

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Y.Doç.D r.

Ömer GÖK

67714

[Signature]

Prof.Dr. Mahir
HASANIOĞLU

Doç.Dr. Serdar Altıtoprak

ABELİEN OLMAYAN KOMPAKT LİE GRUPLARI ÜZERİNDE KONTROL SİSTEMLERİ

Erdal GÜL

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 1997

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Hamit Avcı'ya, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşe Kara Hacıbekiroğlu'na ve danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer Gök'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yazılım aşamasındaki yardımlarından ötürü Arş. Gör. Elif Tekin'e ve araştırmada gösterdiği manevi desteğinden dolayı eşim Leyla Gül'e teşekkür ederim.

Arş. Gör. Erdal Gül

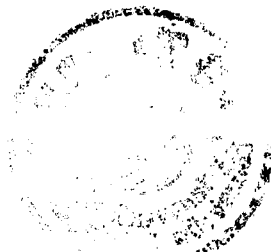
Haziran 1997

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
1.0. GİRİŞ	1
2.0. LİE GRUPLARI	
2.1. Manifoldlar	6
2.2. Lie Grupları	9
2.3. Lie Cebirleri	13
2.4. Üstel Tasvir	16
2.5. Adjoint Gösterilimi	20
2.6. Lie Türevi	22
3.0. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ	
3.1. Giriş	28
3.2. Kontrol Edilebilirlik	30
4.0. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GEÇİŞLİLİĞİ VE KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ	
4.1. Giriş	40
4.2. Ön Bilgiler	43
4.3. Kontrol Edilebilirlik	45
4.4. Örnekler	55
5.0. $X(G)$ DE $L(G)$ LİE CEBİRİNİN NORMALİZÖRÜ	
5.1. Normalizör	59

**6.0. KOMPAKT, BAĞLANTILI, ABELİEN OLMAYAN BİR LİE
GRUBU ÜZERİNDE NORMALİZÖRLÜ LİNEER KONTROL
SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ**

6.1. Homomorfizmler, Otomorfizmler ve Türevler	85
6.2. Kontrol Edilebilirlik	87
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

”Abelian Olmayan, Kompakt Lie Grupları Üzerinde Kontrol Sistemleri” adlı bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Lie grupları, Lie cebirleri ve onların üstel tasvir ve adjoint gösterilimi ile bağıntılarına yer verdik.

İkinci bölümde, genel kontrol sistemlerini örneklerle ayrıntılı olarak inceledik.

Üçüncü bölümde, Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemlerinin geçişliliği ve kontrol edilebilirliği üzerinde durduk.

Dördüncü bölümde, Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir lineer vektör alanı kavramının bir G Lie grubuna nasıl genelleştiğini görüyoruz. Böylece G Lie grubu üzerindeki tüm düz vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebirinde G nin $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünü inceliyoruz.

Beşinci bölümde ise, kontrol teoriye bu tezin yaptığı katkı yer almaktadır. Bağlantılı bir Lie grubu üzerindeki normalizörlü bir lineer kontrol sisteminin dinamiğinin konservativ vektör alanlarıyla üretildiğini ve eğer aynı zamanda Lie grubu Abelian olmayan ve kompakt ise normalizörlü lineer kontrol sisteminin geçişli olması için gerek ve yeter koşulun kontrol edilebilir olması gerektiğini gösterdik.



SUMMARY

This thesis with the title "Control Systems on Non-Abelian, Compact Lie Groups" contains five chapters.

In first chapter, we gave Lie groups, Lie algebras and their connections with exponential map and adjoint representation.

In second chapter, we studied in examples the general facts about control systems.

In third chapter, we interested on transitivity and controllability of linear control systems on Lie groups.

In fourth chapter, we saw that how to generalize of the notion of a linear vector field on Euclidean space, $\mathbb{R}^n$, to a Lie group, G . Thus, we have studied the normalizer of Lie algebra, $L(G)$, of G in the Lie algebra, $\mathcal{X}(G)$, of all C^∞ (smooth) vector fields on G .

Fifth chapter is the contribution of this thesis to Control Theory. We show that the dynamic of a linear control system with normalizer on a connected Lie group is induced by conservative vector fields and if Lie group is also non-Abelian and compact then the system is transitive if and only if it is controllable.



1.0. GİRİŞ

Bu tezin amacı kontrol teoride sistemlerin özel bir sınıfı için bir kontroledilebilirlik sonucu olan kompakt, bağlantılı ve Abelian olmayan bir Lie grubu üzerinde normalizörlü bir lineer koontrol sisteminin kontroledilebilirliğini elde etmektir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde Lie grupları ve Lie cebirleri teorisi ele alınmıştır. İkinci bölümde kontrol teori hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemlerin geçişliliği ve kontrol edilebilirliği incelenmiştir. Dördüncü bölümde bir G Lie grubu üzerindeki tüm düz (smooth) vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebirindeki G nin $L(G)$ Lie cebirinin normalizörü karakterize ediliyor. Bu bölüm problemin çözüm aşamasında önemli bir rol oynamaktadır. Son bölümde de yukarıda sözü edilen probleme cevap aranmıştır.

Bir Σ genel kontrol sistemi durum (state) uzayı adı verilen sonlu boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldundan ve kontroller denen vektör alanlarının bir sınıfı olan bir D dinamiğinden oluşan bir $\Sigma = (M, D)$ ikilisidir. $x \in M$ olsun. Σ kontrol sistemi için kontrol edilebilirlik problemi M ve D üzerine konan koşullara bağlıdır. Yani, x, M ve D üzerinde hangi koşullar altında, D deki vektör alanlarının neden olduğu negatif olmayan zamanlı yerel difeomorfizmlerin tüm bileşenleri kullanıldığında x den başlayarak M nin her bir y noktasına ulaşmak mümkündür?

Bu çalışmada kontrol edilebilirlik problemini kompakt, bağlantılı ve Abelian olmayan bir G Lie grubu ve kontrol vektörleri sol invariant vektör alanları olarak gözönüne aldığımız G nin $L(G)$ Lie cebirinin elemanları ve drift (sapan) vektör alanı da $\mathcal{X}(G)$ deki $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünün bir elemanı ile belirlenen D dinamiğinden oluşan $\Sigma = (G, D)$ sistemi üzerinde inceledik.

Buradan bölümlerin temel ayrıntılarına geçebiliriz.

2.0. Lie Grupları

Bu bölümde Lie grupları, Lie cebirleri ve onların üstel tasvir ve adjoint gös-



terilimi ile bağıntılarına yer verilmiştir. Bölümün başında Lie grupları, Lie cebirleri ve genel kontrol sistemlerinin kurulmasında baz oluşturan manifoldlar hakkında temel kavramlar ele alınmıştır.

3.0. Genel Kontrol Sistemleri

M diferansiyellenebilir bir manifold ve Σ genel bir kontrol sistemi olsun. Her bir $x \in M$ nin yörüngesini ve x in Σ vasıtasıyla ulaşılabilir (accessibility) kümelerini tanımlayarak kontrol edilebilirlik problemini ve M üzerindeki kontrol edilebilirlik probleminin yörüngelerine indirilmesine olanak veren Yörünge Teoremini veriyoruz (Sussmann, 1973). Bu teorem özellikle Σ nın M üzerinde her zaman geçişli olduğunun kabul edilebileceğini gösterir. Ayrıca bu bölümde bazı örneklerle yer verilmiştir.

4.0. Lie Grupları Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemlerinin Geçişliliği ve Kontrol Edilebilirliği

Bu bölümde, (Ayala et al,1994) deki sonuçları elde ediyoruz. İlk olarak, Yardımcı Teorem 4.3.1. de, $L(G)$ nin G üzerindeki tüm düz vektör alanlarının ailesi olan $\mathcal{X}(G)$ nin bir $ad(X)$ -invariant Lie altcebiri olduğunu gösteriyoruz. Teorem 4.3.3. de, eğer

$$\mathcal{H} = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \{Y^1, \dots, Y^m\}$$

kontrol vektörleri tarafından üretilen Lie cebirini gösteriyorsa, o takdirde Σ nın $L(\Sigma)$ Lie cebirini elde ediyoruz. Yani X ve $\mathcal{H}$ tarafından üretilen cebir, $\mathcal{H}$ yi içeren $L(G)$ nin en küçük $ad(X)$ -invariant Lie altcebiri $\langle X \mid \mathcal{H} \rangle$ ile sonsuz küçük (infinitesimal) X otomorfizmi ile üretilmiş $T = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ 1-parametrelili grubun $L(T)$ Lie cebirinin yarı-direkt çarpımına izomorfiktir. Yani

$$L(\Sigma) \cong \langle X \mid \mathcal{H} \rangle \otimes L(T)$$

dır. Bu sonuç ve Yörünge Teoreminden dolayı, Teorem 4.3.5. de, eğer H , $\mathcal{H}$ Lie cebirli bağlantılı Lie grubu ise, o takdirde G nin e birim elemanının $G_\Sigma(e)$ yörüngesinin H yi içeren en küçük T -invariant $\langle X \mid H \rangle$ Lie altgrubu olduğunu

gösteriyoruz. Yani

$$G_{\Sigma}(e) = \langle X|H \rangle$$

dır. Teorem 4.3.5. de, Lie cebiri rank koşulunu veriyoruz. Yani

$$\text{boyut.geren}_{\mathcal{L}.A.}\{Y^j, ad^i(X)(Y^j) | 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m\} = n$$

eşitliği Σ nın geçişliliği (ve dolayısıyla kontrol edilebilirliği) için gerekli bir koşuldur. Burada p en küçük tamsayıdır ve $ad(X) - \mathcal{H}$ dizisi

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + [X, \mathcal{H}],$$

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i-1} + [X, \mathcal{H}_{i-1}], \quad i \geq 1$$

stabilize edilmiş Lie parantezleri alınarak oluşturulmuştur.

$\mathbb{R}^n$ haline aykırı olarak, bu koşul kontrol edilebilirliği karakterize etmez. Bunu göstermek için 3-boyutlu basit bağlantılı sıfır güçlü (nilpotent) Heisenberg Lie grubunda aykırı örnek veriyoruz. Öte yandan, Teorem 4.3.8. de, rank koşulunu veriyoruz. Yani

$$\text{boyut.geren}\{Y^j, ad^i(X)(Y^j) | 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m\} = n$$

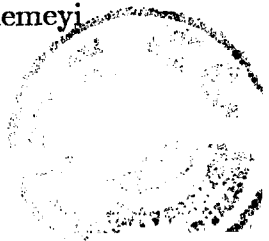
eşitliği Σ nın kontrol edilebilirliği için yeterli bir koşuldur. Özellikle, Sonuç 4.3.9. da, Kalman Teoremini (Kalman et al, 1962), Abelian bağlantılı Lie gruplarına genelleştiriliyor. Aynı zamanda, L. Markus (Markus 1980), a ait kontrol edilebilirlik sonuçlarını genelleştiriliyor. Çeşitli örneklerle bu kısmı sonuçlandırıyoruz.

5.0. $\mathcal{X}(G)$ de $L(G)$ nin Normalizörü

Burada Lie Grupları üzerinde lincer vektör alanlarını, yani

$$N = \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$$

normalizörü içindeki elemanları inceliyoruz (Ayala et al, 1994). G üzerindeki vektör alanlarını G den $L(G)$ Lie cebiri içine tanımlı C^∞ fonksiyonlarıyla özdeşlemeyi



uygun buluyoruz. G nin otomorfizmlerinin $\text{Aut}(G)$ Lie grubunu, $L(G)$ -türevlerinin $\partial(L(G))$ Lie cebirini ve $L(G)$ nin $gl(L(G))$ Lie cebiri ile yarı-direk çarpımını, yani,

$$L(G) \otimes gl(L(G))$$

Lie cebirini gözönüne alalım. $\tilde{F} \in \mathcal{X}(G)$, $F \in C^\infty(G, L(G))$ ile

$$\tilde{F}_x = dL_x(F(x)), \quad x \in G$$

şeklinde özdeşlenir. Burada L_x , x ile sol ötelemeyi gösteriyor.

$$\Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF(e))$$

şeklinde bir

$$\Phi : N \rightarrow L(G) \otimes gl(L(G))$$

Lie cebiri homorfizmi tanımlansın. Burada da e , G nin birim elemanını gösteriyor.

Teorem 5.1.16. ile eğer G bağlantılı ise o zaman

$$\Phi : N \rightarrow L(G) \otimes \partial L(G)$$

nin bir izomorfizm olduğu ispatlanıyor. Ayrıca eğer yine G bağlantılı ise Φ nin N yi $L(G) \otimes \text{aut}(G)$ üzerine izomorfik olarak tasvir ettiğini Teorem 5.1.19. da veriyoruz.

6.0. Abelian olmayan, kompakt, bağlantılı bir Lie grubu üzerinde normalizörlü bir lineer kontrol sisteminin kontrol edilebilirliği

G kompakt, bağlantılı, Abelian olmayan bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olsun. $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemini gözönüne alalım. D dinamiği

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(x)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesinden oluşsun. Burada $x \in G$, X G üzerindeki tüm düz vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebirinin bir elemanı olup, $L(G)$



Lie cebirinin normalizöründe yer alır ve $j = 1, \dots, k$ için $Y^j \in L(G)$ dir. $L(G)$ Lie cebirini sol invariant vektör alanlarının kümesi olarak alıyoruz. Kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerin U sınıfı tüm parçalı sabit $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ fonksiyonların kümesidir. D, Σ ile birleşmiş vektör alanlarının ailesidir. Yani

$$D = \{X + \sum_{j=1}^k u_j Y^j \mid X \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)), Y^j \in L(G) \text{ ve } u_j \in U\}$$

dir. X e, G nin sonsuz küçük otomorfizmi diyeceğiz ve X vasıtasıyla üretilmiş $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ akışı $\text{Aut}(G)$ nin 1-parametrelili bir altgrubudur.

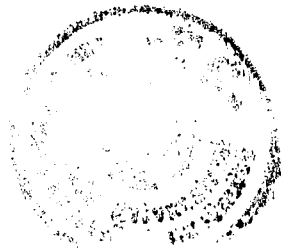
Bir G Lie grubunun birim elemandaki $T_e G$ teğet uzayına atanmış bir w ölçümü soldan çarpma ile G nin herhangi bir noktasına götürülebilir. Böyle bir ölçüm soldan çarpma altında invarianttır ve w dan integrasyonla oluşan ölçümdür. Bu ölçümün sağdan çarpma altında da invariant olduğunu bilmek önemlidir. Herhangi yerel kompakt bir Lie grubunda tek taraflı invariant ölçüm vardır. Eğer Lie grubu kompakt ise iki taraflı invariant ölçüm vardır (Hausner et al, 1968).

Teorem 6.2.4. de eğer G Lie grubu kompakt ve bağlantılı ise o zaman sistemin dinamiğini oluşturan vektör alanlarının ölçüm invariant (konservativ) olduğunu gösteriyoruz.

Poincare'nin sonucu (Poincare Teoremi), konservativ bir vektör alanı vasıtasıyla üretilmiş bir dinamik sistemin Poisson sabit (Poisson stable yada rekürans) noktalarının yoğun olduğunu söyler. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda $\mathbb{R}^n$ ve Abelian Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğinin geçişlilikleri vasıtasıyla karakterize edildiğini önceki bölümlerde görüyoruz. Poincare'nin sonucundan yararlanarak Abelian olmayan, bağlantılı, kompakt bir Lie grubu üzerindeki sistemimiz için aşağıdaki teoremi ispatlıyoruz:

6.2.6. Teorem: G Abelian olmayan, bağlantılı, kompakt bir Lie grubu olmak üzere $\Sigma = (G, D)$ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde Σ geçişlidir $\Leftrightarrow \Sigma$ kontrol edilebilirdir.

Bir örnekle de bu kısmı sonuçlandırıyoruz.



2.0. LİE GRUPLARI

Bir Lie grubu hem bir manifold ve hem de bir grup yapısına sahip bir kümedir. Bu çalışmada bir $L(G)$ Lie cebiri ile verilmiş bir G Lie grubu üzerinde tanımlanmış bir Σ lineer kontrol sistemi ile ilgileneceğiz. Burada doğal uzayımız daima düz (yani, C^∞ yada analitik) olan bir diferansiyel manifold olup, Lie grupları teorisine geçmeden önce manifoldlar hakkında kısaca bilgi vereceğiz.

2.1. Manifoldlar

2.1.1. Tanım : n -boyutlu yerel bir Öklid M uzayı, her bir noktası Öklid uzayı R^n nin açık bir alt kümesine homeomorfik bir komşuluğa sahip olan bir M Hausdorff topolojik uzayıdır. Eğer φ , bağlantılı açık bir $U \subset M$ kümesinden R^n nin bir açık alt kümesine bir homoemorfizma ise, φ bir *koordinat tasviri*, $x_i = r_i \circ \varphi$ fonksiyonları *koordinat fonksiyonları* ve (U, φ) ikilisi (bazen $(U, x_1, \dots, x_n)$ ile gösterilir) bir *koordinat sistemi* adını alır. Burada $r_i : R^n \rightarrow R$ fonksiyonu her $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ için $r_i(a) = a_i$ şeklinde tanımlanmıştır. $\diamond$

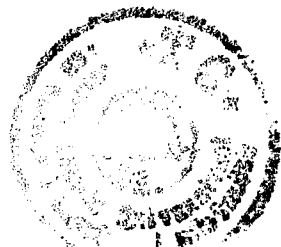
2.1.2. Tanım : Bir yerel M Öklid uzayı üzerinde C^∞ sınıftan diferansiyellenebilir bir F yapısı aşağıdaki üç özeliği sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ koordinat sistemlerinin bir sınıfıdır:

(a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ dir.

(b) Her $\alpha, \beta \in A$ için $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, C^\infty$ dir.

(c) F sınıfı (b) ye göre maximaldır ; yani, eğer (U, φ) her $\alpha \in A$ için $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ve $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ bileşkeleri C^∞ olacak şekilde bir koordinat sistemi ise o zaman $(U, \varphi) \in F$ dir. $\diamond$

C^∞ sınıftan n -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold, C^∞ sınıftan bir F diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte yerel bir M Öklid uzayından oluşan bir (M, F) ikilisidir.



2.1.3. Uyarı :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (2.1)$$

teğet demeti 2-boyut M boyutlu bir manifolddur (Warner, 1971).

2.1.4. Tanım : Bir $X : C^\infty(M) \rightarrow R$ tasviri eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa $p \in M$ de bir teğet vektörüdür:

(a) $X(f + g) = X(f) + X(g)$.

(b) $X(fg)(p) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$. ◇

Teğet vektörlerinin, her bir $p \in M$ noktası üzerinde boyutu M manifoldunun boyutuna eşit olan ve $T_p M$ ile gösterilen sonlu bir vektör uzayı oluşturması onlar hakkındaki en temel sonuçtur.

2.1.5. Tanım : M içinde açık $dom(X)$ üzerinde tanımlanmış bir X vektör alanı bir özdeşliğin kaldırmasıdır (lifting). Yani

$$\begin{array}{ccc} dom(X) \subset M & \xrightarrow{X} & TM \\ Id \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad (2.2)$$

dır. Burada $\pi(p, v) = p$ olup, buna eşdeğer olarak

$$X(p) \in T_p M, \forall p \in dom(X) \quad (2.3)$$

yazılabilir. ◇

Bir X vektör alanı ve bir f fonksiyonu

$$\tilde{X}(f)(p) = X(p)(f), p \in M \quad (2.4)$$

koşulunu sağlayan yeni bir $\tilde{X}(f)$ fonksiyonunu oluşturur.

2.1.6. Tanım : Bir X vektör alanının genişlemesi

$$\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad (2.5)$$

tasviridir. ◇

X ve Y gibi verilen herhangi iki vektör alanı için parantez işlemini tanımlayalım.



2.1.7. Tanım : M diferansiyellenebilir bir manifold ve $X, \text{dom}(X)$ üzerinde tanımlanmış bir vektör alanı olsun. Her $p \in M$ noktasında mümkün olan tüm t ler için

$$X_{\gamma(X,p,t)} = \dot{\gamma}(X,p,t) \quad (2.6)$$

$$\gamma(X,p,0) = p \quad (2.7)$$

olacak şekilde X in bir $\gamma(X,p,\cdot)$ integral eğrisi vardır (diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği teoremi (Warner, 1971)).

2.1.8. Tanım : İki vektör alanının parantezi

$$[X,Y](p)(f) = X(p)(\tilde{Y}(f)) - Y(p)(\tilde{X}(f)) \quad (2.8)$$

ile tanımlanmış bir vektör alanıdır. $\diamond$

2.1.9. Parantez işleminin özellikleri:

- a) $[X,X] = 0$.
- b) $[X,Y] = -[Y,X]$, yani parantez ters-simetriktir.
- c) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ olup, *Jacobi özdeşliği* adını alır.

2.1.10. Tanım :

i) M, N iki manifold olsun. $f : M \rightarrow N$ ye öğer

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \psi(V) \end{array} \quad (2.9)$$

$\varphi(p)$ de diferansiyellenebilir olacak şekilde p için (U, φ) ve $f(p)$ için (V, ψ) koordinat sistemleri varsa, $p \in M$ de *diferansiyellenebilirdir* denir.

ii) f bir M manifoldundan bir N manifolduna diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f nin türevi her $X \in TM$ ve herbir $g \in C^\infty(N)$ için

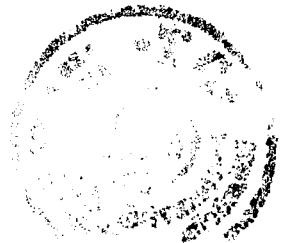
$$df(X)(g) = X(g \circ f) \quad (2.10)$$

ile tanımlı

$$df : T(M) \rightarrow T(N) \quad (2.11)$$

tasviridir. $\diamond$

2.1.11 Uyarı : f nin p de diferansiyellenebilirliğinin tanımının koordinat sistemlerinin seçiminden bağımsız olduğunu belirtelim (Warner, 1971).



2.2. Lie Grupları

2.2.1. Tanım : Bir G kümesi, eğer $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1}$ ile tanımlı $G \times G \rightarrow G$ tasviri diferansiyellenebilir olacak şekilde bir grup yapısı ile verilmiş bir diferansiyellenebilir manifold ise bir *Lie grubu* adını alır. $\diamond$

2.2.2. Uyarı : G bir Lie grubu olsun. O taktirde $\tau \rightarrow \tau^{-1}$ tasviri,

$$\tau \rightarrow (e, \tau) \rightarrow \tau^{-1} \quad (2.12)$$

şeklinde diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşkesi olduğundan diferansiyellenebilir. Burada e , G Lie grubunun birim elemanını gösteriyor. Ayrıca $G \times G \rightarrow G$ nin $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau$ tasviri

$$(\sigma, \tau) \rightarrow (\sigma, \tau^{-1}) \rightarrow \sigma\tau \quad (2.13)$$

şeklinde diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşkesi olduğundan diferansiyellenebilir. Aşağıdaki örnekler genel lineer grup, birimsel grup, ortogonal grup ve özel lineer grubu içermektedir.

2.2.3. Örnek : $G = GL(n, \mathbb{R})$ genel lineer grubu, reel elemanlı $n \times n$ tersinir matrislerin kümesi olan bir Lie grubudur. İlk iş olarak $GL(n, \mathbb{R})$ ye bir manifold yapısı vermektir. Eğer $\mathbb{R}^{n^2}$ nin noktalarını açık bir yöntemle $n \times n$ reel matrisleri ile özdeşlersek, o zaman $\mathbb{R}^{n^2}$ üzerinde determinant sürekli bir fonksiyon olur. Böylece $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin açık altkümesi olarak bir manifold yapısı kazanır. Burada determinant fonksiyonu değersiz olmaz. Eğer $(a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$, $x_{i+n(j-1)} = a_{ij}$ ise o zaman

$$(a_{ij}) \rightarrow (x_k) \quad (2.14)$$

tasviri

$$GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2} \quad (2.15)$$

nin bir bire-bir tasviridir. O halde $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin bir altkümesi olarak özdeşlenmiştir. Eğer $\mathbb{R}^{n^2}$ yi tüm tersinir yada tersinir olmayan matrislerin kümesi ile $(a_{ij}) \rightarrow (x_k)$ tasvirine benzer bir yolla özdeşlersek, o zaman

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.16)$$

determinant fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Determinant n . dereceden bir polinom olduğundan düzdür (C^∞).

$$GL(n, \mathbb{R}) \cong \det^{-1}(\mathbb{R}^*) \quad (2.17)$$

dir. Burada

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \quad (2.18)$$

dır. Determinant fonksiyonu sürekli olduğundan $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin açık bir altkümesidir ve bu nedenle düz bir manifold yapısına sahiptir. Determinant fonksiyonu bu düz yapı ile bir düz fonksiyondur. Aynı zamanda $GL(n, \mathbb{R})$ matris çarpımı altında bir grup yapısına sahiptir. Burada geriye

$$(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlı

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad (2.20)$$

tasvirinin ve

$$\tau \rightarrow \tau^{-1} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlı

$$\lambda : G \rightarrow G \quad (2.22)$$

tasvirinin düz olduğunu göstermek kalıyor. Çünkü, eğer bu tasvirler düz ise, o zaman

$$\theta = \mu \circ (id \times \lambda) \quad (2.23)$$

olduğundan dolayı

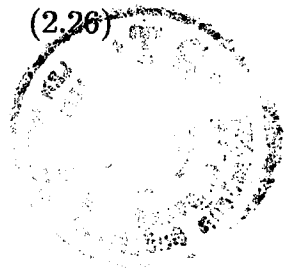
$$(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlı

$$\theta : G \times G \rightarrow G \quad (2.25)$$

tasviri düzdür.

$$\mu((a_{ij})(b_{ij})) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right), \quad (2.26)$$



olup, μ bir polinom tasviridir ve dolayısıyla düzdür.

$$\lambda(a_{ij}) = (a_{ij})^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}) \quad (2.27)$$

olup, λ tasviri de düzdür. Bu da $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir Lie grubu olduğunu gösterir.

2.2.4. Örnek : Bir Lie grubunun en küçük ilginç örneklerinden biri $SU(2, C)$ dir.

Bu ise ters matris transpozun kompleks eşleniği ve determinantı 1 olacak şekilde kompleks elemanlı 2×2 matrislerinin kümesi olarak tanımlanır. Yani

$$SU(2) = \{A \mid \overline{A^t} = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\} \quad (2.28)$$

dir. z ve w

$$|z|^2 + |w|^2 = 1 \quad (2.29)$$

olacak şekilde kompleks sayılar olsun. O zaman

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$SU(2)$ nin bir elemanıdır. Karşıt olarak, eğer $A \in SU(2)$ ise, o zaman A , denklem (2.30) daki forma sahip olacak şekilde z ve w vardır. $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ olacak şekilde $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olsun. O zaman $SU(2)$ üzerinde aşağıdaki gibi manifold yapısı tanımlayabiliriz:

$$U_1 = \{A \mid x > 0\}, U_2 = \{A \mid x < 0\}, U_3 = \{A \mid y > 0\}, U_4 = \{A \mid y < 0\},$$

$$U_5 = \{A \mid u > 0\}, U_6 = \{A \mid u < 0\}, U_7 = \{A \mid v > 0\}, U_8 = \{A \mid v < 0\}.$$

Karşılık gelen tasvirler

$$\varphi_1(A) = (y, u, v), \varphi_2(A) = (y, u, v), \varphi_3(A) = (x, u, v), \varphi_4(A) = (x, u, v),$$

$$\varphi_5(A) = (x, y, v), \varphi_6(A) = (x, y, v), \varphi_7(A) = (x, y, u), \varphi_8(A) = (x, y, u)$$

dir. $SU(2)$,

$$\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, 2, \dots, 8\} \quad (2.31)$$

ile bir düz manifold yapısına sahip olup aynı zamanda matris çarpımına göre bir gruptur.

$$\varphi : SU(2) \rightarrow \mathbb{R}^+$$



tasviri

$$\varphi(A) = (x, y, u, v) \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. O taktirde, eğer A_1 ve A_2 , $\varphi(A_i) = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ olacak şekilde sırasıyla (z_1, w_1) ve (z_2, w_2) ile verilmiş iki matris ise,

$$x_3 = x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2, y_3 = x_1y_2 + x_2y_1 + u_1v_2 - u_2v_1,$$

$$u_3 = x_1u_2 + x_2u_1 - y_1v_2 + y_2v_1, v_3 = x_1v_2 + x_2v_1 + y_1u_2 - y_2u_1,$$

olmak üzere

$$\varphi(A_1 A_2) = (x_3, y_3, u_3, v_3) \quad (2.34)$$

düz olup,

$$\varphi(A^{-1}) = (x, -y, -u, -v) \quad (2.35)$$

de düzdür.

Böylece, $SU(2)$ 3-boyutlu bir Lie grubudur. Özellikle, φ tasviri $SU(2)$ den $\mathbb{R}^4$ deki birim vektörlerin kümesi S^3 üzerine bir difeomorfizmdir. S^3 uzayı 3-boyutlu küre olduğundan $SU(2)$ nin boyutu 3 tür.

2.2.5. Tanım :

$$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau \quad (2.36)$$

ile tanımlı

$$l_\sigma : G \rightarrow G \quad (2.37)$$

tasviri σ ile sol öteleme adımı alır. $\diamond$

l_σ nın türevi

$$dl_\sigma : T(G) \rightarrow T(G), \quad (2.38)$$

olup, burada $dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau} G$ dir.

2.2.6. Tanım : Bir X vektör alanı, eğer her $\sigma \in G$ için

$$X \circ l_\sigma = dl_\sigma(X) \quad (2.39)$$

ise G üzerinde *sol-invariant* adını alır. $\diamond$

2.2.7. Teorem : G bir Lie grubu ve $L(G)$ onun sol-invariant vektör alanlarının kümesi olsun. O taktirde $L(G)$ bir reel vektör uzayıdır ve $\alpha(X) = X_e$ şeklinde

tanımlı $\alpha : L(G) \rightarrow T_e(G)$ tasviri $L(G)$ nin, G nin birim elemandaki $T_e(G)$ teğet uzayı ile bir izomorfizmdir.

İspat :

$L(G)$ nin bir reel vektör uzayı olduğu açıktır. $X, Y \in L(G)$ ve a, b skalerleri için

$$\begin{aligned}\alpha(aX + bY) &= (aX + bY)(e) \\ &= aX(e) + bY(e) \\ &= a\alpha(X) + b\alpha(Y),\end{aligned}$$

olduğundan, α lineerdir.

α bire-bir dir. Çünkü eğer $\alpha(X) = \alpha(Y)$ ise, o zaman her $\sigma \in G$ için

$$X(\sigma) = dl_\sigma(X(e)) = dl_\sigma(Y(e)) = Y(\sigma) \quad (2.40)$$

olup böylece $X = Y$ dir.

Ayrıca, α üzerinedir. Çünkü $X \in T_e(G)$ ise, her $\sigma \in G$ için

$$X(\sigma) = dl_\sigma(X) \quad (2.41)$$

dir. Bu taktirde her $\sigma, \tau \in G$ için

$$X(\tau\sigma) = dl_{\tau\sigma}(X) = dl_\tau dl_\sigma(X) = dl_\tau(X(\sigma)) \quad (2.42)$$

olduğundan $\alpha(X) = X$ ve X sol-invarianttır. Bu halde, $L(G) \cong T_e(G)$ dir. Sonuç olarak,

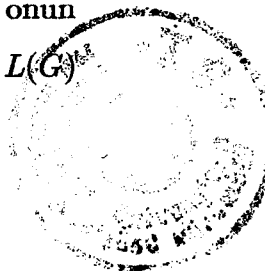
$$\text{boyut} L(G) = \text{boyut} T_e(G) = \text{boyut} G \quad (2.43)$$

dir. ◇

Bu çalışmada, herhangi bir Lie grubunun Lie cebirini daima sol-invariant vektör alanlarının Lie cebiri olarak gözönüne alacağız.

2.3. Lie Cebirleri

2.3.1. Tanım : Bir K ($\mathbb{R}$ or C) cisim üzerinde bir $L(G)$ vektör uzayı eğer onun vektör uzayı yapısına ek olarak bir çarpım veriyorsa, yani bir $L(G) \times L(G) \rightarrow L(G)$



tasviri (X, Y) ikilisini $L(G)$ nin $[X, Y]$ elemanına götürüyorsa bir *Lie cebiri* adını alır:

i) K üzerinde bilineerdir:

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y],$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2];$$

ii) Ters simetriktir :

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

iii) Jacobi özdeşliğini sağlar : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. $\diamond$

Lie cebiri kavramının önemi, her bir Lie grubu ile birleşmiş sonlu boyutlu özel bir Lie cebirinin varolması ve Lie grubunun özelliklerinin onun Lie cebirinin özellikleri ile yansıtılmasıdır.

2.3.2. Lie cebirinin örnekleri :

- a) M manifoldu üzerindeki tüm düz vektör alanlarının vektör uzayı vektör alanları üzerindeki Lie parantezi işlemi altında bir Lie cebiri oluşturur.
- b) Herhangi bir vektör uzayı, eğer tüm parantezler 0 a eşit küme ise bir Lie cebiri oluşturur. Böyle bir Lie cebirine *Abelian* Lie cebiri denir.
- c) Tüm $n \times n$ reel matrislerin $gl(n, \mathbb{R})$ vektör uzayı, eğer

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.44)$$

konursa bir Lie cebiri oluşturur.

2.3.3. Uyarı : G Lie grubunun Lie cebirini G üzerindeki sol-invariant vektör alanlarının $L(G)$ Lie cebiri olarak tanımlıyoruz. Başka bir deyişle, G nin Lie cebiri olarak $L(G)$ nin $T_e(G)$ ile vektör uzayı izomorfizmi Lie cebirlerinin bir izomorfizmi olduğu gerçeği ile verilmiş Lie cebiri yapısı ile birim elemandaki $T_e(G)$ teğet uzayını alabiliriz.

2.3.4. Lie Grupları ve onların Lie cebirlerinin örnekleri :

- a) Reel eksen $\mathbb{R}$ toplam altında bir Lie grubudur. Sol-invariant vektör alanları basitçe

$$\{\lambda(d/dr) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$



sabit vektör alanlarıdır. Böyle herhangi iki vektör alanının parantezi 0 dır.

b) 3-boyutlu Heisenberg Grubu : Bu grup

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (2.47)$$

alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için, G de bir nokta vardır ve o taktirde $\gamma(t)$,

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad (2.48)$$

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e(G) \quad (2.49)$$

olacak şekilde G üzerinde bir eğridir. Yine

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (2.50)$$

alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için, G de bir nokta vardır ve o zaman $\alpha(t)$ de

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad (2.51)$$

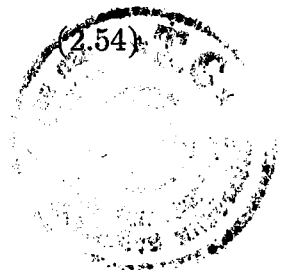
$$\dot{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_e(G) \quad (2.52)$$

olacak şekilde G üzerinde bir eğridir. Bu kez de

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (2.53)$$

alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için, G de bir nokta vardır ve $\beta(t)$

$$\beta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad (2.54)$$



$$\dot{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_e(G) \quad (2.55)$$

olacak şekilde G üzerinde yine bir eğridir. Burada

$$T_e(G) \cong L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.56)$$

ve

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z, \quad (2.57)$$

$[X, Z] = 0$ ve $[Y, Z] = 0$ dir.

2.4. Üstel Tasvir

Buraya kadar G nin $L(G)$ Lie cebirini ya birim elemanda teğet uzayı olarak yada sol-invariant vektör alanları olarak aldık. Bu kısımda bir-parametrelili altgrupların kümesi olarak Lie cebirinin üçüncü bir tanımlamasını veriyoruz.

2.4.1. Tanımlar : Bir $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ homomorfizmi G nin *1-parametrelili altgrubu* adını alır. G bir Lie grubu ve $L(G)$ onun Lie cebiri olsun. O takdirde

$$\lambda \frac{d}{dr} \rightarrow \lambda X \quad (2.58)$$

$\mathbb{R}$ nin Lie cebirinin $L(G)$ içine bir homomorfizmidir. Reel eksen basit bağlantılı olduğundan (yani, temel grubu aşıkarak olan bağlantılı bir topolojik uzay)

$$\exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X \quad (2.59)$$

olacak şekilde tek bir

$$\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow G \quad (2.60)$$

1-parametrelili altgrubu vardır. Başka bir deyişle, $t \rightarrow \exp_X(t)$, 0 daki teğet vektörü $X(e)$ olan G nin 1-parametrelili tek altgrubudur.

Üstel tasvir

$$\exp(X) = \exp_X(1) \quad (2.61)$$



alınarak oluşan

$$\exp : L(G) \rightarrow G \quad (2.62)$$

tasviridir.

2.4.2. Teorem : X, G nin $L(G)$ Lie cebirinin bir elemanı olsun. O takdirde

- i) Herbir $t \in \mathbb{R}$ için $\exp(tX) = \exp_X(t)$,
- ii) Her $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp(t_1X))(\exp(t_2X))$,
- iii) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$.

İspat :

i)

$$\psi(t) = \exp_{sX}(t)$$

ve

$$\varphi(t) = \exp_X(st)$$

olacak şekilde $\mathbb{R}$ nin G içine φ ve ψ tasvirlerini tanımlayalım. Burada $s \in \mathbb{R}$ dir.

$\psi, \psi(0) = e$ olacak şekilde sX in tek integral eğrisidir.

$$d\varphi \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = d\exp_X \left(s \frac{d}{dr} \Big|_{st} \right) = sX \Big|_{\exp_X(st)} \quad (2.63)$$

olup ve böylece φ , aynı zamanda $\varphi(0) = e$ olacak şekilde sX in bir integral eğrisidir. İntegral eğrilerin tekliğinden dolayı $\varphi = \psi$ dir. Bu nedenle,

$$\exp_{sX}(t) = \exp_X(st), (s, t \in \mathbb{R}; X \in L(G)) \quad (2.64)$$

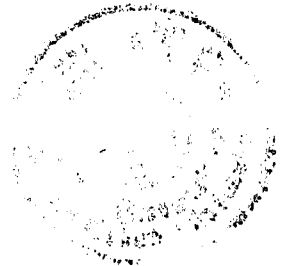
elde edilir. $t = 1$ alarak ve s yerine t yazarak,

$$\exp_{tX}(1) = \exp_X(t) \quad (2.65)$$

bulunur.

ii) $\exp_X, \mathbb{R}$ nin G içine bir homomorfizmi olduğundan ve (i) den dolayı

$$\begin{aligned} \exp(t_1 + t_2)X &= \exp_X(t_1 + t_2) \\ &= \exp_X t_1 \cdot \exp_X t_2 = \exp(t_1 X) \cdot \exp(t_2 X) \end{aligned}$$



elde edilir.

iii) $\exp(-tX) = \exp_X(-t) = (\exp_X(t))^{-1} = (\exp(tX))^{-1}$ dir $\diamond$

2.4.3. Teorem : $\varphi : H \rightarrow G$ bir homomorfizm olsun. O taktirde aşağıdaki diagram değışmelidir:

$$\begin{array}{ccc} L(H) & \xrightarrow{d\varphi} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array} \quad (2.66)$$

İspat : $X \in L(H)$ olsun. O taktirde $\varphi(\exp X) \in G$ dir. $t \rightarrow \varphi(\exp(tX))$, 0 daki teğeti $d\varphi(X(e))$ olan G de bir düz eğridir. Bu aynı zamanda, φ bir homomorfizmi olduğundan G nin 1-parametrelili bir altgrubudur. Oysa, $t \rightarrow \exp(t(d\varphi(X)))$, 0 daki teğeti $(d\varphi(X))(e)$ olan G nin tek 1-parametrelili altgrubudur. Böylece,

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X))) \quad (2.67)$$

olup, $t = 1$ alınırsa o zaman

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)), \quad (2.68)$$

yada

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi \quad (2.69)$$

elde edilir. $\diamond$

2.4.4. Örnek : A , bir $n \times n$ matrisi olsun ve $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tasviri

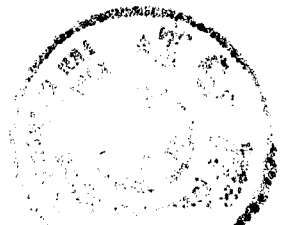
$$\varphi(t) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \exp(tX)$$

şeklinde tanımlansın. $\exp(tX) = \exp_X(t)$ ve $\exp_X$, $\mathbb{R}$ nin bir homomorfizmi ve $(d\varphi)_0(1) = A$ olduğundan φ , $GL(n)$ nin 1-parametrelili bir altgrubudur. Böylece, üstel tasvirin bir matris grubu için

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (2.70)$$

olup ve Lie cebiri tüm matrislerin vektör uzayının bir altuzayıdır.



2.4.5. Örnek : G , 3-boyutlu bir Heisenberg grubu ve $L(G)$ onun Lie cebiri olsun.

$$\exp : L(G) \rightarrow G$$

olup

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(G)$$

alalım. Buna göre $X^2 = 0$ olup,

$$\exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

$$(tX)^2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \exp(tX) = I + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu takdirde,

$$\exp X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

2.4.6. Örnek : $L(H)$, n -boyutlu ters-simetrik reel matrislerin bir vektör uzayı, yani

$$L(H) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\} \quad (2.71)$$

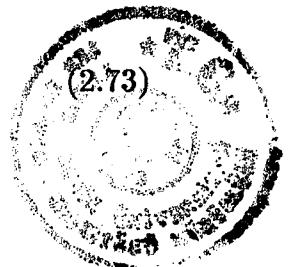
olsun. Eğer $A, B \in L(H)$ ise

$$[A, B] + [A, B]^t = 0 \quad (2.72)$$

olup, buna göre $[A, B] \in L(H)$ ve $L(H)$, $(M_n(\mathbb{R}), [,])$ nin bir Lie altcebiridir.

Burada $M_n(\mathbb{R})$, reel elemanlı bir $n \times n$ matrisini gösteriyor.

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$



üstel tasviri her $A \in L(H)$ için $\exp A$ nın

$$O_n(\mathbb{R}) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid P \cdot P^t = Id\} \quad (2.74)$$

şeklindeki ortogonal matrislerin Lie grubuna ait olması koşulunu sağlar. Gerçekten,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A \quad (2.75)$$

olduğundan

$$Id = e^{A+A^t} = e^A \cdot e^{A^t} = e^A \cdot (e^A)^t \quad (2.76)$$

bulunur. Özellikle, eğer $O_n(\mathbb{R})$ deki özdeşliğin bağlantılı bileşeni $SO_n(\mathbb{R})$ ile gösterilirse

$$T_{Id}SO_n(\mathbb{R}) = L(H) \quad (2.77)$$

elde edilir. Burada

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \quad (2.78)$$

dir. O zaman $O_n(\mathbb{R})$ ve $SO_n(\mathbb{R})$ Lie grupları aynı $L(H)$ Lie cebirine sahiptirler.

2.5. Adjoint Gösterilim

M bir düz manifold ve G bir Lie grubu olsun. G nin M üzerinde soldan bir etkisi (action) her $\sigma, \tau \in G$ ve $m \in M$ için

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m)),$$

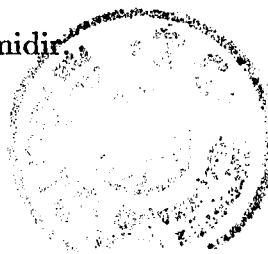
$$\mu(e, m) = m$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir

$$\mu : G \times M \rightarrow M$$

tasviridir.

Eğer $\mu : G \times M \rightarrow M$ G nin M üzerinde soldan bir etkisi ise o takdirde sabit bir $\sigma \in G$ için $m \rightarrow \mu(\sigma, m)$ tasviri μ_σ ile gösterilen M nin bir difeomorfizmidir.



Benzer şekilde M üzerinde G nin sağdan bir etkisi her $\sigma, \tau \in G$ ve $m \in M$ için

$$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau),$$

$$\mu(m, e) = m$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\mu : M \times G \rightarrow M$ tasviridir.

2.5.1. Tanım : Bir G Lie grubu

$$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$$

olacak şekilde

$$i : G \times G \rightarrow G$$

iç otomorfizmi vasıtasıyla soldan kendisi üzerinde etkir. Özdeşlik bu etkimenin bir sabit noktasıdır, yani her $\sigma \in G$ için $i_\sigma(e) = e$ dir. O zaman

$$\sigma \rightarrow di_\sigma|_e T_e G \cong L(G) \quad (2.79)$$

G nin $\text{Aut}(L(G))$ içine bir gösterilimidir. Bu gösterilim *adjoint gösterilim* adını alır ve

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(L(G)) \quad (2.80)$$

ile gösterilir. ◇

(2.66) dan dolayı aşağıdaki değişmeli diagramları elde edilir :

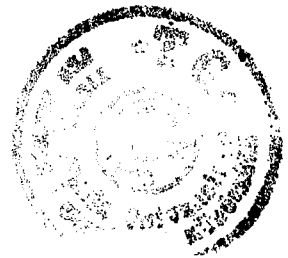
$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{d\rho} & \text{End}(L(G)) \\ \exp \downarrow & & \downarrow e \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(L(G)) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & L(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{i_\sigma} & G \end{array} \quad (2.81)$$

$$\exp t\rho(\sigma)(X) = \sigma(\exp tX)\sigma^{-1},$$

$$\exp \circ \rho_\sigma = i_\sigma \circ \exp. \quad (2.82)$$

Böylece eğer $t \in \mathbb{R}$ ve $X \in L(G)$ ise

$$i_\sigma(\exp(tX)) = \exp(\rho(\sigma)(tX)) = \exp(t\rho(\sigma)(X)),$$



$$x \exp(tX) x^{-1} = \exp(t\rho(x))(X) \quad (2.83)$$

olduğu görülür.

2.6. Lie Türevi

2.6.1. Tanımlar : Herbir $t \in \mathbb{R}$ için $X_t(m) = \gamma_m(t)$ alarak

$$D_t = \{m \in M \mid t \in (a(m), b(m))\} \quad (2.84)$$

tanım bölgesi bir X_t dönüşümünü tanımlayalım. Burada

$$\gamma_m : (a(m), b(m)) \rightarrow M$$

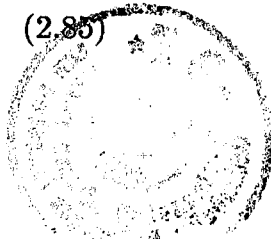
ifadesi $0 \in (a(m), b(m))$ ve $\gamma_m(0) = m$ olacak şekilde X in bir integral eğrisidir.

Eğer her t için $D_t = M$ (yani, herbir $m \in M$ için γ_m nin tanım bölgesi $(-\infty, \infty)$) ise M üzerinde bir düz X vektör alanı *tamdır*. Bu durumda, X_t dönüşümleri reel sayılar ile parametrelenmiş M nin dönüşümlerinin bir grubunu oluşturur ve bu grup X in *1-parametrelili grubu* adını alır.

Eğer X tam değilse X_t dönüşümleri bir grup oluşturmaz. Çünkü bu dönüşümlerin tanım bölgeleri t ye bağlıdır. Bu halde X_t dönüşümlerinin topluluğuna X in *yerel 1-parametrelili grubu* olarak bakacağız.

Bir M manifoldu üzerinde bir düz X vektör alanı saptansın. X_t , X ile birleşmiş dönüşümlerin yerel 1-parametrelili grubunu gösterebiliriz. Y de M üzerinde başka bir vektör alanı olsun. Y nin bir $m \in M$ noktasında X e göre türevini tanımlayacağız. Önce m den geçen X in integral eğrisini $X_t(m)$ noktasına kadar götürelim ve orada Y yi değerlendirelim. Bu taktirde $Y_{X_t(m)}$ yi X_{-t} difeomorfizminin dX_{-t} diferansiyeli ile $T_m M$ ye tekrar getirelim. $T_m M$ de $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ ve Y_m vektörlerinin farkını alalım, bu farkı t ile bölelim ve $t \rightarrow 0$ iken limitini alalım. Başka bir deyişle $T_m M$ -değerli düz $t \rightarrow dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ fonksiyonunu gözönüne alalım ve onun $t = 0$ daki türevini bulalım. Sonuç $T_m M$ de bir vektör olup buna m de X e göre Y nin *Lie türevi* denir ve bunu $(L_X Y)_m$ simgesiyle göstereceğiz. Böylece

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_t(Y_{X_t(m)}) - Y_m}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_t(m)})) \quad (2.85)$$



dir.

2.6.2. Önerme : X, M üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olsun. O takdirde M üzerinde diferansiyellenebilir her Y vektör alanı için

$$L_X Y = [X, Y]$$

dir.

İspat : Herbir $f \in C^\infty(M)$ için

$$L_X Y(f) = [X, Y]f$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $m \in M$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} (L_X Y)(f) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(m)}) - Y_m}{t} \right) (f) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(dX_{-t}(Y_{X_t(m)}))(f)] \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [Y_{X_t(m)}(f \circ X_{-t})] \end{aligned}$$

bulunur. $\mathbb{R}^2$ de $(0,0)$ ın bir komşuluğu üzerinde

$$H(t, u) = f(X_{-t}(Y_u(X_t(m))))$$

olacak şekilde reel-değerli bir H fonksiyonu tanımlayalım. Bu takdirde

$$Y_{X_t(m)}(f \circ X_{-t}) = \frac{\partial}{\partial r_2} \Big|_{(t,0)} H(t, u)$$

olup,

$$\begin{aligned} (L_X Y)(f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial r_2} \Big|_{(t,0)} H(t, u) \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_2} \Big|_{(0,0)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu türevi değerlendirmek için

$$K(t, u, s) = f(X_s(Y_u(X_t(m))))$$



alalım. O zaman $H(t, u) = K(t, u, -t)$ yazılır. Zincir kuralından

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_2} \big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 K}{\partial r_1 \partial r_2} \big|_{(0,0,0)} - \frac{\partial^2 K}{\partial r_3 \partial r_2} \big|_{(0,0,0)}$$

$$K(t, u, 0) = f(Y_u(X_t(m)))$$

olduğu sonucu çıkar. O halde

$$\frac{\partial K}{\partial r_2} \big|_{(t,0,0)} = Y_{X_t(m)}(f),$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r_1 \partial r_2} \big|_{(0,0,0)} = X_m(Yf)$$

bulunur. Aynı zamanda $K(0, u, s) = f(X_s(Y_u(m)))$ yazılabilir. Böylece

$$\frac{\partial K}{\partial r_3} \big|_{(0,u,0)} = Xf(Y_u(m)),$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r_2 \partial r_3} \big|_{(0,0,0)} = Y_m(Xf)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (L_X Y)_m(f) &= \frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_2} \big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 K}{\partial r_1 \partial r_2} \big|_{(0,0,0)} - \frac{\partial^2 K}{\partial r_3 \partial r_2} \big|_{(0,0,0)} \\ &= X_m(Yf) - Y_m(Xf) \end{aligned}$$

$$= [X, Y]_m(f)$$

elde edilir. ◇

2.6.3. Önerme : $G, L(G)$ Lie cebiri ile bir Lie grubu olsun ve $X, Y \in L(G)$ verilsin. O takdirde

$$d\rho(X)(Y) = [X, Y]$$

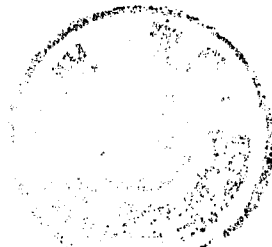
dir.

İspat : (2.66) den dolayı

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X))$$

olurken

$$\varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi(X))$$



olduğu biliniyor. Buradan

$$\varphi(\exp X) = 1 + d\varphi(X) + \frac{(d\varphi(X))^2}{2!} + \dots$$

ve

$$d\varphi(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\exp tX) - 1}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi(\exp tX))$$

olduğu sonucu çıkar. (2.73) diagramından

$$e \circ d\rho = \rho \circ \exp$$

elde edilir. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d\rho(X)(Y) &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp tX) \right) Y \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\exp tX}(Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(i_{\exp tX})(Y) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, eğer X_t , X ile birleşmiş difeomorfizminin 1-parametrelili grubunu gösterirse o zaman

$$d\rho(X)(Y)(e) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(r_{\exp(-tX)})(d(l_{\exp tX})(Y(e)))$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(r_{\exp(-tX)})(Y|_{\exp tX}) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(X_{-t})(Y_{X_t(e)}) \\ &= (L_X Y)(e) = [X, Y](e) \end{aligned}$$

olup, $d\rho(X)(Y)$ ve $[X, Y]$ nin her ikisinde sol-invarianttır. Böylece

$$d\rho(X)(Y) = [X, Y]$$

bulunur. ◇

2.6.4. Örnek : 3-boyutlu Heisenberg grubunu kendisinin Lie cebiri ile gözönüne alalım.

$$i : G \times G \rightarrow G$$



iç otomorfizm tasviri

$$i(\sigma, \tau) = \sigma \tau \sigma^{-1} = i_{\sigma}(\tau)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

ve

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} i_{\sigma}(\tau) &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & z+ay-bx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = di_{\sigma}$$

olup,

$$i_{\sigma} : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z + ay - bx)$$

den

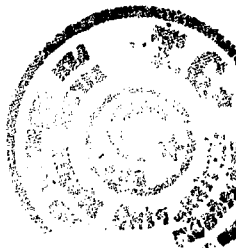
$$Jac(i_{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix}$$

ve böylece

$$di_{\sigma} : (x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -bx + ay + z \end{pmatrix}$$

bulunur.

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \rho(\exp tX)(Y)$$



$$\rho(t, 0, 0) \in \text{Aut}(L(G))$$

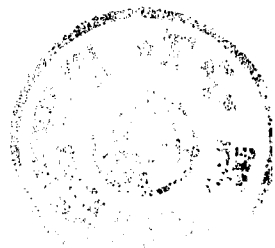
de

$$\rho(t, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

yerine konursa

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Z = [X, Y]$$

elde edilir.



3.0. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

3.1. Giriş

M bir diferansiyellenebilir manifold olsun ve $\mathcal{X}(M)$ de, M nin açık alt-kümeleri üzerinde tanımlı tüm düz vektör alanlarının sınıfını gösterebilir. Her bir $X \in \mathcal{X}(M)$, M üzerinde yerel difeomorfizmlerin 1-parametrelili bir grubunu üretir. Yani her bir $t \in \mathbb{R}$ ye karşılık X için olanaklı, manifoldlar üzerinde vektör alanları vasıtası ile üretilmiş, adi diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden dolayı (Warner, 1971),

$$X_t : \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M \quad (3.1)$$

ifadesi yerel bir difeomorfizm olup ve eğer $\gamma^X(\cdot, x)$, x noktasındaki vektör alanının integral eğrisi ise, o takdirde

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x) \quad (3.2)$$

ile tanımlıdır. Kuşkusuz, X_t nin tersi

$$X_{-t} : X_t(\text{dom}(X_t)) \subset M \rightarrow \text{dom}(X_t) \subset M \quad (3.3)$$

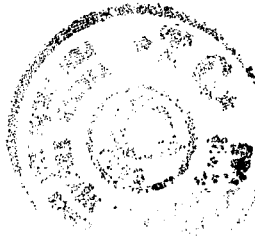
dir. Ayrıca,

- i) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$,
- ii) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$,
- iii) $X_0 = Id$ dir.

3.1.1 Tanım : Bir Σ kontrol sistemi, $\Sigma = (M, D)$ şeklinde bir ikili olarak tanımlanır. Burada M diferansiyellenebilir bir manifold ve $D \subset \mathcal{X}(M)$ dir. $\diamond$

3.1.2 Uyarılar :

- i) M ye Σ nin *durum uzayı* denir.
- ii) D nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ nin kontrolleridirler.



iii) Σ bir

$$G_{\Sigma} = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r \mid \varphi^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}\} \quad (3.4)$$

"sözde (pseudo) grubu" tanımlar ve Σ tarafından M de x in yörüngesi, x de G_{Σ} nin etkisi ile verilir :

$$G_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_{\Sigma}\}. \quad (3.5)$$

3.1.3 Tanım : Eğer $G_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa, Σ sistemine *geçişlidir* denir. $\diamond$

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_{\Sigma}(x) \quad (3.6)$$

ifadesi ile M üzerinde " $\sim$ " bağıntısını tanımlayalım. Elbette, " $\sim$ " bir denklik bağıntısıdır. Özellikle, eğer Σ bir $x \in M$ noktasında geçişli ise, o zaman M nin her noktasında geçişlidir. Yani

$$G_{\Sigma}(x) = M, \quad \forall x \in M \quad (3.7)$$

dir. Ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_{\Sigma} = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r \mid \varphi^j \in D, \quad t_j \geq 0, \quad r \in \mathbb{N}\} \quad (3.8)$$

"sözde-yarı (pseudo-semi) grubu" elde edilir ve x den Σ nin "*ulaşılabilirlik (accessibility) kümesi*" denilen Σ ile M deki x in pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_{\Sigma}\} \quad (3.9)$$

dir.

3.1.4 Uyarılar :

- i) Kuşkusuz, $S_{\Sigma}(x) \subset G_{\Sigma}(x)$, $\forall x \in M$ dir,
- ii) S_{Σ} tarafından tanımlanan M üzerindeki " $\sim$ " bağıntısı simetrik bir bağıntı değildir. Gerçekten de eğer $t > 0$ ise, o taktirde X_{-t} nin S_{Σ} ya ait olması gerekmez. Başka bir deyişle,

$$X \in D \not\Rightarrow -X \in D \quad (3.10)$$

dir. Kontrol Teorideki temel problemlerden biri $S_\Sigma(x) = M$ olacak şekilde M , D ve $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. Gerçekten eğer bir x başlangıç noktası ile başlanırsa problem, Σ nın D dinamiği ile verilen negatif olmayan stratejiler ile M nin her noktasına ulaşmaktır. Yani $S_\Sigma(x) = M$ ne zaman doğrudur? Uyarılar 3.1.4 (i) den dolayı,

$$S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x) \subset M \quad (3.11)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, Σ nın geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir koşuldur, ancak yeterli değildir. Örneğin, eğer

$$\Sigma = \left(\mathbb{R}, \left\{ \frac{d}{dx} \right\} \right) \quad (3.12)$$

alınırsa, o zaman,

$$S_\Sigma(0) = [0, \infty) \subsetneq G_\Sigma(0) = \mathbb{R} \quad (3.13)$$

olur. Bu basit örnek kontrol edilebilirlik probleminin çok zor bir soru olduğunu gösterir. 1970'den beri bir çok matematikçi diferansiyel geometri açısından kontrol sistemlerin kontrol edilebilirliği ile ilgilenmiştir.

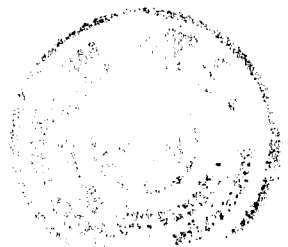
3.2 Kontrol Edilebilirlik

3.2.1 Tanım : $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya

- i) eğer $S_\Sigma(x) = M$ ise, x de *kontrol edilebilirdir*,
- ii) eğer Σ , M nin her elemanı üzerinde kontrol edilebilir ise, M üzerinde *kontrol edilebilirdir* yada kısaca *kontrol edilebilirdir* denir. $\diamond$

Burada, genel kontrol sistemleri için teorik açıdan çok önemli bir sonucu ispatsız vereceğiz. Bu sonuca, sistemin dinamiği hakkındaki tüm bilgileri koruyan, M deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak veren Yörünge Teoremi adı verilir.

3.2.2 Teorem (Yörünge Teoremi (Sussmann, 1973)) : $\Sigma = (M, D)$ diferansiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir kontrol sistem olsun. Her bir $x \in M$ için, $G_\Sigma(x)$ yörüngesi aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde diferansiyellenebilir bir manifold yapısına sahiptir:



- i) $\{G_\Sigma(x) \mid x \in M\}$, M nin tekil noktaları ile bir bölüntüsüdür,
- ii) $\Sigma_x = (G_\Sigma(x), D)$, x in yörüngesi üzerinde geçişli bir kontrol sistemidir,
- iii)

$$\Delta = \{\varphi_*(Y_{\varphi^{-1}}(x)) \mid \varphi \in G_\Sigma\} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlı Δ dağılımı (distribution) integrallenebilirdir ve her $y \in G_\Sigma(x)$ için

$$\Delta(y) = T_y G_\Sigma(x) \quad (3.15)$$

olması, Δ nın integrallenebilir manifoldları kesin olarak Σ nın yörüngesi olması demektir. Yani

$$In_\Delta(y) = G_\Sigma(x), \forall y \in G_\Sigma(x) \quad (3.16)$$

dır. ◇

3.2.3. Uyarılar:

Aşağıda, belirli özel bir Δ dağılımının integral manifoldları vasıtasıyla yörüngeleri elde etmek için tüm olanakları irdeliyoruz. Gerçekten Δ yı kurmak için D deki tüm elemanların integral eğrilerinin hesaplanması demek olan $\varphi \in G_\Sigma$ nın hesaplanması gerekir. Genel olarak, türevleri hesaplamak daha kolay olduğundan bu doğrultuda en az analitik sistemler için yörüngelerin teğet uzaylarını türetme yolu ile hesaplamak olanaklıdır.

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ olsun. Her $y \in G_\Sigma(x)$ noktası üzerinde $[X, Y]$ parantezi

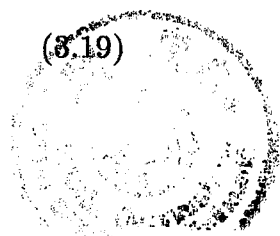
$$[X, Y](y) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \gamma(t) \quad (3.17)$$

şeklinde verilir. Burada $\gamma(t) = Y_{-\sqrt{t}} \circ X_{-\sqrt{t}} \circ Y_{\sqrt{t}} \circ X_{\sqrt{t}}(y)$ dir. Her $t, s \in \mathbb{R}$ için $X_t, Y_s \in G_\Sigma$ olduğundan $\gamma(t) \in G_\Sigma(x)$ ve dolayısıyla $T_y G_\Sigma(x)$ teğet uzayı parantez ile verilmiş vektörü içerecektir. Yani

$$[X, Y](y) \in T_y G_\Sigma(x) \quad (3.18)$$

dir. Burada D nin elemanları ile üretilmiş $\mathcal{X}(M)$ nin Lie altcebirini $L(\Sigma)$ ile göstereceğiz. Yani

$$L(\Sigma) = \text{Genel} \mathcal{L.A.} \{X \mid X \in D\} \quad (3.19)$$



dir. Genel $\Sigma = (M, D)$ kontrol sistemi için

$$L(\Sigma)(x) \subset \Delta(x), \forall x \in M \quad (3.20)$$

dir. Oysa, analitik sistemler için

$$L(\Sigma)(x) = \Delta(x), \forall x \in M \quad (3.21)$$

elde edilmiştir (Sussmann, 1973). Özellikle, Σ nın yörüngeleri tam olarak analitik $L(\Sigma)$ dağılımının integral manifoldlarıdır. Ayrıca genel kontrol sistemler için kontrol edilebilirlik özeliği M, D ve $x \in M$ üzerindeki hangi koşullar altında

$$S_\Sigma(x) = G_\Sigma(x) \quad (3.22)$$

olduğudur. Başka bir deyişle, yörünge teoreminin dolaylı genel kontrol sistemlerini daima onların yörüngeleri üzerinde geçişli olarak gözönüne alınak olanaklıdır.

3.4. Örnekler

1) $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ olsun. Burada

$$D = \left\{ X^1 = \frac{\partial}{\partial x}, X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.23)$$

dir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x = a + t \quad y = b, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

şeklinde çözüldüğünden X^1 in akışı (flow)

$$X_t^1(a, b) = \begin{pmatrix} a + t \\ b \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde X^2 nin akışı,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$



sistemi, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x = ae^t \quad y = be^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

şeklinde çözüldüğünden

$$X_t^2(a, b) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

olarak bulunur. Böylece X^1 ve X^2 ile birleşmiş akışlar, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ başlangıç koşuluyla, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$X_t^1(a, b) = \begin{pmatrix} a+t \\ b \end{pmatrix},$$

$$X_t^2(a, b) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ nin yörüngeleri

$$\begin{aligned} G_\Sigma(a, b) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad b > 0 \\ G_\Sigma(a, b) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad b = 0 \\ G_\Sigma(a, b) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}, \quad b < 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

olup, pozitif yörüngeleri de

$$\begin{aligned} S_\Sigma(a, b) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{ab}{x} \leq y \leq b, x \geq a\}, \quad b \geq 0 \\ S_\Sigma(a, b) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{b \leq y \leq ab}{x}, x \geq a\}, \quad b < 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak bulunur.

Özellikle Σ , $\mathbb{R}^2$ nin her noktası üzerinde kontrol edilemezdir. Bu durumda

$$L(\Sigma) = \text{Geren}_{\mathcal{L.A.}}\{X^1, X^2\} \quad (3.28)$$

olduğu görülebilir. $y > 0$ olacak şekilde her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktası için

$$T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 = \text{Geren}\{X_{(x,y)}^1, X_{(x,y)}^2\} \subset L(\Sigma)(x, y) \quad (3.29)$$

olup, buradan

$$T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 = L(\Sigma)(x, y), \forall y > 0 \quad (3.30)$$



bulunur. Bu taktirde integral manifoldu (bağlantılı manifold), $y > 0$ olacak şekilde tam olarak yarı düzlemdir. Sonuç olarak, eğer $y > 0$ ise, o zaman

$$G_{\Sigma}(x, y) = \{(x, y) \mid y > 0\} \quad (3.31)$$

elde edilir. Aynı şey $y < 0$ için de doğrudur. Eğer $y = 0$ ise, o zaman

$$L(\Sigma)(x, 0) = \text{Geren}\{X_{(x,0)}^1\} = \mathbb{R} \times \{0\} \quad (3.32)$$

bulunur ve

$$\mathbb{R} \times \{0\} = \text{In}_{L(\Sigma)}(x, 0) \quad (3.33)$$

olduğundan

$$G_{\Sigma}(x, 0) = \mathbb{R} \times \{0\} \quad (3.34)$$

elde edilir. Böylece yörüngeler türevler vasıtasıyla hesaplanır.

2) Lineer kontrol sistemleri : Bu sınıf uygulama açısından kontrol sistemin en önemli sınıflarından biri olup, $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.35)$$

dinamiği ile

$$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D) \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ ve

$$U = \{u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k \mid u \text{ parçalı sabit bir fonksiyondur}\} \quad (3.37)$$

kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerin sınıfı olmak üzere $u \in U$ dur. Bu durumda

$$D = \{Ax + Bu \mid u \in U\} \quad (3.38)$$

dir. Her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $u \in U$ için çözüm

$$\gamma_t^u(x_0) = e^{tA} \left\{ x_0 + \int_0^t e^{-\tau A} Bu(\tau) d\tau \right\} \quad (3.39)$$



şeklinde verilir. Özel olarak,

$$\gamma_t^n(0) = e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau \quad (3.40)$$

olup, $S_\Sigma(0)$ nin $\mathbb{R}^n$ nin bir vektör altuzayı olduğu görülebilir ve böylece $S_\Sigma(0) = G_\Sigma(0)$ bulunur. Bu durumda U yu bir vektör uzayı olarak kabul ettiğimizi belirtelim. Ancak ve ancak

$$\text{rank}(B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B) = n \quad (3.41)$$

ise Σ nın orjinde kontrol edilebilir olduğu iyi biliniyor. Bu sonuç lincer kontrol sistemlerin kontrol edilebilirliği için rank koşulu denilen gerek ve yeter bir cebirsel koşul veren Kalmann Teoremi olarak bilinir (Kalman, 1968).

$$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D) \quad (3.42)$$

bir lineer kontrol sistemi olsun ve B nin sütun elemanlarını $b_1, b_2, \dots, b_k$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iki lincer vektör alanının parantez işlemi

$$[X, Y] = XY - YX \quad (3.43)$$

ifadesiyle verildiğinden, bu analitik Σ sistemi için, $L(\Sigma)$ aşağıdaki vektör alanlarını içerir:

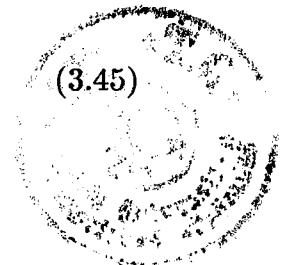
- i) $[A \pm b_i, A \pm b_j] = A(b_j \pm b_i), 1 \leq i, j \leq k,$
- ii) $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_k,$
- iii) $[A + b_i, A^m b_j] = A^{m+1} b_j,$ her $m \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, 2, \dots, k$ için.

Öte yandan, Cayley-Hamilton Teoreminin doğrudan bir uygulaması her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$L(\Sigma)(x) = \text{Geren}\{Ax \pm b_j, Ab_j, A^2 b_j, \dots, A^{n-1} b_j \mid j = 1, 2, \dots, k\} \quad (3.44)$$

olduğunu ifade eder. Özel olarak

$$T_0 G_\Sigma(0) = L(\Sigma)(0) \quad (3.45)$$



olduğundan

$$L(\Sigma)(0) = \text{Geren}\{b_j, Ab_j, \dots, A^{n-1}b_j \mid j = 1, 2, \dots, k\} \quad (3.46)$$

olup, sonuç olarak Σ , $\mathbb{R}^n$ üzerinde kontrol edilebilirdir $\Leftrightarrow L(\Sigma)(0) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \rho(BAB \dots A^{n-1}B) = n$ dir.

Yine $L(\Sigma)$, geçişlilik için ve bu özel haldeki kontrol edilebilirlik için tüm bilgileri verir.

Özel bir hal :

$\mathbb{R}^2$ de $u \in U$ ile parametrelenmiş

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= u \end{aligned} \quad (3.47)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin ailesini gözönüne alalım. Bu sistemi uygulana-bilir bir çok problemin bir modelini oluşturur (Brockett, 1972) (Kupka, 1987) ve aşağıdaki gibi $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir lineer kontrol sistemidir :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (3.48)$$

Özellikle (a, b) başlangıç koşulu ile $u \in U$ için çözüm

$$\gamma_t^u(a, b) = (u \frac{t^2}{2} + bt + a, ut + b) \quad (3.49)$$

dir. Eğer $a = b = 0$ ise, o zaman $\gamma_t^u(0, 0) = (u \frac{t^2}{2}, ut)$, $\mathbb{R}^2$ nin her noktasının sadece $u = 1$ ve $u = -1$ sabit kontrollerinin kullanılmasıyla orjinden ulaşılabilir olduğunu belirtelim. Gerçekten, bu sistem kontrol edilebilirdir. Çünkü

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad (3.50)$$

olduğundan sistem rank koşulunu sağlar ve Kalmanın Teoremi (1968) bu sistemin $(0, 0)$ üzerinde kontrol edilebilir olduğunu gösterir.

Bundan başka, genel lineer kontrol sistemleri için

$$S_\Sigma(0, 0) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow S_\Sigma(x) = \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ (Kalman, 1968)} \quad (3.51)$$



elde edilir.

3) Bilineer kontrol sistemleri: Sistemlerin bu sınıfı uygulamalar için yine önemlidir, (Mohler, 1973); ve

$$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D) \quad (3.52)$$

şeklinde tanımlı olup,

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^k u_j A^j x \quad (3.53)$$

dinamiği ile belirlenir. Burada $x \in \mathbb{R}^n$; $A, A^j \in M_n(\mathbb{R}), j = 1, 2, \dots, k$; $u \in U$ dur. Bu sistemde eğer $u \in U$ sabit alınırsa, o zaman D nin lineer diferansiyel denklemlerin bir ailesiyle verildiği görülebilir. Oysa, bilineer kontrol sistemleri için Kalman Teoremine benzer bir sonuç bilinmiyor. Burada kontrol edilebilirlik problemi daha zordur.

Lie grupları ve Lie cebirleri teorisinden sistemlerin bu sınıfının yörüngesi ve bazı hallerde pozitif yörüngesi hakkında bir takım bilgiler elde etmek olanaklıdır. Bu iddianın nasıl çalıştığını görmek için ilk önce Lie grupları üzerinde kontrol sistemlerinin özel bir sınıfını tanımlayalım.

4) Invariant kontrol sistemleri : $G, L(G)$ Lie cebiri ile bir Lie grubu olsun. Bir $\Sigma = (G, D)$ invariant kontrol sistemi, G üzerinde

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(g) \quad (3.54)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin ailesiyle belirlenir. Burada $g \in G$; $X, Y^j \in L(G), j = 1, 2, \dots, k$ dir. Yörünge Theoreminden dolayı G üzerinde Σ geçişli kabul edilebilir. Yani

$$L(G) = L(\Sigma)(e) = \text{Genel} \mathcal{L} \mathcal{A} \{X, Y^1, \dots, Y^k\} \quad (3.55)$$

dir. Bu durumda, kontrol edilebilirlik problemi, G ve D üzerinde hangi koşullar altında

$$S_{\Sigma}(e) = G$$



olmalıdır? Gerçekten, $L(G)$, G üzerindeki sol-invariant vektör alanları ile üretilmiş G nin Lie cebiri olduğundan

$$S_{\Sigma}(g) = g \cdot S_{\Sigma}(e) \quad (3.57)$$

elde edilir. Böylece bir invariant Σ kontrol sistemi ancak ve ancak e birim noktasında kontrol edilebilirse G üzerinde kontrol edilebilir olacaktır. Bu taktirde, soru ne zaman $S_{\Sigma}(e) = G_{\Sigma}(e)$ elde edilir? şeklindedir.

Bu konu hakkında farklı hallerde bir çok sonuç vardır. Örneğin, Bonnard,B., Jurdjevic,V., Kupka,I. and Sallet,G. , (Bonnard et al, 1982), bir kompakt grup ve bir vektör uzayının yarı-direk çarpımı üzerinde, Brockett,R., (Brockett, 1972), grup manifoldları ve koset (eşküme) uzayları üzerinde, Jurdjevic,V. and Kupka,I. ,(Jurdjevic et al, 1981), yarı-basit Lie grupları ve onların homojen uzayları üzerinde, Jurdjevic,V. and Susmann,H. (Susmann et al, 1972), kompakt Lie grupları üzerinde ve San Martin,L. and Crouch,P. , (San Martin, 1984), kompakt grup yapısı ile esas lif demeti üzerinde çalışmışlardır.

Burada kompakt Lie grupları üzerinde ispatsız bir sonuç vereceğiz.

3.2.4. Önerme : $\Sigma = (G, D)$ bağlantılı kompakt G Lie grubu üzerinde bir invariant kontrol sistemi olsun. O taktirde,

Σ , G üzerinde kontrol edilebilirdir $\Leftrightarrow \Sigma$ geçişlidir. $\diamond$

Öte yandan, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

şeklinde bir lineer diferansiyel denklem $GL_n(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \dot{X} &= AX \\ X &\in GL_n(\mathbb{R}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem tanımlar. $X(0) = Id$ başlangıç koşuluyla (ii) nin çözümü x_0 noktası üzerindeki etkisiyle (i) nin çözümünü verir. Eğer $A \in L(H)$ olacak şekilde $GL_n(\mathbb{R})$ nin her H altgrubu gözönüne alınırsa, yukarıdaki doğrudur. Bu taktirde her bilineer

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^k u_j A^j x \quad (3.60)$$



kontrol sistemi

$$L(H) = \text{Geren}_{\mathcal{L}, \mathcal{A}} \{A, A^1, \dots, A^k\} \quad (3.61)$$

Lie cebiri ile bağlantılı H Lie grubu üzerinde bir invariant

$$\tilde{\Sigma} : \dot{X} = AX + \sum_{j=1}^k u_j A^j X \quad (3.62)$$

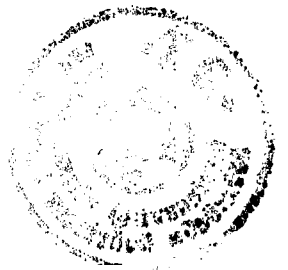
kontrol sistemini üretir ve her bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$G_{\Sigma}(x_0) = G_{\tilde{\Sigma}}(Id) \cdot x_0 \quad (3.63)$$

ve

$$S_{\Sigma}(x_0) = S_{\tilde{\Sigma}}(Id) \cdot x_0 \quad (3.64)$$

olduğu açıktır. Özellikle invariant kontrol sistemlerin incelenmesi bilinear kontrol sistemler hakkında bilgiler verir.



4.0. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GEÇİŞİLİLİĞİ VE KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, durum uzayı bağlantılı sonlu boyutlu bir G Lie grubu ve D dinamiği $u \in \mathcal{U}$ kontrolleri ile parametrelendirilmiş G üzerindeki

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) + \sum_{j=1}^m u_j Y^j(x(t)) \quad (4.1)$$

diferansiyel denklemlerinin ailesi olmak üzere $\Sigma = (G, D)$ şeklindeki sistemlerin belirli bir sınıfı olan lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirlik özeliği hakkında bilgi veren cebirsel koşullar ele alınacaktır. Burada X, G nin sonsuz küçük bir otomorfizmidir. Yani X vektör alanı tarafından üretilen

$$T = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (4.2)$$

akışı G -otomorfizmlerinin bir 1-parametrelili grubudur. $Y^j, j = 1, 2, \dots, m$, kontrol vektörleri G nin $L(G)$ Lie cebirine aittir. $L(G)$ yi sol invariant vektör alanlarının kümesi olarak gözönüne alacağız. $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ giriş fonksiyonları parçalı kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerin $\mathcal{U}$ sınıfına aittir. Yani

$$u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (4.3)$$

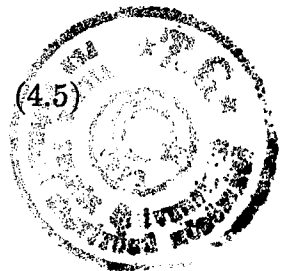
parçalı sabit bir fonksiyondur.

D, Σ ile birleşmiş vektör alanlarının ailesidir. Yani

$$D = \{X + \sum_{j=1}^m u_j Y^j \mid u \in \mathbb{R}^m\} \quad (4.4)$$

dir. Sistemlerin bu sınıfı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer kontrol sistemlerini genelleştirir. Gerçekten, eğer $L, \mathbb{R}^n$ üzerinde kısıtlanmayan zaman-invariant bir lineer kontrol sistemi ise, o takdirde L ,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.5)$$



dinamiği ile belirlidir. Burada, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}$ ve A ve B uygun boyutlu sabit matrislerdir. B nin sütunlarını $b_1, b_2, \dots, b_m$ ile gösterelim. O zaman, L yi

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m u_j b_j \quad (4.6)$$

ile tanımlayacağız. Burada, b_j sabit vektörünün $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$Y^j(x) = b_j, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.7)$$

şeklinde verilen bir sol invariant Y^j vektör alanını tanımladığı bilinmektedir. Ayrıca, Markus (1980) tarafından belirtildiği gibi,

$$A_t = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

ile verilen A lineer vektör alanının akışı tüm $\mathbb{R}^n$ -otomorfizmlerinin Lie grubu olan $GL_n(\mathbb{R})$ ye aittir. Böylece, $L = (G, D)$ dir. Burada G , $\mathbb{R}^n$ değişmeli Lie grubu olup,

$$D = \left\{ A + \sum_{j=1}^m u_j Y^j \mid u \in \mathbb{R}^m \right\} \quad (4.9)$$

dir. L için rank koşulunun anlamı :

$$\text{boyut.geren}\{b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m\} = n \quad (4.10)$$

dir. Aşağıda, L nin kontrol edilebilirliği için temel olan teoremi veriyoruz.

4.1.1. Teorem : (Kalman et al, 1962).

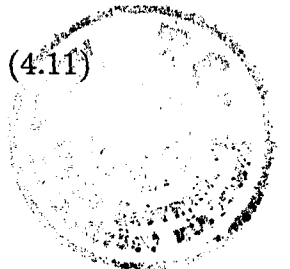
L , $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir :

a) L , $\mathbb{R}^n$ üzerinde kontrol edilebilirdir,

b) L , rank koşulunu sağlar. ◇

(Markus, 1980) de, $GL_n(\mathbb{R})$ ın altgrubu olan bir q^2 - boyutlu G matris Lie grubu üzerinde ve dinamiği

$$\dot{P} = (XP - PX) + \sum_{j=1}^m u_j Y^j P \quad (4.11)$$



şeklin G üzerindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesi ile tanımlanan Σ lineer kontrol sistemi kavramı verilmiştir. Burada, X drift vektör alanı tüm $n \times n$ reel matrislerin $M_n(\mathbb{R})$ Lie cebirine aittir ve her bir $j = 1, 2, \dots, m$ için Y^j sol çarpma ile tanımlanır. Yani G nin Lie cebirindeki elemanlardır. Bu durumda

$$X(P) = XP - PX \quad (4.12)$$

vektör alanı tarafından üretilen

$$X_t(P) = e^{tX} P e^{-tX} \quad (4.13)$$

akışı belirli sonsuz küçük bir otomorfizmdir. Bu tip sistemler için yazar aşağıdaki sonuçları elde ediyor :

4.1.2. Teorem (Markus, 1980): G nin e birim elemanının Σ -ulaşılabilir (-reachable) kümelerinin G de kapanışları vardır :

a) Her bir $t_0 \geq 0$ için, $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} G_t \subset \overline{S_{\Sigma}^{t_0}(e)}$ dir,

b) $\bigcup_{0 \leq t} G_t \subset \overline{S_{\Sigma}(e)}$ dir.

Burada

$$G_t = e^{tX} G_0 e^{-tX} \quad (4.14)$$

olup,

$$L(G_t) = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \{e^{-tX} Y^j e^{tX} \mid j = 1, 2, \dots, m\} \quad (4.15)$$

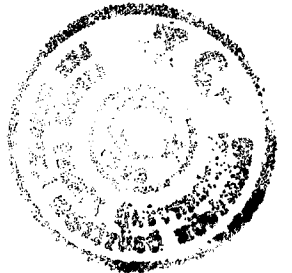
Lie cebirli bir Lie grubudur. $\diamond$

Lineer kontrol sistemlerinin bu sınıfı için Lie cebiri rank koşulunun anlamı :

$$\text{boyut.geren}_{\mathcal{L}.A.} \{Y^j, \text{ad}(X)(Y^j), \dots, \text{ad}^{q^2-1}(X)(Y^j) \mid j = 1, \dots, m\} = \text{boyut}(G) \quad (4.16)$$

dır.

4.1.3. Teorem (Markus, 1980): Eğer Σ , G üzerinde kontrol edilebilir ise, o takdirde Σ Lie cebiri rank koşulunu sağlar. $\diamond$



4.2. Ön Bilgiler

Bu kısımda, Lie grupları üzerindeki dinamik sistemleri ele alıyoruz. Vektör alanlarının iki farklı sınıfı olan sonsuz küçük otomorfizmleri ve sol invariant vektör alanlarını gözönüne alacağız. G reel bağlantılı sonlu boyutlu bir Lie grubu olmak üzere,

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X, Y \in \mathcal{X}(G) \quad (4.18)$$

olağan parantez ile G üzerinde global olarak tanımlı tüm düz vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebirini yine gözönüne alalım. G bağlantılı bir Lie grubu olduğundan, G -otomorfizmlerinin grubu olan $\text{Aut}(G)$ nin bir Lie grubu yapısına sahip olduğu (Chevally, 1951), sonucu çıkar. Gerçekten, $\text{Aut}(G)$ yi $L(G)$ -otomorfizmlerinin lineer grubunun kapalı bir altgrubu ile özdeşlemek olanaklıdır. Eğer X tarafından üretilmiş

$$T = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (4.19)$$

akışı G -otomorfizmlerinin bir 1-parametrelili altgrubu ise, tanımdan dolayı X , G nin bir sonsuz küçük otomorfizmidir. $\text{Aut}(L(G))$ nin Lie cebiri $L(G)$ üzerinde türevlerin cebiri olduğundan (Varadarajan, 1974), T nin $L(T)$ Lie cebiri $L(G)$ nin türevlerinin $\partial(L(G))$ Lie cebirinin bir altcebi olarak görülebilir. Bu özdeşleme altında, her bir $Y, Z \in L(G)$ için

$$\omega([Y, Z]) = [\omega(Y), Z] + [Y, \omega(Z)] \quad (4.20)$$

olacak şekilde her bir $w \in L(T)$ dir. Öte yandan, her bir $Y \in L(G)$ elemanı $Y(e)$ ile belirlidir. Gerçekten

$$Y(g) = (L_g)_* Y_e, \quad g \in G \quad (4.21)$$

dir. Burada, L_g , G üzerinde g -sol öteleme dönüşümünü gösteriyor ve $*$ simgesi türev anlamındadır.

G üzerinde bir Δ dağılımının her g durumu için $T_g G$ teğet uzayının bir altuzayı olduğunu belirtelim. Bir $Z \in \mathcal{X}(G)$ vektör alanı, eğer

$$Z(g) \in \Delta(g), \quad \forall g \in G \quad (4.22)$$

ise, Δ ya aittir. Bir Δ dağılımına, eğer $\text{boyut}(\Delta(g))$ g den bağımsız ise, *düzenli* dir(*regüler*) denir. Eğer $X \in \mathcal{X}(G)$ ve $i = 0, 1, 2, \dots$ ise, aşağıdaki lineer dönüşümleri tümevarımla tanımlayacağız :

$$ad^i(X) : \mathcal{X}(G) \rightarrow \mathcal{X}(G) \quad (4.23)$$

$$ad^0(X) = Id \quad \text{ve} \quad i \geq 1 \quad \text{icin} \quad ad^i(X) = [X, ad^{i-1}(X)] \quad (2.24)$$

dir.

Jacobi özdeşliği, $ad(X)$ in $\partial(\mathcal{X}(G))$ ye ait olduğunu gösterir.

Bir Δ dağılımına,

a) Eğer

$$ad(X)(\Delta) \subset \Delta \quad (4.25)$$

ise, X -invariant ($ad(X)$ -invariant) tır,

b) Eğer Δ her $X \in \Delta$ için X -invariant ise, *involutiv* dir, denir.

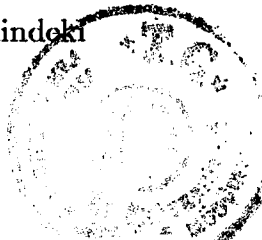
Eğer Δ düzenli ve involutiv ise, Frobenius Teoreminden (Warner, 1971), integrallenebilir olduğu sonucu çıkar. $In_\Delta(g)$ simgesi ile G de g noktasından geçen Δ nın maksimal integral manifoldunu gösterelim. Yani $In_\Delta(g)$

$$T_h In_\Delta(g) = \Delta(h), \quad \forall h \in In_\Delta(g) \quad (4.26)$$

olacak şekilde G nin en büyük bağlantılı daldırılmış (immersed) altmanifoldudur. Δ , G üzerinde X -invariant integrallenebilir bir dağılım olsun. $X \in \mathcal{X}(G)$ vektör alanı tarafından üretilmiş $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ akışının integral manifoldları integral manifoldlar içine taşıdığı, yani $g \in G$ için

$$X_t(In_\Delta(g)) = In_\Delta(X_t(g)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad , (Isidori, 1989), \quad (4.27)$$

olduğu sonucunu çıkaracağız. Son olarak, G nin bağlantılı Lie altgrupları ve $L(G)$ nin Lie altcebirleri arasında bir eşlemenin var olduğunu belirtelim. Bu eşleme altında, normal altgruplar idealler ile birleşmiştir (Varadarajan, 1974). Eğer H , G nin bağlantılı bir Lie altgrubu ise, o taktirde her bir $h \in H$, $\exp(tZ)$ şeklindeki



elemanların bir sonlu çarpımıdır. Burada Z, H nın $L(H)$ Lie cebirini bir elemanı ve $t \in \mathbb{R}$ dir (Sussmann et al, 1972).

4.3. Kontrol Edilebilirlik

Σ nın kontrol vektörleri tarafından üretilmiş olan $L(G)$ nin Lie altcebirini $\mathcal{H}$ ile göstereceğiz. Yani

$$\mathcal{H} = \text{geren}_{\mathcal{L.A.}} \{Y^1, \dots, Y^m\} \quad (4.28)$$

dir. $L(G)$ nin her bir V altuzayı öteleme dönüşümü vasıtasıyla

$$\Delta_V(g) = (L_g)_* V, \quad g \in G \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlı bir sol invariant Δ_V dağılımını üretir. Aşağıdaki temel sonucu verelim :

4.3.1. Yardımcı Teorem : X bir sonsuz küçük otomorfizm ise, o taktirde $L(G)$ her bir $i \geq 0$ için $ad^i(X)$ -invarianttır.

İspat : Yardımcı Teoremi $i = 1$ için ispatlamak yeterlidir. $Y \in L(G)$ alalım. O zaman

$$[X, Y](e) = -Y_e X = -\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} X_{exp(sY)} \quad (4.30)$$

dir. Öte yandan,

$$[X, Y](g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_{-t})_*(Y_{X_t(g)}) \quad (4.31)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(g) \quad (4.32)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L_g \circ X_{-t}(exp(sY)) \quad (4.33)$$

$$= -\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (L_g)_* X_{exp(sY)} \quad (4.34)$$

$$= (L_g)_*[X, Y](e) \quad (4.35)$$

dir. Böylece, $[X, Y] \mathcal{X}(G)$ de sol invariant bir vektör alanıdır. Sonuç olarak, $\forall Y \in L(G)$ için $[X, Y] \in L(G)$ dir.



$\mathcal{H}$ yi kapsayan $L(G)$ nin en küçük $ad(X)$ -invariant alt cebirini $\langle X | \mathcal{H} \rangle$ simgesi ile ve, sırasıyla $\mathcal{H}$ ve $\langle X | \mathcal{H} \rangle$ Lie cebirli G nin bağlantılı Lie altgruplarını da H ve $\langle X | H \rangle$ simgeleri ile göstereceğiz. $\Delta = \Delta_{\langle X | \mathcal{H} \rangle}$ mın bir involutiv ve düzenli dağılım olduğu açıktır. Frobenius Teoreminden dolayı (Warner, 1971), Δ integrallenebilir. Eğer $In_{\Delta}(g)$ G deki g durumundan geçen Δ nın integral manifoldunu gösteriyorsa, o taktirde Δ nın $ad(X)$ -invariantlığı

$$X_t(In_{\Delta}(g)) = In_{\Delta}(X_t(g)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (Isidori, 1989), \quad (4.36)$$

olmasını gerektirir. Δ sol invariant bir dağılım olduğundan

$$In_{\Delta}(g) = g\langle X | H \rangle, \quad \forall g \in G \quad (4.37)$$

dir. Özellikle, her bir reel t sayısı için

$$X_t(g\langle X | H \rangle) = X_t(g)\langle X | H \rangle \quad (4.38)$$

dir. Öte yandan, G nin e birim elemanı T nin bir sabit noktasıdır. Buna göre,

$$X_t(\langle X | H \rangle) = \langle X | H \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.39)$$

dir. Böylece, aşağıdaki önerme verilebilir :

4.3.2. Önerme : $\Sigma = (G, D)$, X bir sonsuz küçük otomorfizm olacak şekilde bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$X_t \in \text{Aut}(\langle X | H \rangle), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.40)$$

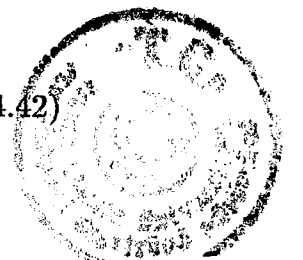
dir. ◇

Önerme 4.3.2, $\langle X | H \rangle$ Lie grubunun T -invariant olduğunu gösterir. Yani

$$T \xrightarrow{\pi} \text{Aut}(\langle X | H \rangle) \quad (4.41)$$

kanonik tasviri ve

$$\langle X | H \rangle \times T \subset G \times \text{Aut}(G) \quad (4.42)$$



Lie grupları çarpımı gözönüne alınabilir. π nin bir

$$\langle X|H \rangle \times T \rightarrow \langle X|H \rangle \quad (4.43)$$

$$(g, X_t) \rightarrow X_t(g) \quad (4.44)$$

analitik etkiyi ürettiği sonucu çıkar. Eğer $g_1, g_2 \in \langle X|H \rangle$ ve $X_{t_1}, X_{t_2} \in T$ ise,

$$(g_1, X_{t_1})(g_2, X_{t_2}) = (X_{t_1}(g_2)g_1, X_{t_1+t_2}) \quad (4.45)$$

çarpımının çarpım manifoldu üzerinde bir Lie grubu yapısı tanımlandığı görülebilir. Gerçekten,

$$((g_1, X_{t_1}), (g_2, X_{t_2})) \rightarrow (g_1 \cdot X_{t_1-t_2}(g_2^{-1})) \quad (4.46)$$

uygulaması analitiktir. Bu yapı ile $\langle X|H \rangle \times T$ ye π ye göre $\langle X|H \rangle$ ile T nin yarı-direkt çarpımı denir (Varadarajan, 1974), ve bu grubu

$$S =: \langle X|H \rangle \otimes T \quad (4.47)$$

ile göstereceğiz.

$$(g_1, X_t)(g_2, Id)(g_1, X_t)^{-1} = (g_1 \cdot X_t(g_2) \cdot g_1^{-1}, Id) \quad (4.48)$$

formülü $\langle X|H \rangle$ nin S nin kapalı normal bir altgrubu olduğunu gösterir. Öte yandan,

$$\begin{array}{ccc} \langle X | \mathcal{H} \rangle & \xrightarrow{(X_t)^*} & \langle X | \mathcal{H} \rangle \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \langle X | H \rangle & \xrightarrow{X_t} & \langle X | H \rangle \end{array} \quad (4.49)$$

değişmeli şeması

$$T \rightarrow \text{Aut}(\langle X|\mathcal{H} \rangle) \quad (4.50)$$

uygulamasını üretir ve ρ ile gösterilen onun türevi $\langle X|\mathcal{H} \rangle$ de T nin $L(T)$ Lie cebirinin bir gösterilişidir. Yani

$$L(T) \xrightarrow{\rho} \text{End}(\langle X|\mathcal{H} \rangle), \quad (4.51)$$

$$\rho(L(T)) \subset \partial(\langle X|\mathcal{H} \rangle) \quad (4.52)$$



olacak şekilde Lie cebirlerinin bir homomorfizmidir. Gerçekten, her bir $w \in L(T)$ için

$$\rho(w)(Y) = [w, Y], \quad \forall Y \in \langle X|\mathcal{H} \rangle \quad (4.53)$$

dir. $\rho, \langle X|\mathcal{H} \rangle \times L(T)$ Lie cebirlerin çarpımı üzerinde bir Lie cebiri yapısını kurmaya olanak sağlar. Gerçekten, eğer $Y_1, Y_2 \in \langle X|\mathcal{H} \rangle$ ve $w_1, w_2 \in L(T)$ ise,

$$[(Y_1, w_1), (Y_2, w_2)] = ([Y_1, Y_2] + \rho(w_1)(Y_2) - \rho(w_2)(Y_1), [w_1, w_2]) \quad (4.54)$$

parantezi iyi tanımlıdır ve bu çarpımı, ρ ya göre $\langle X|\mathcal{H} \rangle$ nın $L(T)$ ile yarı-direkt çarpımı adı verilen bir Lie cebirine dönüştürür (Varadarajan, 1974). Bu Lie cebirini

$$s =: \langle X|\mathcal{H} \rangle \otimes L(T) \quad (4.55)$$

ile gösterelim. Aşağıda bir lineer kontrol sisteminin Lie cebiri karakterize ediliyor.

4.3.3. Teorem : $\Sigma = (G, D)$, X sonsuz küçük bir otomorfizm olacak şekilde bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$L(\Sigma) \cong \langle X|\mathcal{H} \rangle \otimes L(T) \quad (4.56)$$

dir.

İspat : $L(T)$ bir Abelian cebir olduğundan,

$$[s, s] \subset \langle X|\mathcal{H} \rangle \quad (4.57)$$

elde edilir. Σ nın X drift vektör alanının

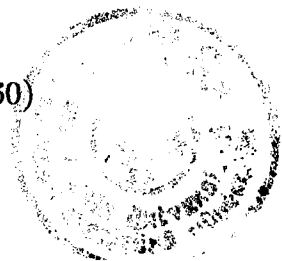
$$w_{X_t} = (L_{X_t})_* w \quad (4.58)$$

ile $L(T)$ nin w doğurayını (generator) ürettiğini belirtelim. Burada

$$w = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_t \in L(T) \quad (4.59)$$

dir.

$$L(\Sigma) \rightarrow \langle X|\mathcal{H} \rangle \otimes L(T) \quad (4.60)$$



kanonik tasvirinin Lie cebirlerin bir izomorfizmi olduğunu gerçekleştirmek için, D üzerindeki elemanları alarak parantezi hesaplayalım. Bunun için $L(\Sigma)$ nın doğuraylarını, yani

$$L(\Sigma) = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \{X + \sum_{j=1}^m u_j Y^j | j = 1, \dots, m\}, \quad (4.61)$$

ve $X + Y^i$, $X + Y^j$ şeklindeki iki elemanı gözönüne almak yeterlidir. $\mathcal{X}(G)$ de parantezin bilineer özeliği

$$[X + Y^i, X + Y^j] = [Y^i, Y^j] + [X, Y^j] + [Y^i, X] \quad (4.62)$$

olduğunu gösterir. Bundan ve s için parantez tanımından Teoremin doğru olduğunu çıkar. $\diamond$

Lie gruplarının yarı-direkt çarpımının Lie cebirinin, grupların Lie cebirlerinin yarı-direkt çarpımı ile izomorfik olduğu bilinmektedir (Varadarajan, 1974). Başka bir deyişle, bu özel hal için aşağıdaki sonucu verelim :

4.3.4. Sonuç : $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde

$$L(\Sigma) \cong L(\langle X|H \rangle \otimes T) \quad (4.63)$$

dir. $\diamond$

$\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun ve tümevarım yoluyla $ad(X)(\mathcal{H})$ -dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım :

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \quad (4.64)$$

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i-1} + ad^i(X)(\mathcal{H}), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (4.65)$$

burada

$$ad^i(X)(\mathcal{H}) = \{[X, ad^{i-1}(X)(Y)] | Y \in \mathcal{H}\} \quad (4.66)$$

dir. Her bir i için $\Delta_{\mathcal{H}_i}$ dağılımı düzenlidir. Gerçekten, Yardımcı Teorem 4.3.1., $\mathcal{H}_i$ nin $L(G)$ nin bir alt uzayı olduğunu gösterir. Özellikle, sonlu boyutlu Lie gruplarını gözönüne aldığımızdan ve $\mathcal{H} \neq 0$ olduğundan, $ad(X)(\mathcal{H})$ -dizisi p de stabilize olacak şekilde, yani

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{p+q}, \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad (4.67)$$



olacak şekilde en küçük bir p $0 \leq p < \text{boyut}(G)$ tamsayısı vardır.

4.3.5. Teorem : $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Eğer Σ geçişli ise, o takdirde Σ Lie cebiri rank koşulunu sağlar.

İspat : Eğer Σ geçişli ise, o takdirde Uyarılar 3.2.3 den dolayı,

$$G_{\Sigma}(e) = \langle X|H \rangle = G \quad (4.68)$$

dir. Gerçekten, Σ bir analitik kontrol sistemi olduğundan, $g \in G$ noktasından geçen $L(\Sigma)$ nın integral manifoldu g nin yörüngesi ile çakışır. Yani $In_{L(\Sigma)}(e) = \langle X|H \rangle$ dir. Çünkü, $X_e = 0$ olup ve Önerme 4.3.2, her bir $g \in \langle X|H \rangle$ için

$$X_t(g) \in \langle X|H \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.69)$$

olduğunu gösterir. Özellikle,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_t(g) \in T_g \langle X|H \rangle \quad (4.70)$$

dir. Sonuç olarak

$$X_g \in (L_g)_* \langle X|H \rangle \quad (4.71)$$

yani

$$X_g \in \Delta_{\langle X|H \rangle}(g), \quad \forall g \in \langle X|H \rangle \quad (4.72)$$

dir.

$$\text{boyut.geren}_{\mathcal{L}.A.} \{Y^j, ad^i(X)(Y^j) | 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m\} = n \quad (4.73)$$

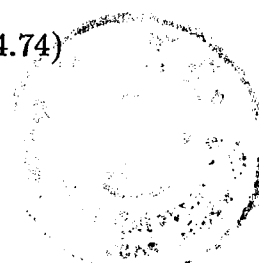
sonucu derhal çıkar. Böylece, Σ rank koşulunu sağlar. $\diamond$

4.3.6. Uyarı : Teorem 4.3.5 Lie cebiri rank koşulunun Σ nın kontrol edilebilirliği için gerekli olduğunu gösterir. Gerçekten, $S_{\Sigma}(e) \subset G_{\Sigma}(e)$ dir.

Aşağıda, G nin e birim elemanının Σ -ulaşılabilir kümesinin kapanışı hakkında (Ayala et al, 1994) den bir teorem vereceğiz.

4.3.7. Teorem : $\Sigma = (G, D)$, bağlantılı G Lie grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde

$$\bigcup_{t \geq 0} X_t(H) \subset \overline{S_{\Sigma}(e)} \quad (4.74)$$



dir.

Ancak, Lie cebiri rank koşulu lineer kontrol sistemleri için kontrol edilebilirlik özeliğini karakterize etmez. Bir sonraki kısımda, bunu sıfır güçlü basit bağlantılı bir Lie grubu olan Heisenberg grubu üzerinde bir örnekle gösteriyoruz (bakınız Örnek 4.4.3.).

Kontrol edilebilirliğe bir yeter koşul elde etmek için aşağıda yeni bir cebirsel nesneyi kullanacağız. $\mathcal{H}_p, \mathcal{H}$ yi içeren $L(G)$ nin $ad(X)$ -invariant bir altuzayı olduğundan,

$$\mathcal{H}_i \subset \langle X|\mathcal{H} \rangle, \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (4.75)$$

sonucu derhal çıkar. Özel olarak,

$$\mathcal{H}_{p-1} + ad^p(X)(\mathcal{H}) \subset \langle X|\mathcal{H} \rangle \quad (4.76)$$

elde edilir.

$$V = \text{geren.}\{Y^j, ad(X)(Y^j) \mid i = 0, 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m\} \quad (4.77)$$

şeklinde tanımlı $L(G)$ nin bir V altuzayını gözönüne alalım. Bu durumda eğer $\text{boyut}(V) = \text{boyut}(G)$ ise, Σ rank (ad -rank) koşulunu sağlıyor diyeceğiz.

Aşağıda, A.A. Agrachev et al., (Agrachev et al, 1989), a ait bir teorem vereceğiz.

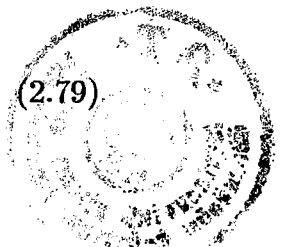
4.3.8. Teorem : G bağlantılı bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Eğer Σ rank koşulunu sağlıyorsa, o taktirde Σ kontrol edilebilirdir.

İspat : $g(t, u)$ ile, $u \in \mathcal{U} \subset L_\infty([0, t], \mathbb{R}^k)$ kontrolü ve e başlangıç koşulu ile belirlenmiş

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^m u_j Y^j(g) \quad (2.78)$$

diferansiyel denkleminin çözümünü göstereyim. Her bir $t \geq 0$ için $E_t(u) = g(t, u)$ ile tanımlı

$$E_t : \mathcal{U} \rightarrow G$$



uç nokta tasvirini gözönüne alalım. Bu tasvir düzdür ve 0 daki $(F_t)_0$ türevi $u \equiv 0$ sabit kontrolünün bir B komşuluğunda tanımlıdır ve

$$(F_t)_0(u(\cdot)) = \int_0^t e^{(t-\tau)ad(X)} \left(\sum_{j=1}^m u_j(\tau) Y_e^j \right) d\tau \quad (4.80)$$

ile verilir.

$$\langle w, (F_t)_0(u(\cdot)) \rangle = 0, \quad \forall u(\cdot) \in B \quad (4.81)$$

olacak şekilde $T_e G$ teğet uzayının $T_e^* G$ dual uzayında bir w vektörünün varolduğunu kabul edeceğiz. Özellikle,

$$\int_0^t \sum_{j=1}^m \langle w, e^{(t-\tau)ad(X)} (Y_e^j) \rangle u_j(\tau) d\tau = 0 \quad (4.82)$$

dır. Son ifade, her bir parçalı sabit

$$u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (4.83)$$

fonksiyonu için doğru olduğundan,

$$\langle w, e^{(t-\tau)ad(X)} Y_e^j \rangle = 0, \quad \forall \tau \in [0, t] \quad (4.84)$$

elde edilir. Türetmeden dolayı, her bir $i \geq 0$ ve $j = 1, \dots, m$ için

$$\langle w, ad^i(X) Y_e^j \rangle = 0 \quad (4.85)$$

elde edilir. Bu da, bizim rank koşulu kabulümüze aykırıdır. Dolayısıyla, $(F_t)_0$ lineer dönüşümü üzerinedir. Kapalı Fonksiyon Teoreminden dolayı (Warner, 1971), F_t tasvirinin G deki e birim elemanının bir U komşuluğu üzerinde, üzerine olduğu sonucuna varılır. Oysa, G bağlantılı bir Lie grubu olup,

$$\bigcup_m U^m = G \quad (4.86)$$

dir.

$$S_\Sigma(e) = G \quad (4.87)$$



olduğu sonucu derhal çıkar. Sonuç olarak Σ kontrol edilebilirdir. $\diamond$

4.3.9. Sonuç : G Abelian bağlantılı bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde

$$\Sigma \text{ kontrol edilebilirdir} \Leftrightarrow \Sigma \text{ rank koşulunu sağlar.} \quad (4.88)$$

İspat : Kabulden dolayı, G nin $L(G)$ Lie cebiri Abelian'dir.

$$\Theta = \{Y^j, ad^i(X)(Y^j) | 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq m\} \quad (4.89)$$

$L(G)$ nin bir altkümnesi olduğundan,

$$geren_{\mathcal{L}.A.}(\Theta) = geren(\Theta) \quad (4.90)$$

olduğu sonucu çıkar. Teorem 4.3.5. ve Teorem 4.3.8. den dolayı, istenen sonuç elde edilir. $\diamond$

4.3.10. Uyarı :

i) Sonuç 4.3.9. dan dolayı, her bir

$$G = T^n \times \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (4.91)$$

Lie grubu için rank koşulu ile kontrol edilebilirlik özeliği kesinleştirilebilir. Burada, $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, $(n - tane)$, bir Tor'dur.

ii) Σ vasıtasıyla $e \in G$ nin yörüngesinin $\langle X | H \rangle$ ile verildiğini biliyoruz.

iii) Birim elemanın pozitif yörüngesi H yi içeren G nin en küçük T -invariant altgrubunda kapsanır. Dolayısıyla, eğer

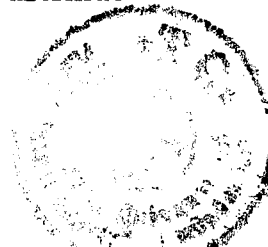
$$geren(\Theta) = \langle X | \mathcal{H} \rangle \quad (4.92)$$

ise,

$$S_{\Sigma}(e) = \langle X | H \rangle \quad (4.93)$$

elde edilir.

iv) Eğer G Abelian bağlantılı bir Lie grubu ise, daima Σ , yörüngeleri üzerinde kontrol edilebilir olacaktır.



$\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Sistemin bu sınıfı genelleşir :

1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde lineer kontrol sistemleri.

$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. Burada

$$D = \{A + Bu \mid u \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.94)$$

dir. Sonuç 4.3.9. dan dolayı, aşağıdaki teoremi verelim :

4.3.11. Teorem (Kalman et al , 1962):

$$\Sigma \text{ kontrol edilebilirdir} \Leftrightarrow \text{rank}(B \ AB \ A^2B \ \dots A^{n-1}B) = n. \quad (4.95)$$

◇

Gerçekten, basit bir hesaplama her bir $i, j = 1, 2, \dots$ için,

$$[b_i, b_j] = 0 \quad (4.96)$$

ve

$$\text{ad}^i(A)(b_j) = (-1)^i Ab_j \quad (4.97)$$

olduğunu gösterir.

$$L \text{ kontrol edilebilirdir} \Leftrightarrow$$

$$\text{boyut.geren}\{b_1, \dots, b_p, Ab_1, \dots, Ab_p, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m\} = n. \quad (4.98)$$

◇

2. Bir matris Lie grubu üzerinde lineer kontrol sistemi.

(Markus,1980) de, $GL_n(\mathbb{R})$ nin bir q^2 -boyutlu G matris Lie altgrubu üzerinde ve

$$\dot{P} = X^*(P) + \sum_{j=1}^m u_j Y^j P \quad (4.99)$$

şeklindeki G üzerinde diferansiyel denklemlerin bir ailesi ile tanımlanmış bir dinamik ile Σ lineer kontrol sistemi kavramı veriliyor. Burada, $X^*(P) = AP - PA$ ile tanımlı X^* drift vektör alanına, tüm $n \times n$ reel matrislerin $M_n(\mathbb{R})$ Lie cebirindeki



bir A elemanı ile üretiliyor ve her bir $j = 1, 2, \dots, m$ için, Y^j sol çarpma ile tanımlanır ve aynı zamanda $M_n(\mathbb{R})$ nin elemanlarıdır. Bu durumda, her bir $t \in \mathbb{R}$ için,

$$X_t^*(P) = e^{tA} P e^{-tA}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.100)$$

akışı G nin bir otomorfizmidir. Sistemin bu sınıfı için yazar aşağıdaki sonuçları elde ediyor :

4.3.12. Teorem (Markus, 1980): G nin e birim elemanının Σ -ulaşılabilir kümesi G de kapanışa sahiptir :

$$\bigcup_{0 \leq t} G_t \subset \overline{S_\Sigma(e)} \quad (4.101)$$

Burada

$$G_t = e^{tA} G_0 e^{-tA}, \quad (4.102)$$

olup,

$$L(G_t) = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \{e^{-tA} Y^j e^{tA} | j = 1, 2, \dots, m\} \quad (4.103)$$

Lie cebirli bir Lie grubudur. $\diamond$

Bu sonuç, Teorem 4.3.7. den çıkar.

4.3.13. Teorem (Markus, 1980): Eğer Σ , G üzerinde kontrol edilebilir ise, o taktirde Σ Lie cebiri rank koşulunu sağlar. $\diamond$

Bu sonuç, Teorem 4.3.5. den elde edilir.

4.4. Örnekler

Bu kısımda bazı örnekler veriyoruz. Kontrol edilebilirliği incelemek için Lie cebiri rank koşulu (Teorem 4.3.5.) ve rank koşulu (Teorem 4.3.8.) sonuçlarını kullanıyoruz.

4.4.1.) G , 3-boyutlu Heisenberg grubu olsun. Yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.104)$$



ve Lie cebiri

$$L(G) = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \left\{ Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.105)$$

Bu durumda, $[Y^1, Y^2] = Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir.

$$D = \{X + uY^2 | u \in \mathbb{R}\} \quad (4.106)$$

ile $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemini gözönüne alalım. Burada, X sonsuz küçük otomorfizmi

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \text{icin} \quad X(x) = x_2 Y^3 \quad (4.107)$$

ile tanımlıdır. Hesaplanırsa

$$\langle X | \mathcal{H} \rangle = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \{Y^2, Y^3\} = \text{geren} \{Y^2, Y^3\} \quad (4.108)$$

çıkar. O zaman, Σ geçişli değildir. Gerçekten,

$$G_\Sigma(c) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.109)$$

dir. Teorem 4.3.8., birim elemanın yörüngesi üzerinde Σ vasıtasıyla üretilmiş $\Sigma_1 = (G_\Sigma(c), D)$ lineer kontrol sisteminin kontrol edilebilir olduğunu gösterir.

4.4.2.) $G = SL_2(\mathbb{R})$, elemanları determinantı 1 olan matrislerden oluşan $GL_2(\mathbb{R})$ in Lie altgrubu olsun. G nin $sl_2(\mathbb{R})$ Lie cebiri

$$L(G) = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.} \left\{ Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.110)$$

ile verilir. Burada, $[Y^1, Y^2] = Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dir.

$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ matrisini ve A tarafından üretilmiş G nin (X_t) otomorfizmlerinin 1-parametrelili grubunu, yani

$$X_t(g) = e^{tA} g e^{-tA}, \quad t \in \mathbb{R}, g \in G \quad (4.111)$$



yi gözönüne alalım.

$$D = \{X + uY^2 | u \in \mathbb{R}\} \quad (4.112)$$

dinamikli $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemi için

$$ad(X)(Y^2) = Y^3 \quad ve \quad ad^2(X)(Y^2) = Y^1 \quad (4.113)$$

elde edilir.

$$V = \langle X | \mathcal{H} \rangle = sl_2(\mathbb{R}) \quad (4.114)$$

olduğundan, o zaman Teorem 4.3.8 den dolayı, Σ kontrol edilebilirdir. Yani

$$S_\Sigma(e) = SL_2(\mathbb{R}) \quad (4.115)$$

dir.

4.4.3.) $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $u \in \mathcal{U}$ kısıtlanmayan parçalı sabit kontrollerle parametrenilmiş

$$\dot{x}_1 = u \quad (4.116)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 \quad (4.117)$$

diferansiyel denklemlerin ailesi ile tanımlı $\mathcal{N}$ non-lineer kontrol sistemini gözönüne alalım. Kuşkusuz, $\mathcal{N}$ nin orijinden pozitif yörüngesi $\mathbb{R}^2$ değildir. Dolayısıyla, $\mathcal{N}$ kontrol edilemez.

Öte yandan, bu denklemler

$$(x_1, x_2) = (p + uq)(x_1, x_2), \quad u \in \mathcal{U} \quad (4.118)$$

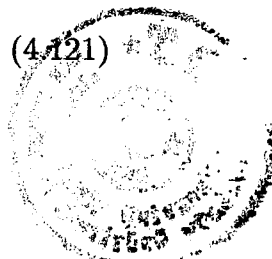
şeklinde tanımlanabilir. Burada, p ve q

$$p = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad ve \quad q = u \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (4.119)$$

ile tanımlı $\mathbb{R}^2$ üzerindeki vektör alanlarıdır.

$$[p, q] = -2ux_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (4.120)$$

$$[q, [p, q]] = -2u^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (4.121)$$



elde edilir. Özellikle,

$$geren_{\mathcal{L}.A}\{q, [p, q]\} \quad (4.122)$$

3-boyutlu sıfır güçlü bir Lie cebiridir. Bu cebir,

$$\rho(p) = X^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(q) = Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

şeklinde tanımlı gösteriliş ile $M_3(\mathbb{R})$ nin bir $L(G)$ altcebiri olarak gerçekleştirilebilir. Böylece, $L(G)$ ile birleşmiş G grubu bağlantılı ve basit bağlantılı Heisenberg Lie grubudur.

$$\dot{g} = ad(X^*)(g) + uY(g), \quad g \in G, \quad u \in \mathcal{U} \quad (4.124)$$

şeklinde verilen dinamiğe sahip bir $\Sigma = (G, D)$ lincer kontrol sistemi elde edilir.

Gerçekten, $ad(X^*)$, G nin bir sonsuz küçük otomorfizmidir.

Σ nın Lie cebiri rank koşulunu sağladığı sonucu çıkar. Gerçekten,

$$\rho[p, q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

dir. Fakat, Σ kontrol edilemez. Aksi taktirde,

$$S_{\Sigma}(e) = G \quad (4.126)$$

elde edilir. Böylece, gösteriliş vasıtasıyla verilen $\mathbb{R}^2$ üzerinde G nin non-lineer etkisinden dolayı,

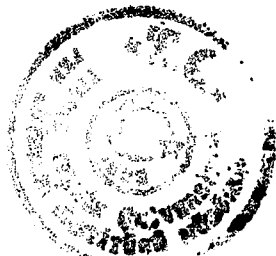
$$S_{\Sigma}(0, 0) = S_{\mathcal{N}}(0, 0) = \mathbb{R}^2 \quad (4.127)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Burada, Σ nın rank koşulunu sağlamadığı görülür. Gerçekten,

$$[p, [p, q]] = 0 \quad (4.128)$$

dır.



5.0. $X(G)$ DE $L(G)$ LİE CEBİRİNİN NORMALİZÖRÜ

5.1. Normalizör

$\Sigma = (G, \mathcal{D})$ bir lineer kontrol sistem olsun. Tanım gereği Σ nın X drift vektör alanı, G üzerindeki tüm C^∞ (düz yada analitik) vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebirinde, $L(G)$ nin normalizörünün bir elemanıdır. Bu kısımda dinamiğin bu türünün bir karakterizasyonunu veriyoruz. Buradaki vektör alanları da G üzerinde lineer vektör alanları adını alacak. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir X vektör alanına, eğer her $p \in \mathbb{R}^n$ için $X_p = A(p) + u$ ise lineerdir denir. Burada $A, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nin bir lineer tasviridir ve $u, \mathbb{R}^n$ nin bir sabit vektörüdür. Burada bu kavramın herhangi bir G Lie grubuna nasıl genelleştirildiğini vereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde lineer vektör alanları aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir: $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir $C^\infty X$ vektör alanı ancak ve ancak $\mathbb{R}^n$ üzerindeki her U sabit vektör alanı için $[X, U]$ sabit bir vektör alanı ise lineerdir (bkz. Sonuç 5.1.9.). Bundan dolayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm lineer vektör alanlarının kümesi $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm C^∞ vektör alanlarının $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ Lie cebirindeki $\mathbb{R}^n$ nin Lie cebirinin normalizörüdür.

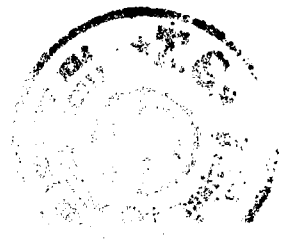
Eğer G bir Lie grubu ise G nin $L(G)$ Lie cebiri G nin e birim elemanındaki $T_e G$ teğet uzayı ile özdeşlenecektir. Ayrıca herhangi $Y \in L(G)$ için $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(G)$, $\tilde{Y}_e = Y$ olacak şekilde G üzerindeki sol-invariant vektör alanını gösterecektir.

G üzerindeki vektör alanlarını G nin $L(G)$ içine fonksiyonları ile özdeşlemeyi uygun buluyoruz: $F : G \rightarrow L(G)$,

$$F(x) = (dL_x)^{-1}_x(X_x)$$

yi sağlayan bir tasvir olacak şekilde

$$\tilde{F}_x = dL_x(F(x)) = \widetilde{F(x)}_x, \quad x \in G$$



şeklinde tanımlı

$$\sim: C^\infty \rightarrow \mathcal{X}(G)$$

$$F \mapsto \tilde{F}$$

bir tasvir olsun.

5.1.1. Önerme: $F \rightarrow \tilde{F}$ tasviri $C^\infty(G, L(G))$ nın $\mathcal{X}(G)$ üzerine bir linear izomorfizmdir.

İspat: dL_x in $dL_x^{-1} = dL_{x^{-1}}$ tersi ile bir izomorfizm olduğunu belirtelim.

Lineerlik: $F, H \in C^\infty(G, L(G))$ olsun. α, β reel sayıları için

$$(\alpha F + \beta H)_x = dL_x(\alpha F + \beta H)(x) = dL_x(\alpha F(x) + \beta H(x)) = \alpha \tilde{F}_x + \beta \tilde{H}_x$$

elde edilir. Özel olarak, $\alpha = \beta = 1$ alınırsa $(F + H)_x = \tilde{F}_x + \tilde{H}_x$ olduğu gözlenir.

Bire-birlik: $\tilde{F}_x = \tilde{H}_x$ olsun. O taktirde $\tilde{F}_x = dL_x(F(x)) = dL_x(H(x)) = \tilde{H}_x$ her $x \in G$ için $F(x) = H(x)$ olduğunu gerektirir ve $F = H$ için dL_x bire-birdir.

Üzerinelik: $X \in \mathcal{X}(G)$ için $F(x) = (dL_x)^{-1}(X_x)$ olacak şekilde bir F tanımlayalım. Böylece, $\tilde{F} = X$ bulunur. $\diamond$

5.1.2. Uyarı: Her $x \in G$ için $F(x) = Y \in G$ sabit fonksiyonu sol-invariant $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(G) \cap L(G)$ vektör alanına karşılık gelir. Bundan başka $C^\infty(G, L(G))$ deki sabit fonksiyonların $\sim$ altındaki görüntüsü $L(G)$ dir.

$$\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) = \{X \in \mathcal{X}(G) \mid [X, \tilde{Y}] \in L(G), \forall Y \in L(G) \text{ için}\}$$

olsun.

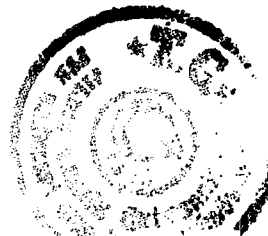
5.1.3. Tanım: $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ deki elemanlar G üzerindeki lineer vektör alanları adını alır. $\diamond$

5.1.4. Yardımcı Teorem : $Y \in L(G)$ ve $F \in C^\infty(G, L(G))$ verilsin ve $H \in C^\infty(G, L(G))$ için

$$H(x) = \tilde{Y}_x(F) + [Y, F(x)], \quad x \in G \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlı olsun. O taktirde, $\tilde{H} = [\tilde{Y}, \tilde{F}]$ dir.

İspat: İspata geçmeden önce bir kaç noktayı açıklığa kavuşturalım. $f \in C^\infty(G)$ olsun.



(a) Eğer $F(x) \in L(G)$ ise o zaman $F(x)_e f = (\frac{d}{dt})_{t=0}(f \circ \gamma)(t)$ dir. Burada $\gamma(0) = e$ ve $\dot{\gamma}(0) = F(x)$ dir. Eğer $\gamma(t) = \exp tF(x)$ alınırsa

$$F(x)_e f = (\frac{d}{dt})_{t=0} f(\exp tF(x)) \quad (5.2)$$

yazılır.

(b) $Y \in L(G)$ (a) ya uygulanırsa

$$\tilde{Y}_e f = (\frac{d}{dt})_{t=0} f(\exp tY) \quad (5.3)$$

ve

$$(\tilde{Y}_e \cdot F)(x) = \tilde{Y}_x F = (\frac{d}{dt})_{t=0} F(x \exp tY) \quad (5.4)$$

elde edilir. Açıkça $\tilde{Y}_x F \in L(G)$ ve $\tilde{Y}_x F \in C^\infty(G, L(G))$ dir. Benzer şekilde $[Y, F(\cdot)] \in C^\infty(G, L(G))$ dir. Bu durumda $\tilde{Y}_x F + [Y, F(\cdot)] \in L(G)$ ve $H \in C^\infty(G, L(G))$ olduğu sonucu çıkar.

(c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (F(x \exp tY) f)(x \exp tY) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (F(x \exp tY) f)(x) \\ &+ \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\widetilde{F(x)} f)(x \exp tY) \end{aligned} \quad (5.5)$$

dir.

(d)

$$\Rightarrow (\widetilde{\tilde{Y}F})(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} F(x \exp tY)$$

olup,

$$= ((\tilde{Y}\widetilde{F})(x) f)(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (F(x \exp tY) f)(x) \quad (5.6)$$

ve

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\widetilde{F(x)} f)(x \exp tY) = \tilde{Y}_x (\widetilde{F(x)} f) = (\tilde{Y}(\widetilde{F(x)} f))(x) \quad (5.7)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada ispata geçebiliriz. Lie parantezinin tanımından

$$([\tilde{Y}, \tilde{F}]f)(x) = (\tilde{Y}(\tilde{F}f))(x) - (\tilde{F}(\tilde{Y}f))(x), \quad f \in C^\infty(G) \quad (5.8)$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
(\tilde{Y}(\tilde{F}f))(x) &= \tilde{Y}_x(\tilde{F}f) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\tilde{F}f)(x \exp tY) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\widetilde{F_{x \exp tY} f}) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (F(x \exp tY)_{x \exp tY} f) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (F(x \exp tY)f)(x \exp tY) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (F(x \exp tY)f)(x) + \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\widetilde{F(x)}f)(x \exp tY) \\
&= ((\tilde{Y}\widetilde{F})(x)f)(x) + (\tilde{Y}(\widetilde{F(x)}f))(x) \quad (5.6) \text{ ve } (5.7) \text{ den}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. Ayrıca

$$(\tilde{F}(\tilde{Y}f))(x) = \tilde{F}_x(\tilde{Y}f) = \widetilde{F(x)}_x(\tilde{Y}f) = (\widetilde{F(x)}(\tilde{Y}f))(x) \tag{5.10}$$

bulunur. (5.9) ve (5.10) eşitlikleri (5.8) bağıntısında yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}
([\tilde{Y}, \tilde{F}]f)(x) &= ((\tilde{Y}\widetilde{F})(x)f)(x) + (\tilde{Y}(\widetilde{F(x)}f))(x) - \widetilde{F(x)}(\tilde{Y}f)(x) \\
&= ((\tilde{Y}\widetilde{F})(x)f)(x) + ([\tilde{Y}, \widetilde{F(x)}]f)(x) \\
&= ((\tilde{Y}\widetilde{F})(x)f)(x) + ([Y, \widetilde{F(x)}]f)(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$[\tilde{Y}, \tilde{F}]_x = \tilde{Y}_x(\widetilde{F})_x + [Y, \widetilde{F(x)}]_x = (\tilde{Y}_x(F) + [Y, F(x)])_x = \tilde{H}_x$$

elde edilir. ◇

5.1.5. Teorem: $F \in C^\infty(G, L(G))$ olsun. O taktirde ancak ve ancak her $Y \in L(G)$ için

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(Y(F) + [Y, F(e)]) \tag{5.11}$$

ise $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{H}(G)}(L(G))$ dir. Özellikle $\text{norm}_{\mathcal{H}(G)}(L(G))$ deki tüm vektör alanları analitiktir.

İspat: Bir $B : L(G) \rightarrow L(G)$ tasviri $B(Y) = Y(F) + [Y, F(e)]$ şeklinde tanımlı olsun. Eğer H bir önceki yardımcı teoremdaki gibi alınırsa, o zaman her $Y \in L(G)$

için $B(Y) = H(e)$ dir. Bu durumda her $x \in G$ ve her $Y \in L(G)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) &\Leftrightarrow [\tilde{Y}, \tilde{F}] \in L(G) \\
&\Leftrightarrow H(x) = \tilde{Y}_x(F) + [Y, F(x)] = B(Y) \\
&\Leftrightarrow \tilde{Y}_x(F) = -[Y, F(x)] + B(Y) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} F(x \exp tY) = -[Y, F(x)] + B(Y) \\
&\Leftrightarrow \quad \quad \quad = -[Y, F(x \exp tY)] + B(Y)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

dir. $f(t) = F(x \exp tY)$ olsun. O taktirde (5.12) den

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_t F(x \exp tY) \\
&= -[Y, F(x \exp tY)] + B(Y) \quad \forall x, t \\
&= -\text{ad}(Y)(f(t)) + B(Y) \quad \forall x, t
\end{aligned}$$

elde edilir. $\text{ad}(Y)$ bir lineer operatör olduğundan ve $B(Y)$ t ye bağlı olmadığından,

$$\begin{aligned}
f''(t) &= -\text{ad}(Y)(f'(t)) = -\text{ad}(Y)(-\text{ad}(Y)(f(t)) + B(Y)) \\
&= (-\text{ad}(Y))^2(f(t)) + (-\text{ad}(Y))(B(Y))
\end{aligned}$$

bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(t) = (-\text{ad}(Y))^n(f(t)) + (-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y)) \tag{5.13}$$

yazılır. Bu bağıntının $n = 1$ için sağlandığı açık olup, n için sağlandığını kabul edelim ve $n + 1$ için sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_t f^{(n)}(t) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)_t \{(-\text{ad}(Y))^n(f(t)) + (-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y))\} \\
&= (-\text{ad}(Y))^{n+1}(f(t)) + (-\text{ad}(Y))^n(B(Y))
\end{aligned}$$

olup, sonuç doğrudur. $f(t)$, $t = 0$ da analitik olduğundan

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$



şeklinde Taylor serisiyle yazılabilir. Burada $f(0) = F(x)$ dir. Bu durumda $f^0(0) = f(0) = F(x)$ ve $n \geq 1$ için $f^{(n)}(0) = (-\text{ad}(Y))^n(F(x)) + (-\text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y))$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \geq 0} \frac{((- \text{ad}(Y))^n(F(x)))}{n!} t^n + \sum_{n \geq 1} \frac{((- \text{ad}(Y))^{n-1}(B(Y)))}{n!} t^n \\ &= e^{-t \text{ad}(Y)} F(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{(- \text{ad}(Y))^{n-1}}{n!} (B(Y)) t^n \\ &= e^{-t \text{ad}(Y)} F(x) + \left(\frac{1 - e^{-t \text{ad}(Y)}}{\text{ad}(Y)} \right) (B(Y)) \end{aligned}$$

elde edilir. $t = 1$ alınarak $f(1) = F(x \exp Y)$ ve böylece

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) B(Y)$$

bulunur. ◇

5.1.6. Uyarı:

$$B(Y) = Y(F) + [Y, F(e)] = \tilde{Y}_e(F) + [Y, F(e)] = dF_e(Y) + [Y, F(e)]$$

dir.

5.1.7. Sonuç : Eğer G bağlantılı bir Lie grubu ise bir $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ elemanı $(F(e), dF_e)$ ikilisiyle karakterize edilir.

İspat: $U = \exp(L(G)) = \{x \in G : x = \exp Y, Y \in L(G)\}$ olsun. n üzerinden tümevarım alınarak F fonksiyonunun U^n üzerinde $(F(e), dF_e)$ ikilisiyle belirlendiğini ispatlayacağız.

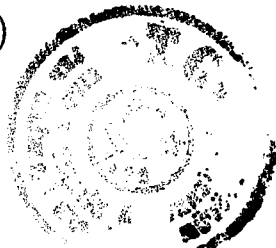
$$U^n = U^{n-1}U = \{xy \in G : x \in U^{n-1}, y \in U\}$$

olup, $G = \bigcup_n U^n$ (çünkü G bağlantılıdır) olduğundan sonucun doğru olduğu görülebilir. Gerçekten (5.11) de $\exp Y \in U$ için $x = e$ alınarak

$$F(\exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (dF_e(Y) + [Y, F(e)])$$

elde edilir. Bu da F in U üzerinde belirlendiğini gösterir. F in $n \geq 1$ için U^n üzerinde belirlendiğini kabul edelim ve bir $x \in U^n$ alalım. O zaman

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (dF_e(Y) + [Y, F(e)])$$



bulunur. Burada $x \exp Y \in U^n U = U^{n+1}$ dir. Böylece F , U^{n+1} üzerinde belirlidir. $\diamond$

5.1.8. Uyarı: Eğer G bağlantılı bir Lie Grubu ise o zaman

$$x \in G \Leftrightarrow x = \exp t_1 Y_1 \cdot \exp t_2 Y_2 \cdots \exp t_n Y_n$$

olacak şekilde $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in L(G)$ vardır.

5.1.9. Sonuç: $G = \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $p \in \mathbb{R}^n$ için $X \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \Leftrightarrow X_p = A(p) + u$ dur. Burada A , $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nin bir lineer tasviridir ve $u \in \mathbb{R}^n$ dir.

İspat: $\mathbb{R}^n$ nin $T_p \mathbb{R}^n$ teğet uzayı ile olağan özdeşlemesi altında $\tilde{F}$ vektör alanı $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fonksiyonuyla aynı olur. Böylece eğer (5.11) de x ile 0 ve Y ile p yerdeğiştirirse $F(0 + p) = Id.dF_0(p) + Id.F(0)$ yada $F_p = dF_0(p) + F(0)$ elde edilir. $\diamond$

5.1.10. Teorem: Eğer $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ ise, o takdirde her bir $X, Y \in L(G)$ için

$$e^{\text{ad} Y} dF_e(e^{-\text{ad} Y} X) = \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) dF_e(Y) \right] + dF_e(X)$$

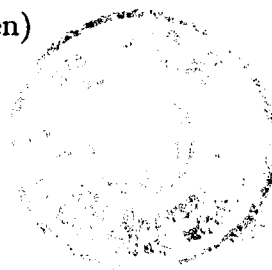
dir.

İspat: (5.11) de, $x = \exp(-Y) \exp(tX)$ alınarak

$$\begin{aligned} e^{\text{ad} Y} F(\exp(-Y) \exp tX \exp Y) &= F(\exp(-Y) \exp tX) \\ &+ \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} dF_e(e^{-\text{ad} Y} X) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp t(e^{-\text{ad} Y} X)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp t(\text{Ad}(\exp(-Y))(X))) \quad ((2.82) \text{ den}) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp(t \text{Ad}(\exp(-Y))(X))) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp(-Y) \exp(tX) \exp(Y)) \quad ((2.83) \text{ den}) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (e^{-\text{ad} Y}) F(\exp(-Y) \exp(tX)) \quad ((5.11) \text{ den}) \end{aligned}$$



olup, bu taktirde

$$\begin{aligned}
e^{\text{ad} Y} dF_e(e^{-\text{ad} Y} X) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} F(\exp(-Y) \exp(tX)) \\
&= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} ((e^{-t \text{ad} X}) F(\exp(-Y))) \\
&\quad + \left(\frac{1 - e^{-t \text{ad} X}}{\text{ad} X} \right) (X(F) + [X, F(e)]) \quad (5.11) \text{ den} \\
&= -\text{ad} X F(\exp(-Y)) + X(F) + [X, F(e)] \\
&= -\text{ad} X (e^{\text{ad} Y} F(e) + \left(\frac{1 - e^{-t \text{ad} X}}{\text{ad} X} \right) (X(F) + [X, F(e)])) \\
&\quad + X(F) + [X, F(e)] \quad (5.11) \text{ den} \\
&= -[X, (e^{\text{ad} Y} F(e))] + [X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) Y(F)] \\
&\quad - [X, \left(\frac{1 - e^{\text{ad} Y}}{\text{ad} Y} \right) [Y, F(e)]] + X(F) + [X, F(e)]
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer

$$\left(\frac{1 - e^{\text{ad} Y}}{\text{ad} Y} \right) \text{ad} Y (F(e)) = F(e) - (e^{\text{ad} Y}) F(e)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
e^{\text{ad} Y} dF_e(e^{-\text{ad} Y} X) &= -[X, (e^{\text{ad} Y} F(e))] + [X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) Y(F)] \\
&\quad - [X, F(e) - (e^{\text{ad} Y}) F(e)] + X(F) + [X, F(e)] \\
&= [X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) Y(F)] + X(F) \\
&= [X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) dF_e(Y)] + dF_e(X)
\end{aligned}$$

elde edilir. ◇

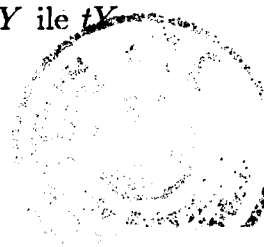
5.1.11. Teorem: Herhangi bir $A : L(G) \rightarrow L(G)$ lineer tasviri için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

(i)

$$e^{\text{ad} Y} A(e^{-\text{ad} Y} X) = \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad} Y} - 1}{\text{ad} Y} \right) A(Y) \right] + A(X) \quad (X, Y \in L(G)),$$

(ii) $A, L(G)$ nin bir türevidir.

İpsat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Burada $A : L(G) \rightarrow L(G)$ lineer tasvirinin her $X, Y \in L(G)$ için $A[X, Y] = [AX, Y] + [X, AY]$ koşulunu sağladığını göstereceğiz. (i) de Y ile tY



yerdeğiştirse ve $t = 0$ da t ye göre türevi alınır

$$e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) = \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] + A(X) \quad (5.14)$$

bulunur. Bu ifadenin heriki yanının $t = 0$ da t ye göre türevi alınır, yani

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left(e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) \right) &= \text{ad}Y e^{\text{ad}Y} A(e^{-\text{ad}Y} X) \big|_{t=0} \\ &\quad + e^{\text{ad}Y} A(-\text{ad}Y e^{-\text{ad}Y} X) \big|_{t=0} \\ &= \text{ad}Y(A(X)) + A(-\text{ad}Y(X)) \\ &= [Y, A(X)] - A[Y, X] \end{aligned} \quad (5.15)$$

ve $A(X)$ t den bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \left[X, \left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \text{ad}X \left(\left(\frac{e^{\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right) \\ &= [X, A(Y)] \end{aligned} \quad (5.16)$$

olup, böylece

$$A[X, Y] = [A(X), Y] + [X, A(Y)]$$

elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A, L(G)$ nin bir türevi olsun ve $\phi(t) = A(e^{\text{ad}Y} X)$ alalım. Bu taktirde

$$\frac{d\phi}{dt} = A(\text{ad}Y e^{\text{ad}Y} X) = A([Y, e^{\text{ad}Y} X]) = [A(Y), e^{\text{ad}Y} X] + [Y, \phi(t)]$$

bulunur. Öte yandan $\psi(t) = e^{\text{ad}Y} \left[X, \left(\frac{e^{-\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] + e^{\text{ad}Y} A(X)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \text{ad}Y e^{\text{ad}Y} \left[X, \left(\frac{e^{-\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] \\ &\quad + e^{\text{ad}Y} \left[X, -e^{-\text{ad}Y} A(Y) \right] + \text{ad}Y e^{\text{ad}Y} A(X) \\ &= \text{ad}Y e^{\text{ad}Y} \left(\left[X, \left(\frac{e^{-\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y} \right) A(Y) \right] + A(X) \right) \\ &= \text{ad}Y(\psi(t)) + [A(Y), e^{\text{ad}Y} X] \\ &= [Y, \psi(t)] + [A(Y), e^{\text{ad}Y} X] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda ϕ ve ψ fonksiyonları

$$\phi(0) = A(X) = \psi(0)$$



başlangıç değeri koşuluyla aynı

$$\frac{d\zeta}{dt} = [A(Y), e^{t\text{ad}Y} X] + [Y, \zeta] \quad (5.18)$$

diferansiyel denklemini sağlar. Diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden $\phi = \psi$ dir. Böylece $t = -1$ alınrsa (i) elde edilir. $\diamond$

5.1.12. Yardımcı Teorem: Verilen bir $D \in L(G)$ için $\text{ad}D$ yi $L(G)$ üzerinde $(\text{ad}D)_X = [D, X]$ şeklinde tanımlı bir vektör alanı olarak gözönüne alalım. Aynı zamanda D yi $D_X = D$ şeklinde tanımlı sabit vektör alanı ile özdeşleyelim. $D, E \in L(G)$ olsun. O zaman

$$(i) [E, \text{ad}D] = [D, E],$$

$$(ii) [\text{ad}E, \text{ad}D] = \text{ad}[D, E] \text{ dir.}$$

İspat: $\{x_i\}_{i=1}^n$, $L(G)$ de koordinatların bir lineer sistemi ve $f \in C^\infty(L(G))$ olsun. O takdirde

$$(\text{ad}Df)(X) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} f(X + t[D, X]), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} (E(\text{ad}Df))(X) &= \left(\frac{d}{ds}\right)_{s=0} (\text{ad}Df)(X + sE) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(X + sE + t[D, X] + ts[D, E])(0, 0) \\ &= \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) E_j [D, X]_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) [D, E]_i \end{aligned} \quad (5.20)$$

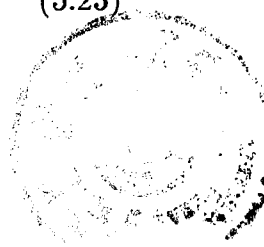
$$(Ef)(X) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} f(X + tE) \quad (5.21)$$

ve

$$\begin{aligned} (\text{ad}D(Ef))(X) &= \left(\frac{d}{ds}\right)_{s=0} (Ef)(X + s[D, X]) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(X + s[D, X] + tE)(0, 0) \\ &= \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) [D, X]_j E_i \end{aligned} \quad (5.22)$$

bulunur. Böylece

$$([E, \text{ad}D]f)(X) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) [D, E]_i = ([D, E]f)(X) \quad (5.23)$$



elde edilir. Bu da (i) yi ispatlar. (ii) yi isatlamak için

$$\begin{aligned}
 (\text{ad}E(\text{ad}Df))(X) &= \left(\frac{d}{ds}\right)_{s=0} (\text{ad}Df)(X + s[E, X]) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(X + s[E, X] + t[D, X] + ts[D[E, X]])(0, 0) \\
 &= \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) [E, X]_j [D, X]_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) [D, [E, X]]_i
 \end{aligned}$$

olup, bu durumda

$$([\text{ad}E, \text{ad}D]f)(X) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) ([D, [E, X]]_i - [E, [D, X]]_i).$$

bulunur. Böylece

$$[\text{ad}E, \text{ad}D]_X = [D, [E, X]] - [E, [D, X]] = [[D, E], X] \quad (5.24)$$

elde edilir. $\diamond$

5.1.13. Yardımcı Teorem: Eğer $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ ise o zaman her $Y \in L(G)$ için

$$dF_x(\tilde{Y}_x) = [Y, F(e) - F(x)] + dF_e(Y)$$

dir.

İspat: (5.11) bağıntısında Y yerine tY konur ve t ye göre $t = 0$ da türevi alınırsa, istenilen sonuca varılır. $\diamond$

5.1.14. Teorem: $\phi \in \partial(L(G))$, $L(G)$ nin bir türevi ve $E \in L(G)$ olsun. O takdirde $G \times L(G)$ de

$$\Delta_{(x,X)} = \{(\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y)) : Y \in L(G)\} \quad (5.25)$$

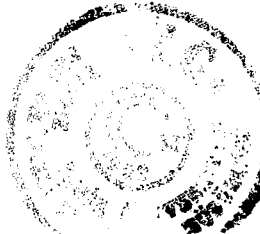
şeklinde tanımlı Δ dağılımı, C^∞ , $n = \text{boyut}(L(G))$ boyutlu ve involutivdir.

İspat: Bir $D : L(G) \rightarrow L(G)$ tasviri

$$D(\cdot) = [Y, E] - \text{ad}Y(\cdot) + \phi(Y)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\Delta_{(x,X)} = \{(\tilde{Y}_x, D(X)) : Y \in L(G)\}$$



yazılabilir. Dağılım, uzayın her elemanını o elemandaki teğet uzayının bir alt vektör uzayına götüren bir tasvir olduğuna göre

$$\Delta : G \times L(G) \rightarrow T(G \times L(G)) \cong TG \times TL(G)$$

$$(x, X) \mapsto \Delta(x, X) \leq T_x G \times T_X L(G)$$

dir. Yani $\Delta(x, X)$, $T_{(x, X)}(G \times L(G)) \cong T_x G \times T_X L(G)$ nin bir altuzayıdır. $T_x G \times T_X L(G)$ deki (X, Y) ve (X^1, Y^1) elemanları için

$$[(X, Y), (X^1, Y^1)] = ([X, X^1], [Y, Y^1])$$

şeklinde Lie parantezi tanımlansın:

(i) Δ yı geren elemanlar C^∞ olduğundan Δ , C^∞ dir.

(ii) (5.25) in ilk bileşeni $L(G)$ nin x deki bir etkisidir. Yani $T_x G$ dir ve $\tilde{Y}_x$ için $[Y, E - X] + \phi(Y)$ tekdir. Dolayısıyla $\text{boyut} \Delta = \text{boyut} L(G)$ dir.

(iii) $((\tilde{Y}_1)_x, D_1(\cdot)) \in \Delta(x, \cdot)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [((\tilde{Y}_1)_x, D_1(\cdot)), ((\tilde{Y}_2)_x, D_2(\cdot))] &= ([(\tilde{Y}_1)_x, (\tilde{Y}_2)_x], [D_1(\cdot), D_2(\cdot)]) \\ &= ([(\tilde{Y}_1), \widetilde{(\tilde{Y}_2)}]_x, [D_1(\cdot), D_2(\cdot)]) \end{aligned} \quad (5.26)$$

bulunur.

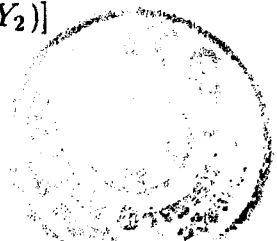
$$\begin{aligned} [D_1(\cdot), D_2(\cdot)] &= [[Y_1, E] - \text{ad} Y_1(\cdot) + \phi(Y_1), [Y_2, E] - \text{ad} Y_2(\cdot) + \phi(Y_2)] \\ &= [[Y_1, E] + \phi(Y_1), [Y_2, E] + \phi(Y_2)] + [[Y_1, E], -\text{ad} Y_2(\cdot)] \\ &\quad + [-\text{ad} Y_1(\cdot), [Y_2, E]] + [-\text{ad} Y_1(\cdot), -\text{ad} Y_2(\cdot)] \\ &\quad + [-\text{ad} Y_1(\cdot), \phi(Y_2)] + [\phi(Y_1), -\text{ad} Y_2(\cdot)] \end{aligned}$$

olup, yardımcı teorem (5.12) den

$$\begin{aligned} [D_1(\cdot), D_2(\cdot)] &= [[Y_1, E] + \phi(Y_1), [Y_2, E] + \phi(Y_2)] - [[Y_2, [Y_1, E]] \\ &= [[Y_1, [Y_2, E]] + \text{ad}[Y_2, Y_1] + [Y_1, \phi(Y_2)] - [Y_2, \phi(Y_1)] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[Y_1, E] + \phi(Y_1), [Y_2, E] + \phi(Y_2)] = 0$ dir. Gerçekten $[Y_1, E] + \phi(Y_1)$ ve $[Y_2, E] + \phi(Y_2)$ sabit vektör alanları olduklarından, onların Lie parantezi sıfırdır. *Jacobi* özdeşliği kullanılarak

$$[D_1(\cdot), D_2(\cdot)] = [[Y_1, Y_2], E] - \text{ad}[Y_1, Y_2](\cdot) + [\phi(Y_1), Y_2] + [Y_1, \phi(Y_2)]$$



elde edilir. ϕ nin türev olmasından

$$[D_1(\cdot), D_2(\cdot)] = [[Y_1, Y_2], E] - \text{ad}[Y_1, Y_2](\cdot) + \phi[Y_1, Y_2] \quad (5.27)$$

yazılır. Bu son ifade (5.26) da yerine konulursa,

$$\begin{aligned} [((\tilde{Y}_1)_x, D_1(\cdot)), ((\tilde{Y}_2)_x, D_2(\cdot))] &= ([(\widetilde{(Y_1, Y_2)}]_x, [[Y_1, Y_2], E] \\ &\quad - \text{ad}[Y_1, Y_2](\cdot) + [\phi(Y_1), Y_2] + [Y_1, \phi(Y_2)]) \in \Delta(x, \cdot) \end{aligned}$$

sonucu çıkar. $\diamond$

5.1.15. Yardımcı Teorem: $\tilde{F}_j \in \text{norm}_{\mathcal{H}(G)}(L(G))$, $j = 1, 2$ verilsin ve bir $F \in C^\infty(G, L(G))$

$$\begin{aligned} F(x) &= -[F_1(x), F_2(x)] + F_1(x)(F_2) - F_2(x)(F_1) \\ &\quad + [F_1(x), F_2(e)] - [F_2(x), F_1(e)] \end{aligned} \quad (5.28)$$

şeklinde tanımlı olsun. O taktirde $[\tilde{F}_1, \tilde{F}_2] = \tilde{F}$ dir.

İspat:

$$([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]f)(x) = (\tilde{F}_1(\tilde{F}_2 f))(x) - (\tilde{F}_2(\tilde{F}_1 f))(x), \quad f \in C^\infty(G)$$

olup, burada

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_1(\tilde{F}_2 f))(x) &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (\tilde{F}_2 f)(x \exp sF_1(x)) \\ &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{t=0} (F_2(x \exp sF_1(x)f))(x \exp sF_1(x)) \\ &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (F_2(x \exp sF_1(x))f)(x) \\ &\quad + \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (\widetilde{F(x)}f)(x \exp sF_1(x)) \end{aligned}$$

dir. (5.11) den

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} F_2(x \exp sF_1(x)) &= \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} \left((e^{-s \text{ad} F_1(x)}) F_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 - e^{-s \text{ad} F_1(x)}}{\text{ad} F_1(x)} \right) (F_1(x)(F_2) + [F_1(x), F_2(e)]) \right) \\ &= -[F_1(x), F_2(x)] + F_1(x)(F_2) + [F_1(x), F_2(e)] \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_1(\tilde{F}_2 f))(x) &= -([F_1(x), \widetilde{F_2(x)}]f)(x) + (F_1(x)(\widetilde{F_2(x)}f))(x) \\ &\quad + ([F_1(x), \widetilde{F_2(e)}]f)(x) + ([\widetilde{F_1(x)}](\widetilde{F_2(x)}f))(x) \end{aligned}$$

olup, dolayısıyla

$$\begin{aligned} ([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]f)(x) &= -([F_1(x), \widetilde{F_2(x)}]f)(x) + ((F_1(x)(\widetilde{F_2(x)}f) - F_2(x)(\widetilde{F_1(x)}f))(x) \\ &\quad + (([F_1(x), \widetilde{F_2(e)}] - [F_2(x), \widetilde{F_1(e)}])f)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $\diamond$

5.1.16. Teorem: $\Phi : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes gl(L(G))$, $\Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e)$ şeklinde tanımlı bir lineer tasvir olsun. O takdirde

(i) $\Phi, \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ den $L(G) \otimes \partial(L(G))$ yarı-direk çarpımı içine bir Lie cebiri homomorfizmidir.

(ii) Eğer G bağlantılı ise o zaman $\Phi : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ bir bire-bir homomorfizmdir.

(iii) Eğer G bağlantılı ve basit bağlantılı ise o zaman $\Phi : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial L(G)$ bir üzerine izomorfizmdir.

İspat: (i) $\Phi(\alpha\tilde{F}_1 + \beta\tilde{F}_2) = \alpha\Phi(\tilde{F}_1) + \beta\Phi(\tilde{F}_2)$ ve $\Phi[\tilde{F}_1, \tilde{F}_2] = [\Phi(\tilde{F}_1), \Phi(\tilde{F}_2)]$ olduğunu göstereceğiz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha\tilde{F}_1 + \beta\tilde{F}_2) &= \Phi(\alpha\widetilde{F_1} + \beta\widetilde{F_2}) \\ &= ((\alpha F_1 + \beta F_2)(e), d(\alpha F_1 + \beta F_2)_e) \\ &= (\alpha F_1(e) + \beta F_2(e), -\alpha d(F_1)_e - \beta d(F_2)_e) \\ &= (\alpha F_1(e), -\alpha d(F_1)_e) + (\beta F_2(e), -\beta d(F_2)_e) \\ &= \alpha(F_1(e), -d(F_1)_e) + \beta(F_2(e), -d(F_2)_e) \\ &= \alpha\Phi(\tilde{F}_1) + \beta\Phi(\tilde{F}_2) \end{aligned}$$

ve yarıdirek çarpımın tanımından (Warner, 1971)

$$\begin{aligned} [\Phi(\tilde{F}_1), \Phi(\tilde{F}_2)] &= [(F_1(e), -(dF_1)_e), (F_2(e), d(F_2)_e)] \\ &= ([F_1(e), F_2(e)] - d(F_1)_e(F_2(e)) + (d(F_2)_e(F_1(e))), [-d(F_1)_e, -d(F_2)_e]) \end{aligned}$$

elde edilir. $\phi_j = -(dF_j)_e$ ve $E_j = F_j(e)$ $j = 1, 2$ olsun. O zaman

$$[\Phi(\tilde{F}_1), \Phi(\tilde{F}_2)] = ([E_1, E_2] + \phi_1(E_2) - \phi_2(E_1), [\phi_1, \phi_2]) \quad (5.29)$$

olur. $F(x)$, (5.28) deki gibi tanımlansın. O taktirde yardımcı teorem 5.15 den

$$\Phi([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]) = \phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} F(e) &= -[F_1(e), F_2(e)] + F_1(e)(F_2) - F_2(e)(F_1) + [F_1(e), F_2(e)] - [F_2(e), F_1(e)] \\ &= F_1(e)(F_2) - F_2(e)(F_1) - [F_2(e), F_1(e)] \\ &= (dF_2)_e(F_1(e)) - (dF_1)_e(F_2(e)) + [F_1(e), F_2(e)] \\ &= -\phi_2(E_1) + \phi_1(E_2) + [E_1, E_2] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} dF_e(Y) &= -[(dF_1)_e(Y), F_2(e)] - [F_1(e), (dF_2)_e(Y)] + (dF_1)_e(Y)(F_2) \\ &\quad - (dF_2)_e(Y)(F_1) + [(dF_1)_e(Y), F_2(e)] - [(dF_2)_e(Y), F_1(e)] \\ &= (dF_1)_e(Y)(F_2) - (dF_2)_e(Y)(F_1) \\ &= (dF_2)_e(dF_1)_e(Y) - (dF_1)_e(dF_2)_e(Y) \\ &= -[(dF_1)_e, (dF_2)_e](Y) \\ &= -[\phi_1, \phi_2](Y) \end{aligned}$$

dir. Böylece

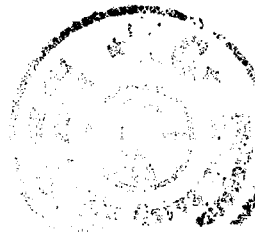
$$\Phi([\tilde{F}_1, \tilde{F}_2]) = (F(e), -dF_e) = ([E_1, E_2] + \phi_1(E_2) - \phi_2(E_1), [\phi_1, \phi_2]),$$

olup, bu da (5.29) ile birlikte (i) yi ispatlar.

(ii) $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F}_2) \Rightarrow \tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F}_2) &\Rightarrow (F_1(e), -(dF_1)_e) = (F_2(e), -(dF_2)_e) \\ &\Rightarrow F_1(e) = F_2(e) \text{ ve } (dF_1)_e = (dF_2)_e. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sonuç 5.1.7. den $\tilde{F}_1, (F_1(e), (dF_1)_e)$ ikilisi ve $\tilde{F}_2, (F_2(e), (dF_2)_e)$ ikilisiyle belirlendiğinden (5.30) bağıntıları da kullanılarak $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ elde edilir.



(iii) Her $(E, \phi) \in L(G) \times \partial(L(G))$ için $(E, \phi) = \Phi(\tilde{F})$ olacak şekilde bir $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ nin var olduğunu göstereceğiz. $(E, \phi) \in L(G) \times \partial(L(G))$ olsun.

$$\psi(t) = (e^{-t\text{ad}Y})X + \left(\frac{1 - e^{-t\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E])$$

şeklinde tanımlı bir $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow L(G)$ tasvirini gözönüne alalım. Bu taktirde $\psi(0) = X$ ve

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (-\text{ad}Y e^{-t\text{ad}Y})X + e^{-t\text{ad}Y}(\phi(Y) + [Y, E]) \\ &= (-\text{ad}Y e^{-t\text{ad}Y})X + \text{ad}Y(\text{ad}^{-1}Y(e^{-t\text{ad}Y}(\phi(Y) + [Y, E]))) \\ &\quad + \text{ad}Y(\text{ad}^{-1}Y(\phi(Y) + [Y, E])) - \text{ad}Y(\text{ad}^{-1}Y(\phi(Y) + [Y, E])) \\ &= \text{ad}Y(-e^{-t\text{ad}Y}X + (\text{ad}^{-1}Y(e^{-t\text{ad}Y}(\phi(Y) + [Y, E]))) \\ &\quad + \text{ad}Y(\text{ad}^{-1}Y(\phi(Y) + [Y, E])) + \text{ad}Y(-\text{ad}^{-1}Y(\phi(Y) + [Y, E])) \\ &= \left[Y, -e^{-t\text{ad}Y}X + \frac{e^{-t\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}(\phi(Y) + [Y, E])\right] \\ &\quad + \left[Y, \frac{\phi(Y) + [Y, E]}{\text{ad}Y}\right] + \left[Y, -\frac{\phi(Y) + [Y, E]}{\text{ad}Y}\right] \\ &= \left[Y, -e^{-t\text{ad}Y}X + \left(\frac{e^{-t\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E])\right] \\ &\quad + \left[Y, \frac{\phi(Y) + [Y, E]}{\text{ad}Y}\right] \\ &= \left[Y, -e^{-t\text{ad}Y}X + \left(\frac{e^{-t\text{ad}Y} - 1}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E])\right] \\ &\quad + \text{ad}Y(\text{ad}^{-1}Y(\phi(Y) + [Y, E])) \\ &= [Y, \psi(t)] + \phi(Y) + (Y, E) \\ &= [Y, E - \psi(t)] + \phi(Y) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\psi'(0) = [Y, E - X] + \phi(Y)$$

bulunur.

$$D_Z = [Y, E - Z] + \phi(Y) \text{ yada } D. = [Y, E - \cdot] + \phi(Y)$$

şeklinde bir $D \in \mathcal{X}(L(G))$ tanımlayalım. O zaman $\psi(t)$, $X \in \mathcal{X}(L(G))$ noktasından geçen $D \in \mathcal{X}(G)$ nin integral eğrisidir ($\psi(0) = X, \psi'(0) = D_X$). Eğer



$\gamma(t) : \mathbb{R} \longrightarrow G \times L(G)$, $\gamma(t) = (x \exp(tY), \psi(t))$ şeklinde tanımlanırsa o zaman $\gamma(0) = (x, X)$ and $\gamma'(t) = (\tilde{Y}_{x \exp(tY)}, \psi'(t))$ olup,

$$\gamma'(0) = (\tilde{Y}_x, D_X) = (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y))$$

bulunur. Böylece $\gamma(t)$, (x, X) noktasından geçen $(\tilde{Y}, D)_{(x, X)} = (\tilde{Y}_x, D_X)$ şeklinde tanımlı $(\tilde{Y}, D) \in X(G \times L(G))$ nin integral eğrisidir. Δ Teorem 5.1.14 de tanımlandığı gibi $G \times L(G)$ üzerinde bir involutiv dağılım ve $\iota : M_{(x, X)} \rightarrow G \times L(G)$, (x, X) noktasından geçen Δ nın maksimal bağlantılı bir integral altmanifoldu olsun. Burada ι bir kapsama tasviri olup, $\iota|_{M_{(x, X)}}$ özdeşliktir ve o zaman

$$d\iota|_{(x, X)} : T_{(x, X)}M_{(x, X)} \longrightarrow T_{\iota(x, X)}(G \times L(G)) = T_{(x, X)}(G \times L(G))$$

dir. $(M_{(x, X)}, \iota)$, $G \times L(G)$ üzerinde Δ nın bir integral altmanifoldu olduğundan

$$d\iota|_{(x, X)} T_{(x, X)}M_{(x, X)} = \Delta(\iota(x, X)) = \Delta(x, X)$$

elde edilir ($d\iota|_{(x, X)}$ bir izomorfizmdir). $(\tilde{Y}, D) \in \Delta$ ve $\gamma(t)$, (x, X) noktasından geçen $(\tilde{Y}, D) \in X(G \times L(G))$ nin bir integral eğrisi olduğundan her t için $\gamma(t) \in M_{(x, X)}$ dir. O halde her $Y \in L(G)$ için

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= (x \exp Y, \psi(1)) \\ &= (x \exp Y, (e^{-\text{ad}Y})X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E])) \in M_{(x, X)} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\pi_1 : G \times L(G) \longrightarrow G$$

$$(x, Y) \longmapsto x$$

izdüşümünü gözönüne alalım ve $p = \pi_1 \circ \iota$ olsun:

$$\begin{array}{ccc} M_{(x, X)} & \xrightarrow{\iota} & G \times L(G) \\ p \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & G. & \end{array}$$

Bu taktirde

$$dp|_{(x, X)} (\tilde{Y}_x, D_X) = dp_{(x, X)} (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y)) = \tilde{Y}_x$$



olup, özel olarak (e, E) noktası için

$$dp|_{(e,E)}(\tilde{Y}_e, D_E) = \tilde{Y}_e = Y$$

elde edilir. Bu da $p : M \rightarrow G$ nin bir düzenli tasvir olduğunu gösterir. Bundan başka p nin bir örtü tasviri olduğunu ispatlayacağız. V ve U $\exp : V \rightarrow U$ bir difeomorfizm olacak şekilde sırasıyla $L(G)$ de 0 ın ve G de e nin simetrik açık komşulukları olsun. Verilen bir $(x, X) \in M$ için $s : xU \rightarrow M$ tasviri

$$s(x \exp Y) = \left(x \exp Y, (e^{-\text{ad}Y})X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (\phi(Y) + [Y, E]) \right) \in M_{(x,X)}, Y \in V$$

şeklinde tanımlansın. O zaman s, xU üzerinde (x, X) den geçen $p : M \rightarrow G$ nin bir yerel kısmıdır. Burada $p(M) = G$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $x \in p(M)$ ise o zaman s tasviri, $xU \subset p(M)$ olduğunu gerektirir. Bu taktirde n üzerinden tümevarımla $U^n \subset p(M)$ olduğu sonucu çıkar. G bağlantılı olduğundan $p(M) = G$ bulunur.

Bir $x \in G$ için $p^{-1}(x) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ve (x, X_α) den geçen xU üzerindeki yerel kısım s_α olsun. O zaman

$$p^{-1}(xU) = \bigcup_{\alpha \in A} s_\alpha(xU)$$

dir. Gerçekten eğer $(x \exp Y, Z) \in M$, $Y \in V$ ise $(x \exp Y, Z)$ den geçen $(x \exp Y)U$ üzerinde tanımlanmış yerel kısım σ olsun. O zaman, eğer $(x, X_\alpha) = \sigma(x)$ ise $(x \exp Y, Z) = s_\alpha(x \exp Y)$ bulunur.

Öte yandan, eğer $\alpha \neq \beta$ ise o taktirde $s_\alpha(xU)$ ve $s_\beta(xU)$ ayrıktır. Gerçekten $s_\alpha(x \exp Y) = s_\beta(x \exp Z)$ ($Y, Z \in V$), $Y = Z$ ve $(e^{-\text{ad}Y})X_\alpha = (e^{-\text{ad}Y})X_\beta$ olduğunu gerektirir. Bu $X_\alpha \neq X_\beta$ olmasıyla çelişir. $p : s_\alpha(xU) \rightarrow xU$ bir difeomorfizm olduğundan, $p : M \rightarrow G$ bir örtü tasviridir.

G basit bağlantılı olduğundan $p : M \rightarrow G$ bir difeomorfizmdir.

$$\pi_2 : G \times L(G) \longrightarrow L(G)$$

$$(x, Y) \longmapsto Y$$

olsun. O zaman

$$\begin{array}{ccc} M_{(x,X)} & \xrightleftharpoons[p]{p^{-1}} & G \\ \pi_2 \searrow & & \swarrow \pi_2 \circ p^{-1} \\ & L(G) & \end{array}$$



diagramı elde edilir. $X = \pi_2(p^{-1}(x))$, $x \in G$ olsun. O takdirde

$$\begin{array}{ccc} T_{(x,X)}M_{(x,X)} & \xleftarrow{dp^{-1}|_x} & T_x G \\ d\pi_2|_{(x,X)} \searrow & & \swarrow d(\pi_2 \circ p^{-1})|_x = d\pi_2|_{(x,X)} dp^{-1}|_x \\ & T_X L(G) & \end{array}$$

bulunur. Böylece

$$dp^{-1}|_x(\tilde{Y}_x) = (\tilde{Y}_x, D_X) = (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y))$$

elde edilir. $F = \pi_2 \circ p^{-1}$ olsun. O takdirde $F(x) = \pi_2(p^{-1}(x))$ olup, özel olarak $x = e$ alınırsa

$$F(e) = \pi_2(p^{-1}(e)) = \pi_2(e, E) = E$$

bulunur. Açıkça $F: G \rightarrow L(G)$ iyi tanımlıdır ve

$$\begin{aligned} dF_x(\tilde{Y}_x) &= d\pi_2|_{(x,X)} dp^{-1}|_x(\tilde{Y}_x) = d\pi_2|_{(x,X)}(\tilde{Y}_x, D_X) \\ &= D_X = [Y, [E - X] + \phi(Y) = [Y, F(e) - F(x)] + \phi(Y) \end{aligned}$$

olup, özellikle

$$dF_e(\tilde{Y}_e) = dF_e(Y) = [Y, 0] + \phi(Y) = \phi(Y) \Rightarrow dF_e = \phi$$

elde edilir. $\lambda(t) = F(x \exp tY)$ olsun ve $\psi(t)$ yukarıdaki gibi tanımlansın. O takdirde

$$\psi(t) = (e^{-t \operatorname{ad} Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-t \operatorname{ad} Y}}{\operatorname{ad} Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)])$$

olup ve bu durumda

$$\lambda'(t) = [Y, F(e) - \lambda(t)] + \phi(Y)$$

$$\psi'(t) = [Y, F(e) - \psi(t)] + \phi(Y)$$

bulunur. $\lambda(0) = F(x) = \psi(0)$ olduğundan $\lambda(t) = \psi(t)$ olduğu sonucu çıkar. Böylece

$$F(x \exp Y) = (e^{-\operatorname{ad} Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} Y}}{\operatorname{ad} Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)])$$

olup teorem 5.1.5. den

$$\Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e) = (E, -\phi) \in L(G) \times \partial(L(G))$$



olacak şekilde $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ elde edilir. $\diamond$

5.1.17. Teorem: $\pi : G_1 \rightarrow G$, bağlantılı Lie gruplarının bir örtü homomorfizmi ve $K = \ker \pi$ olsun. O taktirde $\tilde{F}_1 \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G_1)}(L(G))$ bir $\tilde{F} \in \mathcal{X}(G)$ ye ancak ve ancak her $k \in K$ için $F_1(k) = F_1(e)$ ise π -bağlıdır. Bu durumda $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ ve $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F})$ dir.

İspat: e ve e' sırasıyla G_1 ve G ye karşılık gelen birim elemanlar ve $x \in G_1$ olsun. Önce $\tilde{F}_1 \in X(G_1)$ ve $\tilde{F} \in \mathcal{X}(G)$ ancak ve ancak $F_1 = F \circ \pi$ ise π -bağlı olduğunu ispatlayacağız:

$$\tilde{F}_1 \sim_{\pi} \tilde{F} \Leftrightarrow F_1 = F \circ \pi.$$

Tanım gereğince $\tilde{F}_1 \sim_{\pi} \tilde{F} \Leftrightarrow d\pi_x(\tilde{F}_1)_x = \tilde{F}_{\pi(x)}$ dir. Buradan

$$d\pi_x(\tilde{F}_1)_x = d\pi_x(dL_x|_e(F_1(x))) = (d\pi_x \circ dL_x|_e)(F_1(x))$$

ve $\tilde{F}_{\pi(x)} = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi(x)))$ olup,

$$d\pi_x(\tilde{F}_1)_x = (d\pi_x \circ dL_x|_e)(F_1(x)) = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi(x)))$$

elde edilir. $d\pi_x \circ dL_x|_e = d(\pi_x \circ L_x)|_e$ eşitliği kullanılarak

$$d(\pi_x \circ L_x)|_e(F_1(x)) = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi(x))) \quad (5.31)$$

bulunur. Aşağıdaki diagramı gözönüne alalım:

$$\begin{array}{ccc} T_e G_1 & \xrightarrow{d\pi_e} & T_{e'} G \\ dL_x|_e \downarrow & & \downarrow dL_{\pi(x)}|_{e'} \\ T_x G_1 & \xrightarrow{d\pi_x} & T_{\pi(x)} G. \end{array}$$

Bu durumda

$$d(\pi_x \circ L_x)|_e(F_1(x))_e = dL_{\pi(x)}|_{e'}(d\pi_e F_1(x))_e = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F_1(x))_{e'}$$

bulunur. Böylece (5.31) bağıntısından

$$dL_{\pi(x)}|_{e'}(F_1(x))_{e'} = dL_{\pi(x)}|_{e'}(F(\pi(x)))_{e'}$$

ve $dL_{\pi(x)}|_{e'}$ bir izomorfizm olduğundan her $x \in G$ için $F_1(x) = F(\pi(x))$ elde edilir. Yani $F_1 = F \circ \pi$ dir.



Burada her $k \in K$ için $F_1 = F \circ \pi \Leftrightarrow F_1(k) = F_1(e)$ olduğunu ispatlayacağız.

($\Rightarrow$): $k \in K$ olsun. O zaman $F_1(k) = F(\pi(k)) = F(e)$ olup k keyfi olduğundan

$$F_1(k) = F(e), \forall k \in K$$

bulunur. Öte yandan $F_1(e) = F(\pi(e)) = F(e)$ olduğundan $\forall k \in K$ için $F_1(k) = F_1(e)$ elde edilir.

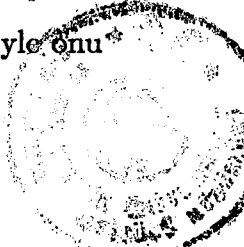
($\Leftarrow$): $k \in K$ ve $k \exp Y \in G_1$ için (5.11) den

$$\begin{aligned} F_1(k \exp Y) &= (e^{-\text{ad}Y})F_1(k) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F_1) + [Y, F_1(e)]) \\ &= (e^{-\text{ad}Y})F_1(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F_1) + [Y, F_1(e)]) \\ &= F_1(\exp Y) \end{aligned}$$

bulunur. Dlayısıyla $F_1^{l(k)}$ ve $F_1, e \in G_1$ in bir komşuluğunda çakışır ve her ikisinde analitik olup, her yerde çakışırılar. Böylece eğer $x, y \in G_1$ ve $\pi(x) = \pi(y)$ ise o zaman bir $k \in K$ için $y = kx$ dir. Bu durumda $F_1(y) = F_1(x)$ olur ve bu da $F_1 = F \circ \pi$ olacak şekilde $F \in C^\infty(G)$ nin varlığını gerektirir.

Bu son iddia Teorem 5.1.5 den yada aynı $X \in L(G)$ vasıtasıyla üretilmiş $\tilde{X}_1 \in X(G_1)$ ve $\tilde{X} \in \mathcal{X}(G)$ sol-invariant vektör alanlarının π -bağlı olması gerçeğinin bir sonucu olarak çıkar. $\diamond$

G bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubu olsun. O taktirde $\delta(\varphi) = (d\varphi)_e$ şeklinde tanımlı $\delta : \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(L(G))$ tasviri bir üzerine izomorfizmdir. $\text{Aut}(L(G)), GL(L(G))$ nin kapalı bir altgrubu olduğundan kendisi $GL(L(G))$ nin bir tek topolojik altgrubu yapısına sahiptir, (Beardon, 1985). Ayrıca onun Lie cebiri $\partial(L(G))$ dir, (Conlon, 1993). Böylece $\text{Aut}(G), \delta$ yı ve Lie gruplarının izomorfizmlerini üreten bir tek Lie grup yapısı kazanır. $\text{Aut}(G)$ nin Lie cebirini $(d\delta)_e$ vasıtasıyla $\partial(L(G))$ ile özdeşleyeceğiz ve karşılık gelen üstel tasviri de $\text{Exp} : \partial(L(G)) \rightarrow \text{Aut}(G)$ ile göstereceğiz. $\pi : G_1 \rightarrow G$ bağlantılı bir G Lie grubunun evrensel örtü homomorfizmi ve $K = \ker \pi$ olsun. O taktirde G nin tüm Lie otomorfizmlerinin $\text{Aut}(G)$ grubu $\{\varphi \in \text{Aut}(G_1) : \varphi(K) \subset K\}$ ile özdeşlenebilir. Bu yolla $\text{Aut}(G)$ onun $\text{Aut}(G_1)$ in tek topolojik Lie altgrubu yapısıyla onu



$\{\varphi \in \text{Aut}(G_1) : \varphi(K) \subset K\}$ ya izomorf yapan bir Lie yapısı kazanır. $\text{Aut}(G)$ nin $\text{aut}(G)$ Lie cebirini $\partial(L(G))$ nin bir Lie altceberi ile özdeşleyeceğiz ve karşılık gelen üstel tasviride $\text{Exp} : \text{aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ ile göstereceğiz. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} \text{aut}(G) & \longrightarrow & \partial(L(G)) \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow e \\ \text{Aut}(G) & \longleftarrow & \text{Aut}(L(G)) \end{array}$$

değişmeli diagramı yazabiliriz. Burada e , $\partial(L(G))$ ve $\text{Aut}(L(G))$ arasındaki üstel tasviri göstermektedir. Herhangi $\phi \in \text{aut}(G)$ ve $X \in L(G)$ için

$$(\delta \circ \text{Exp})\phi = (e \circ (d\delta)_e)\phi = e(\phi) = e^\phi$$

olup,

$$(\delta \circ \text{Exp})\phi = (d\text{Exp}\phi)_e = e^\phi \quad (5.32)$$

elde edilir. Öte yandan $\text{Exp}\phi \in \text{Aut}(G)$ ve $X \in L(G)$ için

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{(d\text{Exp}\phi)_e} & L(G) \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xleftarrow{\text{Exp}\phi} & G \end{array}$$

diagramından

$$(\text{Exp}\phi)(\text{exp } X) = \text{exp}((d\text{Exp}\phi)_e X) = \text{exp}(e^\phi(X)) \quad (5.33)$$

bulunur.

5.1.18. Teorem: G nin $L(G)$ Lie cebiri ile bağlantılı bir Lie grubu olduğunu varsayalım. Eğer $X \in L(G)$ ve $\phi \in \text{aut}(G)$ ise o zaman $\Phi(\tilde{X}) = (X, 0)$ ve $\Phi(\tilde{F}) = (0, -\phi)$ olacak şekilde $\tilde{X}, \tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{H}(G)}(L(G))$ vektör alanları vardır. O takdirde karşılık gelen G nin difeomorfizmlerinin bir parametrelili $\tilde{X}_t, \tilde{F}_t$ grupları her $x \in G$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$\tilde{X}_t(x) = x \exp tX$$

$$\tilde{F}_t(x) = (\text{Exp}t\phi)(x),$$

şeklinde verilir.



İspat: $R_{\exp tX}$ ve $\text{Expt}\phi$, G (yada G_1) nin difeomorfizmlerinin bir parametrelili grupları olduğundan onlarla birleşmiş vektör alanlarını hesaplamak yeterlidir. İlk önce $x(t) = x \exp tX$ alalım. O zaman $\dot{x}(0) = dL_x(X)$ dir. $X(x) = X$ sabit fonksiyonu (5.11) bağıntısını sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} e^{-\text{ad}Y}X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(Y(X) + [Y, X(e)]) &= \\ &= e^{-\text{ad}Y}X + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(dX_e(Y) + \text{ad}Y(X)) \\ &= e^{-\text{ad}Y}X + \text{ad}^{-1}Y(\text{ad}Y(X) - e^{-\text{ad}Y}\text{ad}Y(X)) \\ &= e^{-\text{ad}Y}X + X - e^{-\text{ad}Y}X = X = X(x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 5.1.5 den $X \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ olup,

$$\Phi(\tilde{X}) = (X(e), -dX_e) = (X, 0)$$

elde edilir. Buradan $\tilde{X}_x = dL_x(X)$ nin $\tilde{X}_e = X$ ve $\dot{x}(0) = \tilde{X}_x$ olacak şekilde sol-invariant vektör alanı olduğu sonucu çıkar. Bu da ilk iddiayı ispatlar.

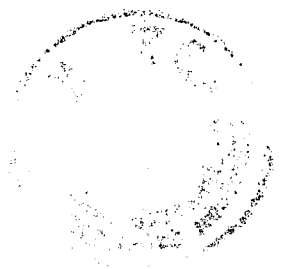
$\text{Expt}\phi$ ye karşılık gelen $\tilde{H}_1 \in \mathcal{X}(G_1)$ ve $\tilde{H} \in \mathcal{X}(G)$ vektör alanlarını gözönüne alalım. $x_1 \in G_1$ olsun ve $x_1 = \exp X$ için $x_1(t) = (\text{Expt}\phi)(x_1)$ olduğunu düşünelim. O takdirde (5.33) bağıntısı ve (Helgason, 1962) nin Teorem 1.7 si kullanılarak:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}(\text{Expt}\phi)(x_1) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}((\text{Expt}\phi)(\exp X)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \exp(e^t\phi(X)) = d\exp_X(\phi(X)) \\ &= (dL_{x_1})_e \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X}\right)(\phi(X)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde $\tilde{H}_1$ vektör alanına karşılık gelen $H_1 \in C^\infty(G_1)$ analitik fonksiyonu

$$H_1(\exp X) = H_1(x_1) = \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X}\right)(\phi(X)), \quad X \in L(G)$$

bağıntısını sağlar $((\tilde{H}_1)_{x_1} = \dot{x}_1(0))$.



$\tilde{F}_1 = \Phi^{-1}(0, -\phi)$ ye karşılık gelen F_1 analitik fonksiyonu (5.11) eşitliğini sağlar. Yani,

$$F_1(\exp X) = e^{-\text{ad}Y} F_1(e) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F_1) + [Y, F_1(e)])$$

dir. Burada $F_1(e) = 0$ ve $(dF_1)_e = \phi$ dir. Çünkü $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\Phi^{-1}(0, -\phi)) = (F_1(e), -(dF_1)_e) \Rightarrow (0, -\phi) = (F_1(e), -(dF_1)_e)$. Bu durumda F_1 aynı zamanda

$$F_1(\exp X) = \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) ((dF_1)_e(X)) = \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} \right) (\phi(X)), X \in L(G)$$

bağıntısını sağlar. Bu nedenle her $x_1 \in G$ için $F_1(x_1) = H(x_1)$ olup, bu da her $x_1 = \exp X \in G$ için $(\tilde{F}_1)_{x_1} = (\tilde{H}_1)_{x_1}$ olduğunu gerektirir. Oysa

$$d\pi_{x_1}(\tilde{F}_1)(x_1) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\pi \circ \gamma)(t)$$

olup, burada $\gamma(0) = x_1$ ve $\dot{\gamma}(0) = (\tilde{F}_1)_{x_1}$ dir. Dolayısıyla $\gamma(t) = (\text{Expt}\phi)(x_1)$ dir. Böylece

$$d\pi_{x_1}(\tilde{F}_1)(x_1) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \pi(\text{Expt}\phi(x_1)) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\text{Expt}\phi(\pi(x_1))) \quad (5.34)$$

bulunur. Teorem 5.1.17. den $\tilde{F}_1$ ya π -bağlı bir $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ vardır ve $\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\tilde{F}) = (0, -\phi)$ dir. Ayrıca (5.34) den $\text{Expt}\phi$ nin, $\tilde{F}$ ile birleşmiş G nin difeomorfizmlerinin bir parametrelili grubu olduğu sonucu çıkar. $\diamond$

$\iota : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow \text{norm}_{\mathcal{X}(G_1)}(L(G))$ tasviri $\iota(\tilde{F}) = \widetilde{\tilde{F} \circ \pi}$ şeklinde tanımlansın. O takdirde Teorem 5.1.16. dan ι nın Lie cebirlerinin bir bire-bir homomorfizmi olduğu ve

$$\begin{array}{ccc} \text{norm}_{\mathcal{X}(G_1)}(L(G)) & \longrightarrow & L(G) \otimes \partial(L(G)) \\ \iota \uparrow & & \uparrow \text{id} \\ \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) & \longrightarrow & L(G) \otimes \partial(L(G)) \end{array}$$

diagramının değişmeli olduğu sonucu çıkar.

5.1.19. Teorem: $\pi : G_1 \rightarrow G$ bağlantılı bir G Lie grubunun bir evrensel örtü homomorfizmi olsun. O takdirde Φ , $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ yi $L(G) \otimes \text{aut}(G)$ üzerine izomorfik olarak tasvir eder. Ayrıca eğer $i : L(G) \otimes \text{aut}(G) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ kapsama tasvirini gösterirse o zaman aşağıdaki değişmeli diagram elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} \text{norm}_{\mathcal{X}(G_1)}(L(G)) & \longrightarrow & L(G) \otimes \partial(L(G)) \\ \iota \uparrow & & \uparrow i \\ \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) & \longrightarrow & L(G) \otimes \text{aut}(G) \end{array}$$



İspat: Yukarıdaki açıklamadan $\text{aut}(G) \cong \partial(L(G))$ olup, teorem 5.1.16. dan $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \partial(L(G))$ nin bir bire-bir izomorfizm olduğu görülür. Dolayısıyla $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow L(G) \otimes \text{aut}(G)$ de bir bire-bir izomorfizmdir. Böylece geriye sadece

$$\Phi(\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))) \subset L(G) \otimes \text{aut}(G)$$

olduğunu göstermek kalıyor. Burada

$$\Phi(\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))) = \{(X, \phi) \mid (X, \phi) = \Phi(\tilde{F}), \tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))\}$$

dir. $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ ve $\Phi(\tilde{F}) = (E, \phi)$ olsun. O zaman $L(G) \otimes \text{aut}(G) \subset \Phi(\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)))$ dir. Gerçekten $(X, \phi) \in L(G) \otimes \text{aut}(G)$ olsun. O taktirde $\Phi(\tilde{X}) = (X, 0)$ ve $\Phi(\tilde{S}) = (0, -\phi)$ olacak şekilde $\tilde{X}, \tilde{S} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ vardır (Teorem 5.1.18.). Böylece

$$\Phi(\tilde{X} + \tilde{S}) = \Phi(\tilde{X}) + \Phi(\tilde{S}) = (X, -\phi) \in \Phi(\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)))$$

elde edilir. Yani $L(G) \otimes \text{aut}(G) \subset \Phi(\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)))$ dir. Dolayısıyla $\Phi(\tilde{F}) = (0, -\phi)$ olduğu kabul edilebilir. $\tilde{F}_1 = \iota(\tilde{F}) = \widetilde{F \circ \pi}$ olsun. Verilen bir $k \in K = \ker \pi$ için yine Teorem 5.1.18. den $x_1(t) = (\text{Expt}\phi)(k)$ nin k noktasından geçen $\tilde{F}_1$ in bir integral eğrisi olduğu biliniyor. Yani,

$$\Phi(\tilde{F}_1) = \Phi(\iota(\tilde{F})) = id(\Phi(\tilde{F})) = \Phi(\tilde{F}) = (0, \phi)$$

dir. Oysa $(\tilde{F}_1)_k = (dL_k)_e F_1(k) = (dL_k)_e F_1(e) = 0$ dir. Bu nedenle her $t \in \mathbb{R}$ için $x_1(t) = k$ dir. Böylece

$$e = \pi(x_1(t)) = \pi((\text{Expt}\phi)(k)), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dir. Yani her $t \in \mathbb{R}$ için $\text{Expt}\phi(k) \in K$ dir. Başka bir deyişle her $t \in \mathbb{R}$ için $\text{Exp}(t\phi) \in \text{Aut}(G)$ dir. Bu taktirde $\phi \in \text{aut}(G)$ dir. Böylece $\Phi(\tilde{F}) = (0, \phi)$ bulunur.



$Dif(G)$, G nin tüm difeomorfizmlerinin grubunu gösterebiliriz. $\alpha(x, \Gamma) = R_{x^{-1}} \circ \Gamma$ şeklinde tanımlı $\alpha : G \otimes \text{Aut}(G) \rightarrow Dif(G)$ tasvirini gözönüne alalım ve aşağıdaki diagramın değişimliliği gereği tanımlı tasvir $\text{Exp} : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) \rightarrow Dif(G)$ olsun:

$$\begin{array}{ccc} \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)) & \xrightarrow{\Phi} & L(G) \otimes \text{aut}(G) \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ Dif(G) & \xleftarrow{\alpha} & G \otimes \text{Aut}(G) \end{array}$$

Teorem 5.1.20. (i) $\alpha : G \otimes \text{Aut}(G) \rightarrow Dif(G)$ tasviri bir bire-bir grup homomorfizmidir.

(ii) $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ ile birleşmiş G nin difeomorfizmlerinin bir parametrelili $\tilde{F}_t$ grubu

$$\tilde{F}_t = \text{Exp}(-t\tilde{F})$$

şeklinde verilir. Burada $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ deki tüm vektör alanları tamdır. $\diamond$



6.0. KOMPAKT, BAĞLANTILI, ABELİEN OLMAYAN BİR LİE GRUBU ÜZERİNDE NORMALİZÖRLÜ LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

6.1. Homomorfizmler, Otomorfizmler ve Türevler

6.1.1. Tanımlar: G ve H iki Lie grubu olmak üzere $\Theta : G \rightarrow H$ tasvirine, eğer Θ, C^∞ ve her $a, b \in G$ için $\Theta(ab) = \Theta(a) \cdot \Theta(b)$ ise bir Lie grubu homomorfizmi adı verilir. G ve H nın Lie cebirlerini sırasıyla $L(G)$ ve $L(H)$ ile gösterelim. Bu taktirde Θ homomorfizmi $L(G)$ den $L(H)$ ye bir $C^\infty X_t$ eğrisi için

$$X = \left(\frac{d}{dt} X_t \right)_{t=0} \in L(G) \Rightarrow d\Theta X = \left(\frac{d}{dt} d\Theta X_t \right)_{t=0} \in L(H) \quad (6.1)$$

olacak şekilde bir $d\Theta$ lineer tasvirni üretir. Bu $d\Theta$ lineer tasvirine $d\Theta[X, Y] = [d\Theta X, d\Theta Y]$ ile birlikte bir Lie cebiri homomorfizmi denir. Lie grupları ve Lie cebirleri üzerinde izomorfizm ve otomorfizm kavramları bilinen yollarla elde edilir.

◇

6.1.2. Tanım: Bir $\Theta_t \in \text{Aut} L(G)$ eğrisi için $\Theta_0 = e$ olacak şekilde eğer

$$\Omega = \left(\frac{d}{dt} \Theta_t \right)_{t=0} \quad (6.2)$$

ise Ω ya $L(G)$ nin bir sonsuz küçük otomorfizmi denir.

◇

Bu tanımın simgesiyle $\Theta_t[X, Y] = [\Theta_t X, \Theta_t Y]$ yazılır. Böylece $t = 0$ da diferansiyel alınarak

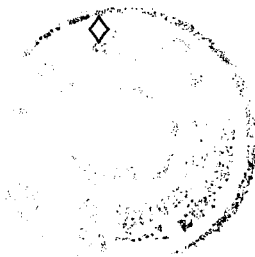
$$\Omega[X, Y] = [\Omega X, Y] + [X, \Omega Y]$$

elde edilir. Açıkça Ω lineerdir.

6.1.3. Tanım: Bir $\Omega : L(G) \rightarrow L(G)$ lineer tasvirine, eğer

$$\Omega[X, Y] = [\Omega X, Y] + [X, \Omega Y] \quad (6.3)$$

ise $L(G)$ nin bir türevi adı verilir.



6.1.4. Önerme: Bir $L(G)$ Lie cebirinin türev ve sonsuz küçük otomorfizm kavramları çıkarılır. Eğer Ω bir türev ise, o zaman $\exp \Omega$ bir otomorfizmdir.

İspat: Ω , $L(G)$ nin bir türevi olsun. $Z_t = [(\exp t\Omega)X, (\exp t\Omega)Y]$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_t &= [\Omega(\exp t\Omega)X, (\exp t\Omega)Y] + [(\exp t\Omega)X, \Omega(\exp t\Omega)Y] \\ &= \Omega[(\exp t\Omega)X, (\exp t\Omega)Y] \\ &= \Omega Z_t \end{aligned} \quad (6.4)$$

elde edilir.

$$\frac{d}{dt} Z_t = \Omega Z_t, \quad Z_0 = [X, Y] \quad (6.5)$$

diferansiyel denklemi tek

$$Z_t = (\exp t\Omega)[X, Y] \quad (6.6)$$

çözümünü kabul eder. Bu da $\exp t\Omega \in \text{Aut } L(G)$ olduğunu ispatlar.

$$\left(\frac{d}{dt} \exp t\Omega \right)_{t=0} = \Omega \quad (6.7)$$

olduğundan, Ω bir sonsuz küçük otomorfizmdir. $\diamond$

6.1.5 Önerme: Bir $L(G)$ Lie cebirinin türevleri lineer bir Lie cebiri oluşturur.

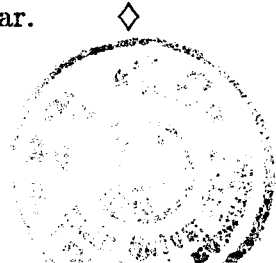
İspat: Bu türevlerin lineer bir uzay oluşturdıkları açıktır. Ω_1, Ω_2 , $L(G)$ nin iki türevi olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \Omega_1 \Omega_2 [X, Y] &= [\Omega_1 \Omega_2 X, Y] + [\Omega_1 X, \Omega_2 Y] + \\ &\quad + [\Omega_2 X, \Omega_1 Y] + [X, \Omega_1 \Omega_2 Y] \end{aligned} \quad (6.8)$$

olup

$$\begin{aligned} [\Omega_1, \Omega_2][X, Y] &= \Omega_1 \Omega_2 [X, Y] - \Omega_2 \Omega_1 [X, Y] \\ &= [(\Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1)X, Y] + [X, (\Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1)Y] \\ &= [[\Omega_1, \Omega_2]X, Y] + [X, [\Omega_1, \Omega_2]Y] \end{aligned} \quad (6.9)$$

elde edilir. Bu da $[\Omega_1, \Omega_2]$ nin yine $L(G)$ nin bir türevi olduğunu ispatlar. $\diamond$



6.2. Kontrol Edilebilirlik

G kompakt, bağlantılı, Abelian olmayan bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olsun. $\Sigma = (G, D)$ sistemini gözönüne alalım. D dinamiği

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(x) \quad (6.10)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesinden oluşur. Burada $x \in G$, X ise G üzerindeki tüm düz vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebiri içinde $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünün bir elemanı ve $j = 1, \dots, k$ için $Y^j \in L(G)$ dir. $L(G)$ Lie cebirini yine sol invariant vektör alanlarının kümesi olarak alıyoruz. Kısıtlanmayan kabul edilebilir (admissible) kontrollerin U sınıfı tüm parçalı sabit $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ fonksiyonların kümesidir. D , Σ ile birleşmiş vektör alanlarının ailesidir. Yani

$$D = \{X + \sum_{j=1}^k u_j Y^j \mid X \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G)), Y^j \in L(G) \text{ ve } u_j \in U\} \quad (6.11)$$

dır. X e G nin sonsuz küçük otomorfizmi diyeceğiz ve X vasıtasıyla üretilmiş $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ akışı $\text{Aut}(G)$ nin 1-parametrelili bir altgrubudur.

Σ sisteminin D dinamiğinin elemanları G üzerindeki global difeomorfizmlerin

$$G_\Sigma = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_\nu}^\nu \mid \varphi^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}\} \quad (6.12)$$

grubunu ve

$$S_\Sigma = \{\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_\nu}^\nu \mid \varphi^j \in D, t_j \geq 0, \nu \in \mathbb{N}\} \quad (6.13)$$

yarı grubunu üretir.

6.2.1 Tanım: $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemine

a) eğer $\forall x \in G$ için $S_\Sigma = G$ ise kontrol edilebilirdir,

b) eğer $\forall x \in G$ için $G_\Sigma = G$ ise geçişlidir denir. $\diamond$

Rank koşulunun sağlanması demek Σ nın geçişli olması demektir. Yani, G_Σ grubu G üzerinde geçişli olarak etkir.



6.2.2 Tanım: Bir ω ölçümüne G Lie grubu üzerinde integre edilebilir her f fonksiyonu için eğer

$$\int f(gh)\omega = \int f(h)\omega \quad (6.14)$$

ise sol invarianttır denir. Burada $g, h \in G$ dir. Benzer şekilde ω ölçümüne eğer

$$\int f(hg)\omega = \int f(h)\omega \quad (6.15)$$

ise sağ invarianttır denir. $\diamond$

Herhangi bir yerel kompakt Lie grubu üzerinde tek-tarafli invariant ölçüm vardır (Haar ölçüm) ve eğer Lie grubu kompakt ise iki-tarafli invariant ölçüm vardır, [Hausner et al, 1968].

6.2.3. Tanım: G bir Lie grubu olsun: Bir X vektör alanı, eğer G üzerindeki doğal ölçüm onunla birleştirilmiş dinamik sistemin etkisi altında invariant ise bir konservativ vektör alanı adını alır. $\diamond$

6.2.4. Teorem: G kompakt, bağlantılı bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde D dinamiği ile birleşmiş vektör alanları konservativdir.

İspat: Σ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olduğundan, D dinamiği

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(x) \quad (6.16)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesinden oluşur. Burada $X, L(G)$ nin $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ normalizörünün bir elemanı ve $j = 1, 2, \dots, k$ için $Y^j \in L(G)$ dir. Teorem 5.1.16. gereği $X \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(L(G))$ yerine $(W, Y^0) \in \partial(L(G)) \otimes L(G)$ elemanını alabiliriz. Bu durumda $u_j = 1$ sabit kontrolü için D dinamiği

$$D = \{W + \sum_{j=0}^k Y^j \mid W \in \partial(L(G)), Y^j \in L(G)\} \quad (6.17)$$

formuna indirgenir. D nin sağ tarafının toplam kısmı sol invariant vektör alanlarından oluştuğundan, kendisi de sol invarianttır. G kompakt olduğundan, yukarıdaki açıklamadan dolayı bu toplam sol ölçüm invarianttır. W , tanım 6.1.3. ile verilen

$L(G)$ den kendisi içine sol invariantlığı koruyan bir lineer tasvir olduğundan, sol ölçüm invariantlığıda korur. Böylece D dinamiği konservativ vektör alanlarından oluşur. $\diamond$

Aşağıdaki iyi bilinen teorem, teorem 6.2.6. nın ispatında temel olacaktır.

6.2.5. Teorem (Poincare): Bir konservativ vektör alanı vasıtasıyla üretilmiş bir dinamik sistemin Poisson sabit (Poisson stable) noktaları yoğundur. $\diamond$

Bir x noktasının ancak ve ancak x in her N_x komşuluğu ve her pozitif t sayısı için $X_{t_1}(x)$ ve $X_{t_2}(x)$, N_x içinde olacak şekilde t den büyük t_1 ve t_2 varsa Poisson sabit olduğunu hatırlatalım.

6.2.6. Teorem: G Abelian olmayan, bağlantılı, kompakt bir Lie grubu olmak üzere $\Sigma = (G, D)$ normalizörlü bir lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde Σ geçişlidir $\Leftrightarrow \Sigma$ kontrol edilebilirdir.

İspat:

($\Leftarrow$): Σ kontrol edilebilir ise tanımdan dolayı sistemin geçişliliği aşıkardır.

($\Rightarrow$): $x, y \in G$ için

$$y = \varphi_{t_p}^p \circ \dots \circ \varphi_{t_j}^j \circ \dots \varphi_{t_1}^1(x) \quad (6.18)$$

olacak şekilde $i \in \mathbb{N}$, $t_i \in \mathbb{R}^+$ sayılarının var olduğunu göstereceğiz. Sistem geçişli ise G deki her x noktası için $S_\Sigma^+(x)$ pozitif yörüngesinin iç noktaları pozitif yörünge içinde yoğundur teoremi (Lobry, 1972), eğer $S_\Sigma^+(x)$ $S_\Sigma^-(x)$ ile yer değiştirirse yine doğrudur. $\bar{y}$, $S_\Sigma^-(y)$ nin bir iç noktası ve $N_{\bar{y}} \subset S_\Sigma^-(y)$ olacak şekilde $\bar{y}$ nin bir komşuluğu olsun. Sistem geçişli olduğundan

$$\bar{y} = \varphi_{s_p}^p \circ \dots \circ \varphi_{s_j}^j \circ \dots \varphi_{s_1}^1(x) \quad (6.19)$$

olacak şekilde $s_j \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ vardır. Kolay olması amacıyla

$$\bar{y} = \varphi_{s_2}^2 \circ \varphi_{s_1}^1(x) \quad (6.20)$$

olsun. Burada s_1 pozitif ve s_2 de negatiftir. $g = \varphi_{s_1}^1(x)$ olsun. O takdirde

$$N_g = \varphi_{-s_2}^2(N_{\bar{y}}) \quad (6.21)$$



kümesi g nin bir komşuluğudur ve $S_{\Sigma}^{+}(x)$ ile arakesiti boş değildir. Böylece N_g , φ^2 için Poisson sabit olan bir z noktası içerir. $N_z \subset N_g \cap S_{\Sigma}^{+}(x)$ olacak şekilde z nin bir komşuluğu olsun. Poisson sabit noktanın tanımından φ_t^2 noktası N_z ye ait olacak şekilde $|s_2|$ den daha büyük bir s reel sayısı vardır. O zaman

- (i) $s + s_2$ sayısı pozitifdir,
- (ii) $\varphi_{s+s_2}^2(z)$ noktası N_g ye aittir.

y noktası $S_{\Sigma}^{-}(y)$ de herhangi bir noktanın pozitif yörüngesi içindedir. Böylece y , $S_{\Sigma}^{+}\varphi_{s+s_2}^2(z)$ ye aittir. Bu da teoremin gereklilik kısmını ispatlar. $\diamond$

6.2.7. Örnek: $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$SO(3) = \{A \in O(3) \mid \det A = 1\} \quad (6.22)$$

dönel Lie grubunu gözönüne alalım. Burada $O(3)$ her $x, y \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad (6.23)$$

olacak şekilde tüm $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tasvirlerinden oluşan yada buna eşdeğer olarak

$$O(3) = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\} \quad (6.24)$$

şeklinde tanımlı ortogonal gruptur. $SO(3)$ de determinanı 1 olan

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\text{ve } \phi_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonal dönüşümlerini göz önüne alalım. Açıkça her $t \in \mathbb{R}$ için $SO(3)$ de bir nokta vardır ve o taktirde $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$

$$\phi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad \dot{\phi}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Y^1 \in T_e(SO(3))$$

$$\phi_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad \dot{\phi}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y^2 \in T_e(SO(3))$$



ve

$$\phi_3(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \quad \dot{\phi}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y^3 \in T_e(SO(3))$$

olacak şekilde $SO(3)$ üzerinde eğrilerdir. Burada

$$\begin{aligned} T_e(SO(3)) \cong \mathfrak{L}(SO(3)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

olup,

$$[Y^1, Y^2] = -Y^3, \quad [Y^1, Y^3] = Y^2 \quad \text{ve} \quad [Y^2, Y^3] = -Y^1 \quad (6.26)$$

olduğundan

$$L(SO(3)) = \text{geren}_{L.A.}\{Y^1, Y^2\} = \text{geren}_{L.A.}\{Y^1, Y^3\} = \text{geren}_{L.A.}\{Y^2, Y^3\} \quad (6.27)$$

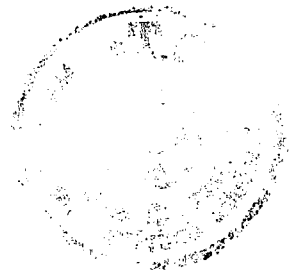
elde edilir.

$$\Sigma: \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad X \in SO(3) \quad (6.28)$$

şeklinde tanımlı Σ kontrol sistemini gözönüne alalım. Σ kompakt $SO(3)$ Lie grubu üzerinde bir önceki teoremin koşullarını sağlayan bir kontrol sistemidir. Bu durumda

$$S_\Sigma(Id) = G_\Sigma(Id) = SO(3) \quad (6.29)$$

elde edilir. Yani sistem kontrol edilebilirdir.



SONUÇ

Bu tez çalışmasında matematiksel bakış açısından sistemlerin özel bir sınıfı için bir kontrol edilebilirlik sonucu olan kompakt, bağlantılı ve Abelian olmayan bir Lie grubu üzerinde normalizörlü lineer kontrol sistemlerin kontroledilebilirlik problemini çözmeye çalıştık.

Beş bölümden oluşan bu çalışmada ilk bölümde Lie grupları ve Lie cebirleri teorisi ele alınmış olup, ikinci bölümde kontrol teori hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemlerin geçişliliği ve kontrol edilebilirliği incelenmiştir. Dördüncü bölümde bir G Lie grubu üzerindeki tüm düz vektör alanlarının $\mathcal{X}(G)$ Lie cebirindeki G nin $L(G)$ Lie cebirinin normalizörünü gözden geçiriyoruz (Ayala et al, 1994). Son bölümde de yukarıda sözü edilen problemin çözümünü gösterdik.

Sonuç olarak bir Lie grubu üzerinde bir kontrol sisteminin kontrol edilebilirliği G (Lie grubu), $x \in G$ ve D (sistemin dinamiği) üzerine konulan koşullara bağlıdır. Burada kontrol edilebilirlik, G nin kompakt, bağlantılı ve Abelian olmayan bir Lie grubu olarak alınmasıyla ve D dinamiğinin de konservatif vektör alanları vasıtasıyla üretilmiş olamıyla elde edilmiştir. Son bölümde elde ettiğimiz sonuçlar orijinal olup, kontrol teoriye yaptığı katkıyı oluşturmaktadır.



KAYNAKLAR

Ayala, V., 1994. "Controlability of Nilpotent Systems", Banach Center Publication.

Ayala, V., and Tirao, J., 1994. "Controllability of Linear Vector Fields on Lie Groups". Pre-print No IC/94/310, International Centre for Theoretical Physics.

Agrachev, A., A., Gamkrelidze, R., V., and Sarychev, A., V., 1989. "Local Invariants of Smooth Control Systems", Acta Applicandae Mathematicae 14 , 191-237.

Beardon, A., 1985. "Geometry of Discrete Groups", Springer Verlag.

Bonnard, B., Jurdjevic, V., Kupka, I., and Sallet, G., 1982. "Controlabilite sur le produit semi-direct d'un groupe compact par un E.V. reel", Trans. Am. Math. Soc.

Brockett, R., 1972. " Systems theory on group manifolds and cosets spaces", Siam Journal Control 10, pp. 265-284.

Chevalley, C., 1951. "Theorie des groupes de Lie", Paris, Hermann, 55.

Conlon, L., 1993. "Differentiable Manifolds: A first course", Birkhauser Pub.

Hausner, M., and Schwartz, J.,T., 1968. "Lie Groups, Lie Algebras", New York, London, Paris.

Hacıbekiroğlu, A., K., 1994. "A controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups", ICTP.

Helgason, S., 1962. "Differential Geometry and Symmetric Spaces", Academic Press.



Isidori, A., 1989. "Nonlinear Control Systems", Springer Verlag.

Jurdjevic, V. and Kupka, I., 1981. "Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces", Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31, 4, pp. 151-179.

Kalman, R., Ho, Y., Narendra, K., 1963. "Controllability of linear dynamical systems", Contrib. to Diff. Equations 1 (2), pp. 189-213.

Kalman, R., 1968. "Lectures on Controllability and Observability", Lecture Notes CIME.

Kupka, I., 1987. "Introduction to The Theory of Systems", 16 coloquio Brasileiro de Matematica.

Lobry, C., 1972. "Quelques aspects qualitatifs de la theorie de la commande", These Sciencess Math., Grenoble.

Markus, L., 1980. "Controllability of multi-trajectories on Lie groups" Proceedings of Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, Lecture Notes in Mathematics 898, pp. 250-265.

Molher, 1973. "Bilinear Control Processes", Mathematics in Science and Engineering, Vol. 106, Ac. Press New York and London,

San Martin, L., and Crouch, P., 1984. "Controllability on Principle fibre bundle with compact structure group", Systems and Control letters 5, pp. 35-40.

Sussmann, H., and Jurdevic, V., 1972. "Control Systems on Lie Groups", Journal of Differential Equations 12, pp. 313-329.

Susmann, H., 1973. "Orbits of families of vector fields and integrability of distributions", transactions of the American Mathematical Society.



Varadarajan, V., 1974. "Lie groups, Lie algebras and their Representations",
Prentice Hall, Inc.

Warner, F., 1971. "Foundations of differentiable Manifolds on Lie groups",
Scott Foreman and Company, Glenview Illinois.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erdal Gül
Doğum Tarihi : 20.09.1969
Doğum Yeri : Kelkit
İlk Öğretim : 1975-1980 Obalar İlk Okulu
Orta Öğretim : 1980-1983 Ulalar Orta Okulu
Lise Öğretimi : 1983-1986 Sarıyer V. K. V. Lisesi
Lisans Öğretimi : 1986-1990 Yıldız Teknik Üniversitesi,
Fen- Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğretimi : 1990-1992 Y. T. Ü.,
Fen Bilimleri Enstitüsü
ICTP Diploma Kursu Programı : 1994-1995 Uluslararası Teorik Fizik
Merkezi, Trieste-İtalya
Göreve Başlama : 1991 Y. T. Ü., Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Topoloji Anabilim Dalında
Araştırma Görevlisi
Doktora Öğretimi : 1992 Y. T. Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü

