

79213



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEKNİK ÖĞRETİM KURULU
LİSANS VE YÜKSEK LİSANS

İKİNCİ MERTEBEDEN İKİ PARAMETRELİ AYRIK SİSTEMLER İÇİN OPTIMAL KONTROL PROBLEMLERİ

Matematik Yük. Müh. Abdülkadir TEPECİK

F.B.E. Matematik Müh. Anabilim Dalında hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 29 Eylül 1998

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (YTÜ)

Juri Üyeleri : Prof. Dr. S. Seyidali AKHİYEV (İTÜ)

: Prof. Dr. Gülseren AYDIN (MSÜ)

AE
SAKHİYEV
AYDIN

İSTANBUL, 1998

79213

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
0. GİRİŞ	1
1. PROBLEMİN SUNULMASI	8
2. VARYASYONLARLA DENKLEMLER SİSTEMİ	12
3. EŞ PROBLEM ve OLUŞTURULMASI	18
4. AMAÇ FONKSİYONELİNİN ARTIM FORMÜLÜ	23
5. MÜMKÜN KONTROL FONKSİYONUNUN İĞNEVARİ ARTIMI ve AMAÇ FONKSİYONELİNİN KALAN KISMI ÜZERİNDE DEĞERLENDİRİLMESİ	26
6. MÜMKÜN HIZLAR KÜMESİ KONVEX OLAN PROBLEMLER	31
7. MAXIMUM PRENSİBİ ve İSPATI	38
8. BASİT BİR ÖRNEĞİN İNCELENMESİ	42
9. BİR BOYUTLU KİMYASAL REAKTÖR PROBLEMİ	47
10. SONUÇLAR	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	73

ÖZET

Bu çalışmada ikinci mertebeden iki parametrelili genel formdaki ayrık sistemler ele alınmış ve bunların optimal kontrol problemi incelenmiştir.

Optimal Kontrol Teorisi sayısal analizden farklı olarak ayrık sistemlerin optimizasyonu ile ilgilidir. Kontrol vektörleri üzerinde belirli kısıtların olması halinde bu problem için genel halde Pontryagin'in Maximum Prensibi (PMP) geçerli değildir. Bu çalışmada ise, böyle sistemlerde PMP'nin geçerli olduğu sınıfları bulunmuştur. Bu tür problemler "hızlar kümesi konvex olan problemler" olarak tanımlanmıştır.

Elde edilen bulguların iki probleme uygulaması da verilmiştir. Ayrıca bulunan sonuçlar üç veya daha çok parametrelili ayrık sistemler içinde genelleştirilebilir. Bu ise, elde edilen sonuçların çok parametrelili ayrık sistemler için önemli olduğunu göstermektedir.

ABSTRACT

In this dissertation, second order with two parameters discrete systems in general form has been taken into account and their optimal control problem has been investigated.

Although general numerical methods is not taken over optimisation of discrete system, optimal control theory is able to carry out the optimisation numerically.

If there is some restrictions on control vectors Pontryagin's Maximum Principle (PMP) is not valid anymore for the optimisation. Therefore, some cases are found within optimal discrete systems where PMP is applicable. This sort of problems can be defined as "problems which velocities set are convex".

Result obtained from use of this theory have been given on two applications. In addition, those results can be generalised for discrete systems with three or more parameters. In this thesis it can be shown that results got from use of this method are important for discrete systems with high number of parameter.

0. GİRİŞ

Optimal Kontrol Teorisi, XX. yüzyılda ortaya çıkan en önemli uygulamalı matematik alanlarından biridir. Bu teori, bir anlamda klasik varyasyon hesabı teorisinin devamı olarak göz önüne alınabilir. Ancak bu teorisin problemleri, XVII. yüzyılın sonlarında ortaya çıkan varyasyon hesabı problemlerinden kesin bir şekilde farklıdır. Klasik varyasyon hesabı problemlerinden farklı olarak burada, incelenen sistemlerin imkanları kısıtlıdır. Yani, kontrol edilebilen parametrelerin alabileceği değerler kümesi genelde açık değil, kapalı bir kümedir.

Pratikte karşılaşılan süreçlerin (proseslerin) çoğunluğu kontrol edilebilme kabiliyetine sahiptir. Böylece bu süreçlerin akışı belirli sayıdaki parametrelerin davranışına bağlıdır. İncelenen süreci veya sistemi matematiksel olarak ifade eden denklemler ise bu parametreleri içerir. Pratikte bu parametrelerin gidişatı belli olduktan sonra, ele alınan sürecin davranışı belli olur. O halde şöyle bir soru ortaya çıkmaktadır: "Bu parametrelerin gidişatı öyle biçimde seçilebilsin ki ona uygun düşen sürecin akışı bir anlamda en iyi (optimal) olsun."

XVII. yüzyılın sonunda J. Bernoulli varyasyon hesabının gelişimine neden olan Brachistochrone problemini sunmuş ve bu alanda önemli katkıları olmuştur. 18. asırda Euler ve Lagrange ise bu alanda günümüzde halen kullanılan metodları (Euler-Lagrange denklemi) sunmuşlardır.

Varyasyon Hesabı diye isimlendirilen matematiksel bilim alanı günümüzde optimizasyon problemlerinin bir bölümü gibi ele alınmaktadır. Varyasyon hesabı problemleri alanında, özellikle imkanları açık küme oluşturan süreçler veya sistemler incelenir. Ancak pratikte, süreçlerin imkanları her zaman kısıtlı olup matematiksel olarak kapalı bir aralığa karşı gelmektedir. Bu sebeple böyle süreçlerin optimal kontrol edilmesi klasik varyasyon hesabı metodları ile incelenememektedir. Dolayısıyla bu, Optimal Kontrol Teorisinin

ortaya çıkma nedenlerindedir. Matematiksel olarak bu; kontrol eden parametrelerin alabileceği değerler kümesinin açık değil kapalı bir küme olması demektir.

Tarihsel gelişim içerisinde ilk temel örneklerden birisi Newton 'un, "Atılmış cisimlere gösterilen ön direnç kuvveti" olarak bilinen, aerodinamik problemidir. Bu problemin matematik modeli aşağıdaki şekilde verilir (Alekshev, 1987):

$$\int_0^{t_1} \frac{t}{1 + \dot{x}(t)^2} dt \rightarrow \inf \quad (*)$$

$$x(0) = 0, x(t_1) = b$$

Bu problem varyasyon hesabı problemi gibi göz önüne alındığında integral altı fonksiyon (integrand)

$$F(t, x, \dot{x}) = \frac{t}{1 + \dot{x}^2}$$

dır. Euler denklemi ise

$$F_{\dot{x}} = \text{sabit}$$

veya

$$\frac{2t\dot{x}}{(1 + \dot{x}^2)^2} = \text{sabit}, \quad t \in (0, t_1)$$

Bu eşitlik ancak

$$\dot{x} = 0 \text{ veya } \dot{x} = \pm\infty$$

hallerinde mümkündür. Dolayısıyla varyasyon hesabı problemi olarak bir anlamı yoktur. O halde bu problem $\dot{x}(t) \geq 0$ kısıtına göre incelenmelidir. Bu sonuç, problemin Optimal Kontrol Problemi olduğunu göstermektedir.

Optimal Kontrol Teorisinin gelişiminde L. S. Pontryagin'in (Pontryagin vd., 1962) ve R. Bellman (Bellman, 1957) 'ın önemli rolleri olmuştur. 1950 'li yıllarda Pontryagin Adi

diferansiyel denklemler (ODE) sistemi ile idare edilen prosesler için *Maximum Prensibi* yöntemini vermiştir. Bu yöntem Optimal Kontrol Teorisi 'nin daha hızlı gelişmesini sağlamıştır.

R. Bellman ise aynı yıllarda Dinamik Programlama yöntemini vermiştir. Bu yöntem yardımıyla bir çok problemi incelemek mümkün olmaktadır.

Bu iki yöntem günümüzde Optimal Kontrol Teorisi 'nin temel yöntemleri olarak bilinmektedir.

Şimdi genel olarak Optimal Kontrol problemlerinin bazı özelliklerinden ve bu alanda bilinen bazı çalışmalardan bahsedelim.

t zamanı $t_0 \leq t \leq t_1$ olsun. $\forall t$ için ele alınan sistemin durumunu belirleyen koordinatlar

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

sistemi kontrol eden parametreler ise

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$$

olsun. Kontrol parametreleri bilindiğinde sistemin durumu aşağıdaki denklem ile belirlensin:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (0.1)$$

Bu sistemin durumu (state) üzerine bazı ek kısıtlarda konabilir. Ancak basitlik için, bu halleri ele almayalım ve sadece başlangıç durumunun belli olduğunu varsayalım. Yani;

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n \quad (0.2)$$

kısıtları verilmiş olsun. Bu durumda kontrol parametreleri üzerine

$$u(t) \in V \quad (0.3)$$

kısıtının konduğunu varsayalım. Burada V, R^r 'den verilmiş alt kümedir ve pratikte V kümesi çoğunlukla kapalı-sınırlı kümedir.

(0.3) kısıtını sağlayan $u(t)$ kontrol vektörleri içerisinde bulunmak istensin ki, (0.1), (0.2) probleminin ona karşı gelen $x(t)$ çözümü ile birlikte

$$S(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) dt + \varphi(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) \quad (0.4)$$

fonksiyoneline minimum değer versin.

Pontryagin 'in metoduna göre (0.1), (0.2), (0.4) problemi aşağıdaki şekilde incelenir:

Önce, *Hamilton Fonksiyonu*

$$H(t, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, u_1, \dots, u_r) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) - f_0(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$$

şeklinde oluşturulur. Sonra ise bu fonksiyonun yardımıyla *Eş Problem* (adjoint problem) olarak isimlendirilen aşağıdaki problem teşkil edilir:

$$\lambda_i' + \frac{\partial H(t, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, u_1, \dots, u_r)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (0.5)$$

ve bu sistem için

$$\lambda_i(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))}{\partial x_i(t_1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

başlangıç değerleri göz önüne alınır.

Maximum Prensibi ise optimalliğin gerekli koşulu olup aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \max_{(v_1, \dots, v_r) \in V} H(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), v_1, \dots, v_r) = \\ = H(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \end{aligned} \quad (0.6)$$

dolayısıyla Pontryagin 'in Maximum Prensibi (0.1), (0.2), (0.4) problemini (0.1), (0.2); (0.4) , (0.5); (0.6) sistemlerinin birlikte incelenmesine indirgenmiş olur (Pontryagin vd., 1962).

Bellman 'ın Dinamik Programlama metodu ise aşağıdaki biçime sahiptir (Bellman,1957):

$$B(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) = \min_{u_1(t), \dots, u_r(t)} \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) dt + \varphi(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))$$

fonksiyonu ele alınır ve optimallik prensibinden (optimality policy) faydalanarak bu fonksiyon için

$$\frac{\partial B(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial t_0} + \min_{v \in V} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial B(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x_1^0, \dots, x_n^0, v_1, \dots, v_r) - f_0(t, x_1^0, \dots, x_n^0, v_1, \dots, v_r) \right] = 0$$

denklemini ve

$$B(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \Big|_{t_0=t_1} = 0$$

başlangıç koşulu kullanılır.

Bu gelişmelerden sonra optimal kontrol teorisi daha hızlı ilerlemeye başlamış ve bir çok kısmi türevli sistem için optimal kontrol problemi incelenmektedir

Kısmi türevli sistemler iki veya daha fazla sürekli parametreye sahip olan sistemlerdir. İki veya daha çok sayıda *sürekli parametreye* sahip olan sistemler için optimal kontrol problemleri (yani, kısmi türevli sistemler için optimal kontrol problemleri) çoğunlukla aşağıdaki genel şema yardımıyla incelenir (Yegerov, 1978; Butgovsky, 1965; Lions, 1968; Vasilyev, 1974; Ahmedov vd., 1972; Akhiyev, 1976).

1. İncelenen sürekli parametrelili Optimal Kontrol problemi için belirli kısıtlara göre Maximum Prensibi (gerek koşullar) sağlanır.

2. Verilen sürekli parametrelili sistem, ona karşı gelen eş problem ve Maximum Prensibi ayrıklaştırılır (discreteleştirilir). Yani, her üçü de ayrık parametrelili ayrık sistem halinde yazılır.

3. Daha sonra bu üç ayrık sistem birlikte ele alınıp çözülür ve optimal olabilecek kontrol vektörleri bulunur. Bu kontrol vektörlerinin hangilerinin optimal olacağı ise ayrıca yeterli koşulların veya başka bilgilerin yardımıyla belirlenir.

İki mertebeli nonlinear hiperbolik denklemler sistemi için ise aşağıdaki optimal kontrol problemi (Yeşerov, 1978; Ahmedov vd., 1972; Akhiyev, 1976) de incelenmiştir:

$$u_{tx}(t, x) = f(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), v(t, x)), \quad (t, x) \in G = (t_0, t_1) \times (x_0, x_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t_0, x) = \alpha(x) \\ u(t, x_0) = \beta(t) \end{array} \right\}$$

$$S(v) = \iint_G f_0(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), v(t, x)) dt dx + \varphi(u(t_1, x_1)) \rightarrow \min$$

Sürekli parametrelili Optimal Kontrol problemleri bu şema ile incelenirken önemli bir nokta gözardı edilir. Şöyle ki;

Verilen sürekli sistem için Sürekli Maximum Prensibinin doğru olduğu hallerde bu sisteme karşı gelen ayrık sistem için de Sürekli Maximum Prensibinin ayrık formu geçerli midir?. Sürekli sistem için Maximum Prensibinin doğru olmasına rağmen ona tekabül eden ayrık sistem için ayrık maximum prensibinin geçerli olmayabileceği literatürden bellidir. Dolayısıyla yukarıda gösterilen akış-şeması yardımıyla sürekli parametrelili sistemler ayrıklaştırıldığında optimalliğin gerekli koşulları ayrıca incelenmelidir. Bu sebeple ayrık sistemler için Optimal Kontrol problemleri sürekli parametrelili Optimal Kontrol problemleri ile ilişkisi olmayan farklı problemler gibi ele alınmalıdır.

Yapılan çalışmalarda, yukarıda söylediğimiz gibi ayrık Optimal Kontrol problemleri sürekli parametrelili Optimal Kontrol problemleri ile ilişkili şekilde incelenmiştir.

Bu çalışmada ise bu açığı kapatmak için iki parametrelili ayrık sistemler ayrıca ele alınmıştır.

Belirli bir anlamda bu tür ayrık sistemler, ikinci mertebeden kısmi türevli hiperbolik denklemlerin yaklaşımıdır.

Genel halde bu tür ayrık sistemler için Pontryagin 'in Maximum Prensibi metodunun hangi hallerde geçerli olduğu saptanmıştır.

Son bölümde belirli bir kimyasal reaktörün optimal işleyişinin bulunması ile ilgili olan bir Optimal Kontrol Problemi iki parametrelili ayrık sisteme indirgenmiş ve çözümü araştırılmıştır.

Bir parametrelili problemler (Propoi, 1981; Canon vd., 1970) 'un çalışmalarında ele alınmıştır.

1. PROBLEMİN SUNULMASI

$$(i,j) \in G_{n,m} = \{(i,j) \mid i=0, \dots, n; \quad j=0, \dots, m\}$$

noktalarının her birinde N boyutlu

$$u(i,j) = (u_1(i,j), \dots, u_N(i,j))$$

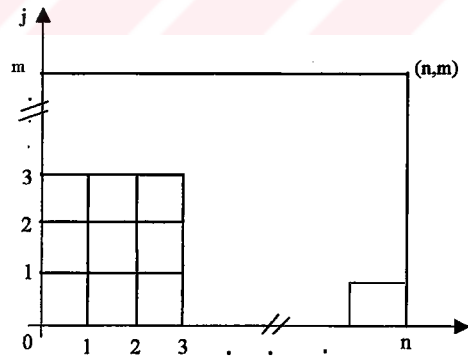
vektörü ile karakterize edilen sistemi ele alalım. Buradaki $u(i,j)$ vektörü aşağıdaki ayrık (discrete) sistem ile tanımlansın (Şekil 1.1):

$$u(i+1, j+1) = f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1} \quad (1.1)$$

f verilmiş N boyutlu vektör fonksiyonu olup

$$v(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j))$$

ise $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ 'de tanımlanmış r -boyutlu kontrol vektör fonksiyonudur.



Şekil 1.1

(1.1) sistemi için Goursat problemini ele alalım (Tychonov vd., 1964).

$$u(i, 0) = a_i^0, \quad i = 0, \dots, n \quad (1.2)$$

$$u(0, j) = b_j^0, \quad j = 0, \dots, m$$

Burada $a_i^0, b_j^0 \in R^N$ verilmiş sabit noktalar olup

$$a_0^0 = b_0^0 \quad (1.3)$$

koşulunun sağlandığını kabul edeceğiz. Bu (1.3) koşuluna uzlaşma koşulu denir ve sağlanması (1.1), (1.2) probleminin çözümünün olması için gereklidir.

(1.1) sistemini bileşenleri ile yazarsak,

$$u_k(i+1, j+1) = f_k(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1} \quad (1.1')$$

$$k = 1, \dots, N$$

olur. Aynı şekilde (1.2) koşullarını yazalım:

$$u_k(i, 0) = a_{k,i}^0, \quad i = 0, \dots, n$$

$$u_k(0, j) = b_{k,j}^0, \quad j = 0, \dots, m \quad (1.2')$$

$$k = 1, \dots, N$$

$a_i^0 = (a_{1,i}^0, a_{2,i}^0, \dots, a_{N,i}^0)$ ve $b_j^0 = (b_{1,j}^0, b_{2,j}^0, \dots, b_{N,j}^0)$ dir.

(1.3) koşulu işe açık şekilde,

$$a_{k,0}^0 = b_{k,0}^0, \quad k = 1, \dots, N$$

olarak yazılır.

(1.1) sisteminin (1.2) koşuluna göre tek $u(i,j)$, $(i,j) \in G_{n,m}$ çözümüne sahip olması için sağ taraftaki $v(i,j)$ vektörü bütün $(i,j) \in G_{n-1,m-1}$ noktalarında önceden verilmiş olmalıdır.

$v(i,j)$, $(i,j) \in G_{n-1,m-1}$ vektörü (1.1) sisteminin sağ tarafına parametre gibi katılır. Bu vektör bir anlamda kontrol vektörü (Boltyanskii, 1978) olup, çok çeşitli kurallarla verilebilir. Pratikte çoğunlukla $v(i,j)$ vektörünün alabileceği değer bölgeleri verilir. Buna göre,

$$V_{ij} \subset R^r, \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1}$$

kümeleri verilmiş olsun.

Tanım 1.1

$$\begin{aligned} v(i,j) &= (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j)), \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1} \text{ vektörünün değerleri} \\ v(i,j) &\in V_{ij}, \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

ise, bu vektöre *mümkün kontrol vektörü* denir.

Mümkün kontrol vektörlerinin kümesini Ω ile gösterelim. Tanıma göre Ω 'nın herbir elemanı belli

$$v(i,j) = (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j))$$

vektör fonksiyonu olup bu vektör fonksiyonu $(i,j) \in G_{n-1,m-1}$ de tanımlanmıştır ve (1.4) koşulunu sağlar.

Ω kümesinin elemanlarını kısaca, $v(i,j)$ ile göstereceğiz.

Şimdi herhangi mümkün

$$v(i,j) = (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j))$$

kontrol vektörünü ele alalım ve (1.1) sisteminin sağ tarafına yazalım. Bu halde (1.1) sistemi

$$u(i, j) = (u_1(i, j), \dots, u_N(i, j))$$

bilinmeyen vektörüne göre belli bir ayrık sistem olur. Bu sistemin (1.2) koşullarına göre tek olan

$$u(i, j) = (u_1(i, j), \dots, u_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n, m}$$

çözümü mevcuttur. Bu çözüme (1.1), (1.2) probleminin mümkün kontrol vektörü $v(i, j)$ 'ye karşı gelen çözümü denir. Kısaca $u(i, j)$ ile göstereceğiz.

(1.1), (1.2) probleminin çözümleri için tanımlanan

$$S(v) = \varphi(u(n, m)) \tag{1.5}$$

fonksiyoneli ele alalım. Burada, φ verilmiş fonksiyondur ve R^N de süreklidir.

(1.1), (1.2) problemi için optimal kontrol problemi aşağıdaki gibi sunulabilir:

Ω mümkün kontrol vektörleri kümesinden öyle $v(i, j)$ kontrol vektörü bulalım ki, (1.1), (1.2) probleminin buna karşı gelen $u(i, j)$ çözümü (1.5) fonksiyoneline minimum (veya maximum) değer versin.

Bu probleme çoğunlukla (1.1), (1.2), (1.5) problemi denir. (1.5) fonksiyoneline minimum değer veren,

$$v^*(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}, \quad v^*(i, j) \in \Omega$$

kontrol vektörüne ise *optimal kontrol vektörü* denir.

2. VARYASYONLARLA DENKLEMLER SİSTEMİ

N boyutlu

$$f(i, j, u, p, q, v) = (f_1(i, j, u, p, q, v), \dots, f_N(i, j, u, p, q, v))$$

vektor fonksiyonu (i, j, u, p, q, v) argümanlarının tümüne göre

$$G_{n-1, m-1} \times R^N \times R^N \times R^N \times R^r$$

de tanımlanmış yani;

$$f: G_{n-1, m-1} \times R^N \times R^N \times R^N \times R^r \rightarrow R^N$$

olsun. Burada

$$p = u(i+1, j), \quad q = u(i, j+1)$$

dir.

Ayrıca f 'in $f_k(i, j, u, p, q, v)$ elemanları keyfi belirlenmiş $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ için $R^N \times R^N \times R^N \times R^r$ de (u, p, q, v) argümanlarına göre sürekli olsun.

$f_k(i, j, u, p, q, v)$ fonksiyonlarının $u = (u_1, \dots, u_N)$, $p = (p_1, \dots, p_N)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$ vektörlerinin $u_\alpha, p_\alpha, q_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$ elemanlarına göre birinci merteben

$$\frac{\partial f_k(i, j, u, p, q, v)}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial f_k(i, j, u, p, q, v)}{\partial p_\alpha}, \frac{\partial f_k(i, j, u, p, q, v)}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

kismi türevleri vardır ve bu kismi türevler bütün $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ için (u, p, q, v) 'ye göre $R^N \times R^N \times R^N \times R^r$ de süreklidirler.

$$f(i, j, u, p, q, v) = (f_1(i, j, u, p, q, v), \dots, f_N(i, j, u, p, q, v))$$

vektör fonksiyonunun $u = (u_1, \dots, u_N)$ vektörünün elemanlarına göre kismi türevleri ile oluşturulan $N \times N$ boyutlu matrisi,

$$f_u(i, j, u, p, q, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(i, j, u, p, q, v)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_N(i, j, u, p, q, v)}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1(i, j, u, p, q, v)}{\partial u_N} & \dots & \frac{\partial f_N(i, j, u, p, q, v)}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

ile göstereceğiz. Bu matrisi bazı hallerde

$$\frac{\partial f(i, j, u, p, q, v)}{\partial u}$$

ile de göstereceğiz.

Aynı kuralla $f(i, j, u, p, q, v)$ vektörünün $p = (p_1, \dots, p_N)$ ve $q = (q_1, \dots, q_N)$ vektörlerine göre kısmi türevleri $N \times N$ boyutlu

$$\frac{\partial f(i, j, u, p, q, v)}{\partial p}, \quad \frac{\partial f(i, j, u, p, q, v)}{\partial q}$$

matrisleri ile tanımlanır.

Amaç fonksiyoneli olan (1.5) 'i tanımlayan $\varphi(u)$ fonksiyonu $u = (u_1, \dots, u_N)$ 'e göre R^N 'de süreklidir ve onun R^N 'de sürekli olan

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

kısmi türevleri vardır. $\varphi(u)$ fonksiyonunun $u = (u_1, \dots, u_N)$ vektörüne göre kısmi türevini

$$\varphi'(u) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

sütun vektörü olarak tanımlayacağız.

Şimdi herhangi $v(i, j)$ kontrol vektör fonksiyonunu ele alalım. (1.1), (1.2) probleminin bu kontrol vektörüne karşı gelen çözümünü $u(i, j)$ ile gösterelim. $\bar{v}(i, j)$ herhangi başka bir

mümkün kontrol vektör fonksiyonu olsun. $\bar{u}(i,j)$ ise (1.1), (1.2) probleminin ona tekabül eden çözümü olsun. O zaman

$$\Delta v(i,j) = \bar{v}(i,j) - v(i,j)$$

ve

$$\Delta u(i,j) = \bar{u}(i,j) - u(i,j)$$

eşitlikleri ile tanımlanan $\Delta v(i,j)$ ve $\Delta u(i,j)$ vektör fonksiyonları ele alınabilir. O halde $\bar{v}(i,j)$ ve $\bar{u}(i,j)$ vektörleri

$$\bar{v}(i,j) = v(i,j) + \Delta v(i,j) \quad (2.1)$$

$$\bar{u}(i,j) = u(i,j) + \Delta u(i,j) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

$v(i,j)$ ve $u(i,j)$ vektörleri, birlikte (1.1)-(1.2) eşitliklerini sağlarlar. $v(i,j) + \Delta v(i,j)$ ve $u(i,j) + \Delta u(i,j)$ vektörleri ise birlikte,

$$u(i+1,j+1) + \Delta u(i+1,j+1) = f(i,j, u(i,j) + \Delta u(i,j), u(i+1,j) + \Delta u(i+1,j), u(i,j+1) + \Delta u(i,j+1), v(i,j) + \Delta v(i,j)), \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1} \quad (2.3)$$

denklemini ve

$$u(i,0) + \Delta u(i,0) = a_i^0, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (2.4)$$

$$u(0,j) + \Delta u(0,j) = b_j^0, \quad j = 0, \dots, m-1$$

koşullarını sağlarlar.

(2.3) eşitliğinden, (1.1) 'i (2.4) 'den ise (1.2) 'yi çıkartırsak $\Delta u(i,j)$ vektörü,

$$\Delta u(i+1, j+1) = \Delta f(i, j) \equiv f(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j), u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j), u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)) \quad (2.5)$$

$$(i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

sisteminin,

$$\Delta u(i, 0) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (2.6)$$

$$\Delta u(0, j) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1$$

koşullarını sağlayan çözümdür. (2.5) sistemine *varyasyonlarla denklemler sistemi* denir (Pontryagin vd., 1962). (2.6) ise sınır değer koşullarıdır.

(2.1) eşitliği ile tanımlanan keyfi $\Delta v(i, j) = (\Delta v_1(i, j), \dots, \Delta v_r(i, j))$ vektörüne kontrol vektörü $v(i, j)$ 'nin mümkün artımı denir.

$v(i, j)$ vektörü ve (1.1), (1.2) 'nin ona karşı gelen $u(i, j)$ çözümü belli olduğu için (2.5) sisteminin keyfi $\Delta v(i, j)$ artımı için (2.6) koşullarını sağlayan tek

$$\Delta u(i, j) = (\Delta u_1(i, j), \dots, \Delta u_N(i, j)) \quad (2.7)$$

çözümü vardır.

Lagrange'in (Alekssev, 1987) sonlu artım formülünden faydalanarak (2.5) sistemini,

$$\begin{aligned} \Delta u(i+1, j+1) = \Delta f(i, j) \equiv & \left[f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) - \right. \\ & \left. f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)) \right] + \Delta u(i, j) f_u(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j) \theta_1^{(1)}, \\ & u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j) \theta_2^{(1)}, u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1) \theta_3^{(1)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) + \\ & + \Delta u(i+1, j) f_p(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j) \theta_1^{(2)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j) \theta_2^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(2)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) + \Delta u(i, j+1)f_q(i, j), \\
& u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(3)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(3)}, u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(3)} \\
& v(i, j) + \Delta v(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta u(i+1, j+1) &= \Delta_v f(i, j) + \Delta u(i, j)f_u(i, j) + \Delta u(i+1, j)f_p(i+1, j) + \\
& + \Delta u(i, j+1)f_q(i, j) + R(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olur, burada

$$\begin{aligned}
\Delta_v f(i, j) &= f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) - \\
& - f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)); \\
R(i, j) &= \Delta u(i, j) \left[f_u(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(1)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(1)}, \right. \\
& \left. u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(1)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_u(i, j) \right] + \\
& + \Delta u(i+1, j) \left[f_p(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(2)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(2)}, \right. \\
& \left. u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(2)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_p(i, j) \right] + \\
& + \Delta u(i, j+1) \left[f_q(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(3)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(3)}, \right. \\
& \left. u(i, j+1) + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(3)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_q(i, j) \right]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$f_u(i, j), f_p(i, j), f_q(i, j)$ 'ler ise sırasıyla

$$f_u(i, j, u, p, q, v), f_p(i, j, u, p, q, v), f_q(i, j, u, p, q, v)$$

matrislerinin $(i, j, u(i, j), u(i + 1, j), u(i, j + 1), v(i, j))$ noktasındaki değerleridir. $\theta_i^{(k)}$ -lar ise elemanları $[0, 1]$ kapalı aralığından olan $N \times N$ boyutlu diagonal matrislerdir.

Buradan varyasyonlarla denklemler sistemini (2.9) şeklinde yazabildięimiz sonucunu elde ederiz.

(2.9) 'a çoğunlukla varyasyonlarla denklemler sisteminin kalan terim ile yazılması denir.

Kalan terim $R(i, j)$, (2.10) eşitliği ile tanımlanır.

(2.5) sisteminden farklı olarak (2.9) sistemi belirli birvanlamda $\Delta u(i, j)$ ye göre lineer denklemler sistemi gibi gözönüne alınabilir.

(2.9) sistemi (2.6) koşullarına göre göz önüne alınmalıdır.

3. EŞ PROBLEM ve OLUŞTURULMASI

Varyasyonlarla denklemler sistemi olan (2.9) sistemini (2.6) koşullarına göre ele alalım.

$$\lambda(i, j) = (\lambda_1(i, j), \dots, \lambda_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

keyfi vektör olsun. (2.9) sistemini sağdan bu vektör ile skaler çarparsak ve $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ olmak üzere toplarsak

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (\Delta u(i+1, j+1), \lambda(i, j)) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left[(\Delta_v f(i, j), \lambda(i, j)) + (\Delta u(i, j) f_u(i, j), \lambda(i, j)) + (\Delta u(i+1, j) f_p(i, j), \lambda(i, j)) + \right. \\ & \quad \left. (\Delta u(i, j+1) f_q(i, j), \lambda(i, j)) + (R(i, j), \lambda(i, j)) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

olur.

(3.1) eşitliğinde (2.6) koşullarını dikkate alalım ve aşağıdaki indis dönüşümlerini yapalım:

$$i+1 = \alpha, \quad j+1 = \beta \text{ olsun.}$$

$$i=0 \text{ için } \alpha = 1, \quad i=n-1 \text{ için } \alpha = n$$

$$j=0 \text{ için } \beta = 1, \quad j=m-1 \text{ için } \beta = m \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta u(i, j), \lambda(i-1, j-1)) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i, j) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i, j) f_u^*(i, j)) - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m (\Delta u(i, j), \lambda(i, j-1) f_q^*(i, j-1)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i-1, j) f_p^*(i-1, j)) - \eta = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

burada

$$\eta = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (R(i,j), \lambda(i,j))$$

$$\begin{aligned} \Delta_v H(i,j) = & H(i,j, \lambda(i,j), u(i,j), u(i+1,j), u(i,j+1), v(i,j) + \Delta v(i,j)) - \\ & - H(i,j, \lambda(i,j), u(i,j), u(i+1,j), u(i,j+1), v(i,j)); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$H(i,j, \lambda, u, p, q, v) = (f(i,j, u, p, q, v), \lambda(i,j))$$

dır.

(3.3) eşitliği ile tanımlanan ve

$$H : G_{n-1, m-1} \times R^N \times R^N \times R^N \times R^N \times R^r \rightarrow R$$

olan

$$H(i,j, \lambda, u, p, q, v) = (f(i,j, u, p, q, v), \lambda(i,j))$$

fonksiyonuna *Hamilton-Pontryagin Fonksiyonu* denir (Pontryagin vd., 1962).

(3.2) eşitliğini ele alalım.

$$\begin{aligned} & (\Delta u(n, m), \lambda(n-1, m-1)) + \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(n, j), \lambda(n-1, j-1)) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta u(i, m), \lambda(i-1, m-1)) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i-1, j-1)) - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i, j) f_u^*(i, j)) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i, j-1) f_q^*(i, j-1)) - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta u(i, m), \lambda(i, m-1) f_q^*(i, m-1)) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i-1, j) f_p^*(i-1, j)) - \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(n, j), \lambda(n-1, j) f_p^*(n-1, j)) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i, j) - \eta = 0$$

olur. (3.4) eşitliğini

$$\begin{aligned} & (\Delta u(n, m), \lambda(n-1, m-1)) + \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(n, j), \lambda(n-1, j-1) - \lambda(n-1, j) f_p^*(n-1, j)) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta u(i, m), \lambda(i-1, m-1) - \lambda(i, m-1) f_q^*(i, m-1)) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta u(i, j), \lambda(i-1, j-1) - \lambda(i, j) f_u^*(i, j) - \lambda(i, j-1) f_q^*(i, j-1) - \\ & - \lambda(i-1, j) f_p^*(i-1, j)) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i, j) - \eta = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\lambda(i, j) = (\lambda_1(i, j), \dots, \lambda_N(i, j))$ vektörü aşağıdaki eşitlikleri sağlasın:

$i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m-1$ olmak üzere

$$\lambda(i-1, j-1) - \lambda(i, j) f_u^*(i, j) - \lambda(i, j-1) f_q^*(i, j-1) - \lambda(i-1, j) f_p^*(i-1, j) = 0 \quad (3.6)$$

$$\lambda(i-1, m-1) - \lambda(i, m-1) f_q^*(i, m-1) = 0 \quad (3.7)$$

$$\lambda(n-1, j-1) - \lambda(n-1, j) f_p^*(n-1, j) = 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda(n-1, m-1) = a \quad (3.9)$$

burada $a \in R^N$ verilmiş sabit vektördür.

$v(i, j)$ kontrol vektörü ve (1.1), (1.2) probleminin ona karşı gelen $u(i, j)$ çözümü belli olduğunda $f_u(i, j)$, $f_p(i, j)$ ve $f_q(i, j)$ 'lerin belli olan $N \times N$ boyutlu matrisler oldukları açıktır. Yani, (3.6), (3.7), (3.8) eşitliklerinde $f_u(i, j)$, $f_p(i, j)$, $f_q(i, j)$ matrisleri belirli matrisler gibi göz önüne alınabilir.

(3.8) eşitliğini denklem gibi, (3.9) koşulunu ise başlangıç değeri gibi göz önüne alırsak, (3.8) 'de önce $j = m - 1$ olursa $\lambda(n-1, m-2)$ bulunur. Sonra $j = m - 2, \dots, 1$ alırsak, (3.8) 'den ardışık şekilde $\lambda(n-1, m-3), \dots, \lambda(n-1, 0)$ bulunur. Dolayısıyla (3.8) 'den (3.9) 'ün yardımıyla

$$\lambda(n-1, j) = \bar{b}_j^0, \quad j = m-1, \dots, 0 \quad (3.10)$$

değerleri tek değerli olarak bulunur.

Benzer şekilde gösterilebilir ki, (3.7) den (3.9) başlangıç değer koşulu ile

$$\lambda(i, m-1) = \bar{a}_i^0, \quad i = n-1, \dots, 0 \quad (3.11)$$

değerleri tek değerli olarak bulunur. Bu halde (3.9) 'dan

$$\bar{a}_{n-1}^0 = \bar{b}_{m-1}^0 = \bar{\alpha} \quad (3.12)$$

olur. Yani, (3.10) ve (3.11) koşulları uzlaşma ($a_i^0 = b_j^0$) koşullarını sağlarlar.

(3.10) ve (3.11) koşullarına, iki parametrelili (3.6) sistemi için Goursat Koşulları gibi bakılabilir (Tychonov vd., 1964). Bu halde (3.6) sisteminin (3.10), (3.11) koşullarını sağlayan tek değerli $\lambda(i, j)$ çözümü olacaktır. Yani;

$$\lambda(i, j), \quad i = n-1, \dots, 0; \quad j = m-1, \dots, 0$$

değerlerinin hepsi bulunmuş olacaktır. Dolayısıyla (3.6) sisteminin (3.7)-(3.9) koşullarını sağlayan

$$\lambda(i, j) = (\lambda_1(i, j), \dots, \lambda_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

çözümünün var ve tek olduğu sonucunu elde ederiz.

(3.6) sistemine *Eş Sistem* (Adjoint System), (3.6)-(3.9) problemine ise (1.1),(1.2)'nin *Eş Problemi* (Adjoint Problem)denir (Alekseev, 1987).

Teorem 3.1

$a \in R^N$ verilmiş vektör, $v(i,j) = (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j))$ verilmiş kontrol vektörü,

$$u(i,j) = (u_1(i,j), \dots, u_N(i,j))$$

ise (1.1), (1.2) probleminin çözümü olsun. Bu halde (3.6)-(3.9) eş probleminin tek

$$\lambda(i,j) = (\lambda_1(i,j), \dots, \lambda_N(i,j)), \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1}$$

çözümü vardır.

□

Bu teoremin ispatı üstteki bölümde verilmiştir.

Bu $\lambda(i,j)$ çözümüne eş problemin,

$$v(i,j) = (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j)), \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1}$$

kontrol vektörü ve verilen $a \in R^N$ vektörüne karşı gelen çözümü denir.

$\lambda(i,j) = (\lambda_1(i,j), \dots, \lambda_N(i,j)), \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1}$ eş problemin çözümü olarak seçildiğinde, (3.5) formülü

$$(\Delta u(n,m), a) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i,j) - \eta = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde olur. Burada $a \in R^N$ sabit keyfi vektördür.

4. AMAÇ FONKSİYONELİNİN ARTIM FORMÜLÜ

$$v(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

ve

$$v(i, j) + \Delta v(i, j) = (v_1(i, j) + \Delta v_1(i, j), \dots, v_r(i, j) + \Delta v_r(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

gibi iki vektör fonksiyonunu göz önüne alalım. (1.5) amaç fonksiyonelinin bunlara karşı gelen artımını

$$\Delta S(v) = S(v + \Delta v) - S(v) = \varphi(u(n, m) + \Delta u(n, m)) - \varphi(u(n, m)) \quad (4.1)$$

şeklinde yazabiliriz.

Lagrange 'in sonlu artım formülünden (Alekshev, 1987) faydalanarak (4.1) 'i

$$\Delta S(v) = \Delta u(n, m) \frac{\partial \varphi(u(n, m) + \Delta u(n, m)\theta_0)}{\partial u}$$

şeklinde yazalım. Burada θ_0 , $N \times N$ boyutlu diagonal matrisdir ve bu matrisin elemanları $[0, 1]$ aralığındadır. Buradan,

$$\Delta S(v) = \Delta u(n, m) \frac{\partial \varphi(u(n, m))}{\partial u} + \eta_0 \quad (4.2)$$

olur. Buradaki η_0 kalan terimdir ve

$$\eta_0 = \Delta u(n, m) \left[\frac{\partial \varphi(u(n, m) + \Delta u(n, m)\theta_0)}{\partial u} - \frac{\partial \varphi(u(n, m))}{\partial u} \right]$$

dır.

(3.13) 'in sol tarafını (4.2) 'nin sağ tarafına eklersek,

$$\Delta S(v) = (\Delta u(n, m), \alpha) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i, j) + \Delta u(n, m) \frac{\partial \varphi^*(u(n, m))}{\partial u} + \eta_0 - \eta$$

olur. (* işareti ile transpoze işlemi gösterilmiştir.)

$$\Delta S(v) = \left(\Delta u(n, m), \alpha + \frac{\partial \varphi^*(u(n, m))}{\partial u} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i, j) + \eta_1 \quad (4.3)$$

yazılabilir. Burada

$$\eta_1 = \eta_0 - \eta \quad (4.4)$$

dır. (4.3) eşitliğinde α vektörünü

$$\alpha = - \frac{\partial \varphi^*(u(n, m))}{\partial u} \quad (4.5)$$

şeklinde seçersek amaç fonksiyonelinin artımı daha basit olur:

$$\Delta S(v) = - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i, j) + \eta_1 \quad (4.6)$$

Bu formüle *Amaç Fonksiyonelinin Artım Formülü* denir. Buradaki η_1 ise kalan terimdir.

(4.5) 'i eş problemde yerine yazarsak (3.9) koşulu

$$\lambda(n-1, m-1) + \frac{\partial \varphi^*(u(n, m))}{\partial u} = 0 \quad (4.7)$$

şeklinde olur.

(3.6), (3.7), (3.8), (4.7) problemine yani, $i = 1, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, m-1$ olmak üzere

$$\lambda(i-1, j-1) - \lambda(i, j) f_u^*(i, j) - \lambda(i, j-1) f_q^*(i, j-1) - \lambda(i-1, j) f_p^*(i-1, j) = 0 \quad (4.8)$$

$$\lambda(i-1, m-1) - \lambda(i, m-1) f_q^*(i, m-1) = 0 \quad (4.9)$$

$$\lambda(n-1, j-1) - \lambda(n-1, j) f_p^*(n-1, j) = 0 \quad (4.10)$$

$$\lambda(n-1, m-1) + \frac{\partial \varphi^*(u(n, m))}{\partial u} = 0 \quad (4.11)$$

problemine *optimal kontrol probleminin eş problemi* diyeceğiz.

Bu problemin optimal kontrol teorisindeki önemi, çözümünü ile amaç fonksiyonelinin artımını (4.6) ile basit olarak bulunmasını mümkün kılmasıdır.



5. MÜMKÜN KONTROL FONKSİYONUN İĞNEVARİ ARTIMI ve AMAÇ FONKSİYONELİNİN KALAN KISMI ÜZERİNDE HESAPLANMASI

Herhangi

$$v(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

kontrol vektör fonksiyonunu göz önüne alalım. Tanıma göre

$$v(i, j) \in V_{ij}, \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

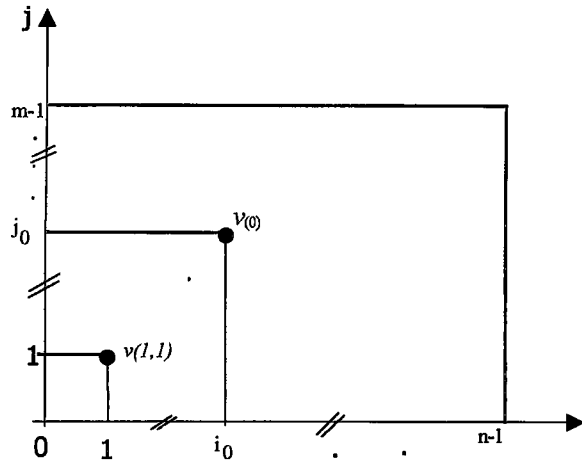
idi. Belirli bir $(i_0, j_0) \in G_{n-1, m-1}$ noktasını kaydedelim. Verilen

$$v(i, j) \in V_{ij}, \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

kontrol vektör fonksiyonu ile

$$v_{(i_0, j_0)}(i, j) = \begin{cases} v_{(0)} & (i, j) = (i_0, j_0) \\ v(i, j) & (i, j) \in G_{n-1, m-1} \setminus \{(i_0, j_0)\} \end{cases}$$

olsun. Burada $v_{(0)} \in V_{i_0, j_0}$ verilmiş noktadır.



Şekil 5.1

$$v_{(i_0, j_0)}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

vektör fonksiyonu (1.4) koşullarını sağlar. Dolayısıyla $v_{(i_0, j_0)}(i, j)$ mümkün kontrol vektör fonksiyonudur.

$v_{(i_0, j_0)}(i, j)$ vektör fonksiyonu yalnız (i_0, j_0) noktasında $v(i, j)$ 'den farklı diğer noktalarda ona eşittir. Dolayısıyla da

$$v_{(i_0, j_0)}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

vektör fonksiyonuna $v(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ mümkün kontrol vektör fonksiyonunun **İğnevari varyasyonu** denir.

$$\Delta v_{(i_0, j_0)}(i, j) = \begin{cases} v_{(0)} - v_{(i_0, j_0)} & (i, j) = (i_0, j_0) \\ 0, & (i, j) \in G_{n-1, m-1} \setminus \{(i_0, j_0)\} \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan $\Delta v_{(i_0, j_0)}(i, j)$, $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ vektör fonksiyonunu ele alalım. Bu vektör fonksiyonuna $v(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ kontrol vektörünün iğnevari artımı denir (Pontryagin vd., 1962).

Bu artım ile iğnevari varyasyon (değişim),

$$v_{(i_0, j_0)}(i, j) = v(i, j) + \Delta v_{(i_0, j_0)}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

şeklinde bulunabilir.

Şimdi, (2.10) eşitliği ile tanımlanan $R(i, j)$ vektör fonksiyonunun iğnevari artımına karşı gelen değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} R(i, j) = & \Delta u(i, j) [f_u(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_u(i, j)] + \\ & + \Delta u(i, j) [f_u(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(1)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(1)}, u(i, j+1) + \\ & + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(1)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_u(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j))] + \\ & + \Delta u(i+1, j) [f_p(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_p(i, j)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta u(i+1,j)\left[f_p(i,j,u(i,j)+\Delta u(i,j)\theta_1^{(2)},u(i+1,j)+\Delta u(i+1,j)\theta_2^{(2)},u(i,j+1)+\right. \\
& \left. +\Delta u(i,j+1)\theta_3^{(2)},v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_p(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))\right]+ \\
& +\Delta u(i,j+1)\left[f_q(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_q(i,j)\right]+ \\
& +\Delta u(i,j+1)\left[f_q(i,j,u(i,j)+\Delta u(i,j)\theta_1^{(3)},u(i+1,j)+\Delta u(i+1,j)\theta_2^{(3)},u(i,j+1)+\right. \\
& \left. +\Delta u(i,j+1)\theta_3^{(3)},v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_q(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))\right]
\end{aligned}$$

Buradan ise

$$R(i,j) \approx \Delta u(i,j)\Delta_v f_u(i,j) + \Delta u(i+1,j)\Delta_v f_p(i,j) + \Delta u(i,j+1)\Delta_v f_q(i,j) + R^{(0)}(i,j) \quad (5.1)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
R^{(0)}(i,j) = & \Delta u(i,j)\left[f_u(i,j,u(i,j)+\Delta u(i,j)\theta_1^{(1)},u(i+1,j)+\Delta u(i+1,j)\theta_2^{(1)},u(i,j+1)+\right. \\
& \left. +\Delta u(i,j+1)\theta_3^{(1)},v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_u(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))\right]+ \\
& +\Delta u(i+1,j)\left[f_p(i,j,u(i,j)+\Delta u(i,j)\theta_1^{(2)},u(i+1,j)+\Delta u(i+1,j)\theta_2^{(2)},u(i,j+1)+\right. \\
& \left. +\Delta u(i,j+1)\theta_3^{(2)},v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_p(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))\right]+ \\
& +\Delta u(i,j+1)\left[f_q(i,j,u(i,j)+\Delta u(i,j)\theta_1^{(3)},u(i+1,j)+\Delta u(i+1,j)\theta_2^{(3)},u(i,j+1)+\right. \\
& \left. +\Delta u(i,j+1)\theta_3^{(3)},v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_q(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))\right]
\end{aligned} \quad (5.2)$$

olup

$$\begin{aligned}
\Delta_v f_u(i,j) & = f_u(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_u(i,j) \\
\Delta_v f_p(i,j) & = f_p(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_p(i,j) \\
\Delta_v f_q(i,j) & = f_q(i,j,u(i,j),u(i+1,j),u(i,j+1),v(i,j)+\Delta v(i,j))-f_q(i,j)
\end{aligned} \quad (5.3)$$

dır.

(5.1)-(5.3) formülleri bize amaç fonksiyonelinin (4.3) artım formülündeki kalan η kısmını hesaplamak (sayısalılaştırmak) için lazım olacaktır.

(4.3) artım formülünde

$$\Delta v(i, j) = \Delta v_{(i_0, j_0)}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

olsun. Bu halde

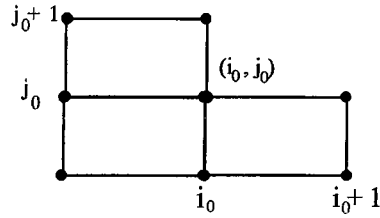
$(i, j) \neq (i_0, j_0)$ olduğunda $\Delta v_{(i_0, j_0)}(i, j) = 0$ olup

$$\Delta u(i_0, j_0) = \Delta u(i_0 + 1, j_0) = \Delta u(i_0, j_0 + 1) = 0$$

ve

$$\Delta_v f_u(i, j) = 0, \quad \Delta_v f_p(i, j) = 0, \quad \Delta_v f_q(i, j) = 0$$

dır. Buna göre $i \leq i_0$ veya $j \leq j_0$ olduğunda,



Şekil 5.2

$\Delta u(i, j) = 0$ olur.

$$R(i, j) = R^{(0)}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1} \quad (5.4)$$

olur. Ayrıca $0 \leq i \leq i_0$ veya $0 \leq j \leq j_0$ olduğunda

$$R^{(0)}(i, j) = 0 \quad (5.5)$$

olur. Dolayısıyla iğnevari $\Delta v(i, j) = \Delta v_{(i_0, j_0)}(i, j)$, $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ artımı için amaç fonksiyonelinin kalan kısmındaki η aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\eta = \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \sum_{j=j_0+1}^{m-1} (R^{(0)}(i, j), \lambda(i, j)) \quad (5.6)$$

Bu formül doğrudan (3.3) eşitliğinden elde edilir.



6. MÜMKÜN HIZLAR KÜMESİ KONVEK OLAN PROBLEMLER

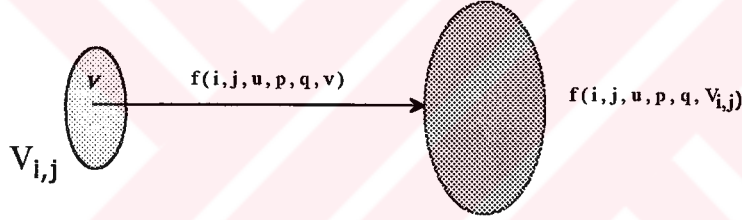
$$v(i,j) = (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j))$$

kontrol vektör fonksiyonlarının keyfi $(i,j) \in G_{n-1,m-1}$ noktasında mümkün değerlerinin kümesi olan $V_{i,j}$ için $f(i,j,u,p,q, V_{i,j}) \subset R^N$ kümesi konvex bir küme olsun. Yani,

$$f(i,j,u,p,q, V_{i,j}) = \left\{ f(i,j,u,p,q, v) \mid v \in V_{i,j} \right\}$$

kümesi keyfi $(i,j,u,p,q) \in G_{n-1,m-1} \times R^N \times R^N \times R^N$ noktası için konvex bir küme olsun.

$f(i,j,u,p,q, V_{i,j}) \subset R^N$ kümesi (1.1) sisteminin mümkün hızlar kümesi diye isimlendirilir. Bu kümeye $V_{i,j} \subset R^r$ kümesinin tasviri gibi bakılabilir.



Şekil 6.1

Keyfi

$$v(i,j) = (v_1(i,j), \dots, v_r(i,j)), \quad (i,j) \in G_{n-1,m-1}$$

mümkün kontrol vektör fonksiyonunu göz önüne alalım. Özel halde $v(i,j) \in V_{i,j}$ olur.

Herhangi $(i_0, j_0) \in G_{n-1,m-1}$ noktası verilmiş olsun. Keyfi

$$v_{(0)} \in V_{i_0, j_0}$$

vektörünü ele alalım.

$$f(i_0, j_0, u, p, q, v_{(0)}) \in f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$$

ve

$$f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0)) \in f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$$

dir.

$f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$ kümesi konvex olduğu için keyfi $\varepsilon \in [0, 1]$ sayısı için $\exists v_{\varepsilon, i_0, j_0} \in V_{i_0, j_0}$ noktası vardır ki,

$$f(i_0, j_0, u, p, q, v_{\varepsilon, i_0, j_0}) = f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0)) + \varepsilon [f(i_0, j_0, u, p, q, v(0)) - f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0))] \quad (6.1)$$

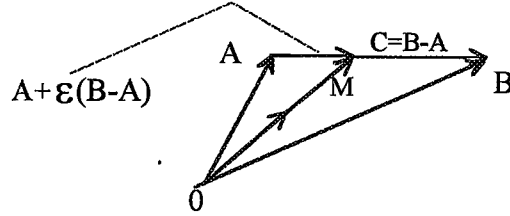
koşulu sağlar.

$v(i_0, j_0)$ ve $v(0)$ noktaları V_{i_0, j_0} 'dan oldukları için $f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0))$ ve $f(i_0, j_0, u, p, q, v(0))$ noktaları $f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$ 'a aittir.

$f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$ konvex olduğu için $f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0))$ ve $f(i_0, j_0, u, p, q, v(0))$ noktalarını birleştiren doğru parçası $f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$ 'in içindedir. Yani,

$$M = f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0)) + \varepsilon [f(i_0, j_0, u, p, q, v(0)) - f(i_0, j_0, u, p, q, v(i_0, j_0))] \in f(i_0, j_0, u, p, q, V_{i_0, j_0})$$

dir.

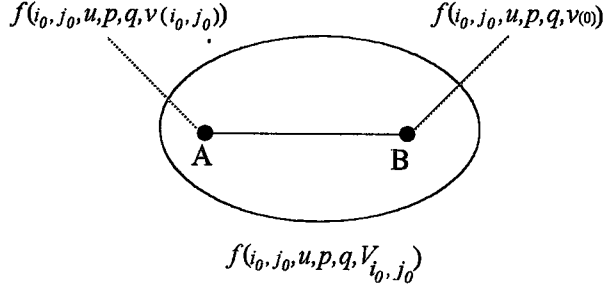


Şekil 6.2

$M = A + \varepsilon C$ olur. Buradan $\exists v_{\varepsilon, i_0, j_0}$ noktası vardır ki,

$$f(i_0, j_0, u, p, q, v_{\varepsilon, i_0, j_0}) = M$$

dir.



Şekil 6.3

Verilen

$$v(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j))$$

mümkün kontrol fonksiyonu ile aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$\Delta v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j) = \begin{cases} v_{\varepsilon, i_0, j_0} - v(i_0, j_0) & (i, j) = (i_0, j_0) \\ 0, & (i, j) \in G_{n-1, m-1} \setminus \{(i_0, j_0)\} \end{cases}$$

$\Delta v_{\varepsilon, i_0, j_0}$ vektör fonksiyonuna $v(i, j)$ vektör fonksiyonunun iğnevari varyasyonu (değişimi) denir.

$\Delta v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$ ile

$$v(i, j) + \Delta v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j) = v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j) = \begin{cases} v_{\varepsilon, i_0, j_0} & (i, j) = (i_0, j_0) \\ v(i, j) & (i, j) \in G_{n-1, m-1} \setminus \{(i_0, j_0)\} \end{cases}$$

dir. Yani, $v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$, $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ fonksiyonu mümkün kontrol fonksiyonudur.

$v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$, $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$, mümkün kontrol fonksiyonuna $v(i, j)$, $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ mümkün kontrol fonksiyonunun iğnevari artımı denir.

(1.1)-(1.2) probleminin

$$v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

mümkün kontrol fonksiyonuna karşı gelen çözümü

$$u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n, m}$$

olsun. Bu halde

$$u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j) - u(i, j) = \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$$

vektör fonksiyonu aşağıdaki sistemin çözümü olur.

$$\begin{aligned} \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i+1, j+1) = & f(i, j, u(i, j) + \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j), u(i+1, j) + \\ & + \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i+1, j), u(i, j+1) + \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j+1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)) - \\ & - f(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1} \end{aligned} \quad (6.2)$$

ve

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, 0) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (6.3)$$

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(0, j) = 0, \quad j = 0, \dots, m$$

koşullarını da sağlar.

Şimdi (6.2)-(6.3) sisteminin

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n, m}$$

çözümünün bazı özelliklerini araştıralım.

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j) = 0, \quad (i, j) \in G_{n, m}^{(i_0, j_0)} \quad (6.4)$$

olur. Burada

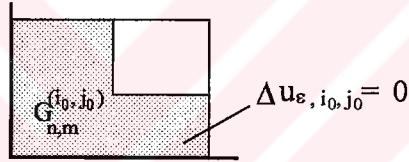
$$G_{n-1, m-1}^{(i_0, j_0)} = \left\{ (i, j) \in G_{n, m} \mid i \leq i_0 \text{ yada } j \leq j_0 \right\}$$

dır.

$\Delta v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$ vektör fonksiyonu sadece (i_0, j_0) noktasında sıfırdan farklı olduğundan $\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$ vektör fonksiyonu sadece

$$G_{n, m} \setminus G_{n, m}^{(i_0, j_0)}$$

bölgesinde sıfırdan farklı olabilir. Şekilde $G_{n, m}^{(i_0, j_0)}$ bölgesi şekilde taralı olan kısımdır.



Şekil 6.4

$G_{n, m} \setminus G_{n, m}^{(i_0, j_0)}$ bölgesinde $\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)$ vektörünün değerini hesaplamak için (6.2) de önce $(i, j) = (i_0, j_0)$ alalım. Bu halde

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 1) = f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}) -$$

$$-f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v(i_0, j_0))$$

(6.1) eşitliğine göre

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j) = \varepsilon \Delta v_{(0)} f(i_0, j_0)$$

olur. Burada,

$$\Delta v_{(0)} f(i_0, j_0) = f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v_{(0)}) -$$

$$-f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v(i_0, j_0))$$

olup

$$\begin{aligned} \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 1) &= f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}) - \\ &\quad - f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v(i_0, j_0)) \\ &= \varepsilon \Delta v_{(0)} f(i_0, j_0) \end{aligned} \quad (6.5)$$

dır.

$$\begin{aligned} \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 2) &= f(i_0, j_0 + 1, u(i_0, j_0 + 1) + \underbrace{\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0, j_0 + 1)}_0, \\ &\quad u(i_0 + 1, j_0 + 1) + \underbrace{\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 1)}_0, \\ &\quad u(i_0, j_0 + 2) + \underbrace{\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0, j_0 + 2)}_0, \\ &\quad v(i_0, j_0 + 1) + \underbrace{\Delta v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0, j_0 + 1)}_0) - \\ &\quad - f(i_0, j_0 + 1, u(i_0, j_0 + 1), u(i_0 + 1, j_0 + 1), u(i_0, j_0 + 2), v(i_0, j_0)) \end{aligned}$$

Buradan

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0, j) = 0$$

$$\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j_0) = 0$$

olduğu için

$$\begin{aligned} \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 2) &= f(i_0, j_0 + 1, u(i_0, j_0 + 1), u(i_0 + 1, j_0 + 1) + \Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 1), \\ &\quad u(i_0, j_0 + 2), v(i_0, j_0 + 1)) - \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$- f(i_0, j_0 + 1, u(i_0, j_0 + 1), u(i_0 + 1, j_0 + 1), u(i_0, j_0 + 2), v(i_0, j_0))$$

olur.

$f(i, j, u, p, q, v)$ fonksiyonu (u, p, q) argümanlarına göre Lipschitz şartını sağlasın. (Aleksseev, 1987). Bu halde (6.6) 'dan

$$\|\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 2)\| \leq M \|\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 1)\| \quad (6.7)$$

olur. Burada (6.5) eşitliğini göz önüne aldığımızda

$$\|\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 1)\| \leq M_1 \varepsilon \quad (6.8)$$

dır. (6.8) 'i (6.7) 'ye götürürsek,

$$\|\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i_0 + 1, j_0 + 2)\| \leq M_2 \varepsilon \quad (6.9)$$

eşitsizliğini elde ederiz. İşlemleri bu tarzda devam ettirirsek,

$$\|\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)\| \leq M_3 \varepsilon, \quad (i, j) \in G_{n, m}^{(i_0, j_0)} \quad (6.10)$$

olur. (6.10) eşitsizliğini amaç fonksiyonelinin kalan kısmının (5.6) formülünde dikkate aldığımızda (5.2) 'den (aşağıdaki ifade için $\Delta u_{\varepsilon, i_0, j_0}(\dots)$ lerin $\Delta u(\dots)$ olarak yazıldığına dikkat edin.)

$$\begin{aligned} R^{(0)}(i, j) &\leq \Delta u(i, j) \left[f_u(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(1)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(1)}, u(i, j+1) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(1)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_u(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) \right] + \\ &+ \Delta u(i+1, j) \left[f_p(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(2)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(2)}, u(i, j+1) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(2)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_p(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) + \Delta v(i, j)) \right] + \\ &\quad + \Delta u(i, j+1) \left[f_q(i, j, u(i, j) + \Delta u(i, j)\theta_1^{(3)}, u(i+1, j) + \Delta u(i+1, j)\theta_2^{(3)}, u(i, j+1) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta u(i, j+1)\theta_3^{(3)}, v(i, j) + \Delta v(i, j)) - f_q(i, j, u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j) \right. \\ &\quad \left. + \Delta v(i, j)) \right] \leq M_4 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

olup (5.6) 'dan

$$|\eta| \leq M_5 \varepsilon^2 \quad (6.11)$$

olur. Burada, M_k 'lar ε ile ilgili olmayan pozitif sayılardır.

7. MAXIMUM PRENSİBİ VE İSPATI

Amaç fonksiyonelinin fark formülünü ele alalım. Kontrol vektörünün

$$v(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

optimal olduğunu kabul edelim. Ona tekabül eden (1.1) - (1.2) probleminin çözümü,

$$u(i, j) = (u_1(i, j), \dots, u_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n, m}$$

olup,

$$\lambda(i, j) = (\lambda_1(i, j), \dots, \lambda_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

ise ona karşı gelen (3.6)- (3.10) probleminin çözümüdür. O zaman (1.5) fonksiyonelinin farkı (4.3) formülü ile verilir. Bu halde keyfi $(i, j) \in G_{n-1, m-1}$ noktasında *Maximum Prensibi* diye isimlendirilen aşağıdaki koşulun sağlanması gerektiğini ispat edelim:

$$\begin{aligned} \max_{v \in V_{ij}} H(i, j, \lambda(i, j), u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)) = \\ = H(i, j, \lambda(i, j), u(i, j), u(i+1, j), u(i, j+1), v(i, j)) \end{aligned} \quad (7.1)$$

İspat:

Aksini farzedelim. O zaman en az bir $(i_0, j_0) \in G_{n-1, m-1}$ ve $v_{(0)} \in V_{i_0, j_0}$ noktaları olmalıdır ki,

$$H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v_{(0)}) >$$

$$> H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v(i_0, j_0))$$

dır. Şimdi $v_{(0)} \in V_{i_0, j_0}$ noktasının ve (6.1) eşitliğinin yardımıyla tanımlanan $v_{\epsilon, i_0, j_0} \in V_{i_0, j_0}$ noktasını ve v_{ϵ, i_0, j_0} noktasının yardımı ile oluşan sonsuz küçük varyasyonu göz önüne alalım. Bu varyasyonun (değişimin) yardımı ile

$$v_{\epsilon, i_0, j_0}(i, j), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

kontrol fonksiyonunu oluşturalım. Bu fonksiyona karşı gelen fark (4.6 dan)

$$\Delta S(v) = -\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i,j) + \eta$$

olur. Yani,

$$S(v_{\varepsilon, i_0, j_0}) - S(v) = -\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_v H(i,j) + \eta$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \Delta_v H(i,j) &= H(i,j, \lambda(i,j), u(i,j), u(i+1,j), u(i,j+1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i,j)) - \\ &\quad - H(i,j, \lambda(i,j), u(i,j), u(i+1,j), u(i,j+1), v(i,j)) = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)) - \\ \quad - H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v(i_0, j_0)) & , (i, j) = (i_0, j_0) \\ 0, & (i, j) \neq (i_0, j_0) \end{cases}$$

olup

$$S(v_{\varepsilon, i_0, j_0}) - S(v) =$$

$$= - \left[\begin{array}{l} H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)) - \\ - H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v(i_0, j_0)) \end{array} \right] + \eta$$

olur. (6.1) koşuluna göre

$$\begin{aligned} &H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)) - \\ &- H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v(i_0, j_0)) = \\ &= (\lambda(i_0, j_0), f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v_{\varepsilon, i_0, j_0}(i, j)) - \\ &\quad - f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0+1, j_0), u(i_0, j_0+1), v(i_0, j_0))) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon(\lambda(i_0, j_0), f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v_{(0)})) - \\
&\quad - f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v(i_0, j_0))) = \\
&= \varepsilon(\lambda(i_0, j_0), \Delta v_{(0)} f(i_0, j_0))
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\Delta v_{(0)} f(i_0, j_0) &= f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v_{(0)}) - \\
&\quad - f(i_0, j_0, u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v(i_0, j_0))
\end{aligned}$$

dır. Bu halde,

$$S(v_{\varepsilon, i_0, j_0}) - S(v) = -\varepsilon(\lambda(i_0, j_0), \Delta v_{(0)} f(i_0, j_0)) + \eta = -\varepsilon\left(\alpha - \frac{\eta}{\varepsilon}\right)$$

Şöyle ki,

$$\begin{aligned}
\alpha &= (\lambda(i_0, j_0), \Delta v_{(0)} f(i_0, j_0)) = \\
&= H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v_{(0)}) - \\
&\quad - H(i_0, j_0, \lambda(i_0, j_0), u(i_0, j_0), u(i_0 + 1, j_0), u(i_0, j_0 + 1), v(i_0, j_0)) > 0
\end{aligned}$$

dır. Burada $\varepsilon \in [0, 1]$ parametredir. $\alpha > 0$ olduğu için ve (6.11) koşuluna göre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{|\eta|}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

olduğu için, yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ 'lar için

$$\alpha - \frac{\eta}{\varepsilon} > 0$$

olur. Bu halde

$$-\varepsilon\left(\alpha - \frac{\eta}{\varepsilon}\right) < 0$$

veya

$$S(v_{\varepsilon, i_0, j_0}) - S(v) < 0 \quad \Rightarrow \quad S(v_{\varepsilon, i_0, j_0}) < S(v)$$

olur. Böylece aşağıda teorem olarak birkez daha yazılan Maximum Prensibi ispatlanmış oldu.

Teorem 7.1

Diyelim ki,

$$v(i, j) = (v_1(i, j), \dots, v_r(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

belirli bir kontrol vektörü,

$$u(i, j) = (u_1(i, j), \dots, u_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n, m}$$

ve

$$\lambda(i, j) = (\lambda_1(i, j), \dots, \lambda_N(i, j)), \quad (i, j) \in G_{n-1, m-1}$$

vektörleri ise buna karşı gelen (1.1)-(1.2) ve (3.6)-(3.10) problemlerinin çözümüdür. O zaman $v(i, j)$ vektörünün optimal olması için gerekli koşul onun Maximum Prensibini sağlamasıdır.

8. BASİT BİR ÖRNEĞİN İNCELENMESİ

$N = 1, r = 2$ olmak üzere

$$u(i+1, j+1) = u(i, j) + v_1^2(i, j) - 2v_1(i, j)v_2(i, j) + v_2^2(i, j) \quad (8.7)$$

$$i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1, ((i, j) \in G_{n-1, m-1})$$

ayrık denklemi ve

$$u(i, 0) = u(0, j) = 0; \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m \quad (8.8)$$

koşulları ve

$$S(v) = u^2(n, m) \rightarrow \min$$

amaç fonksiyoneli veriliyor. $n = 5$ ve $m = 5$ olması durumunda;

$$S(v) = u^2(5, 5) \rightarrow \min$$

değerini hesaplayalım.

Cözüm:

İlk olarak problemi inceleyelim.

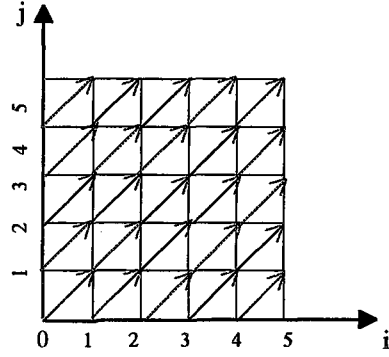
$$u(i+1, j+1) = u(i, j) + f(v(i, j)) = u(i, j) + (v_1(i, j) - v_2(i, j))^2$$

dır.

$$i = 0 \text{ için } u(0, 0) = u(0, 1) = \dots = u(0, 5) = 0$$

$$j = 0 \text{ için } u(0, 0) = u(1, 0) = \dots = u(5, 0) = 0$$

başlangıç koşulları olarak verilmiş. Bunun karakteristik diyagramını inceleyelim.



u 'nun karakteristik köşegenler diyagramında görüldüğü gibi yukarı doğru karakteristiktir. Yani, köşegen üzerindeki bir elemanı aynı köşegenin alt elemanı belirler.

Şimdi eş problemi oluşturalım:

λ 'nın oluşturulması için (3.6) ve (3.9) daki eşitlikler verilen fonksiyon

$$u(i+1, j+1) = f(i, j, u, p, q, v) = u(i, j)$$

olduğu göz önüne alınarak teşkil edildiğinde $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$ olmak üzere

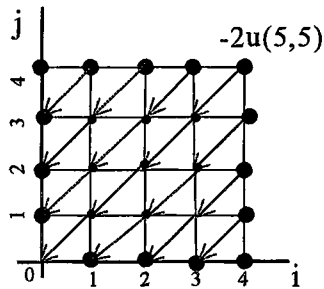
$$\lambda(i-1, j-1) - \lambda(i, j) = 0$$

$$\lambda(i-1, 4) = 0$$

$$\lambda(4, j-1) = 0$$

$$\lambda(4, 4) = -2u(5, 5)$$

koşulları elde edilebilir.



λ 'nın karakteristik diyagramından görüldüğü gibi aşağı doğru karakteristiktir. Yani, bir köşegen üzerindeki eleman aynı köşegenin bir üst elemanı tarafından belirlenir ve orta köşegenin altındaki ve üstündeki elemanlar sıfırdır.

$$\lambda(i-1, j-1) = \lambda(i, j)$$

$$\lambda(i, i) = -2u(5, 5) \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

olarakta yazılabilir.

Hamilton Pontryagin fonksiyonunu oluşturalım.

$$H(i, j, \lambda, u, p, q, v) = \lambda(i, j) \left(u(i, j) + v_1^2(i, j) - 2v_1(i, j)v_2(i, j) + v_2^2(i, j) \right)$$

olduğundan

$$\frac{\partial H(i, j, \lambda, u, p, q, v)}{\partial u} = \lambda(i, j)$$

olur. Eğer

$$v(i, j) = (v_1(i, j), v_2(i, j)) \in R^2$$

gibi ele alınıyorsa, bu durumda

$$\frac{\partial H(i, j, \lambda, u, p, q, v)}{\partial v_1(i, j)} \Big|_{v=v(i, j)} = 0 \quad \frac{\partial H(i, j, \lambda, u, p, q, v)}{\partial v_2(i, j)} \Big|_{v=v(i, j)} = 0$$

olmalıdır. Bu iki eşitlikten

$$\lambda(i, j)(2v_1(i, j) - 2v_2(i, j)) = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda(i, j)(2v_2(i, j) - 2v_1(i, j)) = 0$$

olur.

$$(v_1(i, j), v_2(i, j)) = \begin{cases} (v_1(i, i), v_1(i, i)) & i = j \\ \text{keyfi} & i \neq j \end{cases}$$

dır. Daha açık olarak irdelersek,

$i = j$ durumunda

$$u(5, 5)(v_1(i, j) - v_2(i, j)) = 0$$

olup bu eşitliğin mümkün olması için $v_1(i,j) = v_2(i,j)$, ya da $u(5,5) = 0$ olmalıdır.

$i \neq j$ durumunda ise

$$\lambda(i,j)(v_1(i,j) - v_2(i,j)) = 0$$

eşitliği $v_1(i,j)$ ve $v_2(i,j)$ değerlerinden bağımsız olarak sağlanır. $v_1(i,j) = v_2(i,j)$ olması gerekli değildir. Bu halde $v_1(i,j)$ ve $v_2(i,j)$, $\lambda(i,j)$ den bağımsız olan, sayılar gibi alınabilir.

Açıktır ki, $v(i,j) = (v_1(i,j), v_2(i,j))$ olduğunda verilen sistem

$$u(i+1, j+1) = u(i,j), \quad (i,j) \in G_{5,5} \quad (**)$$

şeklinde olur. (**) sistemi verilen başlangıç koşullarına göre çözüldüğünde

$$u(i,j) \equiv 0, \quad (i,j) \in G_{n,m}$$

elde edilir. Amaç fonksiyonelinin buna karşı gelen değeri ise

$$S(v) = u^2(5,5) = 0$$

olur. Yani, keyfi $v(i,j) = (v_1(i,j), v_2(i,j))$ şeklindeki vektör optimal kontrol olup özel halde $v_1(i,j) = 0$ alındığında $v(i,j) = 0$ dir.

Buraya kadar $v \in R^2$ olarak düşündük. Şimdi $v \in Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ olsun.

Maximum Prensibine göre

$$\max_{v=(v_1, v_2) \in Q} \lambda(i,j)(v_1 - v_2)^2 = \lambda(i,j)[v_1(i,j) - v_2(i,j)]^2$$

dır. Eş problem ise aynıdır. Yani,

$$i \neq j \text{ için } \lambda(i,j) = 0, \quad v(i,j) = (v_1(i,j), v_2(i,j)) \in Q$$

$i = j$ ise $\lambda(i,i) = -2u(5,5)$ olup bu haldeki kontrol vektörünün değeri

$$\max_{v=(v_1, v_2) \in \mathcal{Q}} [-2u(5, 5)](v_1 - v_2)^2 = -2u(5, 5)[v_1(i, i) - v_2(i, i)]^2$$

dır. Burada sol tarafın max. (sonlu) olması için

$$-2u(5, 5) \leq 0$$

olmalıdır, yani; $v_1 = v_2$ olduğunda $-2u(5, 5) \leq 0$ dir.

$$-2u(5, 5) \geq 0$$

olduğu durumda ise max. yoktur. Çünkü, optimal kontrol $v(i, j) = (v_1(i, j), v_2(i, j))$ olup $[v_1(i, i) - v_2(i, i)]^2$ negatif olamaz.



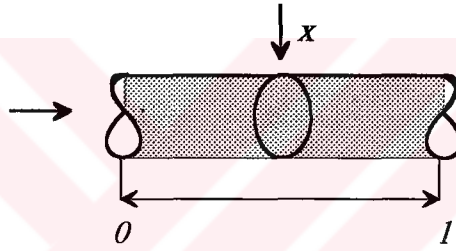
9. BİR BOYUTLU KİMYASAL REAKTÖR PROBLEMİ

Bir boyutlu bazı kimyasal reaksiyonlar

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(t, x, y, z, v) \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(t, x, y, z, v)$$

denklemler sistemi ile verilir (Tychonov vd., 1964). Burada $z(t, x)$ reaktörde x kesitinde reaksiyondaki maddenin miktarı, $y(t, x)$ ise x kesitinde katalizörün aktifliğidir.



Başlangıç değerler

$$y(0, x) = y_0(x) \quad (9.2)$$

$$z(t, 0) = z_0(t)$$

olup (9.1) sisteminin sağ tarafındaki $v(t, x)$ kontrol fonksiyonudur. Öyle $v(t, x)$ kontrol fonksiyonu isteniyor ki,

$$S(v) = \int_0^T z(t, l) dt \rightarrow \max \text{ veya } S(v) = -\int_0^T z(t, l) dt \rightarrow \min \quad (9.3)$$

olsun. Yani, T zamanında reaksiyondan reaktörün çıkışında elde edilen madde miktarı en çok olsun.

Cözüm:

$$Y(t, x) = \int_0^x y(t, \xi) d\xi \text{ ve } Z(t, x) = \int_0^t z(\tau, x) d\tau \quad (9.4)$$

dönüşümlerini ele alalım.

$$Y_t = \int_0^x y_t(t, \xi) d\xi \quad Y_x = y \quad Y_{tx} = y_t$$

ve

$$Z_x = \int_0^t z_x(\tau, x) d\tau \quad Z_t = z \quad Z_{tx} = z_x$$

olur. Bu dönüşümden sonra (9.1) sistemi

$$Y_{tx} = f(t, x, Y_x, Z_t, v) \quad Z_{tx} = g(t, x, Y_x, Z_t, v) \quad (9.5)$$

olur. Bu sistemin sınır koşulları ise

$$Y|_{t=0} = \int_0^x y(0, \xi) d\xi = \int_0^x y_0(\xi) d\xi \text{ ve } Y|_{x=0} = 0 \quad (9.6)$$

$$Z|_{t=0} = 0 \text{ ve } Z|_{x=0} = \int_0^t z(\tau, 0) d\tau = \int_0^t z_0(\tau) d\tau$$

şeklinde olur. Dolayısıyla (9.1), (9.2) problemi (9.4) dönüşümüyle (9.5), (9.6) problemine indirgenir.

Eğer (9.4) dönüşümünü amaç fonksiyoneli için de göz önüne alırsak,

$$S(v) = \int_0^T Z_t(t, l) dt \rightarrow \max \quad (9.7)$$

veya

$$S(v) = Z(T, l) - Z(0, l) = Z(T, l) - 0 = Z(T, l) \rightarrow \max \quad (9.8)$$

olur.

Şimdi (9.5), (9.6), (9.8) problemini sayısal çözmek için ayrıklaştıralım (discreteleştirelim).

$$\left. \begin{array}{l} t \in [0, T] \\ x \in [0, l] \end{array} \right\} G$$

olmak üzere

$$t_i = ih; \quad i = 0, \dots, n \quad x_j = jk; \quad j = 0, \dots, m$$

$$\text{burada } h = \frac{T}{n}, \quad t_n = T \quad \text{ve} \quad k = \frac{l}{m}, \quad x_m = l;$$

dır. Türev ifadelerini fark formülleri cinsinden yazalım.

$$Y_t(t_i, x_j) \cong \frac{Y(t_{i+1}, x_j) - Y(t_i, x_j)}{h}; \quad Y_x(t_i, x_j) \cong \frac{Y(t_i, x_{j+1}) - Y(t_i, x_j)}{k}$$

$$Y_{tx}(t_i, x_j) \cong \frac{Y(t_{i+1}, x_{j+1}) - Y(t_{i+1}, x_j) - Y(t_i, x_{j+1}) + Y(t_i, x_j)}{kh}$$

$$Z_t(t_i, x_j) \cong \frac{Z(t_{i+1}, x_j) - Z(t_i, x_j)}{h}; \quad Z_x(t_i, x_j) \cong \frac{Z(t_i, x_{j+1}) - Z(t_i, x_j)}{k}$$

$$Z_{tx}(t_i, x_j) \cong \frac{Z(t_{i+1}, x_{j+1}) - Z(t_{i+1}, x_j) - Z(t_i, x_{j+1}) + Z(t_i, x_j)}{hk}$$

olur. Bu eşitlikleri yerlerine yazarsak,

$$Y(t_{i+1}, x_{j+1}) = hkf \left(t_i, x_j, \frac{Y(t_i, x_{j+1}) - Y(t_i, x_j)}{k}, \frac{Z(t_i, x_{j+1}) - Z(t_i, x_j)}{k}, v(t_i, x_j) \right) + \quad (9.9)$$

$$+ Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - Y(t_i, x_j)$$

$$Z(t_{i+1}, x_{j+1}) = hkg \left(t_i, x_j, \frac{Y(t_i, x_{j+1}) - Y(t_i, x_j)}{k}, \frac{Z(t_i, x_{j+1}) - Z(t_i, x_j)}{k}, v(t_i, x_j) \right)$$

$$+ Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - Z(t_i, x_j)$$

olur. Aynı işlemleri (9.6) içinde uygulayalım. $i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ olmak üzere

$$Y(0, x_j) = \int_0^{x_j} y_0(\xi) d\xi = \int_0^{x_j} y_0(\xi) d\xi \text{ ve } Y(t_i, 0) = 0$$

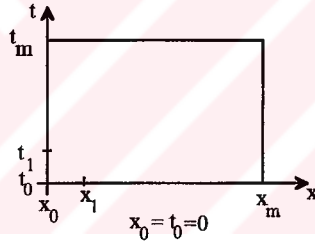
$$Z(0, x_j) = 0 \text{ ve } Z(t_i, 0) = \int_0^{t_i} z_0(\delta) d\delta = \int_0^{t_i} z_0(\delta) d\delta$$

olur. (9.8) ise bu halde,

$$S(v) = Z(T, l) - Z(0, l) = Z(t_n, x_m) \rightarrow \max \quad (9.10)$$

olur.

(9.9) ayrık sisteminde bilinmeyenlerin $t = t_0$ ve $x = x_0$ karakteristikleri üzerinde değerlerini



$i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ olmak üzere

$$Y(t_0, x_j) = \int_0^{x_j} y_0(\xi) d\xi \text{ ve } Y(t_i, x_0) = 0$$

(9.11)

$$Z(t_0, x_j) = 0 \text{ ve } Z(t_i, x_0) = \int_0^{t_i} z_0(\tau) d\tau$$

şeklinde yazabiliriz. Yani, kısaca

$$Y(t_0, x_j) = Y_0 \text{ ve } Y(t_i, x_0) = Y_i$$

(9.12)

$$Z(t_0, x_j) = Z_0, \text{ ve } Z(t_i, x_0) = Z_{i,0}$$

yazılabilir. Burada; $Y_{0,j}$, $Y_{i,0}$, $Z_{0,j}$, $Z_{i,0}$ sayıları (9.11) eşitliklerine karşı gelen sağ taraflardır. Dolayısıyla (9.1), (9.2), (9.3) problemi (9.5), (9.6), (9.7) problemine indirgenir. (9.5), (9.6), (9.7) problemi ise ayrıık şekilde olan (9.9), (9.12), (9.10) problemine getirilir.

(9.9), (9.10), (9.12) problemini aşağıdaki özel hal için ele alalım:

$$f(t, x, y, z, v) = z + v$$

$$g(t, x, y, z, v) = y + z + v$$

Bu durumda (9.9), (9.12), (9.10) problemi aşağıdaki şekilde olur:

$$\frac{Y(t_{i+1}, x_{j+1}) - Y(t_{i+1}, x_j) - Y(t_i, x_{j+1}) + Y(t_i, x_j)}{hk} = \frac{Z(t_{i+1}, x_j) - Z(t_i, x_j)}{h} + v(i, j)$$

$$\frac{Z(t_{i+1}, x_{j+1}) - Z(t_{i+1}, x_j) - Z(t_i, x_{j+1}) + Z(t_i, x_j)}{hk} = \frac{Y(t_i, x_{j+1}) - Y(t_i, x_j)}{k} + \frac{Z(t_{i+1}, x_j) - Z(t_i, x_j)}{h} + v(i, j)$$

ve başlangıç şartları da $Y_{0,j}$, $Y_{i,0}$ ve $Z_{0,j}$, $Z_{i,0}$ olup $i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ dir. Amaç fonksiyonelimiz ise

$$S(v) = Z(t_n, x_m) \rightarrow \max$$

dir.

Problemimizi (1.1) ve (1.2) formuna benzer olarak yazalım.

$$Y(t_{i+1}, x_{j+1}) = kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j) + hkv(i, j)$$

(9.13)

$$Z(t_{i+1}, x_{j+1}) = hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) -$$

$$-hY(t_i, x_j) + hkv(i, j)$$

$i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ dir.

(9.11) sınır değerlerinde $y_0(x) \equiv 0$ ve $z_0(t) \equiv 0$ olduğunda (9.12) koşulları $i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ için

$$Y(t_0, x_j) = Y(0, x_j) = x_j \quad \text{ve} \quad Y(t_i, x_0) = Y(t_i, 0) = 0 \quad (9.14)$$

$$Z(t_0, x_j) = Z(0, x_j) = 0 \quad \text{ve} \quad Z(t_i, x_0) = Z(t_i, 0) = t_i$$

şeklinde olur.

Bu durumda Hamilton-Pontryagin fonksiyonu, $i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ olmak üzere,

$$H(t_i, x_j, \lambda(t_i, x_j), \mu(t_i, x_j), Y(t_i, x_j), Y(t_{i+1}, x_j), Y(t_i, x_{j+1}),$$

$$\begin{aligned} & , Z(t_i, x_j), Z(t_{i+1}, x_j), Z(t_i, x_{j+1}), v) = \\ & = \lambda(t_i, x_j)[kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j) + hkv] + \\ & + \mu(t_i, x_j) \left[hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) - \right. \\ & \quad \left. - hY(t_i, x_j) + hkv \right] \end{aligned}$$

olup amaç fonksiyonelimiz ise $S(v) = Z(t_n, x_m) \rightarrow \max$ dir.

Şimdi (4.8) - (4.11) denklemlerini göz önüne alarak amaç fonksiyonelimizi oluşturalım. ($p = u(i+1, j)$, $q = u(i, j+1)$) olduklarını dikkate alarak)

$$\begin{aligned} & \lambda(t_{i-1}, x_{j-1}) - \lambda(t_i, x_j) \frac{\partial f}{\partial Y(t_i, x_j)} - \lambda(t_i, x_{j-1}) \frac{\partial f}{\partial Y(t_i, x_{j+1})} \Big|_{(i,j-1)} - \\ & \quad - \lambda(t_{i-1}, x_j) \frac{\partial f}{\partial Y(t_{i+1}, x_j)} \Big|_{(i-1,j)} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda(t_{i-1}, x_{m-1}) - \lambda(t_i, x_{m-1}) \left. \frac{\partial f}{\partial Y(t_i, x_{j+1})} \right|_{(i, m-1)} = 0$$

$$\lambda(t_{n-1}, x_{j-1}) - \lambda(t_{n-1}, x_j) \left. \frac{\partial f}{\partial Y(t_{i+1}, x_j)} \right|_{(n-1, j)} = 0$$

$$\lambda(t_{n-1}, x_{m-1}) = a$$

$$a = -\frac{\partial \varphi^*(u(n, m))}{\partial u}$$

olup a nın ifadesi $S(v) = \varphi(u(n, m)) \rightarrow \min$ amaç fonksiyoneli içindi. Bu tanımda a 'nın ifadesi minimizasyon problemi içindir. Buna göre problemimizde;

$S(v) = \varphi(u(n, m)) = Z(t_n, x_m) \rightarrow \max$ veya $S(v) = \varphi(u(n, m)) = -Z(t_n, x_m) \rightarrow \min$ olduğundan $a = \varphi_u$ dur.

Daha açık olarak yazarsak Problemimizde $u = (Y, Z)$ olup $\varphi(u) = \varphi(Y, Z) = Z$ den $\varphi_u = (\varphi_Y, \varphi_Z) = (0, 1)$ olup

$$\lambda(t_{n-1}, x_{m-1}) = 0$$

dır. Şimdi aynı işlemleri ikinci denkleminiz için yazalım ($i = 1, \dots, n-1$ $j = 1, \dots, m-1$)

$$\mu(t_{i-1}, x_{j-1}) - \frac{\partial H}{\partial Z(t_i, x_j)} - \frac{\partial H}{\partial Z(t_i, x_{j+1})} \Big|_{(i, j-1)} - \frac{\partial H}{\partial Z(t_{i+1}, x_j)} \Big|_{(i-1, j)} = 0$$

$$\mu(t_{i-1}, x_{m-1}) - \frac{\partial H}{\partial Z(t_i, x_{j+1})} \Big|_{(i, m-1)} = 0$$

$$\mu(t_{n-1}, x_{j-1}) - \frac{\partial H}{\partial Z(t_{i+1}, x_j)} \Big|_{(n-1, j)} = 0.$$

$$\mu(t_{n-1}, x_{m-1}) = 1 \left(\frac{\partial \varphi^*(Y, Z)}{\partial Z} = 1 \right)$$

olur. $i = 1, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, m-1$ olmak üzere değerlerini yazarak eş problemleri yeniden yazalım.

$$\lambda(t_{i-1}, x_{j-1}) - \lambda(t_i, x_j) + h\mu(t_i, x_{j-1}) - \lambda(t_i, x_{j-1}) - h\mu(t_{i-1}, x_j) - \lambda(t_{i-1}, x_j) = 0$$

$$\lambda(t_{i-1}, x_{m-1}) - \lambda(t_i, x_{m-1}) + h\mu(t_i, x_{m-1}) = 0$$

(9.15)

$$\lambda(t_{n-1}, x_{j-1}) - \lambda(t_{n-1}, x_j) = 0$$

$$\lambda(t_{n-1}, x_{m-1}) = 0$$

ve

$$\mu(t_{i-1}, x_{j-1}) + k\lambda(t_i, x_j) - (1+k)\mu(t_i, x_j) - \mu(t_i, x_{j-1}) - k\lambda(t_{i-1}, x_j) - (1+k)\mu(t_{i-1}, x_j) = 0$$

$$\mu(t_{i-1}, x_{m-1}) - \mu(t_i, x_{m-1}) = 0$$

(9.16)

$$\mu(t_{n-1}, x_{j-1}) - k\lambda(t_{n-1}, x_j) - (1+k)\mu(t_{n-1}, x_j) = 0$$

$$\mu(t_{n-1}, x_{m-1}) = 1$$

Kısalık için $n = 4$ ve $m = 4$ olsun. Bu durumda

$$\lambda(t_{i-1}, x_{j-1}) = \lambda(t_i, x_j) - h\mu(t_i, x_{j-1}) + \lambda(t_i, x_{j-1}) + h\mu(t_{i-1}, x_j) + \lambda(t_{i-1}, x_j)$$

$$\lambda(t_{i-1}, x_3) = \lambda(t_i, x_3) - h\mu(t_i, x_3)$$

(9.17)

$$\lambda(t_3, x_{j-1}) = \lambda(t_3, x_j)$$

$$\lambda(t_3, x_3) = 0$$

μ için ise

$$\mu(t_{i-1}, x_{j-1}) = -k\lambda(t_i, x_j) + (1+k)\mu(t_i, x_j) + \mu(t_i, x_{j-1}) + k\lambda(t_{i-1}, x_j) + (1+k)\mu(t_{i-1}, x_j)$$

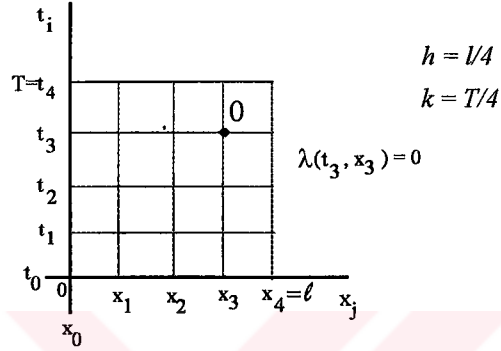
$$\mu(t_{i-1}, x_3) = \mu(t_i, x_3)$$

(9.18)

$$\mu(t_3, x_{j-1}) = k\lambda(t_3, x_j) + (1+k)\mu(t_3, x_j)$$

$$\mu(t_3, x_3) = 1$$

olur. λ için ilk durumdaki diyagramı çizelim:



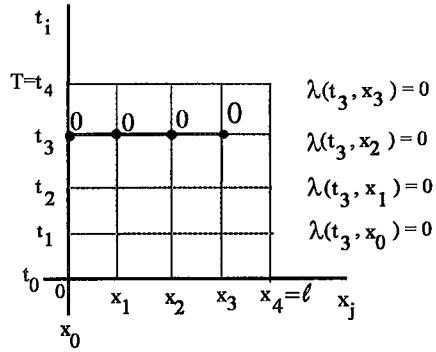
(9.17) deklemlerinin üçüncüsünü ele alalım. Yani, $j = 3, 2, 1$ için $\lambda(t_3, x_{j-1}) = \lambda(t_3, x_j)$

Önce $j = 3$ için $\lambda(t_3, x_2) = \lambda(t_3, x_3) = 0$

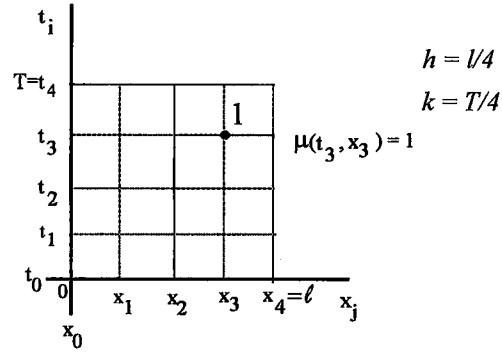
$j = 2$ için $\lambda(t_3, x_1) = \lambda(t_3, x_2) = 0$

$j = 1$ için $\lambda(t_3, x_0) = \lambda(t_3, x_1) = 0$

olur. Bunu diyagramda gösterirsek, kalın çizgili hattaki düğüm noktaları belirlenmiş olur.



Önce μ için ilk durumdaki diyagramı çizelim.



Şimdi λ için yaptığımız işlemleri μ için de yapalım. Yani $j=3,2,1$ için (9.18) denklemlerinin üçüncüsü olan

$$\mu(t_3, x_{j-1}) = k\lambda(t_3, x_j) + (1+k)\mu(t_3, x_j)$$

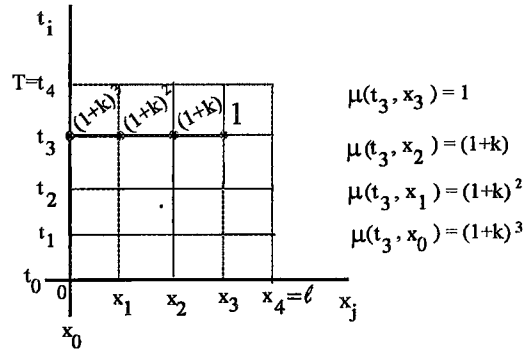
denklemini ele alalım.

$$j = 3 \text{ için } \mu(t_3, x_2) = k\lambda(t_3, x_3) + (1+k)\mu(t_3, x_3) = 0 + 1 \cdot (1+k) = (1+k)$$

$$j = 2 \text{ için } \mu(t_3, x_1) = k\lambda(t_3, x_2) + (1+k)\mu(t_3, x_2) = 0 + (1+k)(1+k) = (1+k)^2$$

$$j = 1 \text{ için } \mu(t_3, x_0) = k\lambda(t_3, x_1) + (1+k)\mu(t_3, x_1) = 0 + (1+k)(1+k)^2 = (1+k)^3$$

olur. Diyagramda gösterirsek, kalın çizgili hattaki düğüm noktaları belirlenmiş olur.



(Not: diyagramda (3,3) noktasından başladık. Çünkü hatırlarsak kontrol vektörü $v(t_i, x_j)$; $i = 0, \dots, n-1$ ve $j = 0, \dots, m-1$ şeklinde tanımlıdır.)

$j = 3, 2, 1$ için yaptığımız bu işlemlerin benzerini $i = 3, 2, 1$ için (9.17) ve (9.18) 'ün ikinci denklemlerine λ ve μ için ayrı ayrı uygulayalım:

$i = 3$ için (9.17) ve (9.18) 'ün ikinci denklemlerinden

$$\lambda(t_2, x_3) = \lambda(t_3, x_3) - h\mu(t_3, x_3) = 0 - h \cdot 1 = -h$$

$$\mu(t_2, x_3) = \mu(t_3, x_3) = 1$$

$i = 2$ için

$$\lambda(t_1, x_3) = \lambda(t_2, x_3) - h\mu(t_2, x_3) = -h - h = -2h$$

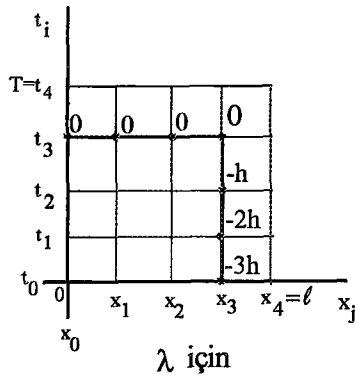
$$\mu(t_1, x_3) = \mu(t_2, x_3) = 1$$

$i = 1$ için

$$\lambda(t_0, x_3) = \lambda(t_1, x_3) - h\mu(t_1, x_3) = -2h - h = -3h$$

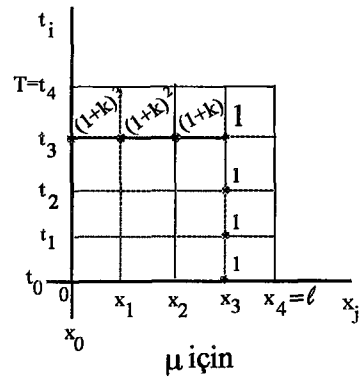
$$\mu(t_0, x_3) = \mu(t_1, x_3) = 1$$

bulunur. Bunları λ ve μ 'nün diyagramlarına yansıtalım:



$$h = l/4$$

$$k = T/4$$



İki doğru üzerinde, hesaplanan λ ve μ değerlerini (9.15) ve (9.16) denklemleri için sınır koşulları gibi göz önüne alalım. O zaman (9.15) ve (9.16) den

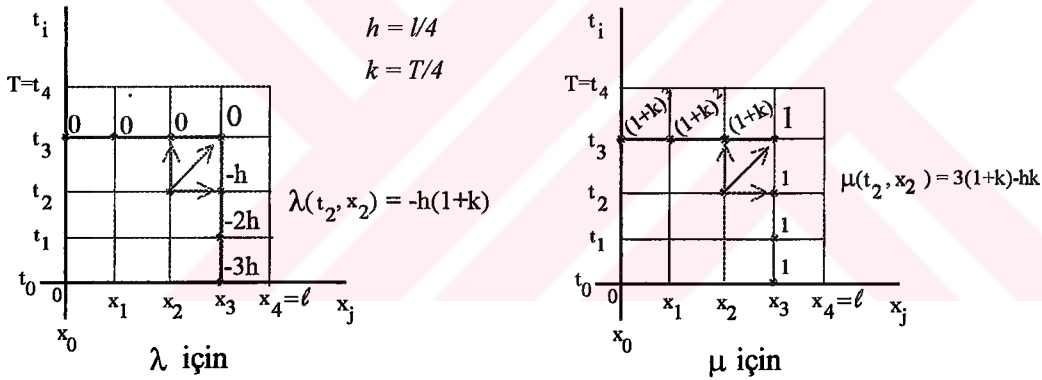
Önce $i = 3, j = 3$ için (9.17) 'ün ilk denklemini alalım.

$$\begin{aligned}\lambda(t_2, x_2) &= \lambda(t_3, x_3) - h\mu(t_3, x_2) + \lambda(t_3, x_2) + h\mu(t_2, x_3) + \lambda(t_2, x_3) \\ &= -h(1+k)\end{aligned}$$

bu kez (9.18) 'ün ilk denklemini ele alırsak,

$$\begin{aligned}\mu(t_2, x_2) &= -k\lambda(t_3, x_3) + (1+k)\mu(t_3, x_3) + \mu(t_3, x_2) + k\lambda(t_2, x_3) + (1+k)\mu(t_2, x_3) \\ &= 3(1+k) - hk\end{aligned}$$

olur. Diyagrama yansıtılırsa;



Bu işlemleri benzer şekilde devam ettirelim:

$i = 2, j = 3$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_1, x_2) &= \lambda(t_2, x_3) - h\mu(t_2, x_2) + \lambda(t_2, x_2) + h\mu(t_1, x_3) + \lambda(t_1, x_3) \\ &= -h(6 + 4k - hk)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_1, x_2) &= -k\lambda(t_2, x_3) + (1+k)\mu(t_2, x_3) + \mu(t_2, x_2) + k\lambda(t_1, x_3) + (1+k)\mu(t_1, x_3) \\ &= 5(1+k) - 2hk\end{aligned}$$

$i = 1, j = 3$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_0, x_2) &= \lambda(t_1, x_3) - h\mu(t_1, x_2) + \lambda(t_1, x_2) + h\mu(t_0, x_3) + \lambda(t_0, x_3) \\ &= 3h(-5 - 3k + kh)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_0, x_2) &= -k\lambda(t_1, x_3) + (1+k)\mu(t_1, x_3) + \mu(t_1, x_2) + k\lambda(t_0, x_3) + (1+k)\mu(t_0, x_3) \\ &= 7(1+k-hk)\end{aligned}$$

$i = 3, j = 2$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_2, x_1) &= \lambda(t_3, x_2) - h\mu(t_3, x_1) + \lambda(t_3, x_1) + h\mu(t_2, x_2) + \lambda(t_2, x_2) \\ &= h(1 - k^2 - kh)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_2, x_1) &= -k\lambda(t_3, x_2) + (1+k)\mu(t_3, x_2) + \mu(t_3, x_1) + k\lambda(t_2, x_2) + (1+k)\mu(t_2, x_2) \\ &= (1+k)(5 + 5k - 2hk)\end{aligned}$$

$i = 3, j = 1$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_2, x_0) &= \lambda(t_3, x_1) - h\mu(t_3, x_0) + \lambda(t_3, x_0) + h\mu(t_2, x_1) + \lambda(t_2, x_1) \\ &= h(4 + 7k + 2k^2 - k^3 - 2kh - 3hk^2 + h - kh^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_2, x_0) &= -k\lambda(t_3, x_1) + (1+k)\mu(t_3, x_1) + \mu(t_3, x_0) + k\lambda(t_2, x_1) + (1+k)\mu(t_2, x_1) \\ &= 7 + 21k + 21k^2 + 7k^3 - kh - 3hk^3 - h^2k^2 - 4hk^2\end{aligned}$$

$i = 2, j = 2$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_1, x_1) &= \lambda(t_2, x_2) - h\mu(t_2, x_1) + \lambda(t_2, x_1) + h\mu(t_1, x_2) + \lambda(t_1, x_2) \\ &= h(2hk^2 - 6k^2 - 11k - 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_1, x_1) &= -k\lambda(t_2, x_2) + (1+k)\mu(t_2, x_2) + \mu(t_2, x_1) + k\lambda(t_1, x_2) + (1+k)\mu(t_1, x_2) \\ &= 13 - 4hk^2 - 8kh + 13k^2 + 26k - 6h + kh^2\end{aligned}$$

$i = 2, j = 1$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_1, x_0) &= \lambda(t_2, x_1) - h\mu(t_2, x_0) + \lambda(t_2, x_0) + h\mu(t_1, x_1) + \lambda(t_1, x_1) \\ &= h(-11k^2 + 2 + k - 5h + h^2k^2 + 3hk^3 - 8kh + 8k^3 - hk^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_1, x_0) &= -k\lambda(t_2, x_1) + (1+k)\mu(t_2, x_1) + \mu(t_2, x_0) + k\lambda(t_1, x_1) + (1+k)\mu(t_1, x_1) \\ &= 25 + 75k^2 - 31hk^2 + 2k^3h^2 - 6h + 25kh + 75k + kh^2 + \\ &\quad + 25k^3 - 14hk^3 + h^2k^2\end{aligned}$$

$i = 1, j = 2$ için

$$\begin{aligned}\lambda(t_0, x_1) &= \lambda(t_1, x_2) - h\mu(t_1, x_1) + \lambda(t_1, x_1) + h\mu(t_0, x_2) + \lambda(t_0, x_2) \\ &= -h(34 + 43k - 5kh - 6hk^2 + 19k^2 - 6h + kh^2)\end{aligned}$$

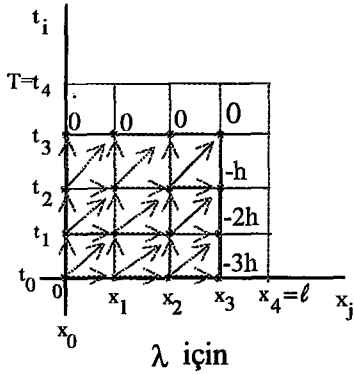
$$\begin{aligned}\mu(t_0, x_1) &= -k\lambda(t_1, x_2) + (1+k)\mu(t_1, x_2) + \mu(t_1, x_1) + k\lambda(t_0, x_2) + (1+k)\mu(t_0, x_2) \\ &= 25 - 26kh - 18hk^2 + 2k^2h^2 + 50k + 25k^2 - 6h + kh^2\end{aligned}$$

$i = 1, j = 1$ için

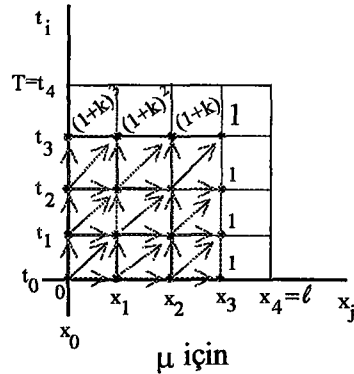
$$\begin{aligned}\lambda(t_0, x_0) &= \lambda(t_1, x_1) - h\mu(t_1, x_0) + \lambda(t_1, x_0) + h\mu(t_0, x_1) + \lambda(t_0, x_1) \\ &= -h(86k^2 - 17hk^3 + 33k^3 + 39 + 78k - h + 4hk - 2k^2h^2 + kh^2 + \\ &\quad + 2k^3h^2 - 20hk^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(t_0, x_0) &= -k\lambda(t_1, x_1) + (1+k)\mu(t_1, x_1) + \mu(t_1, x_0) + k\lambda(t_0, x_1) + (1+k)\mu(t_0, x_1) \\ &= 63 + 189k^2 - 119hk^2 + 8k^3h^2 - 49hk^3 - 18h - 98kh + 189k + 63k^3 + \\ &\quad + 3kh^2 - h^3k^2 + 10k^2h^2\end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki diyagramda da gösterildiği gibi bütün düğüm noktaları oklarla gösterilen belli düğümlerden belirlenmiş olur.



$$\begin{aligned}h &= l/4 \\ k &= T/4\end{aligned}$$



Şimdi Hamilton fonksiyonunun ifadesini

$$\begin{aligned}
& H(t_i, x_j, \lambda(t_i, x_j), \mu(t_i, x_j), Y(t_i, x_j), Y(t_{i+1}, x_j), Y(t_i, x_{j+1}), \\
& \quad , Z(t_i, x_j), Z(t_{i+1}, x_j), Z(t_i, x_{j+1}), v) = \\
& = (\lambda(t_i, x_j)hk + \mu(t_i, x_j)hk)v + \\
& \quad + [kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j)] + \\
& \quad + \mu(t_i, x_j) \left[hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) - \right. \\
& \quad \left. - hY(t_i, x_j) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım.

Kontrol fonksiyonu $|v(i, j)| \leq v_0$ koşulunu sağlamak zorunda olsaydı;

$$v(i, j) \in [-v_0, v_0] = V$$

yani; $V = \{|v| \leq v_0\}$. O zaman Maximum Prensibine göre

$$\max_{|v| \leq v_0} (\lambda(t_i, x_j)hk + \mu(t_i, x_j)hk)v = (\lambda(t_i, x_j)hk + \mu(t_i, x_j)hk)u(i, j) \quad (9.19)$$

buradan optimal kontrol

$$u(i, j) = v_0 \text{sign} (\lambda(t_i, x_j)hk + \mu(t_i, x_j)hk)$$

şeklinde bulunur. $u(i, j)$ 'nin değerleri, yukarıdaki gibi (genel ve özel hali ($m = 4$, $n = 4$) için) $\lambda(i, j)$ için ve $\mu(i, j)$ için yazılan (9.15) ve (9.16) eş problem sistemlerinin ardışık olarak çözülmesi ile elde edilir.

Yapılan işlemlerin daha kolay anlaşılması için $l = 1$ ve $T = 2$ alalım.

Eğer x ve t aralıklarını 3 bölüme ayırmış olsaydık (yani, $m, n = 3$) o zaman $h = \frac{2}{3}$ ve $k = \frac{1}{3}$ olacaktı. Bu değerlere tekabül eden $\lambda(i, j)$ ve $\mu(i, j)$ matrisleri aşağıdadır (her iki indisde sıfırdan başlamak üzere)

$$\lambda = \begin{bmatrix} -44.45 & -30.02 & -11.56 & -2.00 \\ -2.83 & -7.46 & -4.74 & -1.33 \\ 4.25 & 0.44 & -0.89 & -0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 106.57 & 33.58 & 7.78 & 1 \\ 47.29 & 17.19 & 6.22 & 1 \\ 15.96 & 8.30 & 3.78 & 1 \\ 2.37 & 1.78 & 1.33 & 1 \end{bmatrix}$$

(Burada λ ve μ 'nün denklemlerindeki sabit terimlerden yararlanıldı.)

Yukarıdaki hesaplamalarda da yaptığımız gibi aralıkların 4 'er bölmeye ayrılması durumunda $h = \frac{2}{4}$ ve $k = \frac{1}{4}$ olur. Bu değerlere tekabül eden $\lambda(i, j)$ ve $\mu(i, j)$ matrisleri aşağıdadır (her iki indisde sıfırdan başlamak üzere):

$$\lambda = \begin{bmatrix} -31.84 & -21.09 & -8.44 & -1.5 \\ -1.03 & -5.03 & -3.44 & -1.0 \\ 2.98 & 0.41 & -0.63 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 98.06 & 32.34 & 7.88 & 1 \\ 41.71 & 16.75 & 6.00 & 1 \\ 13.38 & 7.50 & 3.63 & 1 \\ 1.95 & 1.56 & 1.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer x ve t aralıklarını biraz daha küçültmüş olsaydık yani; 8 'er bölmeye ayırmış olsaydık, o zaman $h = \frac{2}{8}$ ve $k = \frac{1}{8}$ olacaktı. Her iki indisleri de sıfırdan başlamak üzere bu değerlere tekabül eden $\lambda(i, j)$ ve $\mu(i, j)$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda = \begin{bmatrix} -12.49 & -9.5 & -4.01 & -0.75 \\ 0.11 & -2.12 & -1.02 & -0.50 \\ 1.27 & 0.24 & -0.28 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 81.68 & 29.27 & 7.66 & 1 \\ 33.20 & 14.7 & 5.56 & 1 \\ 9.92 & 6.26 & 3.34 & 1 \\ 1.42 & 1.27 & 1.13 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan görüldüğü gibi 1. halde $\lambda + \mu$ matrisinin iki elemanı hariç geri kalan elemanlarının hepsi (+) dir. 2. halde ise sadece 1 elemanı (-) dir. Son halde ise bütün elemanlar (+) dir. Dolayısıyla sadece 3 yaklaşım yardımıyla $\lambda + \mu$ matrisinin tüm elemanları (+) oldu. Bu yüzden de optimal kontrol $u = v_0.1$ olur. Yani; h ve k 'yı yeterince küçük alıp $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ olmadan optimum çözüm elde edilmiş olur.

Aralık simetrik; $|v| \leq v_0$ olduğundan dolayı (9.19) ifadesinin hesaplanmasında bu $\lambda + \mu$ matrisi pozitif ise optimal kontrol vektörü aralığın sağ ucundaki değerle belirlenir. Zira bu ifade pozitif olduğundan kontrole etkisi olmaz (Maximum için).

$h = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{8}$ için bulduğumuz $\lambda(i,j)$ ve $\mu(i,j)$ değerlerini kullanarak

$$u(i,j) = v_0 \text{sign} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 69.2 & 19.77 & 3.65 & 0.25 \\ 33.3 & 12.58 & 3.95 & 0.50 \\ 11.19 & 6.50 & 3.06 & 0.75 \\ 1.42 & 1.27 & 1.13 & 1.00 \end{bmatrix} \right) = v_0$$

$u(i,j)$ 'nin bu değerlerini v olarak ele alıp (9.13) denklemlerinde yerlerine yazalım. Bu denklemler $i = 0, \dots, 3$ $j = 0, \dots, 3$ olmak üzere

$$Y(t_{i+1}, x_{j+1}) = kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j) + hkv(i,j)$$

$$Z(t_{i+1}, x_{j+1}) = hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) -$$

$$-hY(t_i, x_j) + hkv(i,j)$$

idi. Tabii ki bu arada (9.12)

$$Y(t_0, x_j) = Y_{0,j} \text{ ve } Y(t_i, x_0) = Y_{i,0} \quad Z(t_0, x_j) = Z_{0,j} \text{ ve } Z(t_i, x_0) = Z_{i,0}$$

başlangıç şartlarını da göz önüne almak gerekir. Bu koşulları problemi sayısallaştırdığımız $n = 4$, $m = 4$ durumunda aşağıdaki gibi sıfır olarak almıştık (9..14) denklemleri).

$$Y(t_0, x_j) = Y(0, x_j) = x_j \text{ ve } Y(t_i, x_0) = Y(t_i, 0) = 0$$

$$Z(t_0, x_j) = Z(0, x_j) = 0 \text{ ve } Z(t_i, x_0) = Z(t_i, 0) = t_i$$

Bunlara göre,

$$Y(t_1, x_1) = hkv(1, 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot v_0 \quad Z(t_1, x_1) = hkv(1, 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot v_0$$

bu tarzda devam edildiğinde elde edilen sonuçları matris şekilde yazarsak,

$$Y(t_i, x_j) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot v_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z(t_i, x_j) = \frac{1}{32} \cdot v_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 2.13 & 3.39 & 4.81 \\ 0 & 2.25 & 4.78 & 7.63 & 10.83 \\ 0 & 3.50 & 7.19 & 11.09 & 15.22 \\ 0 & 4.75 & 9.59 & 14.79 & 20.64 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Amaç fonksiyonumuz maksimum değerini $Z(t_4, x_4)$ 'de aldığından

$$S(v) = 3.016v_0$$

değeri amaç fonksiyonumuzun maximum değeridir.

Şimdi problemimizdeki f ve g fonksiyonlarının aşağıdaki gibi olması halinde durumu inceleyelim.

$$f(t, x, y, z, v) = z - v$$

$$g(t, x, y, z, v) = y + z + 2v$$

Bu durumda fark denklemleri;

$$Y(t_{i+1}, x_{j+1}) = kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j) - hkv(i, j) \quad (11.13)$$

$$Z(t_{i+1}, x_{j+1}) = hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) - hY(t_i, x_j) + 2hkv(i, j)$$

şeklinde olur.

Bu durumda Hamilton-Pontryagin fonksiyonu ise, $i = 0, \dots, n$ ve $j = 0, \dots, m$ olmak üzere,

$$H(t_i, x_j, \lambda(t_i, x_j), \mu(t_i, x_j), Y(t_i, x_j), Y(t_{i+1}, x_j), Y(t_i, x_{j+1}),$$

$$Z(t_i, x_j), Z(t_{i+1}, x_j), Z(t_i, x_{j+1}), v) =$$

$$= \lambda(t_i, x_j)[kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j) - hkv] +$$

$$+ \mu(t_i, x_j) \left[hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) -$$

$$- hY(t_i, x_j) + 2hkv \right]$$

olup amaç fonksiyonumuz ise $S(v) = Z(t_n, x_m) \rightarrow \max$ dır.

Eş problemler (f ve g de sadece v değiştiğinden) değişmeyecek ve önceki sonuçlar elde edilecektir.

Şimdi Hamilton fonksiyonunun ifadesi

$$\begin{aligned}
& H(t_i, x_j, \lambda(t_i, x_j), \mu(t_i, x_j), Y(t_i, x_j), Y(t_{i+1}, x_j), Y(t_i, x_{j+1}), \\
& \quad , Z(t_i, x_j), Z(t_{i+1}, x_j), Z(t_i, x_{j+1}), v) = \\
& = (-\lambda(t_i, x_j)hk + 2\mu(t_i, x_j)hk)v + \\
& \quad + [kZ(t_{i+1}, x_j) + Y(t_{i+1}, x_j) + Y(t_i, x_{j+1}) - kZ(t_i, x_j) - Y(t_i, x_j)] + \\
& \quad + \mu(t_i, x_j) \left[hY(t_i, x_{j+1}) + (1+k)Z(t_{i+1}, x_j) + Z(t_i, x_{j+1}) - (1+k)Z(t_i, x_j) - \right. \\
& \quad \left. - hY(t_i, x_j) \right]
\end{aligned}$$

olup,

Kontrol fonksiyonu $v(i, j) \in [v_1, v_2] = V$ ise yani; $v_1 \leq v \leq v_2$. O zaman Maximum Prensibine göre

$$\max_{v \in [v_1, v_2]} (-\lambda(t_i, x_j)hk + 2\mu(t_i, x_j)hk)v = hk[-\lambda(t_i, x_j) + 2\mu(t_i, x_j)]u(i, j)$$

buradan optimal kontrol

$$u(i, j) = \frac{v_1}{2} [1 - \text{sign}(-\lambda(t_i, x_j)hk + 2\mu(t_i, x_j)hk)] + \frac{v_2}{2} [1 + \text{sign}(-\lambda(t_i, x_j)hk + 2\mu(t_i, x_j)hk)]$$

şeklinde bulunur. $u(i, j)$ 'nin değerleri, yukarıdaki gibi (genel ve özel hali ($m = 4$, $n = 4$) için) $\lambda(i, j)$ için ve $\mu(i, j)$ için yazılan (11.15) ve (11.16) eş problem sistemlerinin ardışık olarak çözülmesi ile elde edilir.

Yapılan işlemlerin daha kolay anlaşılması için $l = 1$ ve $T = 2$ aralığımızı ise [11, 17] alalım.

Eğer x ve t aralıklarını 8 bölüme ayırmış olsaydık (yani, $m, n = 8$) o zaman $h = \frac{2}{8}$ ve $k = \frac{1}{8}$ olacaktı. Bu değerlere tekabül eden $\lambda(i, j)$ ve $\mu(i, j)$ matrisleri aşağıdadır (her iki indisde sıfırdan başlamak üzere)

$$\lambda = \begin{bmatrix} -12.49 & -9.5 & -4.01 & -0.75 \\ 0.11 & -2.12 & -1.62 & -0.5 \\ 1.27 & 0.24 & -0.28 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 81.68 & 29.27 & 7.66 & 1 \\ 33.2 & 14.7 & 5.56 & 1 \\ 9.92 & 6.26 & 3.34 & 1 \\ 1.42 & 1.27 & 1.13 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer bölüm sayısı 16 'şar olsaydı λ ve μ matrisleri şöyle olacaktı.

$$\lambda = \begin{bmatrix} -5.51 & -4.5 & -1.94 & -0.38 \\ 0.17 & -0.96 & -0.78 & -0.25 \\ 0.57 & 0.12 & -0.13 & -0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 72.49 & 27.26 & 7.38 & 1 \\ 29.03 & 13.86 & 5.3 & 1 \\ 8.39 & 5.63 & 3.18 & 1 \\ 1.2 & 1.13 & 1.06 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer x ve t aralıklarını biraz daha küçültmüş olsaydık yani 18 'er bölmeye ayırmış olsaydık, o zaman $h = \frac{2}{18}$ ve $k = \frac{1}{18}$ olacaktı. Her iki indisleri de sıfırdan başlamak üzere bu değerlere tekabül eden $\lambda(i,j)$ ve $\mu(i,j)$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda = \begin{bmatrix} -4.83 & -3.97 & -1.72 & -0.33 \\ 0.16 & -0.85 & -0.69 & -0.22 \\ 0.5 & 0.11 & -0.12 & -0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 71.45 & 27.02 & 7.35 & 1 \\ 28.57 & 13.77 & 5.27 & 1 \\ 8.23 & 5.56 & 3.16 & 1 \\ 1.18 & 1.11 & 1.06 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu 18 bölme ile optimal kontrol aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u = v_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \end{bmatrix}$$

O halde bu bulduğumuz kontrolü başlangıç şartlarını da dikkate alarak fark denklemlerinde (v olarak) yerlerine yazarsak,

$$Y(t_i, x_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0.11 & 0.22 & 0.33 & 0.44 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.05 \\ 0 & -0.09 & -0.18 & -0.27 & -0.35 \\ 0 & -0.19 & -0.38 & -0.57 & -0.75 \\ 0 & -0.3 & -0.59 & -0.87 & -1.15 \end{bmatrix}$$

$$Z(t_i, x_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0.28 & 0.52 & 0.77 & 1.03 \\ 0.11 & 0.55 & 1.01 & 1.5 & 2.02 \\ 0.17 & 0.81 & 1.49 & 2.2 & 2.96 \\ 0.22 & 1.06 & 1.94 & 2.87 & 3.85 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buna göre optimum çözüm $S(v) = 3.85$ olarak elde edilmiş olur.



10. SONUÇLAR

Çalışma, genel formdaki ikinci mertebeden ayrık sistemlerle ilgili olan optimal kontrol probleminin çözümünün araştırılmasına hasredilmiştir. Girişten ve on bölümden oluşmaktadır. Çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- İlk kez iki parametrelili ayrık sistemler için varyasyonlarla denklemler sistemi kavramı tanımlanmış ve bu kavram yardımıyla ele alınan optimal kontrol problemi için eş (adjoint) problem oluşturulmuştur.
- Tanımlanan eş problemin yardımıyla Lagrange çarpanlar yöntemi kullanılarak (λ 'lar) belirlenmiş ve amaç fonksiyonelinin artımının lineer kısmı için genel bir formül elde edilmiştir.
- İlk defa olarak hızlar kümesi konvex olan problemler için PMP 'nin geçerli olduğu ispatlanmıştır. Yani, ele alınan eş problemin çözümünü göz önüne alarak optimal kontrol 'un PMP 'ni sağladığı gösterilmiştir.
- Elde edilen sonuçların bazı örneklere uygulaması verilmiştir.

KAYNAKLAR

Ahmedov K. T. and Akhiyev S. S. (1972) "Necessary Conditions for Some Problems of Optimal Control Theory", Akad. Nauk Azerbaycan, SSR dokl. vol. 28 No:5, 12-16pp

Akhiyev S. S. (1976) "Method of Decomposition of Lagrange Multipliers into Components", Akad. Nauk Azerbaycan, SSR dokl. vol. 32 No:5 3-6pp

Alekseev et al. (1987) *Optimal Control* Plenum Press, New York.

Bahvalov N. , Seminar on Computational Mathematics, Department of Computational Mathematics, Acad. Sci., USSR, Moscow, April 24, 1981

Barnett S. & Cameron R. G. (1985) *Introduction to Mathematical Control Theory*; (2nd Ed.) Oxford University Press, Oxford.

Bellman R. (1957), *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N. J.

Bolt'yanskii V. G. (1978) *Optimal Control of Discrete Systems*, (translated from Russian by Ron Hardin) J. Wiley, New York

Butkovsky A. G. (1990) Yu. I. Samoilenko *Control of Quantum-Mechanical Process and Systems*, Kluwer Academic Publishers, Norwell Mass.

Butkovsky A. G. (1965) "The Theory of Optimal Control of Systems with Varying Parameters", *Nauka*, Moscow, (Russian).

Canon Michael D., Clifton, D. Cullum, and Jr. Elijah Polak (1969, c1970), *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*, McGraw-Hill, New York.

Craven B. D. (1995) *Control and Optimization*, Chapman & Hall Press, Melbourne.

Fattoroni H. O. (1996) *Modern Optimization Theory*, Cambridge University Press, California

Gregory J. & Lin C. (1992) *Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York.

Gruver W. A. & Sachs E. (1980) *Algorithmic Methods in Optimal Control*, Pitman Publishing Inc.

Hocking Leslie M. *Optimal Control*, Clarendon Press, Oxford, 1991

Krotov Vadim F. (1996) *Global Methods in Optimal Control Theory*, Marcel Dekker Inc., New York.

Leitmann (1981) *The Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Plenum Press, New York.

Lewis, Frank (1995) *Optimal Control*, J. Wiley, New York

Lions J. L. (1968) *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles*, Dunod Gauthier Villars, Paris (France).

Lurie (1993) *Optimal Control Theory of Distributed Systems*, Plenum Press, New York.

Ostrovsky G. M. , Vailin Yu- M. (1967) *Methods of Optimization of Chemical Reactors*, Moscow, Chemistry,

Pinch (1993) *Optimal Control and Calculus of Variations* Oxford University Press, London

Pontryagin L. S. , Boltianski V. G., P. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, (1961) "Mathematical Theory of Optimal Processes", *Fizmatgiz*, Moscow, [English Trans.:Interscience, New York (1962)]

Propoi, A. I. (1981) "Elements of the Theory of Optimal Discrete Systems", *Nauka*, Moscow

Tychonov A. N. and Samarski, A. A. (1964) *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Holden-Day Inc., California

Vasilyev F. P. (1974) *Lectures on Solving Methods for Extremal Problems*, Moscow University Press, Moscow, (Rusça).

Wan (1995) *Introduction to The Calculus of Variations and its Applications* Chapman & Hall Press, London

Yegorov, V. A. (1978) "Optimal Control of Heat and Diffusion Proceses", *Nauka*, Moscow, (Rusça).

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi :01/09/1970

Doğum Yeri :Kemaliye (Eğin)

Lisans Öğrenimi :1987-1991 Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi :1991 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Göreve Başlama :1992 Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Matematik
Mühendisliği Bölümü Matematiğin Temelleri ve Matematik
Lojik Anabilim Dalı

Doktora Öğrenimi :1994 Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü