

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI NON-LİNEER SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN FEM İLE İNCELENMESİ**

Selmahan SELİM

**F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Savunma Tarihi : 18 Haziran 1999
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)
İkinci Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye YAHNIOĞLU (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. M. Ertaç ERGÜVEN (İTÜ)
: Prof. Dr. Mehmet BAKIOĞLU (İTÜ)

[Handwritten signatures and stamps]

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
TABLO LİSTESİ	iv
TEŞEKKÜR	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler	1
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti	3
1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği	5
1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları	6
2. PROBLEMLERİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU ve SONLU ELEMEN (FEM) MODELLEMESİ	7
2.1 Problemlerin Matematiksel Formülasyonu	7
2.2 Problemlerin Mekaniksel Anlamının Açıklanması	10
2.3 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu	13
2.4 Sonlu Eleman Modellemesi	19
2.5 Newton-Raphson Yöntemi	25
2.6 Teğet Rijitlik Matrisinin Oluşturulmasında Kullanılan Formüller	29
2.7 FEM Kullanımının Ele Alınan Araştırmalardaki Bazı Özellikleri	32
3. SAYISAL SONUÇLAR ve İNCELENMESİ	37
3.1 Problem Parametrelerinin Değerlerinin ve Yakınsaklık Kriterinin Seçilmesi	37
3.2 Yakınsaklık Sınırlarının Belirlenmesi	38
3.3 Gerilmeler Dağılımına Ait Sayısal Sonuçlar ve Mekaniksel Açından Yorumlanması	40
4. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRİLMESİ	76
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	82

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Seçilen sonlu eleman ve lokal düğüm noktaları 20
Şekil 3.1	ε değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.) 70
Şekil 3.2	ε değişiminin σ_{11} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.) 71
Şekil 3.3	E_2 / E_1 değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.) 72
Şekil 3.4	E_2 / E_1 değişiminin σ_{11} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.) 73
Şekil 3.5	h / ℓ değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.) 74
Şekil 3.6	p / E_1 değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.) 75

TABLO LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 3.1 $E_2 / E_1 = 5, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16 \sigma_{22} / p, p / E_1 = 0.002$ durumunda MNR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	43
Tablo 3.2 $E_2 / E_1 = 5, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p / E_1 = 0.001$ (yakınsak) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar (Problem 1.)	43
Tablo 3.3 $E_2 / E_1 = 5, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p^* / E_1 = 0.0011$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	44
Tablo 3.4 $E_2 / E_1 = 5, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p / E_1 = 0.0012$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	45
Tablo 3.5 $E_2 / E_1 = 5, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p / E_1 = 0.0013$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	46
Tablo 3.6 $E_2 / E_1 = 10, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p^* / E_1 = 0.0011$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	46
Tablo 3.7 $E_2 / E_1 = 10, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p / E_1 = 0.0012$ (çok yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	47
Tablo 3.8 $E_2 / E_1 = 10, \varepsilon = 0.1, h / \ell = 0.1, \ell / \Lambda = 16, p / E_1 = 0.0013$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	48

Tablo 3.9	$E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.0016$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	48
Tablo 3.10	$E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0017$ (çok yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	49
Tablo 3.11	$E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0018$ (çok yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	50
Tablo 3.12	$E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0019$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	51
Tablo 3.13	$E_2 / E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.003$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	51
Tablo 3.14	$E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.006$ (yakınsaklık sınırı) durumunda MNR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	52
Tablo 3.15	$E_2 / E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.007$ (yakınsaklık sınırı) durumunda MNR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	53
Tablo 3.16	$E_2 / E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.001$ durumunda MNR ve NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	54
Tablo 3.17	$E_2 / E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.003$ durumunda MNR ve NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)	54

Tablo 3.18	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)55
Tablo 3.19	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)55
Tablo 3.20	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.) 56
Tablo 3.21	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.) 57
Tablo 3.22	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ urumunda h/ℓ değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.) 58
Tablo 3.23	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ urumunda h/ℓ değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.) 59
Tablo 3.24	ε değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)60
Tablo 3.25	ε değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)61
Tablo 3.26	ℓ/Λ değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ – Problem 1.)61
Tablo 3.27	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.) 62
Tablo 3.28	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.) 63

Tablo 3.29	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2 / E_1 değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p / E_1 = 0.0001$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$ – Problem 2.) 64
Tablo 3.30	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2 / E_1 değişiminin σ_{11} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p / E_1 = 0.0001$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$ – Problem 2.) 65
Tablo 3.31	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda h / ℓ değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p / E_1 = 0.0001$, $E_2 / E_1 = 5$, $\ell / \Lambda = 16$ – Problem 2.) 66
Tablo 3.32	$\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda h / ℓ değişiminin σ_{11} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p / E_1 = 0.0001$, $E_2 / E_1 = 5$, $\ell / \Lambda = 16$ – Problem 2.) 67
Tablo 3.33	ε değişiminin σ_{22} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p / E_1 = 0.0001$, $E_2 / E_1 = 5$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$ – Problem 2.)68
Tablo 3.34	ε değişiminin σ_{11} / p gerilmesinin x_1 / ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p / E_1 = 0.0001$, $E_2 / E_1 = 5$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$ – Problem 2.)69

TEŞEKKÜR

Tez danışmanlığımı üstlenen, bu çalışmanın hazırlanmasında sonsuz emeği geçen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a; her konuda özveriyle yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU 'na; beni her konuda destekleyen ve yalnız bırakmayan çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Behiç ÇAĞAL 'a minnet ve şükranlarımı belirtir; yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Ömer GÖK 'e, Arş. Gör. Elif TEKİN TARIM 'a, Arş. Gör. Işım DEMİRİZ 'e, ve Arş. Gör. İ. Murat TURHAN 'a; bugüne kadar ve ayrıca tez çalışmam sırasında hep yanımda olan, sürekli desteğini gördüğüm *sevgili aileme* çok teşekkür ederim.

Selmahan SELİM

Ocak, 1999

ÖZET

Bu çalışmada Akbarov ve Guz'un süreklilik teorisi çerçevesinde elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumundaki iki boyutlu geometrik non-lineer problemlerine karşı gelen sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. İncelenen problemler değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler takımına aittirler ve bu yönde ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

Ele alınan problemlerin matematiksel formülasyonu verilmiştir. Varyasyonel formülasyonu oluşturulmuş ve sonlu eleman modellemesi yapılmıştır. FEM sonucunda oluşan non-lineer cebirsel denklemler takımının sayısal çözümünde Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Newton-Raphson yöntemi ile problemi belirleyen parametrelerin belli değişme aralığında (sınır) yakınsak sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bu aralığın dışında ise elde edilen sayısal sonuçlar ıraksak olmaktadır.

Problem parametrelerinin yakınsaklık sınırları belirlenmiştir. Yakınsaklık sınırlarını genişletmek için modified Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Gerilme dağılımlarına ait sayısal sonuçlar grafikler ve tablolar halinde verilmiştir.

Elde edilen sayısal sonuçların mekaniksel yorumları da verilmiştir ve bu sonuçlar uygun lineer sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri ile de karşılaştırılarak geometrik non-lineerlikten dolayı ortaya çıkan etkiler açıklanmıştır.

ABSTRACT

In this thesis the boundary value problems corresponding to the two dimensional geometrical non-linear problems of the continuum theory by Akbarov and Guz' are obtained numerical results with employing Finite Element Method (FEM). Also, investigated non-linear problems are related to the non-linear partial differential equations system with variable coefficients and this study is the first attempts in this field.

The mathematical formulations of the considering problems are given. After this, their variational formulations and the FEM modelling of them are made. The Newton-Raphson method is used for the solution of the non-linear algebraic equations system arising as a results of the FEM modelling of the above mentioned non-linear problems. By Newton-Raphson method, convergent numerical results are obtained in the variation interval (limit) of problem parameters. If outside of this interval, founded numerical results are divergent.

Convergent limits of the problem parameters are determined. To extend convergent limits, modified Newton-Raphson method is used. A lot of numerical results related to the stresses distributions are given as tables and graphics.

Also, the mechanical explanations of the obtained numerical results are given. Comparing these results with numerical solutions of suitable linear boundary value problems influences of geometrical non-linearity are explained.

BÖLÜM I

1. GİRİŞ

1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler

Bilindiği üzere doğada oluşan pek çok mekaniksel, fiziksel vb. olayların matematiksel formülasyonu lineer olmayan (non-linear) kısmi türevli diferansiyel denklemler takımına ait sınır değer problemleri şeklinde formüle edilmektedir. Adı geçen olayların teorik açıdan incelenmesi ise, bu non-linear matematiksel problemlerin çözülmesini gerektirmektedir. Lineer problemlerden farklı olarak, non-linear problemlerin çözümünün bulunabilmesi son derece zor ve bazı durumlarda ise imkansızdır. İlgili literatür-kaynak taramalarından (örneğin [25] den) görüldüğü gibi adi non-linear diferansiyel denklemlerin çok-çok özel durumlarda analitik çözümlerini elde etmek mümkün olmaktadır. Non-linear kısmi türevli denklemlerin ve bu denklemlere ait sınır değer problemlerinin analitik çözümlerinin elde edilmesi [16,28, vs.] den de görüldüğü gibi daha çok zor ve imkansızdır. Söylenen nedenlerden dolayı kısmi türevli non-linear diferansiyel denklemler takımına ait sınır değer problemlerinin sayısal olarak incelenmesi zorunluluğu ortaya çıkmış ve bu yönde yeterli sayıda olmasa da pek çok araştırmalar yapılmış ve yapılmaktadır. Bu araştırmaların önemli bir kısmı adı geçen sayısal incelemelerin gerektirdiği algoritmaların oluşturulmasına ve geliştirilmesine aittir. Bilindiği üzere, sayısal çözüm tekniğinin oluşturulabilmesi anlamında, non-linear problemlerin uygun lineer problemlerden önemli bir farkı da ondandır ki belli bir tip lineer problemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde aynı yaklaşım uygulanabildiği halde, non-linear problemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesi ise her problem için özel bir yaklaşım gerektirmektedir.

Şimdi non-linear problemlerin sayısal çözümlerinin gerektirdiği özel yaklaşımlar üzerinde daha etraflı duralım. Bilindiği gibi diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde ilk olarak ayrıklaştırma prosedürü uygulanmaktadır. Bu prosedür sonucunda ele alınan sınır değer probleminin incelenmesi, uygun cebirsel denklemler takımının incelenmesine indirgenir. Bu durumda, eğer ele alınan sınır değer problemi lineer ise adı

geçen cebirsel denklemler takımı lineer, non-linear ise cebirsel denklemler takımı non-linear olur. Açıkta ki lineer cebirsel denklemler takımının çözümlerinin elde edilmesi temel anlamda hiç bir zorluk oluşturmaz. Ancak, non-linear cebirsel denklemler takımının sayısal çözümlerinin elde edilmesi ise belirgin bir biçimde geliştirilmemiştir. Böylece non-linear diferansiyel denklemlere ait sınır değer problemlerinin sayısal incelenmesinde karşılaşılan olumsuzluklar ve zorluklar, bu problemin ayrıklaştırılma prosedürü sonucunda getirildiği non-linear cebirsel denklemler takımının çözümünün elde edilmesi ile bağlıdır. Bilindiği gibi non-linear cebirsel denklemler takımının çözülmesinde çağdaş bilgisayarların yardımı ile uygulanan yöntem, Newton-Raphson yöntemidir. Newton-Raphson yönteminin temelini ise non-linear denklemler takımının çözümüne uygun bir seri lineer denklemler takımının çözümleri ile yaklaşılması oluşturur. Bu durumda, incelenen non-linear problemin yapısına uygun gelebilecek ilk keyfi bir çözüm seçilir ve non-linear cebirsel denklemler takımı bu çözüm civarında lineerleştirilerek elde edilen lineer cebirsel denklemler takımı çözülür. Bu çözüm sonucunda elde edilenler ilk seçilen çözüme eklenerek non-linear cebirsel denklemler takımının birinci yaklaşım (iterasyon) sonucunda bulunan çözümünü oluşturur. Adı geçen non-linear cebirsel denklemler takımı birinci iterasyon sonucunda bulunan çözüm civarında lineerleştirildikten sonra yukarıdaki çözüm işlemleri tekrar yapılır. Böylece, non-linear cebirsel denklemler takımının ikinci iterasyon sonucunda bulunan çözümü elde edilir. Söylenen iterasyon prosedürü pratik olarak istenilen sayıda tekrarlanabilir. Ancak bu iterasyonlar, bulunan sayısal sonuçların yakınsak olduğu duruma kadar tekrarlanır. Yani, iterasyonlardan elde edilen sayısal çözümler belirli bir kriter çerçevesinde yakınsak olarak kabul edilebilir duruma gelinceye kadar tekrarlanır. Çoğu zaman bu tekrarlamalarda non-linear problemlerin sayısal incelenmesinde en önemli ve aşılması çok zor olan bir durumla karşılaşılır. Bu durum ise iterasyon sayısının artması ile elde edilen sayısal sonuçların birbirinden uzaklaşması yani yakınsak olmaması durumudur. Söylenen nedenden dolayı non-linear sınır değer problemlerinin sayısal olarak incelenmesini içeren araştırmaların büyük çoğunluğu bu duruma yani yakınsaklık sınırının belirlenmesine aittirler. Bu araştırmalar sonucunda, ele alınan her bir özel non-linear sınır değer problem parametrelerinin, bu probleminin yakınsak sayısal çözümlerinin elde edilmesini sağlayan değişim aralığı (sınırı) belirlenmektedir. Bundan başka adı geçen araştırmaların hemen-hemen hepsinde non-linear diferansiyel denklemlere ait sınır değer

problemlerinin ayrıklaştırılması prosedürü sonlu elemanlar yönteminin (FEM) [49, 50] uygulanması ile yapılmaktadır.

Tez kapsamında yapılan araştırmalar eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin Akbarov ve Guz süreklilik teorisi [1] çerçevesinde olan geometrik non-lineer problemlerini içeren kısmi türevli diferansiyel denklemler takımının sonlu elemanlar yöntemi ile yukarıda söylenenler açısından araştırılmasına aittir.

1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti

Şimdi tez konusu ile ilgili olan bazı araştırmaların kısa özetlerini ele alalım. Bu araştırmalar, sürekli ortamlar mekaniğinin non-lineer problemlerini içeren non-lineer sınır değer problemlerinin FEM yöntemi ile incelenmesine aittirler. Belirtelim ki bu konuda ilk araştırmalar [39] 1960'lı yıllarda yapılmaya başlanmış ve günümüze kadar devam etmektedir. 1960-1972 tarihleri arasında yapılan araştırmaların kısa özeti [16] da verilmiştir. Bundan başka sürekli ortamlar mekaniğinin non-lineer problemlerine karşı gelen matematiksel problemlerin sonlu eleman yöntemi ile çözülmesine ait araştırmaların geniş biçimde özeti [17] de verilmektedir. [17] de özeti yapılan araştırmalar 1997 yılına kadar olan incelemeleri içermektedir. Bilindiği gibi sürekli ortamlar mekaniğinin non-lineer problemleri, geometrik non-lineer; bünye (malzeme) bağıntıları non-lineer; geometrik ve aynı zamanda bünye (malzeme) bağıntıları non-lineer problemler olarak üç gruba ayrılır. Bu grupların her birine ait matematiksel problemlerin FEM açısından genel formülasyonunun yapılması ve bazı basit problemlere uygulanması [20] de verilmektedir. Bundan başka birçok araştırmalarda adı geçen non-lineerliklere ait problemler FEM yöntemi uygulanarak ayrı-ayrı incelenmiştir. Yukarıda adı geçen her bir gruba ait araştırmaların geniş bir biçimde açıklamaları [9,17,50] de verilmektedir. Tez kapsamında yapılan araştırmalar geometrik non-lineer problemler grubuna ait olduklarından biz burada son yıllarda bu yönde yapılan araştırmaları kısaca özetleyelim.

[41] de eksenel simetrisi olmayan kabukların geometrik non-lineer davranışlarının matematiksel formülasyonunun FEM modellenmesi yapılmıştır. Bu modellemede her bir

elemanın sonlu dönmeleri de göz önüne alınmıştır. Kesin çözümü olan bazı basit örnekler üzerinde sonlu eleman modellemesi ile elde edilen sayısal sonuçların yeteri derecede hassas oldukları da gösterilmiştir. [8] de keyfi yerdeğiştirme ve dönme alan klasik çok katlı kompozit malzemelerden yapılmış kabukların non-linear problemlerinin sonlu eleman formülasyonu sürekli ortamlar mekaniğinin kesin denklemlerinden yola çıkılarak yapılır. [23] te ön eğilmesi olan elastik krişlerdeki lineer ve geometrik non-linear düzlem şekildeğiştirme problemlerinin FEM ile sayısal analizleri verilir. [37] de ise hiperelastik sıkışmaz anizotrop ortamlara ait non-linear problemlerinin karışık sonlu eleman formülasyonu ile analizi verilir. İnce cidarlı yapıların geometrik non-linear problemlerinin FEM uygulanarak araştırılmasında plak sonlu eleman formlarının kullanılması [12] de açıklanmaktadır. [11] de kabuklara ait geometrik non-linear problemlerin sonlu eleman formülasyonunda yerdeğiştirme ve şekildeğiştirme esaslı varyasyonel prensiplerinden kullanılmaktadır.

Yukarıda özetlenen ve geometrik non-linear problemlere ait olan makalelerde ele alınan denklem ve sınır koşulları Lagrange koordinatları [21] aracılığıyla verilmektedir. Bilindiği gibi bu denklemlerin Euler koordinatları [21] kullanılarak yazılmış formu da vardır. Son duruma ait non-linear problemlerin sonlu eleman modellemesi ise [31] makalesinde ve bu makalede gösterilen diğer araştırmalarda verilmektedir. Belirtelim ki yukarıda ele alınan makaleler sürekli ortamlar mekaniğinin statik problemlerine aittirler. Benzer non-linear dinamik problemlerin FEM ile incelenmesi ise [32, 34, 36] makalelerinde ve bu makalelerde gösterilen diğer araştırmalarda ele alınmıştır. Yukarıda özeti yapılan araştırmaların hepsinde ayrıklaştırma sonucunda non-linear cebirsel denklemler takımı elde edilir. Bu ayrıklaştırmanın ve non-linear cebirsel denklemler takımının çözülmesinin genel tekniklerinin geliştirilmesi [10, 14, 18, 27, 29, 32, 34, 47, vs] makalelerinde yapılmıştır. Bu makalelerde görüldüğü gibi yukarıda adı geçen non-linear cebirsel denklemler takımının çözülmesinde esasen Newton-Raphson yöntemi ya da modified Newton-Raphson yöntemi kullanılır. Bundan başka bu makalelerde incelenen en önemli soru, iterasyonlardan elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklığı sorusudur. *Adı geçen yakınsaklık her bir özel problem için özel olarak araştırılır ve problem parametrelerinin yakınsaklık sınırını belirleyen değerleri bulunur.*

Yukarıda adı geçen araştırmalarda dikkate alınması gereken önemli bir taraf da; bu araştırmalarda ele alınan denklemler sürekli ortamlar mekaniğinin belirli hipotezler çerçevesinde oluşturulmuş yaklaşık denklemlerdirler. *Kaynak incelemelerinde sürekli ortamlar mekaniğinin geometrik non-linear kesin denklemlerinin FEM ile incelenmesini içeren tek makaleye bile rastlanmamıştır.* Ancak kompozit malzemeler mekaniğinin Akbarov ve Guz süreklilik teorisi [1] çerçevesinde olan pek çok soruların incelenmesi, sürekli ortamlar mekaniğinin geometrik non-linear kesin denklemlerinin FEM ile incelenmesini gerektirir. Bundan başka, yukarıda özetlenen araştırmalarda ele alınan non-linear denklemler sabit katsayılı denklemlerdirler. Yukarıda adı geçen Akbarov ve Guz süreklilik teorisinin [1] non-linear denklemler takımı ise değişken katsayılı kısmi türevli denklemler takımıdır. Söylenenlerden sürekli ortamlar mekaniğinin gerçek ve önemli anlamlar taşıyan eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin Akbarov ve Guz süreklilik teorisi [1] problemlerinin incelenmesinde ortaya çıkan değişken katsayılı geometrik non-linear kesin denklemlerinin FEM yöntemi ile araştırılması gerekliliği ortaya çıkar. Tezde yapılan araştırmalar bu yöndeki ilk teşebbüsleri oluşturur. Bundan başka tezde yapılan araştırmalar değişken katsayılı kısmi türevli non-linear diferansiyel denklemler takımına ait bazı sınır değer problemlerinin FEM ile araştırılması anlamında da ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır. Belirtelim ki tezde ele alınan non-linear sınır değer problemlerine karşı gelen lineer sınır değer problemlerinin FEM ile incelenmesi [2-6, 42, 43] te yapılmıştır.

