i(x-s)]} \\
&+ \frac{\left[\frac{1}{4} (-1+i) h_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} (1+i) h_1 h_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha (1+i) + \frac{1}{4} (-1+i) h_2 \right]}{\alpha^2 i (-2 h_1 h_2 - \sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2) - 2 \alpha^2)} \cdot e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)(x+s)} \quad 0 \leq x, s < \infty
\end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Yukardaki ifadenin altı toplamına sırasıyla $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ dersek

$$g(x, s, \alpha) = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 \tag{2.8}$$

yazabiliriz.

$$y(x) = \int_0^{\infty} g(x, s; \alpha) f(s) ds \tag{2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, $f(x)$ kompakt desteğe sahip bir fonksiyon olduğunda (2.3), (2.4), (2.5) sınır değer probleminin çözümü (2.9) şeklinde ifade edilebilir.

Eğer $f(x)$, $L_2(0, \infty)$ ' a ait keyfi fonksiyon ise, (2.9) fonksiyonunun (2.3)-(2.5) sınır değer problemini sağladığı kolayca gösterilebilir. (2.9) integral operatörü, Karleman tipli sınırlı integral operatördür. Yani,

$$\left(\int_0^\infty \left| \int_0^\infty G(x, s; \alpha) f(s) ds \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \int_0^\infty |G(x, s; \alpha)|^2 ds < \infty$$

şeklindedir.

3. YARI EKSENDE VERİLEN 4. MERTEBEDEN NORMAL OPERATÖR KATSAYILI DİFERANSİYEL İFADE İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

3.1 Problemin Belirlenmesi

$H_1 = L_2(0, \infty, H)$ uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y + \mu y \quad (3.1)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$y'''(0) - h_2 y''(0) = 0 \quad (3.3)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün rezolventini inceleyeceğiz.

Burada H ayrılabilir Hilbert uzayı, h_1, h_2 keyfi kompleks sayılar, $\mu > 0$ reel sayıdır. Biz $Q(x)$, x' in $[0, \infty)$ ' dan alınmış her bir değerinde H uzayında dönüşüm yapan normal operatör olduğunu ve aşağıdaki özellikleri sağladığını varsayacağız.

1-) $Q(x)$, x' in $[0, \infty)$ ' dan alınmış her bir değerinde H' da normal operatör, tanım kümesi $D(Q(x)) = D$ x' den bağımsız olmak üzere $\bar{D} = H$ olsun. (Burada $\bar{D}$ sembolü D nin kapanışını gösterir.)

2-) $Q^{-1}(x)$, x' in her bir değerinde kompakt olsun ($Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty$). $Q(x)$ ' in özdeğerleri $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \dots$, olmak üzere $1 \leq |\alpha_1(x)| \leq |\alpha_2(x)| \leq \dots \leq |\alpha_n(x)| \leq \dots$ olsun.

3-) $Q(x)$ ' in rezolvent kümesinin λ kompleks düzleminin $s_\varepsilon = \{\lambda: |\arg \lambda - \pi| < \varepsilon, 0 < \varepsilon < \pi\}$ bölgesinde olduğunu varsayalım.

4-) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k(x)|^{7/4}}$ fonksiyonunun $L(0, \infty)$ ' a ait olduğunu varsayalım:

$$\int_0^{\infty} F(x) dx < \infty.$$

5-) $|x-s| \leq 1$ iken $\|Q^{-1/4}(x).Q^{1/4}(s)\| \leq c_1$ ve $\|Q^{1/4}(x).Q^{-1/4}(s)\| \leq c_2$, $c_{1,2} = s b t$

6-) $|x-s| \leq 1$ iken $\|Q^{-a}(x)[Q(s) - Q(x)]\| \leq c|x-s|$ olsun. Burada $c = s b t$ ve $0 < a < \frac{5}{4}$ alınmaktadır.

$B(H)$ ile H 'da dönüşüm yapan sınırlı operatörlerin Banach uzayını gösterelim [7]. (3.1)-(3.3) probleminin Green fonksiyonu, $0 \leq x, s < \infty$ değerlerinde $B(H)$ ' ya ait olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $G(x, s; \mu)$ fonksiyonuna denir:

1-) $G(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonun kendisi ve ilk iki kısmi türevi x, s ($0 \leq x, s \leq \infty$) değişkenlerine göre sürekli fonksiyondur.

2-) $s \neq x$ olduğunda $G(x, s; \mu)$ ' nün s ' ye göre üçüncü türevi süreklidir.

3-) $\frac{\partial^3 G}{\partial s^3}(x, x+0, \mu) - \frac{\partial^3 G}{\partial s^3}(x, x-0, \mu) = I$ (I, H 'de birim operatördür).

4-) $s \neq x$ olduğunda $\frac{\partial^4 G}{\partial s^4}(x, s; \mu) + G(x, s; \mu)Q(s) + \mu G(x, s; \mu) = 0$.

$$5-) \left. \frac{\partial G}{\partial s}(x, s; \mu) \right|_{s=0} - h_1 G(x, s; \mu) \Big|_{s=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^3 G}{\partial s^3}(x, s; \mu) \right|_{s=0} - h_2 \left. \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(x, s; \mu) \right|_{s=0} = 0.$$

$G(x; s; \mu)$ operatör fonksiyonunu parametrik yöntemine göre

$$G(x, s; \mu) = r(x-s)g(x, s; \mu) - \int_0^\infty \left\{ r^{(iv)}(x-\xi)g(x, \xi; \mu) + 4r'''(x-\xi)g'(x, \xi; \mu) \right.$$

$$+ 6r''(x-\xi)g''(x, \xi; \mu) + 4r'(x-\xi)g'''(x, \xi; \mu) \quad (3.4)$$

$$\left. + r(x-\xi)g(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \right\} G(\xi, s; \mu) d\xi$$

integral denklemin çözümü şeklinde arayacağız. Burada

$$r(u) = \begin{cases} 1 & |u| \leq \rho \\ 0 & |u| \geq 2\rho, \end{cases} \quad 0 < \rho < \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

koşulunu sağlayan istenildiği kadar türevelere sahip herhangi bir fonksiyon. ve $g(x, s; \mu)$, (2.7)

formülünde $\alpha = \sqrt[4]{Q(x) + \mu I}$ olmak üzere elde edilen ifadedir. $\alpha = \sqrt[4]{Q(x) + \mu I}$ operatör fonksiyonu spektral açılım formülü ile

$$\sqrt[4]{Q(x) + \mu I} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\alpha_n(x) + \mu} (\cdot, e_n) e_n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x), \dots$ $Q(x)$ ' in sırasıyla $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x), \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özvektörlerdir, $\sqrt[4]{Q(x) + \mu I}$; $-\pi + \varepsilon < \arg(\alpha_n(x) + \mu) < \pi - \varepsilon$ ' dan tanımlanır

(3.4) integral denkleminin tek çözüme sahip olduğunu ve bu çözümün (2.3)-(2.5) probleminin Green fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. (3.4) ifadesindeki integral operatörü N ile gösterelim.

$$NA = \int_0^\infty \left\{ r^{iv}(x - \xi)g(x, \xi; \mu) + 4r'''(x - \xi)g'(x, \xi; \mu) + 6r''(x - \xi)g''(x, \xi; \mu) + \right. \\ \left. 4r'(x - \xi)g'''(x, \xi; \mu) + r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \right\} A(\xi, s; \mu) d\xi. \quad (3.6)$$

olacaktır.

(3.4) denklemini çeşitli uzaylarda inceleyeceğiz. Bu uzayları tanımlayalım.

X_2 Uzayı: $A(x, s)$, H' da tanımlanmış, $(0 \leq x, s < \infty)$ Hilbert-Schmidt (H-S) tipli, $\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, s)\|_2^2 ds < \infty$ koşulunu sağlayan operatör değerli bir fonksiyon olsun ($A(x, s) \in \sigma_2$).

Bu operatörler kümesini X_2 ile gösterelim. Burada $\|A(x, s)\|_2$, $A(x, s)$ ' nin H-S normunu gösterir[10]. $A(x, s)$ elemanının normu

$$\|A(x, s)\|_{X_2} = \sqrt{\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, s)\|_2^2 ds}$$

şeklinde tanımlanır.

$X_3^{(p)}$ ($p \geq 1$) Uzayı: $0 \leq x, s < \infty$ her x, s için $A(x, s) \in B(H)$ ve $\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|A(x, s)\|_H^p ds < \infty$ olan

operatörler kümesi. Bu kümede norm;

$$\|A\|_{X_3^{(p)}} = \sqrt[p]{\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|A(x,s)\|^p ds}$$

şeklinde tanımlanır.

$X_4^{(+1/4)}$ Uzayı: $A(x,s) \in B(H)$ ($0 \leq x, s < \infty$) olmak üzere

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|A(x,s) Q^{-1/4}(s)\| ds < \infty$$

koşulunu sağlayan $A(x,s)$ operatör fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda norm

$$\|A(x,s)\|_{X_4^{(-1/4)}} = \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|A(x,s) Q^{-1/4}(s)\| ds$$

şeklinde tanımlanır.

X_5 Uzayı: $A(x,s) \in B(H)$ olmak üzere

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \sup_{0 \leq s < \infty} \|A(x,s)\| < \infty$$

koşulunu sağlayan $A(x,s)$ operatör fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda norm

$$\|A(x,s)\|_{X_5} = \sup_{0 \leq x < \infty} \sup_{0 \leq s < \infty} \|A(x,s)\|$$

şeklinde tanımlanır.

Bu uzaylar Levitan, B.M. [16] tarafından verilmiş ve bunların Banach uzayı oldukları gösterilmiştir.

(3.4) integral denklemini X_2 uzayında göz önüne alalım. Bu denklemin $\mu > 0$ büyük değerlerinde X_2 ' de tek çözüme sahip olduğunu ve çözümün ardışık yaklaştırma yöntemi ile bulunabileceğini gösterelim. Bunun için $\mu > 0$ büyük değerlerinde $g(x, s; \mu) \in X_2$ ve

$$NA = \int_0^\infty \left\{ r^{(4)}(x - \xi)g(x, \xi; \mu) + 4r'''(x - \xi)g'(x, \xi; \mu) + 6r''(x - \xi)g''(x, \xi; \mu) \right. \\ \left. + 4r'(x - \xi)g'''(x, \xi; \mu) + r(x - \xi)g^{(4)}(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \right\} A(\xi, s; \mu) d\xi$$

operatörünün X_2 ' de büzen operatör olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 1: Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 4-), 6-) koşullarını sağlıyor ise o zaman $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörü X_2 uzayında büzen operatördür.

İspat: $Q(x)$ ' in $|\alpha_1(x)| \leq |\alpha_2(x)| \leq \dots \leq |\alpha_n(x)| \leq \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özfonksiyonlarını $e_1(x), e_2(x), \dots, \alpha_n(x), \dots$ ile gösterelim. $Q^{-1}(x)$ tam süreklidir.

$$NA = \sum_{j=1}^5 N_j A \quad (3.7)$$

şeklinde yazalım. Burada;

$$N_1 A = \int_0^\infty [r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)[Q(x) - Q(\xi)]] A(\xi, \eta) d\xi$$

$$N_2 A = \int_0^\infty 4r'(x - \xi)g'''(x, \xi; \mu) A(\xi, \eta) d\xi$$

$$N_3 A = \int_0^\infty 6r''(x - \xi)g''(x, \xi; \mu) A(\xi, \eta) d\xi$$

$$N_4 A = \int_0^{\infty} 4r'''(x - \xi)g'(x, \xi; \mu)A(\xi, \eta)d\xi$$

$$N_5 A = \int_0^{\infty} r^{IV}(x - \xi)g(x, \xi; \mu)A(\xi, \eta)d\xi$$

olarak alınmaktadır.

Eğer biz $N_1 A, N_2 A, N_3 A, N_4 A, N_5 A$ operatörlerinin normlarının $\mu > 0$ büyük değerlerinde istenildiği kadar küçük olduğunu gösterirsek, μ 'nün büyük değerlerinde N 'nin büzen operatör olduğunu göstermiş oluruz. Normun özelliğinden

$$\|N\| \leq \|N_1\| + \|N_2\| + \|N_3\| + \|N_4\| + \|N_5\|$$

yazabiliriz.

İşlemleri $N_1 A$ operatörü için yapalım. (2.8) de

$$g(x, s; \mu) = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$$

şeklindeydi.

$$N_1 A = \int_0^{\infty} [r(x - \xi)g(x, \xi; \mu)[Q(x) - Q(\xi)]]A(\xi, \eta)d\xi$$

$$N_1 A = \int_0^{\infty} r(x - \xi) \sum_{i=1}^6 g_i(x, \xi; \mu) [Q(x) - Q(\xi)] A(\xi, \eta) d\xi$$

$$N_1 A = N_{11} A + N_{12} A + N_{13} A + N_{14} A + N_{15} A + N_{16} A$$

$$\|N_1\| \leq \|N_{11}\| + \|N_{12}\| + \|N_{13}\| + \|N_{14}\| + \|N_{15}\| + \|N_{16}\|$$

$$N_1 A = \int_0^\infty [r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]]A(\xi,\eta)d\xi$$

$$N_{11} A = \int_0^\infty [r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]]A(\xi,\eta)d\xi$$

$$= \int_{|x-\xi|\leq 1} [r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]]A(\xi,\eta)d\xi$$

$$+ \int_{|x-\xi|>1} [r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]]A(\xi,\eta)d\xi$$

$$= b_1 + b_2$$

$$\|N_{11}A(x,\xi)\|_2 = \|b_1 + b_2\|_2 \leq \|b_1\|_2 + \|b_2\|_2$$

$$\|N_{11}A(x,\xi)\|_2^2 \leq 2(\|b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2).$$

$r(x-\xi)$ fonksiyonunun tanımından $b_2 = 0$ olacaktır.

$$\|b_1\|_2^2 = \left\| \int_{|x-\xi|\leq 1} r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi \right\|_2^2$$

$$\leq \left[\int_{|x-\xi|\leq 1} \|r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)\|_2 d\xi \right]^2 \quad (3.8)$$

$$\|r(x-\xi)g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]\| = K$$

dersek

$$\begin{aligned}
K &\leq c \|g_1(x, \xi; \mu) Q^a(x) Q^{-a}(x) [Q(x) - Q(\xi)]\| \\
&\leq c \|g_1(x, \xi; \mu) Q^a(x)\| \|Q^{-a}(x) [Q(x) - Q(\xi)]\| \\
&= c_1 \left\| (1+i)(Q(x)+\mu I)^{-3/4} e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} [x-\xi+i|x-\xi|]} Q^a(x) \right\| |x-\xi| \\
&= c_1 \left\| (1+i)(Q(x)+\mu I)^{-3/4} Q^a(x) |x-\xi| e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-\xi|} \right\|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Norm içindeki ifadeye de L diyelim ve $\|L\|$ 'yi sınırlandıralım. $Q(x)$ ' in spektral açılımından

$$\begin{aligned}
\|L\| &= \sup_j \left| |x-\xi| (1+i) (\alpha_j(x)+\mu)^{-3/4} \alpha_j^a(x) e^{-(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-\xi|} \right| \\
&= \sup_j \left| |x-\xi| (1+i) (\alpha_j(x)+\mu)^{-3/4} \alpha_j^a(x) e^{-\delta \operatorname{Re} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} |x-\xi|} \right| \\
&\leq \sup_j \left\{ |x-\xi| (1+i) (\alpha_j(x)+\mu)^{-3/4} \alpha_j^a(x) e^{-\gamma |\alpha_j(x)+\mu|^{1/4} |x-\xi|} \right\} \\
&= \sup_j \left\{ |x-\xi|^{-\varepsilon} |x-\xi|^{1+\varepsilon} \alpha_j^a(x) (1+i) (\alpha_j(x)+\mu)^{1+\varepsilon/4} (\alpha_j(x)+\mu)^{-\frac{3}{4}-\frac{1+\varepsilon}{4}} e^{-\gamma |\alpha_j(x)+\mu|^{1/4} |x-\xi|} \right\} \\
&\leq |x-\xi|^{-\varepsilon} |1+i| \sup_j \left| (\alpha_j(x)+\mu)^{-\frac{4-\varepsilon}{4}} \alpha_j^a(x) \right| \sup_j \left\{ |\alpha_j(x)+\mu|^{\frac{1+\varepsilon}{4}} |x-\xi|^{1+\varepsilon} e^{-\gamma |\alpha_j(x)+\mu|^{1/4} |x-\xi|} \right\} \\
&= \sqrt{2} |x-\xi|^{-\varepsilon} \sup_j \left| (\alpha_j(x)+\mu)^{-\frac{4-\varepsilon}{4}} (\alpha_j(x)+\mu)^a \alpha_j^a(x) \right|.
\end{aligned}$$

$$\cdot \sup_j \left\{ \left| \alpha_j(x) + \mu \right|^{\frac{1+\varepsilon}{4}} |x - \xi_j|^{1+\varepsilon} e^{-\gamma \left| \alpha_j(x) + \mu \right|^{1/4} |x - \xi_j|} \right\} \quad (3.9)$$

yazabiliriz. $0 < a < \frac{5}{4}$ koşuluna göre $\frac{-4-\varepsilon}{4} + a = q < 0$ kaydıyla ε sayısını $0 < \varepsilon < 1$ olacak şekilde seçelim.

$$(n, p \text{ herhangi sabit pozitif sayılar ve } m \geq 0 \text{ olduğunda } m^n \cdot e^{-m \cdot p} \leq \text{sbt tir.}) \quad (3.10)$$

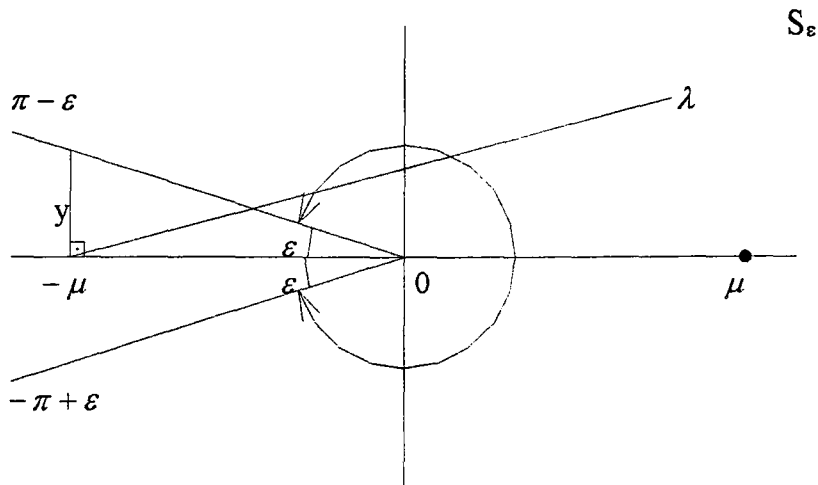
(3.9) ifadesinde

$$\left| \alpha_j(x) + \mu \right|^{1/4} |x - \xi_j| = m, \quad 1 + \varepsilon = n, \quad \gamma = p$$

dersek (3.10)' dan faydalanabiliriz.

$$\|L\| \leq c |x - \xi_j|^{-\varepsilon} \sup_j \left| \left(\alpha_j(x) + \mu \right)^n \right| \cdot \sup_j \left| \left(\alpha_j(x) + \mu \right)^{-a} \alpha_j^a(x) \right| \quad (3.11)$$

$$\left| \alpha_j(x) + \mu \right|^{-a} \leq c_1 \left| \alpha_j(x) \right|^{-a} \quad (3.12)$$



Son ifade ve

$$|\alpha_j(x) + \mu| \geq \mu \sin \varepsilon \quad (3.13)$$

($\lambda \in S$ ve $\mu > 0$ herhangi sayı iken $|\lambda + \mu| = \text{Uzaklık}(\lambda, -\mu) > \mu \sin \varepsilon$) eşitsizliklerini (3.11) de gözönüne alalım.

$$\|L\| \leq c|x - \xi|^{-\varepsilon} \mu^q \quad (q < 0)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|b_1\|_2^2 &= \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \|r(x-\xi)g_1(x, \xi; \mu)[Q(x) - Q(\xi)]A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \\ &\leq \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} c_2 \mu^q |x - \xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \quad ** \\ &= c_2^2 \mu^{2q} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x - \xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\|b_1\|_{X_2}^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty c \mu^{2q} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x - \xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 dx d\eta$$

elde edilir. Şimdi bu ifadenin ikinci integralini ele alalım.

**' Burada ve sonra, c ile farklı sabitler gösterilir.

$$\Pi = \int_0^\infty \left\{ \int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right\}^2 dx \quad (3.14)$$

$$\Pi = \int_0^\infty \left\{ \int_{|x-t| \leq 1} |x-t|^{-\varepsilon} \|A(t, \eta)\|_2 dt \int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right\} dx$$

Burda $t > x$, $\xi > x$ kabul edelim ve

$$t - x = v \Rightarrow t = v + x \Rightarrow dt = dv$$

$$\xi - x = u \Rightarrow \xi = u + x \Rightarrow d\xi = du$$

değişken dönüşümlerini yapalım

$$\Pi = \int_0^\infty \left\{ \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} \|A(x+v, \eta)\|_2 dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} \|A(x+u, \eta)\|_2 du \right\} dx$$

$$\Pi = \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \int_0^\infty \|A(x+v, \eta)\|_2 \|A(x+u, \eta)\|_2 dx$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\Pi \leq \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^\infty \|A(x+v, \eta)\|_2^2 dx \int_0^\infty \|A(x+u, \eta)\|_2^2 dx \right)^{1/2}$$

$$= \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^\infty \|A(x+v, \eta)\|_2^2 dx \int_0^\infty \|A(\omega+u, \eta)\|_2^2 d\omega \right)^{1/2}$$

$$x+v=z \quad \omega+u=z,$$

$$dx=dz \quad d\omega=dz,$$

$$\begin{aligned} II &= \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_v^\infty \|A(z, \eta)\|_2^2 dz \cdot \int_u^\infty \|A(z, \eta)\|_2^2 dz \right)^{1/2} \\ &\leq \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^\infty \|A(z, \eta)\|_2^2 dz \cdot \int_0^\infty \|A(z, \eta)\|_2^2 dz \right)^{1/2} \\ &= \int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx \right) \\ &= c \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bu son eşitlikteki $\int_{|v| \leq 1} |v|^{-\varepsilon} dv$ ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |v|^{-\varepsilon} dv &= \int_{-1}^0 |v|^{-\varepsilon} dv + \int_0^1 |v|^{-\varepsilon} dv = \int_{-1}^0 (-v)^{-\varepsilon} dv + \int_0^1 v^{-\varepsilon} dv \\ &= 2 \int_0^1 v^{-\varepsilon} dv = 2 \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.15) ve (3.16)'yı (3.14)'de gözönüne alırsak;

$$\|b_1\|_{X_2}^2 \leq c \mu^{2q} \int_0^\infty \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx d\eta = c \mu^{2q} \|A(x, \eta)\|_{X_2}^2 < \infty$$

$$c = \frac{4}{(1-\varepsilon)^2} < \infty \quad \text{olmak üzere}$$

$$\|b_1\|_{X_2} \leq c \mu^{2q} \|A(x, \eta)\|_{X_2}$$

olur. Başa dönersek

$$\|N_{11}A\|_2^2 \leq c \mu^{2q} \|A(x, \eta)\|_{X_2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $N_{11}A(x, \xi)$ operatörünü sınırlandırmış olduk. Benzer şekilde $N_{12}A, N_{13}A, N_{14}A, N_{15}A, N_{16}A$ operatörleri de sınırlandırılabilir. Dolayısıyla N_1A operatörünü sınırlandırmış olduk. Benzer şekilde N_2A, N_3A, N_4A, N_5A operatörleri de sınırlandırılır ve operatörlerin hepsinin normlarının üst sınırlarında μ^q , $q < 0$ çarpanı bulunduğundan büyük μ ' ler için NA istenildiği kadar küçük yapılabilir. Böylece NA operatörünün Buzen operatör olduğu gösterilmiş olur.

$r(x-s)g(x, s; \mu)$ ' nün X_2 uzayına ait olduğunu gösterirsek o zaman (3.4)' ün $\mu > 0$ büyük değerlerinde X_2 uzayına ait tek çözümünün olduğunu göstermiş oluruz.

(2.8) den

$$\|g\| \leq \|g_1\| + \|g_2\| + \|g_3\| + \|g_4\| + \|g_5\| + \|g_6\|$$

bulunur. g_1 ' in (2.8) deki ifadesinden

$$r(x-s)g_1(x, s; \mu) = r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} (Q(x) + \mu I)^{-3/4} (1+i) e^{-(Q(x) + \mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|}$$

olur. Şimdi rg_1 ' i sınırlandıralım. Norm özelliğinden

$$\|rg_1\| = \left\| r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} (Q(x) + \mu I)^{-3/4} (1+i) e^{-(Q(x) + \mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) |x-s|} \right\|$$

$$\leq \left\| r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} (Q(x) + \mu I)^{-3/4} \right\| \cdot \left\| (1+i) e^{-(Q(x) + \mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) |x-s|} \right\|$$

bulunur.

A normal operatörünün özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ iken $\|f(A)\| = \max_j |f(\lambda_j)|$ olur. Q operatörünün özdeğerleri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots$ ler olsun.

$$\|rg_1\| \leq \max_j |r(x-s)| \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{8} (\alpha_j(x) + \mu)^{-3/4} \right| \cdot |1+i| \cdot \left| e^{-(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) |x-s|} \right|$$

(3.13)' den

$$\|rg_1\| \leq \frac{2}{8\mu^{3/4}(\text{Sine})^{3/4}} \max_j \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} |x-s| (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} - i \frac{\sqrt{2}}{2} |x-s| (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} \right|$$

$$= \frac{1}{4\mu^{3/4}(\text{Sine})^{3/4}} \max_j e^{\frac{\sqrt{2}}{2} |x-s| \left(\text{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} - \text{Im}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} \right)}$$

olur. Burada $-\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \arg(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{4}$ olduğu varsayılırsa,

$$\|rg_1\| < \frac{1}{4\mu^{3/4}(\text{Sine})^{3/4}} \max_j e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \delta |x-s| \text{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} \quad \delta > 0$$

$$= \frac{1}{4\mu^{3/4}} \frac{1}{(\text{Sine})^{3/4}} \max_j e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \delta \|x-s\| |\alpha_j(x)+\mu|^{1/4} \sqrt[4]{\cos\varphi}}, \quad \varphi = \arg(\alpha_j + \mu)^{1/4}$$

$$\leq \frac{1}{4\mu^{3/4}} \frac{1}{(\text{Sine})^{3/4}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \delta \|x-s\| \mu^{1/4}} \quad \delta > 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|rg_1\| \leq \frac{c_1}{\mu^{3/4}} e^{-\delta_1 \|x-s\| \mu^{1/4}}, \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta, \quad c_1 = \frac{1}{4(\text{Sine})^{3/4}} > 0 = \text{sbt} \quad (3.17)$$

olduğu yani rg_1 'in sınırlı olduğu gösterilmiş oldu. g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 terimleri içinde benzer sınırlandırmalar yapılır ise

$$\|rg_j\| \leq \frac{c_j}{\mu^{3/4}} e^{-\delta_j \|x-s\| \mu^{1/4}}, \quad \delta_j > 0, \quad c_j > 0$$

olur. Sonuçta

$$\|rg\|_H \leq \|rg_1\|_H + \|rg_2\|_H + \|rg_3\|_H + \|rg_4\|_H + \|rg_5\|_H + \|rg_6\|_H$$

$$\leq \frac{c}{\mu^{3/4}} e^{-\delta \|x-s\| \mu^{1/4}}, \quad c = \max_{1 \leq j \leq 6} c_j, \quad \delta = \min_{1 \leq j \leq 6} \delta_j$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c > 0$, $\delta > 0$ sabitlerdir. Bu eşitsizlikten

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|r(x-s)g(x,s;\mu)\|^p ds \leq \frac{c}{\mu^{3/4}} \int_0^\infty e^{-\delta \|x-s\| \mu^{1/4} p} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{\mu^{3/4}} \int_0^x e^{-\delta(x-s)\mu^{1/4}p} ds + \frac{c}{\mu^{3/4}} \int_x^\infty e^{\delta(x-s)\mu^{1/4}p} ds \\
&= \frac{c}{\mu^{3/4}} \frac{1}{\delta\mu^{1/4}p} e^{-\delta(x-s)\mu^{1/4}p} \Big|_0^x - \frac{c}{\mu^{3/4}} \frac{1}{-\delta\mu^{1/4}p} e^{\delta(x-s)\mu^{1/4}p} \Big|_x^\infty \\
&= \frac{c}{\mu\delta p} (1 - e^{-\delta x \mu^{1/4}p}) + \frac{c}{\mu\delta p} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|r(x-s)g(x,s;\mu)\|^p ds \leq \frac{c}{\mu\delta p} (2 - e^{-\delta x \mu^{1/4}p})$$

Buradan $r(x-s)g(x,s;\mu)$ nün X_3^p uzayına ait olduğu ($p \geq 1$) görülür. Biz sadece $p=1$ halini kullanacağız.

Şimdi $Q(x)$ fonksiyonunun 4-) . koşulunu sağladığını varsayarak rg ' nin X_2 uzayına ait olduğunu gösterelim. İşlemi rg ' nin içerdiği herhangi bir terim, örneğin $r(x-s)g_1(x,s;\mu)$ terimi için yapalım. Yani $rg_1 \in X_2$ olduğunu gösterelim. Diğer terimlerin de X_2 ' ye ait olduğu benzer şekilde gösterilir. $g_1(x,s;\mu)$; normal operatör değerli $Q(x)$ fonksiyonunun fonksiyonu olduğundan dolayı normal operatörler için spektral açılım formülünü kullanalım:

$$\begin{aligned}
\|rg_1\|_2^2 &= \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \right)^2 \left| r(x-s)(1+i)(\alpha_j(x)+\mu)^{-3/4} e^{-(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)|x-s|} \right|^2 \\
&= \frac{1}{32} \sum_{j=1}^\infty |r(x-s)|^2 \cdot |1+i|^2 \cdot |\alpha_j(x)+\mu|^{-3/2} \cdot \left(e^{\operatorname{Re} \left[-(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)|x-s| \right]} \right)^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-s|} + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Im}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-s| \right)^2$$

$\operatorname{Re}(\alpha_j + \mu) - \operatorname{Im}(\alpha_j + \mu) > \delta \operatorname{Re}(\alpha_j + \mu)$, $\delta > 0$ olduğundan

$$\|rg_1\|_2^2 \leq \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} e^{-\sqrt{2}\delta |x-s| \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}}$$

olur. $rg_1 \in X_2$ olabilmesi için $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \|rg_1\|_2^2 ds dx < \infty$ olması gerekiyor.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} e^{-\sqrt{2}|x-s|\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} ds dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{16} \left[\int_0^x \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} e^{-\sqrt{2}(x-s)\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} ds + \int_x^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} e^{\sqrt{2}(x-s)\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} ds \right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{16} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{2}\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} e^{-\sqrt{2}(x-s)\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} \Big|_0^x \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{-\sqrt{2}\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} e^{\sqrt{2}(x-s)\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} \Big|_x^{\infty} \right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{2}\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} dx$$

$$- \int_0^{\infty} \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{2}\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} e^{-\sqrt{2}x\delta \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty \frac{1}{16} \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{-\sqrt{2\delta} \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} dx \\
& = \frac{\sqrt{2}}{16\delta} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} dx \\
& \quad - \frac{1}{16\sqrt{2\delta}} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} e^{-\sqrt{2\delta} \operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} dx \\
& < \frac{1}{8\sqrt{2\delta}} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j(x) + \mu|^{-3/2} \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} dx \\
& \leq \frac{1}{8\sqrt{2\delta}} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{|\alpha_j(x) + \mu|^{3/2}} \frac{1}{c_1 |\alpha_j(x) + \mu|^{1/4}} dx
\end{aligned}$$

$Q(x)$ ' in 4-). özelliğinden

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|g_1\|_2^2 ds dx = c \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \frac{dx}{|\alpha_j(x) + \mu|^{7/4}} < \infty$$

bulunur. Böylece $rg_1 \in X_2$ olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4: Eğer $Q(x)$ operatörünün 4-) ve 6-) koşulları sağlanıyorsa o zaman μ' nün büyük değerlerinde (3.4) denkleminin X_2 uzayında çözümü vardır ve tekdir. Bu çözüm ardışık yaklaştırma yöntemi ile bulunabilir.

Lemma 2: Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu Lemma 1'deki koşulları sağlıyorsa o zaman $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörü $X_2, X_3^{(1)}, X_4^{(-1/4)}$ ve X_5 uzaylarının her birinde

büzen operatördür. Aynı zamanda, eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1), 6) koşullarına ek olarak $\|Q^{1/4}(x)Q^{-1/4}(s)\| \leq c$, $c=sbt$ koşulunu sağlıyorsa o zaman $rg \in X_4^{(+1/4)}$ olur.

İspat: Lemma 1' in ispatına benzer şekilde yapılabilir. (3.4) denkleminin bu uzaylarda tek çözüme sahip olduğunu göstermek için rg' nin bu uzaylara ait olduğunu göstermemiz yeterlidir. (3.4) denkleminin $X_3^{(1)}, X_4^{(+1/4)}, X_5$ uzaylarında çözüme sahip olduğunu gösterelim, ancak bunun için de rg' nin bu uzaylara ait olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 1'de bu elemanın X_2' ye ait olduğu gösterilmiştir.

$$\sup_{0 < x < \infty} \int_0^\infty \|rg(x, s; \mu) Q^{1/4}(s)\| ds < \infty$$

olduğunu yani $rg \in X_4^{(+1/4)}$ olduğunu gösterelim.

$$\int_0^\infty \|rg(x, s; \mu) Q^{1/4}(s)\| ds = \int_{|x-s| \leq 1} \|rg(x, s; \mu) Q^{1/4}(s)\| ds + \int_{|x-s| > 1} \|rg(x, s; \mu) Q^{1/4}(s)\| ds$$

$$= a(x, \mu) + b(x, \mu)$$

diyelim. Burada

$$a(x, \mu) = \int_{|x-s| \leq 1} \|rg(x, s; \mu) Q^{1/4}(s)\| ds$$

$$b(x, \mu) = \int_{|x-s| > 1} \|rg(x, s; \mu) Q^{1/4}(s)\| ds$$

şeklindedir. r fonksiyonunun özelliğinden dolayı $b(x, \mu) = 0$ olmaktadır. $|x - s| \leq 1$ iken

$\|Q^{-1/4}(x)Q^{1/4}(s)\| \leq c$ koşulunu kullanarak $a(x, \mu)$ 'yü hesap edelim.

$$\begin{aligned} a(x, \mu) &= \int_{|x-s| \leq 1} \|rg(x, s; \mu)Q^{1/4}(x)Q^{-1/4}(x)Q^{1/4}(s)\| ds \\ &\leq \int_{|x-s| \leq 1} \|rg(x, s; \mu)Q^{1/4}(x)\| \cdot \|Q^{-1/4}(x)Q^{1/4}(s)\| ds \\ &\leq c \int_{|x-s| \leq 1} \|r\alpha^{-3}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha|x-s|}Q^{1/4}(x)\| ds \end{aligned}$$

Spektral açılım formülünden

$$\alpha^{-3}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha|x-s|}Q^{1/4}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(x) + \mu)^{-3/4} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}|x-s|} \cdot \alpha_j^{1/4}(x) (e_j) e_j$$

yazılır. Bu eşitliğin normu

$$\left\| \alpha^{-3}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha|x-s|}Q^{1/4}(x) \right\| = \sup_j \left| \alpha_j(x) + \mu \right|^{-3/4} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}|x-s|} \alpha_j^{1/4}(x) \right|$$

şeklindedir. (3.12), $a = \frac{1}{4}$ değerinde göz önüne alınırsa

$$\left\| \alpha^{-3}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha|x-s|}Q^{1/4}(x) \right\| \leq \sup_j \left| \alpha_j(x) + \mu \right|^{-1/2} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}|x-s|} \right| \leq c$$

bulunur. (3.12)' den

$$\|(Q(x)+\mu)^{-1/4}Q^{1/4}(x)\|\leq c$$

elde edilir. Bununla $\sup_{0\leq x<\infty} a(x,\mu)<\infty$ olduğu gösterilmiş olur.

rg' nin $X_3^{(1)}$ ve X_5 uzaylarına ait olduğu benzer şekilde gösterilir. Yani Lemma'nın ispatı tamamlanmıştır.



3.2 Green Fonksiyonunun Türevleri

$G(x,s;\mu)$ operatör fonksiyonunun $\frac{\partial^j G(x,s;\mu)}{\partial s^j}$ ($j=1,2,3$) türevlerine sahip olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\begin{aligned} G(x,s;\mu) = & r(x-s)g(x,s;\mu) - \int_0^\infty \left\{ r^{iv}(x-\xi)g(x,\xi;\mu) + 4r'''(x-\xi)g'(x,\xi;\mu) \right. \\ & + 6r''(x-\xi)g''(x,\xi;\mu) + 4r'(x-\xi)g'''(x,\xi;\mu) \\ & \left. + r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)[Q(\xi) - Q(x)] \right\} G(\xi,s;\mu) d\xi \end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafının s' ye göre biçimsel türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j G(x,s;\mu)}{\partial s^j} = & \frac{\partial^j}{\partial s^j} [r(x-s)g(x,s;\mu)] - \int_0^\infty \left\{ r^{iv}(x-\xi)g(x,\xi;\mu) + 4r'''(x-\xi)g'(x,\xi;\mu) \right. \\ & + 6r''(x-\xi)g''(x,\xi;\mu) + 4r'(x-\xi)g'''(x,\xi;\mu) \\ & \left. + r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)[Q(\xi) - Q(x)] \right\} \frac{\partial^j G(\xi,s;\mu)}{\partial s^j} d\xi \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur. $\frac{\partial^j G}{\partial s^j} = K_j$ dersek,

$$K_j(x,s;\mu) = \frac{\partial^j}{\partial s^j} [r(x-s)g(x,s;\mu)] - N K_j(\xi,s;\mu) \quad (j=1,2,3) \quad (3.19)$$

yazabiliriz. (3.19) integral denklemini $X_3^{(p)}$ ($p \geq 1$) Banach uzayında göz önüne alalım. N 'nin $X_3^{(p)}$ ($p \geq 1$) uzayında $\mu > 0$ 'ın büyük değerlerinde büzen operatör olduğunu göstermiştik (Lemma 2). Eğer $\frac{\partial^j}{\partial s^j} [r(x-s)g(x,s;\mu)]$, ($j=1,2,3$) operatör fonksiyonunun $X_3^{(p)}$ uzayına ait olduğunu gösterirsek (3.19) denkleminin $\mu > 0$ büyük değerlerinde $X_3^{(p)}$

uzayında tek çözüme sahip olduğunu göstermiş oluruz. Önce $\frac{\partial^j}{\partial s^j} [r(x-s)g(x,s;\mu)] \in X_3^{(p)}$

yani $\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^j (rg)}{\partial s^j} \right\|_{\mathbb{H}}^p ds < \infty$ olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial^j}{\partial s^j} [r(x-s)g(x,s;\mu)] = \frac{\partial^j r g_1}{\partial s^j} + \frac{\partial^j r g_2}{\partial s^j} + \frac{\partial^j r g_3}{\partial s^j} + \frac{\partial^j r g_4}{\partial s^j} + \frac{\partial^j r g_5}{\partial s^j} + \frac{\partial^j r g_6}{\partial s^j}$$

şeklindedir. $\frac{\partial^j r g_1}{\partial s^j} \in X_3^{(p)}$ olduğunu gösterelim. Diğer terimler de benzer şekilde gösterilir.

$$\frac{\partial r g_1}{\partial s} = \begin{cases} \frac{1}{8} \alpha^{-2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[-\sqrt{2}(1+i)r'(x-s)\alpha^{-1} + 2i r(x-s) \right] & x > s \\ \frac{1}{8} \alpha^{-2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[-\sqrt{2}(1+i)r'(x-s)\alpha^{-1} - 2i r(x-s) \right] & x < s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial r g_1}{\partial s} \right\|_{X_3^{(p)}} &= \left(\sup_x \int_x^\infty \left\| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)r'(x-s)\alpha^{-3} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} - \frac{1}{4} i r(x-s)\alpha^{-2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|^p ds \right. \\ &\quad \left. + \sup_x \int_0^x \left\| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)r'(x-s)\alpha^{-3} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} + \frac{1}{4} i r(x-s)\alpha^{-2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left[\sup_x \int_x^\infty \left(\left\| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)r'(x-s)\alpha^{-3} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|^p + \left\| -\frac{1}{4} i r(x-s)\alpha^{-2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|^p \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \sup_x \int_0^x \left(\left\| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)r'(x-s)\alpha^{-3} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|^p + \left\| \frac{1}{4} i r(x-s)\alpha^{-2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|^p \right) ds \right]^{1/p} \end{aligned}$$

Bu ifadedeki normlara sırasıyla a,b,c ve d diyelim.

Aşağıdaki işlemlerde $\alpha = (Q(x) + \mu I)^{1/4}$ olduğu dikkate alınır.

$$\begin{aligned} \|a\| &= \left\| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)r'(x-s)\alpha^{-3}e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\| \\ &\leq \left\| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)r'(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-3/4} \right\| \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)}(Q(x)+\mu I)^{1/4} \right\| \end{aligned}$$

Burada $Q(x)$ ' in spektral açılım formülünü kullanırsak;

$$\|a\| \leq \max_j |r'(x-s)| \cdot |1+i| \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{8}(\alpha_j(x)+\mu)^{-3/4} \right| \cdot \left| e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} \right| \Rightarrow$$

$$\|a\| \leq \frac{c}{\mu^{3/4}} e^{\delta_1(x-s)\mu^{1/4}}, \quad \delta_1 = sbt > 0$$

$$\begin{aligned} \|b\| &= \left\| -\frac{1}{4}ir(x-s)\alpha^{-2}e^{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\| \\ &\leq \left\| -\frac{1}{4}r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-1/2} \right\| \cdot |i| \cdot \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)}(Q(x)+\mu I)^{1/4} \right\| \end{aligned}$$

Yine $Q(x)$ operatör fonksiyonunun spektral açılım formülünü kullanırsak;

$$\|b\| \leq \max_j |r(x-s)| \cdot \left| \frac{1}{4}(\alpha_j(x)+\mu)^{-1/2} \right| \cdot \left| e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} \right| \Rightarrow$$

$$\|b\| \leq \frac{c_1}{\mu^{1/2}} e^{\delta_2(x-s)\mu^{1/4}}, \quad \delta_2 = sbt > 0$$

$$\|c\| = \left\| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)r'(x-s)\alpha^{-3}e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|$$

$$\leq \left\| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)r'(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-3/4} \right\| \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4}} \right\|$$

$$= \max_j \left| -r'(x-s) \right| \left| 1+i \right| \left| \frac{\sqrt{2}}{8}(\alpha_j(x)+\mu)^{-3/4} \right| \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \right| \Rightarrow$$

$$\|c\| \leq \frac{c}{\mu^{3/4}} e^{-\delta_3(x-s)\mu^{1/4}} \quad \delta_3 = s b t > 0$$

$$\|d\| = \left\| \frac{1}{4} i r(x-s) \alpha^{-2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-s)} \right\|$$

$$\leq \left\| \frac{1}{4} r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-1/2} \right\| \left| i \right| \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4}} \right\|$$

$$= \max_j \left| r(x-s) \right| \left| \frac{1}{4}(\alpha_j(x)+\mu)^{-1/2} \right| \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \right| \Rightarrow$$

$$\|d\| \leq \frac{c_1}{\mu^{1/2}} e^{-\delta_4(x-s)\mu^{1/4}} \quad \delta_4 = s b t > 0$$

$\min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \delta$ diyelim.

$$\left\| \frac{\partial g_1}{\partial s} \right\|_{X_3^{(p)}} \leq \left[\sup_x \int_x^\infty \left(\frac{c}{\mu^{3/4}} e^{\delta(x-s)\mu^{1/4}} + \frac{c_1}{\mu^{1/2}} e^{\delta(x-s)\mu^{1/4}} \right)^p ds \right. \\ \left. + \sup_x \int_0^x \left(\frac{c}{\mu^{3/4}} e^{-\delta(x-s)\mu^{1/4}} + \frac{c_1}{\mu^{1/2}} e^{-\delta(x-s)\mu^{1/4}} \right)^p ds \right]^{1/p}$$

$p=1$ alalım.

$$\left\| \frac{\partial r g_1}{\partial s} \right\|_{X_3^{(1)}} \leq \frac{c}{\mu^{3/4} \delta_1 \mu^{1/4}} e^{\delta(x-s)\mu^{1/4}} \left| -\frac{c_1}{\mu^{1/2} \delta_1 \mu^{1/4}} e^{\delta(x-s)\mu^{1/4}} \right|_x^\infty$$

$$+ \frac{c}{\mu^{3/4} \delta_1 \mu^{1/4}} e^{-\delta(x-s)\mu^{1/4}} \left| +\frac{c_1}{\mu^{1/2} \delta_1 \mu^{1/4}} e^{-\delta(x-s)\mu^{1/4}} \right|_0^x$$

$$< \frac{c}{\mu}$$

Dolayısıyla

$$\left\| \frac{\partial r g_1}{\partial s} \right\|_{X_3^{(1)}} = \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial r g_1(x, s; \mu)}{\partial s} \right\| ds \leq \frac{c}{\mu} < \infty$$

olur. Şimdi $\frac{\partial^2 g_1(x, s; \mu)}{\partial s^2}$ operatör fonksiyonunun $X_3^{(1)}$ uzayına ait olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial^2 r g_1}{\partial s^2} = \begin{cases} \frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) r''(x-s) \alpha^{-1-2i} r'(x-s) + \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \alpha r(x-s) \right] & x > s, \\ \frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) r''(x-s) \alpha^{-1+2i} r'(x-s) + \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \alpha r(x-s) \right] & x < s. \end{cases}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 r g_1}{\partial s^2} \right\|_{X_3^{(1)}} = \left(\sup_x \int_0^x \left\| \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) r''(x-s) \alpha^{-1-2i} r'(x-s) + \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \alpha r(x-s) \right] \right\| ds \right.$$

$$\left. + \sup_x \int_x^\infty \left\| \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) r''(x-s) \alpha^{-1+2i} r'(x-s) + \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \alpha r(x-s) \right] \right\|^p ds \right)^{1/p}.$$

Burada $|r'(x-s)| \leq c$, $|r''(x-s)| \leq c$, $|r'''(x-s)| \leq c$ oldukları gözönüne alınır ve

$\left\| \frac{\partial r g_1}{\partial s} \right\|_{X_3^{(1)}}$ 'in sınırlandırılmasındaki gibi işlemler yapılırsa

$$\left\| \frac{\partial^2 r g_1}{\partial s^2} \right\|_{X_3^{(1)}} \leq c$$

ve

$$\frac{\partial^3 r g_1}{\partial s^3} = \begin{cases} \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)r'''(x-s)\alpha^{-1} + 3ir''(x-s) \right. \\ \left. - \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)\alpha.r'(x-s) - \alpha^2 r(x-s) \right] & x > s \\ \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)r'''(x-s)\alpha^{-1} - 3ir''(x-s) \right. \\ \left. - \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)\alpha.r'(x-s) + \alpha^2 r(x-s) \right] & x < s \end{cases}$$

için

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^3 r g_1}{\partial s^3} \right\|_{X_3^{(1)}} &= \sup_x \int_0^x \left\| \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)r'''(x-s)\alpha^{-1} + 3ir''(x-s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)\alpha.r'(x-s) - \alpha^2 r(x-s) \right] \right\| ds \\ &+ \sup_x \int_x^\infty \left\| \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)r'''(x-s)\alpha^{-1} - 3ir''(x-s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)\alpha.r'(x-s) + \alpha^2 r(x-s) \right] \right\| ds \end{aligned}$$

Burada $\alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}\alpha = I$ (I , H 'de birim operatördür) operatörlerinin, r fonksiyonunun kendisinin ve türevlerinin sınırlı olduğunu gözönüne alırsak

$$\left\| \frac{\partial^3 r g_1}{\partial s^3} \right\| = c \sup_x \int_0^x \left\| e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(x-s)} \right\| ds + c \sup_x \int_x^\infty \left\| e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(x-s)} \right\| ds$$

olduğu görülür. $Q(x)$ ' in spektral açılım formülünden

$$\left\| e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} \right\| = \sup_{\lambda+\mu \in S} \left| e^{-\gamma(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} |x-s|} \right| = \sup_{\lambda+\mu \in S} e^{-\gamma(\lambda+\mu)^{1/4} |x-s|} \leq e^{-\gamma|x-s|} \quad (\gamma > 0)$$

olur. Bunlar gözönüne alınırsa

$$\left\| \frac{\partial^3 r g_1}{\partial s^3} \right\|_{X_3^{(1)}} = c \sup_x \int_0^x e^{-\gamma(x-s)} ds + c \sup_x \int_x^\infty e^{-\gamma(x-s)} ds \leq c_1$$

olduğu görülür

$$\left\| \frac{\partial^3 r g_1}{\partial s^3} \right\|_{X_3^{(1)}} \leq c_1$$

oldukları gösterilir. Böylece $\frac{\partial^3 r g}{\partial s^3} \in X_3^{(1)}$ olduğu bulundu. Yani, Lemma 2'den (3.19)

denkleminin $X_3^{(1)}$ 'e ait tek çözümünün var olduğu gösterilmiş oldu.

$G(x, \xi; \mu)$ fonksiyonunun $\xi \neq x$ iken üçüncü türevinin varlığını göstermeye çalışalım.

$$Nf = \int_0^{\infty} \left\{ r^{iv}(x-\xi)g(x,\xi;\mu) + 4r''(x-\xi)g'(x,\xi;\mu) + 6r'(x-\xi)g''(x,\xi;\mu) \right. \\ \left. + 4r'(x-\xi)g'''(x,\xi;\mu) + r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)[Q(\xi) - Q(x)] \right\} f(\xi)d\xi$$

olmak üzere $Nf = \int_0^{\infty} P(x,\xi,\mu)f(\xi)d\xi$ diyelim. (3.19) denkleminde $j=1$ alalım.

$$K_1(x,s;\mu) = \frac{\partial}{\partial s} [r(x-s)g(x,s;\mu)] - \int_0^{\infty} P(x,\xi;\mu)K_1(\xi,s;\mu)d\xi \quad (3.20)$$

olacaktır. Bu eşitliğin her iki tarafının $[s,\infty)$ aralığında integralini alalım.

$$\int_s^{\infty} K_1(x,\eta;\mu)d\eta = \int_s^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} [r(x-\eta)g(x,\eta;\mu)]d\eta - \int_0^{\infty} P(x,\xi;\mu) \left(\int_s^{\infty} K_1(\xi,\eta;\mu)d\eta \right) d\xi \\ = -r(x-s)g(x,s;\mu) - \int_0^{\infty} P(x,\xi;\mu) \left(\int_s^{\infty} K_1(\xi,\eta;\mu)d\eta \right) d\xi.$$

Bu eşitlik bizim tanımladığımız (3.4) Green fonksiyonu eşitliğiyle aynıdır. (3.4) denklemi tek çözüme sahip idi. Dolayısıyla

$$G(x,s,\mu) = -\int_s^{\infty} K_1(x,\eta;\mu)d\eta \quad (3.21)$$

olur. Burada s' ye göre türev alalım.

$$\frac{\partial}{\partial s} G(x,s,\mu) = K_1(x,s;\mu) \quad (3.22)$$

olur. $K_1(x,s;\mu)$ operatör fonksiyonunun s' ye göre sürekli olduğu gösterilebilirse, $G(x,s;\mu)$ fonksiyonunun s' ye göre türetilbilir olduğu gösterilmiş olur. O halde $K_1(x,s;\mu)$ 'nin s' ye göre sürekli olduğunu gösterelim. (3.20) denklemini şu şekilde yazalım.

$$K_1(x, s; \mu) - \frac{\partial}{\partial s} [r(x-s)g(x, s; \mu)] = - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \left[K_1(\xi, s; \mu) d\xi - \frac{\partial}{\partial s} [r(\xi-s)g(\xi, s; \mu)] \right] d\xi \quad (3.23)$$

$$- \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial}{\partial s} [r(\xi-s)g(\xi, s; \mu)] d\xi.$$

Eğer ;

$$L(x, s; \mu) = K_1(x, s; \mu) - \frac{\partial}{\partial s} [r(x-s)g(x, s; \mu)] \quad (3.24)$$

ve

$$l(x, s; \mu) = - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial}{\partial s} [r(\xi-s)g(\xi, s; \mu)] d\xi \quad (3.25)$$

dersek; (3.23) denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$L(x, s; \mu) = l(x, s; \mu) - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) L(\xi, s; \mu) d\xi. \quad (3.26)$$

$L(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun s' ye göre sürekli olduğunu göstermek için bu integral denklemini X_s uzayında göz önüne alalım.

X_s uzayı; H' da tanımlanmış $\|A\|_{X_s} = \sup_{0 \leq x < \infty} \sup_{0 \leq s < \infty} \|A(x, s)\| < \infty$ özelliğine sahip $A(x, s)$

$(0 \leq x, s < \infty)$, lineer sınırlı operatör değerli fonksiyonlardan oluşuyordu.

$\frac{\partial [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s} \in X_s$ olduğunu göstermemiz için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial [r(x-(s+h))g(x, s+h; \mu)]}{\partial s} - \frac{\partial [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s} \right\|_{X_s} = 0 \quad (3.27)$$

olduğunu göstermeliyiz. $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörünün X_s uzayında büzen operatör olduğunu göz önüne alırsak (Lemma 2), $l(x,s;\mu)$ ifadesinden $l(x,s;\mu) \in X_s$ ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|l(x,s+h;\mu) - l(x,s;\mu)\|_{X_s} = 0$$

olduğu görülür. (3.26) denklemini X_s uzayında gözönüne alırsak, bu denklemi

$$\begin{aligned} L(x,s;\mu) &= l(x,s;\mu) - NL(x,s;\mu) \\ L(x,s;\mu) &= (I+N)^{-1}l(x,s;\mu) \end{aligned} \quad (3.28)$$

gibi yazabiliriz. Burada Lemma 2'yi dikkate aldık yani, $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörü X_s uzayında büzen operatördür. Norm özelliğinden

$$\|L(x,s;\mu)\|_{X_s} \leq \|(I+N)^{-1}\|_{X_s} \cdot \|l(x,s;\mu)\|_{X_s} \quad (3.29)$$

olur. $\|(I+N)^{-1}\|_{X_s} = c$ olsun. O halde $\|L(x,s;\mu)\|_{X_s} \leq c \|l(x,s;\mu)\|_{X_s}$ olur. $\frac{\partial^2(rg)}{\partial s^2}$ operatör

fonksiyonu X_s uzayına aittir. $\left(\left\| \frac{\partial^2(rg)}{\partial s^2} \right\|_{X_s} \leq c \text{ olduğu gösterilebilir.} \right)$

(3.27)'yi göstermek için

$$\frac{\partial[r(x-(s+h))g(x,s+h;\mu)]}{\partial s} - \frac{\partial[r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s} = \int_s^{s+h} \frac{\partial^2[r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s^2} ds \quad h \geq 0$$

eşitliğini kullanalım. Buradan

$$\left\| \frac{\partial[r(x-(s+h))g(x,s+h;\mu)]}{\partial s} - \frac{\partial[r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s} \right\| \leq \int_s^{s+h} \left\| \frac{\partial^2(rg)}{\partial s^2} \right\| ds \leq c \int_s^{s+h} ds$$

veya

$$\left\| \frac{\partial [r(x-(s+h))g(x,s+h;\mu)]}{\partial s} - \frac{\partial [r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s} \right\| \leq ch$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial [r(x-(s+h))g(x,s+h;\mu)]}{\partial s} - \frac{\partial [r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s} \right\|_{X_s} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$l(x,s;\mu) \in X_s \quad \text{ve} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|l(x,s+h;\mu) - l(x,s;\mu)\|_{X_s} = 0$$

elde edilmiş oldu. (3.29)' a göre $h \geq 0$ iken

$$\|L(x,s+h;\mu) - L(x,s;\mu)\|_{X_s} \leq \|(I+N)^{-1}\|_{X_s} \cdot \|l(x,s+h;\mu) - l(x,s;\mu)\|_{X_s}$$

yazılabilir. Burada limite geçerse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L(x,s+h;\mu) - L(x,s;\mu)\|_{X_s} \leq \|(I+N)^{-1}\|_{X_s} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \|l(x,s+h;\mu) - l(x,s;\mu)\|_{X_s} = 0$$

elde edilir ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L(x,s+h;\mu) - L(x,s;\mu)\|_{X_s} = 0 \tag{3.30}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\|L(x, s+h; \mu) - L(x, s; \mu)\| \leq \|L(x, s+h; \mu) - L(x, s; \mu)\|_{X_s},$$

olduğundan, X_s uzayının normunun tanımına göre H' da dönüşüm yapan $L(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun x 'in her değerinde s değişkenine göre $[0, \infty)$ aralığında düzgün sürekliliği görülür. (3.24) ifadesini

$$K_1(x, s; \mu) = L(x, s; \mu) + \frac{\partial}{\partial s} [r(x-s)g(x, s; \mu)]$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki $L(x, s; \mu)$ ve $\frac{\partial [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s}$ operatör fonksiyonları s 'ye göre sürekli olduğundan, $K_1(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun H' da sürekli olduğu görülür.

(3.22)'yi (3.20)' de yerine yazalım:

$$\frac{\partial G(x, s; \mu)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} [r(x-s)g(x, s; \mu)] - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial G(\xi, s; \mu)}{\partial s} d\xi.$$

Biçimsel olarak bu eşitliğin her iki yanının s 'ye göre türevini alırsak

$$\frac{\partial^2 G(x, s; \mu)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^2} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^2 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^2} d\xi \quad (3.31)$$

olur.

$$K_2(x, s; \mu) = \frac{\partial^2 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^2} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) K_2(\xi, s; \mu) d\xi$$

denklemini göz önüne alalım. $K_1(x, s; \mu)$ için yazdığımız integral denklemdeki $\frac{\partial(rg)}{\partial s}$ 'nin

yerinde, burada $\frac{\partial^2(rg)}{\partial s^2}$ var. Öte yandan $\frac{\partial^2(rg)}{\partial s^2}$ operatör fonksiyonu s 'ye göre süreklidir.

(3.31) eşitliğinin her iki yanının biçimsel olarak s 'ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^3} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi \quad (3.32)$$

olur.

$$K_3(x, s; \mu) = \frac{\partial^3 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^3} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) K_3(\xi, s; \mu) d\xi \quad (3.33)$$

diyelim. $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$, nin ifadesinden $\left\| \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} \right\| \leq c$ olduğu [1]'de olduğu gibi gösterilir. Bu da

$\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} \in X_s$ demektir. O halde $\mu > 0$ ' nün büyük değerlerinde (3.33) denklemi tek çözüme

sahiptir. (3.33) eşitliğinin her iki yanının (s, ∞) aralığında integralini alalım:

$$\int_s^\infty K_3(x, s; \mu) ds = -\frac{\partial^2 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^2} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \left(\int_s^\infty K_3(\xi, s; \mu) ds \right) d\xi \quad (3.34)$$

elde ederiz. Bu denklem (3.31) denklemi ile aynıdır. (3.31) tek çözüme sahip olduğundan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = -\int_s^\infty K_3(x, s; \mu) ds$$

elde edilir. Eğer $K_3(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun s' ye göre ($s \neq x$) sürekli olduğunu

gösterebilirsek, $\frac{\partial^3 G}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun da s' ye göre ($s \neq x$) türevelere sahip olduğunu

anlamış oluruz.

$$L(x, s; \mu) = K_3(x, s; \mu) - \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} \quad (3.35)$$

$$l(x, s; \mu) = - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} d\xi \quad (3.36)$$

dersek (3.32) denklemi

$$L(x, s; \mu) = l(x, s; \mu) - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) L(\xi, s; \mu) d\xi$$

şekline gelir. $L(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun s' ye göre sürekliliğini inceleyelim. Bu son eşitliği

$$(I+N)L=I \quad (3.37)$$

şeklinde yazabiliriz. $\mu > 0$ ' nün büyük değerlerinde N operatörünün X_s uzayında da büzen operatör olduğu gösterilebilir. Bundan dolayı (3.34) ifadesi $L = (I+N)^{-1}I$ şeklinde yazılabilir. Burada $\|(I+N)^{-1}\|_{X_s} < c$ dir.

Eğer $l(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonu için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|l(x, s+h; \mu) - l(x, s; \mu)\|_{X_s} = 0 \quad (3.38)$$

olduğunu gösterebilirsek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L(x, s+h; \mu) - L(x, s; \mu)\|_{X_s} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $L(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun H uzayında s' ye göre sürekli olduğunu elde etmiş oluruz.

(3.38) ifadesini ispatlamak için şu Lemma'yı ispatlayalım.

Lemma 3: $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < h \leq \delta$ olduğunda $\|l(x, s+h; \mu) - l(x, s; \mu)\|_{X_s} < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır.

İspat: (3.33) den $l(x, s+h; \mu) - l(x, s; \mu)$ ifadesini, $\delta > 0$ sabit sayısı için $t > \delta$ olmak üzere, aşağıdaki gibi yazalım.

$$\begin{aligned}
 l(x, s+h; \mu) - l(x, s; \mu) &= \\
 &= \int_0^{s-t} P(x, s; \mu) \left[\frac{\partial^3 [r(\xi - (s+h))g(\xi, s+h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(\xi - s)g(\xi, s; \mu)]}{\partial s^3} \right] d\xi \\
 &\quad + \int_{s-t}^{s+t} P(x, s; \mu) \left[\frac{\partial^3 [r(\xi - (s+h))g(\xi, s+h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(\xi - s)g(\xi, s; \mu)]}{\partial s^3} \right] d\xi \\
 &\quad + \int_{s+t}^{\infty} P(x, s; \mu) \left[\frac{\partial^3 [r(\xi - (s+h))g(\xi, s+h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(\xi - s)g(\xi, s; \mu)]}{\partial s^3} \right] d\xi \\
 &= R_1 + R_2 + R_3.
 \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ iken $\|R_1\|_{X_s}$, $\|R_2\|_{X_s}$, $\|R_3\|_{X_s}$ ifadelerini sınırlandırmaya çalışalım. $\|R_1\|_{X_s}$ ifadesiyle başlayalım. R_1 için $\xi < s-t$ veya $s-\xi > t$ olur. Buradan $s-\xi+h > t+h > t-\delta$ olur. Bundan dolayı

$$\frac{\partial^3 [r(\xi - (s+h))g(\xi, s+h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(\xi - s)g(\xi, s; \mu)]}{\partial s^3} = \int_0^{|h|} \frac{\partial^4 [r(\xi - (\eta + s))g(\xi, \eta + s; \mu)]}{\partial \eta^4} d\eta$$

olduğu görülür. Her iki tarafın normunu alırsak;

$$\left\| \frac{\partial^3 [r(\xi - (s+h))g(\xi, s+h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(\xi - s)g(\xi, s; \mu)]}{\partial s^3} \right\| \leq \int_0^{|h|} \left\| \frac{\partial^4 [r(\xi - (\eta + s))g(\xi, \eta + s; \mu)]}{\partial \eta^4} \right\| d\eta \quad (3.39)$$

olur. rg_1 ' in ifadesi gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial^4(rg_1)}{\partial s^4} = \begin{cases} \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \left[r^{iv}(x-s) \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \alpha^{-1} - 4ir'''(x-s) \right. \\ \left. + 3\sqrt{2}r''(x-s)(-1+i)\alpha + 4\alpha^2 r'(x-s) - r(x-s)\alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right] & x > s \\ \frac{\alpha^{-2}}{4} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-s)} \left[r^{iv}(x-s) \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \alpha^{-1} + 4ir'''(x-s) \right. \\ \left. + 3\sqrt{2}r''(x-s)(-1+i)\alpha - 4\alpha^2 r'(x-s) - r(x-s)\alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right] & x < s \end{cases}$$

olduğu elde edilir. (3.39) daki $\left\| \frac{\partial^4 [r(\xi - \eta - s)g(\xi, \eta + s; \mu)]}{\partial \eta^4} \right\|$ ifadesini alalım ve spektral

açılım formülünü kullanalım. Önce $\left\| \frac{\partial^4 (rg_1)}{\partial \eta^4} \right\|$ ifadesini göz önüne alalım.

$$\left\| \frac{\partial^4 [r(\xi - \eta - s)g_1(\xi, \eta + s; \mu)]}{\partial \eta^4} \right\| = \begin{cases} \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \left\{ \left| -\frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda + \mu)^{1/4}(1+i)r(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \right. \\ \quad + \left| r'(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \\ \quad + \left| \frac{3\sqrt{2}}{4}(\lambda + \mu)^{-1/4}(-1+i)r''(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \\ \quad + \left| -(\lambda + \mu)^{-1/2}ir(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \\ \quad \left. + \left| \frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda + \mu)^{-3/4}(1+i)r^{iv}(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \right\} & \xi > \eta \\ \\ \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \left\{ \left| -\frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda + \mu)^{1/4}(1+i)r(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \right. \\ \quad + \left| r'(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \\ \quad + \left| \frac{3\sqrt{2}}{4}(\lambda + \mu)^{-1/4}(-1+i)r''(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \\ \quad + \left| -(\lambda + \mu)^{-1/2}ir(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \\ \quad \left. + \left| \frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda + \mu)^{-3/4}(1+i)r^{iv}(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| \right\} & \xi < \eta \end{cases}$$

olacaktır. 1. terimi göz önüne alırsak:

$$\int_0^{|h|} \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \left| -\frac{\sqrt{2}}{8}(\lambda + \mu)^{1/4}(1+i)r(\xi - \eta - s)e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| d\eta$$

$$\leq c \int_0^{|h|} \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \left| (\lambda + \mu)^{1/4} e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| d\eta \quad (3.40)$$

Burada

$$\left| e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\xi - \eta - s)} \right| = \left| e^{-(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta - s)} \cdot e^{-i(\lambda + \mu)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta - s)} \right|$$

$$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Re}(\lambda+\mu)^{1/4}(\xi-\eta-s)} \cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Im}(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi-\eta-s)}$$

$$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{Re}(\lambda+\mu)^{1/4} + \operatorname{Im}(\lambda+\mu)^{1/4}] (\xi-\eta-s)}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda+\mu) = |\lambda+\mu|^{1/4} \cdot \cos \varphi; \quad \varphi = \arg(\lambda+\mu)^{1/4}$$

$$\operatorname{Im}(\lambda+\mu) = |\lambda+\mu|^{1/4} \cdot \sin \varphi \quad \text{ve} \quad \cos \varphi - \sin \varphi = \delta > 0$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$e^{\frac{\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{Re}(\lambda+\mu)^{1/4} + \operatorname{Im}(\lambda+\mu)^{1/4}] (\xi-\eta-s)} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda+\mu|^{1/4} \delta}$$

olur. $\frac{\sqrt{2}}{2} \delta = \gamma$ dersek, (3.40) eşitsizliği

$$\int_0^h \sup_{\lambda \in S_\varepsilon} |(\lambda+\mu)^{1/4} e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(\xi-\eta-s)}| d\eta \leq c \int_0^h \sup_{\lambda \in S_\varepsilon} |\lambda+\mu|^{1/4} e^{-\gamma(\xi-\eta-s)} |\lambda+\mu|^{1/4} d\eta$$

olur. Buradan

$$\int_0^h \sup_{\lambda \in S_\varepsilon} |\lambda+\mu|^{1/4} e^{-\gamma(\xi-\eta-s)} |\lambda+\mu|^{1/4} d\eta = c \int_0^h \sup_{\lambda \in S_\varepsilon} \frac{1}{(\xi-\eta-s)} |\lambda+\mu|^{1/4} (\xi-\eta-s) e^{-\gamma(\xi-\eta-s)} |\lambda+\mu|^{1/4} d\eta$$

elde edilir. Burada $m > 0$, $\gamma > 0$ olmak üzere $m e^{-\gamma m} \leq c$ olduğunu ve [16] çalışmasını (s:251) gözönüne alırsak bu son integralin

$$\leq c \frac{\delta}{1-\delta}$$

olduğu görünür. Diğer terimlere de benzer şekilde bakılır. Dolayısıyla

$$\left\| \frac{\partial^3 [r(\xi - (s+h))g(\xi, s+h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(\xi - s)g(\xi, s; \mu)]}{\partial s^3} \right\| \leq c \frac{\delta}{t-\delta}$$

elde edilir. Burada Lemma 1' deki işlemlere benzer işlemler yaparsak;

$$\|R_1\|_{X_s} \leq c \frac{\delta}{t-\delta}$$

olur. Benzer işlemler $\|R_2\|_{X_s}$ ve $\|R_3\|_{X_s}$ için de yapıldığında sonuçta , $\varepsilon > 0$ herhangi sayı

olsun. $\delta > 0$ istenildiği kadar küçük sayı olduğundan $\frac{c\delta}{t-\delta} < \varepsilon$ seçersek $0 < h < \delta$ iken

$$\|l(x, s+h, \mu) - l(x, s, \mu)\|_{X_s} < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $l(x, s, \mu)$ operatör fonksiyonunun s değişkenine göre sürekliliğini ispatlamış olduk.

$L(x, s; \mu) = (I + N)^{-1} l(x, s; \mu)$ ve $\|(I + N)^{-1}\|_{X_s} < c$ olduğundan $L(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonu da s' ye göre süreklidir.

(3.35) ifadesinden $K_3(x, s; \mu)'$ nün s' ye göre süreklilik noktaları $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun s' ye göre süreklilik noktaları ile aynıdır. s' nin x' den farklı değerlerinde $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterebilirsek $K_3(x, s; \mu)'$ nün de s ($x \neq s$) değişkenine göre sürekli olduğunu göstermiş oluruz.

$s < x$ olsun ve $x - s = y$ diyelim. $y > 0$, $|h|$ küçük bir sayı olmak üzere

$$\left\| \frac{\partial^3 [r(x - (s + h))g(x, s + h; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(x - s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^3} \right\|_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (3.41)$$

olduğunu görmeye çalışalım. Öncelikle $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ deki $\frac{\partial^3 (rg_1)}{\partial s^3}$ ifadesinin bu (3.41) koşulunu sağladığını gösterelim.

$\frac{\partial^3 (rg_1)}{\partial s^3}$ teriminin s' ye göre sürekliliğini göstermek için bu ifadedeki her bir terimin sürekli olduğunu göstermemiz gerekir. Önce

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\alpha^{-3}r'''(x-s)e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)}$$

ifadesinin s' ye göre sürekli olduğunu gösterelim. Dolayısıyla

$$\left\| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\alpha^{-3}r'''(x-s-h)e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s-h)} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\alpha^{-3}r'''(x-s)e^{-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} \right\|_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

olduğunu göstermeliyiz. ($x-s=y$, $y>0$ idi)

$x \geq 0$ sabit tutulmak üzere $Q(x)$ normal operatörünün spektral fonksiyonunu E_λ ile gösterelim. Eğer skaler değerli $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu Q operatörünün spektrumunu içeren kompleks düzlemin herhangi bölgesinde tanımlanmış sürekli (genelde Borel anlamında ölçülebilir [24]) fonksiyon ise o zaman Q 'nun fonksiyonu olan $\varphi(Q)$ operatörü

$$\varphi(Q) = \int_s \varphi(\lambda) dE_\lambda, \quad (\lambda = \sigma + i\gamma)$$

formülü ile tanımlanır[24]. Aynı zamanda $\varphi(Q)$ operatörünün normunun

$$\|\varphi(Q)\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \int \varphi(\lambda) d(E_\lambda f, f) \right|$$

eşitliği ile tanımlandığı bellidir[24]. Burada $f \in H$ dır. Şimdi en son formülü

$$\varphi(\lambda) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3} r'''(y-h) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)(1+i)(y-h)} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3} r'''(y) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)(1+i)(y)}$$

olmak üzere $\varphi(Q)$ operatörüne uygulayalım:

$$\left\| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\alpha^{-3} r'''(y-h) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y-h)} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\alpha^{-3} r'''(y) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y)} \right\|$$

$$= \sup_{\|f\|=1} \left| \int_{S_\alpha} \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y-h) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y-h)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y)} \right) d(E_\lambda f, f) \right|$$

$$\leq \sup_{\|f\|=1} \left| \int_{S_\alpha} -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y-h) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y-h)} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y)} \right| d(E_\lambda f, f)$$

$$= \sup_{\|f\|=1} \int_{S_\alpha \cap K_R} \left| -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y-h) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y-h)} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(y)} \right| d(E_\lambda f, f)$$

$$+ \sup_{\|f\|=1} \int_{S_\varepsilon \cap K_R'} \left| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y-h) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(y-h)} \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(y)} \right| d(E_\lambda f, f)$$

$$= I_1 + I_2$$

yazabiliriz. Burada K_R ; merkezi orijinde yarıçapı R olan bir çember, K_R' ise çemberin dışıdır. $\varepsilon > 0$ herhangi pozitif sayı olsun. $|h| < y$ varsayalım. R sayısını öyle büyük seçelim ki $|\lambda + \mu| > R$ iken

$$\left| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y-h) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(y-h)} + \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Bu takdirde

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Şimdi I_2' de seçilmiş olan R' yi I_1' de gözönüne alalım. $\delta > 0$ sayısını öyle küçük seçelim ki $|h| < \delta$ olduğunda $|\lambda + \mu| < R$ iken

$$\left| -\frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y-h) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(y-h)} + \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i)(\lambda+\mu)^{-3/4} r'''(y) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Yani

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Böylece; öyle $\delta > 0$ sayısı var ki $|h| < \delta$ iken $I_1 + I_2 < \varepsilon$ olur. Diğer terimlerin sürekliliği de benzer şekilde gösterilir. $s > x$ iken s değişkenine göre $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ 'ün sürekliliği benzer şekilde gösterilir. Bununla $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun s ($s \neq x$) değişkenine göre sürekliliği gösterilmiş olur.

Böylece $K_3(x, s; \mu)$ 'nün $s \neq x$ değerlerinde s ' ye göre sürekli olduğu gösterilmiş oldu.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = - \int_s^\infty K_3(x, s; \mu) ds$$

ifadesinden $s \neq x$ iken $\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3}$ türevinin varlığı ve $\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} = K_3(x, s; \mu)$ ($s \neq x$) elde edilir.

Şimdi de $s=x$ değerlerinde $\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3}$ ifadesini inceleyelim :

$$K_3(x, s; \mu) - \frac{\partial^3 rg(x, s; \mu)}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 rg(x, s; \mu)}{\partial s^3}$$

operatör fonksiyonu s ' ye göre sürekli olduğundan dolayı eğer $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ 'ün $s=x$ noktasında

sıçrayışı varsa , $\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun sıçrayışı ile aynıdır. Bundan dolayı

$\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ 'ün, $s=x$ değerinde sıçrayışa sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ 'ün

içerdiği son dört toplamın $s=x$ dahil s ' nin bütün değerlerinde sürekli olduğu kolayca

görülür. Bundan dolayı $\frac{\partial^3(r g_1)}{\partial s^3} + \frac{\partial^3(r g_2)}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun $s=x$ değerinde sıçrayışını inceleyelim.

$$r(g_1 + g_2) = \begin{cases} r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} \left((1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} - (-1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-s)} \right) & x > s \\ r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} \left((1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} - (-1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-s)} \right) & x < s \end{cases}$$

$\frac{\partial^3[r(g_1 + g_2)]}{\partial s^3}$ ifadesinin 4. terimine $r(g_1 + g_2)^*$ diyelim. Yani

$$r(g_1 + g_2)^* = \begin{cases} r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} \left(-\alpha^3 \sqrt{2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} - \alpha^3 \sqrt{2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-s)} \right) & x > s \\ r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} \left(\alpha^3 \sqrt{2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-s)} + \alpha^3 \sqrt{2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-s)} \right) & x < s \end{cases}$$

olsun. $h > 0$ için

$$r(g_1 + g_2)^*(x, x+h, \mu) - r(g_1 + g_2)^*(x, x-h, \mu)$$

$$= r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} \left[\alpha^3 \sqrt{2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-(x+h))} + \alpha^3 \sqrt{2} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-(x+h))} \right. \\ \left. + \alpha^3 \sqrt{2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x-(x-h))} + \alpha^3 \sqrt{2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x-(x-h))} \right]$$

$$= r(x-s) \frac{1}{2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}h} \left[e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}ih} + e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}ih} \right]$$

$$\left(r(g_1 + g_2)^*(x, s; \mu) \Big|_{s=x+h} - r(g_1 + g_2)^*(x, s; \mu) \Big|_{s=x-h} - I \right) \alpha^{-4}$$

$$= \left[\frac{1}{2} r(x-s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} h} \left(e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} i h} + e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} i h} \right) - I \right] \alpha^{-4}$$

elde edilir. Bu ifadeye $\beta(x, s, h)$ diyelim ve $h \rightarrow 0$ iken $\beta(x, s, h) \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim.

$Q(x)$ ' in spektral açılım formülünden [21]

$$\|\beta(x, s, h)f, f\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{\lambda + \mu} \left[r(x-s) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} h} \left(e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} + e^{(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} \right) - 2 \right] d(E_\lambda f, f) \right|$$

yazılabilir.

$$\|\beta(x, s, h)f, f\| \leq \sup_{\|f\|=1} \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon} \left| \frac{1}{\lambda + \mu} \left[r(x-s) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} h} \left(e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} + e^{(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} \right) - 2 \right] d(E_\lambda f, f) \right|$$

$$= \sup_{\|f\|=1} \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon \cap K_R} \left| \frac{1}{\lambda + \mu} \left[r(x-s) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} h} \left(e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} + e^{(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} \right) - 2 \right] d(E_\lambda f, f) \right|$$

$$+ \sup_{\|f\|=1} \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon \cap K_R^c} \left| \frac{1}{\lambda + \mu} \left[r(x-s) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} h} \left(e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} + e^{(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} \right) - 2 \right] d(E_\lambda f, f) \right|$$

$$= I_1 + I_2$$

diyelim.

I_2 ' nin hesabı: $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olsun. R öyle büyük seçilsin ki $\lambda \in S_\varepsilon \cap K_R^c$ iken

$\frac{1}{|\lambda + \mu|} < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Bu takdirde $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak.

I_1 'in hesabı: R' yi I_2 deki gibi seçelim. $\delta > 0$ sayısını öyle küçük seçelim ki $h < \delta$ iken ve $\lambda \in S_\varepsilon \cap K_R$ iken

$$\left| \frac{1}{\lambda + \mu} \left[r(x-s) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} h} \left(e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} + e^{(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i h} \right) - 2 \right] \right| < \varepsilon$$

olsun. Bu takdirde $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

Böylece burada $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ var ki, $h < \delta$ iken $\|\beta(x,s,h)\| < \varepsilon$ olur. Böylece $h \rightarrow 0$ iken

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 [r(x-s)(g_1+g_2)(x,s;\mu)]}{\partial s^3} \Big|_{s=x+h} - \frac{\partial^3 [r(x-s)(g_1+g_2)(x,s;\mu)]}{\partial s^3} \Big|_{s=x-h} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{X_s} \rightarrow 0$$

olduğu gösterilir. Buradan

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 [r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s^3} \Big|_{s=x+h} - \frac{\partial^3 [r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s^3} \Big|_{s=x-h} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{X_s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

çıkar. Yani $\frac{\partial^3 [r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s^3}$ operatör fonksiyonunun $s=x$ noktasında sıçrayışa sahip olduğu gösterilmiş oldu.

$\frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$ ile $\frac{\partial^3 G}{\partial s^3}$, $s=x$ noktasında aynı sıçrayışa sahip olduğundan

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 G}{\partial s^3} \Big|_{s=x+h} - \frac{\partial^3 G}{\partial s^3} \Big|_{s=x-h} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{X_s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

elde edilir. Bir daha hatırlatalım ki burada I, H' de birim operatördür.

Lemma 4: $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1-) , 3-) koşullarını sağlasın ve $|x-s| \leq 1$ iken

$$\|Q^{1/4}(x)Q^{-1/4}(s)\| \leq c \quad (3.42)$$

olsun. O takdirde,

$$\frac{\partial^4 r g(x, s; \mu)}{\partial s^4} \in X_4^{(-1/4)} \quad , \quad x \neq s$$

yani

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^4 r g_1(x, s; \mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\| ds < \infty$$

olur. Burada $\int_0^\infty = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \left(\int_0^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^\infty \right)$ şeklinde tanımlanır.

İspat : $\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^4 r g_1(x, s; \mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\| ds < \infty$ olduğunu gösterelim. İşlemi $\frac{\partial^4 r g(x, s; \mu)}{\partial s^4}$ 'nün

içerdiği $\frac{\partial^4 r g_1(x, s; \mu)}{\partial s^4}$ ifadesi için yapalım. Yani

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^4 r g_1(x, s; \mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\| &= \left\| \left(-r(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} (Q(x)+\mu I)^{1/4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r'(x-s) \frac{3}{4} e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} + r''(x-s) \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} (Q(x)+\mu I)^{-1/4} \right) \right\| \end{aligned}$$

$$+ r'''(x-s) \frac{3}{4} i e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} (Q(x)+\mu I)^{-1/2}$$

$$+ r^{IV}(x-s) \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} (Q(x)+\mu I)^{-3/4} \Big\| Q^{-1/4}(s) \Big\|$$

olur. Burada

$$Q^{-1/4}(s) = Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(s)$$

olduğunu ve normun özelliğini göz önüne alırsak

$$\left\| \frac{\partial^4 r g_1(x,s;\mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\|$$

$$\leq \left\| -r(x-s) (Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(s) \right\|$$

$$+ \left\| -r'(x-s) \frac{3}{4} e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(s) \right\|$$

$$+ \left\| r''(x-s) (Q(x)+\mu I)^{-1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(s) \right\|$$

$$+ \left\| r'''(x-s) (Q(x)+\mu I)^{-1/2} \frac{3}{4} i e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(s) \right\|$$

$$+ \left\| r^{IV}(x-s) (Q(x)+\mu I)^{-3/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(s) \right\|$$

olur. Bu ifadede (3.42) koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial^4(r g_1)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\| \leq c \left\{ \left\| -r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| \right. \\
& + \left\| -r'(x-s) \frac{3}{4} e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| \\
& + \left\| r''(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-1/2} \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| \\
& + \left\| r'''(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-3/4} \frac{3}{4} i e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| \\
& \left. + \left\| r^{iv}(x-s)(Q(x)+\mu I)^{-3/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu normlara sırasıyla $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $e(x)$ diyelim. Spektral açılım formülüne göre

$$(a(x)f, f) = \int_{S_c} -r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} \lambda^{-1/4} (dE_\lambda f, f)$$

$$\begin{aligned}
& \left| -r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right| \\
& \leq c \left| e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} |x-s|} \right| \left| e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} i|x-s|} \right| \left| (Q(x)+\mu I)^{1/4} (Q(x)+\mu I)^{-1/4} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $|e^{-iz}| = e^{\operatorname{Im} z}$ olduğundan

$$(a(x)f, f) \leq c e^{-\operatorname{Re}(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} |x-s|} e^{\operatorname{Im}(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} |x-s|}$$

$$\leq c e^{-\gamma|\lambda+\mu|^{1/4}|x-s|} \quad (\gamma > 0 \text{ bir sayıdır.})$$

olur.

$$\left| \left(-r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(\lambda+\mu)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) f, f \right) \right| \leq c e^{-\gamma|x-s||\lambda+\mu|^{1/4}} (f, f).$$

$\|f\|=1$. Buradan

$$\left\| -r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| \leq c e^{-\gamma|x-s||\lambda+\mu|^{1/4}}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\| -r(x-s)(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)|x-s|} Q^{-1/4}(x) \right\| ds \\ & \leq c \int_0^\infty e^{-\gamma|x-s||\lambda+\mu|^{1/4}} ds = \int_0^x e^{-\gamma(x-s)||\lambda+\mu|^{1/4}} ds + \int_x^\infty e^{-\gamma(s-x)||\lambda+\mu|^{1/4}} ds \leq \frac{1}{\gamma|\lambda+\mu|^{1/4}} = c_1(\mu) = \text{sabit} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer toplamalar da sınırlandırılır. Ve sonuçta

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^4 r g_1(x, s; \mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\| ds \leq c_1(\mu) < \infty$$

elde edilir. Yani $\frac{\partial^4(r g_1)}{\partial s^4} \in X_4^{(-1/4)}$ dir. $\frac{\partial^4(r g_2)}{\partial s^4}$, $\frac{\partial^4(r g_3)}{\partial s^4}$, $\frac{\partial^4(r g_4)}{\partial s^4}$, $\frac{\partial^4(r g_5)}{\partial s^4}$, $\frac{\partial^4(r g_6)}{\partial s^4}$

operatör fonksiyonlarının da $X_4^{(-1/4)}$ uzayına ait olduğu benzer şekilde gösterilir.

3.3 Green Fonksiyonunun Dördüncü Türevi

$$\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^3} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi \quad (3.43)$$

ifadesini

$$\frac{\partial^3 G}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} = - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} d\xi - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \left[\frac{\partial^3 G}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} \right] d\xi \quad (3.44)$$

şeklinde yazalım.

$$L(x, s; \mu) = \frac{\partial^3 G}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$$

ve

$$l(x, s; \mu) = - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi \quad (3.45)$$

demiştik. Dolayısıyla (3.44) denklemi

$$L(x, s; \mu) = l(x, s; \mu) - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) L(\xi, s; \mu) d\xi \quad (3.46)$$

şeklinde yazılır.

$G(x, s; \mu)$ Green fonksiyonunun $\frac{\partial^3 G}{\partial s^3}$ türevinin X_3 uzayına ait olduğunu, s değişkenine göre ($x \neq s$) sürekliliğini ve (3.43) denklemini sağladığını önceden gösterdik. (3.46) denkleminin her iki yanını biçimsel olarak s' ye göre türetelim.

$$\frac{\partial L(x, s; \mu)}{\partial s} = \frac{\partial l(x, s; \mu)}{\partial s} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial L(\xi, s; \mu)}{\partial s} d\xi$$

olacaktır. Burada

$$\frac{\partial^3 [r(x - (x + 0))g(x, x + 0; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(x - (x - 0))g(x, x - 0; \mu)]}{\partial s^3} = I$$

ifadesini kullanalım ve

$$l(x, s; \mu) = - \int_0^{s-0} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi - \int_{s+0}^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi$$

şeklinde yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(x, s; \mu)}{\partial s} &= - \int_0^{s-0} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi - P(x, s-0, \mu) \frac{\partial^3 (rg)(s-0, s; \mu)}{\partial s^3} \\ &\quad - \int_{s+0}^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi + P(x, s+0, \mu) \frac{\partial^3 (rg)(s+0, s; \mu)}{\partial s^3} \\ &= - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi + P(x, s, \mu) \left\{ \frac{\partial^3 (rg)(s+0, s; \mu)}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 (rg)(s-0, s; \mu)}{\partial s^3} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l(x, s; \mu)}{\partial s} = -P(x, s; \mu) - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi$$

bulunur.

$$\frac{\partial l(x, s; \mu)}{\partial s} = l_1(x, s; \mu)$$

diyelim. l_1 elemanının $X_4^{(-1/4)}$ 'e ait olduğunu gösterebilirsek, Lemma 2'ye göre

$$K(x, s; \mu) = l_1(x, s; \mu) - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) K(\xi, s; \mu) d\xi \quad (3.47)$$

denkleminin çözümünün de $X_4^{(+1/4)}$ e ait olduğu gösterilmiş olur. O halde $l_1(x, s; \mu) \in X_4^{(+1/4)}$ olduğunu gösterelim. Bu nedenle $l_1(x, s; \mu)$ 'yü aşağıdaki şekilde yazalım;

$$\begin{aligned} l_1(x, s; \mu) &= -P(x, s; \mu) - \int_{|x-\xi| \leq 1} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi - \int_{|x-\xi| > 1} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi \\ &= d_1 + d_2 + d_3. \end{aligned}$$

Şimdi $d_1 \in X_4^{(+1/4)}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|d_1\|_{X_4^{(-1/4)}} &= \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^{\infty} \|P(x, s; \mu) Q^{-1/4}(s)\| ds \\ &\leq \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{|x-s| \leq 1} \|P(x, s; \mu) Q^{-1/4}(s)\| ds + \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{|x-s| > 1} \|P(x, s; \mu) Q^{-1/4}(s)\| ds \\ &= d_{11} + d_{12} \end{aligned}$$

diyelim ve d_{11} 'in sonlu sayı olduğunu gösterelim. d_{11} ifadesindeki $P(x, s; \mu)$ nün

$$\begin{aligned} P(x, s; \mu) &= \left\{ g(x, s; \mu) [Q(s) - Q(x)] r(x-s) + 4r'(x-s) g'''(x, s; \mu) \right. \\ &\quad \left. + 6r''(x-s) g''(x, s; \mu) + 4r'''(x-s) g'(x, s; \mu) + r^{IV}(x-s) g(x, s; \mu) \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğindeki ilk terimi gözönüne alalım ve g_1 ile işleme devam edelim.

$|x-s| \leq 1$ için;

$$\begin{aligned} & \|g_1(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]r(x-s)Q^{(-1/4)}(s)\| \\ & \leq \left\| \frac{\sqrt{2}}{8}(Q(x)+\mu I)^{-3/4}(1+i)e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)|x-s|}[Q(s)-Q(x)]r(x-s)Q^{(-1/4)}(s) \right\| \end{aligned}$$

bulunur. 6) koşuluna göre $|x-s| \leq 1$ iken $\|Q^{-a}(x)[Q(x)-Q(s)]\| \leq c|x-s|$,

$c=sbt$, $0 < a < \frac{5}{4}$ olduğundan

$$\|g_1(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]r(x-s)Q^{(-1/4)}(s)\| \leq c \left\| (Q(x)+\mu I)^{-3/4} e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)|x-s|} \right\| |x-s|$$

olur.

$$\begin{aligned} d_{11} &= c \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{|x-s| \leq 1} \left\| (Q(x)+\mu I)^{-3/4} e^{-(Q(x)+\mu I)^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)|x-s|} \right\| |x-s| ds \\ &\leq c \int_{|x-s| \leq 1} |x-s| ds \leq c \end{aligned}$$

Böylece $d_{11} < \infty$ olduğu gösterildi. Sonuçta $\|d_1\|_{X_4^{(-1/4)}} < \infty$ dir, yani $d_1 \in X_4^{(-1/4)}$ olur.

Şimdi $d_2 \in X_4^{(+1/4)}$ olduğunu gösterelim.

$$\|d_2 Q^{-1/4}(s)\| = \left\| \int_{|s-\xi| \leq 1} P(x,\xi,\mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi,s,\mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) d\xi \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{|s-\xi|\leq 1} \left\| P(x, \xi, \mu) \frac{\partial^4 (rg)(\xi, s, \mu)}{\partial s^4} Q^{-1/4}(s) \right\| d\xi \\
&= \int_{|s-\xi|\leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) (Q(\xi) + \mu I)^{1/4} e^{-(Q(\xi) + \mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) |\xi-s|} Q^{-1/4}(s) \right\| d\xi \\
&\leq c \int_{|s-\xi|\leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] e^{-(Q(\xi) + \mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) |\xi-s|} \right\| \cdot \left\| (Q(\xi) + \mu I)^{1/4} Q^{-1/4}(s) \right\| d\xi
\end{aligned}$$

olur. $|s-\xi|\leq 1$ iken $\|Q^{1/4}(s)Q^{-1/4}(\xi)\|\leq c$ koşulunu kullanırsak

$$\leq c \int_{|s-\xi|\leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] e^{-(Q(\xi) + \mu I)^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) |\xi-s|} \right\| d\xi$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte Lemma 1'in ispatına benzer şekilde işlemler yapılırsa $d_2 \in X_4^{(-1/4)}$ olduğu görülür. $r(x-s)$ fonksiyonundan dolayı d_3 için işlem yapmaya gerek yoktur. Böylece $l_1 \in X_4^{(+1/4)}$ bulunur.

$K(x, s, \mu)$, $X_4^{(-1/4)}$ 'ün elemanıdır. $f \in D\{Q(x)\} = D$ olduğunda

$$\frac{\partial L}{\partial s}(f) = K(f) \quad (x \neq s)$$

denkleminin sağlandığını gösterelim. O takdirde (3.46) denklemi

$$K(f) = l_1(f) - \int_0^\infty P(x, \xi, \mu) K(\xi, s, \mu)(f) d\xi \quad (3.48)$$

şeklini alır. Bu ifadenin (s_0, s) aralığında integralini alalım.

$$\int_{s_0}^s K(x, s, \mu)(f) ds = \int_{s_0}^s l_1(x, s, \mu)(f) ds - \int_0^\infty P(x, \xi, \mu) \left[\int_{s_0}^s K(\xi, s, \mu)(f) ds \right] d\xi \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = K, \text{ ve } \frac{\partial l}{\partial s} = l_1 \text{ olduğundan}$$

$$[L(x, s, \mu) - L(x, s_0, \mu)]f = [l(x, s, \mu) - l(x, s_0, \mu)]f$$

$$- \int_0^\infty P(x, \xi, \mu) [L(\xi, s, \mu) - L(\xi, s_0, \mu)](f) d\xi \quad (3.50)$$

bulunur. Eğer

$$\int_{s_0}^s l_1(x, s, \mu)(f) ds = [l(x, s, \mu) - l(x, s_0, \mu)]f \quad (3.51)$$

olduğu gösterilirse (3.49) ve (3.50) denklemlerinden,

$$\int_{s_0}^s K(x, s, \mu)(f) ds = [L(x, s, \mu) - L(x, s_0, \mu)](f)$$

yani

$$K(x, s, \mu)(f) = \frac{\partial L}{\partial s}(f)$$

elde edilir. Aynı zamanda $K(x, s, \mu) \in X_4^{(-1/4)}$ ve

$$L(x, s, \mu) = \frac{\partial^3 G}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}$$

olduğundan $x \neq s$ iken $\frac{\partial^4 G}{\partial s^4}$ türevinin varlığı ve $X_4^{(-1/4)}$ uzayına ait olduğu sonucu elde edilir. Böylece geriye (3.51) ifadesinin ispatı kalır. Bunun ispatını [16] çalışmasını kullanarak gösterelim. (3.45) eşitliğinden

$$l(x, s; \mu) = - \int_0^\infty r(x - \xi) g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}(\xi, s; \mu) d\xi$$

olur. (s_0, s) , $[0, \infty)$ aralığının keyfi alt aralığı olsun. Bu aralıkta keyfi $\bar{s}$ seçelim. $Q(x)$ ' in (3.41)' i sağladığını varsayalım. $Q^{-1}(s)Q(\bar{s})$ operatörünün H' de sınırlı olduğunu gösterelim. $s > \bar{s}$ olsun. Bu takdirde $s = \bar{s} + k + r$ (k tamsayı, $0 < r < 1$) şeklinde yazabiliriz.

$$Q^{-1}(s)Q(\bar{s}) = Q^{-1}(s)Q(s-1)Q^{-1}(s-1)Q(s-2)Q^{-1}(s-2) \dots Q(\bar{s}+r)Q^{-1}(\bar{s}+r)Q(\bar{s})$$

ifadesinin doğruluğu kolayca görülür. Buradan

$$\|Q^{-1}(s)Q(\bar{s})\| \leq \|Q^{-1}(s)Q(s-1)\| \|Q^{-1}(s-1)Q(s-2)\| \dots \|Q^{-1}(\bar{s}+r)Q(\bar{s})\| \leq c$$

dir. Böylece

$$\|Q^{-1}(s)Q(\bar{s})\| \leq c$$

yani $Q^{-1}(s)Q(\bar{s})$ sınırlı operatördür.

l' yi f' ye uygulayalım;

$$l(x, s; \mu)(f) = \int_0^\infty r(x - \xi) g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}(\xi, s; \mu)(f) d\xi$$

$$= \int_{|x-\xi| \leq 1} r(x - \xi) g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3}(\xi, s; \mu)(f) d\xi$$

$$+ \int_{|x-\xi|>1} r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3(rg)}{\partial s^3}(\xi,s;\mu)(f)d\xi$$

$$= a_1(x,s;\mu) + a_2(x,s;\mu)$$

diyelim, r fonksiyonunun özelliğinden dolayı $a_2 = 0$ dır.

Levitan[16]' da olduğu gibi işlemler yapılırsa, integral altındaki ifadenin kendisinin ve s' ye göre türevinin sınırlı operatör olduğu görülür;

$a_1(x,s;\mu)$ operatör fonksiyonunun ifadesinde $|x-s|>2$ ve $|x-s|\leq 2$ hallerini teker teker inceleyelim.

$|x-s|>2$ olsun. Bu takdirde $|s-\xi|=|s-x-(\xi-x)|\geq|s-x|-|\xi-x|>2-1=1$; yani $|s-\xi|>1$ olur. $g(x,\xi;\mu)$ ' nin ifadesine göre integral altı fonksiyonun kendisi ve s' ye göre türevi sınırlı operatördür.

$|x-s|\leq 2$ olsun. Bu takdirde $f=Q^{-1}(\xi)h$, $h\in H$ yazılırsa ve ξ 'nin sonlu aralıkta değiştiği gözönüne alınırsa integral altı operatörün kendisinin ve türevinin sınırlı olduğu çıkar. Buradan (3.49) ve (3.50) formüllerine göre (3.51) formülü elde edilir.

3.4 Green Fonksiyonunun Diferansiyel Denklemini Sağlaması

$G(x, s; \mu)$ Green fonksiyonunun $x \neq s$ için

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} + G(x, s; \mu)[Q(s) + \mu I] = 0 \quad (3.52)$$

denklemini sağladığını gösterelim; $f \in D\{Q(x)\} = D$ iken

$$\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s^3} - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi$$

denkleminin her iki yanını biçimsel olarak s' ye göre türetelim.

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} = \frac{\partial^4 (rg)}{\partial s^4} - \frac{\partial M}{\partial s} \quad (3.53)$$

yazalım. Burada

$$M = \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi$$

alınmıştır.

$$\frac{\partial^3 [r(x - (x+0))g(x, x+0; \mu)]}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 [r(x - (x-0))g(x, x-0; \mu)]}{\partial s^3} = -I$$

kullanılarak

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \int_0^{s-0} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi + P(x, s; \mu) \frac{\partial^3 G}{\partial s^3} \Big|_{s-0} + \int_{s+0}^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi - P(x, s; \mu) \frac{\partial^3 G}{\partial s^3} \Big|_{s+0}$$

$$= P(x, s; \mu) + \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi$$

olduğu görülür. Bu ifadeyi (3.53)' de yerine yazarsak

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} - \frac{\partial^4 (rg)}{\partial s^4} = -P(x, s; \mu) - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi \quad (3.54)$$

bulunur. $g(x, s; \mu)$ denklemi sağladığından, yani

$$\frac{\partial^4 g}{\partial s^4} + (Q(x) + \mu I)g = 0 \quad s \neq x$$

olduğundan

$$\frac{\partial^4 g}{\partial s^4} = -(Q(x) + \mu I)g$$

olur. (3.54)' de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} + rg[Q(x) + \mu I] = -rg[Q(s) - Q(x)] - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} = -rg[Q(s) + \mu I] - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} d\xi \quad (3.55)$$

olacaktır. $f \in D$ için

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} f = -rg[Q(s) + \mu I](f) - \int_0^{\infty} P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} (f) d\xi \quad (3.56)$$

elde edilir. $[Q(s) + \mu I]f = \alpha$ olsun. Buna göre (3.56)

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} [Q(s) + \mu I]^{-1} \alpha = -rg\alpha - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} [Q(s) + \mu I]^{-1} \alpha d\xi \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} \left\{ [Q(s) + \mu I]^{-1} \alpha \right\} = rg\alpha - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) \left\{ -\frac{\partial^4 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^4} [Q(s) + \mu I]^{-1} \right\} \alpha d\xi$$

olur. Bu denklemi (3.4) denklemi ile karşılaştırınca;

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} \left\{ [Q(s) + \mu I]^{-1} \alpha \right\} = G(x, s; \mu) \alpha \quad (3.58)$$

olduğunu buluruz. $[Q(s) + \mu I]^{-1} \alpha = f$ ve $[Q(s) + \mu I]f = \alpha$ olduğunu gözönüne alırsak (3.58) ifadesi

$$-\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} f = G(x, s; \mu) [Q(s) + \mu I]f \quad (3.59)$$

şeklinde yazılır. Burada herbir $s \geq 0$ için f elemanlar kümesi H' de yoğun olduğundan ($\overline{D} = H$ olduğu gözönüne alınır.), son ifadeden

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} + G(x, s; \mu) [Q(s) + \mu I] = 0 \quad (s \neq x)$$

bulunur. Dikkat edelim ki, en başta Green fonksiyonunun 4) özelliğine sahip olması, $f \in D$ iken

$$\frac{\partial^4 G}{\partial s^4} f + G(x, s; \mu) [Q(s) + \mu I]f = 0$$

denkleminin sağlanması anlamına gelir.

3.5 Sınır Koşullarının Sağlanması

$G(x, s; \mu)$ ' nün

$$\left. \frac{\partial G(x, s; \mu)}{\partial s} \right|_{s=0} - h_1 G(x, s; \mu) \Big|_{s=0} = 0 \quad (3.60)$$

$$\left. \frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} \right|_{s=0} - h_2 \left. \frac{\partial^2 G(x, s; \mu)}{\partial s^2} \right|_{s=0} = 0 \quad (3.61)$$

sınır koşullarını sağladığını, yani Green fonksiyonunun 5) koşulunu sağladığını gösterelim.

$$G(x, s; \mu) = r(x-s)g(x, s; \mu) - \int_0^\infty P(x, \xi; \mu) G(\xi, s; \mu) d\xi$$

yani

$$G(x, s; \mu) = r(x-s)g(x, s; \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] r(x-\xi) G(\xi, s; \mu) d\xi \quad (3.62)$$

denkleminin $s=0$ noktasındaki türevi

$$\left. \frac{\partial G(x, s; \mu)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial [r(x-s)g(x, s; \mu)]}{\partial s} \right|_{s=0} - \int_0^\infty g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] r(x-\xi) \left. \frac{\partial G(\xi, s; \mu)}{\partial s} \right|_{s=0} d\xi \quad (3.63)$$

olur. (3.62) ve (3.63)' yi (3.60)' a götürürsek

$$\left. \frac{\partial G(x, s; \mu)}{\partial s} \right|_{s=0} - h_1 G(x, s; \mu) \Big|_{s=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial [r(x-s)g(x,s;\mu)]}{\partial s} \Big|_{s=0} - \int_0^{\infty} g(x,\xi;\mu) [Q(\xi) - Q(x)] r(x-\xi) \frac{\partial G(\xi,s;\mu)}{\partial s} \Big|_{s=0} d\xi \\
&- h_1 \left[r(x-s)g(x,s;\mu) - \int_0^{\infty} g(x,\xi;\mu) [Q(\xi) - Q(x)] r(x-\xi) G(\xi,s;\mu) d\xi \right] \Big|_{s=0}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial (rg)}{\partial s} \Big|_{s=0} - h_1 (rg) \Big|_{s=0} = 0$$

olduğundan denklem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=0} - h_1 G \Big|_{s=0} &= - \int_0^{\infty} g(x,\xi;\mu) [Q(\xi) - Q(x)] r(x-\xi) \frac{\partial G(\xi,s;\mu)}{\partial s} \Big|_{s=0} d\xi \\
&+ h_1 \int_0^{\infty} g(x,\xi;\mu) [Q(\xi) - Q(x)] r(x-\xi) G(\xi,s;\mu) \Big|_{s=0} d\xi
\end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece

$$\left[\frac{\partial G}{\partial s} - h_1 G \right]_{s=0} = - \int_0^{\infty} r(x-\xi) g(x,\xi;\mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left[\frac{\partial G(\xi,s;\mu)}{\partial s} - h_1 G(\xi,s;\mu) \right]_{s=0} d\xi$$

homojen denklemi

$$N \left[\frac{\partial G}{\partial s} - h_1 G \right]_{s=0} = 0$$

şeklinde yazılabilir. N operatörü, $\mu > 0$ büyük değerlerinde bützen operatör olduğundan;

$$\frac{\partial G(\xi, s; \mu)}{\partial s} - h_1 G(\xi, s; \mu) \Big|_{s=0} = 0$$

elde edilir. Böylece 5) sınır koşulunun ilki sağlanmış olur.

Şimdi (3.62) eşitliğinin $s=0$ noktasında 3. türevini alalım.

$$\frac{\partial^3 G}{\partial s^3} \Big|_{s=0} = \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} \Big|_{s=0} - \int_0^\infty r(x-\xi)g(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi \Big|_{s=0} \quad (3.65)$$

İlk şartı gösterirken yaptığımız işlemleri tekrarlırsak

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 (rg)}{\partial s^3} \Big|_{s=0} - \int_0^\infty r(x-\xi)g(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} d\xi \Big|_{s=0} \\ & - h_2 \left[\frac{\partial^2 (rg)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - \int_0^\infty r(x-\xi)g(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^2 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^2} d\xi \Big|_{s=0} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

olur. $g(x, s; \mu)$, (2.3)-(2.5) sınır değer probleminin Green fonksiyonu olduğundan

$$\frac{\partial^3 rg}{\partial s^3} \Big|_{s=0} - h_2 \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = 0$$

sınır koşulu sağlanır. Buradan

$$- \int_0^\infty r(x-\xi)g(x, \xi; \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \left[\frac{\partial^3 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^3} - h_2 \frac{\partial^2 G(\xi, s; \mu)}{\partial s^2} \right] \Big|_{s=0} d\xi = 0 \quad (3.67)$$

bulunur. Bu homojen denklemi

$$N \left[\frac{\partial^3 G}{\partial s^3} - h_2 \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \right]_{s=0} = 0$$

şeklinde ifade edebiliriz. $N, \mu > 0$ büyük değerlerinde büzen operatör olduğundan;

$$\frac{\partial^3 G(x, s; \mu)}{\partial s^3} - h_2 \frac{\partial^2 G(x, s; \mu)}{\partial s^2} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla 5)' in 2. şartı da sağlanmış olur.

$G(x, s; \mu)$ operatör fonksiyonunun, Green fonksiyonunun bütün özelliklerini sağladığı gösterilmiş oldu.

Eğer biz elde ettiğimiz Green fonksiyonunun yardımı ile H_1 uzayında

$$Af = \int_0^\infty G(x, s; \mu) f(s) ds, \quad \mu > 0$$

İntegral operatörünü oluşturursak, ispatladığımız

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|G(x, s; \mu)\|_2^2 dx ds < \infty$$

özelliklerinden A 'nın H' da Hilbert-Schmidt (H-S) tipli operatör olduğu görülür.

Not: (1.2) sınır koşullarının

$$y^{(j)}(0)=0 \quad j=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.68)$$

ile değiştirilebileceğine dikkat edelim. Yani (1.1) diferansiyel ifadesi ve (3.68) sınır koşulları ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu, elde ettiğimiz bütün özellikleri sağlar.

4. ÖRNEKLER

Örnek 1: D düzlem bölgesi olmak üzere, $\Omega = D \times [0, \infty)$ silindirik bölgesinde, $n=2$ olmak üzere

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{2n}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \int_{\Omega} K(x, s) u(s) ds = \lambda u \quad (4.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_1^j}(0) = 0 \quad j=0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

sınır değer problemini gözönüne alalım.

Burada $x=(x_1, x_2, x_3)$, $s=(s_1, s_2, s_3)$, $u(x)=u(x_1, x_2, x_3)$, ve Γ , D bölgesinin sınırıdır. $K(x, s)$ çekirdeği

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, s)|^2 dx ds < \infty$$

ve

$$\left. \frac{\partial^j K(x,s)}{\partial x_1^j} \right|_{x_1=0} = 0 \quad j=0,1,\dots,n-1$$

koşullarını sağlayan

$$K(x,s) = \alpha [f(x+s) + g(x-s)] + \beta [\overline{f(x+s)} + \overline{g(x-s)}]$$

şeklinde bir fonksiyondur. g ; $g(x-s) = g(s-x)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon, α, β ise $|\alpha| = |\beta| = 1$ olan herhangi kompleks sayılardır. Bu takdirde $\alpha A + \beta A^*$ normal operatördür.

$H = L_2(D)$. M ; H' da $-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ diferansiyel ifadesi ve (4.2) sınır koşulu ile oluşturulan

kendine eş operatör, ve

$$Au = \int_{\Omega} K(x,s) u(s) ds,$$

x_1 in $[0, \infty)$ dan alınmış her bir değerinde sınırlı bir operatör olsun. (4.1) integro-diferansiyel ifadesini

$$Q(x_1) = -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \int_{\Omega} K(x_1, x_2, x_3; s) u(s) ds$$

olmak üzere

$$(-1)^n \frac{d^{2n} u}{dx_1^{2n}} + Q(x_1) u \quad (4.4)$$

ifadesi, $L_2(0, \infty; H)$ uzayında operatör katsayılı diferansiyel ifade şeklinde yazılabilir. (4.1), (4.2), (4.3) probleminin Green fonksiyonunun incelenmesi (4.4), (4.3) sınır değer probleminin incelenmesine indirgenebilir. A ile M operatörlerinin yerlerini değiştirebildiği gözönüne alınırsa $Q(x_1)$ operatörünün x_1 in $[0, \infty)$ dan alınmış her bir değerinde normal operatör olduğu görülür. M nin tersi kompakt ve A operatörü sınırlı olduğundan $Q(x_1)$ operatörünün spektrumunun ayırlıklığı çıkar. $Q(x_1)$ ' in, tez çalışmasındaki $Q(x)$ katsayısına eklediğimiz diğer koşulları da sağladığı gösterilebilir.

İkinci mertebeden diferansiyel operatör için benzer örnek Kleyman(Kleyman, 1977) [13] de verilmiştir.

Örnek 2: Özel olarak H uzayı n (sonlu) boyutlu olduğu halde tez çalışmasında incelenen problem $Q(x) = (q_{jk})$ $n \times n$ matris fonksiyonu olmak üzere

$$y_j^{IV} + \sum_{k=1}^n q_{jk}(x) y_k, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.5)$$

$$y_j^{(K)}(0) - h_n y_j^{(K-1)}(0) = 0 \quad K=1,3 \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. Kompleks değerli $\{q_{jk}(x)\}$ fonksiyonları üzerine bazı koşullar eklemekle

$Q(x)Q^*(x) = Q^*(x)Q(x)$ koşulu sağlanabilir. Bu takdirde (4.5) ifadesi ve (4.6) koşulları ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonunun varlığı elde edilir.

Örnek 3: $H = l_2$,

$$Q(x) = i \begin{pmatrix} q_1(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & q_2(x) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_j(x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

olsun. Burada $q_j(x) = K_j x + d$, $d = s b t > 0$, $K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n \leq \dots$ olmak üzere $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{K_j} < \infty$

koşulunu sağlayan herhangi pozitif sayılar olsun. (3.1) bölümünde $Q(x)$ üzerine konulan bütün koşulların sağlandığını gösterelim.

$Q(x)$ 'in hemen her yerde koşulları sağladığını göstermemizin yeterli olduğuna dikkat edelim.

1. $Q^*(x) = -iQ(x)$ olduğundan $Q(x)$, x 'in herbir pozitif değerinde l_2 de normal operatördür.

$$2. Q^{-1}(x) = -i \begin{pmatrix} q_1^{-1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & q_2^{-1}(x) & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_n^{-1}(x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$q_j^{-1}(x) = (K_j x + d)^{-1} \xrightarrow{j \rightarrow 0} 0, \quad (x \neq 0).$$

Bu ise $Q^{-1}(x)$, x 'in $(x \neq 0)$ her bir değerinde kompakt operatör olduğunu gösterir.

3.

$$(Q(x) + \lambda I)^{-1} = i \begin{pmatrix} (q_1(x) + \lambda)^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & (q_2(x) + \lambda)^{-1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (q_n(x) + \lambda)^{-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

ifadesinden görüldüğü gibi kompleks düzlemin $(-\infty, 0]$ yarı eksenini hariç bütün noktalarında $(Q(x) + \lambda)^{-1}$ vardır ve sınırlıdır. Yani s kümesi $Q(x)$ 'in rezolvent kümesidir.

$$4. \quad \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{q_j^{7/4}(x)} dx = \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(K_j x + d)^{7/4}} \right) dx$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{K_j} \int_0^\infty \frac{d(K_j x)}{(K_j x + d)^{7/4}}$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{K_j} \int_0^\infty \frac{dt}{(t + d)^{7/4}}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{K_j^3} = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{K_j} < \infty$$

$$5. \quad |x - \xi| \leq 1;$$

$$q_j^{-1/4}(x) q_j^{1/4}(\xi) = (K_j x + d)^{-1/4} (K_j \xi + d)^{1/4}$$

$$|x - \xi| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \xi - x \leq 1 \Rightarrow \xi \leq x + 1$$

olduğunda

$$(K_j x + d)^{-1/4} (K_j \xi + d)^{1/4} \leq (K_j x + d)^{-1/4} (K_j x + x + d)^{1/4}$$

$$= \left(1 + \frac{d}{K_j x + d} \right)^{1/4} \leq \left(1 + \frac{d}{d} \right)^{1/4} = \sqrt[4]{2}.$$

6. $|x - \xi| \leq 1$; $0 < a < \frac{5}{4}$ koşulunu sağlayan $a=1$ değerini alalım. Genelliği bozmadan $x \geq 1$ olduğunu varsayalım.

$$|q_j^{-1}(x) [q_j(\xi) - q_j(x)]| = (K_j x + d)^{-1} |K_j \xi - K_j x|$$

$$= |x - \xi| K_j (K_j x + d)^{-1}$$

$$= |x - \xi| \left(x + \frac{d}{K_j} \right)^{-1}$$

$$\leq |x-\xi| \left(1 + \frac{d}{K_j}\right)^{-1}$$

$$\leq |x-\xi|.$$

Böylece $|x-\xi| \leq 1$ iken $\left|q_j^{-1}(x) \left[q_j(\xi) - q_j(x) \right] \right| \leq |x-\xi|$ olur.

Bununla 1)-6) koşullarının sağlandığı gösterildi.

Bu örnekteki sisteme ait olan her skaler denklemin Green fonksiyonu ayrı ayrı bulunabilir. Ama bu yöntemle elde edilen Green fonksiyonlarından oluşan Green matris fonksiyonun Hilbert-Schmidt tipli olması kolay görülmüyor.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında $H_1 = L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y^{(j)}(0) - h_{(j+1)/2} y^{(j-1)}(0) = 0 \quad j=1,3 \quad (2)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün rezolventi (Green fonksiyonu) incelenmiştir.

Burada H ayrılabilir Hilbert uzayı, $Q(x)$, x ' in $[0, \infty)$ dan alınmış her bir değerinde H de normal, tersi kompakt operatör $h_{(j+1)/2}$ ' ler ise herhangi kompleks sayılardır.

Kullandığımız parametrik yöntemini ile $Q_j(x)$ ' ler ($j=1,2,\dots,2n$) operatör değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)}$$

diferansiyel ifadesi ve (2) sınır koşulları ile oluşturulan operatörün rezolventi incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Abudov, A.A., (1979), Yüksek Mertebeden Diferansiyel Operatör Denklemlerin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, Izv.AN.Azerb.SSR, ser.Fiz-Tekhn. Math.Nauk, No:5, 47-52 (R)*
- [2] Abudov, A.A., (1981), Yarı Eksende Verilmiş Çift Mertebeden Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemin Green Fonksiyonu, Izv.AN.Azerb.SSR, ser.Fiz-Tekhn. Math.Nauk, No:2, 10-15 (R)
- [3] Albayrak, I., (1997), Yarı Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Dördüncü Mertebeden Diferansiyel Denklemin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi
- [4] Aliev, B.I. ve Bayramoğlu, M., (1981), Operatör Katsayılı Yüksek Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Green Fonksiyonu, Izv.Akad. Nauk Azerb.SSR ser. Fiz-Tekhn. Math. Nauk, V.2, No:4,33-38 (R)
- [5] Aslanov, G.I., (1976), Yarı Eksende Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerler Sayısının Asimtotik İfadesi, DAN Azerb.SSR t.32,No:3 (R)
- [6] Aslanov, G.I., (1994), Hilbert Uzaylarında Sınırsız Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemler üzerine DAN ROSSII, V.337, No:1 (R)
- [7] Balakrishnan, A.V., (1976), Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- [8] Bayramoğlu, M., (1971), Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, "Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları" Sbornik, Bakü: Bilim, 144-166 (R)
- [9] Boymatov, K.CH., (1973), Operatör Diferansiyel Denklemin Spektrumunun Asimtotik Davranışı Usp. Mat.Nauk, V.5, 28, 207-208 (R)
- [10] Gokhberg, I.C. and Krein, M.G., (1969), Introduction to the Theory of Linear Non-Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Translations, Math. Monographs, Vol.18, Amer.Math.Soc.,Providence, R.I.
- [11] İsmailov, S.M., (1987), Yüksek Mertebeden İki Terimli Operatör Denklemin Rezolventi, Dep. VINITI, No:3624-85 (R)
- [12] Kato, T., (1980), Perturbation Theory For Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag
- [13] Kleiman, E.G., (1974), On The Green's Function For The Sturm-Liouville Equation With a Normal Operatör Coefficient, Vestnik, Mosk. Univ., No:5, 47-53 (R)

* (R), Kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

- [14] Kostyuchenko, A.G. and Levitan, B.M., (1967), Asymtotic Behaviour of The Eigenvalue of The Sturm-Liouville Operatör Problem, *Funct. Analysis Appl.* 1, 75-83
- [15] Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S., (1979), Özdeğerlerin Dağılımı, Moskow, Nauka. (R)
- [16] Levitan, B.M., (1968), Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, *Mat. Sb.* 76(118), No:2, 239-270 (R)
- [17] Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., (1991), Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluzeer, Dordrechz
- [18] Oden, J.T., (1979), *Applied Functional Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey, 07632
- [19] Otelbayev, M.,(1990), Sturm-Liouville Operatörünün Spektrumunun Davranışı, Alma Ata: Bilim. (R)
- [20] Otelbayev, M., (1977), Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Sınıflandırılması, *IZV.AN KAZ.SSR*, No:5, 45-48 (R)
- [21] Riesz, F., Nagy, B., (1955), *Functional Analysis*, N.Y, Frederic Unger
- [22] Saito, Y., (1975), Spektral Theory For Second-Order Differential Operators With Long-Range Operatör-Valued Coefficients, I. *Japan. J.Math*, 1. No:2, 311-349
- [23] Stakgold, I., (1998), *Boundary Value Problems and Green Function*, New York
- [24] Yosida, K., (1980), *Functional Analysis*, Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer Verlag.

* (R), Kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Kevser ÖZDEN KÖKLÜ
Doğum Tarihi	: 15.01.1968
Doğum Yeri	: Koyunlu / NİĞDE
İlk Öğretim	: 1974-1979 Koyunlu Mithat Paşa İlkokulu
Orta Öğretim	: 1979-1982 Koyunlu Ortaokulu 1982-1985 Niğde Lisesi
Lisans Öğretimi	: 1986-1991 Yıldız Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğretimi	: 1993-1995 Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü
Göreve Başlama	: 1992 Y.T.Ü. Mühendislik Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi
Doktora Öğretimi	: 1995- Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü