YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK OLMAYAN OSİLATÖRE AİT DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMUNUN ANALİZİ

Yük.Müh. Kemal YÜKSEK

F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 23 Eylül 1998
Tez Danışmanı : Prof.Dr. Abdullah YILDIZ (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mahir HASANOV (İTÜ)
: Prof.Dr. Gülseren AYDIN (MSÜ)

İSTANBUL, 1998

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

H	Hilbert Uzayı
B	Banach Uzayı
T	Spektrali Analiz edilen Problemin Diferansiyel Operatörü
T^*	T operatörünün eşleniği
$T^{(0)}$	Taban Operatörü
T'	Pozitif tanımlı operatör
$T^{(k)}$	k. ara probleme ait Diferansiyel Operatör
P	İz düşüm operatörü
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$[,]$	Enerji iç çarpımı
$\| \ \|$	Norm
λ_i	T operatörüne ait i. özdeğer (i=0,1,...)
$\lambda_i^{(0)}$	$T^{(0)}$ taban operatörünün i. özdeğeri (i=0,1,...)
$\lambda_i^{(k)}$	$T^{(k)}$ k. ara problem operatörünün i. özdeğeri (i=0,1,...)
λ_*	T operatörüne ait özdeğerlerin ilk yığılma noktası
$\lambda_*^{(0)}$	$T^{(0)}$ taban operatörüne ait özdeğerlerin ilk yığılma noktası
$D(T)$	T operatörünün tanım kümesi
$D(T^{(0)})$	$T^{(0)}$ taban operatörün tanım kümesi
$D(T')$	T' operatörünün tanım kümesi
$R_\lambda(T)$	T operatörünün çözücüsü(resolvent'i)
$R(u)$	Rayleigh Oranı
$H_i(x)$	i. Hermit polinomu (i=0,1,....)
$u_i(x)$	T operatörünün λ_i özdeğerine karşı gelen öz fonksiyonudur (i=0,1,....)
$u_i^{(0)}(x)$	$T^{(0)}$ taban operatörünün $\lambda_i^{(0)}$ özdeğerine karşı gelen öz fonksiyonudur (i=0,1,....)
$p_i(x)$	P iz düşüm operatörünün üzerine iz düşürdüğü elemanlar (i=0,1,....)
$W(\lambda)$	Weinstein Determinant'ı
$B^{(k)}$	$T'P^{(k)}$ operatörünü $D(T')$ uzayına iz düşüren operatördür

ÇİZELGE LİSTESİ

TEŞEKKÜR

Araştırma görevliliğim süresince ve Doktora çalışmasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, Tez yöneticisi Sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ hocam'a ve Tez'in yürütülmesi sırasından tüm başvurularımda kendisinden samimi destek gördüğüm bölüm hocalarımdan Sayın Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU'na teşekkür ederim.

ÖZET

Bu çalışmada, analitik olarak spektrumu belirlenemeyen, bazı şartları sağlayan diferansiyel operatörlerin spektrumlarının yaklaşık hesaplanması amaçlanmaktadır. Bu genel çerçeve içinde, harmonik olmayan osilatör operatörünün spektrumu incelenmiştir. Öncelikle ilgili operatörün spektrumunun varlığı ve ayrıklığı teorik olarak belirlenmiştir. Bu tesbitin ardından, günümüze kadar diferansiyel operatörlerin spektrumunun yaklaşık hesaplanması konusunda yapılan önemli çalışmalar analiz edilerek üzerinde çalışılan operatöre uygulanmıştır. Operatör spektrumunun alt ve üst sınırlarının belirlenmesinde ilgili yöntemlerde, ele alınan probleme ait yeni uyarlamalar yapılarak oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir.

ABSTRACT

The calculation of approximate spectrums of the differential operators, which meet some requirements and also their analytical solutions are not available, is aimed in this study. Within this context the spectrum of anharmonic oscillator has been investigated. Initially, presence and structure of the spectrum of this operator have been determined theoretically. Having being determined the problem, a review of literature on calculation of the spectrum of the differential operators were carried out and some suitable methods found in this literature have been analysed and applied to the present work. Methods determine upper and lower bounds of the spectrums of differential operators have been adapted to the case study. It is shown that good results from use of present methods have been obtained.

1.GİRİŞ

Teorik ve uygulamalı matematik, mühendislik dallarında ve pozitif bilim alanlarında özdeğer teorisinin öneminin gün geçtikçe artması, analitik çözüme sahip problemlerin sayısının sınırlılığı, özdeğerlerin yaklaşık hesaplanmasının önemini artırmıştır. Diferansiyel operatörler ile ifade edilen özdeğer problemleri de bu alanda önemli olan problemler sınıfına girmektedir. Diferansiyel operatörlerin özdeğer problemlerinin yaklaşık çözümlerindeki çalışmalar genel olarak özdeğerlerin alt sınırlarının tesbit edilmesi veya özdeğerlerin üst sınırlarının tesbit edilmesi şeklinde iki ana başlık altında toplanabilir.

Üst sınırların tesbitinde Rayleigh-Ritz metodu kullanılmaktadır. Alt sınırların tesbitinde, spektrumu bilinen bir operatör referans alınarak, üzerinde çalışılan problemin spektrumunun belirlenmesi, bir dizi operatör spektrumu bulma problemine dönüştürülmektedir. Spektrumu hesaplanabilen bu ara problemlerin kurulması ise başlıca üç şekilde olmaktadır. Bunlardan ilkinde özdeğer problemine ait operatörün tanım uzayında değişiklik yapılması önerilmektedir. İkinci yaklaşımda ise probleme ait operatörün kendisi üzerinde değişiklik yapılması ve son olarak da üçüncü bir yaklaşım olan, birinci ve ikinci yaklaşımın birlikte kullanımıdır. Birinci tip yaklaşım, ilk olarak A. Weinstein tarafından 1935 de plakaların titreşimi ile ilgili bir uygulamada yeralmıştır. Yine bu çalışmada ilk olarak ara problem kavramı kullanılmıştır. Ardından 1951'de N. Aronszajn tarafından ikinci tip, yani operatörün değiştirilmesi ile ara problemlerin kurulması ilkesine dayanan bir yöntem verilmiştir. Bu çalışma ile de ilk olarak taban operatörü kavramı kullanılmıştır. Fakat gerek A. Weinstein'ın ve gerekse de N. Aronszajn 'ın bu çalışmaları özdeğer problemlerinin çözümünü meromorphic bir fonksiyonun sıfırlarının tesbitine bağlamıştır. Bu tip zorlukların giderilmesi doğrultusunda bu çalışmaları N. Bazley, H. Wely, ve C. Fox 'un ve H. F. Weinberger'in çalışmaları izlemiştir. N. Bazley ve C. Fox, çalışmalarında diferansiyel özdeğer probleminin çözümü, matris özdeğer problemine düşürülmüş ve ilgili nümerik metodların kullanılmasıyla daha hassas ve kolay bir çözüm elde edilme imkanı doğmuştur. Bütün bu çalışmalara ilave olarak son yıllarda perturbasyon metodları, yaklaşık özdeğer hesaplarında kullanım alanı bulan diğer metodlar olmuştur.

2.PROBLEMİN ORTAYA KONULMASI

Quantum mekaniğinde, Hilbert uzayları teorisinin elverişli olması, özellikle sınırlı olmayan kendi kendine eş operatörlerin kullanılabilmesi bu bilim dalı ile Hilbert uzaylarının iç içeliğini temin etmiştir. Hilbert uzayı olarak $L^2(-\infty,\infty)$ alınırsa, uzayın elemanları olan $\varphi, \psi, \ldots$ fonksiyonları bazı şartlar altında durum(states)'lar olarak, Kendi kendine eş, tanım ve değer kümeleri $L^2(-\infty,\infty)$'de olan T, $T^{(0)}$, T' ... operatörleri de gözlenebilen(observables)'ler olarak bilinirler. Uzay için iç çarpım $\langle\ ,\ \rangle$ ifadesi bir integral olarak verilir. Bu yolla fiziksel sistemlerin bir çok özellikleri tesbit edilebilir. Sistem özelliklerinin başında sistemin muhtemel enerji seviyelerinin tesbiti gelir.

Klasik dalga denklemi $\Psi_{tt} = \gamma^2 \Delta\Psi$ şeklindedir. Stasyoner dalga denklemini elde etmek için basit ve periyodik zaman bağıntısı varlığı kabulü ile $\Psi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, t) = u(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n).e^{-ikt}$ şeklinde yazılabilir. Son ifade dalga denkleminde yerine yazılırsa ve üstel terimler kaldırılırsa, Helmholtz denklemi olarak bilinen zamandan bağımsız dalga denklemi $\Delta u + k^2 u = 0$ elde edilir. Buradan, gerekli düzenlemeler ile Quantum mekaniğinde esas teşkil eden $\left(-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta + V\right)u = \lambda u$ Schrödinger denklemine varılır. Bu form, V potansiyeline sahip bir sistemin muhtemel enerji seviyelerinin, denklemin sol tarafı ile verilen operatörün spektrumu olarak ortaya çıkacağını gösterir. Harmonik osilatör, Schrödinger denklemi tipinde bir form ile $\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda_h - x^2)U = 0$ şeklinde yazılır. Bu ifadenin $L^2(-\infty,\infty)$ Hilbert uzayındaki çözümü olan enerji değerlerinin tesbiti için $U(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} v(x)$ dönüşümü kullanılırsa, $\frac{d^2v}{dx^2} - 2x\frac{dv}{dx} + (\lambda_h - 1)v = 0$ Hermite diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümleri Hermite polinomları olup $H_n = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$ (n=1,2,..) şeklinde ifade edilirler. Burada $\lambda_n = 2n+1$ (n=0,1..) dir. Sonuçlardan, enerji seviyelerine karşı düşen özdeğerler $\lambda_n = \frac{\omega_0 h}{4\pi}(2n+1) = h\upsilon\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ve öz fonksiyonlar ise $U_n(x) = H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}}$ olacaktır.

Bu çalışmada ise, Harmonik olmayan osilatör problemi için yukarıda belirtildiği üzere, spektruma karşı gelen enerji seviyeleri gibi fiziksel durumların oldukça iyi bir yaklaşım ile tesbiti yapılacaktır. İşlemler, aşağıdaki diferansiyel ifade ile $u(x) \in L^2(-\infty,\infty)$ verilen diferansiyel özdeğer probleminin çözümü neticesinde sağlanacaktır.

$$-u'' + x^2 u + x^4 u = \lambda u$$

Hesaplamalar gerçekleştirilirken burada bahsedilen harmonik osilatörün analitik olarak tesbit edilmiş yapısından gerek taban operatör teşkilinde, gerekse uzayı geren baz ihtiyacında faydalanılacaktır.

3.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez konusu ile ilgili olduğu düşünülen bazı kavram ve teoremler bir bütünlük içerisinde verilmeye çalışılacaktır. Bu çerçevede yapılan tanım ve ifadeler için fonksiyon uzayları olarak Hilbert uzayları alınacaktır.

Hilbert uzayı, üzerinde bir iç çarpımın tanımlandığı tam uzay (Uzaydan alınan her Cauchy dizisi ilgili metriğe göre aynı uzayın içinde bir noktaya yakınsak) dır.

Eğer bir H Hilbert uzayı, her yerde yoğun, sayılabilir bir alt küme içeriyorsa bu Hilbert uzayına ayrılabilir Hilbert uzayı denir.

H kompleks Hilbert uzayı olsun. T operatörü ise T :H→H şeklinde lineer bir operatör olarak tanımlansın;

Eğer T operatörünün tanım kümesi D(T)'den alınan her x elemanı için $\langle Tx, x\rangle \geq k_a \|x\|^2$ şartını sağlayacak k_a skaleri mevcut ise T operatörüne alttan sınırlı, $\langle Tx, x\rangle \leq k_u \|x\|^2$ şartını sağlayacak k_u skaleri mevcut ise T operatörüne üstten sınırlıdır denir.

T operatörünün sürekliliği, $x_0, x_n \in H$ için $\lim_{n\to\infty} x_n \to x_0$ oluyorken H deki görüntüleri içinde $\lim_{n\to\infty} Tx_n \to Tx_0$ olması sartı ile ifade edilir. Bir lineer T operatörü sürekli ise aynı zamanda da sınırlıdır.

İlgili iç çarpıma göre tüm $x, y \in H$ için $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T operatörünün eşleniği denir. Eğer T=T^* ise T operatörüne kendi kendine eş operatör denir.. Eğer T operatörü sınırsız bir operatör ise T operatörünün eşleniği T^* mevcut olabilmesi için tanım kümesi D(T)'yi H da yoğun bir alt küme olarak almak gerekecektir. Bu ise $T \subset T^*$ (T^* T operatörünün genişlemesi) dir. Bu şartlar altında $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ oluyorsa T operatörüne simetrik operatör denir. Her kendi kendine eş operatör (T=T^*) simetrik operatördür. Fakat bunun tersi özellikle sınırlı olmayan operatörler için her zaman doğru değildir. Eğer T operatörü kendi kendisine eş bir operatör ve λ skaleri T operatörünün bir özdeğeri ise bu reel olmak zorundadır. Yine kendi kendine eş operatörlerin ayrık özdeğerlerine ait özvektörleri iligili iç çarpıma göre bir birine dik sistem oluştururlar. (Gohberg ve Goldberg,1969)

İlgili iç çarpıma göre tüm $x \in H$ için $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ ile gösterilir. Pozitif operatörlerin toplamı da pozitiftir. Eğer tüm $x \neq 0$ için $\langle Tx, x \rangle > 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif tanımlı operatör denir. Pozitif ve pozitif tanımlılıktan bahsetmek için $\langle Tx, x \rangle$ reel olmak durumundadır. Kolayca görülebileceği üzere pozitif T operatörü ilave olarak da simetrik bir operatördür.

T simetrik operatörü için, her $u \in D(T)$ $\langle Tu, u \rangle \geq \gamma^2 \|u\|^2$ şartı sağlanıyor ise T operatörüne alttan pozitif sınırlıdır denir. Burada γ pozitif skalerdir. Pozitif alttan sınırlı bir operatör aynı zamanda pozitif tanımlı olabilir.Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir.

Eğer T operatörü H daki her sınırlı (x_n) dizisini, içinden yakınsak bir alt dizi seçilebilen (Tx_n) dizisine dönüştürüyorsa T operatörüne kompakt operatördür denir. Kompakt operatörlerin özelliklerinin sonlu boyutlu uzaylarda tanımlı operatör özelliklerine yakınlığı bu operatörlerin önemini artırmıştır. Bir kompakt T operatörünün özdeğerler kümesi sayılabilir (muhtemelen sonlu veya boş olabilir)dir. Muhtemel yığılma noktası ise sıfırdır.

T_1 ve T_2 simetrik lineer operatörler olsun. Eğer bu iki operatörün tanım kümeleri arasında $D(T_1) \supset D(T_2)$ bağıntısı ile tüm $u \in D(T_2)$ için $\langle T_1 u, u \rangle \leq \langle T_2 u, u \rangle$ şartı sağlanıyorsa T_1 operatörü T_2 operatöründen küçük veya eşittir denir ve $T_1 \leq T_2$ şeklinde gösterilir.

H Hilbert uzayı olsun. T operatörü ise tanım kümesi $D(T) \subset H$ olan $T{:}D(T) \to H$ lineer bir operatör olsun. I birim operatör ve λ komplex bir skaler olmak üzere yine D(T) de $T_\lambda = T - \lambda I$ ile temsil edilen T operatörüne ait yeni bir operatör tanımlamak mümkündür. Eğer $R_\lambda(T)$ ile gösterilen T_λ 'nın tüm uzayda tanımlı tersi mevcut ise $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün çözücüsü (resolvent) denir. $R_\lambda(T)$ 'nin özelliklerinin tesbiti T operatörünün analizi bakımından önemlidir. Doğal olarak T_λ ve $R_\lambda(T)$ operatörlerinin özellikleri λ değeri ile yakından ilişkilidir. Spektral teori bu ilişkileri ortaya koyar. Örneğin $R_\lambda(T)$ operatörünü mevcut yapan komplex düzlemdeki λ değerler kümesi, $R_\lambda(T)$ operatörünü sınırlı yapan λ değerler kümesi veya hangi λ değerleri için $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesinin H da yoğun bir küme teşkil ettiği önemlidir. O halde aşağıdaki kümeleri teşkil eden λ değerlerinden bahsedilebilir.

A_m : $R_\lambda(T)$ 'yı mevcut yapan λ değerler kümesi

A_s : $R_\lambda(T)$ 'yı sınırlı yapan λ değerler kümesi

A_y : $R_\lambda(T)$ 'nın tanım kümesinin H 'da yoğun küme oluşturan λ değerler kümesi

Bu üç kümenin kesişimini teşkil eden tüm λ değerler kümesine T operatörünün çözücüsü (resolvent) kümesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. Bu kümenin C kompleks düzleme bütünleyenine T 'nin spektrumu denir ve $\sigma(T)=C-\rho(T)$ ile gösterilir. Ayrıca $\lambda\in\sigma(T)$ şartını sağlayan λ değerine T'nin spektral değeri denir. $\sigma(T)$ ile gösterilen T operatörünün spektrumu da üç küme olarak ortaya çıkar.

Noktasal spektrum: $\sigma_p(T)=\sigma(T)-A_m$ olarak gösterilir.Yani sadece $R_\lambda(T)$ 'yi mevcut yapmayan λ değerler kümesidir.

Sürekli spektrum: $\sigma_c(T)=\sigma(T)-A_s$ olarak gösterilir. Yani T operatörünün spektrumundan $R_\lambda(T)$ operatörünü sınırlı yapan λ değerleri çıkarılıyor.

Kalık spektrum: $\sigma_r(T)=\sigma(T)-(A_y)$ olarak gösterilir. Yani $R_\lambda(T)$ operatörünü mevcut yapan λ değerler kümesi ile yine $R_\lambda(T)$ operatörünü sınırlı yapan λ değerler(Bunlar dahil olabilir veya olmayabilir) kümesinin birleşimidir.

Bu tanımladaki bazı kümeler boş olabilir. Örneğin sonlu boyutlu uzaylarda $\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\phi$ (boş kümedir) dir. Sadece nokta spektrumu $\sigma_p(T)$ mevcuttur. Aşağıdaki ifadeler yukarıdaki dört ayrık kümenin bir birlerine göre durumlarını ortaya koyar;

$C=\rho(T)U\sigma(T)$

$C=\rho(T)U\sigma_p(T)U\sigma_c(T)U\sigma_r(T)$

dir. Bunlara ilave olarak eğer $R_\lambda(T)$ mevcut ise lineerdir.

Eğer $T_\lambda x=(T-\lambda I)x=0$ ifadesi $x \neq 0$ için sağlanıyor ise bu şartı sağlıyan $\lambda \in \sigma_p(T)$ dir. Diğer bir ifade ile bu λ değerine T operatörünün özdeğeri denir. Bu λ değerine karşı gelen $x \neq 0$ vektörüne veya elemanına T 'nin λ 'ya ait özvektörü (Eğer H bir fonksiyon uzayı ise öz fonksiyonu) denir. D(T)'nin alt kümesi olan ve T'nin λ özdeğerine kaşı düşen tüm özvektörler kümesine sıfır elemanının ilavesi ile oluşturulan uzaya da T'nin λ özdeğerine ait öz uzayı denir. (Kreyszig,1978)

Hilbert uzaylarında ise kendi kendisine eş lineer operatörler için $\sigma_r(T)=\phi$ dir. Eğer H sonsuz boyutlu bir uzay ise T operatörü özdeğer olmayan spektral değerlere de sahip olabilir.

3.1 Özdeğerlerin Varlığı ve Ayrıklığı ile İlgili Teoremler

Lineer Cebir'in temel sonuçlarından biri olan spektral teorem, Eğer sonlu boyutlu bir H Hilbert uzayında bir T simetrik operatörü verilmiş $T \in L(H)$ (yani $T: H \to H$ şeklinde) ve $\varphi_1,\varphi_2,....\varphi_n$ elemanları $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ özdeğerlerine karşı gelen ortonormal sistem ise bu durumda T operatörüne ait $(t_{i,j})=(<T\varphi_i,\varphi_j>)$ matrisi;

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. \\ 0 & .. & \lambda_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir köşegen matrisi olur. Bu sonucun ardından bu spektral teorem'in T operatörünün simetrik fakat H Hilbert uzayının artık sonlu olmadığı halde de geçerli olup olmadığı sorusu gündeme gelir. Bir başka deyişle $T\varphi_i=\lambda_i\varphi_i$ (i=1,2..)olacak şekilde H uzayı için sonsuz ortonormal vektörler $\varphi_1,\varphi_2,...$ ve bunlara ait $\lambda_1,\lambda_2,...$ özdeğerlerin mevcut olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Tabi ki bu halde oluşacak matris (eğer mevcut) ise sonsuz boyutlu köşegen matris olacaktır.

Her sonlu boyutlu kompleks Hilbert uzayında tanımlı lineer operatör bir özdeğere sahip olmasına rağmen, sonsuz boyutlu uzayda operatör kendi kendisine eşlenik olsa bile özdeğere sahip olmayabilir.

Örneğin Doğal Lebesque ölçüsüne göre verilmiş $L_2[a,b]$ için, $T: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ tanımlı $Tf(t)=t.f(t)$ şeklinde verilmiş T operatörü, lineer, kendi kendisine eşlenik bir operatör olmasına rağmen hiçbir özdeğere sahip değildir.

Kendi kendisine eşlenik operatörün özdeğeri varsa bu muhakkak reel bir sayıdır.

Kendi kendisine eşlenik operatörün ayrık özdeğerlere ait özvektörleri birbirine ortogonaldir. (Gohberg ve Goldberg,1969)

Eğer $T: H \to H$ kompakt ve kendi kendine eşlenik ise en azından $\|T\|$ veya $-\|T\|$ sayılarından biri T operatörünün özdeğerlerinden biridir.

Kendi kendine eşlenik olmayan kompakt bir operatörün özdeğerinin olması gerekmez. Örneğin $Tf(t)=\int_0^t f(s)ds$ şeklinde verilen Volterra operatörü kompakt olmasına rağmen kendi kendine eşlenik değildir ve hiç bir özdeğere sahip değildir.

T operatörü H Hilbert uzayında kendi kendine eş, genelde sınırsız, negatif olmayan spektruma sahip ($\mathrm{Spek}(T) \subseteq [0,\infty)$) bir operatör olsun. Bu şartlar altında aşağıdaki ifadeler bir birine denktir.

1-) Çözücü (resolvent) operatör $(T+I)^{-1}$ kompaktır.

2-) T operatörünün tüm spektrumu noktasal spektrumdur.

3-) T operatörünün özdeğerleri $\lambda_n \geq 0$ ve $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ (n=1,2,..) şartını sağlar ve bu özdeğerlere ait tam $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ öz fonksiyonlar kümesi mevcuttur. (Davies,1995)

T_1 ve T_2 operatörleri kendi kendine eş ve her birinin özdeğerleri katlılıkları ile beraber;

$$\lambda_1^{T_1} \leq \lambda_2^{T_1} \leq \ldots\ldots\ldots \leq \lambda_n^{T_1} \leq \ldots\ldots\ldots \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{T_1} \to \infty$$

$$\lambda_1^{T_2} \leq \lambda_2^{T_2} \leq \ldots\ldots\ldots \leq \lambda_n^{T_2} \leq \ldots\ldots\ldots \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{T_2} \to \infty$$

şeklinde olsun. Eğer yukarıdaki tanım ile bu iki operatör arasında $T_1 \leq T_2$ eşitsizliği mevcut ise bu halde;

$$\forall i \quad \text{için} \quad \lambda_i^{T_1} \leq \lambda_i^{T_2}$$

dir. (Stakgold,1968)

$-u'' + V(x)u = \lambda u \qquad -\infty < x < \infty$ formundaki diferansiyel özdeğer probleminin V(x) potansiyel fonksiyonunun pozitif tanımlı çarpma operatörü olması durumunda ayrık spektruma sahip olduğu teorik olarak belirlenmiştir. Dolayısı ile ele alınan problem için V(x) bu şartlara haiz bir operatör olduğundan spektrum ayrıktır.

$T = T^* \geq \delta I$ ($\delta > 0$ sabit) ve $T^{-1} \in \Omega_\infty$ (Ω_∞ kompakt operatörler kümesi) ise T operatörünün spektrumu saf ayrıktır denir.

Herbir kompakt operatörün sıfırdan farklı spektrumu yalnızca özdeğerlerden ibaret olup ayrıktır. Ayrıca bu özdeğerlere ait öz fonksiyonlardan tam birim dik sistem seçilebilir

$T = T^* \geq \delta I$ ($\delta > 0$ sabit) şeklindeki bir T operatörünün spektrumunun saf ayrık olması için $\langle T\varphi, \varphi\rangle \leq 1$ ve $\varphi \in D(T)$ şartına haiz φ fonksiyonlarının kompakt küme oluşturması gerek ve yeter şarttır.

4. OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEMSİLİ VE YAPISI

Hilbert uzaylarında lineer, sınırlı ve kendi kendisine eş operatörleri, özellikleri tamamen belirli daha basit iz düşüm operatörler(Projeksiyonlar) cinsinden ifade etmek büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Operatörlerin bu şekilde ifadesine spektral temsil denir. H Hilbert uzayı ve T ise kendi kendisine eş sınırlı lineer operatör olmak üzere $T: H \rightarrow H$ verilsin. T operatörünü, operatörün spektral ailesi olarak bilinen uygun iz düşüm operatörler ailesi ile temsil etmek mümkün olacaktır.

Bu temsil işleminde yine sonlu boyutlu uzaylarla başlamak daha yararlı olacaktır. H olarak her bir bileşeni kompleks sayılar olan n boyulu vektör uzayı C^n ve $T:H \rightarrow H$ lineer kendi kendine eş bir operatör olarak tanımlansın. Uzayın boyutu sonlu olduğundan lineer operatör sınırlı olmak durumundadır. Ayrıca T operatörünü H uzayındaki bir bazı kullanarak yine T ile temsil edilen bir Hermitian matris ile ifade etmek mümkündür. Bu matrisin özdeğerleri matris Hermitian olduğundan reel olup aynı zamanda T operatörünün spektrumunu oluşturur. Kolaylık açısından T matrisinin n adet bir birinden farklı $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ özdeğeri olsun. Bu özdeğerlere ait n adet birim dik (orthonormal) özvektör ailesi ise $x_1,x_2,....x_n$ ile temsil edilsin. Özvektörler ailesi H uzayı için bir baz teşkil ederler. O halde her $x \in H$ için aşağıdaki şekilde tek bir ifade tarz'ı mevcuttur.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \tag{4.1}$$

Burada x_i 'lerin birim dik oluşu kullanılır ise $\alpha_i = \langle x, x_i \rangle = x^T \overline{x_i}$ (i=1,2...n) elde edilir. Yukarıdaki ifade de x_i 'lerin aynı zamanda T 'nin özvektörleri oldukları, diğer bir deyişle ile $Tx_i=\lambda x_i$ olduğu gerçeği eşitliğin her iki tarafına T operatörü tatbiki sonunda dikkate alınırsa;

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Tx_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \tag{4.2}$$

olur. Gerçekte T operatörü x elemanına karmaşık bir formda uygulanacakken, yukarıdaki toplamda her bir terime çok daha basit bir şekilde uygulanma kolaylığına kavuşmuş olacaktır. Bu işlem $H=C^n$ de lineer bir operatörün analizinde özvektörlerin kullanılması avantajını gözler önüne sermektedir.

Yukarıdaki veriler ışığında aşağıdaki şekilde P_j iz düşüm operatörleri tanımlamak mümkündür.

$$P_j: H \to H \qquad (4.3)$$
$$x \to \alpha_j x_j$$

Bu şekilde tanımlanan P_j operatörünün, H Hilbert uzayının, T operatörünün λ_j 'özdeğerine ait öz uzayına bir dik izdüşüm operatörü olduğu açıktır. (4.1) ifadesi yeniden düzenlenirse;

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_j x \qquad (4.4)$$

olur. Buradan I operatörü H uzayında birim operatör olmak üzere $I = \sum_{j=1}^{n} P_j$ olur.

Neticede (4.2) formülünden ;

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x \quad \text{ve buradan da} \quad T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \qquad (4.5)$$

elde edilir. Bu temsil ise, T operatörünün P_j iz düşüm operatörleri cinsinden ifadesidir. Bu sonuç ayrıca T operatörünün spektrumunun yine bu operatörün oldukça basit operatörler ile temsil edilmesindeki işlevini gözler önüne sermektedir. Tüm bu basit sonuçlara karşın bu gösterilim sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarına bu haliyle taşınamamaktadır. Çünkü bu halde sınırlı lineer kendi kendine eş operatörün spektrali daha karmaşık bir yapıda ortaya çıkabilmektedır. Şimdi sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarına genelleme imkanı verecek yeni tanımlamalar yapalım.

Yukarıdaki $P_1, P_2, \ldots P_n$ iz düşüm operatörleri yerine bir kurala göre bu operatörlerin toplamları ile teşkil edilen operatörler alınacaktır. Daha açık olarak herhangi bir λ reel değeri için ;

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_j < \lambda} P_j \qquad \lambda \in R \tag{4.6}$$

operatörler zinciri teşkil edilecektir. Bu yapıya parametresi λ olan tek parametreli iz düşüm operatörleri ailesi denir. (4.6) ifadesinden E_λ izdüşüm operatörü $\lambda_j \leq \lambda$ şartını sağlıyan T operatörünün özdeğerlerine karşı gelen ve V_λ ile temsil edilen öz uzayların birleşimine dik izdüşüm operatörü olduğu görülür. Burada E_λ 0 dan I birim operatörüne kadar büyüyen bir operatördür. Ayrıca E_λ operatörü özdeğer içermeyen herhangi bir aralıktaki λ değeri için aynı kalmaktadır. Bu sonuçlardan aşağıdaki ifadelere varılabilir;

$$\begin{aligned} &\text{Eğer } \lambda<\mu \text{ ise} \quad E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda \\ &\text{Eğer } \lambda<\lambda_1 \text{ ise} \quad E_\lambda = 0 \\ &\text{Eğer } \lambda \geq \lambda_n \text{ ise} \quad E_\lambda = I \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$E_{\lambda+0} = \lim_{\mu \to \lambda+0} E_\mu = E_\lambda$$

dır. Burada $\mu \to \lambda + 0$ ifadesinin anlamı μ'nün λ'ya sağdan yaklaşmasıdır. Neticede reel spektral aile (birimin reel ayrıştırılması) , H Hilbert uzayında tanımlı tek parametreye bağlı aşağıdaki özelliklere haiz $\{E_\lambda\}_{\lambda \in R}$ iz düşüm operatörler ailesidir.

$$\lambda<\mu \text{ ise} \quad E_\lambda \leq E_\mu \quad \text{buradan } E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$$

dir.

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0 \qquad \lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda x = x \tag{4.8}$$

$$E_{\lambda+0} x = \lim_{\mu \to \lambda+0} E_\mu x = E_\lambda x \qquad (x \in H)$$

Tüm bu tanımlardan bir reel spektral aileyi aşağıdaki dönüşüm ile de ifade etmek mümkündür.

$$R \to B(H,H)$$
$$\lambda \mapsto E_\lambda$$

burada B(H,H) H dan H 'ya tüm lineer sınırlı operatörler uzayını temsil etmektedir. Bu ifade ise her $\lambda \in R$ için bir $E_\lambda \in B(H,H)$ iz düşüm operatörünün varlığı anlamına gelir. Eğer $\lambda \leq a$ için $E_\lambda = 0$ ve $\lambda \geq b$ için $E_\lambda = I$ olacak şekilde bir [a,b] aralığında yukarıdaki özelliklere haiz bir yapı mevcut ise buna da [a,b] aralığında spektral aile denir. Sınırlı lineer operatörlerin spektrumu reel eksende sonlu bir aralıkta bulunacağından bu son tanım önemlidir.

Yukarıdaki şekilde tanımlanan spektral aile ile yine T operatörünü kendisinin spektrumundan faydalanarak ifade etmek mümkündür. Bu ifade tarzı sonsuz boyuta geçişte bir kolaylık da sağlayacaktır. Yine T operatörüne ait $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ özdeğerleri kolaylık temini için $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ olarak kabul edilsin. Ardından;

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= P_1 \\ E_{\lambda_2} &= P_1 + P_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_{\lambda_n} &= P_1 + P_2 + \ldots\ldots P_n \end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Tersine olarakta;

$$\begin{aligned} P_1 &= E_{\lambda_1} \\ P_j &= E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}} \end{aligned} \qquad j=1,2,\ldots n$$

E_λ λ için $[\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ aralığında aynı kaldığından $P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-0}}$ olur. Sonuçta x elemanı için;

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_j x = \sum_{j=1}^{n} (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-0}})x \tag{4.10}$$

olur. Yine Tx ifadesi de;

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-0}})x \tag{4.11}$$

olur. Eğer x elemanları eşitlikten kaldırılır ve $\delta E_{\lambda_j} = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-0}}$ olarak alınırsa;

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta E_{\lambda_j} \tag{4.12}$$

olur. Son ifadeye n boyutlu Hilbert uzayı H da tanımlı özdeğerleri $\lambda_1<\lambda_2<....\lambda_n$ olan lineer kendi kendine eş T operatörün spektral temsili denir. Bu temsilden her $x, y \in H$ için ;

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \delta E_{\lambda_j} x, y\rangle$$

dir. Bu son ifade Riemann-Stieltjes integrali olarak da aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dw(\lambda) \tag{4.13}$$

Burada $w(\lambda)=\langle E_\lambda x, y\rangle$ dir.

Bu elde edilen sonuç sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarında kendi kendine eş operatörler içinde geçerlidir. Bu temsilin sonsuz boyutlu uzaylara genellemesini bozan bazı haller mevcuttur. Bunlardan en önemlisi $H \neq \{0\}$ Hilbert uzayında tanımlı T operatörünün özdeğere sahip olmayabileceği ihtimalidir. İntegral temsili nokta spektrumunun yanında sürekli spektrumun mevcut olduğu haller içinde geçerlilik taşıması bakımından daha geneldir. (Simmons,1963)

Bu aşamada, şu ana kadar verilen spektral yapı hakkındaki kavram ve tanımların operatörün kendi kendine eş olması durumu dikkate alınacaktır. İncelenecek metodlarda ve problemdeki operatörün de bu yapıda olması itibarı ile bu bölüm biraz daha yoğun olarak işlenecektir.

Kendi kendine eş T operatörü için spektral temsil yukarıda ifade edilmiştir. Yine bu operatöre ait tanım kümesi;

$$D(T)=\left\{ f\in H \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\left(\|E_\lambda f\|^2\right)<\infty \right\} \tag{4.14}$$

şeklinde de verilebilir.(Bazley,1961) Eğer verilen bir T operatörüne ait $\{E_\lambda\}$ dik iz düşüm operatörler ailesi tesbit edilebiliyor ise T operatörüne ait özdeğer problemi çözülebilirdir.

C ile kompleks düzlem temsil edilsin. T operatörüne ait çözücü (resolvent) küme $\rho(T)$, H Hilbert uzayında $(T-\lambda I)^{-1}$ operatörünü sınırlı bir dönüşüm yapan tüm λ özdeğerler kümesidir. Bu kümenin kompleks düzlemdeki tümleyenine T operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. T operatörünün spektrumunun bölümleri temel kavramlar başlığı altında verilmiştir. Bu bölümlerden olan noktasal spektrum tanımı $Tu=\lambda u$ ifadesinin sıfırdan farklı çözümünü temin eden λ değerleri olarak da verilir. Noktasal spektruma, ilgili operatörün özdeğerleri denmektedir. Kendi kendine eş operatörler için bu tanımlara ilave olarak aşağıdaki teoremler verilir;

- T operatörüne ait $\rho(T)$ resolvent küme C'de açık bir kümedir. Dolayısı ile tümleyeni olan T operatörünün $\sigma(T)$ spektrumu kapalıdır.

- Resolvent küme $\rho(T)$, C 'deki tüm reel olmayan ve E_λ operatörünün sabit kaldığı açık aralıktaki tüm λ değerlerinden oluşan kümedir.

- Nokta spektrumu $p\sigma(T)$ ise E_λ operatörünün sıçramaya sahip olduğu $E(\lambda_i)$ λ_i reel değerlerine sahip olduğu sayılabilir bir kümedir. Burada

$$E(\lambda_i)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(E_{\lambda_i}-E_{\lambda_i-\varepsilon}\right) \tag{4.15}$$

dir. Şimdi muhtemelen boş küme olabilecek reel sayılardan oluşan ve

$$c\sigma(T)=C-(\rho(T)+p\sigma(T))$$

şeklinde verilen bu kümeye T operatörünün sürekli spektrumu denir. Bu küme keyfi ε değeri için $E_{\lambda+\varepsilon} \neq E_{\lambda-\varepsilon}$ şartı yanında $E_\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} E_{\lambda-\varepsilon}$ şartınıda sağlayan λ değerlerine bulundurmak durumundadır.

Bir diğer küme ise yine $c\sigma(T)$ kümesine ait λ değeri fakat keyfi komşuluğunda nokta spektrumu $p\sigma(T)$ kümesinden sonsuz sayıda nokta ihtiva eden noktalardan oluşsun. Yani bu küme nokta spekrumunun sürekli spektrumda olan limit noktalarından oluşacaktır. Bu kümede $c_1\sigma(T)$ ile gösterilsin. O halde $c_1\sigma(T)$ kümesi kendileri T operatörünün öz değeri olmadığı halde özdeğerlerin limit noktalarından oluşur. Yeni bir küme olarak da $c_2\sigma(T)$ $=c\sigma(T)-c_1\sigma(T)$ kümesini dikkate alalım. Eğer λ_0 bu kümenin elemanı ise λ_0'ın içinde olduğu öyle bir aralık vardır ki burada E_λ süreklidir.

Bir T operatörü hiçbir özdeğere sahip değil ise bu operatörün spektrumuna saf sürekli spektrum denir. Bu halde spektrum $c_2\sigma(T)$ dir.

E operatörü $E=\sum_i E(\lambda_i)$ şeklinde verilsin. Bu operatör her E_λ operatörü ile yer değiştirebilir(permute) edebilir. H_p=EH ve H_c=(I-E)H alt uzayları T operatörünü indirger. Bu işlem sonucunda T operatörünün T_p ve T_c operatör parçalarının her biri kendi kendine eş operatörlerdir.

T_p ve T_c kendi kendine eş operatör parçalarının spektrumlarına yakından bakalım. E operatörü E_λ ile yer değiştirebildiğinde EE_λ ve $E_\lambda E$ iz düşüm operatörleri olacaktır. Tamamen benzer gerekçeler ile $E_\lambda(I-E)$ ve $(I-E)E_\lambda$ operatörleri de iz düşüm operatörleri olacaktır. H Hilbert uzayına ait herhangi bir f elemanı için;

$$E_\lambda f=EE_\lambda f + (I-E)E_\lambda f \tag{4.16}$$

dir. $u \in D(T_p) = D(T) \cap H_p$ olsun. Yukarıdaki eşitlikten $E_\lambda u = EE_\lambda u$ ve $Tu = T_p u$ dir. O halde T_p operatörünün spektral temsili $T_p u = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(EE_\lambda)u$ olur. Gerçekten de EE_λ operatörü bir operatöre ait birimin parçalanışındaki şartları sağlar;

$\lambda \to \infty$ için $EE_\lambda = E_\lambda E \to I$ ve $\lambda \to -\infty$ için ise $EE_\lambda = E_\lambda E \to 0$ dır.

$[\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0]$ için $EE_{\lambda+\varepsilon} \to EE_\lambda$, ve $\lambda \leq \mu$ için $(EE_\lambda)(EE_\mu) = EE_\lambda$

O halde T_p operatörüne ait birimin parçalanışı sağlayan spektral aile $\{E_\lambda^p\} = \{EE_\lambda\}$ dır. Benzer şekilde T_c operatörüne ait birimin parçalanışı da temin edilebilir. Bazley (1961) tarafından kullanılan tanımlama ve yapılar ile;

$p\sigma(T) = p\sigma(T_p)$ ve $c_1\sigma(T) = c_1\sigma(T_p)$

sonuçlarına varılır. Yani T operatörü ile T_p operatörü aynı özdeğerlere ve bunların limit noktalarına sahiptir. Diğer sonuçlar ise;

$p\sigma(T_c) = 0$, $c_1\sigma(T_c) = 0$, $c_2\sigma(T) = 0$

dır. Diğer bir deyişle T_c 'nin spektrumu saf süreklidir. (Bazley,1961)

Bu aşamaya kadar yapılan kendi kendine eş T operatörünün spektral analizi tez içinde kullanılacak ve analizi yapılacak ara problemlerin spektrumunun tesbitinde önemli bir yer tutacaktır.

5. RAYLEIGH-RITZ METODU ANALİZİ VE PROBLEME UYGULAMASI

Bu bölümde özdeğer problemlerinin varyasyonel analizine ait teori ve uygulamalarda önemli bir metod olan Rayleigh Ritz metodunun incelemesi yapılacaktır. Bu inceleme kendi kendine eş, alttan sınırlı ve ayrık spektruma sahip T operatörü üzerinde gerçekleştirilecektir. T operatörüne ait $Tu=\lambda u$ $u \in D(T)$ şeklinde verilen özdeğer promleminin çözümü için;

$$R(u) = \frac{\langle Tu, u \rangle}{\|u\|^2} \qquad u \neq 0 \tag{5.1}$$

şeklinde ifade edilen ve Rayleigh Oranı olarak bilinen fonksiyonelden faydalanılır. R(u) fonksiyonelinin stasyoner noktaları T operatörünün u_k (k=1,2...n) öz fonksiyonları olmaktadır. Bu fonksiyonlar için fonksiyonelin değerleri $R(u_k)=\lambda_k$ (k=1,2...n) özdeğerler olarak ortaya çıkar. Bu önemli neticenin eldesi için $u=u_n+\varepsilon v$ alınsın. Burada u_n T operatörünün öz fonksiyonunu temsil etmektedir. Ayrıca ε istenildiği kadar küçük alınabilen bir değerdir. H reel Hilbert uzayı olmak üzere, T operatörünün kendi kendisine eş ve u_n fonksiyonunun da T operatörünün öz fonksiyonu olduğu dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{\lambda_n\langle u_n, u_n\rangle + 2\varepsilon\lambda_n\langle u_n, v\rangle + \varepsilon^2\langle v, Tv\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle + 2\varepsilon\langle u_n, v\rangle + \varepsilon^2\langle v, v\rangle} \\ &= \lambda_n + \frac{\varepsilon^2\{\langle v, Tv\rangle - \lambda_n\langle v, v\rangle\}}{\langle u_n, u_n\rangle + 2\varepsilon\langle u_n, v\rangle + \varepsilon^2\langle v, v\rangle} \end{aligned} \tag{5.2}$$

ifadesi elde edilir. (5.2) ifadesine göre, öz fonksiyonlardaki hata yani, u ile u_n arasındaki ilgili norm'a göre fark, ε mertebesinde ortaya çıkarken, özdeğerlerdeki hata, diğer bir ifade ile, R ile λ_n arasındaki ilgili norm'a göre fark, ε^2 mertebesinde olmaktadır. Dolayısı ile u fonksiyonu u_n özfonksiyonuna yaklaştıkça R(u) fonksiyoneli stasyoner bir davranış sergilemektedir. (Friedman,1956)

Yukarıdaki ifadenin tersi de doğrudur. Eğer R(u) fonksiyoneli u=w da stasyoner ise w fonksiyonu T operatörünün öz fonksiyonudur. Bu sonucu görmek için u=w+εv ifadesi R(u) fonksiyonelinde yerine konursa;

$$R(u)=\frac{\langle T(w+\varepsilon v),(w+\varepsilon v)\rangle}{\langle (w+\varepsilon v),(w+\varepsilon v)\rangle}=\frac{\langle Tw+\varepsilon Tv, w+\varepsilon v\rangle}{\langle w+\varepsilon v, w+\varepsilon v\rangle}$$

$$=\lambda+\frac{\langle Tw-\lambda w,w\rangle+2\varepsilon\langle Tw-\lambda w,v\rangle+\varepsilon^2\langle Tv-\lambda v,v\rangle}{\langle w+\varepsilon v,w+\varepsilon v\rangle} \tag{5.3}$$

olur. Son ifade de λ keyfi bir sabittir. Varyasyonun diğer bir tanımı gereğince R(u) fonksiyoneli için $\left.\frac{\partial R(u)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$ şartını sağlayan değerler stasyoner noktalardır. O halde yukarıdaki R(u) fonksiyoneline bu işlem uygulanırsa $\langle Tw-\lambda w, v\rangle=0$ olur. Bu son eşitlik T 'nin tanım kümesindeki her v değeri için geçerli ve $\overline{D(T)}=H$ olduğunda Tw-λw=0 dır. Neticede w fonksiyonu T operatörünün özfonksiyonu ve λ skaleri ise buna ait özdeğer olacaktır. Genel olarak u_k 'lar bilinmediğinden bu fonksiyonelin de sürekli oluşu da kullanılarak u_k öz fonksiyonlarına yakın fonksiyonlar kurmak suretiyle λ_k değerlerine yakın değerler elde edilir. Bu yaklaşım tarzı Rayleigh-Ritz metodunun esasını oluşturur.

T operatörü kendi kendine eş, saf ayrık spektruma sahip (spektrumu sadece sonlu katlı noktasal spektrumdan ibaret) lineer bir operatör ve λ_1 ise operatöre ait en küçük özdeğer ise R(u) fonksiyonelinin minimumu λ_1 dir ve bu minimum değer λ_1 özdeğerine karşılık gelen $u=u_1$ öz fonksiyonunda alınır.

Bu ifadenin ispatı için kendi kendine eş, lineer T operatörünün özdeğerleri, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \ldots$ şeklinde sıralansın. Yine bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar da $u_1,u_2,\ldots$ şeklinde olup operatörün tanım kümesini geren bir ortonormal baz teşkil etsin. O halde;

$\forall\ u \in D(T)$ için $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ dir.

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k u_k \tag{5.4}$$

dir. Öz fonksiyonların dik oluşları özelliği kullanılırsa;

$$\langle Tu, u \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 = \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) c_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \lambda_1 \langle u, u \rangle \tag{5.5}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$R(u) = \frac{\langle Tu, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \geq \lambda_1 \tag{5.6}$$

dir.

N boyutlu Euclidean E_n uzayında R(u) fonksiyoneli için $u_1, u_2, \ldots u_n$, T operatörünün öz fonksiyonları ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_s$ $(s \leq n)$ bu fonksiyonlara karşı gelen özdeğerler olmak üzere aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$\lambda_1 = \min\limits_{u \in E_n} R(u)$ dir. Bu minimum değer ise $u = u_1$ de alınır. (5.7)

$\lambda_n = \max\limits_{u \in E_n} R(u)$ dir. Bu maksimum değer ise $u = u_n$ de alınır. (5.8)

Bu sonuçların ispatı için $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ ve $c_i = \langle u, u_i \rangle$ alınarak ilgili ifadeler kurulur ve bu değerler R(u) fonksiyonelinde yerine konursa;

$$Tu=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i u_i\ ,\ \langle Tu,u\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|c_i|^2 \text{ ve } \|u\|^2=\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2 \quad u\neq 0 \text{ için}$$

$$R(u)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|c_i|^2}{\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2} \tag{5.9}$$

olur. $\lambda_1\leq\lambda_i$ ve $\lambda_i\leq\lambda_n$ olduğundan $\lambda_1\leq R(u)\leq\lambda_n$ olur. Bunlara ilave olarak da $R(c_1u_1)=\lambda_1$ ve $R(c_nu_n)=\lambda_n$ dir. Bu sonuçlar sonsuz boyutlu Hilbert uzayları için de $Tu=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\lambda_i u_i$ alınması ile geçerli olduğu gösterilebilir. Sonuçlardan faydalanılarak T operatörünün k. özdeğeri ($k\leq n$) λ_k ve M_k da $u_1,u_2,\ldots u_k$ 'nın gerdiği alt uzay olmak üzere;

$\lambda_k=\min\limits_{u\in M_{k-1}^{\perp}} R(u)$ dir. Minimum değer $u=u_k$ da alınır. (5.10)

$\lambda_k=\max\limits_{u\in M_k} R(u)$ dir. Maksimum değer $u=u_k$ da alınır. (5.11)

dir. Bu ifadeler alt uzayların operatörün öz fonksiyonları tarafından gerilmesi kabulu ile elde edilmişlerdir. Diğer bir deyişle öz fonksiyonların tümünün bilindiği kabulu ile k. özdeğer hesaplanması yapılmıştır. Bu ise özdeğerlerin hesaplanması açısından pratik bir yol değildir. Bir operatörün özdeğerlerinin hesaplanmasını öz fonksiyonların bilinmesinden bağımsız hale getirmek için genel olarak minimax veya maximin prensibleri olarak bilinen aşağıdaki ifadelerden faydalanılır. (Stakgold,1968)

Minimax teoremine göre; E_k uzayı E_n n boyutlu Euclidean uzayının k boyutlu ($k\leq n$) alt uzayı olmak üzere;

$$\lambda_k=\min_{\substack{E_k\text{'ın}\\ \text{tüm seçimleri}}}\ \max_{u\in E_k} R(u)=\min_{\substack{E_k\text{'ın}\\ \text{tüm seçimleri}}}\ \max_{u\in E_k}\frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|^2} \qquad u\in E_k\backslash\{0\} \tag{5.12}$$

dir.

Maximin teoremine göre; E_k uzayı E_n n boyutlu Euclidean uzayının k boyutlu ($k \leq n$) alt uzayı olmak üzere;

$$\lambda_k = \max_{\substack{E_{k-1}\text{'in} \\ \text{tüm seçimleri}}} \min_{u \in E_{k-1}^{\perp}} R(u) = \max_{\substack{E_{k-1}\text{'in} \\ \text{tüm seçimleri}}} \min_{u \in E_{k-1}^{\perp}} \frac{\langle Tu, u \rangle}{\|u\|^2} \qquad u \in E_k \setminus \{0\} \tag{5.13}$$

dir. Bu yapının Hilbert uzaylarına genellemesi ise yukarıda adı geçen k boyutlu uzayın $D(T) \supset E_k$ şartını sağlaması kabulu ile yapılır. (Stakgold,1968)

Rayleigh-Ritz metodunda, tanım kümesi D(T) ile verilen T operatörüne ait $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ilk n adet özdeğere yine T operatörünün D(T) 'nin alt kümesi olan n boyutlu E_n alt kümesine daraltılmış formuna ait hesaplanan $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ özdeğerlerinden faydalanılarak bir yaklaşım sergilenir. T operatörünün E_n alt uzayına daraltılması işlemi için E_n uzayına iz düşüm operatörü P 'den faydalanılır. O halde T operatörünün E_n daraltılmış formu PT olur. Bunun sonucu olarak PT 'nin $\{\mu_i\}$ özdeğerleri

$$PTu = \mu u \qquad u \in E_n \tag{5.14}$$

şeklinde verilir. Minimax prensibine göre F_k D(T)'nin k boyutlu ($k \leq n$) alt uzayı olmak üzere ;

$$\lambda_k = \min_{\substack{F_k\text{nıı} \\ \text{herseçimi}}} \max_{u \in F_k} \frac{\langle Tu, u \rangle}{\|u\|^2} \leq \min_{F_k \subset E_n} \max_{u \in F_k} \frac{\langle Tu, u \rangle}{\|u\|^2} = \min_{F_k \subset E_n} \max_{u \in F_k} \frac{\langle Tu, Pu \rangle}{\|u\|^2}$$

$$= \min_{F_k \subset E_n} \max_{u \in F_k} \frac{\langle PTu, u \rangle}{\|u\|^2} = \mu_k \qquad u \in E_k \setminus \{0\} \tag{5.15}$$

dir. Neticede;

$$\lambda_k \leq \mu_k \qquad k=1,2,...n \tag{5.16}$$

olur. $\{\mu_k\}$ değerlerinin hesaplanması için $PTu=\mu u$ eşitliği aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\langle PTu, v_j \rangle = \mu \langle u, v_j \rangle \qquad j=1,2,...n \tag{5.17}$$

Burada $v_1, v_2, ... v_n$ E_n için bir bazdır. $PTu=\mu u$ ifadesinin çözümü $u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ formunda olacaktır. Sonuç olarak;

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \langle Tv_i, v_j \rangle = \mu \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v_i, v_j \rangle \qquad j=1,2...n \tag{5.18}$$

olur. Bu ifadeden $c_1, c_2, ... c_n$ bilinmeyenlerine ait n adet lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Sıfırdan farklı bir çözümün elde edilmesi için elemanları $\left(\langle Tv_i, v_j \rangle - \mu \langle v_i, v_j \rangle\right)$ olan katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu determinant eşitliğinden n adet $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n$ gerçek özdeğerlere üst sınırlar tesbit edilmiş olur.

Rayleigh-Ritz Metodu için sayısal hesaplara uygun bir başka yaklaşım ise öz fonksiyonları, operatörün tanımlı olduğu uzayı geren baz fonksiyonların lineer birleşimi olarak önerilmesidir. Daha açık bir ifade ile $u = u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ olarak alınır. Burada a_k (k=1,2..n) hepsi aynı anda sıfır olmayan skaler değerler ve φ_k (k=12,..) fonksiyonları, koordinat fonksiyonları olarak bilinen uzayı geren baz fonksiyonlarıdır. Bu koordinat fonksiyonları dizisinin aşağıdaki özellikleri sağlaması beklenir; (Mikhlin,1964)

1-) Bu fonksiyonlar ilgili operatörün tanım kümesinden olsunlar.

2-) Enerji norm'una göre tam bir sistem olsunlar.

3-) Keyfi n değeri için lineer bağımsız bir yapı oluştursunlar.

Bu tesbit $\langle Tu, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k T\varphi_k, \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m \right\rangle = \lambda\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m \right\rangle \qquad (5.19)$$

olur. Aşağıdaki şekilde bir $\Phi(\lambda, a_1, a_2, \ldots a_n)$ fonksiyoneli tanımlayalım;

$$\Phi(\lambda, a_1, a_2, \ldots a_n) = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k T\varphi_k, \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m \right\rangle - \lambda\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m \right\rangle \qquad (5.20)$$

Bu ifade ise;

$\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m \right\rangle = 0$ bağ şartı altında;

$$\left\langle T\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m \right\rangle$$

fonksiyonunun minimumunun Lagrange çarpanları ile bulunması esnasında oluşan ifade olup, yöntem gereği Φ fonksiyonun parametrelerine göre kısmı türevleri alınıp sıfıra eşitleyerek a_k (k=1,2..n) katsayıları tesbit edilmeye çalışılır.Bu işlem gerçekleştirilir ise aşağıdaki son ifade elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[\langle T\varphi_k, \varphi_m\rangle - \lambda\langle \varphi_k, \varphi_m\rangle\right] = 0 \quad m=1,2 \ldots n \qquad (5.21)$$

Bu ifade bir homojen denklem sistemidir. Burada a_k (k=1,2,.. n) ların aynı anda hepsinin birden sıfır olmadığı bir çözümün varlığı için katsayılar determinantının sıfır olması gerekecektir.

$$\begin{vmatrix} \langle T\varphi_1, \varphi_1\rangle - \lambda\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle & \langle T\varphi_2, \varphi_1\rangle - \lambda\langle \varphi_2, \varphi_1\rangle & \ldots & \langle T\varphi_n, \varphi_1\rangle - \lambda\langle \varphi_n, \varphi_1\rangle \\ \langle T\varphi_1, \varphi_2\rangle - \lambda\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle & \langle T\varphi_2, \varphi_2\rangle - \lambda\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle & \ldots & \langle T\varphi_n, \varphi_2\rangle - \lambda\langle \varphi_n, \varphi_2\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle T\varphi_1, \varphi_n\rangle - \lambda\langle \varphi_1, \varphi_n\rangle & \langle T\varphi_2, \varphi_n\rangle - \lambda\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle & \ldots & \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle - \lambda\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle \end{vmatrix} \qquad (5.22)$$

$\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_n$ fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından bu determinant n. dereceden λ'ya ait bir polinom verecektir. Dolayısı ile bu polinomun n adet kökü olacaktır.Bu kökler aranan özdeğerlere karşılık gelir. Eğer bu yapıda φ_k (k=1,2..) koordinat fonksiyonları aynı zamanda birim dik bir yapıyada sahip iseler yukarıdaki determinant ifadesi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\det\begin{vmatrix} \langle T\varphi_1, \varphi_1\rangle - \lambda & \langle T\varphi_2, \varphi_1\rangle & .... & \langle T\varphi_n, \varphi_1\rangle \\ \langle T\varphi_1, \varphi_2\rangle & \langle T\varphi_2, \varphi_2\rangle - \lambda & .... & \langle T\varphi_n, \varphi_2\rangle \\ .... & .... & .... & .... \\ \langle T\varphi_1, \varphi_n\rangle & \langle T\varphi_2, \varphi_n\rangle & .... & \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.23}$$

5.1 Problemin Rayleigh-Ritz Metoduna Uyarlanması

Bu problem için $\varphi_k \in L_2(-\infty, \infty)$ (k=1,2..) alınacaktır. Fonksiyonlar Hermite fonksiyonları ile teşkil edilen fonksiyonlar olarak seçilerek ilgili iç çarpım kullanılarak normalize halde kullanılacaktır. Ayrıca oluşan improper integral hesapları Gauss-Hermite formülü ile 14 nokta alınmak suretiyle nümerik olarak hesaplanacaktır.

Özdeğer problemine ait T operatörü $L_2(-\infty, +\infty)$de ;

$$T[u(x)] = u''(x) + x^2 u(x) + x^4 u(x)$$

şeklinde verilmektedir.

$k=0,1,2..13$

$c_k = \left[2^k\, k!\sqrt{\pi}\right]^{-\frac{1}{2}}$ normalize katsayılar olmak üzere;

$$\varphi_0(x) = c_0.(1).e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\varphi_1(x) = c_1.(2x).e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\varphi_2(x) = c_2.(4x^2 - 2).e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\varphi_3(x) = c_3.(8x^3 - 12x).e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$....$$
$$\varphi_s(x) = c_s.(H_s(x)).e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$...$$
$$... \qquad (5.1.1)$$

fonksiyonları kurulacak olan E_n Rayleigh alt uzayının teşkilinde baz takımları olarak alınır. Burada $H_s(x)$ Ek2'de geniş olarak tanımları ve özellikleri verilen s. Hermite polinomunu ifade etmektedir. Metodu uygulamak amacı ile ilgili determinat elemanları olan $\langle T\varphi_i, \varphi_j\rangle$ ve $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle$ değerleri, yaklaşık integral hesaplaması kullanılarak;

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x).e^{-x^2}dx \qquad (5.1.2)$$

formunda bulunur.

Burada $K(x).e^{-x^2} = \varphi_i(x).\varphi_j(x)$ veya $K(x).e^{-x^2} = T\varphi_i(x).\varphi_j(x)$ değerleri olarak gelirler (i,j=0,1,2,..13). Tüm bu değerler hesaplandıktan sonra (5.23)'de verilen determinant kullanılarak ifade Ax=λx şekline getirilir.

Neticede A artık bir matris ve x ise tesbit edilmeye çalışılan a_1,a_2... şeklindeki elemanlardan oluşan bir sütun vektördür. Bir başka deyişle λ özdeğerine ait öz vektördür.

Bu matris özdeğer problemi ise benzerlik dönüşümü özelliği esasına dayanan QR algoritması ile ardaşıl olarak çözülür ve ilgili özdeğerler ve öz fonksiyonlar tesbit edilir. Tüm bu işlemlerin sonunda bulunan değerler aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Çizelge 5.1 Rayleigh-Ritz metodu ile elde edilen özdeğer üst sınırları

	5 eleman için	8eleman için	11 eleman için	13 eleman için	14 eleman için
1.özdeğer	1.3950746	1.3949165	1.3925704	1.3922877	1.3922877
2.özdeğer	4.9476987	4.6529189	4.6529187	4.6509443	4.6484747
3.özdeğer	10.106865	8.9426925	8.6603776	8.6601761	8.6601761
4.özdeğer	27.565979	14.457657	13.464672	13.2023951	13.2022417
5.özdeğer	44.811108	27.867239	19.3259476	17.7912511	17.7912511
6.özdeğer		41.870952	31.6682537	26.8117448	22.6881611
7.özdeğer		95.716692	44.3280689	32.9485546	32.9485546
8.özdeğer		131.05117	82.3471892	60.1617365	33.8930151
9.özdeğer			108.632568	72.2185158	72.2185158
10.özdeğer			230.602107	138.855119	72.4388365
11.özdeğer			297.567142	161.639783	161.639783
12.özdeğer				371.666554	161.737952
13.özdeğer				423.384195	423.384195
14.özdeğer					423.449699

Çizelgeden de görüldüğü gibi, E_n Rayleigh alt uzayının boyutu büyüdükçe ilgili diferansiyel özdeğer probleme ait spektrumu teşkil eden ilk özdeğerler daha hassas bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Problemin çözümünde, 13 ve 14 elemanlı yapılarda, ilk özdeğerlerde hızlı bir değişim olmadığından işlemler bu aşamda kesilmiştir.

6. BAZLEY METODU ANALİZİ VE PROBLEME UYGULAMASI

Bu metod alttan veya üstten sınırlı, kendi kendine eş operatörlerin özdeğerlerine ait makul alt sınırların tesbit edilmesini sağlar. Metod Weinstein'ın uyguladığı ara problem teşkili ilkesine dayanmaktadır. Weinstein bu çalışmasında spektrumu tamamen belirli taban operatörü olarak isimlendirilen ve gerçek problem ile bağı olan operatörler dizisinden faydalanmıştır. Fakat bu çalışma birinci tip yaklaşım yöntemi olarak kurulmuştur. Ardından Aronszajn ara operatör kavramı ile ara problem teşkili yoluna gitmiştir. Bu yöntem Aronszajn'ın uygulamasında bazı uyarlamalar yapılması ile özdeğer probleminin meromorphic yapı yerine kolayca çözülebilecek cebirsel bir form'a indirgemesini temin edecektir. Dolayısı ile meromorphic fonksiyonun sıfırlarını tesbit etmek yerine, integral hesaplamaları, matris tersi ve matris özdeğerleri hesabı içeren bir işlemler grubu ile uğraşılacaktır. Bu tip işlemler ise bilgisayar kullanılarak kolayca ve istenen hassasiyette hesaplanabilmektedir. (Bazley,1961)

T operatörü ayrılabilir H Hilbert uzayında tanımlı, tanım kümesi D(T) ile temsil edilen, kendi kendine eş ve alttan k_a ile sınırlı bir operatör olarak verilsin. Dolayısı ile $(k_a, \beta] \cap \pi(T) = \phi$ ise T operatörünün noktasal spektrumunun en küçük elemanı k_a dır. (Burada $\pi(T)$ ile T operatörünün limit spektrumu gösterilmektedir.) Ayrıca T operatörü aşağıdaki şekilde parçalanabilsin;

$$T=T^{(0)}+T^{/} \tag{6.1}$$

Burada $T^{(0)}$ operatörü, tanım kümesi $D(T^{(0)})$ ile gösterilen ve özdeğer problemi olarak çözümü mevcut olan kendi kendine eş, alttan k_{a0} ile sınırlı bir operatördür. $T^{/}$ operatörü ise tanım kümesi $D(T^{/})$ olan kendi kendine eş ve pozitif bir operatördür. Bu parçalanmadan $D(T)=D(T^{/}) \cap D(T^{(0)})$ olduğu ortaya çıkar. Yani $D(T) \subset D(T^{(0)})$ ve $D(T) \subset D(T^{/})$ dir.

T ve $T^{(0)}$ operatörlerinin spektrumunun alt kısmı; sonlu katlılıktaki, sonlu bir limit noktasına yakınsayan veya yakınsamayan sayılabilir sayıdaki özdeğerlerden oluşsun.

Bu kabuller ile T operatörünün spektrumunun ilk kısmı T operatörünün nokta spektrumu olan $p\sigma(T)$'nin alt dizisi olacağı açıktır. Bu dizi aşağıdaki gibi azalmayan bir form'da dır.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots.. \qquad (6.2)$$

Operatörlerin spektral temsilinde bahsedilen E_λ iz düşüm operatörü H Hilbert uzayının M_λ alt uzayına iz düşümü sağlasın. Yine bu uzayın boyutu da $\dim E_\lambda$ ile gösterilsin. Yukarıdaki alt dizi bu tanımlar ile;

$$\lambda_i = \{\inf \lambda | \dim E_\lambda \geq i\} \qquad (i=1,2,\ldots) \qquad (6.3)$$

şeklinde de verilebilir. Benzer şekilde, $T^{(0)}$'ın spektrumunun ilk kısmı,

$$\lambda_1^{(0)} \leq \lambda_2^{(0)} \leq \lambda_3^{(0)} \ldots.. \qquad (6.4)$$

şeklinde sıralanabilir. Yine $T^{(0)}$ operatörüne ait birimin çözümlenmesi $E_\lambda^{(0)}$ cinsinden

$$\lambda_i^{(0)} = \{\inf \lambda | \dim E_\lambda^{(0)} \geq i\} \qquad (i=1,2,\ldots) \qquad (6.5)$$

şeklinde verilir. Yukarıda $D(T) \subset D(T^{(0)})$ ve $\forall f \in D(T)$ için $\langle Tf, f\rangle \geq \langle T^{(0)}f, f\rangle$ olduğu kabul edilmişti. Aşağıdaki eşitsizlik tüm limit noktalarının (eğer mevcut ise) altında kalan λ değerleri ve $T^{(0)}$'ın noktasal spektrumu için geçerlidir.

$$\dim E_\lambda \leq \dim E_\lambda^{(0)} \qquad (6.6)$$

Bu son ifadenin ispatı spektral aile açılımından yapılabilir. Son yapılan üç tanımlamadan;

$$\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i \qquad i=1,2,\ldots. \qquad (6.7)$$

olduğu görülür. Bu tanımlamalar ile teşkil edilen $T^{(0)}$ operatörü, taban operatörü olarak isimlendirilir. Bu operatör T operatörü ile ifade edilen özdeğer problemine iyileştirilmemiş alt sınırlar verir.

Bu aşamada T ve $T^{(0)}$ operatörleri ile ifade edilen özdeğer problemleri arasında ara problem operatörler dizisi teşkil edilecektir. Daha sonra elde edilen özdeğer ara problemleri taban operatörü cinsinden çözülecektir. Yukarıda belirtildiği üzere simetrik T' operatörünün tanım kümesi $D(T')$ ile gösterilmektedir. T' operatörünün $D(T')$ tanım kümesinin $\langle T'u, u\rangle^{1/2}$ iç çarpımına(Bu iç çarpıma enerji iç çarpımı da denir.) göre kapanışı H' ile temsil edilsin. Bu uzaydaki iç çarpım ise [u,v] ile gösterilsin. Eğer u ve v elemanları $D(T')$ uzayından elemanlar olmak üzere $[u, v] = \langle T'u, v\rangle$ dir.

$D(T')$ uzayında $p_1, p_2, p_3, \ldots$ lineer bağımsız sonsuz dizisi verilsin. Bu elemanlar ara problemlerin kurulmasında kullanılacaklardır. H'_{Pk} ile H' uzayının yukarıda bahsedilen lineer bağımsız sonsuz dizisinden ilk k adet $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ elemanlarının gerdiği uzayı temsil etsin. Bu yapıya ait Gram determinantı $G=\det[p_i,p_j]=\det\langle T'p_i, p_j\rangle$ (i,j=1,2,..k) pozitifdir.

H' uzayından alınan herhangi bir u elemanının H'_{Pk} uzayına iz düşümü sağlayan operatör $P^{(k)}$ ile ifade edilecektir. O halde c_i 'ler skalerler olmak üzere $\forall u \in H'$ için

$$T'P^{(k)}u = \sum_{i=1}^{k} c_i T'p_i \qquad (6.8)$$

dir. Bu tanımlamda u elemanı H' uzayı yerine $D(T')$ 'den seçilirse, yani uzay biraz daha daraltılırsa;

$$\langle T'P^k u, p_j\rangle = [P^k u, p_j] = [u, p_j] = \langle T'u, p_j\rangle \qquad (6.9)$$

$$\left\langle T'u, p_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i \left\langle T'p_i, p_j \right\rangle \tag{6.10}$$

olur. Üstteki eşitlikten $c_1, c_2, \ldots c_k$ sabitleri

$$c_i = \sum_{j=1}^{k} \left\langle T'u, p_j \right\rangle b_{ij} \qquad i=1,2,\ldots k \tag{6.11}$$

dir. Burada b_{ij}, elemanları $\left\langle T'p_i, p_j \right\rangle$ olan matrisin tersinden elde edilen matrisin elemanlarıdır. Bu ters her zaman mevcuttur. Çünkü ilgili Gram determinantı olan G her zaman pozitifdir.

T' operatörünün simetrikliği kullanılırsa ve u elemanı da H 'dan alınırsa;

$$B^{(k)}u = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\langle u, T'p_j \right\rangle b_{ij} T'p_i \tag{6.12}$$

$B^{(k)}$ operatörü $T'P^{(k)}$ operatörünü $D(T')$ uzayına iz düşürür. Bu operatör sonlu boyutlu olduğundan H üzerinde tanımlı kompakt bir operatördür. İlave olarak $\forall u, v \in H$ için $\left\langle B^{(k)}u, v \right\rangle = \left\langle u, B^{(k)}v \right\rangle$ dir. Yani $B^{(k)}$ operatörü simetriktir. Tüm bu verilerden k. ara problem ait ara operatör;

$$T^{(k)} = T^{(0)} + B^{(k)}, \quad k \geq 1 \tag{6.13}$$

olarak tanımlanır. $T^{(k)}$ operatörü $D(T^{(0)})$ uzayında, sınırlı ve simetrik operatör ile kendi kendine eş bir operatörün toplamı olduğundan kendi kendine eş bir operatör olacaktır. $T^{(k)}$ operatörüne ait birimin ayrışımı operatörü $E_\lambda^{(k)}$ ile gösterilecektir.

T operatörünün kendi kendine eş olduğu kabulu ve $D(T')$ kümesi H 'da her yerde yoğun bir alt küme olduğu dikkate alınırsa, $D(T')$ kümesinden alınan her u elemanı için aşağıdaki temel eşitsizliklere varılır.

$$0 \le \left[P^{(k)}u, P^{k}u\right] \le \left[P^{(k+t)}u, P^{(k+t)}u\right] \le [u,u] \qquad k,t \ge 1$$

$$0 \le \left\langle T'P^{(k)}u, u\right\rangle \le \left\langle T'P^{(k+t)}u, u\right\rangle \le \left\langle T'u, u\right\rangle \qquad k,t \ge 1 \tag{6.14}$$

$B^{(k)}$ operatörü $T'P^{(k)}$ operatörünün $D(T')$ kümesine kısıtlanmasının sürekli genişletilmesi olduğundan $\forall\, u \in H$ için;

$$0 \le \left\langle B^{(k)}u, u\right\rangle \le \left\langle B^{(k+t)}u, u\right\rangle \tag{6.15}$$

dir. Yukarıdaki ifadelerden;

$$\left\langle T^{(0)}u, u\right\rangle \le \left\langle T^{(k)}u, u\right\rangle \le \left\langle T^{(k+t)}u, u\right\rangle \qquad u \in D(T^{(0)}) \tag{6.16}$$

$$\left\langle T^{(k+t)}u, u\right\rangle \le \left\langle Tu, u\right\rangle \qquad u \in D(T) \tag{6.17}$$

bulunur. Bu bağıntılardan sonra taban operatörü $T^{(0)}$ 'ın yardımı ile $T^{(k)}$ operatörü ile ifade edilen ara problemlerin çözümü gerçeklenebilir. Bu çözümden sonra yukarıdaki bağıntılara ilave olarak $T^{(k)}$ ara operatörüne ait özdeğerlerin de sayılabilir sayıda $\lambda_1^k \le \lambda_2^k \le \ldots..$ şeklinde olacağı gösterilecektir. Bunun neticesi olarak da ara problemler ismini ortaya koyan aşağıdaki eşitsizlik elde edilecektir.

$$\lambda_i^{(0)} \le \lambda_i^{(k)} \le \lambda_i^{(k+t)} \le \lambda_i \qquad i,k,t \ge 1 \tag{6.18}$$

Çözümün eldesi için $T^{(0)}$'ın en azından k adet özdeğeri $\lambda_i^{(0)}$ 'larına ait $u_i^{(0)}$ öz fonksiyonlarının T' operatörünün görüntü kümesinde olması şartı gerekecektir. Ara problemlerin çözümü Bazley'in özel seçimi olarak nitelendirilen $p_i = \left(T'\right)^{-1} u_i^{(0)}$ şeklindeki kabul ile kolay bir form'a indirgenecektir. Bu tesbit yukarıdaki $B^{(k)}u$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$B^{(k)}u = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left\langle u, u_j^{(0)}\right\rangle b_{ij} u_i^{(0)} \tag{6.19}$$

elde edilir. Burada b_{ij} değerleri artık elemanları aşağıdaki formda verilen matrisin tersinden elde edilecektir.

$$\left\langle T' p_i, p_j \right\rangle = \left\langle p_j, u_i^{(0)} \right\rangle \quad i=1,2...k \text{ ve } j=1,2...k \text{ dır.} \tag{6.20}$$

Bu ifade, en son $B^{(k)}u$ eşitliğinde yerine yazılır ve $T^{(k)}$ operatörüne ait özdeğer problemi ifade edilirse;

$$T^{(0)}u + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\left\langle u, u_j^{(0)}\right\rangle u_i^{(0)} - \lambda u = 0 \tag{6.21}$$

eştiliğine varılır. Eğer $u_t^{(0)}$ taban operatörü $T^{(0)}$'ın p_i'lerin oluşturulmasında kullanılmayan bir öz fonksiyonu ise ara probleme ait ifade $T^{(0)}u_t^{(0)} - \lambda u_t^{(0)} = 0$ haline gelir. Bu ise $u_t^{(0)}$ öz fonksiyonunun aynı zaman da ara problemin de öz fonksiyonu olduğunu gösterir. Dolayısı ile $\lambda_t^{(0)}$ da $u_t^{(0)}$'a ait öz değer olacaktır. Ara problemin diğer özdeğerlerini tesbit etmek için ilgili öz fonksiyonları aşağıdaki formda aramak yeterli olacaktır. (Gould,1963)

$$u^{(s)} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(s)} u_i^{(0)} \tag{6.22}$$

Buradaki her $u_i^{(0)}$ p_i 'lerin kurulmasında kullanılmıştır. Bu tesbit yukarıdaki ifade de u yerine yazılırsa;

$$\sum_{i=}^{k} c_i^{(s)}\lambda_i^{(0)}u_i^{(0)} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_j^{(s)} b_{ij} u_i^{(0)} - \lambda\sum_{i=1}^{k} c_i^{(s)} u_i^{(0)} = 0 \tag{6.23}$$

elde edilir. $u_i^{(0)}$ öz fonksiyonlarının lineer bağımsızlığından;

$$\sum_{m=1}^{k}\left\{\left(\lambda_i^{(0)}-\lambda\right)\delta_{mi}+b_{mi}\right\}c_m^{(s)}=0 \qquad j=1,2,...k \tag{6.24}$$

dir. Burada δ_{mi} Kronecker deltası(i=m için 1 aksi hallerde 0 değerini üretir.) dır.

$T^{(k)}$ operatörü ile kurulan k. özdeğer ara problemin k adet özdeğeri yukarıdaki matris özdeğer probleminin çözümü ile gerçeklenir. Bu işlem aşağıdaki determinantın λ ya ait polinomunun k kökünden elde edilen değerlerin tesbiti anlamına gelir.

$$\det\left[\left(\lambda_i^{(0)}-\lambda\right)\delta_{im}+b_{im}\right] \qquad (i,m=1,2,...k) \tag{6.25}$$

Bu özdeğerlere ait öz fonksiyonlar ise her bir λ özdeğerine karşı tesbit edilen $c_m^{(s)}$ (m=1,2..k) 'ler kullanılarak $u^{(s)}=\sum_{m=1}^{k}c_m^{(s)}u_m^{(s)}$ ifadesinden hesaplanır. bu hesaplanan değerler lineer bağımsızdırlar. Şimdi ise gerçekte $T^{(k)}$ operatörünün tüm özdeğerlerinin hesaplanmış olduğu gösterilecektir. $E^{(0)}=\sum_i E^{(0)}(\lambda_i^{(0)})$ şeklinde $T^{(0)}$ operatörüne ait $\{E_\lambda^{(0)}$ ailesi ile birimin çözümlenmesinin tüm sıçramalarının toplamını ile oluşturulan projeksiyon olarak verilsin. Daha öncede belirtildiği şekilde

$T^{(0)}$ operatörü sırasıyla;

$$H_p^{(0)}=E^{(0)}H \text{ ve } H_c^{(0)}=(I-E^{(0)})H \tag{6.26}$$

alt uzaylarıyla $T_p^{(0)}$ ve $T_c^{(0)}$ operatörlerine indirgensin. Yine bu temsil ile $T^{(k)}$ operatörünün $T^{(0)}$ operatörünün k adet öz fonksiyonu haricindekileri aynen öz fonksiyon olarak aldığını göstermektedir. İlave olarak yukarıdaki hesaplamadan elde edilen $u^{(s)}$ özvektörleride yine $T^{(k)}$ operatörünün $T^{(0)}$ operatörüne ait olmayan ilave k adet öz fonksiyonunu temsil edecektir.

6.1 Problemin Bazley Metoduna Uyarlanması

Harmonik olmayan osilatör probleminin çözümü için öncelikle uygun bir $T^{(0)}$ taban operatörü kurulması gerekecektir. Bu doğrultuda daha önceden analitik çözümlemesi yapılan Hermit diferansiyel denklemi bu probleme taban operatör olarak seçilecektir. Bu doğrultuda;

$$T^{(0)}\psi(x) = -\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + x^2\psi(x) \qquad -\infty < x < \infty \tag{6.1.1}$$

operatörü $H = L_2(-\infty,+\infty)$ uzayında kurulur. (6.1.1) ifadesine ek olarak da ;

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0 \tag{6.1.2}$$

şartının sağlanması gerekecektir. $T^{(0)}\psi = \lambda\psi$ özdeğer probleminin (6.1.2) 'i de sağlayan çözümü 2. bölümde verildiği üzere $\psi(x) = y(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ şeklinde bir dönüşüm ardından çözülerek istenen özdeğer ve öz fonksiyonlar;

$$\lambda_n = 2n+1 \quad \text{ve} \quad \psi_n(x) = H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad n=0,1,2,... \tag{6.1.3}$$

elde edilir. Burada $H_n(x)$ fonksiyonları, Ek2 de (Ek.2.5) ile n=0,1,2,...Rodrigues formülü vasıtasıyla verilen Hermite polinomlarıdır. $\psi_n(x)$ fonksiyonları

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\psi_n(x)]^2 dx = 1 \tag{6.1.4}$$

şartı ile normalize edilirse normalize katsayılar yine daha önceden de verildiği üzere;

$$c_n = \left[\sqrt{\pi}.2^n.n!\right]^{-1/2} \qquad n=0,1,2,.... \tag{6.1.5}$$

olur. Neticede normalize öz fonksiyonlar da;

$$u_n^{(0)}(x) = \psi_n(x) = c_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \tag{6.1.6}$$

şeklinde ifade edilir.

Pozitif tanımlı operatör olarak da $T'\psi = x^4\psi$ çarpma operatörü alındığında problemin çözümüne geçilebilir. Öncelikle projeksiyon uzayının bazını teşkil edecek elemanlar olarak;

$$p_i = \left(T'\right)^{-1} u_i^{(0)}(x) \qquad i=0,1,2,...k \tag{6.1.7}$$

alınırsa ilgili taban operatöre ait çözücü(resolvent) ifadesi, artık sonsuz bir toplam olarak ortaya çıkar. Lineer bağımsız p_i (i=0,1,2....k) elemanları teşkili ardından;

$$b_{ij} = \left\langle p_i(x), u_i^{(0)}(x) \right\rangle \tag{6.1.8}$$

değerleri hesaplanır. Yine bu hesaplamalarda da Gauss-Hermit improper yaklaşık integral yöntemi kullanılır. Bu değerlerle kurulan matrisin tersi alınır. Ardından elde edilen yeni matrisin köşegeni üzerindeki m. satırda bulunan elemanlara, taban operatöre ait m. özdeğer $\lambda_m^{(0)}$ ilave edilir. Artık problem matris özdeğer tesbiti formuna indirgenmiştir. Bu matrisin özdeğerleri çözümüne çalışılan özdeğer probleminin özdeğerleri olacaktır. Matris özdeğerlerinin tesbiti için, matris önce üst Hessenberg formuna düşürülmüş ve QR algoritması ile istenen alt sınır değerleri elde edilmiştir.

İşlemler gerçekleştirildiğinde sırasıyla k'nın 5,8,11,13 ve 14 seçilmesi ile kurulan ara problemlere ait özdeğerler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 6.1 Bazley metodu ile elde edilen özdeğer alt sınırları

	5 eleman için	8 eleman için	11 eleman için	13 eleman için	14 eleman için
1.özdeğer	1.3773874	1.3872560	1.3922011	1.392287	1.3922874
2.özdeğer	4.4736350	4.5944259	4.6308228	4.6451029	4.6484748
3.özdeğer	7.7752993	8.5126993	8.6601256	8.6601766	8.6601766
4.özdeğer	10.1776186	12.3888369	13.1255099	13.2020460	13.2022423
5.özdeğer	21.9895727	17.1698398	17.6150769	17.7912330	17.7912330
6.özdeğer		21.4474309	20.1412215	21.3075236	22.6879697
7.özdeğer		56.6042067	33.8151997	32.9527864	32.9527864
8.özdeğer		72.3408352	46.6926455	37.2939105	33.9002493
9.özdeğer			80.7611779	72.0497473	72.0497473
10.özdeğer			136.0977590	90.2377335	72.2440694
11.özdeğer			199.7551163	161.4049839	161.4049839
12.özdeğer				217.9856878	161.5006116
13.özdeğer				318.2625224	318.2625224
14.özdeğer					318.3202990

Çizelge 6.1'de gösterilen değerlere göre, lineer bağımsız olarak teşkil edilen $p_i(x)$ elemanlarının sayısı artırıldıkça probleme ait ilk özdeğerlere ait alt sınırlar oldukça iyi bir şekilde belirmektedir.

Aşağıdaki çizelgede ise bir önceki bölümde Rayleigh-Ritz yöntemi ile tesbit edilen üst sınır değerleri ile Çizelge 6.1'de verilen Bazley yöntemi değerleri birlikte verilmektedir.

Çizelge 6.2 Bazley metodu ile Rayleigh-Ritz metodu sonuçlarının karşılaştırılması

14 eleman için yapılan hesaplamalar	**Bazley Yöntemi ile elde edilen alt sınırlar**	**Rayleigh-Ritz Yöntemi ile bulanan üst sınırlar**
1.özdeğer	1.3922874	1.3922877
2.özdeğer	4.6484748	4.6484747
3.özdeğer	8.6601766	8.6601761
4.özdeğer	13.2022423	13.2022417
5.özdeğer	17.7912330	17.7912511
6.özdeğer	22.6879697	22.6881611
7.özdeğer	32.9527864	32.9485546
8.özdeğer	33.9002493	33.8930151
9.özdeğer	72.0497473	72.2185158
10.özdeğer	72.2440694	72.4388365
11.özdeğer	161.4049839	161.639783
12.özdeğer	161.5006116	161.737952
13.özdeğer	318.2625224	423.384195
14.özdeğer	318.3202990	423.449699

7. İKİNCİ İZDÜŞÜM OPERATÖRÜ METODU ANALİZİ VE PROBLEME UYGULAMASI

Bu metod, Bazley özel seçimi yönteminden hareket ederek ikinci tip yaklaşım tarzına uyan, yani ara problemlerin kurulması ile noktasal spektrumun tesbit edildiği yöntemlerden biridir. Metod sayesinde aranan özdeğerlere sonlu, lineer, cebirsel hesaplamalar ile makul alt sınırlar tesbit edilebilmektedir. (Fox ve Bazley,1962)

T operatörü, ayrılabilir iç çarpımın $\langle u, v\rangle$ şeklinde verildiği H Hilbert uzayında, kendi kendine eş lineer bir operatör olarak verilsin. Buna ilave olarak T operatörü alttan sınırlı ve ilk limit noktasına kadar sonlu katlılığa sahip özdeğerlerden oluşan spektruma sahip bir operatör olsun. T operatörünün özdeğerleri $\lambda_1,\lambda_2,...$ ve bu özdeğerlere ait öz fonksiyonları $u_1,u_2,...$ şeklinde gösterilsin. Eğer operatörün, özdeğerlerden oluşan bu spektrumu bir limit noktasına sahip ise bu limit noktasını λ_* ile temsil edilsin. T operatörü;

$$T = T^{(0)} + T' \tag{7.1}$$

şeklinde $T^{(0)}$, kendi kendine eş ve T' negatif olmayan simetrik bir operatör olmak üzere parçalanabildiği kabul edilsin. Bu parçalanış o şekilde teşkil edilebilsin ki, $T^{(0)}$ operatörünün spektrumunun ilk kısmı, bilinen $\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},....$ özdeğerleri ve bunlara ait bilinen orthonormal $u_1^{(0)},u_2^{(0)},....$ öz fonksiyonlarından oluşsun. Bu operatöre ait özdeğerlerin alt kısmının limit noktası da $\lambda_*^{(0)}$ ile gösterilsin. Tanım kümeleri ile ilgili olarak da, T operatörünün tanım kümesi D(T), $T^{(0)}$ operatörünün tanım kümesi $D(T^{(0)})$ ve T' operatörünün tanım kümesi de $D(T')$ ile gösterilsin. bu tanımlamalar ardından $D(T) = D(T')\cap D(T^{(0)})$ yazılabilir. T' operatörünün negatif olmamasından ve $D(T)\subset D(T^{(0)})$ neticesinden $\forall\ u \in D(T)$ için ;

$$\langle T^{(0)}u, u\rangle \le \langle Tu, u\rangle \tag{7.2}$$

olup $T^{(0)}\le T$ dir. Bunun neticesinde Rayleigh oranlarından T ve $T^{(0)}$ operatörlerinin sıralı özdeğerleri arasında;

$$\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i \qquad i=1,2,.... \tag{7.3}$$

ve

$$\lambda_*^{(0)} \leq \lambda_* \tag{7.4}$$

bağıntısı olduğu tesbit edilir. Bu işlemler ile elde edilen kaba alt sınırları iyileştirebilmek için $T^{(0)} \leq T^{(k)} \leq T^{(k+1)} \leq T$ şartını sağlayacak kendi kendine eş $\{T^{(k)}\}$ ara operatörler dizisi kurulacaktır.

$T^{(k)}$ operatörler dizisini kurmak için, $D(T^{/})$ kümesinin elemanları üzerinde, $[u,v]$ ile tanımlanan ve $[u,v]=\langle T^{/}u,v\rangle$ şeklinde verilen geçici bir iç çapım tanımlanır. $P^{(k)}$ operatörü ise yine $D(T^{/})$ kümesinden alınan lineer bağımsız $\{p_1,p_2,....\}$ elemanlarının ilk k tanesinin gerdiği uzaya iz düşüm operatörüdür. Bu şekilde verilen $P^{(k)}$ izdüşüm operatörü $D(T^{/})$ kümesinden alınan her v vektörü için aşağıdaki ifadeye sahiptir.

$$P^{(k)}v = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}[v,p_i]b_{ij}.p_i \tag{7.5}$$

Burada b_{ij} 'ler elemanları $[p_i,p_j]$ ile verilen matrisin tersinden elde edilen elemanlardır. Bu eşitlikten faydalanılarak;

$$T^{/}P^{(k)}v = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\langle v,T^{/}p_i\rangle.b_{ij}.T^{/}p_i \tag{7.6}$$

elde edilir. $P^{(k)}$ iz düşüm operatörü olduğundan;

$$0 \leq [P^{(k)}v,v] \leq [P^{(k+1)}v,v] \leq [v,v] \tag{7.7}$$

dir. (7.6) ifadesinden $T^{/}P^{(k)}$ operatörü tüm H uzayına genişletilebilir. Bu simetrik operatörün görüntü kümesi sonlu boyutlu olduğundan (7.7) ifadesinden;

$$0 \leq T^{/}P^{(k)} \leq T^{/}P^{(k+1)} \leq T^{/} \tag{7.8}$$

elde edilir. Neticede;

$$T^{(k)} = T^{(0)} + T'P^{(k)} \tag{7.9}$$

olarak tanımlanabilir. $T^{(k)}$ ara operatörü kendi kendine eş ve tanım kümesi $D(T^{(k)})=D(T^{(0)})$ olan bir operatör olup;

$$T^{(0)} \leq T^{(k)} \leq T^{(k+1)} \leq T \tag{7.10}$$

eşitsizliğini sağlar. Buna paralel olarak da;

$$\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+1)} \leq \lambda_i \tag{7.11}$$

ifadesi elde edilir. Problemi Bazley'in özel seçiminin temin ettiği cebirsel yapılara benzer formlara dönüştürmek için daha küçük bir operatör olan ve aşağıdaki şekilde kurulan $T^{(s,k)}$ operatöründen faydalanılır.

Her pozitif γ değeri için $T^{(k)}$ operatörü;

$$T^{(k)} = \left[T^{(0)} - \gamma\right] + \left[T'P^{(k)} + \gamma\right] \tag{7.12}$$

dir. $T'P^{(k)} + \gamma$ operatörü γ değerinden büyük olduğundan her γ ve k değeri için yeni bir iç çarpım H Hilbert uzayının u ve v elemanları için

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \left[T'P^{(k)} + \gamma\right]u, v \right\rangle \tag{7.13}$$

şeklinde verilebilir. Bu iç çarpıma göre H 'dan alınan lineer bağımsız $\{q_1, q_2, \ldots\}$ vektörlerinin ilk s adeti üzerine izdüşüm operatörü Q^s ile gösterilsin. (7.7) deki ifadeler benzer olarak, sabit tutulmuş k ve γ için;

$$0 \leq \left[T'P^{(k)} + \gamma\right]Q^s \leq \left[T'P^{(k)} + \gamma\right]Q^{s+1} \leq T'P^{(k)} + \gamma \tag{7.14}$$

dir. $[T'P^{(k)}+\gamma]Q^s$ operatörü sınırlı, simetrik ve değer kümesi sonlu boyutlu bir operatördür. Dolayısı ile Bazley metodunda $T'P^{(k)}$ operatörü için olduğu gibi;

$$[T'P^{(k)}+\gamma]Q^s u=\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s}\left\langle u,\left[T'P^{(k)}+\gamma\right]q_m\right\rangle.c_{mn}.\left[T'P^{(k)}+\gamma\right]q_n \tag{7.15}$$

dir. Burada c_{mn} elemanları $\left\langle\left[T'P^{(k)}+\gamma\right]q_m,q_n\right\rangle$ olan matrisin tersinden elde edilen değerlerdir. Bu aşamada $T^{(s,k)}$ operatörü;

$$T^{(s,k)}=\left[T^{(0)}-\gamma\right]+\left[T'P^{(k)}+\gamma\right]Q^s \tag{7.16}$$

şeklinde kurulabilir. Bu ifade ardından $D(T^{(s,k)}) = D(T^{(0)})$ ve

$$T^{(0)}-\gamma\le T^{(s,k)}\le T^{(s+t,k)}\le T^{(k)}\le T \tag{7.17}$$

dır. Bu ifadelerin paralelinde $\lambda_i^{(s+1,k)}$ özdeğeri;

$$\lambda_i^{(0)}-\gamma\le\lambda_i^{(s,k)}\le\lambda_i^{(s+t,k)}\le\lambda_i^{(k)}\le\lambda_i \tag{7.18}$$

eşitsizliğini sağlar. N. Aronszajn, yukarıdaki şart'ın $T^{(k)}$ operatörünün özdeğerlerinin T operatörünün özdeğerlerine yaklaşması için yeterli olduğunu göstermiştir. Bu şart, q_i fonksiyonlarının H uzayında tam sistem oluşturması halinde $T^{(s,k)}$ operatörünün özdeğerlerinin $T^{(k)}$ operatörünün özdeğerlerine yaklaşması için yeter şartdır. Neticede s ve k değerleri büyüdükçe $T^{(s,k)}$ 'nın özdeğerleri T operatörünün özdeğerlerine yaklaşmış olacaktır.

Genel olarak keyfi verilen $q_1,q_2,....q_s$ için $T^{(s,k)}$ operatörünün spektrumunun tesbiti en az T operatörünün spektrumunu tesbit etmek kadar zordur. Bununla birlikte $T^{(s,k)}$ operatörünün kuruluşu ile q_i 'lerin özel bir seçimi her zaman mümkün olabilir. Gerçekten de $\left[T'P^{(k)}+\gamma\right]^{-1}$ ifadesi açık olarak ifade edilebildiği için bu elemanların seçimi;

$$q_i = \left[T'P^{(k)} + \gamma\right]^{-1} u_i^{(0)} \qquad i=1,2,\ldots s \tag{7.19}$$

şeklinde yapılabilir. Bu veriler ile $T^{(s,k)}$ operatörü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$T^{(s,k)}u = \left[T^{(0)} - \gamma\right]u + \sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s}\left\langle u, u_m^{(0)}\right\rangle . c_{mn} . u_n^{(0)} \tag{7.20}$$

Burada c_{mn} değerleri, elemanları $\left\langle u_m^{(0)}, \left[T'P^{(k)} + \gamma\right]^{-1} u_n^{(0)}\right\rangle$ olan matrisin tersinden elde edilen değerlerdir. Yukarıdaki $T^{(s,k)}$ operatörü, H uzayının $u_1^{(0)}, u_2^{(0)} \ldots u_s^{(0)}$ elemanları ile gerilen alt uzay olan M 'ye dik elemanlar kümesinde $T^{(0)}$-γ 'ya indirgenir. O halde $M^{\perp}$ ile gösterilebilen bu kümede $T^{(s,k)}$ ile $T^{(0)}$-γ aynı spektruma sahiptirler. Neticede $T^{(s,k)}$ operatörüne ait tüm spektrumun öz fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde aramak suretiyle elde etmek mümkündür.

$$u = \sum_{i=1}^{s} \beta_i u_i^{(0)} \tag{7.21}$$

Bu tesbit $T^{(s,k)}u - \lambda u = 0$ özdeğer problemi ifadesinde yerine konur ve gerekli işlemler yürütülür ise aşağıdaki cebirsel probleme varılır;

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i \left[(\lambda_i^{(0)} - \gamma)\delta_{ij} + c_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right] = 0 \qquad j=1,2,\ldots.s \tag{7.22}$$

Bu ifadeden bulunan $\lambda_i^{(s,k)}$ değerleri ile $\lambda_{s+1}^{(0)} - \gamma$, $\lambda_{s+2}^{(0)} - \gamma, \ldots.$ birleştirilerek iyileştirilmiş alt sınırlar tamamen belirlenmiş olur. (Gould,1963)

$\left[T'P^{(k)} + \gamma\right]^{-1}$ ifadesi, operatörün spektral açılımından faydalanılarak yazılabilir. Gerçekten de aşağıdaki ifadeden;

$$\left[T'P^{(k)} + \gamma\right]v = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left\langle v, T'p_i\right\rangle . b_{ij} . T'p_j + \gamma v \tag{7.23}$$

dir. H Hilbert uzayının $T'p_1, T'p_2, \ldots T'p_k$ elemanları tarafından gerilen N alt uzayı, $T'P^{(k)}+\gamma$ operatörünü indirger. Sonuç olarak $T'P^{(k)}+\gamma$ operatörü N uzayına dik elemanların oluşturduğu $N^{\perp}$ alt uzayında γ değerini sonsuz katlı özdeğer olarak alacaktır. Geri kalan özdeğerler ise γ değerinden büyük olarak $\mu_1+\gamma$, $\mu_2+\gamma, \ldots \mu_k+\gamma$ olarak gelecektir. Bu özdeğerlere ait özfonksiyonlar ise;

$$v = \sum_{i=1}^{k} d_i T' p_i \tag{7.24}$$

alınarak aşağıdaki cebirsel sisteme ulaşılır.

$$0 = \sum_{i=1}^{k} d_i \left[\langle T'p_i, T'p_j \rangle - \mu \langle T'p_i, p_j \rangle \right. \qquad j=1,2,\ldots k \tag{7.25}$$

Buradan;

$$\left[T'P^{(k)} + \gamma\right]^{-1} u = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u, v_i \rangle v_i}{\mu_i + \gamma} + \frac{1}{\gamma}\left[u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i\right] \tag{7.26}$$

elde edilir. Dolayısı ile q_i elemanları teşkili garantilenmiş olur. Bu tesbit ardından hesaplamalarda gerekli olan c_{mn} değerleri aşağıdaki şekilde elemanları verilen matrisin tersinden elde edilir.

$$\frac{1}{\gamma}\left\{ \delta_{mn} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\mu_i + \gamma} \langle u_m^{(0)}, v_i \rangle \langle v_i, u_n^{(0)} \rangle \right\} \tag{7.27}$$

Burada v_i ve μ_i (i=1,2,...k) değerleri (7.24) ve (7.25) ifadelerinden elde edilebilirler. (7.27) ifadesinin bir başka form'u W.Börsch-Supan tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir;

$$\frac{1}{\gamma}\left\{\delta_{mn}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left\langle u_m^{(0)},T'p_i\right\rangle.d_{ij}(\gamma).\left\langle T'p_j,u_n^{(0)}\right\rangle\right\} \tag{7.28}$$

Bu ifade de $d_{ij}(\gamma)$ elemanları $\left\langle T'p_i,T'p_j\right\rangle+\gamma\left\langle T'p_i,p_j\right\rangle$ olan matrisin tersinden elde edilen değerlerdir. (7.27) ifadesi bir cebirsel matris problemin çözümünü gerektirirken (7.28) ifadesinde her γ değeri için kxk'lık bir matrisin tersinin bulunması yeterli olacaktır.

7.1 Problemin İkinci İzdüşüm Operatörü Metoduna Uyarlanması

Harmonik olmayan osilatör problemi çözümü için öncelikle uygun bir $T^{(0)}$ taban operatörü kurulması gerekecektir. Bu doğrultuda daha önceden analitik çözümlemesi yapılan Hermite diferansiyel denklemi bu probleme taban operatör olarak seçilecektir. Bu doğrultuda ;

$$T^{(0)}\psi(x)=-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+x^2\psi(x) \qquad -\infty<x<\infty \tag{7.1.1}$$

operatörü $H=L_2(-\infty,+\infty)$ uzayında kurulur. (7.1.1) ifadesine ek olarak da ;

$$\lim_{|x|\to\infty}\psi(x)=0 \tag{7.1.2}$$

şartının sağlanması gerekecektir. $T^{(0)}\psi=\lambda\psi$ özdeğer probleminin (7.1.2) 'i de sağlayan çözümü Ek2' de verildiği üzere;

$$\lambda_n=2n+1 \quad \text{ve} \quad \psi_n(x)=H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad n=0,1,2,... \tag{7.1.3}$$

elde edilir. Burada $H_n(x)$ fonksiyonları (Ek.2.5) ile n=0,1,2,...Rodrigues formülü vasıtasıyla verilen Hermite polinomlarıdır. $\psi_n(x)$ fonksiyonları normalize edilerek $c_n=\left[\sqrt{\pi}.2^n.n!\right]^{-1/2}$ n=0,1,2,.... katsayıları yine Ek2'de belirtildiği gibi ilgili iç çarpım kullanılarak tesbit edilir. Neticede normalize öz fonksiyonlar da;

$$u_i^{(0)}(x) = \psi_n(x) = c_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \qquad (7.1.4)$$

şeklinde ifade edilir. Pozitif tanımlı operatör olarak da Bazley Metodunda olduğu gibi $T'\psi = x^4\psi$ çarpma operatörü alındığında problemin çözümüne geçilebilir. Öncelikle iz düşüm uzayının bazını teşkil edecek elemanlar olarak;

$$p_i = \left(T'\right)^{-1} u_i^{(0)}(x) \quad i=0,1,2,...k \qquad (7.1.5)$$

lineer bağımsız p_i (i=0,1,2....k) elemanları teşkili ardından iki şekilde çözüme gidilmesi imkanı vardır. İlk yaklaşımda, (7.25) ifadesinden $\left\langle T'p_i, T'p_j \right\rangle$ ve $\left\langle T'p_i, p_j \right\rangle$ değerlerinin Bazley Metodunda da kullanılan yaklaşık improper integral hesaplaması kullanılarak belirlenmesi ardından μ değerleri bulunur. Her bir μ değeri için yine aynı ifade de bulunan d_i (i=1,2,..k) değerleri ve neticede (7.24) ifadesi ile belirlenen v_m (m=1,2,....k) değerleri hesaplanır. Neticede (7.27) ifadesi ile belirlenen c_{mn} (m,n=1,2,...k) değerleri için tüm veriler hazırlanmış olur. Bu hesaplamalar ardından tekrar (7.22) ifadesine dönülür. Problem artık bir matris özdeğer problemi halini almıştır. Daha önceden de kullanıldığı gibi yine QR algoritması (Wilkinson,1965) ile çözümleme yapılarak istenen özdeğerlere varılır. İkinci yaklaşımda ise, (7.28)'de verilen ifade için gerekli olan $\left\langle u_m^{(0)}, T'p_i \right\rangle$ (m,i=1,2,....k) ve d_{ij} (i,j=1,2,...k) değerlerinin tesbiti gerekecektir. ilk iç çarpım yine aynı yaklaşık integral hesabı kullanılarak çözümlenebilir. Ancak d_{ij} değerleri ise elemanları $\left\langle T'p_i, T'p_j \right\rangle + \gamma\left\langle T'p_i, p_j \right\rangle$ olan kxk'lık matrisin tersinden elde edilirler. Tabii ki yine (7.28) ifadesinde de kullanılan γ değeri öyle seçilmelidir ki bu matrisin tersi mevcut olsun.

Görüldüğü üzere ilk yöntemde (7.27) ifadesinde kullanılan v_i ve μ_i (i=1,2....k) elemanlarının tesbiti için bir matris özdeğer problemi daha çözmek gerekecektir. Dolayısı ile işlem yükü ikinci yaklaşım tarzına oranla daha fazladır. Çalışmada bu yöntem k=2 alınarak gerçekleştirilmiş fakat k'nın büyük değerleri için hesaplamaların uzunluğundan dolayı ikinci yaklaşım tarzı kullanılmıştır. Bu yöntemde Bazley'e oranla p_i'lerin keyfi seçilebilmesi imkanı vardır. Fakat aynı seçimi yapmak normalize edilmiş elemanlarda daha sade değerler getirdiğinden sonuçlar oldukça iyi bir şekilde elde edilmiştir. Hesaplamalarda k=5,8,11,13 ve 14 alınarak (7.28) deki ifade kullanılarak işlemler yürütülmüştür.

Çizelge 7.1 İkinci İzdüşüm Operatörü metodu ile elde edilen özdeğer alt sınırları

	5 eleman için	8 eleman için	11 eleman için	13 eleman için	14 eleman için
1.özdeğer	1.3773845	1.38723595	1.392190047	1.392287752	1.392287752
2.özdeğer	4.4735421	4.59419599	4.629990622	4.644845233	4.648474623
3.özdeğer	7.7747880	8.51145965	8.660116311	8.660175938	8.660175938
4.özdeğer	10.1782669	12.3789201	13.11555889	13.20201382	13.20224121
5.özdeğer	21.9985457	17.1761126	17.59586218	17.79125258	17.79125258
6.özdeğer		21.4873998	20.13679307	21.24188909	22.68818302
7.özdeğer		56.8103027	33.93340805	32.94863243	32.94863243
8.özdeğer		72.9003616	47.39744876	37.54671621	33.89335671
9.özdeğer			82.47429274	72.20352067	72.20352067
10.özdeğer			143.0060734	92.52528306	72.41962327
11.özdeğer			230.0212408	161.6503561	161.6503561
12.özdeğer				264.8218532	161.7484256
13.özdeğer				442.8428937	442.8428937
14.özdeğer					442.8992168

Aşağıdaki çizelgede ise bir önceki bölümde Rayleigh-Ritz yöntemi ile tesbit edilen üst sınır değerleri ile Çizelge (7.1)'de verilen ikinci izdüşüm operatörü yöntemi ile elde edilen değerler yaklaşımdaki etkinliği göstermek amacı ile birlikte verilmektedir.

Çizelge 7.2 İkinci İzdüşüm Operatörü metodu ile Rayleigh-Ritz metodu sonuçlarının karşılaştırılması

14 eleman için yapılan hesaplamalar	**İkinci İzdüşüm Operatörü Metodu ile bulunan alt sınırlar**	**Rayleigh-Ritz Yöntemi ile bulanan üst sınırlar**
1.özdeğer	1.392287752	1.3922877
2.özdeğer	4.648474623	4.6484747
3.özdeğer	8.660175938	8.6601761
4.özdeğer	13.20224121	13.2022417
5.özdeğer	17.79125258	17.7912511
6.özdeğer	22.68818302	22.6881611
7.özdeğer	32.94863243	32.9485546
8.özdeğer	33.89335671	33.8930151
9.özdeğer	72.20352067	72.2185158
10.özdeğer	72.41962327	72.4388365
11.özdeğer	161.6503561	161.639783
12.özdeğer	161.7484256	161.737952
13.özdeğer	442.8428937	423.384195
14.özdeğer	442.8992168	423.449699

8. KESME OPERATÖRÜ METODU ANALİZİ VE PROBLEME UYGULANMASI

Özdeğer problemlerinin ikinci sınıflama tipine giren çözümlerinde kurulan ara problem yapılarında $T^{(0)}$ taban operatörünün spektral temsilinin tamamen belirli olduğu kabulu yapılmıştı. Bu ise öz fonksiyonların bilinmesi ve dolayısı ile de taban operatöre ait çözücü(resolvent)'nün hesaplanması anlamına gelmektedir. Fakat genelde taban operatörüne ait çözücü(resolvent) operatör, $R_\lambda = (T^{(0)} - \lambda I)^{-1}$ sonsuz bir toplam olarak

$$R_\lambda v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle v, u_i^{(0)} \rangle u_i^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda} \tag{8.1}$$

şeklinde ortaya çıkmaktadır. Weinstein determinantı olarak bilinen ve özdeğer probleminin çözümü sırasında oluşan determinant ifadesinde kullanılan bu toplam ilgili determinantın sıfırlarının doğru tesbitinde bir sorun teşkil etmektedir. Bazley'in özel seçimi olarak bilinen ve yapısının yukarıda analiz edildiği metod içinde kurulan lineer bağımsız $p_1, p_2, \ldots$ elemanlarının uygun seçimi ile bu toplam sonsuz ifade olmaktan kurtarılıp tek bir ifade haline gelir. Bu tesbiti ön plana çıkaran bazı yaklaşım yöntemleri denenmiştir. Bu metodların en önemlilerinden birisi de Bazley ve Fox tarafından teşkil edilen taban operatörünün kırpılması esasına dayanan Kesme Operatörü metodudur. (Gould, 1963)

Bu metod içinde ilk i adet özdeğeri λ_m'ler (m=1,2,..i) ve bunlara ait $u_m^{(0)}$ öz fonksiyonları $T^{(0)}$ ile aynı olan $T^{(i,0)}$ kesme operatörü kullanılacaktır. Öyleki $T^{(0)}$ taban operatörünün (i+1). özdeğeri olan $\lambda_{i+1}^{(0)}$, kesme operatörünün (i+1). ve sonrası özdeğerleri olmak üzere sonsuz katlı olarak gelecektir. Bu işlevi yerine getirmek için yine izdüşüm operatörlerinden faydalanılacaktır. $P_\lambda^{(0)}$ operatörü, seçilen λ değeri için bu değerden küçük kalan $T^{(0)}$ taban operatörüne ait özdeğerlere karşı gelen $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots$ öz fonksiyonlar uzayına izdüşüm operatörü olsun. Neticede $T^{(i,0)}$ operatörü yukarıda tarifi verilen iz düşüm yardımı ile aşağıdaki şekilde kurulabilir;

$$T^{(i,0)} = T^{(0)} P_{\lambda_i^{(0)}}^{(0)} + \lambda_{i+1} (I - P_{\lambda_i^{(0)}}^{(0)}) \qquad i=1,2,\ldots \tag{8.2}$$

Burada I birim operatörüdür. $T^{(i,0)}$ kesme operatörü kullanılarak k. ara problem operatörü $T^{(i,k)}$ aşağıdaki şekilde kurulabilir;

$$T^{(i,k)} = T^{(i,0)} + T'P^{(k)} \qquad i,k=1,2,... \tag{8.3}$$

Maksimum-minimum prensibinden faydalanılarak da $T^{(i,k)}$ operatörüne ait m. özdeğer $\lambda_m^{(i,k)}$ için;

$$\begin{aligned} &\lambda_m^{(i,k)} \le \lambda_m^{(i+1,k)} \le \lambda_m^{(k)} \le \lambda_m \\ &\lambda_m^{(i,k)} \le \lambda_m^{(i,k+1)} \le \lambda_m \end{aligned} \tag{8.4}$$

eşitsizlileri yazılır. Burada λ_m , T operatörüne ait m. özdeğerdir. Sadelik temini için $\sum_{i=1}^{k}\langle u, T'p_i\rangle b_{ij}$ ifadesini α_j ile temsil edersek $T^{(i,k)}u - \lambda u = 0$ ifadesi;

$$T^{(i,0)}u - \lambda u = -\sum_{j=1}^{k}\alpha_j T'p_j \tag{8.5}$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\langle p_j, T'p_s\rangle = \langle u, T'p_s\rangle \qquad s=1,2,....k \tag{8.6}$$

dır. Eğer yukarıdaki ifadelerde bulunan u fonksiyonu $T^{(i,k)}$ operatörünün $T^{(i,0)}$ operatörüne ait olmayan λ özdeğerine karşı gelen öz fonksiyonu ise;

$$u = -\sum_{j=1}^{k}\alpha_j R_\lambda^{(i)} T'p_j \tag{8.7}$$

olarak yazılabilir. Burada $R_{\lambda}^{(i)} = (T^{(i,0)} - \lambda I)^{-1}$ operatörü, $T^{(i,0)}$ operatörünün çözücüsü (resolvent'i) dür. Kesme Operatörü metodunun faydası da bu aşamada ortaya çıkmaktadır. H Hilbert uzayından alınan herhangi bir v elemanı için;

$$R_{\lambda}^{(i)} v = \sum_{s=1}^{i} \frac{\left\langle v, u_s^{(0)} \right\rangle u_s^{(0)}}{\lambda_s^{(0)} - \lambda} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^{(0)} - \lambda} \left[v - \sum_{s=1}^{i} \left\langle v, u_s^{(0)} \right\rangle u_s^{(0)} \right] \tag{8.8}$$

şeklindedir. Dolayısı ile ;

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(p_j + R_{\lambda} T' p_j, T' p_s \right) = 0 \qquad s=1,2,...k \tag{8.9}$$

ifadesi aşağıdaki hale gelir.

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(p_j + R_{\lambda}^{(i)} T' p_j, T' p_s \right) = 0 \qquad s=1,2,...k \tag{8.10}$$

Neticede λ değerinin $T^{(i,k)}$ operatörünün $T^{(0)}$ da bulunmayan bir özdeğeri olabilmesinin gerek ve yeter şartı Weinstein determinantı olarak bilinen

$$W(\lambda) = \det\left| \left(p_j + R_{\lambda}^{(i)} T' p_j, T' p_s \right) \right| = 0 \qquad j,s=1,2,..k \tag{8.11}$$

ifadenin geçerli olmasıdır. Eğer $\lambda = \lambda_m^{(0)}$ değeri $T^{(i,0)}$ kesme taban operatörünün $\{v_1, v_2, ... v_n\}$ öz uzayına sahip bir özdeğeri ise $T^{(i,k)}$ operatörünün u öz fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır;

$$u = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j R_{\lambda_m^{(0)}}^{(i)} T' p_j - \sum_{j=k+1}^{k+n} \alpha_j v_{j-k} \tag{8.12}$$

olur. Buradaki α_j katsayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlamak durumundadır;

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left\langle p_j + R^{(i)}_{\lambda^{(0)}_m}T'p_j, T'p_r\right\rangle + \sum_{j=k+1}^{k+n}\alpha_j\left\langle v_{j-k}, T'p_r\right\rangle = 0 \quad r=1,2,...k \tag{8.13}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left\langle T'p_j, v_{r-k}\right\rangle = 0 \qquad r=k+1,k+2,...k+n \tag{8.14}$$

Buradan $\lambda^{(0)}_m$ özdeğerinin katlılığı, k. ara problemin operatörü $H^{(i,k)}$ 'nın ilgili özdeğerinin katlılığı ile aşağıdaki determinat eşitliğinden elde edilir.

$$\begin{vmatrix} \left\langle p_j + R^{(i)}_{\lambda}T'p_j, T'p_r\right\rangle & . & \left\langle v_{j-k}, T'p_r\right\rangle \\ & . & \\ .... & .... \; . & .... \\ \left\langle T'p_j, v_{r-k}\right\rangle & . & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.15}$$

(j,r=1,2,....k)

İligili determinant ifadesinde dikkati çeken en önemli nokta $p_1, p_2, ..$ fonksiyonlarının keyfi seçimleri halinde de;

$$R^{(i)}_{\lambda}T'p_j = \sum_{s=1}^{i}\frac{\left\langle T'p_j, u^{(0)}_s\right\rangle u^{(0)}_s}{\lambda^{(0)}_s - \lambda} + \frac{1}{\lambda^{(0)}_{i+1} - \lambda}\left[T'p_j - \sum_{s=1}^{i}\left\langle T'p_j, u^{(0)}_s\right\rangle u^{(0)}_s\right] \tag{8.16}$$

çözücü ifadesi sonlu terim toplamları ile ifade edilebilmektedir. Bu netice Kesme Operatörü metodunun özelliğini de belirler.

8.1 Problemin Kesme Operatörü metoduna Uyarlanması

Harmonik olmayan osilatör problemi çözümü için öncelikle uygun bir $T^{(0)}$ taban operatörü kurulması gerekecektir. Bu doğrultuda daha önceden analitik çözümlemesi yapılan Hermite diferansiyel denklemi bu probleme taban operatör olarak seçilecektir. Bu doğrultuda taban operatör;

$$T^{(0)}\psi(x) = -\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + x^2\psi(x) \qquad -\infty < x < \infty \tag{8.1.1}$$

operatörü $H=L_2(-\infty,+\infty)$ uzayında kurulur. (8.1.1) ifadesine ek olarak da ;

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0 \tag{8.1.2}$$

şartının sağlanması gerekecektir. $T^{(0)}\psi = \lambda\psi$ özdeğer probleminin (8.1.2) 'i de sağlayan çözümü 2. bölümde verildiği üzere

$$\lambda_n = 2n+1 \quad \text{ve} \quad \psi_n(x) = H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.1.3}$$

elde edilir. Burada $H_n(x)$ fonksiyonları yine (Ek2.5) ile n=0,1,2,...Rodrigues formülü vasıtasıyla verilen Hermite polinomlarıdır. $\psi_n(x)$ fonksiyonları normalize edilerek $c_n = \left[\sqrt{\pi}.2^n.n!\right]^{-1/2}$ n=0,1,2,.... katsayıları Ek2'de belirtildiği gibi ilgili iç çarpım kullanılarak tesbit edilir. Neticede normalize öz fonksiyonlar da;

$$u_i^{(0)}(x) = \psi_n(x) = c_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \qquad i=0,1,2.. \tag{8.1.4}$$

şeklinde ifade edilir. Pozitif tanımlı operatör olarak da Bazley Metodunda olduğu gibi $T'\psi = x^4\psi$ çarpma operatörü alındığında problemin çözümüne geçilebilir.

Hesaplamanın gerçekleştirileceği son ifade ;

$$\det\left\{ \langle p_j, T'p_t\rangle + \sum_{s=1}^{i} \frac{\langle u_s^{(0)}, T'p_t\rangle\langle T'p_j, u_s^{(0)}\rangle}{\lambda_s^{(0)} - \lambda} + \frac{\langle T'p_t, T'p_t\rangle - \sum_{s=1}^{i}\langle u_s^{(0)}, T'p_t\rangle\langle T'p_j, u_s^{(0)}\rangle}{\lambda_{i+1}^{(0)} - \lambda} \right\} = 0 \tag{8.1.5}$$

(t,j=0,1,2,...k)

dir. (8.1.5) ifadesinde i kesme miktarını, k ise ara problem numarasını temsil eder. İhtiyaç duyulan izdüşüm uzayının bazını teşkil edecek elemanlar olarak yine;

$$p_i = \left(T'\right)^{-1} u_i^{(0)}(x) \quad i=0,1,2,...k \tag{8.1.6}$$

alınabilir. Kesme miktarı 4 alınarak tek bir elemanın gerdiği izdüşüm uzayı kullanılırsa;

$$\det\left\{\left\langle p_0, T'p_0\right\rangle + \sum_{s=0}^{3} \frac{\left\langle u_s^{(0)}, T'p_0\right\rangle\left\langle T'p_0, u_s^{(0)}\right\rangle}{\lambda_s^{(0)} - \lambda} + \frac{\left\langle T'p_0, T'p_0\right\rangle - \sum_{s=0}^{3}\left\langle u_s^{(0)}, T'p_0\right\rangle\left\langle T'p_0, u_s^{(0)}\right\rangle}{\lambda_{3+1}^{(0)} - \lambda}\right\} = 0 \tag{8.1.7}$$

olur. $p_0(x) = \frac{1}{x^4} u_0^{(0)}(x)$ alınarak işlemler yürütülür ise;

$$84{,}081 + \left[\frac{1.1}{1-\lambda} + \frac{0.0}{3-\lambda} + \frac{(7{,}721.10^{-7}).(7{,}721.10^{-7})}{5-\lambda} + \frac{0.0}{7-\lambda}\right] + \frac{1 - \left[1.1 + 0.0 + (7{,}721.10^{-7}).(7{,}721.10^{-7}) + 0.0\right]}{9-\lambda} = 0 \tag{8.1.8}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$42040500000000000\lambda^3 - 1157500000000000\lambda^2 + 2488089500000011923\lambda - 1916572000000011923 = 0$$

bulunur.Üçüncü derece bu polinonum en küçük değeri istenilen ilk özdeğere alt sınır teşkil eder. Bu değer λ_0=1.01308 dir. Eğer kesme miktarı 2 olarak alınırsa;

$$84.081+\frac{1.1}{1-\lambda}+\frac{0.0}{3-\lambda}+\frac{1-(1.1+0.0)}{5-\lambda}=0 \qquad (8.1.9)$$

olur. Bu denklemin çözümünden bulunan en küçük λ değeri λ_0=1.0119093 olarak ortaya çıkar. Bu değerlerden de görüleceği gibi kesme miktarı artırıldıkça alt sınırlar iyileşmektedir. Alt sınırların bu iyileştirilmesi iz düşüm uzayının boyutunun artırılması ile de sağlanır. İz düşüm uzayının boyutunun artırılması ayrıca diğer özdeğerlere ait alt sınırların belirmesini de temin edecektir. Ayrıca tek eleman için yukarıda yapılan hesaplama seçilen $p_0(x)$ elemanının katsayısını değiştirmek suretiyle yenilenmiş bulanan değerler; katsayıların 5 olması halinde 1.0119023 ve 2 alınması halinde de 1.011903959 değerleri tesbit edilmiştir. Bu sonuçlara göre yine en iyi $p_0(x)$ değeri, bu problem için Bazley'in özel seçimidir. Aynı hesaplamalar iz düşüm uzayının boyutunun 2 ve kesme miktarının da 2 olması durumunda yapılırsa;

$$\det\begin{bmatrix} 84.081+\frac{1.1}{1-\lambda}+\frac{0.0}{3-\lambda}+\frac{1-(1.1+0.0)}{5-\lambda} & \frac{-1}{(\lambda-5)} \\ \frac{-1}{(\lambda-5)} & 8{,}0.10^{-3}.\frac{(1887.\lambda-5786)}{\lambda-3} \end{bmatrix}=0 \qquad (8.1.10)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade den;

$$1269{,}286776\lambda^4-17869{,}191864\lambda^3+87432{,}639768\lambda^2-168786{,}39\lambda+98452{,}73=0$$

dördüncü dereceden bir polinom elde edilir. Bu polinomun köklerinden en küçük ilk iki tanesi istenen özdeğerlere alt sınırlar olacaktır. Bu değerler sırasıyla λ_0=1.01189 ve λ_1=3.06626 dır. İz düşüm uzayının boyutunun 3'e çıkarıldığında ilk özdeğer λ_0=1.28609 değerine yükselmektedir. Bazley Metodunda iz düşüm uzayının boyutunun 1 alındığında bulunan ilk özdeğer λ_0=1.01189 dir. Yani Bu metodun etkinliği Bazley Metodu ile oldukça yakınlık gösterir. Fakat Metodunun uygulanabilirliği iz düşüm uzayının boyutunun artırılması ile oldukça güçleşir. Dolayısı ile pratik uygulamalar için elverişli bir yöntem değildir.

9 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, öncelikle operatörün spektral temsili incelemesi yapılmıştır. Bu incelemede ayrık spektrumun tesbitinde sayısal hesaplama imkanlarının varlığı ve sürekli spektrumun yaklaşık sayısal hesaplamalara imkan tanımadığı görülmüştür. Bu nedenle, çalışmada iyi operatörler (kompakt, kendi kendine eşlenik, tersi kompakt) üzerinde çalışmanın gerekliliği ortaya çıkmıştır. Üstelik bu operatörler fiziksel olarak anlamlı olmaktadır. Ele aldığımız $-u''(x)+x^2u(x)+x^4u(x)=\lambda u(x) \quad -\infty<x<\infty$ harmonik olmayan osilatör'e ait diferansiyel özdeğer probleminin özdeğerlerinin ayrıklığı temin edilmiş ve fiziksel olarak çok önemli olan ilk özdeğerlerin sayısal hesaplaması yapılmıştır. Bu operatör için farklı farklı yöntemlerle bu özdeğerler çok yaklaşık olarak iyi bir şekilde bulunmuştur. Özellikle alt ve üst sınırları tesbit eden metodlar birlikte kullanılarak hem alttan hemde üstten yaklaşık değerler bulunmak suretiyle bir güvence teşkil edilmiştir. Analitik olarak spektrumu bulunamayan bu operatörün böylece istenen hassasiyette ayrık olan spektrumu belirlenmiştir. Ayrıca operatörün yapısına göre değişik metodların uygulanabilirliği de verilmiştir. Bu suretle tez içinde geniş bir operatör gurubunun özdeğerlerinin bulunması yöntemleri sunulmuştur.

Çalışma da öncelikle yapılan spektral analiz bu çalışmalarda iz düşüm operatörlerinin etkisini gözler önüne sermektedir. İlk dikkati çeken her kendine eş operatörün bir grup iz düşüm operatörün lineer birleşimi (sonlu boyutlu uzaylarda bir toplam sonsuz boyutlu olanlarda bir integral) olarak ifade edilebileceğidir. Bu işlevi yerine getirecek iz düşüm operatörleri teşkili ilgili uzay dikkate alınarak çok çeşitli şekilde inşa edilebilebileceği düşünülebilir. Fakat bu temsilin operatörü tam olarak yansıtabilmesi için operatörün öz fonksiyonları ve ilgili özdeğerleri kullanılmalıdır. Dolayısı ile her kendi kendine eş operatöre ait yaklaşık özdeğer ve öz fonksiyon hesaplaması yöntemi nihayetinde bu operatörü tam olarak temsilini sağlayabilmelidir. Bu doğrultuda iz düşüm operatörlerinden yararlanmak zorunluluğu vardır. Özellikle diferansiyel operatörün özdeğerlerine alt sınırlar bulan yöntemlerde bu oldukça belirgin olarak ortaya çıkmaktadır. Neticede ara problem kurulması yöntemlerinde iz düşüm operatörlerinin değişik kullanımları değişik yöntemleri beraberinde getirmektedir. O halde daha etkin bir yöntem arayışının bu doğrultuda olması büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

Bachman G. ve Narici L., (1966), "Functional Analysis" Academic Press Inc.

Bayramoğlu, M., (1971), " Foksiyonel Analiz ve Uygulamaları" ,Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı 144-166

Bazley, W. Norman, (1961), "Lower Bound For Eigenvalues", Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 10, No. 2

Davies, E.B., (1995), "Spectral Theory and Differential Operators" Cambridge University Press

Erich, Z., (1989), " Partial Differential Equations of Applied Mathematics" John Wiley & Sons, Inc.

Faires, J. Douglas ve Burden, L. Richard, (1993) , "Numerical Analysis " Pws-Kent Publishing Company

Finlayson, A. Bruce, (1972), " The Method of Weighted Residuals and Variational Principles" Academic Press, Inc.

Fox, W. David ve Bazley, W. Norman, (1962), " A Procedure for Estimating Eigenvalues", Journal of Mathematival Physics, Vol. 3, No.3 May-June

Friedman, B., (1956), "Principles and Techniques of Applied Mathematics" John Wiley & Sons, inc.

Gohberg, İ. ve Goldberg, S., (1969), "Basic Operator Theory" Birkhauser Boston 1981

Gould, S.H., (1963), " Variational Methods for Eigenvalue Problems" Oxford University Press

Kato, T., (1980), "Peturbation Theory for Linear Operators" Springer-Verlag

Kidcaid, D. ve Cheney, W., (1991), "Numerical Analysis" Wadsworth,Inc.,Belmont, California 94002

Kreyszig, E., (1978), "Introductory Functional Analysis with Application" John Wiley & Sons. Inc.

Mikhlin, S.G., (1964), "Variational Methods in Mathematical Physics" Pergamon Press Ltd.

Simmons, F.George, (1963), " Topology and Modern Analysis " McGraw-Hill Book Company,Inc

Stakgold, I., (1968), " Boundary Value Problems of Mathematical Physics " Volume I Collier-Macmillan Limited, London

Weinberger, H.F., (1962), " Variational Methods for Eigenvalue Problems " , Univ. of Minnesota Book Store, Minneapolis, Minnesota

Wilkinson, J.H., (1965), "The Algebraic Eigenvalue Problem " Oxford University Press

Ek1 İz Düşüm Operatörleri

Genel olarak bir B Banach uzayında iz düşüm operatörü, karesi kendisine eş (idempotent) olan operatör olarak ifade edilir. Kısaca, operatör P ile gösterilirse P^2=P olan operatörler iz düşüm operatörlerdir. B uzayında her bir P iz düşüm operatörü için kapalı lineer M ve N gibi $B = M \oplus N$ özelliğini sağlayan iki alt uzaydan bahsetmek gerekecektir. Bu iki alt uzaydan, M alt uzayı P'nin görüntü kümesi N ise yine P operatörünün sıfıra götürdüğü elemanlar kümesi yani sıfır uzayı dır. Dolayısı ile her bir P iz düşüm operatörü için B uzayının iki kapalı lineer alt kümesi M ve N eşlemesi yapılabilir.

Bu tez çalışması konularında elemanların veya uzayların dik olması dolayısı ile iç çarpım kavramı, yine Hilbert uzaylarının beraberinde getirdiği bazı kolaylıklar nedeni ile Banach uzaylarından çok Hilbert uzaylarında iz düşüm operatörlerinin özellikleri önem taşıyacaktır. Ayrıca H Hilbert uzaylarında iz düşüm operatörlerine ait bir özellik olmasına karşın burada sadece tez konuları ile iligili olan özellikler verilecektir.

Bir H Hilbert uzayı için görüntü kümesi M ve sıfır uzayı N olan bir iz düşüm operatörü P olsun. Eğer $M \perp N$ ise P kendi kendisine eş operatördür. Ayrıca bu hal için $N = M^{\perp}$ dir. Yani P'nin sıfır uzayı görüntü uzayına diktir. Genel olarak H da sıfır uzayı ve görüntü uzayı dik olan iz düşüm operatörüne dik iz düşüm operatörü denir. O halde bir H Hilbert uzayında P dik iz düşüm operatörü P^2=P ve P=P^* şartlarını sağlayan bir operatördür. Sıfır ve I birim operatörleri de birer iz dik iz düşüm operatörleridir. H Hilbert uzayında her bir P dik izdüşüm operatörü için onun görüntü uzayı, kapalı lineer $M = \{Px: x \in H.$ uzayı ve tersine olarak da H Hilbert uzayında herbir kapalı lineer M alt uzayı için görüntü kümesi P(x+y)=x olacak şekilde bir P dik iz düşüm operatörü mevcuttur. Burada $x \in M$ ve $y \in M^{\perp}$ dir. Her iki durumda da P operatörüne M üzerine dik iz düşüm operatörüdür denir.

Eğer P operatörü M üzerine dik iz düşüm operatörü ise I-P de $M^{\perp}$ üzrine dik bir iz düşüm operatörüdür. Yine P operatörü pozitif bir operatördür. Yani $P \geq 0$ dır. I-P operatörü içinde bu yargı doğru olacağından $0 \leq P \leq I$ dır.

Eğer $P_1, P_2, ... P_n$ operatörleri H Hilbert uzayının sırasıyla $M_1, M_2, ... M_n$ kapalı lineer alt uzaylarına dik iz düşüm operatörleri olsun. Eğer P_i ler dik(orthogonal) ise yani $i \neq j$ oldukça $P_iP_j=0$ oluyorsa $P=P_1+P_2+....P_n$ şeklinde ifade edilen P operatörü de $M=M_1+M_2+...M_n$ uzayına dik izdüşüm operatörüdür. Bu ifadenin tersine gerektirmesi de doğrudur. (Bachman,1966)

Eğer H Hilbert uzayında P_1 ve P_2 iz düşüm operatörleri için $P_1P_2=P_2P_1$ özelliği geçerli ise (yani P_1 ve P_2 değişme özelliğine sahip ise) $P=P_1P_2$ çarpım iz düşüm operatörü de H da bir iz düşüm operatörü olur. Böyle bir durum için P_1 ve P_2 operatörlerinin H uzayındaki iz düşüm alt uzayları $Y_1=P_1(H)$ ve $Y_2=P_2(H)$ olmak üzere P operatörünün H daki iz düşüm uzayı $Y= Y_1 \cap Y_2$ dir. Yine bir H Hilbert uzayının kapalı iki alt kümesi M ve N olmak üzere bu iki uzaya iz düşümü temin eden P_M ve P_N operatörleri için $P_MP_N=0$ şartı sağlanıyorsa M ve N kapalı alt uzayları birbirlerine dik dir denir.

Bir H Hilbert uzayında tanımlı iki iz düşüm operatörü P_1 ve P_2 ile H uzayındaki iz düşüm alt uzayları $Y_1=P_1(H)$ ve $Y_2=P_2(H)$ ile verilsin. Ayrıca P_1 ve P_2 operatörlerinin sıfır uzaylarıda sırasıyla $N(P_1)$ ve $N(P_2)$ ile gösterilsin. Aşağıda verilen beş bağıntı bir birbirine denk dir;

1-) $P_2P_1=P_1P_2=P_1$

2-) $Y_1 \subset Y_2$

3-) $N(P_1) \supset N(P_2)$

4-) $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$ (Her $x \in H$ için)

5-) $P_1 \leq P_2$

dir. (Simmons,1963)

Ek2 Hermite Polinomları

Uygulamalarda, bazı özelliklere sahip fonksiyon dizilerinin gerek işlemlerde ve gerekse de fiziksel yorumlamalarda çeşitli kolaylıklar sağladıkları bir gerçektir. Hilbert uzaylarında da dik (orthogonal) ve birim dik (orthonormal) olarak isimlendirilen ve aşağıdaki şekilde tanımlanan elemanlar dizisi de bu özelliktedir. M kümesi ile H Hilbert uzayının bir alt kümesi temsil edilsin. Bu kümeden alınan her x ve y eleman çifti, uzayın iç çarpımı ile bir birlerine dik iseler, yani $\langle x, y\rangle=0$ şartını sağlıyorlarsa M kümesine dik bir küme denir. Bu şekildeki M kümesinde alınan elemanlar ile teşkil edilen diziye ise dik dizi denir. İlave olarak M kümesinin her x ve y elemanın norm'u 1 ve

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} x \neq y \text{ ise} & 0 \\ x = y \text{ ise} & 1 \end{cases} \tag{Ek2.1}$$

şartı da sağlanıyorsa M kümesine birim dik küme, bu küme elemanları ile teşkil edilen diziye de birim dik dizi denir.

Bu tez çalışmasında da harmonik olmayan osilatör problemi üzerinden çalışıldığından ele alınacak metodlarda kullanılmak üzere sonsuz aralıkta integraller ile iç çarpım ifadeleri karşılanan dik veya birim dik dizilere ihtiyaç olacaktır. Problemin yapısı gereği Hilbert uzayı olarak $L^2(-\infty,\infty)$ sonsuz boyutlu karesi integrallenebilen fonksiyonlar, x ve y yine bu uzayın elemanları olmak üzere ilgili iç çarpım olarak da;

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt \tag{Ek2.2}$$

kullanılacaktır. İntegrasyon sınırları sonsuz olduğundan klasik yöntemlerle (eleman kuvvetlerini alarak) lineer bağımsız diziler teşkil etmek imkanı yoktur.Üstel fonksiyonlardan uygun üs seçmek suretiyle yakınsak integrale sahip lineer bağımsız bir dizi oluşturmak mümkündür. Bu amaçla aşağıdaki şekilde bir dizi oluşturulabilir;

$$w(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad tw(t) \quad , \quad t^2 w(t), \quad ......t^n w(t), \quad ..... \tag{Ek2.3}$$

Bu elemanlar $L^2(-\infty, \infty)$ uzayının elemanlarıdır. Gerçektende R reel sayılar kümesinde sınırlıdırlar. Yani tüm t değerleri için $|t^n w(t)| \le k_n$ dir. Bu elemanlara Gram-Schmidt orthonormalleştirme işlemi uygulanırsa;

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{\frac{-t^2}{2}} H_n(t) \qquad (n=1,2,...) \tag{Ek2.4}$$

orthonormal dizisi elde edilir. Burada, aşağıdaki Rodrigues formülü ile

$$H_0(t)=1 \text{ ve } H_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-\frac{t^2}{2}}) \quad n=1,2,.. \tag{Ek2.5}$$

şeklinde üretilen bu fonksiyonlara Hermite polinomları denir. (Kreyszig,1978)

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	:	18.05.1969
Doğum yeri	:	Trabzon
İlk Öğretim	:	1974-1979 Fatin Hoca İlköğretim Okulu(BEYKOZ)
Ortaokul	:	1979-1982 Ziya Ünsel Orta Okulu (BEYKOZ)
Lise	:	1982-1985 Paşabahçe Ferit İnal Lisesi (BEYKOZ)
Lisans	:	1985-1990 İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	:	1990-1993 İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora	:	1993- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurumlar:

1990-92 : YESA İnşaat ve Mühendislik Hizmetleri Ltd.Şti.

1992-Devam ediyor : Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Araştırma Görevlisi