1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Çoğu zaman araştırılan matematiksel bir problemin gerekliliğini ve güncelliğini, bu problemin karşı geldiği gerçek fiziksel veya mekaniksel olayların gerekliliği ve güncelliği belirlemektedir denebilir. Söylenen anlamda, tez çalışmasında FEM yönteminin uygulanması ile incelenmesi ele alınan değişken katsayılı kısmi türevli non-linear diferansiyel denklemler takımına ait sınır değer problemleri, kompozit malzemeler mekaniğinin kırılması, stabilitesi vb. gibi davranışlarının incelenmesinin gerektirdiği problemlerdir. Bilindiği gibi [15] günümüzde kompozit malzemelerin büyük bir hızla artan üretimi ve uygulamaları, bu malzemeler mekaniğinin matematik problemlerinin

çözülmesini çok gerekli ve güncel yapmaktadır. Yukarıda açıklanan nedenlerden dolayı tez çalışma konusunun çok gerekli ve güncel olduğu ortaya çıkar. Bundan başka tez çalışmasını gerekli kılan başka bir neden ise buradaki araştırmaların bu yönde ilk teşebbüsleri oluşturması ve her bir araştırılan problemin ilk kez tarafımızdan yapılmasıdır.

1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir:

1. Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumundaki iki boyutlu geometrik non-lineer problemlerine karşı gelen sınır değer problemlerinin matematiksel formülasyonu;
2. Değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler takımı için formülasyonu yapılmış sınır değer probleminin karşılık geldiği gerçek mekaniksel olayının açıklanması;
3. Formülasyonu yapılmış non-lineer sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar ile modellenmesi;
4. İncelenen problemlerin sayısal çözümü için gerekli hesaplama algoritmaların ve programların yapılması;
5. Problem parametrelerinin iterasyonlar sonucunda elde edilen sayısal sonuçlarının yakınsaklığını sağlayan sınırlarının belirlenmesi;
6. Elde edilen sayısal sonuçların bazı mekaniksel yorumları.

BÖLÜM II

2. PROBLEMLERİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU ve SONLU ELEMAN MODELLEMESİ

2.1 Problemlerin Matematiksel Formülasyonu

Tez kapsamında $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell ; 0 \leq x_2 \leq h\}$ alanında sağlanan aşağıdaki değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler takımı ele alınmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}(x_1)\varepsilon_{11} + A_{12}(x_1)\varepsilon_{22} + 2A_{16}(x_1)\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= A_{12}(x_1)\varepsilon_{11} + A_{22}(x_1)\varepsilon_{22} + 2A_{26}(x_1)\varepsilon_{12} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= A_{16}(x_1)\varepsilon_{11} + A_{26}(x_1)\varepsilon_{22} + 2A_{66}(x_1)\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Yukarıda (2.1), (2.2) ve (2.3) şeklinde yapılan gruplandırmalara ait olan denklemler ayrı ayrı fiziksel anlamlar taşımaktadır. Bu anlamların açıklaması bir sonraki kısımda verilecektir. Tez kapsamında (2.1) - (2.3) denklemler takımının incelenmesi iki tür sınır koşulları çerçevesinde yapılacaktır. Bu sınır koşulları aşağıdaki biçimdedir.

1. Sınır Koşulları (Problem 1.) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0,h} &= 0 ; & \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= 0 ; \\
 \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=h} &= -p ; & u_1 = u_2 \Big|_{x_1=0,\ell} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2. Sınır Koşulları (Problem 2.) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0,h} &= 0 ; & \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= 0 ; \\
 \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=h} &= -p ; & \sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0,\ell} &= 0 \\
 u_2 \Big|_{x_1=0,\ell} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

dır. İleride non-lineer (2.1)-(2.3) denklemler takımının (2.4) non-lineer sınır koşulları çerçevesinde oluşturduğu sınır değer problemini *problem 1.*, (2.1)-(2.3) non-lineer denklemler takımının (2.5) sınır koşulları çerçevesinde oluşturduğu sınır değer problemini *problem 2.* olarak adlandıracğız.

Açıktır ki, matematiksel formülasyonları yukarıda yapılmış non-lineer sınır değer problemlerinin analitik çözümlerinin elde edilmesi imkansızdır. Bundan başka ele alınacak değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler takımına ait sınır değer problemlerinin sayısal olarak incelenmesi de her bir durumda mümkün olmamaktadır. Bir sonraki kısımda gösterileceğı gibi ele alınan non-lineer sınır değer problemleri gerçek ve önemli fiziksel olayları kapsadığından bu problemlerin sayısal çözümlerinin elde edilebilmesinin incelenmesi ve araştırılması çok gerekli ve günceldir. Tez kapsamında yukarıda ele alınan non-lineer sınır değer problemlerinin FEM ile sayısal olarak incelenebilmesi imkanları araştırılmış ve incelemelerin mümkün olduğu çerçeve yani

problem parametrelerinin, yakınsak sayısal çözümlerinin elde edilmesini sağlayan değişme aralığı belirlenmiştir.

Ele alınan (2.1)-(2.3) denklemler takımının tipine gelince aşağıdakileri söylemek mümkündür;

Bilindiği gibi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler takımının sınıflandırılmasının yapılması birçok literatürde örneğin [30] da verilmektedir. Ancak bu denklemlere karşılık gelen non-lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler takımının sınıflandırılması ise pek de yaygın bir biçimde verilmemektedir. Bununla birlikte [30] da gösterildiği gibi non-lineer diferansiyel denklemler takımının sınıflandırılması, bu denklemler takımına ait olan çözüme göre yapılabilmektedir. Yani kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler takımı bir çözüme göre bir tip denklem (örneğin eliptik tip) ise başka bir çözüme göre başka bir tip (örneğin hiperbolik tip) denklemdir. Başka bir deyişle, non-lineer diferansiyel denklemler takımının tipi kavramı, sınır koşulları göz önüne alınmaksızın anlamsız olmaktadır. Dolayısıyla non-lineer denklemler takımının, verilen herhangi sınır koşullarını sağlayan çözümüne göre tipi belirlenebilmektedir. Yukarıda söylenen nedenlerden dolayı (2.1) - (2.3) denklemler takımının (2.4) veya (2.5) sınır koşullarına karşılık gelen tipi araştırılmayacaktır.

Bilindiği üzere FEM ile bulunacak olan çözümler ele alınan (2.1) - (2.3) , (2.4) , (2.5) sınır değer problemlerinin genelleşmiş sayısal çözümleri olacaktır. Bu problemlerin klasik çözümleri, bir Ω bölgesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan, Ω bölgesi sınırında ise birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan ve (2.1)-(2.5) denklemlerini özdeşlikle sağlayan fonksiyonlar kabul edilir. Klasik çözümlerin elde edilmesi imkansız olduğundan ileride bu denklemler takımının FEM yöntemi uygulanarak genel sayısal çözümlerinin elde edilmesi incelenecektir. Burada genel çözüm kavramı [28,49] anlamında göz önüne alınacaktır.

Şimdi ise ele alınan sınır değer problemlerinin fiziksel anlamlarını açıklamaya geçelim.

2.2 Problemlerin Mekaniksel Anlamlarının Açıklanması

[21] den gözüktüğü gibi (2.1) denklemler takımı sürekli ortamlar mekaniğinin iki boyutlu geometrik non-lineer denge denklemlerini oluşturmaktadır. Burada u_1 ve u_2 fonksiyonları sürekli ortamın yerdeğiştirmelerini ve σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} , σ_{21} ise bu ortamdaki gerilmeleri göstermektedir. İnceleyeceğimiz problemlerin küçük şekildeğiştirme (ε_{ij} değerleri, şekil değiştirmesi incelenen cismin yüzey ve hacim elemanlarının boyutlarının değişmesinin göz önüne alınmasını gerektirmiyorsa bu tür şekildeğiştirmelere küçük şekildeğiştirmeler denir.) durumlarına ait olduklarını göz önüne alarak [21] de olduğu gibi $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ eşitliğinin sağlandığını varsayacağız. (2.2) denklemler grubu ortamın bünye denklemlerine ait olup eğrisel yapıya sahip kompozit ortamlar için [1] de verilmektedir. Buradaki $A_{ij}(x_1)$, [1] teorisi çerçevesinde belirlenen fonksiyonlardır. Ele alacağımız araştırmalarda $A_{ij}(x_1)$ lerin belli fonksiyonlar olduğu kabul edilecektir. Bu fonksiyonların ifadeleri açık şekilde aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
 A_{11}(x_1) &= A_{11}^0 \Phi_1^4(x_1) + 2A_{12}^0 \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{22}^0 \Phi_2^4(x_1) + 4A_{66}^0 \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) \\
 A_{12}(x_1) &= (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 4A_{66}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{12}^0 (\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1)) \\
 A_{16}(x_1) &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \Phi_1^3(x_1) \Phi_2(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2^3(x_1) \\
 A_{22}(x_1) &= A_{11}^0 \Phi_2^4(x_1) + 2A_{12}^0 \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{22}^0 \Phi_1^4(x_1) + 4A_{66}^0 \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) \\
 A_{26}(x_1) &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2^3(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1^3(x_1) \Phi_2(x_1) \\
 A_{66}(x_1) &= (A_{11}^0 - 2A_{12}^0 + A_{22}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{66}^0 (\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1) - 2\Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1))
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Phi_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1})^2}}, \quad \Phi_2(x_1) = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \Phi_1(x_1) \tag{2.7}$$

Burada $\varepsilon f(x_1) = F(x_1)$ şeklindedir ve tezde yapılan araştırmalarda $F(x_1) = \varepsilon f(x_1)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde ele alınmaktadır.

$$F(x_1) = \varepsilon f(x_1) = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{\Lambda} + \delta\right) = \frac{A}{\Lambda} \Lambda \sin\left(\frac{\pi x_1}{\Lambda} + \delta\right) \quad (2.8)$$

$A < \Lambda$ ederek yukarıdaki ε parametresini $\varepsilon = \frac{A}{\Lambda}$ olarak kabul edelim. Burada A , Λ ve δ ele alınan malzeme yapısındaki eğilmeleri karakterize eden geometrik parametrelerdir. Bundan başka ele alınan ortamın birbirini tekrarlayan iki tür homojen izotrop malzemeden oluşan çok katlı bir ortam olduğunu varsayarak, [13]' e göre A_{ij}^0 sabitleri aşağıdaki formüller yardımıyla belirlenir.

$$\begin{aligned} A_{23}^0 = A_{12}^0 &= \lambda^{(1)}\eta^{(1)} + \lambda^{(2)}\eta^{(2)} - \eta^{(1)}\eta^{(2)}(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}} \\ \frac{1}{2}(A_{11}^0 + A_{12}^0) &= (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(2)} - \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}} \\ \frac{1}{2}(A_{11}^0 - A_{13}^0) &= \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)}, \\ A_{66}^0 = A_{44}^0 &= \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}\eta^{(2)} + \mu^{(2)}\eta^{(1)}}, \quad A_{55}^0 = \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

dır. Burada $\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k=1,2$) yukarıda adı geçen izotrop malzemelerin mekaniksel sabitleridir, $\eta^{(k)}$ ise bu malzemelerin oluşturdukları ortamdaki yoğunluğunu gösterir. $\lambda^{(k)}$ ve $\mu^{(k)}$ sabitlerinin $E^{(k)}$ (elastisite modülü) ve $\nu^{(k)}$ (Poisson oranı) sabitleri ile olan

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})} ; \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \quad (2.10)$$

ifadelerinden de kullanılacaktır. Böylece (2.2)' ye dahil olan $A_{ij}(x_1)$ fonksiyonlarının bilinen olması için (2.8)'deki $\varepsilon f(x_1)$ fonksiyonunun ve $\nu^{(k)}, E^{(k)}, \eta^{(k)}$ parametrelerinin verilmesi yeterlidir. $\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ve $E^{(k)}, \nu^{(k)}$ sabitleri izotrop bir ortamın mekanik sabitleri olduğu halde A_{ij}^0 lar anizotrop bir ortamın mekanik sabitleridir. (Mekaniksel veya fiziksel özellikleri yönden bağımsız olan ortamlara izotrop ortam, bağımlı olan ortamlara

ise anizotrop ortam, mekaniksel ve fiziksel özellikleri koordinattan bağımsız olan ortamlara ise homojen ortamlar denir [26].) Nihayet (2.3) denklemler takımı yerdeğiştirme vektörü bileşenleri ile şekildeğiştirme tensörü bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir [21].Yukarıdaki söylenenlerle (2.1)-(2.3) denklemlerinin mekaniksel anlamlarının kısa şekilde açıklamalarını bitirmiş oluyoruz. Şimdi ise (2.4), (2.5) sınır koşullarının açıklamasını ele alalım.

Sınır Koşullarının Açıklanması;

Önceki kısımda görüldüğü gibi (2.1) - (2.3) denklemler takımı bir dikdörtgen alan içerisinde sağlanmaktadır. Bu dikdörtgen alanın kenarlarında ise *problem 1.* için (2.4) sınır koşulları, *problem 2.* için (2.5) sınır koşulları verilmektedir. (2.4) ve (2.5) sınır koşullarının ilk üç koşulu aynen tekrarlanmaktadır. Bu koşullar dikdörtgenin $x_2 = 0, h$ tarafları üzerinde ox_1 ve ox_2 eksenleri yönünde etki gösteren kuvvetleri belirlemektedir. İlk üç koşulun birincisi $x_2 = 0, h$ da ox_1 eksen yönünde etki gösteren kuvvetin sıfır olduğunu, ikincisi $x_2 = 0$ da ox_2 eksen yönünde etki gösteren kuvvetin de sıfır olduğunu, üçüncüsü $x_2 = h$ tarafı üzerinde ox_2 eksen yönünde etki gösteren kuvvetin $-p$ ye eşit olduğunu göstermektedir. Biz ileride genelliği kaybetmeksizin $p=\text{sabit}$ kabul edeceğiz. (2.4)'de verilen sonuncu sınır koşulu ise $x_1 = 0, \ell$ tarafları üzerinde ox_1 ve ox_2 yönündeki yerdeğiştirmelerin sıfır olduğunu belirtmektedir. (2.5)'deki dördüncü koşul $x_1 = 0, \ell$ de ox_2 eksen yönündeki yerdeğiştirmelerin sıfır olduğunu, sonuncu koşul ise $x_1 = 0, \ell$ de ox_1 eksen yönünde etki gösteren kuvvetin sıfır olduğunu belirtmektedir.

Böylece ele alınan problemler genel bir biçimde aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

(2.1) - (2.3) , (2.4) sınır değer problemi uzunluğu ℓ , yüksekliği h olan ve kenarlardan rijit tutturulmuş eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış bir şeritin $x_2 = h$ da üniform (düzgün) basınç altında eğilmesine ait bir problemidir.

(2.1) - (2.3) , (2.5) ise yukarıda söylenen şeritin $x_1 = 0, \ell$ de basit mesnet şeklinde tutturulması halindeki eğilme problemidir.

Bu problemler tez kapsamında ilk kez incelenmektedir ve mekaniksel anlamda da bu yönde ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

2.3 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu

Yukarıda matematiksel formülasyonu yapılan non-lineer sınır değer problemlerinin varyasyonel formülasyonunu oluşturalım. Bunun için bakılan cisimdeki toplam potansiyel enerjiyi ifade eden [21, 38, 49]

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{S_I} P_i u_i dS \quad (2.11)$$

fonksiyoneli ele alalım. (2.11)'de ve ileride tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uyluşımı geçerlidir. Yani tekrarlanan indislere alabileceği bütün değerler verilerek elde edilen bütün terimlerin toplamı alınır. Burada S_I , Ω bölgesinin sınırının kuvvet etki gösteren kısmını belirtmektedir. Π fonksiyonelinin yerdeğiştirmelere göre varyasyonelinin sıfıra eşitliğinden yani virtüel-iş prensibinden [21, 38] (2.1)-(2.3) denklemlerinin ve gerilmelere göre verilen sınır koşullarının elde edildiğini gösterelim. Bu durumda virtüel yerdeğiştirmelerin (2.2) ve (2.3) denklemlerini ve yerdeğiştirmelere göre (2.4) ve (2.5)'de verilen sınır koşullarını sağladığı varsayılırsa, (2.11)'den

$$\delta \Pi = \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{S_I} P_i \delta u_i dS = 0 \quad (2.12)$$

olduğunu elde ederiz. Burada

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad i, j, \alpha = 1, 2$$

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad (2.13)$$

dir. Yani,

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{11} &= \left(\delta_1^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_1} \\ \delta\varepsilon_{22} &= \left(\delta_2^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_2} \\ \delta\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\delta_1^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\delta_2^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_1} \quad k=1,2\end{aligned}\quad (2.14)$$

dır. (2.13)'teki α ve (2.14)'deki k indisine göre Einstein toplam uylasıını geçerlidir ve δ_i^k sembolü Kronecker deltasıdır. (2.12) ifadesini

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega} (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12})d\Omega - \int_{S_f} (P_1\delta u_1 + P_2\delta u_2)dS=0 \quad (2.15)$$

şeklinde yazıp (2.14) eşitlikleri yerlerine konulduğunda (2.12)'den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] (\delta u_1)_{,1} + \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] (\delta u_2)_{,2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] (\delta u_1)_{,2} + \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] (\delta u_2)_{,1} \right\} d\Omega - \\ &\quad - \int_{S_f} (P_1\delta u_1 + P_2\delta u_2)dS=0\end{aligned}\quad (2.16)$$

Burada

$$(\delta u_i)_{,j} = \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

dır.

Yukarıda söylenene göre (2.16) ifadesi

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega}(\cdot)d\Omega &= \int_0^{\ell} \left(\int_0^h (\cdot) dx_2 \right) dx_1 \\ \int_{S_1}(\cdot)dS &= \int_0^h (\cdot)|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h (\cdot)|_{x_1=\ell} dx_2 + \int_0^{\ell} (\cdot)|_{x_2=0} dx_1 + \int_0^{\ell} (\cdot)|_{x_2=h} dx_1\end{aligned}\quad (2.18)$$

şeklinde olduğundan

$$\delta \Pi = \delta \Pi_{11} + \delta \Pi_{22} + \delta \Pi_{12} + \delta \Pi_{21} - \delta I_{02} - \delta I_{12} - \delta I_{01} - \delta I_{11} = 0 \quad (2.19)$$

yazabiliriz. Burada

$$\delta \Pi_{11} = \int_0^h \left[\int_0^{\ell} \left(\left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2$$

$$\delta \Pi_{22} = \int_0^{\ell} \left[\int_0^h \left(\left[\sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] dx_1$$

$$\delta \Pi_{12} = \int_0^{\ell} \left[\int_0^h \left(\left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] dx_1$$

$$\delta \Pi_{21} = \int_0^h \left[\int_0^{\ell} \left(\left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2$$

$$\delta I_{02} = \int_0^h (P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2)|_{x_1=0} dx_2$$

$$\delta I_{12} = \int_0^h (P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2)|_{x_1=\ell} dx_2$$

$$\begin{aligned}
\delta I_{01} &= \int_0^\ell (P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=0} dx_1 \\
\delta I_{11} &= \int_0^\ell (P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=h} dx_1
\end{aligned} \tag{2.20}$$

dır. Şimdi $\delta \Pi_{11}$ ve $\delta \Pi_{21}$ 'de x_1 -e göre, $\delta \Pi_{22}$ ve $\delta \Pi_{12}$ 'de x_2 -ye göre kısmi integrasyon yapılırsa aşağıdakiler elde edilir;

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{11} &= \int_0^h \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell} dx_2 - \int_0^h \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\
&\quad - \int_0^h \int_0^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right) \delta u_1 dx_1 dx_2 \\
\delta \Pi_{21} &= \int_0^h \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell} dx_2 - \int_0^h \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\
&\quad - \int_0^h \int_0^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) \delta u_2 dx_1 dx_2 \\
\delta \Pi_{12} &= \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_2=h} dx_1 - \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_2=0} dx_1 - \\
&\quad - \int_0^\ell \int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right) \delta u_1 dx_2 dx_1 \\
\delta \Pi_{22} &= \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_2=h} dx_1 - \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_2=0} dx_1 - \\
&\quad - \int_0^\ell \int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) \delta u_2 dx_2 dx_1
\end{aligned} \tag{2.21}$$

(2.20)'nin son dört ve (2.21) ifadeleri (2.19)'da yerine yazılıp δu_1 ve δu_2 'lere göre gruplaştırma yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\delta \Pi = J_{11} + J_{12} + J_{21} + J_{22} + Q = 0 \quad (2.22)$$

Burada

$$J_{11} = \int_0^h \left(\left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - P_1 \right\} \delta u_1 \right) \Big|_{x_1=\ell} - \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - P_1 \right\} \delta u_1 \Big|_{x_1=0} dx_2$$

$$J_{12} = \int_0^h \left(\left\{ \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - P_2 \right\} \delta u_2 \right) \Big|_{x_1=\ell} - \left\{ \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - P_2 \right\} \delta u_2 \Big|_{x_1=0} dx_2$$

$$J_{21} = \int_0^\ell \left(\left\{ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + P_1 \right\} \delta u_1 \right) \Big|_{x_2=h} - \left\{ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + P_1 \right\} \delta u_1 \Big|_{x_2=0} dx_1$$

$$J_{22} = \int_0^\ell \left(\left\{ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + P_2 \right\} \delta u_2 \right) \Big|_{x_2=h} - \left\{ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + P_2 \right\} \delta u_2 \Big|_{x_2=0} dx_1$$

$$Q = - \int_0^h \int_0^\ell \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right\} \delta u_1 + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \delta u_2 \right) dx_1 dx_2 \quad (2.23)$$

Şimdi *problem 1.* 'i ele alalım. (2.4)'de u_i 'lere göre verilen sınır koşullarını δu_i 'ler de sağladığından,

$$\delta u_1|_{x_1=\ell} = \delta u_1|_{x_1=0} = \delta u_2|_{x_1=\ell} = \delta u_2|_{x_1=0} = 0 \quad (2.24)$$

olur ve buradan

$$J_{11} = J_{12} = 0 \quad (2.25)$$

dır. Böylece (2.22) ve (2.25)'den

$$\delta \Pi = J_{21} + J_{22} + Q = 0 \quad (2.26)$$

olur. J_{21} , J_{22} ve Q 'nun (2.22)'deki ifadelerinden $\delta u_i|_{x_2=0}$, $\delta u_i|_{x_2=h}$, $\delta u_i|_{\substack{x_1 \in [0, \ell] \\ x_2 \in [0, h]}}$ 'ler keyfi olduklarından, (2.26)'dan $\delta u_i|_{x_2=0, h}$ 'lerin ve $\delta u_i|_{\substack{x_1 \in [0, \ell] \\ x_2 \in [0, h]}}$ 'lerin katsayıları ayrı-ayrı sıfıra eşitlenerek ve $P_1|_{x_2=0} = 0$, $P_1|_{x_2=h} = 0$, $P_2|_{x_2=0} = 0$, $P_2|_{x_2=h} = p$ olduğu göz önüne alınarak (2.1) denklemleri ve (2.4)'deki ilk üç sınır koşulu elde edilir.

Benzer şekilde, *problem 2.* için $\delta u_2|_{x_1=0, \ell} = 0$ olduğu göz önüne alınarak (2.22) ve (2.23)'den

$$\delta \Pi = J_{11} + J_{21} + J_{22} + Q = 0 \quad (2.27)$$

olur. (2.27)'den *problem 1.* için yukarıda söylenenler tekrarlanırsa ve $P_1|_{x_1=0,\ell} = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa (2.1) denklemleri ve (2.5)'deki ilk dört sınır koşulu elde edilmiş olur.

Böylece *problem 1.* ve *problem 2.* 'nin varyasyonel formülasyonun

$$\delta \Pi_{11} + \delta \Pi_{12} + \delta \Pi_{21} + \delta \Pi_{22} + \int_0^\ell p \delta u_2|_{x_2=h} dx_1 = 0 \quad (2.28)$$

şeklinde olduğu sonucu elde edilir.

2.4 Sonlu Eleman Modellemesi

İleride ele alınan problemlerin FEM ile çözüm tekniğinin açıklanması *problem 1.* için yapılacaktır. *Problem 1.* için yapılan işlemler bazı değişmelerle *problem 2.* için geçerlidir. Şimdi (2.1) - (2.3) denklemler takımının sağlandığı $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell ; 0 \leq x_2 \leq h\}$ alanını FEM uygulamasına yönelik M adet Ω_k alanına bölümler ve kabul edelim ki

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (2.29)$$

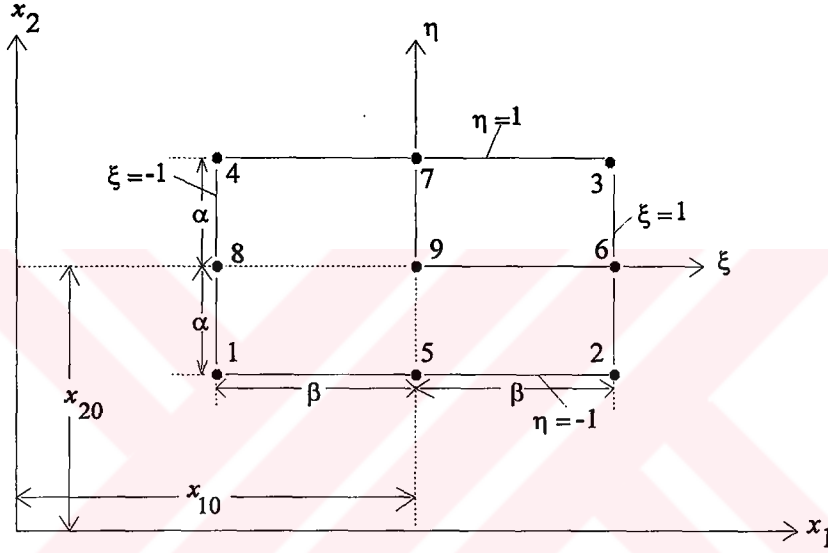
dır. Bilindiği gibi FEM 'in uygulamasında Ω_k elemanları; üçgen, dörtgen vb. birçok şekillerde seçilebilir. Eleman formunun seçilmesi bakılan alanın şekliyle de ilgilidir. Bu açıdan tez çalışmasında yapılan araştırmalar için dikdörtgen eleman şekli daha elverişli olmuştur. Bu durumda her elemanda 9 düğüm noktası (nod) kaydedilmiştir (Şekil 2.1) ve ikinci mertebeden Lagrange şekil fonksiyonları kullanılmıştır.

Normalize edilmiş

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta} , \quad \eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha} \quad (2.30)$$

koordinatları ile adı geçen şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); & N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); & N_7 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); & N_5 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); & N_8 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); & N_6 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1); & N_9 &= (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)
 \end{aligned} \quad (2.31)$$



Şekil 2.1 Seçilen sonlu eleman ve lokal düğüm noktaları

(2.31)'de verilen şekil fonksiyonları, standart şekil fonksiyonları sınıfındandır ve bu şekil fonksiyonları kullanılarak ele alınan her bir Ω_k elemanında aranan yerdeğiştirmeler için

$$\mathbf{u}^k \approx \mathbf{N}^k \mathbf{a}^k \quad (2.32)$$

yaklaşımı yapılır. (2.32) ifadesinde ve ileride altı çizilen indisler üzerinde Einstein toplama uyluşımı uygulanmayacaktır. Ayrıca (2.32) ifadesinde aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmektedir.

$$(\mathbf{u}^k)^T = (u_1^k(x_1, x_2) \ u_2^k(x_1, x_2))$$

$$(\mathbf{a}^k)^T = (u_{11}^k \ u_{21}^k \ \dots \ u_{19}^k \ u_{29}^k)$$

$$\mathbf{N}^k = \begin{pmatrix} N_1^k & 0 & N_2^k & 0 & N_3^k & 0 & N_4^k & 0 & N_5^k & 0 & N_6^k & 0 & N_7^k & 0 & N_8^k & 0 & N_9^k & 0 \\ 0 & N_1^k & 0 & N_2^k & 0 & N_3^k & 0 & N_4^k & 0 & N_5^k & 0 & N_6^k & 0 & N_7^k & 0 & N_8^k & 0 & N_9^k \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

(2.32) ve (2.33) ifadelerindeki k indisleri bakılan değişkenlerin Ω_k elemanına ait olduğunu göstermektedir. $\mathbf{a}^k$ vektörünün (2.33)'de gösterilen bileşenleri ise ele alınan Ω_k elemanının nodlarındaki yerdeğiştirmeleridir. Bu bileşenlerin birinci alt indisleri yerdeğiştirmelerin yönünü, ikinci alt indisleri nodun lokal numarasını göstermektedir.

Yukarıda söylenenler göz önüne alınarak (2.28) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum_{k=1}^M (\delta \Pi_{11k} + \delta \Pi_{12k} + \delta \Pi_{21k} + \delta \Pi_{22k}) + \sum_{k=1}^{M_1} p \int_{\ell_{k-1}}^{\ell_k} \delta u_2|_{x_2=h} dx_1 = 0 \quad (2.34)$$

(2.34)'de $\ell_0 = 0$, $\ell_{M_1} = \ell$ dir ve $\ell_k - \ell_{k-1} = \Delta \ell_k$ 'lar Ω_k 'nın $x_2 = h$ sınırına bitişik olanlarının ox_1 eksenini boyunca olan uzunluğudur, M_1 ise bu elemanların sayısıdır.

$\delta \Pi_{ijk}$ ($i, j=1,2$) lerin ifadeleri, $\delta \Pi_{ij}$ (2.28)'deki integralleme sınırlarının Ω_k elemanına uygun şekilde alınması sonucunda elde edilir. Böylece (2.34)'den belli prosedür sonucunda

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \quad (2.35)$$

non-lineer denklemler takımı elde edilir. Burada $\mathbf{a}^T = (\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^M)$ dir. $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^M$ lerin ifadeleri (2.33)'de verilmektedir. $\mathbf{r}$ - vektördür ve bileşenleri (2.34)'ün sol tarafındaki son terimle belirlenir. $\Psi(\mathbf{a})$ ise aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$\Psi(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^M \Psi^k(\mathbf{a}^k)$$

$$(\Psi^k(\mathbf{a}^k))^T = (\Psi_1^{1k}(\mathbf{a}^k), \Psi_2^{1k}(\mathbf{a}^k), \dots, \Psi_1^{9k}(\mathbf{a}^k), \Psi_2^{9k}(\mathbf{a}^k)) \quad (2.36)$$

Burada aşağıdaki işaretlemler kabul edilmiştir.

$$\Psi_1^{ik}(\mathbf{a}^k) = \iint_{\Omega_k} \left(\Psi_{11}^k(\mathbf{a}^k) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \Psi_{12}^k(\mathbf{a}^k) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) d\Omega_k$$

$$\Psi_2^{ik}(\mathbf{a}^k) = \iint_{\Omega_k} \left(\Psi_{21}^k(\mathbf{a}^k) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \Psi_{22}^k(\mathbf{a}^k) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) d\Omega_k$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^k(\mathbf{a}^k) = & \left\{ A_{11}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\ & + A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\ & + A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \left. \right\} \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{1n}^k \right) \\ & + \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\ & + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\ & + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \left. \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{1n}^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{12}^k(\mathbf{a}^k) = & \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \left. \right\} \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{1n}^k \right) \\
& + \left\{ A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{22}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \left. \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{1n}^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{21}^k(\mathbf{a}^k) = & \left\{ A_{11}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \left. \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \right\} \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{2n}^k \right) \\
\\
\Psi_{22}^k(\mathbf{a}^k) = & \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^k \\
& + \left\{ A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{22}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k \right] \right\} \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{2n}^k \right) \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Böylece sonlu elemanlar modellemesi sonucunda (2.1)-(2.3) değişken katsayılı kısmi türevli non-linear diferansiyel denklemler takımının (2.4) veya (2.5) non-linear sınır koşulları çerçevesinde araştırılması, (2.35)-(2.37) non-linear cebirsel denklemler takımının incelenmesine getirilir. Belirtelim ki (2.35)-(2.37) denklemlerinde non-linear terimler ihmal edilirse (2.35) denklemleri [42] de elde edilen

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.38)$$

lineer denklemlerine dönüştür. Burada $\mathbf{K}$ 'ya rijitlik (stiffness) matrisi denir.

Şimdi (2.35)-(2.37) non-linear cebirsel denklemler takımının çözülmesi işlemlerinin açıklanmasına geçelim.

2.5 Newton - Raphson Yöntemi

(2.35) - (2.37) non-linear cebirsel denklemler takımının çözümünün elde edilmesi yöntemini ele alalım. İlk önce

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \quad (2.39)$$

olduğunu varsayalım ve kabul edelim ki, $\mathbf{a}_0$ vektörü mertebesi (bileşenlerinin sayısı) (2.35) cebirsel denklemler takımındaki denklemlerin sayısına eşit olan keyfi bir vektör şeklinde seçilebilir. Ancak tez kapsamında ele alınan araştırmalarda $\mathbf{a}_0$ vektörü olarak (2.35) denklemlerine karşı gelen lineer (2.38) denklemlerinin çözümü alınmıştır. Yukarıda belirtildiği gibi (2.38) denklemleri (2.1)-(2.4) non-linear sınır değer problemine karşılık gelen lineer sınır değer probleminin sonlu eleman modellemesi sonucunda elde edilen lineer cebirsel denklemler takımıdır. Böylece $\mathbf{a}_0$ 'ı

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_0 = \mathbf{r} \quad (2.40)$$

denkleminde elde edelim. $\mathbf{a}_0$ yerdeğiştirme vektörüdür, $\mathbf{r}$ kuvvet vektörüdür. Önceden belirtelim ki başlangıçta $\mathbf{a}$ vektörünün (2.39) şeklinde seçilmesi daha elverişlidir ve (2.35)'de yerine yazıldıktan sonra $\mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0)$ farkları hesaplanır yani,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0) \quad (2.41)$$

vektörünün bileşenleri hesaplanır. Daha sonra $\mathbf{a}_0$ 'a $\delta \mathbf{a}_1$ artımı verilir ve $\mathbf{a}$ vektörü olarak

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1 \quad (2.42)$$

vektörü seçilir. $\mathbf{a}_1$ vektörü (2.35)'de $\mathbf{a}$ 'nın yerine yazılarak $\delta \mathbf{a}_1$ 'e göre

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) = \mathbf{r} \quad (2.43)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) \approx \Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 \quad (2.44)$$

ifadesi kullanılarak (2.43) denklemini

$$\Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r} \quad (2.45)$$

şeklinde yazılır ve (2.41) göz önüne alınarak

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \quad (2.46)$$

denklemini elde edilir. Son denklem $\delta \mathbf{a}_1$ bilinmeyenleri için lineer bir denklemdir. Bu denklem çoğu zaman

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0)\delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 ; \quad \left(\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \bigg|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \right) \quad (2.47)$$

şeklinde yazılır. Buradaki $\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0)$ matrisine birinci iterasyona karşı gelen teğet rijitlik (stiffness) matrisi denir. Böylece lineerleştirilmiş (2.47) denkleminde $\delta \mathbf{a}_1$ bilinmeyenleri belirlendikten sonra (2.42)'den $\mathbf{a}_1$ vektörü hesaplanıp (2.35)'de $\mathbf{a}$ vektörünün yerine konulur ve

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_1) \quad (2.48)$$

hesaplanır. Eğer $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ elde edilirse $\mathbf{a}_1$ vektörü (2.35)'in kesin çözümü gibi kabul edilebilir, $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$ olduğunda ise $\mathbf{a}_1$ vektörüne $\delta \mathbf{a}_2$ artımı verilir ve

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \delta \mathbf{a}_2 \quad (2.49)$$

vektörü (2.43)'de $(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1)$ 'in yerine konulup (2.44)-(2.48) işlemleri tekrarlanır. Sonuçta $\delta \mathbf{a}_2$ 'ler için

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_1)\delta \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_1) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \bigg|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_1} \quad (2.50)$$

lineerleştirilmiş denklemler elde edilir. Burada $\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_1)$ 'e ikinci iterasyona karşı gelen teğet rijitlik (stiffness) matrisi denir. (2.50)'den $\delta \mathbf{a}_2$ bulunduktan sonra (2.49)'dan $\mathbf{a}_2$ 'ler belirlenir ve

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_2) \quad (2.51)$$

farkları hesaplanır. (2.51)'den elde edilen $\mathbf{r}_3$ 'ün bileşenleri yeteri derecede sıfıra yakın değilse yukarıdaki işlemler tekrar yapılır. Genel olarak n . iterasyon için bu işlemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} + \delta \mathbf{a}_n \quad (2.52)$$

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_{n-1}) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_{n-1})\delta \mathbf{a}_n = \mathbf{r}_n \quad (2.54)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_{n-1}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_{n-1}} \quad (2.55)$$

(2.52)-(2.55)'de $\mathbf{a}_n$ 'e n . iterasyon sonucunda elde edilen çözüm, $\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_{n-1})$ 'e ise n . iterasyona karşı gelen teğet rijitlik (stiffness) matrisi denir. (2.52)-(2.55)'de kullanılan diğer işaretlemelerin anlamları açıktır. (2.52)-(2.55) işlemleri $\mathbf{a}_{n-1}$ ve $\mathbf{a}_n$ çözümlerinin belli bir kriter çerçevesinde yakın oldukları duruma kadar devam ettirilir. Böylece (2.38) non-linear cebirsel denklemler takımının istenilen hassasiyetle yaklaşık çözümleri elde edilir. Yukarıda açıklanan yöntem Newton-Raphson yöntemi olarak adlandırılır. Bu yöntemin uygulanabilmesi imkanları, yukarıda açıklanan iterasyonlar sonucunda elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklığı ile belirlenir. Tezin giriş kısmında özetlenen araştırmalardan anlaşıldığı gibi ele alınan keyfi bir non-lineer problemi belirleyen parametrelerin belli değişme aralığında Newton - Raphson yöntemi yakınsak sayısal sonuçlar verebilmektedir. Non-lineer problem parametrelerinin söylenen değişme aralığı dışında Newton - Raphson yöntemi yakınsak sonuçlar verememektedir. Dolayısıyla problem parametrelerinin alabileceği değerler içerisinde bir üst sınır var ki parametrelerin değeri bu sınırı aştığında Newton-Raphson yöntemi yakınsak sayısal sonuçlar verememektedir. Adı geçen sınırın daha da genişletilebilmesi amacıyla Newton-Raphson yöntemi bir çok açıdan geliştirilir ve bunlara modified Newton-Raphson yöntemleri denir. Modified Newton-Raphson yöntemlerden en çok yaygın olanı, $\mathbf{K}_T$ teğet rijitlik matrisinin her bir iterasyonda ele

alınan non-linear probleme karşılık gelen lineer problemin $\mathbf{K}$ rijitlik matrisi ile yer değiştirilmesidir. Birçok kaynak incelemeleri göstermektedir ki bu tür yer değiştirme sonucunda, problem parametrelerinin yukarıda söylenen yakınsaklık sınırı genişletilebilmektedir. Yukarıda söylenenler açısından tez kapsamında ilk önce (2.1)-(2.4) ve (2.1)-(2.3), (2.5) non-linear sınır değer problemlerini belirleyen parametrelerin, bu non-linear problemlerin FEM modellemesi sonucunda elde edilen non-linear cebirsel denklemler takımının Newton-Raphson ve modified Newton-Raphson yöntemi ile bulunan sayısal çözümlerinin yakınsaklığını sağlayan sınırlarının belirlenmesi araştırılmaktadır. Bu araştırmalara geçmeden önce $\mathbf{K}_T$ teğet rijitlik matrisinin hesaplanmasında kullanılan formülleri ve ele alınan non-linear sınır değer problemlerinin incelenmesinde FEM yönteminin uygulanmasının bazı özelliklerini açıklayalım.

2.6 Teğet Rijitlik Matrisinin Oluşturulmasında Kullanılan Formüller

$\mathbf{K}_T$ teğet rijitlik (stiffness) matrisi

$$\mathbf{K}_T = \sum_{k=1}^M \mathbf{K}_T^k \quad (2.56)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada $\mathbf{K}_T^k$ 'nın bileşenleri olan $\mathbf{K}_{Tij}^k$ 'ler

$$K_{Tij}^k = \iint_{\Omega_k} G_{ij}^k d\Omega_k, \quad i,j=1, \dots, 9 \quad (2.57)$$

ifadesinden bulunur ve (2.57)'ye dahil olan $\mathbf{G}_{ij}^k$ matrisinin elemanları

$$\mathbf{G}_{ij}^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Psi_{21}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_{21}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

şeklindedir. Buradaki $\frac{\partial \Psi_{q1}^k}{\partial u_{qj}^k}, \frac{\partial \Psi_{q2}^k}{\partial u_{qj}^k}$ ($q=1,2$) türevlerinin ifadelerini yazalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k\right) + \sigma_{11}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \sigma_{12}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k\right) + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \\
\frac{\partial \Psi_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k\right) + \sigma_{12}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k + \sigma_{22}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^k\right) + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^k \\
\frac{\partial \Psi_{21}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k\right) \\
\frac{\partial \Psi_{21}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \sigma_{11}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k\right) + \sigma_{12}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k\right) \\
\frac{\partial \Psi_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^k + \sigma_{12}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^k\right) + \sigma_{22}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Burada $\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{1j}^k}, \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{2j}^k}, \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{1j}^k}, \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{2j}^k}, \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{1j}^k}, \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{2j}^k}$ türevleri ise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} &= A_{11}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} + A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} + 2A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \\
\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} &= A_{11}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} + A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} + 2A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \\
\frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} &= A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} + A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} + 2A_{66}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{1j}^k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} &= A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} + A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} + 2A_{66}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} \\
\frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} &= A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} + A_{22}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} + 2A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} \\
\frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} &= A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} + A_{22}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} + 2A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{2j}^k}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{1n}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \varepsilon_{11}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{1n}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \varepsilon_{22}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{\partial N_j}{\partial x_2} + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{2n}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{1j}^k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_2} + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{1n}^k + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{1n}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right) \\
\frac{\partial \varepsilon_{12}^k}{\partial u_{2j}^k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u_{2n}^k + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u_{2n}^k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

dır. Böylece K_T teğet rijitlik matrisinin bileşenleri (2.56)-(2.61) formüllerinin yardımıyla hesaplanır. Bu hesaplamalarda n . iterasyona karşı gelen K_T 'yi elde etmek için (2.56)-(2.61)'deki u_{1m}^k ve u_{2m}^k 'lerin yerine $(n-1)$. iterasyonda elde edilen u_{1m}^k ve u_{2m}^k 'ler yazılır.

2.7 FEM Kullanımının Ele Alınan Araştırmalardaki Bazı Özellikleri

Önceki kısımda açıklandığı gibi n . iterasyondaki $\delta \mathbf{a}_n$ bilinmeyenleri, Newton-Raphson yöntemi uygulandığında genel formu (2.54) şeklinde verilen lineer denklemler takımından, modified Newton-Raphson yöntemi uygulandığında ise

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{a}_n = \mathbf{r}_n \quad (2.62)$$

şeklindeki lineer denklemler takımından belirlenir. Bilindiği gibi (2.54) denklemini (2.1)-(2.4) non-lineer probleme karşı gelen ve [7, 22] de verilen, lineerize edilmiş denklemlerinin ayrıklaştırılmış formudur. [22] de adı geçen lineerize edilmiş denklemlerin kendi-kendine eş olduğu ispatlanmıştır. Bu ise $\mathbf{K}_T$ matrisinin simetrik olduğunu gösterir. $\mathbf{K}_T$ matrisinin simetrik olduğu, bu matrisin ifadesinden de kolayca anlaşılır. (2.62)'deki $\mathbf{K}$ matrisinin simetrik olduğu ise açıktır. Böylece her iki durumda yani Newton-Raphson veya modified Newton-Raphson yöntemlerinden herhangi biri uygulandığında elde edilen cebirsel denklemler simetrik denklemlerdir.

FEM 'in kullanıldığı başka durumlarda olduğu gibi incelenecek problemlerde de $\mathbf{K}_T$ ve $\mathbf{K}$ matrisleri bant matrisleridir. Bilgisayar hafızalarının sınırlı ve $\mathbf{K}_T$, $\mathbf{K}$ matrislerinin boyutlarının fazla olması nedeniyle (2.54) veya (2.62) denklemlerinin direkt olarak çözülmesi mümkün olmadığından bant matrisi denklemler takımının çözülmesinde kullanılan ve [49] vs. de geniş izahı verilen matrisi çarpanlara ayırma yönteminden yararlanılır. Bu yöntemle göre, $\mathbf{K}_T$ veya $\mathbf{K}$ matrisleri LU şeklinde iki matrisin çarpımı olarak yazılır. Burada L- köşegen elemanları 1 olan alt üçgen matris, U-üst üçgen matristir. Bu matrislerin elde edilmesi ve bu yolla (2.54) veya (2.62) denklemlerinin çözülmesinde kullanılan algoritmalar ve bu algoritmaların programlaştırılması [49, 50] vs. de verilmiştir. Tez kapsamında yapılan sayısal incelemelerde bu programların bazıları kullanılmış olsa da ele alınan problemin özelliğinden dolayı ortaya çıkan nedenlere göre diğer birçok programlar tarafımızdan yapılmıştır. Bu nedenlerden en önemlisi (2.1)-(2.3) denklemlerin değişken katsayılı diferansiyel denklemler takımı olmasıdır. Bu ise alınacak

olan sayısal sonuçların yüksek hassasiyete sahip olması amacıyla K_T veya K matrislerinin bileşenleri hesaplanırken $A_{ij}(x_1)$ 'lerin her bir Ω_k elemanı çerçevesinde değişen yani fonksiyonlar olarak göz önüne alınmasını gerektirir. Yukarıda söylenenler göz önüne alınarak tezde yapılan sayısal incelemelerde (2.57) integralleri Gauss İntegrasyon ile her bir eleman için ayrı-ayrı hesaplanır. Bu hesaplamalarda 10 Gauss noktası alınarak oluşturulmuş verilerden kullanılır. Belirtmek gerekir ki FEM 'in geliştirildiği ve birçok problemin sayısal çözülmesinde kullanılan paket programlarda (Örneğin LUSAS, ANSYS, vb.) malzeme özelliğini gösteren $A_{ij}(x_1)$ 'ler ve aynı zamanda (2.56)-(2.61) ifadelerinde şekil fonksiyonlarının katsayıları da her bir Ω_k elemanı için sabit değer olarak alınmaktadır. Söylenen bu nedenlerden dolayı ve ileride verilecek bir seri işlemlerin yapılabilmesi ve bu çalışmadaki sayısal sonuçların elde edilebilmesi için [49] da verilen bazı DATRI, DASOL, DREDU, SAXPB ve DOT programlarından başka gereken diğer programlar ve algoritmalar FORTRAN-77 dilinde tarafımızdan yapılmıştır. Yapılan bu programlar test problemlerinde denenmiştir.

Yukarıdaki kısımlarda gösterildiği gibi ele alınan araştırmalarda yer değiştirme esaslı FEM kullanılmıştır. Yani ele alınan alanı ayıklaştıran eleman nodlarında bilinmeyenler olarak ancak yerdeğistirmeler alınır. Geriye kalan büyüklükler yani σ_{ij} 'ler (gerilmeler), ε_{ij} 'ler (şekildeğistirmeler) (2.2) ve (2.3) formüllerinin ayıklaştırmış formları kullanılarak elde edilir. Görüldüğü gibi bu çalışmada yer değistirmeler, ele alınan Ω alanında x_1 ve x_2 koordinatlarının C^0 sürekliliğine sahip fonksiyonlardır ve bundan dolayı (2.2) ve (2.3) formüller yardımıyla elde edilen σ_{ij} ve ε_{ij} 'ler elemanlar arası sınırlarda genellikle sıçramalar yaparak süreksiz fonksiyonlar olurlar. Böyle bir durum gerçek dağılıma uygun gelmediğinden, bu durumun ortadan kaldırılması için araştırılan problemlerin sonlu elemanlar ile modellenmesinin aşağıda söylenecek iki türden geliştirilmesi yapılabilir.

Birinci tür geliştirmeler; araştırılan problemlerin karışık sonlu eleman formülasyonları üzerinedir. Bu formülasyona göre, nodlarda bilinmeyenler sadece yerdeğistirmeler değil başka büyüklükler örneğin gerilmeler, vb. de kabul edilerek karışık varyasyonel prensiplerden (örneğin Reissner Prensibi, vb.) kullanılır. Karışık formülasyon çerçevesinde

elde edilen sayısal sonuçlarda, gerilmeler de ele alınan alanda C^0 sürekliliğine sahip olurlar. Karışık formülasyonlar gerçek anlamları olmayan süreksizlikleri aradan kaldırırsa da birçok durumlarda bu formülasyonun kullanılması sonlu eleman boyutlarının büyük seçilmesini gerektirir. Bu yüzden de elde edilen sayısal sonuçların hassasiyeti düşük olabilir.

İkinci tür geliştirmelerde ise; süreksiz gerilme dağılımlarının, belli esaslandırılmış kurallar ile süreklileştirilmesi yoluna gidilir ve bu süreklileştirme işlemlerine varyasyonel iyileştirme (variational recover or projection) adı verilir. Bu tür yaklaşımlara FEM 'in başka bir karışık formülasyonu gibi bakmak da mümkündür. Bunun, önceki söylenen karışık formülasyondan esas farkı; iki aşamalı olmasıdır. Birinci aşamada, yukarıda söylenen yer değiştirmeler bulunur. İkinci aşamada ise gerilmeler (σ_{ij} 'ler), onların nodlardaki değeri belirli kurallarla seçilmiş şekil fonksiyonları yardımıyla (2.32)'nin benzeri olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma \approx N_e \bar{\sigma} \quad (2.63)$$

Burada

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}; \quad \bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_M);$$

$$\bar{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11i} \\ \bar{\sigma}_{22i} \\ \bar{\sigma}_{12i} \end{pmatrix} \quad (i=1,2, \dots, M) \quad (2.64)$$

şeklindedir. Bundan başka (2.63)'teki N_e şekil fonksiyonları matrisini, (2.64)'teki $\bar{\sigma}_i$ vektörünün bileşenleri ise nodlardaki gerilmeleri göstermektedir. Çoğu zaman N_e şekil fonksiyonları (2.31)'deki şekil fonksiyonlarının aynısı alınır. Ele alınan sonlu elemanlar için (Şekil 2.1) N_e matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$N_e = (N^1, N^2, \dots, N^M)$$

$$N^i = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 & 0 & N_9 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Yukarıdaki $\bar{\sigma}_i$ vektörün bileşenlerinin bulunması *En Küçük Kareler Yöntemi* kullanılarak elde edilir. Bu durumda,

$$Q = \iint_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^2 d\Omega \quad (2.66)$$

fonksiyoneline bakılır ve bu fonksiyonelin varyasyoneli sıfıra eşitlenerek $\bar{\sigma}_i$ vektörünün bileşenleri için

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ijk}} = 0, \quad i,j=1,2 ; k=1,2, \dots, M \quad (2.67)$$

denklemleri elde edilir. (2.66)'daki $\hat{\sigma}$ vektörünün bileşenleri olan $\hat{\sigma}_{ij}$ 'ler (2.2), (2.3) formülleri yardımı ile elde edilen gerilmelerdir.

Tez kapsamında yapılan sayısal araştırmalarda, yerdeğiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından ele alınan problemlerdeki gerilmelerin sürekliliği için (2.63)-(2.67)'de verilen yaklaşım uygulanır. Böylece bu çalışmada yapılan sayısal araştırmalar yukarıda adı geçen ikinci tür karışık sonlu eleman formülasyonunun uygulanması çerçevesinde yapılmıştır.



BÖLÜM III

3. SAYISAL SONUÇLAR ve İNCELENMESİ

3.1 Problem Parametrelerinin Değerlerinin ve Yakınsaklık Kriterinin Seçilmesi

Ele alınan problemlerinin matematiksel formülasyonundan gözüktüğü gibi bu problemleri belirleyen parametreler aşağıdakilerdir;

$$E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2, h, \ell, p, \Lambda, \delta, A \quad (3.1)$$

Gerçek durumlara ([2]-[6], [13]) karşılık olarak, tezde yapılan sayısal araştırmalarda yukarıdaki parametrelerin değerleri aşağıdaki gibi seçilir;

$$\begin{aligned} E_2 / E_1 &= 5 ; 10 ; 20 ; 50, & \nu_1 = \nu_2 &= 0.3, & \eta_1 = \eta_2 &= 0.5, & \delta &= \pi / 2 \\ h / \ell &= 0.1 ; 0.15 ; 0.2, & \varepsilon = A / \Lambda &= 0.0 ; 0.05 ; 0.1 ; 0.15, & \ell / \Lambda &= 16 \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2)'de verilen durumların her birinde p / E_1 değerlerinin değişiminin sayısal sonuçların yakınsaklığına etkisi incelenir. Bu incelemeler sonucunda öyle p^* / E_1 değeri belirlenir ki $p / E_1 \leq p^* / E_1$ durumunda elde edilen sayısal değerler yakınsak, $p / E_1 > p^* / E_1$ durumunda ise ıraksak olur. p^* / E_1 'e *yakınsaklık sınırı* denir ve bu sınır uygulanan her iki yöntem (Newton-Raphson ve Modified Newton-Raphson yöntemi) için ayrı ayrı belirlenir.

Yakınsaklık kriteri

$$\left| \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{22}^{(n-1)} \right| \leq \alpha \approx O(10^{-2}) \quad (3.3)$$

kabul edilir. Burada n , iterasyon numarasını gösterir.

Bunlardan başka ele alınan problemlerin sonlu eleman modellemesi, bu problemlerin $x_1 = \ell/2$ kesitine göre simetrikliği göz önüne alınarak, ancak, $\{0 \leq x_1 \leq \ell/2 ; 0 \leq x_2 \leq h\}$ bölgesinde yapılır. ox_1 - eksen yönünde 20, ox_2 - eksen yönünde 4 eleman alınmaktadır.

İleride, yukarıda söylenen yakınsaklık sınırının belirlenmesi sonuçları *problem 1.* için verilmektedir. Daha sonra ise mekaniksel açıdan yorumları yapılacak sayısal sonuçlar ele alınan her iki problem için verilecektir.

3.2 Yakınsaklık Sınırlarının Belirlenmesi

Şimdi farklı iterasyonlar sonucunda elde edilen sonuçların incelenmesini ele alalım ve önceden belirtelim ki bu incelemeler ancak σ_{22} 'ler için verilmektedir. σ_{22} için belirlenen yakınsaklık sınırı problemin (*problem 1.*) tümünün yakınsaklık sınırı gibi kabul edilebilmektedir. Yapılan araştırmalar ve elde edilen sayısal sonuçlar incelenen durumlarda σ_{22} 'nin $x_2 = h/2$ kesitinde mutlak değerce maksimal olduğunu göstermektedir. Bu nedenden dolayı σ_{22} / p 'nin aşağıdaki değerleri $x_2 = h/2$ de hesap edilen değerleridir.

Önce $E_2 / E_1 = 5$ durumunu ele alalım. Bu durumda $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ için $p / E_1 = 0.002$ halinde farklı x_1 / ℓ için farklı iterasyonlarda modified Newton-Raphson (MNR) yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 3.1 'de verilmektedir. Tablo 3.1 'deki sayısal sonuçlar (3.3) kriterine göre yakınsaktırlar. Ele alınan durumda Newton-Raphson (NR) yöntemi ile $p / E_1 = 0.001 ; 0.0011 ; 0.0012 ; 0.0013$ hallerinde bulunan sayısal sonuçlar ise sırası ile Tablo 3.2, Tablo 3.3, Tablo 3.4, Tablo 3.5 'de verilmektedir. Bu tablolarda verilen çok sayılı iterasyonlardan bulunan sonuçların karşılaştırılması, incelenen $E_2 / E_1 = 5$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda NR yöntemi ve (3.3) kriteri çerçevesinde yakınsaklık sınırının $p^* / E_1 = 0.0011$ olduğunu göstermektedir. Burada verilmeyen birçok sayısal araştırmalarda ise MNR yönteminden elde edilen yakınsaklık sınırı, NR yönteminden elde edilenden önemli bir biçimde büyük olmaktadır.

Şimdi NR yöntemi ve (3.3) kriteri çerçevesinde elde edilen yakınsaklık sınırlarının değerine E_2/E_1 'in artmasının etkisini inceleyelim ve $\varepsilon = 0.1$ olduğunu varsayalım. Tablo 3.6, Tablo 3.7 ve Tablo 3.8 'de verilen $E_2/E_1 = 10$ halinde farklı iterasyonlardan elde edilen σ_{22}/p değerleri sırasıyla $p/E_1 = 0.0011 ; 0.0012 ; 0.0013$ durumları için verilmektedir. Bu değerler $E_2/E_1 = 20$ halinde ise Tablo 3.9, Tablo 3.10, Tablo 3.11 ve Tablo 3.12 sırasıyla $p/E_1 = 0.0016 ; 0.0017 ; 0.0018 ; 0.0019$ için verilmektedir. Yukarıdaki sayısal sonuçların (3.3) kriteri çerçevesinde araştırılmasında, NR yöntemi kullanıldığında yakınsaklık sınırının $E_2/E_1 = 10$ için $p^*/E_1 = 0.0011$, $E_2/E_1 = 20$ için $p^*/E_1 = 0.0016$ olduğu görülür. Bunlardan başka burada verilmeyen birçok sayısal sonuçlar, $E_2/E_1 = 50$ durumunda bu sınırın daha da büyüdüğünü ve $p^*/E_1 = 0.003$ olduğunu göstermektedir. $E_2/E_1 = 50$, $p^*/E_1 = 0.003$ durumunda σ_{22}/p 'nin elde edilen değerleri Tablo 3.13 'de verilmektedir.

Böylece NR yöntemi ve (3.3) kriteri çerçevesinde farklı E_2/E_1 değerleri için elde edilen yakınsaklık sınırlarının karşılaştırılması, E_2/E_1 büyümesinin yakınsaklık sınırının büyümesine neden olduğunu gösterir. Belirtelim ki yukarıda söylenenler MNR yöntemi ve (3.3) kriteri çerçevesinde elde edilen yakınsaklık sınırlarının değerleri için de aynen geçerlidir. Ancak MNR yönteminden elde edilen yakınsaklık sınırları NR yönteminden elde edilenlerden önemli bir biçimde büyüktür. Örneğin $E_2/E_1 = 20 ; 50$ olduğu durumlarda NR yönteminden elde edilen yakınsaklık sınırları sırasıyla $p^*/E_1 = 0.0016$ ve $p^*/E_1 = 0.003$ oldukları halde, MNR yönteminden elde edilen uygun değerler sırasıyla $p^*/E_1 = 0.006$ ve $p^*/E_1 = 0.007$ dir. Son iki duruma ait olan σ_{22}/p değerleri sırasıyla Tablo 3.14 ve Tablo 3.15 'de verilmektedir.

Belirtelim ki her iki yöntemin yani NR ve MNR yöntemlerinin yakınsaklık sınırları çerçevesinde olan p/E_1 değeri için elde edilen sonuçların karşılaştırılması $E_2/E_1 = 5$ durumu için Tablo 3.16 'da ve $E_2/E_1 = 50$ durumu için ise Tablo 3.17 'de verilmiştir. Bu örnek karşılaştırmadan ve burada verilmeyen diğer karşılaştırmalardan görüldüğü gibi eğer seçilen p/E_1 değerinde her iki yöntem (NR ve MNR) yakınsak ise ondan elde edilen

sayısal sonuçlar 10^{-2} mertebesinde olan hassasiyetle çakişmaktadırlar. Bu ise tez incelemesinde elde edilen sonuçların, kullanılan algoritma ve programların güvenilirliğinin daha bir garantisidir.

Burada gösterilmeyen birçok sayısal sonuçların incelenmesi (3.1) ve (3.2)'de verilen diğer parametrelerin değışmesinin yukarıdaki yakınsaklık sınırlarının belirlenmesine ve değerine önemli bir biçimde etki etmediğini göstermiştir. Bu yüzden yukarıda ancak E_2/E_1 parametresinin p^*/E_1 değerlerine etkisinin incelenmesi verilmektedir. (3.1) ve (3.2)'de verilen diğer parametrelerin yakınsaklık sınırları çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlara etkilerinin mekaniksel açıdan araştırılması ise aşağıda ele alınacaktır.

3.3 Gerilmeler Dağılımına Ait Sayısal Sonuçlar ve Mekaniksel Açıdan Yorumlanması

Şimdi Ω alanında gerilme dağılımına ait sayısal sonuçların incelenmesini ele alalım. Aşağıda σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin x_1/ℓ 'ye göre dağılımı ele alınmaktadır ve σ_{11} gerilmelerinin değeri $x_2/h=1$ de σ_{22} gerilmelerinin değeri ise $x_2/h=0.5$ de hesaplanmıştır. x_2/h değerlerinin bu tür seçiminin nedeni σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin x_1 'e göre dağılımlarında maksimal değerlerinin sırasıyla, $x_2/h=1$ ve $x_2/h=0.5$ de olmalarıdır. Geometrik non-lineeritenin yukarıdaki gerilmelerin dağılımına etkisinin incelenmesi ele alınan Ω alanının $x_1=\ell/2$ 'ye göre simetrisinden dolayı ancak $0 \leq x_1 \leq \ell/2$ de yapılacaktır.

Şimdi *problem 1.* için elde edilen sayısal sonuçları ele alalım. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 'de sırasıyla, σ_{22}/p ve σ_{11}/p 'nin x_1/ℓ 'den bağımlı olarak dağılımının grafikleri farklı ε değeri için $E_2/E_1 = 5$; $h/\ell = 0.1$; $\ell/\Lambda = 16$; $p/E_1 = 0.001$ durumunda verilmektedir. Bu şekillerde, karşılaştırmak amacı ile uygun lineer problemlerden elde edilen sonuçların grafikleri de verilmekte ve kesikli çizgiler lineer durumu göstermektedir. Böylece, Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 'de lineer ve non-lineer durumlara karşı gelen sonuçların karşılaştırılması ε 'nın artması ile geometrik non-lineeritenin σ_{22} ve σ_{11} gerilmelerinin

dağılımına etkisinin büyüdüğünü göstermektedir. Bundan başka, $\varepsilon = 0$ durumuna karşı gelen grafikler de yukarıdaki şekillerde verilmektedir.

Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ise, sırasıyla, σ_{22}/p ve σ_{11}/p gerilmelerinin x_1/ℓ 'den bağımlı dağılımını gösteren grafikler farklı E_2/E_1 değerleri için verilmektedir. Belirtelim ki bu sayısal sonuçlar yine de $h/\ell = 0.1$; $\varepsilon = 0.1$; $\ell/\Lambda = 16$; $p/E_1 = 0.001$ durumunda elde edilmiştir. Bu şekillerde lineer ve non-lineer problemlere ait olan sonuçların karşılaştırılması E_2/E_1 'in büyümesinin σ_{22} ve σ_{11} gerilmelerine geometrik non-lineeritenin etkisinin azaldığını göstermektedir.

Şekil 3.5 'de σ_{22}/p ve x_1/ℓ arasındaki bağımlılığın grafikleri $E_2/E_1 = 5$; $\varepsilon = 0.1$; $\ell/\Lambda = 16$; $p/E_1 = 0.001$ durumunda farklı h/ℓ değerleri için verilmektedir. Bu grafiklerden açıkça görüldüğü gibi h/ℓ 'nin değerleri büyüdükçe geometrik non-lineeritenin σ_{22} gerilmelerine etkisi yine azalmaktadır.

p/E_1 'in değişiminin σ_{22}/p 'nin x_1/ℓ 'ye göre dağılımına etkisi ise, $E_2/E_1 = 5$; $\varepsilon = 0.1$; $\ell/\Lambda = 16$; $p/E_1 = 0.001$ durumunda, Şekil 3.6 'daki grafiklerle verilmektedir. Bu verilerden p/E_1 'in artımının geometrik non-lineeritenin göz önüne alınmasından dolayı σ_{22} gerilmesinin değerlerine olan katkının büyüdüğü gözükmektedir.

Yukarıda sonuçlar mekaniksel ve fiziksel ön görüşlere uygun gelmektedir. Bundan başka, yukarıdaki şekillerde verilen grafiklerden gözüktüğü gibi, geometrik non-lineeritenin σ_{22} ve σ_{11} gerilmelerinin değerlerine etkisi kendini $x_1 = \Lambda n$ ($n = 1, 2, \dots, 8$) kesitlerinde göstermektedir. Bu kesitler ise Ω bölgesini dolduran malzeme yapısında eğrilerin çökme ve kabarma noktalarına karşı gelmektedir. σ_{22}/p ve σ_{11}/p 'nin bu noktalarındaki değerleri ayrıca Tablo 3.18 - Tablo 3.25 'de verilmektedir. Bunlardan başka Tablo 3.26 'da ℓ/Λ değişiminin $x_1/\ell = 0.5$ de σ_{22}/p değerlerine etkisi de verilmektedir.

Bir daha hatırlatalım ki yukarıda incelenen sayısal sonuçlar *problem 1.* için elde edilmiştir. Belirtelim ki benzeri sayısal sonuçlar *problem 2.* için de elde edilmiştir. Ancak *problem 2.* 'nin yakınsaklık sınırı, *problem 1.* 'in yakınsaklık sınırından önemli bir biçimde düşük olduğundan *problem 2.* için yakınsak sayısal sonuçların elde edilmesi çok küçük p/E_1 değerleri için mümkün olmuştur. Bu sonuçlar karakter bakımından *problem 1.* için elde edilen sonuçların benzeri olup Tablo 3.27 - Tablo 3.34 'de verilmektedir. Belirtelim ki bu tablolarda rasyonel formda olan verilerde paydaki değerler non-lineer duruma, paydadaki değerler ise uygun lineer duruma karşı gelmektedir. Ayrıca bu kısımda incelemesi yapılan sayısal sonuçların elde edilmesinde MNR yöntemi uygulanmıştır.



Tablo 3.1 $E_2/E_1=5$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p/E_1=0.002$ durumunda MNR yöntemi ile farklı iterasyonlarda σ_{22}/p 'ler için elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	$\varepsilon = 0.0$			$\varepsilon = 0.1$		
	x_1/ℓ			x_1/ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000	0.2600	0.3750	0.5000
1	-1.137	-0.879	-0.720	-1.792	-2.280	-2.364
2	0.060	-0.399	-0.678	-0.136	-2.801	-2.540
3	-0.783	-0.745	-0.717	-1.472	-2.259	-2.487
4	-0.355	-0.571	-0.699	-0.689	-2.009	-2.542
5	-0.614	-0.677	-0.710	-1.234	-2.190	-2.513
6	-0.472	-0.619	-0.704	-0.888	-2.077	-2.535
7	-0.554	-0.652	-0.708	-1.119	-2.154	-2.522
8	-0.508	-0.633	-0.706	-0.969	-2.105	-2.531
9	-0.534	-0.644	-0.707	-1.068	-2.137	-2.525
10	-0.519	-0.638	-0.706	-1.004	-2.137	-2.525
11	-0.528	-0.640	-0.707	-1.046	-2.130	-2.527
12	-0.523	-0.640	-0.707	-1.018	-2.121	-2.528
13	-0.526	-0.641	-0.707	-1.036	-2.127	-2.527

Tablo 3.2 $E_2/E_1=5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p/E_1=0.001$ (yakınsak) durumunda NR yöntemi ile σ_{22}/p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar (Problem 1.)

İterasyon No	x_1/ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
1	-1.015	-2.079	-2.479
2	-1.010	-2.051	-2.437
3	-1.013	-2.072	-2.463
4	-1.011	-2.054	-2.440
5	-1.012	-2.067	-2.456

Tablo 3.3 $E_2/E_1=5$, $\varepsilon=0.1$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p^*/E_1=0.0011$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22}/p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1/ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
1	-1.018	-2.094	-2.499
2	-1.012	-2.054	-2.441
3	-1.016	-2.089	-2.486
4	-1.012	-2.054	-2.442
5	-1.015	-2.085	-2.479
6	-1.012	-2.057	-2.444
7	-1.015	-2.082	-2.475
8	-1.013	-2.059	-2.446
9	-1.015	-2.079	-2.472
10	-1.013	-2.061	-2.448
11	-1.014	-2.078	-2.469
12	-1.013	-2.062	-2.450
13	-1.014	-2.076	-2.467

Tablo 3.4 $E_2 / E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0012$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.021	0.372	-2.108	1.085	-2.521
2	-1.014	0.461	-2.053	0.975	-2.442
3	-1.020	0.357	-2.111	1.085	-2.517
4	-1.013	0.467	-2.045	0.962	-2.433
5	-1.020	0.348	-2.114	1.093	-2.522
6	-1.012	0.476	-2.038	0.951	-2.427
7	-1.020	0.339	-2.119	1.105	-2.531
8	-1.011	0.489	-2.031	0.941	-2.420
9	-1.021	0.330	-2.125	1.121	-2.541
10	-1.011	0.505	-2.023	0.930	-2.413
11	-1.022	0.320	-2.133	1.141	-2.556
12	-1.010	0.525	-2.013	0.917	-2.405
13	-1.023	0.307	-2.143	1.167	-2.575
14	-1.008	0.552	-2.000	0.901	-2.396
15	-1.024	0.292	-2.155	1.203	-2.600
16	-1.007	0.589	-1.982	0.881	-2.385
17	-1.025	0.274	-2.171	1.255	-2.638
18	-1.005	0.646	-1.955	0.855	-2.372
19	-1.027	0.251	-2.194	1.338	-2.698
20	-1.001	0.742	-1.910	0.819	-2.354
21	-1.028	0.222	-2.229	1.503	-2.818
22	-0.992	0.952	-1.811	0.755	-2.330
23	-0.998	0.229	-2.279	2.038	-3.196
24	-0.951	1.865	-1.323	0.559	-2.289

Tablo 3.5 $E_2 / E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0013$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.024	0.354	-2.124	1.084	-2.544
2	-1.015	0.478	-2.046	0.935	-2.436
3	-1.024	0.313	-2.141	1.120	-2.566
4	-1.011	0.532	-2.011	0.886	-2.405
5	-1.025	0.268	-2.170	1.205	-2.628
6	-1.005	0.644	-1.951	0.818	-2.364
7	-1.025	0.208	-2.219	1.410	-2.779
8	-0.991	0.942	-1.796	0.700	-2.306

Tablo 3.6 $E_2 / E_1 = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.0011$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.293	1.073	-2.991	2.220	3.622
2	-1.296	1.080	-2.966	2.155	3.553
3	-1.293	1.079	-2.983	2.207	3.611

Tablo 3.7 $E_2/E_1=10$, $\varepsilon=0.1$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p/E_1=0.0012$ (çok yavaş şekilde büyüme var) NR yöntemi ile σ_{22}/p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1/ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.295	1.063	-3.003	2.215	-3.640
2	-1.298	1.073	-2.969	2.131	-3.548
3	-1.295	1.072	-2.996	2.211	-3.640
4	-1.298	1.069	-2.971	2.131	-3.547
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
9	-1.295	1.073	-2.997	2.212	-3.642
10	-1.298	1.069	-2.970	2.130	-3.545
11	-1.295	1.073	-2.997	2.213	-3.643
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
25	-1.294	1.073	-2.999	2.218	-3.649
26	-1.299	1.069	-2.969	2.124	-3.538
27	-1.294	1.073	-2.999	2.219	-3.650
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
55	-1.293	1.074	-3.004	2.233	-3.665
56	-1.299	1.069	-2.965	2.110	-3.522

Tablo 3.8 $E_2 / E_1 = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0013$ (yavaş şekilde büyüme var) NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.297	1.054	-3.014	2.212	-3.659
2	-1.301	1.065	-2.971	2.101	-3.537
3	-1.295	1.065	-3.014	2.226	-3.681
4	-1.302	1.061	-2.967	2.080	-3.509
5	-1.294	1.069	-3.023	2.254	-3.714
6	-1.303	1.061	-2.958	2.048	-3.469
7	-1.291	1.074	-3.039	2.297	-3.762
8	-1.304	1.063	-2.945	2.002	-3.411
9	-1.286	1.083	-3.064	2.362	-3.833
10	-1.304	1.069	-2.926	1.934	-3.324

Tablo 3.9 $E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.0016$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.477	1.541	-3.716	3.053	-4.548
2	-1.483	1.540	-3.685	2.971	-4.446
3	-1.479	1.549	-3.706	3.037	-4.532
4	-1.482	1.537	-3.689	2.980	-4.457
5	-1.482	1.549	-3.703	3.031	-4.524

Tablo 3.10 $E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0017$ (çok yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.478	1.535	-3.726	3.051	-4.563
2	-1.486	1.532	-3.688	2.952	-4.440
3	-1.480	1.545	-3.716	3.042	-4.556
4	-1.485	1.527	-3.690	2.955	-4.441
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
18	-1.485	1.525	-3.689	2.950	-4.434
19	-1.480	1.549	-3.717	3.046	-4.563
20	-1.485	1.525	-3.689	2.949	-4.432
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
29	-1.480	1.550	-3.718	3.050	-4.569
30	-1.485	1.524	-3.688	2.944	-4.427
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
37	-1.480	1.551	-3.719	3.054	-4.573
38	-1.485	1.523	-3.687	2.941	-4.422

Tablo 3.11 $E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0018$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.479	1.528	-3.735	3.049	-4.579
2	-1.488	1.525	-3.689	2.930	-4.429
3	-1.481	1.543	-3.728	3.051	-4.588
4	-1.488	1.515	-3.689	2.918	-4.410
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
7	-1.479	1.554	-3.740	3.088	-4.636
8	-1.489	1.509	-3.680	2.875	-4.348
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
21	-1.453	1.609	-3.885	3.362	-4.952
22	-1.498	1.456	-3.620	2.591	-3.941
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
25	-1.445	1.622	-3.940	3.443	-5.033
26	-1.502	1.455	-3.602	2.524	-3.846
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
31	-1.434	1.642	-4.016	3.547	-5.135
32	-1.507	1.460	-3.576	2.440	-3.729

Tablo 3.12 $E_2 / E_1 = 20$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p / E_1 = 0.0019$ (yavaş şekilde büyüme var) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ				
	0.2600	0.3150	0.3750	0.4375	0.5000
1	-1.481	1.521	-3.745	3.048	-4.596
2	-1.491	1.517	-3.690	2.905	-4.413
3	-1.481	1.542	-3.743	3.069	-4.630
4	-1.491	1.499	-3.684	2.865	-4.355
5	-1.478	1.557	-3.761	3.119	-4.695

Tablo 3.13 $E_2 / E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.003$ (yakınsaklık sınırı) durumunda NR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
1	-1.519	-4.218	-5.215
2	-1.546	-4.175	-5.090

Tablo 3.14 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p^*/E_1=0.006$ (yakınsaklık sınırı) durumunda MNR yöntemi ile σ_{22}/p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1/ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
1	-1.774	-3.412	-4.063
2	-0.863	-3.689	-4.698
3	-1.879	-3.632	-4.250
4	-1.093	-3.755	-4.682
5	-1.824	-3.678	-4.325
6	-1.201	-3.763	-4.652
7	-1.761	-3.698	-4.372
8	-1.274	-3.762	-4.625
9	-1.709	-3.710	-4.406
10	-1.327	-3.760	-4.603
11	-1.667	-3.719	-4.431
12	-1.368	-3.757	-4.585
13	-1.635	-3.725	-4.450
14	-1.400	-3.755	-4.571
15	-1.609	-3.729	-4.465
16	-1.424	-3.752	-4.459
17	-1.588	-3.732	-4.476

İterasyon No	x_1/ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
18	-1.443	-3.751	-4.550
19	-1.572	-3.735	-4.485
20	-1.458	-3.749	-4.543
21	-1.559	-3.737	-4.492
22	-1.470	-3.748	-4.537
23	-1.549	-3.738	-4.497
24	-1.479	-3.747	-4.533
25	-1.541	-3.739	-4.501
26	-1.486	-3.746	-4.529
27	-1.535	-3.740	-4.504
28	-1.491	-3.745	-4.527
29	-1.530	-3.741	-4.507
30	-1.496	-3.745	-4.524
31	-1.526	-3.741	-4.509
32	-1.499	-3.745	-4.523
33	-1.523	-3.742	-4.510
34	-1.502	-3.744	-4.521

Tablo 3.15 $E_2 / E_1 = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $h / \ell = 0.1$, $\ell / \Lambda = 16$, $p^* / E_1 = 0.007$ (yakınsaklık sınırı) durumunda MNR yöntemi ile σ_{22} / p 'ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

İterasyon No	x_1 / ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
1	-1.372	-3.621	-4.587
2.	-1.314	-4.353	-5.363
3	-1.560	-3.925	-4.824
4	-1.444	-4.392	-5.363
5	-1.593	-4.010	-4.907
6	-1.484	-4.378	-5.338
7	-1.597	-4.054	-4.955
8	-1.502	-4.360	-5.314
9	-1.594	-4.085	-4.989
10	-1.514	-4.343	-5.293
11	-1.591	-4.108	-5.016
12	-1.522	-4.328	-5.274
13	-1.588	-4.128	-5.038
14	-1.529	-4.315	-5.259
15	-1.585	-4.143	-5.056
16	-1.535	-4.304	-5.245
17	-1.583	-4.157	-5.071
18	-1.539	-4.295	-5.234
19	-1.580	-4.168	-5.084
20	-1.543	-4.286	-5.224
21	-1.578	-4.177	-5.095
22	-1.546	-4.279	-5.215
23	-1.576	-4.185	-5.104

İterasyon No	x_1 / ℓ		
	0.2600	0.3750	0.5000
24	-1.549	-4.273	-5.207
25	-1.575	-4.192	-5.112
26	-1.551	-4.267	-5.201
27	-1.573	-4.197	-5.119
28	-1.553	-4.262	-5.195
29	-1.572	-4.202	-5.124
30	-1.554	-4.258	-5.190
31	-1.571	-4.206	-5.129
32	-1.555	-4.255	-5.186
33	-1.570	-4.210	-5.133
34	-1.557	-4.252	-5.182
35	-1.569	-4.213	-5.137
36	-1.558	-4.249	-5.179
37	-1.568	-4.216	-5.140
38	-1.558	-4.247	-5.176
39	-1.568	-4.218	-5.143
40	-1.559	-4.245	-5.174
41	-1.567	-4.220	-5.145
42	-1.560	-4.243	-5.172
43	-1.566	-4.222	-5.147
44	-1.560	-4.241	-5.170
45	-1.566	-4.223	-5.148
46	-1.561	-4.240	-5.169

Tablo 3.16 $E_2/E_1=5$, $\varepsilon=0.1$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p/E_1=0.001$ durumunda MNR ve NR yöntemi ile σ_{22}/p 'ler için elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

	Modified Newton-Raphson Yöntemi	Newton-Raphson Yöntemi
x_1/ℓ	5. İterasyon	5. İterasyon
0.0600	-3.078	-3.079
0.1200	0.873	0.877
0.1675	-1.043	-1.047
0.2175	-0.225	-0.229
0.2600	-1.012	-1.012
0.3150	0.422	0.414
0.3750	-2.061	-2.067
0.4375	1.052	1.065
0.500	-2.448	-2.456

Tablo 3.17 $E_2/E_1=50$, $\varepsilon=0.1$, $h/\ell=0.1$, $\ell/\Lambda=16$, $p/E_1=0.003$ durumunda MNR ve NR yöntemi ile σ_{22}/p 'ler için elde edilen sayısal sonuçlar - (Problem 1.)

	Modified Newton-Raphson Yöntemi	Newton-Raphson Yöntemi
x_1/ℓ	4. İterasyon	2. İterasyon
0.0600	-6.357	-6.334
0.1200	3.206	3.184
0.1675	-1.837	-1.817
0.2175	-0.022	-0.015
0.2600	-1.535	-1.546
0.3150	1.746	1.753
0.3750	-4.202	-4.175
0.4375	3.452	3.404
0.500	-5.153	-5.090

Tablo 3.18 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$				$\varepsilon=0.1$			
	p/E_1				p/E_1			
	----- Lineer	0.0005	0.001	0.002	----- Lineer	0.0005	0.001	0.002
0.0600	-0.492	-0.565	-0.637	-0.767	-2.901	-2.995	-3.078	-3.177
0.1200	-0.504	-0.527	-0.550	-0.591	0.972	0.937	0.873	0.740
0.1675	-0.500	-0.504	-0.507	-0.512	-1.053	-1.039	-1.043	-1.020
0.2175	-0.500	-0.500	-0.500	-0.501	-0.261	-0.229	-0.225	-0.204
0.2600	-0.500	-0.506	-0.513	-0.526	-0.980	-0.986	-1.012	-1.036
0.3150	-0.500	-0.521	-0.542	-0.580	0.5095	0.478	0.422	0.312
0.3750	-0.499	-0.537	-0.574	-0.641	-1.942	-2.003	-2.061	-2.127
0.4375	-0.500	-0.551	-0.602	-0.693	1.204	1.137	1.052	0.864
0.5000	-0.499	-0.555	-0.609	-0.707	-2.297	-2.380	-2.448	-2.527
iterasyon sayısı		4	5	13		2	5	13

Tablo 3.19 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$				$\varepsilon=0.1$			
	p/E_1				p/E_1			
	----- Lineer	0.0005	0.001	0.002	----- Lineer	0.0005	0.001	0.002
0.0600	32.326	32.891	33.219	33.533	38.911	39.576	39.919	40.005
0.1200	17.509	18.126	18.549	19.227	15.073	15.724	16.158	16.687
0.1675	7.365	7.980	8.457	9.355	7.470	8.1064	8.566	9.237
0.2175	-1.859	-1.259	-0.723	0.354	-1.602	-1.005	-0.499	0.391
0.2600	-8.516	-7.934	-7.350	-6.154	-7.959	-7.351	-6.749	-5.587
0.3150	-15.528	-14.973	-14.336	-13.015	-18.290	-17.704	-17.003	-15.504
0.3750	-21.153	-20.621	-19.942	-18.503	-18.042	-17.503	-16.817	-15.302
0.4375	-24.622	-24.110	-23.413	-21.897	-29.140	-28.607	-27.815	-25.913
0.5000	-25.840	-25.331	-24.624	-23.069	-21.983	-21.479	-20.770	-19.117
iterasyon sayısı		2	3	6		2	3	9

Tablo 3.20 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$				$\varepsilon=0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.0600	<u>-0.637</u> -0.492	<u>-0.562</u> -0.488	<u>-0.519</u> -0.485	<u>-0.491</u> -0.483	<u>-3.078</u> -2.901	<u>-4.547</u> -4.424	<u>5.648</u> -5.558	<u>-6.277</u> -6.208
0.1200	<u>-0.550</u> -0.504	<u>-0.524</u> -0.503	<u>-0.509</u> -0.502	<u>-0.499</u> -0.501	<u>0.873</u> 0.972	<u>1.877</u> 1.941	<u>2.681</u> 2.713	<u>3.267</u> 3.275
0.1675	<u>-0.507</u> -0.500	<u>-0.502</u> -0.501	<u>-0.499</u> -0.501	<u>-0.497</u> -0.500	<u>-1.043</u> -1.053	<u>-1.354</u> -1.366	<u>-1.606</u> -1.619	<u>-1.871</u> -1.881
0.2175	<u>-0.500</u> -0.500	<u>-0.500</u> -0.500	<u>-0.499</u> -0.500	<u>-0.500</u> -0.500	<u>-0.225</u> -0.261	<u>-0.139</u> -0.179	<u>-0.101</u> -0.142	<u>-0.089</u> -0.124
0.2600	<u>-0.513</u> -0.500	<u>-0.508</u> -0.500	<u>-0.505</u> -0.500	<u>-0.503</u> -0.500	<u>-1.012</u> -0.980	<u>-1.292</u> -1.262	<u>-1.465</u> -1.441	<u>-1.501</u> -1.480
0.3150	<u>-0.542</u> -0.500	<u>-0.525</u> -0.500	<u>-0.515</u> -0.500	<u>-0.509</u> 0.500	<u>0.422</u> 0.509	<u>1.085</u> 1.151	<u>1.580</u> 1.623	<u>1.829</u> 1.858
0.3750	<u>-0.574</u> -0.499	<u>-0.544</u> -0.500	<u>-0.527</u> -0.500	<u>-0.515</u> -0.500	<u>-2.061</u> -1.942	<u>-2.967</u> -2.864	<u>-3.653</u> -3.566	<u>-4.095</u> -4.020
0.4375	<u>-0.602</u> -0.500	<u>-0.560</u> -0.500	<u>-0.536</u> -0.500	<u>-0.520</u> -0.500	<u>1.052</u> 1.204	<u>2.195</u> 2.294	<u>3.057</u> 3.116	<u>3.563</u> 3.594
0.5000	<u>-0.609</u> -0.499	<u>-0.565</u> -0.499	<u>-0.538</u> -0.500	<u>-0.521</u> -0.500	<u>-2.448</u> -2.297	<u>-3.575</u> -3.451	<u>-4.445</u> -4.341	<u>-5.036</u> -4.949
iterasyon sayısı	5	4	2	2	5	3	2	2

Tablo 3.21 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$				$\varepsilon=0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.0600	<u>33.219</u> 32.326	<u>33.451</u> 32.711	<u>34.563</u> 33.942	<u>39.024</u> 38.383	<u>39.919</u> 38.911	<u>46.393</u> 45.373	<u>54.954</u> 53.949	<u>71.135</u> 69.986
0.1200	<u>18.549</u> 17.509	<u>18.032</u> 17.217	<u>17.556</u> 16.901	<u>17.638</u> 16.982	<u>16.158</u> 15.073	<u>13.478</u> 12.617	<u>10.543</u> 9.928	<u>7.389</u> 6.957
0.1675	<u>8.457</u> 7.365	<u>7.831</u> 7.006	<u>7.065</u> 6.413	<u>5.954</u> 5.302	<u>8.566</u> 7.470	<u>7.720</u> 6.863	<u>6.345</u> 5.707	<u>4.027</u> 3.514
0.2175	<u>-0.723</u> -1.859	<u>-1.412</u> -2.231	<u>-2.275</u> -2.916	<u>-3.942</u> -4.586	<u>-0.499</u> -1.602	<u>-0.742</u> -1.532	<u>-0.811</u> -1.370	<u>-0.621</u> -1.053
0.2600	<u>-7.350</u> -8.516	<u>-8.084</u> -8.890	<u>-8.971</u> -9.600	<u>-10.861</u> -11.497	<u>-6.749</u> -7.959	<u>-6.900</u> -7.739	<u>-7.022</u> -7.618	<u>-7.444</u> -7.892
0.3150	<u>-14.336</u> -15.528	<u>-15.117</u> -15.902	<u>-16.011</u> -16.624	<u>-18.034</u> -18.660	<u>-17.003</u> -18.290	<u>-20.319</u> -21.164	<u>-24.198</u> -24.821	<u>-30.791</u> -31.319
0.3750	<u>-19.942</u> -21.153	<u>-20.759</u> -21.527	<u>-21.652</u> -22.252	<u>-23.733</u> -24.353	<u>-16.817</u> -18.042	<u>-14.735</u> -15.464	<u>-12.066</u> -12.543	<u>-8.376</u> -8.665
0.4375	<u>-23.413</u> -24.622	<u>-24.245</u> -24.996	<u>-25.134</u> -25.721	<u>-27.234</u> -27.846	<u>-27.815</u> -29.140	<u>-32.818</u> -33.614	<u>-38.584</u> -39.172	<u>-48.145</u> -48.655
0.5000	<u>-24.624</u> -25.840	<u>-25.464</u> -26.215	<u>-26.353</u> -26.940	<u>-28.459</u> -29.072	<u>-20.770</u> -21.983	<u>-18.048</u> -18.724	<u>-14.608</u> -15.033	<u>-9.926</u> -10.161
iterasyon sayısı	3	2	2	2	3	2	2	2

Tablo 3.22 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda h/ℓ değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$			$\varepsilon=0.1$		
	h/ℓ			h/ℓ		
	0.10	0.15	0.20	0.10	0.15	0.20
0.0600	<u>-0.637</u> -0.492	<u>-0.460</u> -0.444	<u>-0.393</u> -0.392	<u>-3.078</u> -2.901	<u>-1.626</u> -1.600	<u>-0.949</u> -0.945
0.1200	<u>-0.550</u> -0.504	<u>-0.512</u> -0.505	<u>-0.493</u> -0.493	<u>0.873</u> 0.972	<u>0.100</u> 0.111	<u>-0.265</u> -0.264
0.1675	<u>-0.507</u> -0.500	<u>-0.505</u> -0.504	<u>-0.505</u> -0.505	<u>-1.043</u> -1.053	<u>-0.520</u> -0.520	<u>-0.393</u> -0.393
0.2175	<u>-0.500</u> -0.500	<u>-0.502</u> -0.502	<u>-0.505</u> -0.505	<u>-0.225</u> -0.261	<u>-0.607</u> -0.613	<u>-0.666</u> -0.667
0.2600	<u>-0.513</u> -0.500	<u>-0.504</u> -0.500	<u>-0.505</u> -0.503	<u>-1.012</u> -0.980	<u>-0.607</u> -0.601	<u>-0.484</u> -0.481
0.3150	<u>-0.542</u> -0.500	<u>-0.510</u> -0.500	<u>-0.505</u> -0.501	<u>0.422</u> 0.509	<u>-0.083</u> -0.068	<u>-0.320</u> -0.315
0.3750	<u>-0.574</u> -0.499	<u>-0.517</u> -0.500	<u>-0.507</u> -0.500	<u>-2.061</u> -1.942	<u>-1.173</u> -1.145	<u>-0.810</u> -0.800
0.4375	<u>-0.602</u> -0.500	<u>-0.523</u> -0.500	<u>-0.509</u> -0.500	<u>1.052</u> 1.204	<u>0.252</u> 0.278	<u>-0.143</u> -0.133
0.5000	<u>-0.609</u> -0.499	<u>-0.525</u> -0.499	<u>-0.510</u> -0.500	<u>-2.448</u> -2.297	<u>-1.346</u> -1.309	<u>-0.892</u> -0.879
iterasyon sayısı	5	2	2	5	2	2

Tablo 3.23 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda h/ℓ değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$			$\varepsilon=0.1$		
	h/ℓ			h/ℓ		
	0.10	0.15	0.20	0.10	0.15	0.20
0.0600	<u>33.219</u> 32.326	<u>14.348</u> 14.154	<u>8.085</u> 8.015	<u>39.919</u> 38.911	<u>16.622</u> 16.385	<u>9.007</u> 8.923
0.1200	<u>18.549</u> 17.509	<u>7.512</u> 7.312	<u>3.828</u> 3.763	<u>16.158</u> 15.073	<u>6.939</u> 6.744	<u>3.677</u> 3.618
0.1675	<u>8.457</u> 7.365	<u>2.988</u> 2.798	<u>1.258</u> 1.199	<u>8.566</u> 7.470	<u>2.766</u> 2.572	<u>1.067</u> 1.008
0.2175	<u>-0.723</u> -1.859	<u>-1.127</u> -1.301	<u>-1.055</u> -1.108	<u>-0.499</u> -1.602	<u>-0.831</u> -1.000	<u>-0.857</u> -0.907
0.2600	<u>-7.350</u> -8.516	<u>-4.101</u> -4.259	<u>-2.725</u> -2.770	<u>-6.749</u> -7.959	<u>-4.015</u> -4.169	<u>-2.707</u> -2.749
0.3150	<u>-14.336</u> -15.528	<u>-7.237</u> -7.375	<u>-4.485</u> -4.522	<u>-17.003</u> -18.290	<u>-8.178</u> -8.317	<u>-4.910</u> -4.947
0.3750	<u>-19.942</u> -21.153	<u>-9.756</u> -9.876	<u>-5.899</u> -5.929	<u>-16.817</u> -18.042	<u>-8.765</u> -8.875	<u>-5.477</u> -5.500
0.4375	<u>-23.413</u> -24.622	<u>-11.309</u> -11.417	<u>-6.771</u> -6.795	<u>-27.815</u> -29.140	<u>-12.837</u> -12.945	<u>-7.447</u> -7.471
0.5000	<u>-24.624</u> -25.840	<u>-11.855</u> -11.959	<u>-7.078</u> -7.101	<u>-20.770</u> -21.983	<u>-10.642</u> -10.730	<u>-6.569</u> -6.584
iterasyon sayısı	3	2	2	3	2	2

Tablo 3.24 ε değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	ε			
	0.00	0.05	0.10	0.15
0.0600	<u>-0.637</u> -0.492	<u>-1.947</u> -1.797	<u>-3.078</u> -2.901	<u>-3.861</u> -3.645
0.1200	<u>-0.550</u> -0.504	<u>0.246</u> 0.310	<u>0.873</u> 0.972	<u>1.236</u> 1.376
0.1675	<u>-0.507</u> -0.500	<u>-0.792</u> -0.791	<u>-1.043</u> -1.053	<u>-1.236</u> -1.262
0.2175	<u>-0.500</u> -0.500	<u>-0.395</u> -0.406	<u>-0.225</u> -0.261	<u>0.008</u> -0.060
0.2600	<u>-0.513</u> -0.500	<u>-0.788</u> -0.769	<u>-1.012</u> -0.980	<u>-1.141</u> -1.096
0.3150	<u>-0.542</u> -0.500	<u>-0.014</u> 0.042	<u>0.422</u> 0.509	<u>0.715</u> 0.839
0.3750	<u>-0.574</u> -0.499	<u>-1.351</u> -1.268	<u>-2.061</u> -1.942	<u>-2.606</u> -2.439
0.4375	<u>-0.602</u> -0.500	<u>0.294</u> 0.413	<u>1.052</u> 1.204	<u>1.573</u> 1.765
0.5000	<u>-0.609</u> -0.499	<u>-1.575</u> -1.457	<u>-2.448</u> -2.297	<u>-3.112</u> -2.913
iterasyon sayısı	5	4	5	4

Tablo 3.25 ε değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	ε			
	0.00	0.05	0.10	0.15
0.0600	<u>33.219</u> 32.326	<u>36.681</u> 35.688	<u>39.919</u> 38.911	<u>42.673</u> 41.488
0.1200	<u>18.549</u> 17.509	<u>17.113</u> 16.006	<u>16.158</u> 15.073	<u>16.000</u> 14.784
0.1675	<u>8.457</u> 7.365	<u>8.572</u> 7.427	<u>8.566</u> 7.470	<u>8.718</u> 7.544
0.2175	<u>-0.723</u> -1.859	<u>-0.550</u> -1.698	<u>-0.499</u> -1.602	<u>-0.462</u> -1.615
0.2600	<u>-7.350</u> -8.516	<u>-6.988</u> -8.167	<u>-6.749</u> -7.959	<u>-6.612</u> -7.888
0.3150	<u>-14.336</u> -15.528	<u>-15.750</u> -16.945	<u>-17.003</u> -18.290	<u>-18.014</u> -19.369
0.3750	<u>-19.942</u> -21.153	<u>-18.140</u> -19.306	<u>-16.817</u> -18.042	<u>-16.296</u> -17.544
0.4375	<u>-23.413</u> -24.622	<u>-25.724</u> -26.922	<u>-27.815</u> -29.140	<u>-29.580</u> -30.950
0.5000	<u>-24.624</u> -25.840	<u>-22.393</u> -23.547	<u>-20.770</u> -21.983	<u>-20.156</u> -21.374
iterasyon sayısı	3	5	3	6

Tablo 3.26 ℓ/Λ değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
($p/E_1 = 0.001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ – Problem 1.)

x_1/ℓ	ℓ/Λ				
	16	20	24	32	40
0.5000	<u>-2.448</u> -2.297	<u>-2.591</u> -2.439	<u>-2.555</u> -2.400	<u>-2.275</u> -2.117	<u>-2.003</u> -1.869
iterasyon sayısı	5	5	5	4	4

Tablo 3.27 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$						$\varepsilon=0.1$					
	p/E_1						p/E_1					
	----- Lineer	0.00005	0.0001	0.00015	0.0002	----- Lineer	0.00005	0.0001	0.00015	0.0002	----- Lineer	0.0002
0.0650	-0.519	-0.567	-0.616	-0.666	-0.725	0.721	0.6573	0.596	0.539	0.483		
0.1275	-0.506	-0.529	-0.553	-0.578	-0.610	-2.913	-2.943	-2.969	-2.991	-3.009		
0.1875	-0.500	-0.519	-0.538	-0.559	-0.585	2.815	2.796	2.779	2.765	2.750		
0.2500	-0.500	-0.525	-0.551	-0.578	-0.609	-4.666	-4.696	-4.724	-4.749	-4.772		
0.3125	-0.500	-0.534	-0.568	-0.603	-0.640	4.217	4.184	4.153	4.122	4.091		
0.3750	-0.499	-0.539	-0.580	-0.620	-0.661	-5.730	-5.774	-5.818	-5.861	-5.902		
0.4375	-0.500	-0.544	-0.589	-0.634	-0.680	4.917	4.875	4.834	4.792	4.748		
0.5000	-0.499	-0.545	-0.590	-0.636	-0.682	-6.084	-6.134	-6.185	-6.234	-6.282		
iterasyon sayısı		4	6	9	9		3	6	8	14		

Tablo 3.28 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda p/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

x_1 / ℓ	$\varepsilon = 0.0$					$\varepsilon = 0.1$				
	p / E_1					p / E_1				
	Lineer	0.00005	0.0001	0.00015	0.0002	Lineer	0.00005	0.0001	0.00015	0.0002
0.0650	-18.767	-18.966	-19.141	-19.341	-19.442	-21.966	-22.237	-22.496	-22.747	-22.860
0.1275	-33.842	-33.849	-33.839	-33.834	-33.785	-28.964	-28.952	-28.933	-28.905	-28.801
0.1875	-46.135	-46.146	-46.147	-46.135	-46.126	-54.576	-54.580	-54.574	-54.540	-54.546
0.2500	-56.728	-56.752	-56.774	-56.768	-56.806	-47.767	-47.789	-47.803	-47.796	-47.838
0.3125	-64.885	-64.925	-64.968	-64.972	-65.050	-76.849	-76.883	-76.905	-76.889	-77.029
0.3750	-70.791	-70.839	-70.894	-70.903	-71.005	-59.590	-59.639	-59.680	-59.693	-59.833
0.4375	-74.260	-74.318	-74.384	-74.400	-74.521	87.985	-88.036	-88.076	-88.072	-88.274
0.5000	-75.478	-75.536	-75.602	-75.616	-75.740	-63.531	-63.590	-63.641	-63.662	-63.833
iterasyon sayısı		3	4	6	6		3	5	7	10

Tablo 3.29 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.0001$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$				$\varepsilon=0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.0650	<u>-0.616</u>	<u>-0.536</u>	<u>-0.510</u>	<u>-0.500</u>	<u>0.596</u>	<u>1.464</u>	<u>2.087</u>	<u>2.441</u>
	-0.519	-0.512	-0.506	-0.499	0.721	1.508	2.095	2.443
0.1275	<u>-0.553</u>	<u>-0.529</u>	<u>-0.515</u>	<u>-0.509</u>	<u>-2.969</u>	<u>-4.506</u>	<u>-5.718</u>	<u>-6.650</u>
	-0.506	-0.507	-0.506	-0.505	-2.913	-4.472	-5.704	-6.642
0.1875	<u>-0.538</u>	<u>-0.524</u>	<u>-0.514</u>	<u>-0.508</u>	<u>2.779</u>	<u>4.909</u>	<u>6.541</u>	<u>7.587</u>
	-0.500	-0.501	-0.502	-0.502	2.815	4.932	6.548	7.591
0.2500	<u>-0.551</u>	<u>-0.530</u>	<u>-0.517</u>	<u>-0.509</u>	<u>-4.724</u>	<u>-7.417</u>	<u>-9.582</u>	<u>-11.300</u>
	-0.500	-0.500	-0.500	-0.501	-4.666	-7.381	-9.561	-11.289
0.3125	<u>-0.568</u>	<u>-0.538</u>	<u>-0.521</u>	<u>-0.511</u>	<u>4.153</u>	<u>7.199</u>	<u>9.533</u>	<u>11.064</u>
	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	4.217	7.234	9.548	11.070
0.3750	<u>-0.580</u>	<u>-0.545</u>	<u>-0.525</u>	<u>-0.512</u>	<u>-5.818</u>	<u>-9.193</u>	<u>-11.917</u>	<u>-14.090</u>
	-0.499	-0.500	-0.500	-0.500	-5.730	-9.140	-11.885	-14.075
0.4375	<u>-0.589</u>	<u>-0.550</u>	<u>-0.527</u>	<u>-0.513</u>	<u>4.834</u>	<u>8.340</u>	<u>11.027</u>	<u>12.803</u>
	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	4.917	8.385	11.047	12.810
0.5000	<u>-0.590</u>	<u>-0.551</u>	<u>-0.528</u>	<u>-0.513</u>	<u>-6.185</u>	<u>-9.786</u>	<u>-12.696</u>	<u>-15.021</u>
	-0.499	-0.499	-0.500	-0.500	-6.084	-9.727	-12.660	-15.005
iterasyon sayısı	6	4	2	2	6	3	2	2

Tablo 3.30 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.0001$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$				$\varepsilon=0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.0650	<u>-19.141</u>	<u>-19.347</u>	<u>-19.909</u>	<u>-21.509</u>	<u>-22.496</u>	<u>-25.514</u>	<u>-29.315</u>	<u>-36.018</u>
	-18.767	-19.141	-19.818	-21.478	-21.966	-25.157	-29.101	-35.883
0.1275	<u>-33.839</u>	<u>-34.227</u>	<u>-34.930</u>	<u>-36.895</u>	<u>-28.933</u>	<u>-24.768</u>	<u>-20.124</u>	<u>-14.485</u>
	-33.842	-34.202	-34.913	-36.884	-28.964	-24.778	-20.140	-14.480
0.1875	<u>-46.147</u>	<u>-46.507</u>	<u>-47.216</u>	<u>-49.286</u>	<u>-54.574</u>	<u>-62.484</u>	<u>-72.017</u>	<u>-87.612</u>
	-46.135	-46.488	-47.201	-49.275	-54.576	-62.486	-72.029	-87.652
0.2500	<u>-56.774</u>	<u>-57.109</u>	<u>-57.811</u>	<u>-59.918</u>	<u>-47.803</u>	<u>-39.851</u>	<u>-30.853</u>	<u>-19.214</u>
	-56.728	-57.078	-57.789	-59.905	-47.767	-39.817	-30.819	-19.167
0.3125	<u>-64.968</u>	<u>-65.283</u>	<u>-65.976</u>	<u>-68.090</u>	<u>-76.905</u>	<u>-87.902</u>	<u>-101.032</u>	<u>-122.071</u>
	-64.885	-65.234	-65.944	-68.072	-76.849	-87.891	-101.051	-122.160
0.3750	<u>-70.894</u>	<u>-71.198</u>	<u>-71.886</u>	<u>-74.001</u>	<u>-59.680</u>	<u>-49.670</u>	<u>-38.365</u>	<u>-23.746</u>
	-70.791	-71.140	-71.849	-73.982	-59.590	-49.597	-38.288	-23.661
0.4375	<u>-74.384</u>	<u>-74.677</u>	<u>-75.361</u>	<u>-77.474</u>	<u>-88.076</u>	<u>-100.618</u>	<u>-115.545</u>	<u>-139.285</u>
	-74.260	-74.609	-75.317	-77.451	-87.985	-100.595	-115.565	-139.402
0.5000	<u>-75.602</u>	<u>-75.895</u>	<u>-76.580</u>	<u>-78.692</u>	<u>-63.641</u>	<u>-52.945</u>	<u>-40.870</u>	<u>-25.258</u>
	-75.478	-75.827	-76.536	-78.670	-63.531	-52.857	-40.778	-25.158
iterasyon sayısı	4	3	2	2	5	3	2	2

Tablo 3.31 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda h/ℓ değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$			$\varepsilon=0.1$		
	h/ℓ			h/ℓ		
	0.10	0.15	0.20	0.10	0.15	0.20
0.0650	<u>-0.616</u>	<u>-0.484</u>	<u>-0.432</u>	<u>0.596</u>	<u>0.006</u>	<u>-0.243</u>
	-0.519	-0.487	-0.436	0.721	0.003	-0.248
0.1275	<u>-0.553</u>	<u>-0.528</u>	<u>-0.521</u>	<u>-2.969</u>	<u>-1.581</u>	<u>-0.993</u>
	-0.506	-0.517	-0.518	-2.913	-1.565	-0.989
0.1875	<u>-0.538</u>	<u>-0.516</u>	<u>-0.518</u>	<u>2.779</u>	<u>0.999</u>	<u>0.192</u>
	-0.500	-0.506	-0.515	2.815	1.010	0.196
0.2500	<u>-0.551</u>	<u>-0.512</u>	<u>-0.510</u>	<u>-4.724</u>	<u>-2.416</u>	<u>-1.419</u>
	-0.500	-0.501	-0.506	-4.666	-2.402	-1.414
0.3125	<u>-0.568</u>	<u>-0.514</u>	<u>-0.507</u>	<u>4.153</u>	<u>1.657</u>	<u>0.524</u>
	-0.500	-0.500	-0.502	4.217	1.671	0.529
0.3750	<u>-0.580</u>	<u>-0.516</u>	<u>-0.506</u>	<u>-5.818</u>	<u>-2.911</u>	<u>-1.652</u>
	-0.499	-0.500	-0.500	-5.730	-2.892	-1.646
0.4375	<u>-0.589</u>	<u>-0.518</u>	<u>-0.506</u>	<u>4.834</u>	<u>1.981</u>	<u>0.684</u>
	-0.500	-0.500	-0.500	4.917	1.998	0.690
0.5000	<u>-0.590</u>	<u>-0.518</u>	<u>-0.506</u>	<u>-6.185</u>	<u>-3.077</u>	<u>-1.732</u>
	-0.499	-0.499	-0.500	-6.084	-3.055	-1.724
iterasyon sayısı	6	2	2	6	3	2

Tablo 3.32 $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.1$ durumunda h/ℓ değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi ($p/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

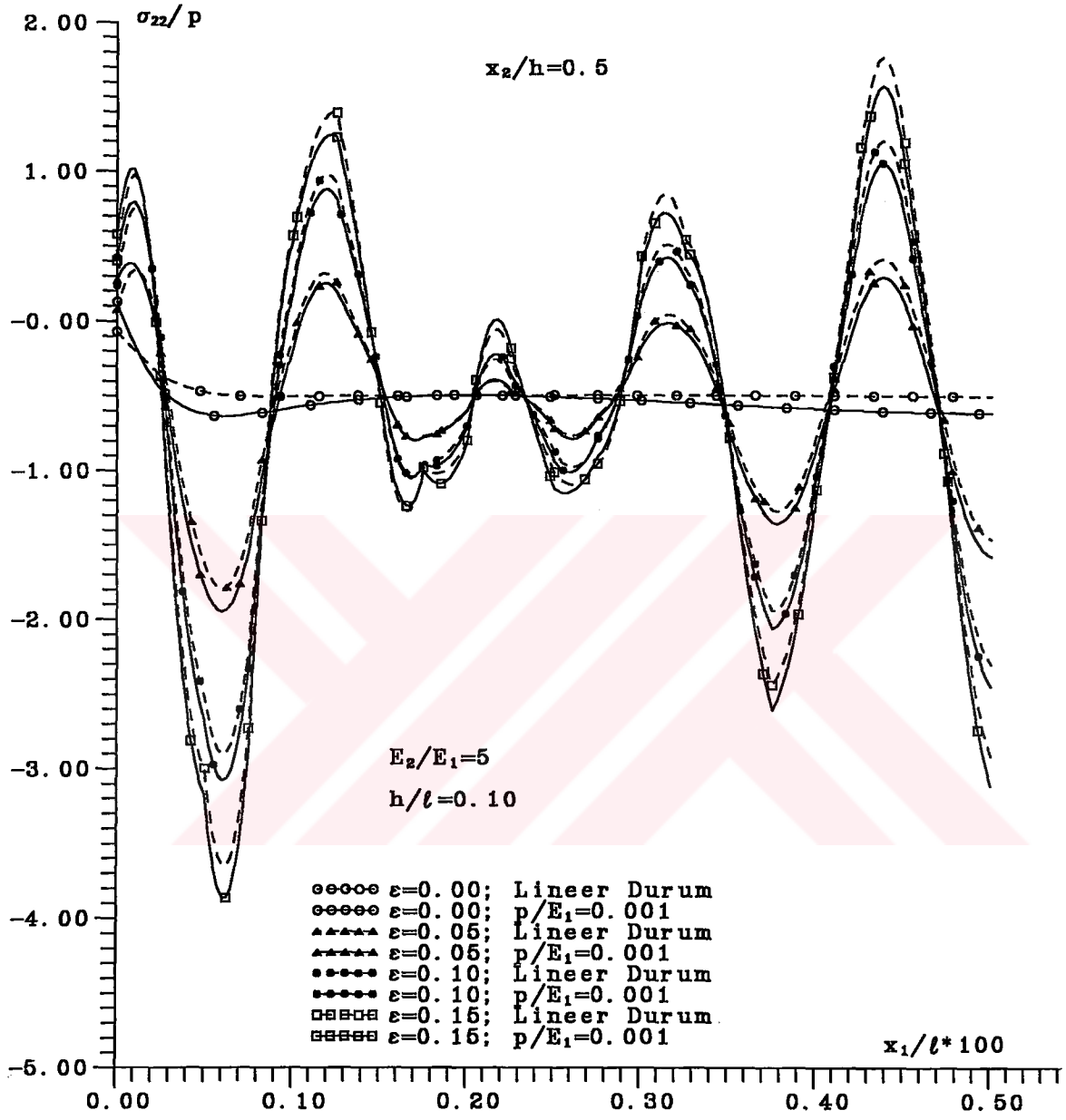
x_1/ℓ	$\varepsilon=0.0$			$\varepsilon=0.1$		
	h/ℓ			h/ℓ		
	0.10	0.15	0.20	0.10	0.15	0.20
0.0650	<u>-19.141</u> -18.767	<u>-8.853</u> -8.775	<u>-5.358</u> -5.338	<u>-22.496</u> -21.966	<u>-9.865</u> -9.764	<u>-5.765</u> -5.739
0.1275	<u>-33.839</u> -33.842	<u>-15.346</u> -15.331	<u>-8.906</u> -8.899	<u>-28.933</u> -28.964	<u>-13.803</u> -13.792	<u>-8.245</u> -8.238
0.1875	<u>-46.147</u> -46.135	<u>-20.771</u> -20.761	<u>-11.905</u> -11.901	<u>-54.574</u> -54.576	<u>-23.485</u> -23.477	<u>-13.020</u> -13.017
0.2500	<u>-56.774</u> -56.728	<u>-25.477</u> -25.463	<u>-14.532</u> -14.526	<u>-47.803</u> -47.767	<u>-22.641</u> -22.623	<u>-13.355</u> -13.348
0.3125	<u>-64.968</u> -64.885	<u>-29.106</u> -29.086	<u>-16.566</u> -16.558	<u>-76.905</u> -76.849	<u>-32.955</u> -32.940	<u>-18.149</u> -18.145
0.3750	<u>-70.894</u> -70.791	<u>-31.736</u> -31.712	<u>-18.043</u> -18.034	<u>-59.680</u> -59.590	<u>-28.221</u> -28.189	<u>-16.608</u> -16.596
0.4375	<u>-74.384</u> -74.260	<u>-33.281</u> -33.252	<u>-18.910</u> -18.900	<u>-88.076</u> -87.985	<u>-37.696</u> -37.676	<u>-20.730</u> -20.724
0.5000	<u>-75.602</u> -75.478	<u>-33.824</u> -33.795	<u>-19.215</u> -19.206	<u>-63.641</u> -63.531	<u>-30.081</u> -30.044	<u>-17.694</u> -17.680
iterasyon sayısı	4	2	2	5	3	2

Tablo 3.33 ε değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
($p/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

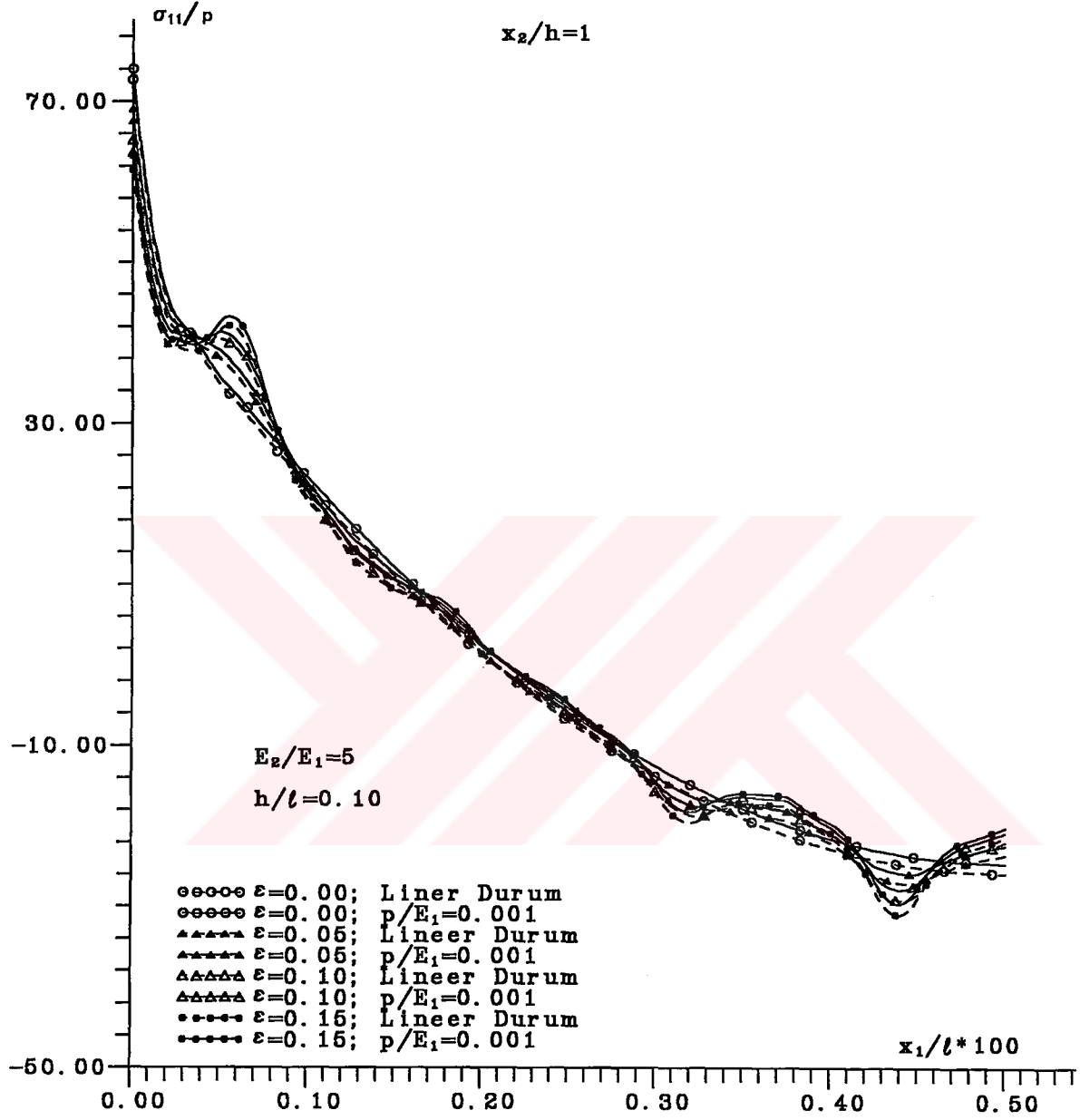
x_1/ℓ	ε			
	0.00	0.05	0.10	0.15
0.0650	<u>-0.616</u> -0.519	<u>0.048</u> 0.155	<u>0.596</u> 0.721	<u>0.943</u> 1.101
0.1275	<u>-0.553</u> -0.506	<u>-1.856</u> -1.803	<u>-2.969</u> -2.913	<u>-3.742</u> -3.678
0.1875	<u>-0.538</u> -0.500	<u>1.246</u> 1.285	<u>2.779</u> 2.815	<u>3.846</u> 3.880
0.2500	<u>-0.551</u> -0.500	<u>-2.773</u> -2.717	<u>-4.724</u> -4.666	<u>-6.156</u> -6.095
0.3125	<u>-0.568</u> -0.500	<u>1.974</u> 2.041	<u>4.153</u> 4.217	<u>5.665</u> 5.728
0.3750	<u>-0.580</u> -0.499	<u>-3.369</u> -3.285	<u>-5.818</u> -5.730	<u>-7.611</u> -7.518
0.4375	<u>-0.589</u> -0.500	<u>2.333</u> 2.419	<u>4.834</u> 4.917	<u>6.569</u> 6.651
0.5000	<u>-0.590</u> -0.499	<u>-3.570</u> -3.474	<u>-6.185</u> -6.084	<u>-8.098</u> -7.992
iterasyon sayısı	6	6	6	6

Tablo 3.34 ε değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
($p/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$, $\ell/\Lambda = 16$ – Problem 2.)

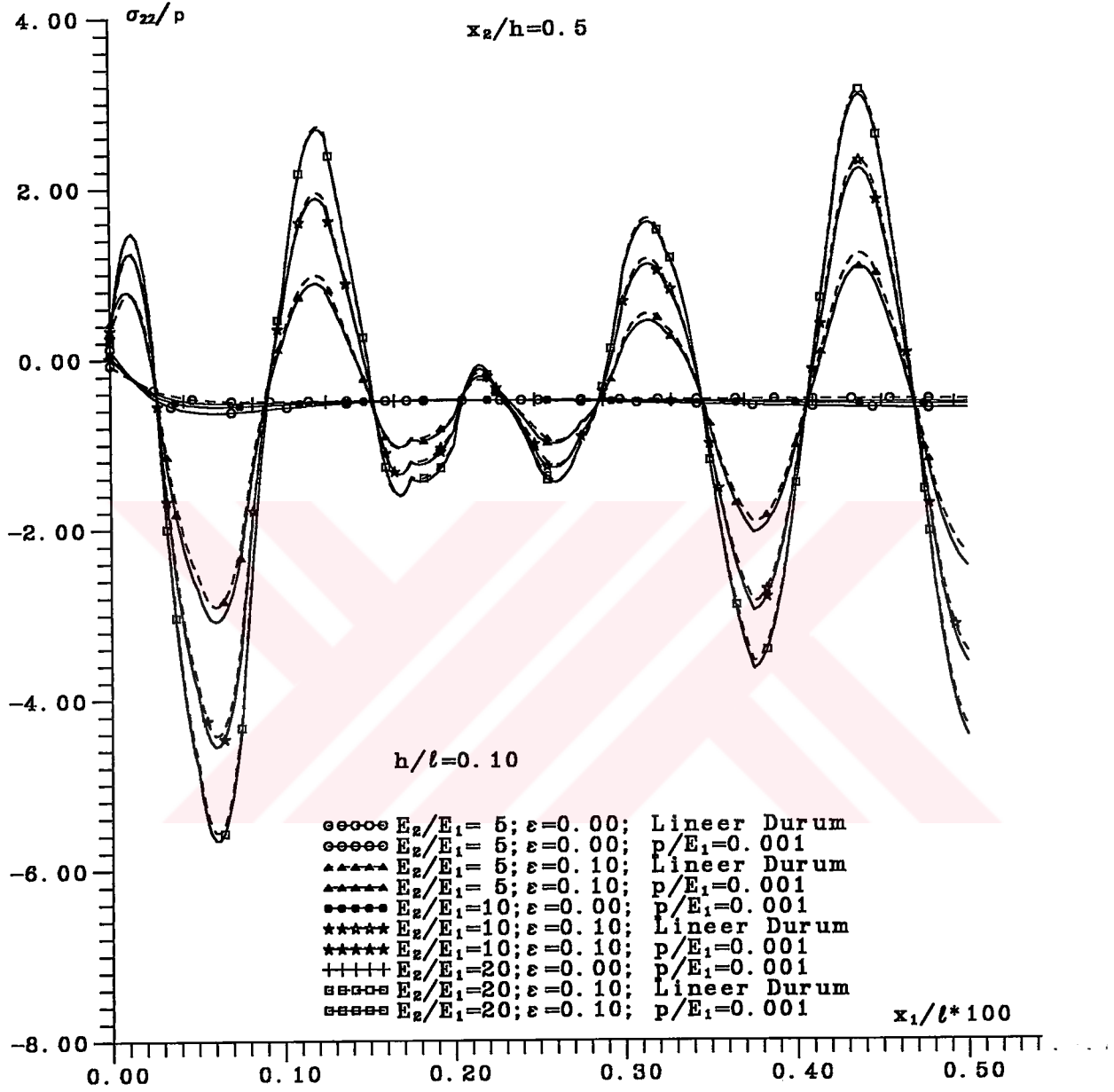
x_1/ℓ	ε			
	0.00	0.05	0.10	0.15
0.0650	<u>-19.141</u> -18.767	<u>-20.828</u> -20.396	<u>-22.496</u> -21.966	<u>-23.866</u> -23.251
0.1275	<u>-33.839</u> -33.842	<u>-30.899</u> -30.922	<u>-28.933</u> -28.964	<u>-28.146</u> -28.196
0.1875	<u>-46.147</u> -46.135	<u>-50.419</u> -50.411	<u>-54.574</u> -54.576	<u>-57.990</u> -58.012
0.2500	<u>-56.774</u> -56.728	<u>-51.433</u> -51.389	<u>-47.803</u> -47.767	<u>-46.408</u> -46.377
0.3125	<u>-64.968</u> -64.885	<u>-71.019</u> -70.938	<u>-76.905</u> -76.849	<u>-81.770</u> -81.734
0.3750	<u>-70.894</u> -70.791	<u>-64.217</u> -64.111	<u>-59.680</u> -59.590	<u>-57.955</u> -57.867
0.4375	<u>-74.384</u> -74.260	<u>-81.324</u> -81.202	<u>-88.076</u> -87.985	<u>-93.663</u> -93.595
0.5000	<u>-75.602</u> -75.478	<u>-68.479</u> -68.352	<u>-63.641</u> -63.531	<u>-61.807</u> -61.697
iterasyon sayısı	4	5	5	5



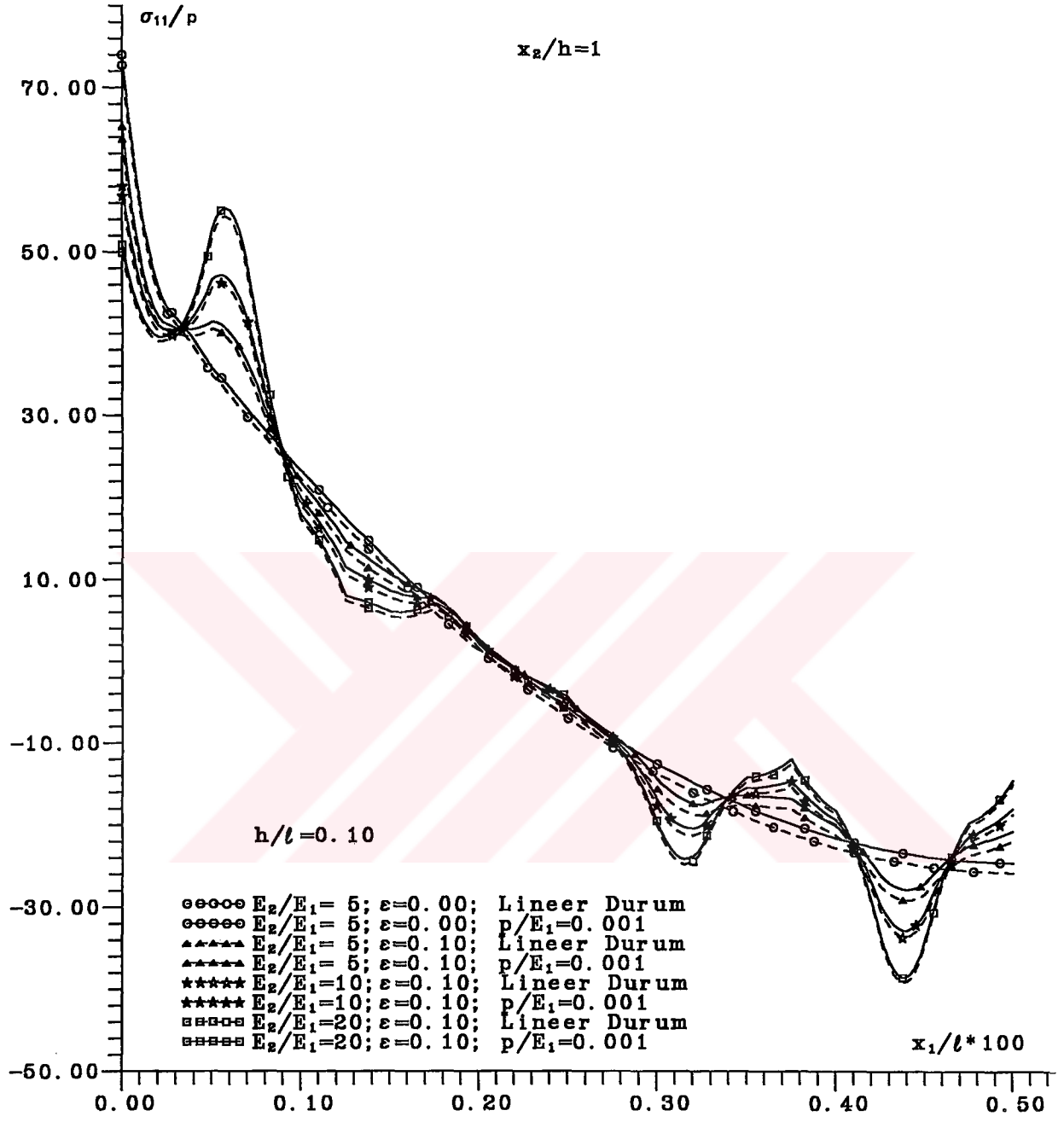
Şekil 3.1 ε değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
(Problem 1.)



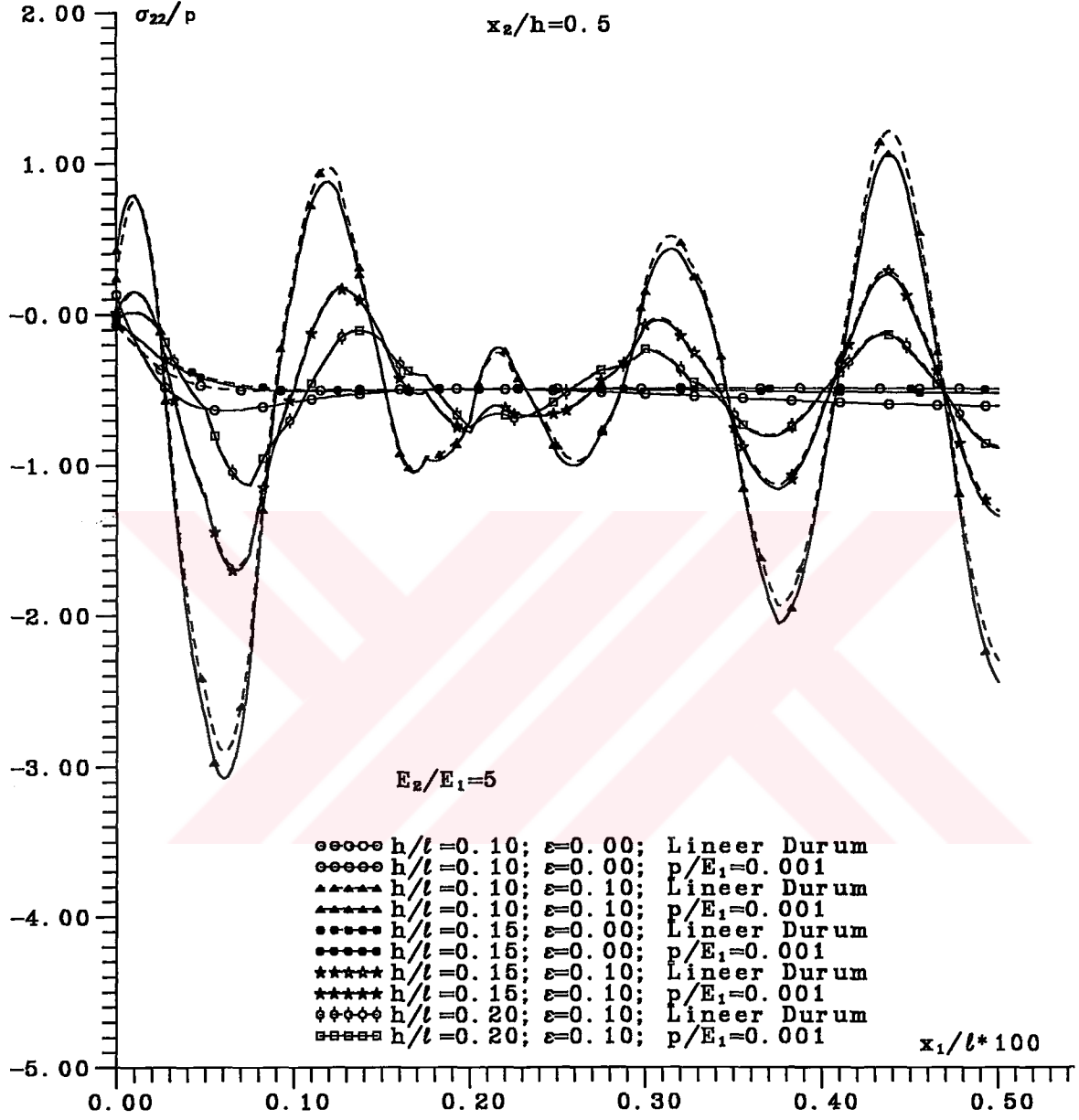
Şekil 3.2 ε değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi
(Problem 1.)



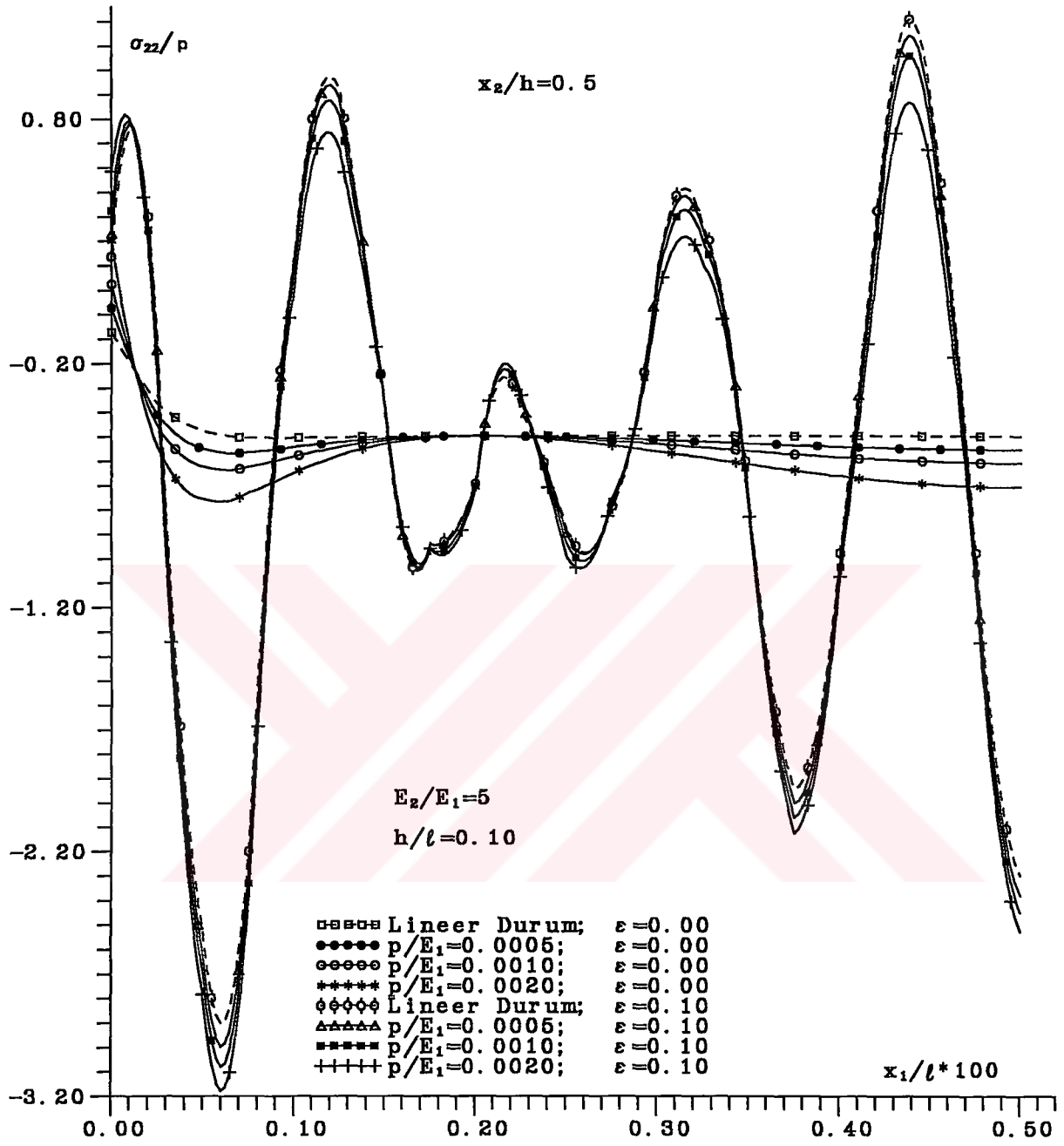
Şekil 3.3 E_2/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.)



Şekil 3.4 E_2/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye bağlı dağılımına etkisi (Problem 1.)



Şekil 3.5 h/l değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/l 'ye bağlı dağılımına etkisi
(Problem 1.)



Şekil 3.6 p/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/l 'ye bağlı dağılımına etkisi
(Problem 1.)

BÖLÜM IV

4. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRİLMESİ

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlar kısaca özetlenirse aşağıdakiler söylenebilir:

1. Akbarov ve Guz'un süreklilik teorisi çerçevesinde elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumundaki iki boyutlu geometrik non-lineer problemlerine karşı gelen sınır değer problemlerinin matematiksel formülasyonu verilmiştir.
2. Bu problemlerin mekaniksel açıklamaları verilmiştir. Formülasyonu yapılmış problemlerin kısmi türevli değişken katsayılı non-lineer diferansiyel denklemlerin bazı sınır değer problemlerine karşı geldiği gösterilmiştir.
3. Formülasyonu yapılmış non-lineer sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar ile modellenmesi yapılmıştır.
4. Sayısal sonuçların elde edilmesi için gerekli algoritmalar geliştirilmiş ve FORTRAN-77 dilinde bu algoritmalar programlaştırılmıştır.
5. Newton-Raphson ve Modified Newton-Raphson yöntemleri ile farklı iterasyonlardan elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklık sınırlarının problem parametrelerinden bağımlılığı araştırılmıştır.
6. Geometrik non -lineeritenin ele alınan alanda gerilme yayılımına etkisini gösteren, tablolar ve grafikler şeklinde tezde verilen çok sayıda sonuçlar elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçların değerlendirilmesi hakkında ise aşağıdakileri söyleyebiliriz:

1. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin statığıne uygun gelen, değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklem takımının bazı sınır koşulları çerçevesinde verilen problemler ilk kez sayısal olarak çözülmüştür.

2. Bu araştırmalarda FEM kullanılmış ve bu yöntem ele alınan non-lineer problemler için bazı yönlerden geliştirilmiştir.

3. Gz önüne alınan kompozit malzeme örnekleri çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlar mühendislik bakımından da yorumlanmış ve bu yorumların bazı önerilerde bulunması için imkan yaratılmıştır.

4. Açıkça anlaşılan, grafikler ve tablolar şeklinde ortaya konan çok sayıda sayısal sonuçlar verilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Akbarov, S. D. ve Guz', A. N., (1991), "Continuum Theory in the Mechanics of Composite Materials with Small-Scale Structural Distortion", Soviet Applied Mechanics August, 107-117.
- [2] Akbarov, S. D. ve Yahnioğlu, N., (1995), "Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Şeritin Gerilme Durumunun FEM İle Araştırılması", IX. Ulusal Mekanik Kongresi, Ürgüp, Cilt 1:68-77.
- [3] Akbarov, S. D. ve Yahnioğlu, N., (1997), "Stress Distribution in a Strip Fabricated from a Composite Material with Small-Scale Curved Structure", Int. Appl. Mech., 684-690.
- [4] Akbarov, S. D., Guz', A. N. ve Yahnioğlu, N., (1998), "Mechanics of Composite Materials with Curved Structures and Elements of Constructions", Int. Appl. Mech., 34, No:11 (review).
- [5] Akbarov, S. D. ve Yahnioğlu, N., (1998), "On the Finite Element Analysis of the Influence of the Local Structural Damage of the Multilayered Thick Plate Material to the Stress Distribution", Eds: C.A. Birebbia and A. Carpinteri, Computatioanl Mech. Pub., Southampton, UK., Boston USA, pp.187-196.
- [6] Akbarov, S. D. ve Yahnioğlu, N., (1998), "The Influence of the Local Structural Damage of the Multilayered Thick Plate Material to the Stress Distribution", Int. Appl. Mech. 34(9)
- [7] Akbarov S. D., Şişman T. ve Yahnioğlu, N., (1997), "On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression"Int. J. Eng. Sci., 35(12/3):1225-1228.
- [8] Anandan, V. ve Bauld, N. R., (1992), "Theoretical development and Numerical Verification of a Geometrically Non-Linear, 3-D Based Finite Element for Composite Material", Int. J. Numer. Methods Eng., 33:1119-1138.
- [9] Bergan, P. G., Bathe, K. J. ve Wunderlich, W. Eds., (1986), Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer Verlag, Berlin.
- [10] Bergan, P. G., Horrigmoe, G. ve Soreide, T. H., (1978), "Solution Techniques for Non- Linear Finite Element Problems", Int. J. Numer. Methods Eng., 12:1677-1696.
- [11] Celigoj, C. C., (1996), "A Strain-and-Displacement-Based Varitional Method Applied to Geometrically Non-Linear Shells", Int. J. Numer. Methods Eng., 39:2231-2248.
- [12] Chin, C. K., Al-Bermani, F. G. A. ve Kitipornchai, S., (1994), "Non-Linear Analysis of Thin-Walled Structures Using Plate Elements", Int. J. Numer. Methods Eng., 37:1697-1711.

- [13] Christensen, R. M., (1979), *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & Sons, Inc.
- [14] Clarke, M. J. ve Hancock, G. J., (1990), "A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analyses", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 29:1365-1391.
- [15] Schwartz, M. M., (1992), *Composite Materials Handbook*, Editor in Chief, Second Edition, Mc Grow-Hill, Inc., New York.
- [16] Crisfield, M. A., (1991), *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1: Essentials, John Wiley & Sons, New York
- [17] Crisfield, M. A., (1997), *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 2: Advanced Topics, John Wiley & Sons, New York
- [18] Eason, E. D. ve Mote, C. D., (1977), "Solution of Non-Linear Boundary Value Problems by Discrete Least Squares", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11:641-652.
- [19] Fairweather, G., (1978), *Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations*, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.
- [20] Gadala, M. S., Dokainish, M. A. ve Oravas, G. AE., (1984), "Formulation Methods of Geometric and Material Nonlinearity Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20:887-914.
- [21] Green. A. E. ve Adkins, J. E., (1960) *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*, Oxford at the Clarendon Press.
- [22] Guz, A. N., (1998), "Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Springer-Verlag, Berlin.
- [23] Ibrahimbegovic, A. ve Frey, F., (1993), "Finite element Analysis of Linear and Non-Linear Planar Deformations of Elastic Initially Curved Beam", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36:3239-3258.
- [24] Hinton, E. ve Campell, J., (1979), "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Function Using a Least Squares Method", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 8:461-480.
- [25] Kamke E., (1965), *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademische Verlagsgesellschaft Becker&Erker Kom-ges.
- [26] Lekhnitskii, S. G., (1963), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden Day, San Francisco, CA.
- [27] Malkus, D. S., (1980), "Finite Elements with Penalties in Nonlinear Elasticity", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 16:121-136.

- [28] Marti, J. T., (1986), Introduction to Sobolev Spaces and Finite Solution of Elliptic Boundary Value Problems, Academic Press, London-New York.
- [29] Matthies, H. ve Strang, G., (1979), "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", Int. J. Numer. Methods Eng., 14:1613-1626.
- [30] Mikhlin, S. G., (1977), Linear Partial Differential Equations, Vitsaya Shoola, Moscow.
- [31] Noel, A. T. ve Szabo, B. A., (1997), "Formulation of Geometrically Non-Linear Problems in the Spatial Reference Frame", Int. J. Numer. Methods Eng., 40:1263-1280.
- [32] Petrangeli, M. ve Ciampi, V., (1997), "Equilibrium Based Iterative Solutions for the Non-Linear Beam Problem", Int. J. Numer. Methods Eng., 40:423-437.
- [33] Papadopoulos, P. ve Taylor, R. L., (1996), "A Generalized Newton Method for Higher-Order Finite Element Approximations in Non-Linear Elasticity", Int. J. Numer. Methods Eng., 39:2635-2646.
- [34] Sarma, B. S. ve Varadan, T. K., (1984), "Ritz Finite Element Approach to Nonlinear Vibrations of Beams", Int. J. Numer. Methods Eng., 20:353-367.
- [35] Shachan, M., (1986), "Numerical Solution of Constrained Non-Linear Algebraic Equations", Int. J. Numer. Methods Eng., 23:1455-1481.
- [36] Smith, H. A., Singh, R. K. ve Sorensen, D. C., (1995), "Formulation and Solution of the Non-Linear, Damped Eigenvalue Problem for Skeletal Systems", Int. J. Numer. Methods Eng., 38:3071-3085.
- [37] Srinivasan, R. ve Perucchio, R., (1994), "Finite Element Analysis of Anisotropic Non-Linear Incompressible Elastic Solids by a Mixed Model", Int. J. Numer. Methods Eng., 37:3075-3092.
- [38] Timoshenko, S. ve Goodier, J. N., (1951), Theory of Elasticity, Mc Grow-Hill Book Company.
- [39] Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C. ve Melosh, R. J., (1960), "Large Deflection of Structures Subject to Heating and External Load", J. Aero. Sci. 27:97-106.
- [40] Wu, S. C. ve Haug, E. J., (1988), "Geometric Non-Linear Substructuring for Dynamics of Flexible Mechanical Systems", Int. J. Numer. Methods Eng., 26:2211-2226.
- [41] Wagner, W., (1990), "A Finite element Model for Non-Linear Shells of Revolution with Finite Rotations", Int. J. Numer. Methods Eng., 29:1455-1471.

- [42] Yahnioğlu, N., (1996), Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statikine Uygun Sınırdeğer Problemlerinin Fem İle İncelenmesi, Doktora Tezi, YTÜ.
- [43] Yahnioğlu, N., (1997), "Three-Dimensional Analysis of Stress Fields in the Plate Fabricated from Composite Materials with Small-Scale Structural Curving", Mech. Comp. Mater. 33(3):340-348.
- [44] Yahnioğlu, N. ve Selim, S., (1997), "Homojen Olmayan Anizotrop Malzemeden Yapılmış Şerit İçin Bir Geometrik Non-Linear Problemin İncelenmesi", 10. Ulusal Mekanik Kong., 443-452.
- [45] Yahnioğlu, N. ve Selim, S., (1998), "The Stability Loss of the Strip Fabricated From The Multilayered Composite Material With Periodically Curved Structure", 9th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems, June, 29th-July, 3rd 1998, Istanbul.
- [46] Yahnioğlu, N. ve Selim, S., (1998), "Geometrical Non-Linear Bending Problems of the Strip Fabricated from the Multilayered Composite Material with Periodically Curved Structures", 2nd Pasific-Asia Conference on Mechanical Eng., Sept. 9-11, 1998, Manila, Philippines.
- [47] Zeid, I., (1985), "Fixed-Point Iteration to Nonlinear Finite element Analysis. Part I: Mathematical Theory and Background", Int. J. Numer. Methods Eng., 21:2027-2048.
- [48] Zeid, I., (1985), "Fixed-Point Iteration to Nonlinear Finite Element Analysis. Part II: Formulation and Implementation", Int. J. Numer. Methods Eng., 21:2049-2069.
- [49] Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., (1989), The Finite Element Method. 4th Ed. Vol.1, Basic Formulation and Linear Problems, Mc Grow-Hill Book Company.
- [50] Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., (1989), The Finite Element Method. 4th Ed. Vol. 2, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity, Mc Grow-Hill Book Company.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 30.06.1971

Doğum Yeri Trabzon

Lise 1985-1988 İstanbul Çamlıca Kız Lisesi

Lisans 1988-1992 Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1993-1995 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Doktora 1995-1999 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurum 1993-Devam ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma görevlisi

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