YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY MANTIKTA YAKLAŞIK USAVURMA VE BİR PROBLEME UYGULANMASI

Erdoğan Mehmet ÖZKAN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 30 Temmuz 1998
Tez Danışmanı : Prof. Yavuz AKSOY (YTÜ)
Jüri üyeleri : Prof.Dr. Hülya ŞENKON (İÜ)
: Doç.Dr. İsmail Hakkı ARMUTLULU (MÜ)

İSTANBUL, 1998

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Yavuz AKSOY'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca yapmış olduğu desteklerden dolayı sayın Y.Doç.Dr Fatih TAŞÇI'ya ve Y.Doç.Dr. İbrahim EMİROĞLU'na da teşekkür ederim.

ÖZET

Fuzzy mantık ile ilgili çalışmalar son on yıl içinde büyük ivme kazanmıştır. Matematik ve mantıkta ileri giden ülkelerin çoğunda, bu alandaki çalışmaların çeşitliliği dikkat çekicidir. Bu çalışma da, bu çeşitliliğe bu alanda bir katkıda bulunmaktadır.

Fuzzy çıkarım, Yaklaşık Usavurma içinde incelenen bir konudur. Bu usavurmada bazı kriterler kullanılır. Keskin (İki değerli) mantığın temel ilkeleri geçerli olarak, çok değerli mantığa ve oradan Fuzzy mantığa geçiş sağlanır. Keskin mantıkta kullanılan $\vee, \wedge, \underline{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ gibi bağlaçlar (operatörler) yardımıyla yapılan tanımlar için temel işlemler, Kümeler Kuramının ikili işlemlerine koşut olarak gerçekleştirilir. Bu işlemler sırasında izomorfik bir yaklaşımla $\cap$ ve $\cup$ ile $\wedge$ ve $\vee$ arasında sıkı bir benzerlik ilişkisi kurulur.

Bu çalışmada, bu bağlaçlardan farklı olarak $\underline{\vee}$ (Ya Da lı bileşim) için Yaklaşık Usavurmada kullanılan kriterlerden bazıları için elde edilen sonuçlar tartışılmaktadır.

SUMMARY

Studies on Fuzzy Logic have gained speed over the last ten years. And works on the above mentioned subject is notable. In this study our aim is to contribute to this field. The fuzzy inference is a subject belonging to approximate reasoning. In the approximate reasoning some certain criteria is used. We are able to move multi-valued logic then fuzzy logic by considering the principles of two-valued logic.

Basic operations for the definition made used the relations, $\vee, \wedge, \underline{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ in two valued logic are parallel two the binary operations given on the set theory. In these operations using isomorphic approximation we establish similarity by replacing $\cap$, $\cup$ with $\wedge$, $\vee$ respectively.

In this study, unlike the operators given above we obtain results for the operator $\underline{\vee}$ used in the approximate reasoning.

1. FUZZY KÜMELER

1.1 Giriş

Bazı araştırmacılar ve pragmatik düşünenler, gelişmiş sistemler yapmaya çaba sarfettikleri zaman, bilimdeki belirsizliği tartışmak ile uğraşmaktadırlar. Belirsizlik hakkında daha fazla şeyler öğrendikçe rastlantıların tek formda olmadığı anlaşılır. 1963 yılının başlarında L.A. Zadeh, belirsizliğin temsili için araç olarak Fuzzy Kümeler teorisini geliştirmiş ve bu, bilim dünyası için adeta bir dönüm noktası olmuştur.

Genelde ve özel olarak geçmişte belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler kuramı ile tanımlanmışlardır. Bunun yanı sıra son yıllarda gelişen Fuzzy Kümeler kuramı ise belirsizlik ifade eden terimler ve kavramların gelişigüzel bir ayırıma tutulmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak çok değerli kümeler kuramı ve kapsamı içinde tanımlanmalarına yol açar.

Bu bölümde Zadeh tarafında geliştirilen Fuzzy Kümeler teorisi temel alınmıştır. Fuzzy kümelerin amacı belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç ve anlamı zor kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmektir. Belirlilik getirme yaklaşımı iki değerli kümeler kuramının, çok değerli kümeler kuramına dönüşümünden doğar. [1]

1.2 Klasik (Keskin Kümeler) Teorisi

Kümenin tam ve kesin olmayan tanımını yapmak hemen hemen olanaksızdır. Matematikte küme, bazı kavramların algılanmasında olduğu gibi, ancak sezgi erki ile anlaşılabilir ve açıklanabilir. Yani bir bakıma tanımsız bir kavramdır. Buna karşın bazı tanımlarda yapılmıştır. Bir küme için " iyi tanımlanmış nesneler topluluğu "[2] gibi bir tanım yapmak, çalışmamız için yeterli olacaktır.

---

[1] TÜRKŞEN, İbrahim, "Bulanık Kümeler Kuramı ve Uygulamaları", *Yöneylem Araştırması Dergisi*, 1985, Cilt 4, Sayı 1, Sayfa 1

[2] AKSOY, Yavuz, *Modern Mantık*, YTÜ yayınları, 1995, İstanbul. Sayfa 113-115

Bu bölümde, çalışmamızda katkıda bulunacak bazı tanımlar ve işlemler kısaca verilmiştir.

1.2.1 Tanım (Karakteristik Fonksiyon)[3]

E evrenindeki bir A alt kümesine ait, tüm $x \in E$ değerleri için karakteristik fonksiyon

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & ancak\ ve\ ancak\ x \in A \\ 0, & ancak\ ve\ ancak\ x \notin A \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada 1 A kümesine ait olan, 0 ise A kümesine ait olmayan elemanı gösterir.

Daha kısa bir şekilde

$$\mu_A : E \to \{0,1\}$$

olarak ta gösterilebilir.

Örneğin $E=\{1,2,3,4\}$ olsun. $A=\{3,4\} \subset E$ ele alalım

$$\begin{array}{ll} \mu_A(1)=0 & 1 \notin A \\ \mu_A(2)=0 & 2 \notin A \\ \mu_A(3)=1 & 3 \in A \\ \mu_A(4)=1 & 4 \in A \end{array}$$

Böylece E nin her elemanının karakteristik fonksiyon yardımı ile hangisinin A kümesinde, hangisin A kümesi dışında olduğu anlaşılır.

1.2.2 Tanım (Temel İşlemler)[4]

E evrenindeki A ve B gibi iki alt kümenin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye kesişim kümesi denir ve

---

[3] KLIR G., FOLGER T., *Fuzzy Sets, Uncertainity and Information.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1988. sayfa.6

[4] AKSOY, Yavuz, a.g.e,1995, Sayfa 113-115

$$A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

A ve B kümelerinin hiçbir elemanı ortak değilse yani $A \cap B = \varnothing$ ise A ve B ye ayrık kümeler denir.

Yine A ve B gibi iki alt kümenin ortak olan veya olmayan bütün elemanlarının birlikte oluşturdukları bir kümeye birleşim kümesi denir ve

$$A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

E evrenindeki A alt kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A nın tümleyeni (bütünleri) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

1.2.3 Tanım (İşlemin Temel Özellikleri)[5]

Verilen tanımlara ait temel özellikleri aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.
A, B, C; E evreninde, üç alt küme olmak üzere;

[5] Yavuz AKSOY, a.g.e.., 1995, Sayfa 113-115

$A \cap A = A$; $A \cup A = A$ (Denk güçlü özl.)

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (Değişme özl.)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Birleşme özl.)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Dağılma özl.)

$A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap E = A$

$A \cup \varnothing = A$; $A \cup E = E$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$; $A \cup \overline{A} = E$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (De Morgan Kanunları)

dir.

1.3 Fuzzy Kümelere Giriş

Önce karakteristik fonksiyonu tekrar hatırlayalım. Keskin bir kümenin karakteristik fonksiyonu, evrensel kümenin herbir elemanına 1 veya 0 üyelik değerlerini atar. Bu suretle bu elemanların keskin kümenin elemanı olup olmadığı anlaşılır.

X evreninde $A \subset X$ olsun.

$$\forall x \in X \textit{ için } \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases} \quad ; \quad \mu_A : X \to \{0,1\}$$

dır.

Başlı başına elemanların doğası hakkında göz önüne alınmış ya da kabul edilmiş bir özellik yoktur. Örneğin X kümesini uzun caddelerin kümesi olarak tanımlayalım. Şimdi " Uzun caddelerin sınıfı nedir? ". Hepsinden önce bu küme alışılmış durumdaki bir küme midir? Yanıtlamadan önce "Ne kadar uzunlukta bir caddedir? Bir km uzunluğunda mı? Eğer öyleyse, yarım km cadde ile bir km cadde arasında fark var mıdır?" v.b.gibi sorularını sorabiliriz. Açıkça "uzun cadde" bilgisinden yola çıkarak tüm bu soruları nasıl yanıtlayacağımızı bilemeyiz. Çünkü uzun caddelerin sınıfı, genel durumdaki bir kümeyi oluşturmaz. Gerçekten de reel dünyada karşılaşılan elemanların sınıflarının çoğu tam tanımlanmamış tiptedir. Böyle sınıflarda, bir sınıfa ait olmak ya da olmamak bir eleman için gereksizdir, üyelerin ara dereceleri olmalıdır.

Yukarıda tanımını verdiğimiz fonksiyon, evrensel kümenin elemanlarına değerler atayacak ve bu elemanların üyelik derecelerini gösterecek şekilde genelleştirilebilir. Eğer bu değerlendirme kümesi $\{0,1\}$ yerine $[0,1]$ gerçek aralığı olarak alınırsa, o zaman A bir fuzzy küme olarak tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$, x in A daki üyelik derecesini gösteren bir üyelik fonksiyonudur. $\mu_A(x)$ in değeri 1' e yaklaştıkça x elemanının A alt kümesindeki üyeliği artar.[6]

Fuzzy küme teorisi, soyut küme teorisinin bir genelleştirmesidir. Yani fuzzy küme teorisindeki tanımlar, teoremler ve ispatlar fuzzy olmayan kümeler için de daima doğrudur.[6]

Bir fuzzy küme olası kısmi sıralı elemanlardan oluşan bir kümedir. Yani X evrenindeki bir A fuzzy küme

$$A=\{[x,\mu_A(x)],x\in X\} \quad ; \quad \mu_A : X \to [0,1]$$

olarak gösterilir[7] . $\mu_A(x)$,$[0,1]$ aralığında bir sayıdır.

Fuzzy kümeler belirlilik derecesi ya hep ya hiç kavramının ötesinde daha farklı bir görüşten ortaya çıkar. Çoğunlukla günlük hayatta kesin sayılar ve ifadeler yerine, sınırları "bulanık" sayılar, ifadeler ve nesne sınıfları kullanılır.Keskin kümeler ve fuzzy kümelerin farkını ortaya çıkarabilmek için örnek olarak yaşlı kavramını ele alıp bu iki kümeyi karşılaştırmak suretiyle inceleyelim.

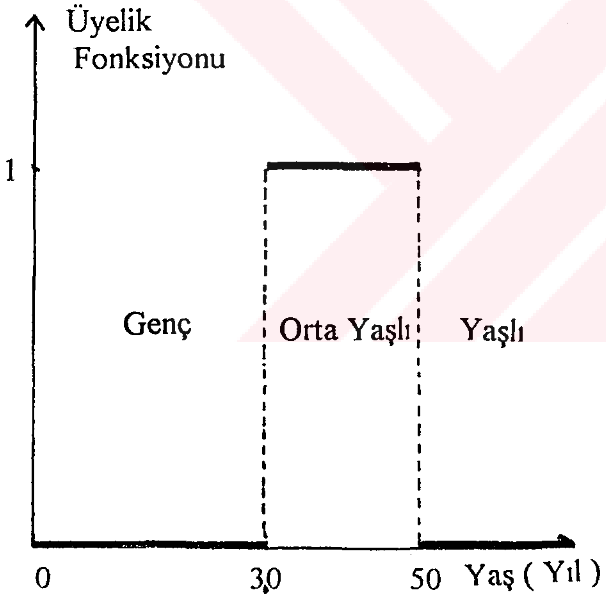
---

[6] ZADEH, L., " Fuzzy Sets", *Informatıon and Control*, 1963, Vol.8, sayfa .338 - 353

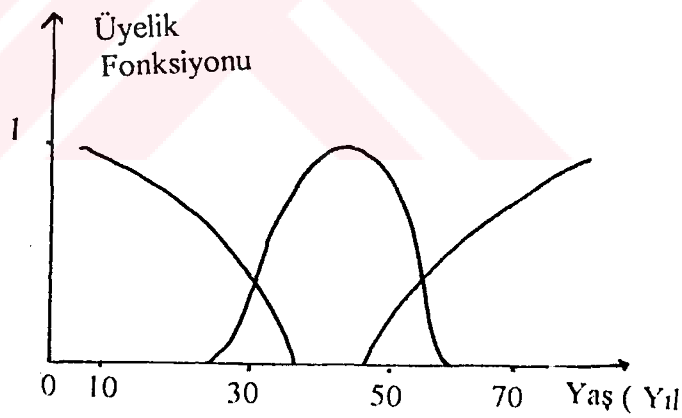
[7] KANDEL, A., *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications.* Addison-Wesley. 1986.sayfa .3

Eğer 40 yaşı orta yaş olarak kabul edersek, keskin kümelerde 30 yaşın altındakiler " genç ", 30-50 yaş arası " orta yaşlı ", 50 yaşı üstü de " yaşlı " kümelerine sokulabilir. Dolayısıyla 29.5 yaşındaki biri " genç " iken 30.5 yaşındaki diğer kişi " orta yaşlı " olarak anılacaktır. 35 yaşındaki bir insana pek orta yaşlı denemeyeceği gibi o kişi pek de genç sayılmaz. Bu kişiyi hem genç hem de orta yaşlı düşünmek isteyebiliriz. Fuzzy kümeler bu düşünüşü olanaklı kılar. Kümelerin keskin çizgilerle ayrılmamış olması, aralarında belli bir örtüşüm olması, 35 yaşın ham orta yaşlı ham genç düşünülmesine olanak tanır.[8]

Bu kıyaslamayı şekil üzerinde gösterirsek, Şekil 1.3.1 ve 1.3.2 de kullanılan eğriler üyelik fonksiyonları olmak üzere x eksenindeki elemanlar, 0 ile 1 aralığında bir ağırlığa sahiptirler. Üyelik ağırlığı, güvenilirliğin veya eminliğin bir işaretidir. Üyelik fonksiyonları ise Şekil 1.3.3 de gösterildiği gibi üçgen , çan veya yamuk şeklindedirler.[8]

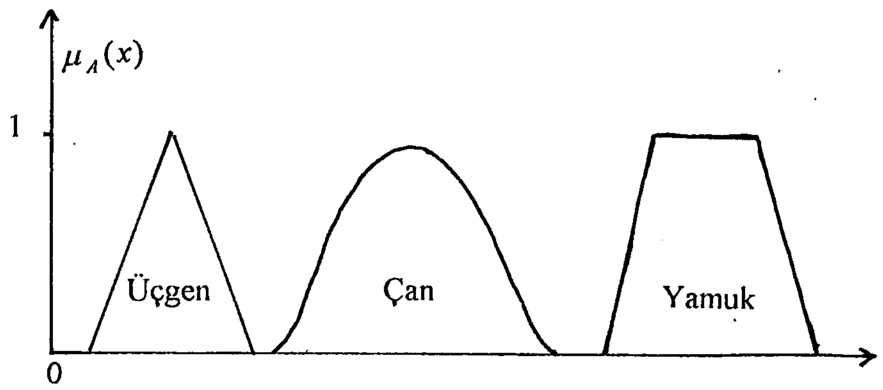


Şekil 1.3.1 Keskin Kümeler



Şekil 1.3.2 Fuzzy Kümeler

[8] KAYNAK, O.,. "Bulanık Denetim ve Uygulamaları", *Şişe Cam Semineri.* 1992, Sayfa 1-14



Şekil 1.3.3 Çeşitli Biçimde Üyelik Fonksiyonları

1.3.1 Tanım[9]

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sonlu bir küme olsun. X in bir fuzzy kümesi şöyle ifade edilir.

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

1.3.2 Tanım[9]

Eğer X kümesi sonlu değilse, buna ait fuzzy küme de şöyle ifade edilir.

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

1.3.3 Tanım[10]

X evreninde bir A fuzzy kümesinin desteği, keskin bir kümedir ve A da sıfırdan farklı üyelik değerlerine sahip elemanları gösterir.

$$Supp\,A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

---

[9] ZADEH, L., "Fuzzy Set Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges", *I.Cybern.2*, 1972 sayfa 4-34

[10] KLIR, G., FOLGER, T., a.g.e. 1988. sayfa.14-21

1.3.4 Tanım[11]

Bir fuzzy kümenin yüksekliği, bu kümenin herhangi bir elemanının alabildiği en büyük üyelik değeridir.

1.3.5 Tanım[11]

Bir fuzzy kümede en az bir eleman 1 üyelik değerine sahipse (ya da yüksekliği 1 ise), bu fuzzy kümeye "normal fuzzy küme" denir.

Bu çalışmamızda aksi belirtilmedikçe alınan tüm fuzzy kümeler normal fuzzy kümeler olarak kabul edilmiştir.

1.3.6 Tanım[11]

Bir A fuzzy kümesinin α kesiti, keskin bir kümedir. Bir α özel değerinden büyük ya da eşit olacak şekilde A da bir üyelik değerine sahip elemanları içerir. Bu ise

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

ile ifade edilir.

1.4 Fuzzy Kuramsal Küme İşlemleri

1.4.1

A ve B, X in fuzzy alt kümeleri olsunlar. Buna göre aşağıdaki işlemler tanımlanabilecektir.

1.4.1-1[12]

Ancak ve ancak

$$\int_X \mu_A(x)/x = \int_X \mu_B(x)/x \quad \text{ya da} \quad \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ise $A = B$ dir.

[11] KLIR,G. FOLGER, T., a.g.e., 1988. Sayfa .14-21

[12] ZADEH,L., a.g.e. 1963, sayfa .338 - 353

1.4.1-2[13]

Ancak ve ancak

$$\int_X \mu_A(x)/x \leq \int_X \mu_B(x)/x \quad \text{ise} \quad A \subseteq B \text{ dir.}$$

1.4.1-3[13]

$\vee$ maksimum işareti olmak üzere, A ile B nin bileşimi

$$A \cup B = \int_X [\mu_A(x) \vee \mu_B(x)]/x$$

ile tanımlanır.

1.4.1-4[13]

$\wedge$ minimum işareti olmak üzere, A ile B nin kesişimi

$$A \cap B = \int_X [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)]/x$$

ile tanımlanır.

1.4.1-5[13]

A fuzzy kümesinin tümleyeni

$$\overline{A} = \int_X [1 - \mu_A(x)]/x \quad \text{ya da} \quad \forall x \in X \text{ için} \quad \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \text{dir.}$$

ile tanımlanır.

1.4.1-6[13]

İki fuzzy kümenin çarpımı

$$A.B = \int_X \mu_A(x).\,\mu_B(x)/x$$

ile tanımlanır.

---

[13] ZADEH,L.,a.g.e. 1963, sayfa 338 - 353

1.4.1-7[14]

α herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$A^{\alpha} = \int_X (\mu_A(x))^{\alpha} / x$$

dir.

Özel olarak yoğunlaşma işlemi

$$\mathrm{CON}(A) = A^2 \ ; \ (\alpha = 2)$$

Genişleme işlemi

$$\mathrm{DIL}(A) = A^{0.5} \ ; \ (\alpha = 0.5)$$

ile gösterilir.

1.4.1-8[14]

A ve B nin sınırlı toplamı

$$A \oplus B = \int_X \left[1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(x))\right] / x$$

ile tanımlanır.

1.4.1-9[14]

A ve B nin sınırlı farkı

$$A \Theta B = \int_X \left[0 \vee (\mu_A(x) - \mu_B(x))\right] / x$$

ile tanımlanır.

1.4.1-10[14]

A ve B nin sınırlı çarpımı

$$A \otimes B = \int_X \left[0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)\right] / x$$

ile tanımlanır.

[14] ZADEH,L. "Calculus of Fuzzy Restriction". *Fuzzy Sets and their applications to Cognitive and Decision Processes.* 1975. Sayfa 1-39

Fuzzy kuramsal küme işlemlerini basit bir örnek üzerinde inceleyelim:

1.4.2 Örnek

$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ evreninde verilmiş iki fuzzy küme

$$A = 0.8/3 + 1/5 + 0.6/6$$
$$B = 0.7/3 + 1/4 + 0.5/6$$

olsun. Buna göre ;

$A \cup B = 0.8/3 + 1/4 + 1/5 + 0.6/6$
$A \cap B = 0.7/3 + 0.5/6$
$\overline{A} = 1/1 + 1/2 + 0.2/3 + 1/4 + 0/5 + 0.4/6 + 1/7$
$A.B = 0.56/3 + 0.3/6$
$A^2 = 0.64/3 + 1/5 + 0.36/6$
$CON(B) = 0.49/3 + 1/4 + 0.25/6$
$DIL(B) = 0.84/3 + 1/4 + 0.7/6$
$A \oplus B = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6$
$A \Theta B = 0.1/3 + 0/4 + 1/5 + 0.1/6$
$A \otimes B = 0.5/3 + 0/4 + 0/5 + 0.1/6$

olacaktır.

1.5 Fuzzy Bağıntılar[15]

1.5.1 Tanım

$X; X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ olacak şekilde n tane evrenin kartezyen çarpımından oluşan bir küme olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ise sırasıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de fuzzy kümeler olsun. Bu fuzzy kümelerin kartezyen çarpımı

[15] ZADEH,L.,a.g.e., 1975. sayfa 1-39

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \int_{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n} \left(\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_2}(x) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n}(x) \right) / (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ile tanımlanır.

1.5.2 Tanım

U ve V herhengi iki evren ve $\mu_R : U \times V \to [0,1]$ olsun. O taktirde

$$R = \int_{U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v)$$

ile tanımlanan fuzzy küme, $U \times V$ uzayında tanımlı 2-li bir fuzzy bağıntı adını alır.

Daha genel anlamda $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ uzayında tanımlı n-li bir fuzzy bağıntı olarak *R*, $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ uzayında tanımlı bir fuzzy kümedir. Bu ise

$$R = \int_{U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n} \mu_R(u_1, u_1, \ldots, u_n)/(u_1, u_1, \ldots, u_n)$$

ile tanımlanır.

1.5.3. Örnek

X={1,2,3} olsun. O taktirde "yaklaşık eşit" adı altında verilen ikili (binary) bir fuzzy bağıntı

$$R = 1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3) + 0.8/(1,2) + 0.8/(2,3) + 0.8/(2,1) + 0.8/(3,2) + 0.3/(1,3) + 0.3/(3,1)$$

şeklinde bir fuzzy kümedir. Bu bağıntının μ_R üyelik fonksiyonu

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1; & x = y \\ 0.8; & |x-y| = 1 \\ 0.3 & |x-y| = 2 \end{cases}$$

dir.

Bu bağıntının matris formunda gösterilimi ise

$$R \;:\; \begin{array}{cc} & y \\ x & \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklindedir.

1.5.4 Tanım

R ve S sırası ile $U \times W$ ve $W \times V$ uzaylarında 2-li bağıntılar olsunlar.

$$R = \int_{U \times W} \mu_R(u,w)/(u,w) \quad ; \; S = \int_{W \times V} \mu_R(w,v)/(w,v)$$

ise, R ve S nin birleşimi

$$R \circ S = \int_{U \times V} \bigvee_{w \in W} \left(\mu_R(u,w) \wedge \mu_S(w,v)\right)/(u,w)$$

şeklindedir.

Eğer R, W de bir 1-li fuzzy bağıntı ise

$$R = \int_{W} \mu_R(w)/w \quad ; \qquad S = \int_{W \times V} \mu_R(w,v)/(w,v)$$

olduklarına göre R ve S nin birleşimi

$$R \circ S = \int_{V} \bigvee_{w \in W} \left(\mu_R(w) \wedge \mu_S(w,v)\right)/v$$

şeklinde bir 1-li bağıntı olur.

1.5.5 Örnek

$X = \{\ 1,2,3,4\}$ olsun. Bu evrende tanımlı iki bağıntı A ve R aşağıdaki gibi verilsin:

$A = 1/1 + 0.6/2 + 0.2/3 + 0/4$ 1-li bağıntı

$$R : \begin{array}{cc} & y \\ x & \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2-li bağıntı

Bu iki bağıntının birleşimi

$$B = A \circ R = \big((1 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0.5)\big)/1 + \big((1 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.1) \vee (0.2 \wedge 0.5)\big)/2 + \big((0.6 \wedge 0.5) \vee (0.2 \wedge 0.1)\big)/3 + \big((0.2 \wedge 0.5)\big)/4$$

olarak buradan

$$B = 1/1 + 0.6/2 + 0.5/3 + 0.2/4$$

şeklinde bulunan 1-li bir fuzzy bağıntıdır.

2. FUZZY MANTIK KURAMININ OLUŞTURULMASI

1965 yılında L.A. Zadeh, belirsizliğin temsili için, araç olarak, Fuzzy Kümeler ve Fuzzy Mantık teorisini geliştirmiştir. Bunu takiben Rescher, Dubois ve Prade, Lakeoff, Yager, Bellman, Kandel ve diğerleri Fuzzy Mantığın gelişmesinde katkıda bulunmuşlardır. Geçmişte belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler kuramı ile tanımlanmışlardır. Bunun yanı sıra son otuz yılda gelişen Fuzzy Kümeler kuramı ise, belirsizlik ifade eden terimler ve kavramların gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak çok değerli kümeler kuramı ve kapsamı içinde tanımlanmalarına yol açmıştır.

Fuzzy Mantık temelde çok değerli mantık, olasılık kuramı ve yapay zeka alanları üzerine oturtulmuştur. Fuzzy Mantık için matematiğin gerçek dünyaya uyarlaması diyebiliriz. Çünkü Fuzzy Mantık; keskin (iki değerli) mantığın açık/kapalı, soğuk/sıcak, hızlı/yavaş gibi ikili denetim değişkenlerinden oluşan keskin dünyayı az açık/az kapalı, serin/ılık, biraz hızlı/biraz yavaş gevşek niteleyicilere belli üyelik dereceleri atayarak, gerçek dünyamıza yansıtmayı ve gerçek dünyayı daha yaklaşık temsil eden sistemler oluşturmayı başarmıştır.

2.1 Modern Mantık (İki Değerli Mantık)

XX.yüzyıla yaklaşırken başta bir İngiliz matematikçisi ve mantıkçısı olan George Boole ve bir Fransız matematikçisi ve mantıkçısı olan De Morgan gibi pek çok bilim adamı ve filozofun meydana getirdiği mantığa Modern Mantık denilmiştir. Bu mantığa iki değerli mantık (keskin mantık) da denilmektedir. Keskin mantıkta sadece doğru ve yanlış vardır; başkaca ara değerler yoktur. Ayrıca doğru ve yanlış ancak ve ancak sezgisel olarak kavranabilen ve biri kullanılmadan diğeri tanımlanamayan soyut kavramlardır.[16]

---

[16] AKSOY, Yavuz, a.g.e., 1995. Sayfa 6

İki değerli mantıkta bir kümeyi oluşturan elemanlar, keskin elemanlar olup bir eleman bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir. X evrenindeki bir A alt kümesine ait tüm $x \in X$ değerleri için karakteristik fonksiyon

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1; & ancak\ ve\ ancak\ x \in A \\ 0; & ancak\ ve\ ancak\ x \notin A \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada 1 tamamen A kümesine ait olan, 0 ise A kümesine ait olmayan elemanları gösterir.

İki değerli mantığın önemli bir özelliği, yalnız diğer bilimlerin kullandığı bir yöntem olmaktan öteye başlı başına bir bilim, bir fen bilimi olmasıdır. İki değerli mantık matematiğin bir kolu durumundadır. Böylece baştan başa bir matematiksel yapıya kavuşmuştur. Bu nedenle iki değerli mantığa " Matematik Lojik " de denilmektedir.[17]

2.2 İki Değerli Mantık İşlemleri[18]

Bir iddia içeren ve bu yargılanarak sadece doğru veya sadece yanlış olarak değerlendirilebilen bir cümleye, mantık dilinde önerme denir. Eğer bu cümle tek bir iddia içeriyorsa yani başka bir deyişle bir tek değer alabiliyorsa, bu tür önermeler, bütün önermeler içinde ayrıca basit önermeler olarak adlandırılmaktadır.

Bir önermenin doğru ya da yanlış olması onun doğruluk değeridir ve bunlar sırasıyla 1 ya da 0 ile gösterilir. Bu bir önermenin temel özelliğidir.

Birden fazla önermenin bir takım bağlaçlarla meydana getirdiği yapıya birleşik önerme denir. Bu bağlaçlar $\wedge$(ve), $\vee$(veya), $\underline{\vee}$ (ya da), $\Rightarrow$(gerektirme) ve $\Leftrightarrow$(çift gerektirme) dir.

---

[17] AKSOY, Yavuz, a.g.e., 1995. Sayfa 6

[18] AKSOY, Yavuz, a.g.e., 1995. Sayfa 15-25

p ve q iki önerme olsun. Bu iki önermenin VE'li, VEYA'lı, YA DA'lı, GEREKTİME'li ve ÇİFT GEREKTİRME'li bileşenlerinin doğruluk değer tablosu aşağıda verilmiştir.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Önermelerin aldığı doğruluk değerleri ne olurda olsun mantıksal ifade hep 1 (doğru) değerini alıyorsa bu ifadeye TOTOLOJİ, hep 0 (yanlış) değerini alıyorsa ÇELİŞKİ denir.

p, q ve r üç önerme olsun. Yukarıda belirttiğimiz bağlaçlara ait aşağıdaki özellikler bilinmektedir.

$p \wedge p \equiv p$ (denk güçlü özl.)

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ (değişme özl.)

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (birleşme özl.)

$p \vee p \equiv p$ (denk güçlü özl.)

$p \vee q \equiv q \vee p$ (değişme özl.)

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (birleşme özl.)

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\wedge, \vee$ üzerine dağılma özl.)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ($\vee, \wedge$ üzerine dağılma özl.)

$\overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

$\overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ (De Morgan Kanunları)

$p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$ (değişme özl.)

$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$ (birleşme özl.)

$p \underline{\vee} q \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}$ ($\underline{\vee}$ bağlacının $\wedge, \vee$ ile gösterilimi)

$$p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$$

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

Yukarıda verilen $\wedge$ ve $\vee$ bağlaçlarına ait temel özellikler ile klasik küme teorisindeki Kesişim ve Birleşim işlemleri arasında sıkı bir benzerlik gözlemlenebilir. Küme işlemlerinin tamamı, önermeler mantığında geçen özelliklerle ve mantık yasaları incelenirken konulan kurallarla tam bir benzerlik göstermektedir. Kümeler Kuramı'nın Temelleri ile Modern Mantık Yasaları arasındaki eş-oluşum, bu konuları kullanan bilim dallarında yeni ve çağdaş yorumların yapılabilmesini olanaklı kılmıştır.

2.3 Çok Değerli Mantık[19]

Burada iki değerli mantıktan hareket ederek üç değerli mantığa, daha sonra çok değerli mantık kavramından fuzzy mantığa geçişi inceleyeceğiz. Klasik olan iki değerli mantık, farklı yollarla üç değerli mantığa genişletilşebilir. Modern mantıkta doğruyu 1, yanlışı 0 ile göstermiştik. Üç değerli mantıkta ise doğru, yanlış ve belirsizlik sırasıyla 1, 0 ve 1/2 olarak gösterilir. Yani burada tek fark 1/2 değeridir. Ayrıca bir a önermesinin değili $\overline{a}$ ile gösterilir ve 1-a ile bulunur. Bu da $\overline{1}$=0, $\overline{0}$=1 ve $\overline{1/2}$=1/2 dir. Diğer özellikler ise yani $\wedge, \vee, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ işlemleri ise farklı olur, benzemez. Üç değerli mantıkların birkaçı kendi mantığı ile iyi şekilde tanımlanır. Bu mantıklarda $\wedge, \vee, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ işlemlerinin özellikleri değişiktir. Tablo 2.3.1 ve Tablo 2.3.2 de bulan kişilerin ismiyle anılan beş tane farklı üç değerli mantığın doğruluk tabloları verilmiştir.

---

[19] KLIR,G. FOLGER, T. a.g.e. 1988. Sayfa .27-33

Tablolar, beş ayrı değişik üç değerli mantık için doğruluık değerlerini gösterir. Tablodaki değişkenlere doğruluk değerleri verirken uygulanan kural şudur: n önerme sayısı ise bir önerme 3^n tane doğruluk değeri içerecektir.

Tablo 2.3.1 Lukasiewicz, Bochvar ve Kleene'e ait 3-değerli mantıkta doğruluk tablosu

		Lukasiewicz				Bochvar				Kleene			
a	b	a∧b	a∨b	a⇒b	a⇔b	a∧b	a∨b	a⇒b	a⇔b	a∧b	a∨b	a⇒b	a⇔b
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	1/2
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1/2	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tablo 2.3.2 Heyting ve Riechenbach'a ait 3-değerli mantıkta doğruluk tablosu

		Heyting				Riechenbach			
a	b	a∧b	a∨b	a⇒b	a⇔b	a∧b	a∨b	a⇒b	a⇔b
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1/2	0	1/2	1	0	0	1/2	1	1/2
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1/2	0	0	1/2	0	0	0	1/2	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1	1
1/2	1	1/2	1	1	1/2	1/2	1	1	1/2
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Dikkat edecek olursak 2 değişken (önerme) için $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ işlemleri incelenirken 3^2=9 durum söz konusu olmaktadır. Bir başka özellikte *a*, *b* değişkenleri 0 ve 1 değerlerini aldığında, modern mantıktaki özelliklerin aynıları kullanılıyor. Sadece 1/2 doğruluk değerinde farklılık göze çarpıyor. O halde Tablo 2.3.3 de gösterildiği gibi üç değerli mantıkların hiçbirinin totolojiyi $(a \vee \bar{a} = 1)$, çelişmeyi $(a \wedge \bar{a} = 0)$ ve iki değerli mantıkların, bazı totolojileri sağlamadığını görürüz.

Örneğin Bochvar'ın üç değerli mantığı, açıkça, iki değerli mantığın totolojilerinin herhangi birini sağşamaz. Bochvar'a ait tabloyu incelersek, *a* ve *b* önermelerinden en az biri 1/2 değeri aldığında $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ işlemleri sonucu sadece 1/2 değerini ürettiğini görürüz. Bundan dolayı totoloji kavramını (çelişme kavramını) genişletebiliriz. Üç değerli mantıkta sonuç sütununda sadece 1 ve 1/2 değerleri varsa mantıksal ifadeye quasi-totoloji, sadece 0 ve 1/2 değerleri varsa mantıksal ifadeye quasi-çelişme denir (Tablo 2.3.3).

Üç değerli mantık yardımıyla n değerli (n $\geq$ 3) mantığa geçmek mümkündür. Çeşitli n değerli mantıklar 1930 yılında geliştirilmiştir. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için genelleştirilmiş mantıklardaki doğruluk değerleri, genellikle [0,1] birim aralığındaki rasyonel sayılarla sınırlandırılmıştır. Bu doğruluk değerleri, 0 ve 1 aralığında eşit olarak bölme ile bulunur. Bir n değerli mantığın doğruluk değerleri T_n ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_n = \left\{0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\}$$

Bu değerler, doğruluk dereceleri gibi de yorumlanabilir.

n $\geq$ 3, için n değerli mantıkların ilki Lukasiewicz tarafından bulunmuştur. T_n deki doğruluk değerleri kullanılarak, aşağıdaki ilkeler tanımlanmıştır.

$\bar{a} = 1 - a$

$a \wedge b = \min(a,b)$

$a \vee b = \max(a,b)$

$a \Rightarrow b = \min(1, 1 + b - a)$

$a \Leftrightarrow b = 1 - |a - b|$

Tablo 2.3.3 3-değerli mantıkta quasi-totoloji ve quasi-çelişme

a	$\bar{a}$	$a \wedge \bar{a}$	$a \vee \bar{a}$
0	1	0	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	0	1

Her bir n $\geq$ 3 için, Lukasiewicz'in n değerli mantığı literatürde genellikle L_n ile gösterilir. L_n in doğruluk değerleri T_n kümesinden alınmıştır ve ilkeleri de yukarıdaki ilişkilerle tanımlanmışlardır. L_2 mantığı doğruluk değerlerini T_2 den alan klasik iki değerli mantığı gösterirken, L_∞ mantığı doğruluk değerlerini $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayılardan oluşan T_∞ kümesinden alan sonsuz değerli mantıktır. Doğruluk değerlerini sadece T_∞ kümesinden almayıp $[0,1]$ aralığındaki reel sayıları, doğruluk değerleri gibi kabul edebiliriz. Böylece alternatif bir sonsuz değerli mantık buluruz. Bu sonsuz değerli mantıkların ilkeleri, yukarıdaki ilişkilerle tanımlanır. Ancak doğruluk değer kümeleri farklı olur. Yani mantıklardan biri doğruluk değer kümesi olarak T_∞ u kabul ederken, diğeri $[0,1]$ aralığındaki tüm reel sayıları kabul eder. Aksi ifade edilmedikçe sonsuz değerli mantık olarak, doğruluk değer kümesi $[0,1]$ deki tüm reel sayılar olan mantığı kabul edeceğiz. Bu mantığın adı literatüre Standart Lukasiewicz L_1 mantığı olarak geçmiştir.

Bildiğimiz modern mantıkta, mantık ve küme teorisi arasında bir izomorfluk vardır. İki değerli mantığın keskin küme teorisine izomorfiliğine benzer şekilde, Standart Lukasiewicz L_1 mantığının orjinal fuzzy küme teorisine izomorfluğu da görülebilir. Bu izomorfluk sırasıyla fuzzy kesişim, fuzzy birleşim ve fuzzy küme bütünlerliği ile min, max ve 1-a işlemleri üzerine kurulmuştur. Yani

min işlemi $\leftrightarrow$ fuzzy kesişim

max işlemi $\leftrightarrow$ fuzzy birleşim

1 -a işlemi $\leftrightarrow$ fuzzy bütünler

demektir.

Şimdi bu izomorfluğu inceleyelim : X evrensel kümesindeki bir A fuzzy kümesi ele alındığında $x \in X$ için $\mu_A(x)$ üyelik derecesi, L_1 mantığında " x, A kümesinin elemanıdır." Önermesinin doğruluk değerlerini gösterecektir. Tersine düşünürsek, L_1 mantığında " x, P dir " önermesinin $\forall x \in X$ için doğruluk değerleri, $\mu_P(x)$ üyelik dereceleri olarak yorumlanacaktır. Burada P, şüpheli bir (fuzzy) yüklemdir. $\mu_P(x)$ üyelik dereceleri X de P özelliği ile oluşturulmuş fuzzy kümede tanımlanır. Yani buradan anlayacağımız gibi fuzzy mantığın operatörleri, fuzzy kümedeki standart işlemlere karşılık gelen matematiksel forma sahiptir.

Şimdi çok değerli mantıkların fuzzy küme teorisindeki karşılıklarını ispatlayacağız. Bunlar fuzzy küme teoride bir mantık meydana getiren "fuzzy küme çekirdeği" formundadır. Fuzzy mantık, çok değerli bir mantığın bir genişlemesidir. Asıl amacı, fuzzy küme teorisinin bir temeli olan keskin olmayan önermelerin kullanılmasıyla beraber yaklaşık usavurmaiçin esaslar sağlamaktır. Fuzzy mantığın esas faaliyeti, doğal bir ifade şeklindedir.

2.4 Fuzzy Mantık Operatörleri[20]

Fuzzy mantık, fuzzy küme teorisine dayanan bir matematiksel disiplindir. Doğruluğun ve yanlışlığın derecesini ele alır. İki değerli mantıkta ifade ettiğimiz $\mu_A(x)$ karakteristik fonksiyonu, fuzzy mantıkta $[0,1]$ aralığında değerler alabilen üyelik fonksiyonu adını alır.

x, X evreninde bir eleman, $A,B,\dots$ bu evrenin fuzzy alt kümeleri olsun. μ bir üyelik fonksiyonu olmak üzere

$$a = \mu_A(x),\ b = \mu_B(x), \dots, a, b, \dots \in [0,1]$$

olsun. Daha önce verilen tanımlar yardımıyla, aşağıdaki işlemler tanımlanır :

[20] KAUFMANN, A., *Introduction to the Theory of Fuzzy Subset.* Vol.1, Academic Press, New York, 1975, sayfa 10-22

$$a \wedge b = \min(a,b)$$

$$a \vee b = \max(a,b)$$

$$\bar{a} = 1 - a$$

Bu işlemler aşağıdaki özelliklere sahirtir :

(1)	$a \wedge b = b \wedge a$	
(2)	$a \vee b = b \vee a$	değişme özl.
(3)	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	
(4)	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	birleşme özl
(5)	$a \wedge a = a$	
(6)	$a \vee a = a$	denk güçlü özl.
(7)	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	
(8)	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	dağılma özl
(9)	$a \wedge 0 = 0$	
(10)	$a \vee 0 = a$	
(11)	$a \wedge 1 = a$	
(12)	$a \vee 1 = 1$	
(13)	$\overline{(\bar{a})} = a$	
(14)	$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$	
(15)	$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$	De Morgan Kanunları
(16)	$a \wedge \bar{a} \neq 0$	Eğer $a = 0$ veya $a = 1$ değilse
(17)	$a \vee \bar{a} \neq 1$	Eğer $a = 0$ veya $a = 1$ değilse
(18)	$a \wedge (a \vee b) = a$	
(19)	$a \vee (a \wedge b) = a$	Soğurma

Bu özelliklerin ispatları (7), (8), (14),(15),(18) ve (19) dışında aşikardır. (8),(15) ve (19) daki özelliklerin ispatlarını verelim :

Özellik (8):

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

İspat:

Daha evvel verilen tanımlardan a,b ve c nin $[0,1]$ aralığında değerler aldığını biliyoruz. Bu değerler kendi aralarında 3! şekilde sıralanır. Yani

$$0<a<b<c<1$$
$$0<a<c<b<1$$
$$0<b<a<c<1$$
$$0<b<c<a<1$$
$$0<c<a<b<1$$
$$0<c<b<a<1$$

demektir. Bu sıralamadan üç tanesini alarak ispatı tamamlayalım.

1) $0<a<c<b<1$ 2) $0<b<c<a<1$ 3) $0<c<b<a<1$

1) $\Rightarrow$ $a\vee(b\wedge c)=\max\left[a,\min(b,c)\right]=\max\left[a,c\right]=c$

$(a\vee b)\wedge(a\vee c)=\min\left[\max(a,b),\max(a,c)\right]=\min(b,c)=c$

2) $\Rightarrow$ $a\vee(b\wedge c)=\max\left[a,\min(b,c)\right]=\max\left[a,b\right]=a$

$(a\vee b)\wedge(a\vee c)=\min\left[\max(a,b),\max(a,c)\right]=\min(a,c)=a$

3) $\Rightarrow$ $a\vee(b\wedge c)=\max\left[a,\min(b,c)\right]=\max\left[a,c\right]=a$

$(a\vee b)\wedge(a\vee c)=\min\left[\max(a,b),\max(a,c)\right]=\min(a,a)=a$

Burada diğer üç sıralam için ispatı yapmaya çalışırsak, yukarıda olduğu gibi aynı sonuçlarla karşılaşırız. Şu halde altısını da gözönüne lamamız gereksizdir.

Özellik (15):

$$\overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$$

İspat:

Burada diğer ispattan farklı olarak a ve b gibi iki değer vardır. Bunlar da kendi aralarınada 2! kadar sıralanır. Yani

$$0<a<b<1$$
$$0<b<a<1$$

dir. Bu sıralamadan yalnız bir tanesini alarak ispatı tamamlayalım:

$0 < b < a < 1$ olsun. İki şekilde ispatı yapabiliriz.

1-) $\bar{a} \wedge \bar{b} = \min[1-a, 1-b] = 1-a$

$$a \vee b = \max[a,b] \Rightarrow \overline{a \vee b} = 1 - \max[a,b] = 1-a$$

2-) $\bar{a} \wedge \bar{b} = \min[1-a, 1-b] = 1-a$

$$a \vee b = \max[a,b] = a$$

Bu iki ifadeyi taraf tarafa toplarsak

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) + (a \vee b) = 1 - a + a = 1$$

$$\min[1-a, 1-b] + \max[a,b] = 1$$
$$\min[1-a, 1-b] = 1 - \max[a,b]$$

olduğu için

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

dir.

Özellik (19):

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

İspat:

$$\begin{aligned} a \vee (a \wedge b) &= (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) \\ &= (a \vee a) \wedge (1 \vee b) \\ &= a \wedge 1 \\ &= a \end{aligned}$$

(7),(14) ve (18) özellikleri de bunlara benzer şekilde ispatlanır.

3. FUZZY MANTIKTA YAKLAŞIK USAVURMA

3.1 Modern Mantıkta Usavurma[21]

İ.Ö. IV. yüzyıldan başlayarak, mantığın kurucusu büyük filozof Aristoteles klasik mantiği ortaya atarken, orada da birincil amaç çıkarım mantığının oluşturulmasıydı. Boole'un modern mantığı oluştururken en çok etkisi altında kaldığı klasik mantık konusu çıkarım mantığıdır. Eski yunan filozoflarından biri olan Sokrates'in ünlü çıkarımı

Bütün insanlar ölümlüdür.

Sokrates insandır.

Öyleyse; Sokrates de ölümlüdür.

Şeklinde düzenlenmiştir. Aristoteles'ten önce gelen kuşaktan olan bu büyük filozofun bu çıkarım örneği hiç eskimeden günümüze kadar gelebilmiş ve bu tip konuların açıklanmasında hala öncülük edebilmektedir.

Çıkarım mantığı ya da Usavurma gerçekte yaşanan bir olgudur. Gerek günlük yaşamımızda gerekse bilimsel çalışmalarımızda pek çok kez ardarda sıralanmış olaylar ya da olgular dizisinden O Halde, Öyleyse, ..., v.b. sözcük yada deyimler kullanarak, varılan fikri ya da yorumu bir sonuç olarak açıklamış oluruz. Böylece sıralı bir iddialar dizisi oluşur ve bu bizi bir mantiki zorunluluk olarak bir sonucu ifade etmeye yöneltir. İşte bu türlü oluşan mantığa Çıkarım Mantığı ya da Usavurma denir.

Bir usavurma kalıbı üç temel unsur içerir :

1) Öncüller
2) O Halde, Öyleyse, ..., v.b. gibi sözcükleri temsil eden sembol :
3) Çıkarım

Bir örnek üzerinde açıklamak istersek :

---

[21] AKSOY,Yavuz, a.g.e., 1995. Sayfa 214-219

p,q ve r önermeler olmak üzere

1.öncül : $p \Rightarrow \overline{q}$

2.öncül : $q \vee r$

Çıkarım : $\overline{p}$

şeklinde bir usavurma kalıbı yazılabilir.

Öncelikli olarak her usavurma kalıbı verildiğinde ilk akla gelen problem, böyle bir usavurma kalıbının geçerli olup olmadığının araştırlması olacaktır. Temel problem öncelikle, geçerli olduğu yönünde araştırmanın yapılmasını öngörür. Bunun geçerli olduğu araştırılırken geçersiz olduğunun anlaşılması, araştırmanın kapsamında olan doğal bir sonuçtur. Usavurma kalıbının geçerli olduğu anlaşıldığı takdirde getirilecek yorum, bundan elde edilen standart biçimin mantıki yönden bir totoloji olduğunun saptanmasıdır. Dolayısıyla bu usavurma kalıbından çıkan sonuç, bir mantıki gerktirmedir. Aşağıda bilinen bazı geçerli usavurma kalıpları verilmiştir.

p,q ve *r* önermeler olmak üzere;

p		$p \Rightarrow q$	
$\underline{p \Rightarrow q}$	Modus Ponens ,	$\underline{\overline{q}}$	Modus Tollens
q	(İleri Zincir Kuralı)	$\overline{p}$	(Geri Zincir Kuralı)

$p \Rightarrow q$

$\underline{q \Rightarrow r}$ Kıyaslama (Ardışık gerktirme yasası)

$p \Rightarrow r$

dir.[22]

Çıkarımın geçerli olması iki türlü gerçekleşebilir. Bu çıkarım türleri şunlardır :

---

[22] ROSS,T.J.,Fuzzy *Logic with Engineering Applications,* McGraw Hill Co., Inc. 1995 sayfa.189

3.1.1. Tanım

Öncüllerin doğru olmalarının bir sonucu olarak çıkarımın da doğru olması zorunluluğu Dedüktif Çıkarım olarak adlandırılır (Aksoy, 1995).

3.1.2 Tanım

Öncüllerin doğruluğuna zorunlu olarak bağlı olmaksızın çıkarım sonucu doğru olan bir çıkarım türüne İndüktif Çıkarım denir (Aksoy, 1995).

3.2 Dilsel Değişkenler ve Fuzzy Doğruluk Değerleri[23]

Fuzzy mantığın, çok değerli bir mantığın genişlemesi olduğunu asıl amacınında fuzzy küme teorisinin bir temeli olan, kesin olmayan önermelerin kullanılmasıyla beraber yaklaşık usavurma için esaslar sağlayacağını daha önce belirtmiştik. Şimdi dil biliminden hareketle yaklaşık usavurma için bir örnek verelim.

Eski paralar, genellikle değerli kolleksiyonlardır.
Değerli koleksiyonlar pahalıdır.
Eski paralar genellikle pahalıdır.[24]

Bu örnek bir dedüktif çıkarım anlamındadır. Buradan kolayca anlayacağımız gibi fuzzy mantık aşağıda sıralanan değerlerin farklı çeşitlerinin kullanılmasını her zaman içerecektir.

Fuzzy Yüklem	: Pahalı, eski, değerli, tehlikeli, ...
Fuzzy Niceleyiciler	: Çok, az, hemen hepsi, az çok, oldukça, ...
Fuzzy Doğruluk Değerleri	: Tamamen doğru, çok doğru, çok yanlış, ...
Fuzzy Niteleyiciler	: Muhtemel, çoğu kez, imkansız, aşırı olamayan, ...

---

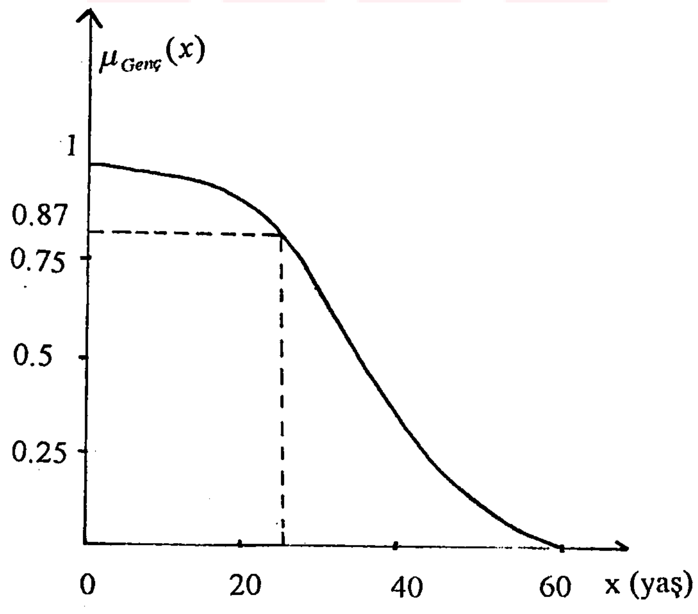
[23] BALDWIN,J.F., " A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic", *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 1979. Sayfa .309-325

[24] ZADEH, L., "A theory of approximate reasoning", *Machine Intelligence* Vol 9. 1977. sayfa 149-194

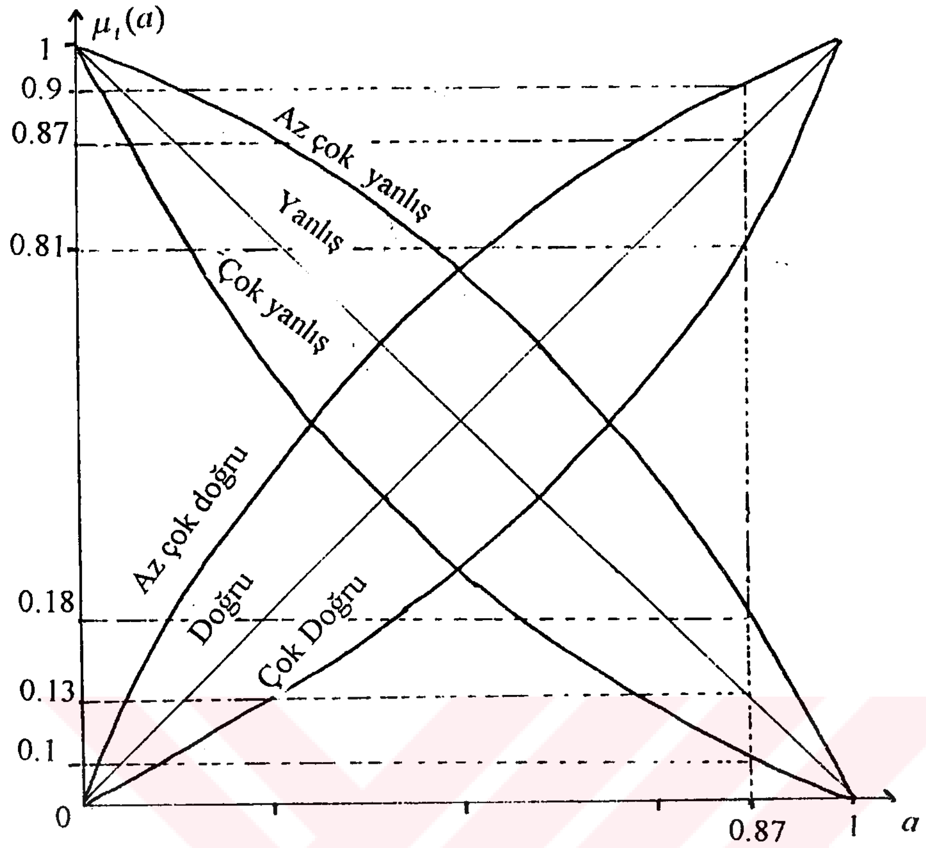
Basit bir fuzzy yüklem, daha önce tanımladığımız gibi " x, P dir " şeklinde bir fuzzy kümeyle fuzzy mantıkta tanımlanır. Örnek olarak x i bir kişinin yaşı, P yi ise genç anlamında kabul edelim. O halde farklı yaşları gösteren 0-60 arasındaki tamsayıların kümesini evrensel küme olarak kabul edersek yüklem, Şekil 3.2.1 de üyelik fonksiyonu verilen bir fuzzy küme ile gösterilebilir. Bu önermenin doğruluk değerini bulurken yükleme x için bir değer vererek özel bir şekilde buluruz.

" Mehmet gençtir " önermesini inceleyelim :

Bu önermenin doğruluk değeri, sadece Şekil 3.2.1 yardımı ile Mehmet'in şu anki yaşına karşılık gelen üyelik derecesine bağlı değildir. İddia edilmiş doğrunun veya yanlışın kuvvetine bağlıdır. Doğru ve yanlışın kuvvetlerini içeren iddiaların her biri uygun bir fuzzy küme ile gösterilir. Bu kümeler [0,1] aralığında tanımlanmış ve Şekil 3.2.2 de gösterilmiştir (Baldwin 1979). Şekil 3.2.2 deki a parametresi, yüklemleri içeren bir fuzzy kümede üyelik derecesi yerine geçer. Yani Şekil 3.2.1 de bulduğumuz üyelik derecelerini gösterir. $\mu_t(a)$ ise doğruluk değerlerini gösterecektir.



Şekil 3.2.1 Fuzzy küme



Şekil 3.2.2 Doğruluk Değerlerini Gösteren Fuzzy Kümeler

Örneğe dönelim: Mehmet 25 yaşında ise Şekil 3.2.1 den $\mu_{genç}(25)=0.87$ olarak bulunur. Bu önermenin doğruluk değerlerini ise 0.87 üyelik derecesi yardımıyla Şekil 3.2.2 den buluruz.

Bu grafikler yardımı ile " Mehmet gençtir " önermesinin doğruluk değerlerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz :

Mehmet gençtir, az çok doğrudur	; 0.9
Mehmet gençtir, doğrudur	; 0.87
Mehmet gençtir, çok doğrudur	; 0.81
Mehmet gençtir, az çok yanlıştır	; 0.18
Mehmet gençtir, yanlıştır	; 0.13
Mehmet gençtir, çok yanlıştır	; 0.1

Burada " doğru " ve " yanlış " olarak adlandırılan terimler birer dilsel değişkendir.

A bir fuzzy küme olmak üzere, yukarıdaki ifadelerde geçen çok ve az çok dilsel niteleyicilerin fuzzy küme olarak gösterilimi sırasıyla A^2 ve $A^{0.5}$ tir. Böylece $çokA=A^2$, $azçokA=A^{0.5}$ tir[25] .

3.3 Fuzzy Koşullu Çıkarım

Bu bölümde fuzzy mantıkta yaklaşık usavurmanın temelini oluşturan fuzzy koşullu çıkarımın (fuzzy usavurma) yapısını ve bu çıkarımın sonuçlarının meydana getirdiği bazı tanımlar ve sonuçlar verilecektir.

Fuzzy usavurma, modern mantıkta geçerli olan (totoloji) ve özel adlarıyla anılan usavurma kalıpları üzerine oturtulmuştur. Bu kalıplar sırasıyla Modus Ponens, Modus Tollens ve kıyaslama (Ardışık gerektirme yasası) dır. Modern mantıktaki geçerli usavurma kalıbı olan Modus Ponens'i aşağıdaki gibi ele alalım :

1. Öncül : Eğer *A* doğru ise *B* doğrudur.
2. Öncül : *A* doğrudur.

Çıkarım : *B*, doğrudur.

Burada *A* ve *B* (kesinlik tanımlayan) ifadeler ve önermelerdir. 1. Öncüldeki *B*, çıkarımdaki *B* nin kendisidir. Modus Ponens aşağıdaki gibi iki şekilde genelleştirebilir :

1) Buradaki ifadelerin veya önermelerin fuzzy kümeler ile temsil edilmesine izin vererek;
2) 1. Öncül ve Çıkarım'daki *B* nin kimliğini hafifleterek.[26]

Modus Ponens'in bu yorumu, Genelleştirilmiş Modus Ponens olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi gösterilir :

A, A', B ve *B'* sırasıyla *U* ve *V* evrenlerinde birer fuzzy küme ve $u \in U$ ve $v \in V$ olmak üzere

---

[25] ZADEH,L., a.g.e. 1975. sayfa 1-39

[26] ZIMMERMANN,H.J., *Fuzzy Set Theory- and its Applications,* 1985, sayfa 140.

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u, A'* dür.
Çıkarım : *v, B'* dür.[27]
şeklindedir. Çalışmamızda bu kalıbı daha kısa şekilde

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{A'\quad} \\ \quad B' \end{array}$$

olarak ele alacağız.

Bu kalıbı günlük hayatta sıkça rastlanan bir örnekle açalım :

1. Öncül : Eğer bir domates kırmızı ise domates olgundur.
2. Öncül : Bu domates çok kırmızıdır.
Çıkarım : Bu domates çok olgundur.[28]

Çıkarımın bu formunu fuzzy koşullu çıkarım olarak adlandırırız. Bu tanım sadece Genelleştirilmiş Modus Ponens için değil Genelleştirilmiş Modus Tollens ve ve Kıyaslama için de geçerlidir. Bu çalışmamızda Genelleştirilmiş Modus Ponens (kısaca GMP) temel alınmıştır.

Tanım 1.5.2 ve Tanım 1.5.4 ü hatırlayarak bir tanım verilmektedir.

3.3.1 Tanım[28]

R ve *S* sırasıyla *U×W* ve *W×V* de tabımlı iki fuzzy bağıntısı olsun. *R* ve *S* nin bileşimi bir fuzzy bağıntıdır ve bu bileşim

$$R\nabla S = \int_{U\times V} \bigvee_{w\in W}\left[\mu_R(u,w) * \mu_s(w,v)\right]\Big/(u,v)$$

[27] FUKAMI, S., TANAKA, K., MIZUMOTO, M., "Some considirations on fuzzy conditional inference", *Fuzzy Sets and Systems*, 4. 1980, sayfa. 243-273

[28] ZADEH, L. a.g.e. 1975. sayfa 1-39

olarak tanımlanır ve ifade edilir.

Eğer *A, U* da bir fuzzy küme (ya da 1-li bir fuzzy bağıntı), *R* ise *U×V* de bir fuzzy bağıntı ise o takdirde

$$A \nabla R = \int_V \bigvee_{u \in U} \left[\mu_A(u) * \mu_R(u,v) \right] \big/ (v)$$

olarak birleşir.

Bu bileşim şekillerine max-* bileşimi denir. Fuzzy usavurmada çıkarım sonucu bu bileşim ile bulunduğundan buna Çıkarım Bileşimi Kuralı[29] da denir.

Çıkarımın Bileşimi Kuralları yerine * koyacağımız farklı operatörler yardımıyla sonuçları bulmamıza yardım eder. Bunları

1) * - min (Minimum)
2) * - ⊗ (Sınırlı Çarpım)
3) * - $\frown\!\!\!\!\cdot$ (Drastik Çarpım)

şeklinde sıralayabiliriz.

Burada Drastik Çarpım

$$x \frown\!\!\!\!\cdot\; y = \begin{cases} x; & y = 1 \\ y; & x = 1 \\ 0; & x.y < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır[30] .

3.3.2 Tanım

Yukarıdaki tanımı fuzzy koşullu çıkarım şekillerinden biri olan GMP üzerine uygulayalım :

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{A'} \\ \quad B' \end{array}$$

---

[29] ZADEH,L., "The concept of Linguistic Variable and its Applications to approximate reasoning III", *Fuzzy Sets and Applications:* Selected papers by Zadeh. Wiley-Interscience Pub. 1987, sayfa 343

[30] MIZUMOTO, M., "Note on the arithmetic rule by Zadeh for Fuzzy Conditional Inference", *Cybernetics and Systems : an International Journal.* 12. Sayfa 255

B' sonucunu yukarıdaki tanımlar yardımıyla açalım:

1) $B'=A'\circ(A \Rightarrow B)$[31] (o işlemi, max - min bileşimini gösterir)

2) $B'=A'\Delta(A \Rightarrow B)$[32] (Δ işlemi, max - ⊗ bileşimini gösterir)

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U}\left[\mu_{A'}(u) \otimes \mu_{A\Rightarrow B}(u,v)\right]/(v)$$

3) $B'=A'\Diamond(A \Rightarrow B)$[33] (◊ işlemi, max - ⌒ bileşimini gösterir.)

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U}\left[\mu_{A'}(u) \frown \mu_{A\Rightarrow B}(u,v)\right]/(v)$$

Burada *A, A', B* ve *B'* sırasıyla *U* ve *V* de birer fuzzy kümedir. Böylece B' sonucunu üç farklı bileşim ile de bulabiliriz.

3.3.3 Tanım[32]

Fuzzy usavurma kalıbında A ⇒ B ile gösterilen fuzzy kuralına Fuzzy Gerektirme denir. *A, B* sırasıyla *U* ve *V* de fuzzy kümeler olmak üzere ; U×V de bir 2-li fuzzy bağıntı olarak verilir ve

$$\mu_{A\Rightarrow B}(u,v)=\mu_A(u)\rightarrow\mu_B(v)$$

şeklinde gösterilir.

Dolayısıyla " Eğer *u, A* ise *v, B* dir " fuzzy önermesi *U×V* de bir 2-li bağıntı ile tenmsil edilir.

Şimdi bazı fuzzy gerektirmelerini, gerektirme kuralları adı altında sıralayalım :

$\mu_A(u)=a$ ve $\mu_B(v)=b$ olacak şekilde $a\rightarrow b$ gerektirme kuralları şunlardır.

---

[31] ZADEH,L., a.g.e., 1975. sayfa 1-39

[32] MIZUMOTO, M., "Fuzzy conditional inference under max - ⊗ composition", *Informational Sciences*, 27, 1982, sayfa. 183-209

[33] MIZUMOTO,M., a.g.e. 1981, sayfa. 247-304

$R_a : a \to b = 1 \wedge (1-a+b)$ (1)

$R_c : a \to b = a \wedge b$ (2)

$$R_S : a \to b = \begin{cases} 1; & a \le b \\ 0; & a > b \end{cases} \quad (3)$$

$$R_g : a \to b = \begin{cases} 1; & a \le b \\ b; & a > b \end{cases} \quad (4)$$

$R_m : a \to b = (a \wedge b) \vee (1-a)$ (5)

$R_b : a \to b = (1-a) \vee b$ (6)

$$R_\Delta : a \to b = \begin{cases} 1; & a \le b \\ b/a; & a > b \end{cases} \quad (7)$$

3.4 Fuzzy Koşullu Çıkarımda Bazı Kriterler[34]

Fuzzy usavurmada kulanılan GMP ya da GMT formundaki bir usavurma kalıbında çıkarım sonuçlarının değeri, A' fuzzy bağıntısına bağlıdır. Bu bölümde GMP yi temel olarak A' fuzzy bağıntısına (kümesine) bağlı olarak çıkacak olan B' çıkarım sonuçlarını gösteren bazı kriterleri gözönüne alalım.

1. Öncül : Eğer u, A ise v, B dir.
2. Öncül : u, A' dür.

Çıkarım : v, B' dür.

Burada A,A' U da, B,B' V de fuzzy kümelerdir.

[34] FUKAMI,S., TANAKA, K.,MIZUMOTO, M., a.g.e. 1980, pp. 243-273

Kriter 1:

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u, A* dır.

Çıkarım : *v, B* dir.

Burada $A'=A$ iken $B'=B$ sonucuna varılır.

Kriter 2.1:

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u, çok A* dır.

Çıkarım : *v, çok B* dir.

Burada $A'=\text{çok } A=A^2$ iken $B'=\text{çok } B=B^2$ sonucuna varılır.

Not: Domates örneği bu kritere bir örnektir.

Kriter 2.2:

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u, çok B* dir.

Çıkarım : *v, B* dir.

Burada $A'=\text{çok } A=A^2$ iken $B'=B$ sonucuna varılır.

Kriter 3:

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u,az çok A* dır.

Çıkarım : *v, az çok B* dir.

Burada $A'=\text{az çok } A=A^{0.5}$ iken $B'=\text{az çok } B=B^{0.5}$ sonucuna varılır.

Kriter 4.1:

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u, değil A* dır.

Çıkarım : *v, tanımsız* dır.

Burada *A'=değil A*= $\overline{A}$ iken *B'= Tanımsız* sonucuna varılır.

Kriter 4.2:

1. Öncül : Eğer *u, A* ise *v, B* dir.
2. Öncül : *u, değil A* dır.

Çıkarım : *v,değil B* dır.

Burada *A'=değil A*= $\overline{A}$ iken *B'= değil B* = $\overline{B}$ sonucuna varılır.

Burada $A = \int_U \mu_A(u)/u$ şeklinde bir fuzzy küme olmak üzere, daha önce açıklandığı gibi

$$çokA = \int_U \mu_A{}^2(u)/u$$

$$az\,çokA = \int_U \mu_A{}^{0.5}(u)/u$$

$$değilA = \int_U (1 - \mu_a(u)/u$$

dır.[35]

[35] ZADEH,L., a.g.e. 1975. sayfa 1-39

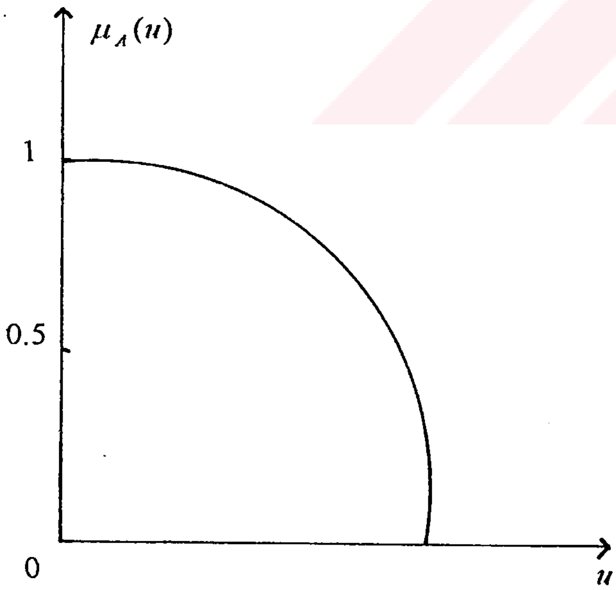
3.5 Max-min ve Max -⊗ ile Çıkarım Sonuçlarının Bulunması

Burada çıkarım sonuçları bulunurken bir kaç gerektirme kuralı kullanılmıştır. Bölümün sonunda diğer gerektirme kurallarına ait sonuçlar tablo halinde verilecektir.

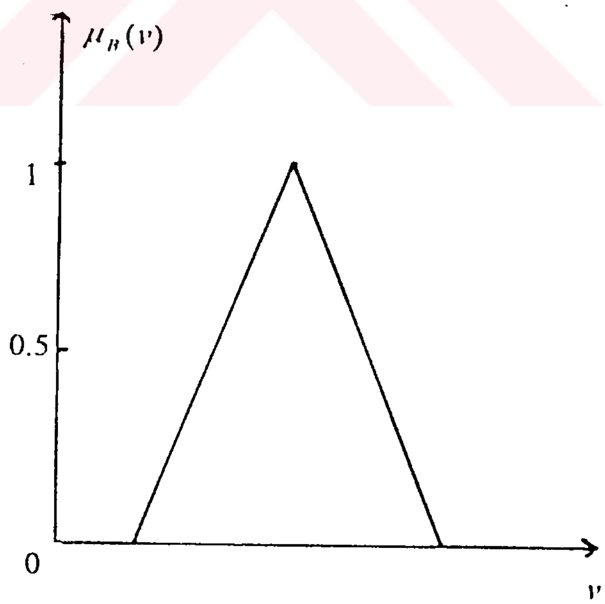
Fuzzy usavurma kalıbımız (GMP)

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{A'\quad} \\ \quad B' \end{array}$$

olsun. Burada A fuzzy kümesi U da, B fuzzy kümesi V de tanımlı olup Şekil 3.5.1 ve Şekil 3.5.2 de gösterilmişlerdir.



Şekil 3.5.1 U da A Fuzzy Kümesi



Şekil 3.5.2 V de B Fuzzy Kümesi

3.5.1 R_c Kullanarak Max-min Bileşimi Çıkarım Sonucu

A' nü A alalım. B' sonucunu bulalım :

$$R_c : a \rightarrow b = a \wedge b$$

$B' = AoR_c$

$$B' = \int_U \mu_A(u)/(u)\, o \int_{U\times V} [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)]/(u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U} [\mu_A(u) \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)]/(v)$$

olup burada $\mu_A(u)=x$, $\mu_B(v)=b$, $\mu_{B'}(v)=b'$ olarak alınırsa,

$$f(x)=x \wedge x \wedge b$$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde daha kolay bir ifade de elde edilir[36] .

Ayrıca burada

$f(x)=x \wedge x \wedge b$; $x \wedge x$ den

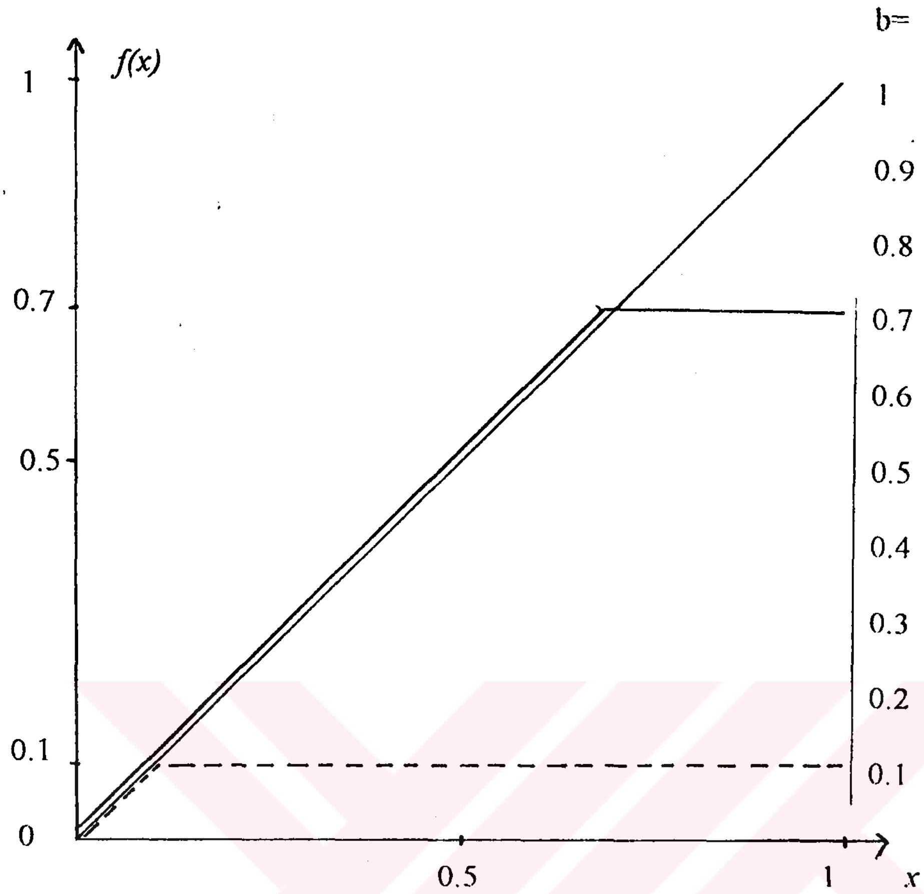
$= x \wedge b$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Bu ifadeyi grafik yardımıyla göstererek, sonucu bulalım :

Şekil 3.5.3 te b = 0.1 iken x in tüm değerleri için b' nün alabileceği maksimum değer nokta nokta olarak gösterildiği gibi 0.1 dir. Aynı şekilde b = 0.7 iken x in tüm değerleri için b' nün alabileceği maksimum değer koyu çizgi şeklinde gösterildiği gibi 0.7 dir.

[36] MIZUMOTO,M., a.g.e. 1982, sayfa. 183-209



Şekil 3.5.3 R_c Kullanarak Max-min Bileşimi Çıkarımı Sonucunun Grafiği

Sonuç olarak $b' = \bigvee_x f(x) = b$ sonucuna varırız. Başa dönersek $A' = A$ iken $B' = B$ sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla Bölüm 3.4 teki Kriter 1, burada sağlanır.

3.5.2 R_a Kullanarak Max-min Bileşimi ile Çıkarım Sonucu[37]

A' nü A alalım. B' sonucunu bulalım :

---

[37] FUKAMI, S., TANAKA, K., MIZUMOTO, M. a.g.e. 1980,sayfa. 243-273

$$R_a : a \rightarrow b = 1 \wedge (1\text{-}a + b)$$

$B' = AoR_a$

$$B' = \int_U \mu_A(u)/(u) \, o \int_{U \times V} \left[1 \wedge \left(1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)\right)\right] / (u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u \in U} \left[\mu_A(u) \wedge \left\{1 \wedge \left[1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)\right]\right\}\right] / (v)$$

olup, burada $\mu_A(u)=x$, $\mu_B(v)=b$, $\mu_{B'}(v)=b'$ olarak alınırsa,

$f(x) = x \wedge [1 \wedge (1 - x + b)]$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde kolay bir ifade olarak elde edilir.

Ayrıca burada

$f(x) = x \wedge \; [1 \wedge (1 - x + b)]$

$\quad = (x \wedge 1) \wedge (1 - x + b)$

bulunur. Bu ifadenin grafiğini çizerek sonucu bulalım :

Şekil 3.5.4 te, y ekseni sonuç ekseni olduğuna göre x ile $1 - x + b$ fonksiyonlarının kesiştiği ortak noktayı bularak sonuca ulaşabiliriz.

$$x = 1 - x + b$$

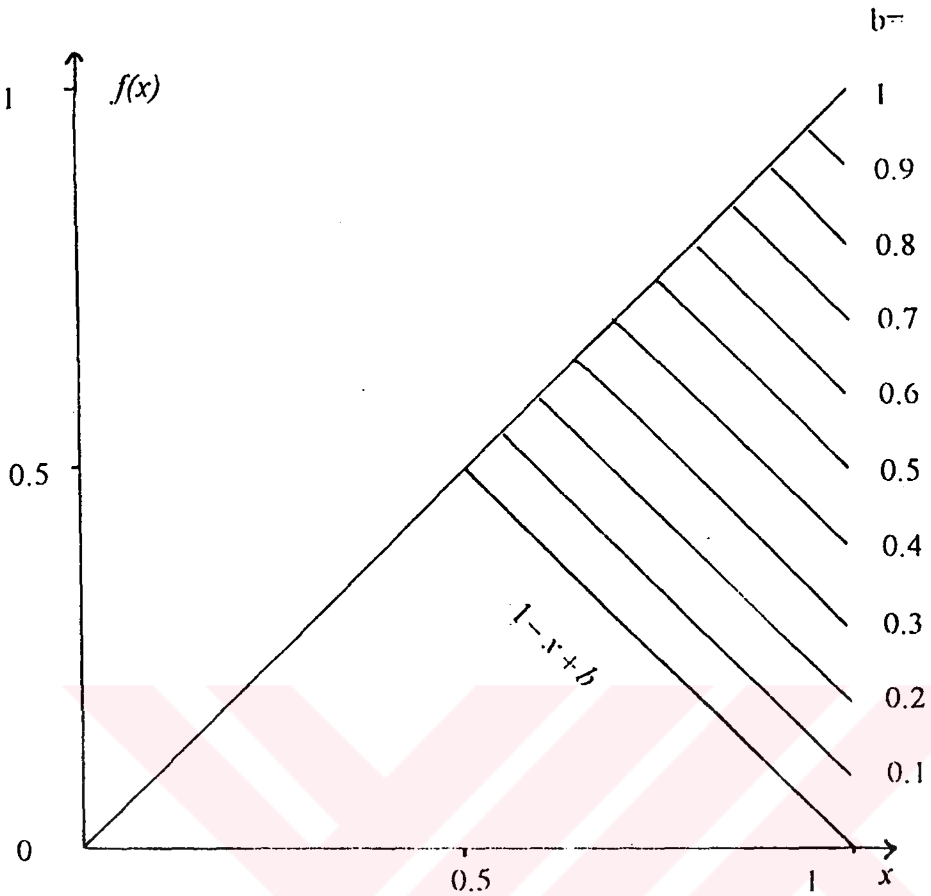
$$2x = 1 + b$$

$$x = (1 + b)/2$$

Bu noktanın her b değeri için sonucu $y = (1 + b) / 2$ dir. Yani

$$b' = \bigvee_x f(x)) = (1 + b) / 2$$

olur. Dolayısıyla $A'=A$ iken $\mu_B(v) = (1 + \mu_B(v)) / 2$ sonucuna ulaşılır. Alt-bölüm 3.4 teki Kriter 1, R_a kullanılarak sağlanmaz.



Şekil 3.5.4 R_a Kullanarak Max-min Bileşimi Çıkarımı Sonucunun Grafiği

3.5.3 R_m Kullanılarak Max-⊗ Bileşimi ile Çıkarım Sonucu[38]

A' nü A^2 *(çok A)* alalım ; *B'* sonucunu bulalım.

$$R_m : a \rightarrow b = (a \wedge b) \vee (1 - a)$$

$B' = A^2 \Delta R_m$

---

[38] MIZUMOTO,M., a.g.e., 1982,sayfa. 183-209

$$B' = \int_U \mu_A^2(u)/u \,\Delta \int_{U\times V} \left[\left(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\right)\vee\left(1-\mu_A(u)\right)\right]/(u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U}\left[\mu_A^2(u)\otimes\left\{\left(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\right)\vee\left[1-\mu_A(u)\right]\right\}\right]/v$$

olup, burada $\mu_A(u)=x^2$, $\mu_B(v)=b$, $\mu_{B'}(v)=b'$ olarak alınırsa,

$f(x) = x^2 \otimes [(x \wedge b) \vee (1-x)]$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde basit bir ifade elde edilir.

Ayrıca burada

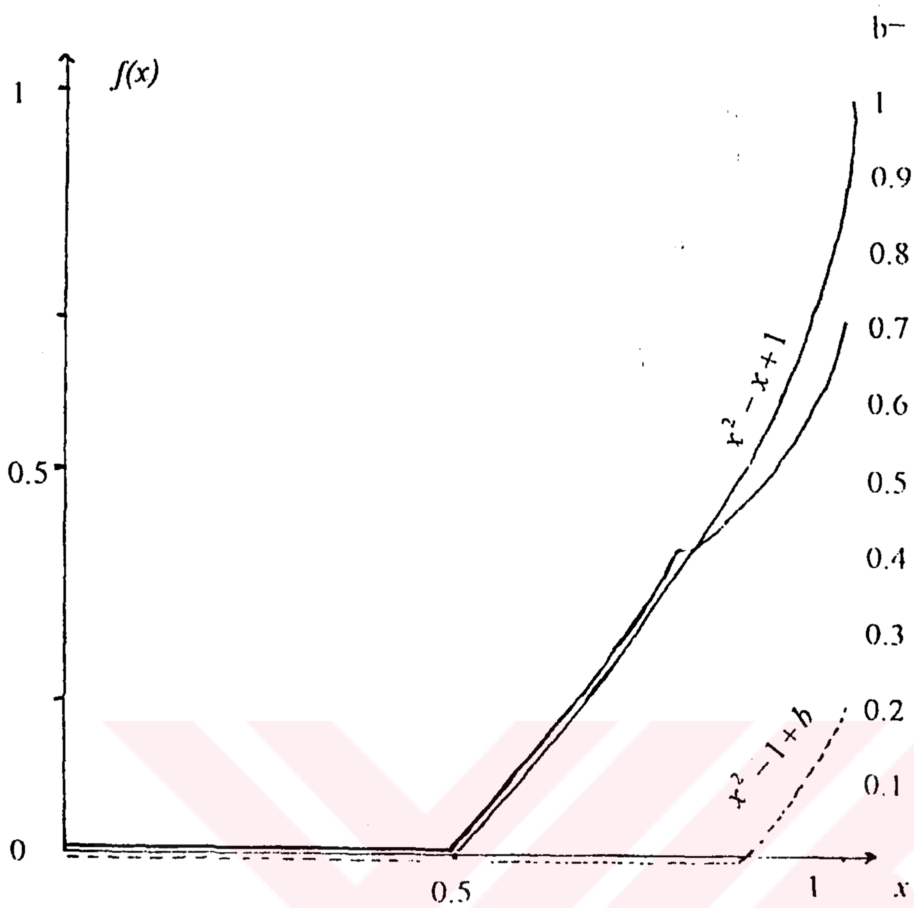
$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \otimes \left[(x\wedge b)\vee(1-x)\right] \\
&= 0 \vee \left\{x^2 + \left[(x\wedge b)\vee(1-x)\right]-1\right\} \\
&= 0 \vee \left\{\left[x^2-1+(x\wedge b)\right]\vee\left[x^2-1+1-x\right]\right\} \qquad (*) \\
&= 0 \vee \left[(x^2-1+x)\wedge(x^2-1+b)\right]\vee(x^2-x) \quad ;(x^2-x\le 0) \\
&= 0 \vee \left[(x^2-1+x)\wedge(x^2-1+b)\right] \\
&= \left[0\vee(x^2-1+x)\right]\wedge\left[0\vee(x^2-1+b)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin grafiğini çizerek sonucu bulalım :

Şekil 3.5.5 te, b = 0.2 iken $f(x)$ in maksimum değeri 0.2 dir. Burada $f(x)$, nokta nokta gösterilmiştir. Böylece $b' = \bigvee_x f(x))$ = 0.2 olur. b=0.7 iken $f(x)$, koyu çizgi ile gösterildiği gibi alacağı maksimum değer 0.7 olup $b' = \bigvee_x f(x))$ = 0.7 dir.

Sonuç olarak $b' = \bigvee_x f(x) = b$ sonucuna varırız. Buradan $A' = A^2$ *(çok A)* iken $B' = B$ sonucuna ulaşılır ve buda Kriter 2.2 yi gerçekler.

(*) $x,y,z \in R$ için $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$, $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$, $(x \wedge y) - z = (x - z) \wedge (y - z)$, $(x \vee y) - z = (x - z) \vee (y - z)$, $x - (y \wedge z) \vee (y - z)$ $x - (y \vee z) = (x - y) \wedge (x - z)$ ilişkileri vardır. Bu ifadelerin L.A.Zadeh'in "The concept of Linguistic variable and its applications to approximate reasoning II" adlı makalesinde ispatları vardır (A.N.)



Şekil 3.5.5 R_m Kullanarak Max- ⊗ Bileşimi Çıkarımı Sonucunun Grafiği

3.5.4 Max-min ve Max - ⊗ ile Çıkarım Sonuçlarının Tabloları

Burada kullandığımız ve kullanmadığımız gerektirme kurallarını içeren çıkarım sonuçlarını iki tablo içerisinde vereceğiz.

Tablo 3.5.1 GMP de Max-min ile Bulunmuş Çıkarım Sonuçları (Mizumoto et al, 1982)

	A	*çok A*	*az çok A*	*değil A*
R_a	$1+\mu_B/2$	$3+2\mu_B-\sqrt{5+4\mu_B}/2$	$\sqrt{5+\mu_B}-1/2$	Tanımsız
R_c	μ_B	μ_B	μ_B	$0.5 \wedge \mu_B$
R_s	μ_B	${\mu_B}^2$	${\mu_B}^{0.5}$	Tanımsız
R_g	μ_B	μ_B	${\mu_B}^{0.5}$	Tanımsız
R_m	$0.5 \vee \mu_B$	$3-\sqrt{5}/2 \vee \mu_B$	$\sqrt{5}-1/2 \vee \mu_B$	Tanımsız
R_b	$0.5 \vee \mu_B$	$3-\sqrt{5}/2 \vee \mu_B$	$\sqrt{5}-1/2 \vee \mu_B$	Tanımsız
R_Δ	${\mu_B}^{0.}$	${\mu_B}^{2/3}$	${\mu_B}^{1/3}$	Tanımsız

Tablo 3.5.2 GMP de Max-⊗ ile Bulunmuş Çıkarım Sonuçları (Mizumoto et al, 1982)

	A	*çok A*	*az çok A*	*değil A*
R_a	μ_B	μ_B	$\begin{Bmatrix} \mu_B + 1/4; & \mu_B \le 1/4 \\ \sqrt{\mu_B}\ ; & \mu_B \ge 1/4 \end{Bmatrix}$	Tanımsız
R_c	μ_B	μ_B	μ_B	$\varnothing$
R_s	μ_B	${\mu_B}^2$	${\mu_B}^{0.5}$	Tanımsız
R_g	μ_B	μ_B	${\mu_B}^{0.5}$	Tanımsız
R_m	μ_B	μ_B	$1/4 \vee \mu_B$	Tanımsız
R_b	μ_B	μ_B	$1/4 \vee \mu_B$	Tanımsız
R_Δ	μ_B	μ_B	${\mu_B}^{0.5}$	Tanımsız

4.YAKLAŞIK USAVURMADA FUZZY ÇIKARIM İLE İLGİLİ BİR UYGULAMA (YA DA OPERATÖRÜ İÇİN)

4.1 Modern Mantıkta YA DA Bağlacı[39]

VEYA bağlacının bir özel durumunu içermesi nedeniyle bu bağlaca ayrıca Ayrıcalıklı Veya denildiği de olmaktadır. $\vee$ bağlacında doğruluk değerleri arasındaki ilişkilerde $1 \vee 1 = 1$ olduğunu biliyoruz. Oysa bir durum var ki bu daima gerçekleşen bir şey değildir. Bu nedenle VEYA dan ayrı bir bağlaç varmış gibi düşünülür. Bu bağlaca YA DA bağlacı denir. p ve q iki önerme olmak üzere bunların YA DA lı birleşimi $p \veebar q$ şeklinde gösterilir.Bu bağlaca ait doğruluk değer tablosu aşağıdaki gibidir:

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Burada ilk satırdaki durum dikkat çekicidir. Bu aynı anda tek türlü gerçekleşecek işlerin birleşik bir olgu olmadığını anlatmaktadır. Örneğin "Ben Adana'da veya Konya'da doğdum" diyebilir miyiz? Burada VEYA bağlacı kullanılmıştır. Oysa bu bağlaçta, yukarıda açıkladığımız anlamda $1 \vee 1 = 1$ dir. Yani iki farklı iddianın aynı anda gerçekleşmesi aynı anda doğrulanabilmektedir. Örneğimize göre benim doğum yerim ya Adana'dır; ya Konya'dır ya da bunlardan başka bir yerdir.Oysa insan bir yerde ve bir zamanda doğar ve bu artık onun yazgısıdır, değiştirilemez. İşte VEYA bağlacındaki tanıma uymayan yani ayrıcalıklı olan bu durumdur.Bu açıklama doğtultusunda YA DA lı bileşimde $1 \veebar 1 = 0$ dır.

---

[39] AKSOY,Yavuz, a.g.e., 1995.Sayfa 25-26

Ya da bağlacı $\wedge, \vee$ cinsinden ifade edilmek istenirse,

$$p \underline{\vee} q \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}$$

gibi bir birleşim karşılıkgetirilebilir. Buna ait doğruluk değer tablosu düzenlenirse, sonuç olarak Ya da'lı bileşime ait tanımdaki sıralanış aynen bulunmuş olacaktır.

Ya da' lı bileşim ifade olarak da şöyle yorumlanır :

" p ya da q $\equiv$ p veya q ama her ikisi birden değil "

Bu bağlaca ait özellikler, Bölüm 2 de verildiği gibi şekilde ifade edilir:

p,q,r verilen üç önerme olmak üzere

$$p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p \qquad \text{(değişme özl.)}$$

$$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r) \qquad \text{(birleşme özl.)}$$

dir.

4.2 Fuzzy Mantıkta Ya Da Operatörü

Bu bölümde " ya da operatörü" nü n değerli $(n \geq 3)$ mantığa uygulayarak fuzzy mantığa genelleştireceğiz. Önce Alt-Bölüm 2.3 te tanımlanan n değerli mantığın doğruluk değerlerini ve bu değerleri kullanarak tanımlanan ilkeleri tekrar verelim :

n değerli mantığın doğruluk değer kümesi

$$T_n = \left\{ 0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$$

olarak gösterilmiştir[40]. $n \geq 3$ için T_n deki değerleri kullanarak ta aşağıdaki ilkeler tanımlanmıştır :

$$\bar{a} = 1 - a$$
$$a \wedge b = \min(a,b)$$
$$a \vee b = \max(a,b)$$

$a,b \in T_n$ olacak şekilde ya da operatörünü

$$a \underline{\vee} b = (a \vee b) \wedge \left[1 - (a \wedge b) \right]$$

---

[40] KLIR,G., FOLGER,T., a.g.e., 1988.p.27-33

şeklinde tanımlarız. Bu ilişkiyi, n=3 için doğruluk değer tablosu düzenleyerek inceleyelim:

Tablo 4.2.1 Üç Değerli Mantıkta Ya Da Operatörüne Ait Doğruluk Değer Tablosu

a	b	$a\underline{\vee}b$
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	1
1	1/2	1/2
1	1	0

Bu tablo, yukarıda tanımlanan ilkeler kullanılarak oluşturulmuştur.

Fuzzy mantığın, çok değerli mantığın bir genişlemesi olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle Alt-Bölüm 2.3 te açıklandığı gibi çok değerli mantıktan fuzzy mantığa geçerek Ya Da operatörünü daha geniş biçimde ele alabiliriz.

Burada x, X de bir eleman, A ve B, X de fuzzy alt kümeler olmak üzere

$$a = \mu_A(x),\ b = \mu_B(x), \qquad a,b \in [0,1]$$

olsun[41]. Buradan Ya da operatörünü

$$a\underline{\vee}b = (a \vee b) \wedge [1-(a \wedge b)]$$

şeklinde tanımlarız.

$\underline{\vee}$ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar :

$\forall a,b,c \in [0,1]$ için

(1) $a\underline{\vee}b = b\underline{\vee}a$ (Değişme özl.)

(2) $a\underline{\vee}(b\underline{\vee}c) = (a\underline{\vee}b)\underline{\vee}c$ (Birleşme özl.)

---

[41] KAUFMANN, A., a.g.e. 1975, sayfa 10-22

(3) $a\underline{\vee}0 = 0\underline{\vee}a = a$ (Etkisiz eleman)

(4) $a\underline{\vee}1 = 1\underline{\vee}a = \bar{a}$

(5) $a\underline{\vee}1/2 = 1/2\underline{\vee}a = 1/2$ (Yutan Eleman)

dır.

4.3 Ya Da Operatörünün Fuzzy Usavurmada Kullanılması ve Bundan Elde Edilen Sonuçlar

Bu çalışmamda Ya Da operatörünü fuzzy gerektirme kuralında kullandım. GMP kalıbında $A \Rightarrow B$ ile gösterilen fuzzy gerektirme kuralları Tanım 3.3.3 te gösterilmişti. Burada $\mu_A(u) = a$ ve $\mu_B(v) = b$ olacak şekilde $a \rightarrow b$ ile gösterilen gerektirme kurallarından biri olan

$$R_b:\ a \rightarrow b = (1-a) \vee b$$

yerine

$$R_*:\ a \rightarrow b = (1-a)\underline{\vee} b$$

şeklinde yeni bir gerektirme kuralı oluşturdum. Bu kural yardımıyla, çıkarımın birleşimi kurallarından biri olan Max-min yöntemini kullanarak; A' nü sırasıyla A, *çokA*, *azçok A* ve *değilA* olduğunda B' nün alacağı sonuçları aşağıdaki şekilde buldum .

Burada A ve A', U da, B ve B', V de tanımlı fuzzy kümeler olsun:

1-) A' nü A alalım. B' sonucunu bulalım.

$$B' = A \circ R_*$$

$$B' = \int_U \mu_A(u)/u \circ \iint_{U\times V} \left[\left(1-\mu_A(u)\right) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-\left((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v)\right)\right] \big/ (u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U} \left[\mu_A(u) \wedge \left\{\left[\left(1-\mu_A(u)\right) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-\left((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v)\right)\right]\right\}\right] \big/ v$$

Burada $\mu_A(u) = x$, $\mu_B(v) = b$, $\mu_{B'}(v) = b'$ olarak alırsak

$$f(x) = x \wedge \left\{\left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[1-\left((1-x) \wedge b\right)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde daha kolay bir ifade haline gelir.

$$f(x) = x \wedge \{[(1-x) \vee b] \wedge [1-((1-x) \wedge b)]\}$$

$$f(x) = x \wedge [(1-x) \vee b] \wedge [1-((1-x) \wedge b)]$$

$$f(x) = x \wedge [(1-x) \vee b] \wedge [(1-(1-x)) \vee (1-b)]^{(*)}$$

$$f(x) = x \wedge [x \vee (1-b)] \wedge [(1-x) \vee b] \qquad ; \qquad x \wedge [x \vee (1-b)] = x$$

$$f(x) = x \wedge [(1-x) \vee b]$$

$$f(x) = [x \wedge (1-x)] \vee [x \wedge b]$$

bulunur. Burada iki yolla çözüme ulaşabiliriz :

1.Yol

$$f(x) = [x \wedge (1-x)] \vee [x \wedge b]$$

$$b' = \bigvee_x f(x) = \bigvee_x [x \wedge (1-x)] \vee [x \wedge b] = \bigvee_x [x \wedge (1-x)] \vee \bigvee_x [x \wedge b]$$

Burada $\bigvee_x [x \wedge (1-x)] = 0.5$ ve $\bigvee_x [x \wedge b] = b$ dir. Buradan sonuç olarak

$$b' = 0.5 \vee b$$

sonucuna ulaşırız. Burada $\mu_B(v) = b$, $\mu_{B'}(v) = b'$ olduğundan

$$\mu_{B'}(v) = 0.5 \vee \mu_B(v)$$

ve buradan da

$$B' = 0.5 \vee B$$

yazılabilecektir.

2.Yol

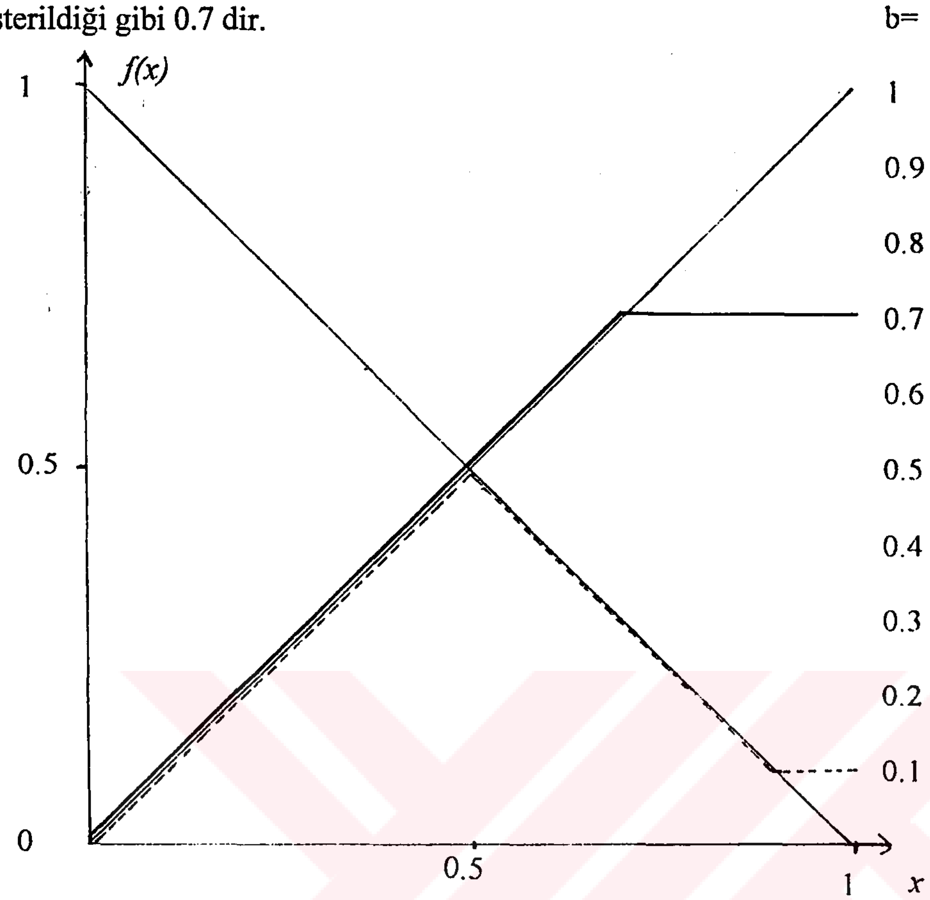
$f(x) = x \wedge [(1-x) \vee b]$ idi.

Bu ifadeyi grafikte inceleyelim. Şekil 4.3.1 de $b = 0.1$ iken x in tüm değerleri için b' nün alabileceği maksimum değer, nokta nokta ile gösterildiği gibi 0.5 tir. Aynı şekilde

---

(*) Bakınız Sayfa 43

$b = 0.7$ iken x in tüm değerleri için b' nün alabileceği maksimum değer koyu çizgi şeklinde gösterildiği gibi 0.7 dir.



Şekil 4.3.1 $A' = A$ iken R_* Kullanarak Max-min Bileşimi Çıkarımı Sonucunun Grafiği

Sonuç olarak $b' = \bigvee_x f(x) = 0.5 \vee b$ sonucuna ulaşırız. Yani $A' = A$ iken $B' = 0.5 \vee B$ olur.

2-) A' nü A^2 ($çok\,A$) alalım. B' sonucunu bulalım.

$$B' = A^2 \circ R_*$$

$$B' = \int_U \mu_A{}^2(u)/u \circ \iint_{U\times V} \left[(1-\mu_A(u)) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v))\right]/(u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U} \left[\mu_A{}^2(u) \wedge \left\{\left[(1-\mu_A(u)) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v))\right]\right\}\right]/v$$

Burada $\mu_A{}^2(u) = x^2$, $\mu_B(v) = b$, $\mu_{B'}(v) = b'$ olarak alırsak

$$f(x) = x^2 \wedge \left\{\left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[1-((1-x) \wedge b)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde daha kolay bir ifade haline gelir.

$$f(x) = x^2 \wedge \{[(1-x) \vee b] \wedge [1-((1-x) \wedge b)]\}$$

$$f(x) = x^2 \wedge [(1-x) \vee b] \wedge [(1-(1-x)) \vee (1-b)]^{(*)}$$

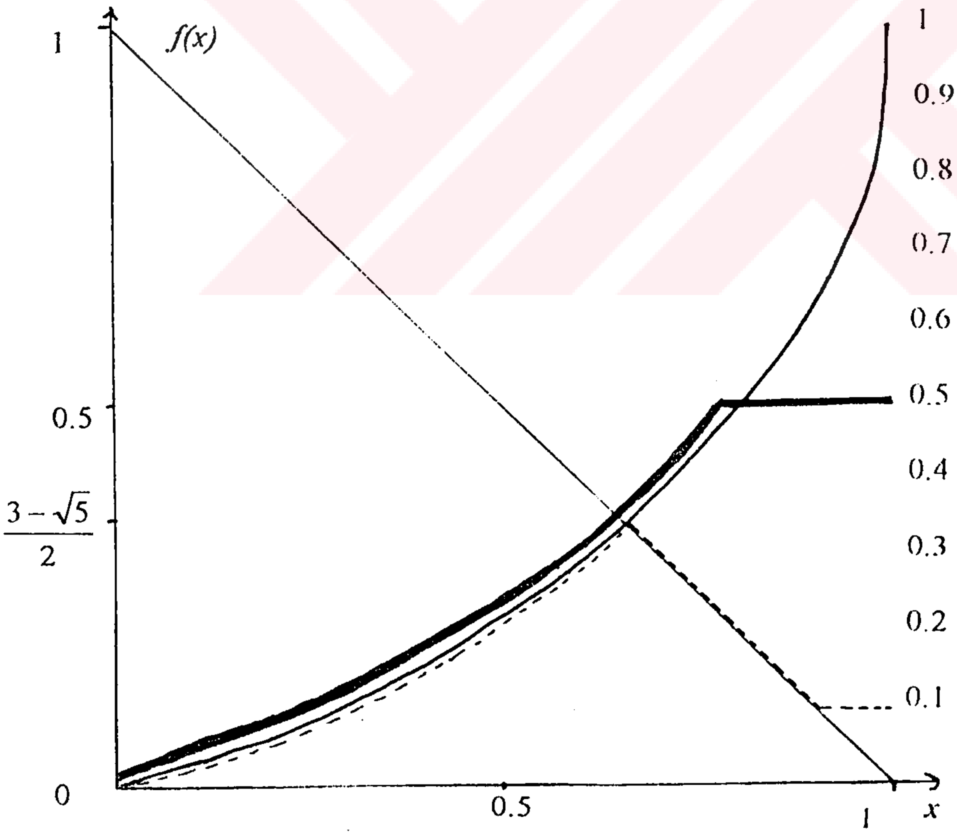
$$f(x) = x^2 \wedge [x \vee (1-b)] \wedge [(1-x) \vee b]$$

$$f(x) = [(1-x) \vee b] \wedge \{(x^2 \wedge x) \vee (x^2 \vee (1-b))\} \qquad ; \qquad (x^2 \wedge x = x^2)$$

$$f(x) = [(1-x) \vee b] \wedge [(x^2 \vee (x^2 \wedge (1-b))] \qquad ; \qquad (x^2 \vee (x^2 \wedge (1-b)) = x^2$$

$$f(x) = x^2 \wedge [(1-x) \vee b]$$

bulunur.



Şekil 4.3.2 $A' = A^2$ iken R* Kullanarak Max-min Bileşimi Çıkarımı Sonucunun Grafiği

(*) Bakınız Sayfa 43

Bu ifadeyi grafikte inceleyelim. Şekil 4.3.2 de $b = 0.1$ iken x in tüm değerleri için b' nün alabileceği maksimum değer nokta nokta ile gösterildiği gibi $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ dir. Aynı şekilde $b = 0.5$ iken x in tüm değerleri için b' nün alabileceği maksimum değer koyu çizgi şeklinde gösterildiği gibi 0.5 tir. Sonuç olarak $b' = \bigvee_x f(x) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee b$ sonucuna ulaşırız. Yani $A' = A^2$ iken $\mu_{B'}(v) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \mu_B(v)$ olur.

3-) A' nü $\overline{A}$ (*değil A*) alalım. B' sonucunu bulalım.

$$B' = \overline{A} \circ R_*$$

$$B' = \int_U \left(1-\mu_A(u)\right)/u \circ \iint_{U\times V} \left[\left(1-\mu_A(u)\right) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-\left((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v)\right)\right]/(u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U} \left[\left(1-\mu_A(u)\right) \wedge \left\{\left[\left(1-\mu_A(u)\right) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-\left((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v)\right)\right]\right\}\right]/v$$

Burada $\mu_A(u) = x$, $\mu_B(v) = b$, $\mu_{B'}(v) = b'$ olarak alırsak

$$f(x) = (1-x) \wedge \left\{\left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[1-\left((1-x) \wedge b\right)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde daha basit bir ifade haline getiririz.

$$f(x) = (1-x) \wedge \left\{\left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[1-\left((1-x) \wedge b\right)\right]\right\}$$

$$f(x) = (1-x) \wedge \left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[\left(1-(1-x)\right) \vee (1-b)\right]^{(*)}$$

$$f(x) = (1-x) \wedge \left[x \vee (1-b)\right] \wedge \left[(1-x) \vee b\right] \qquad ; \qquad (1-x) \wedge \left[(1-x) \vee b\right] = 1-x$$

$$f(x) = (1-x) \wedge \left[x \vee (1-b)\right]$$

$$f(x) = \left[(1-x) \wedge x\right] \vee \left[(1-x) \vee (1-b)\right]$$

Burada

$$b' = \bigvee_x f(x) = \bigvee_x \left[x \wedge (1-x)\right] \vee \bigvee_x \left[(1-x) \wedge (1-b)\right]$$

(*) Bakınız Sayfa 43

olur.

$$\bigvee_x \left[x \wedge (1-x)\right] = 0.5$$

olduğundan son ifade $b' = 0.5 \vee \bigvee_x \left[(1-x) \wedge (1-b)\right]$

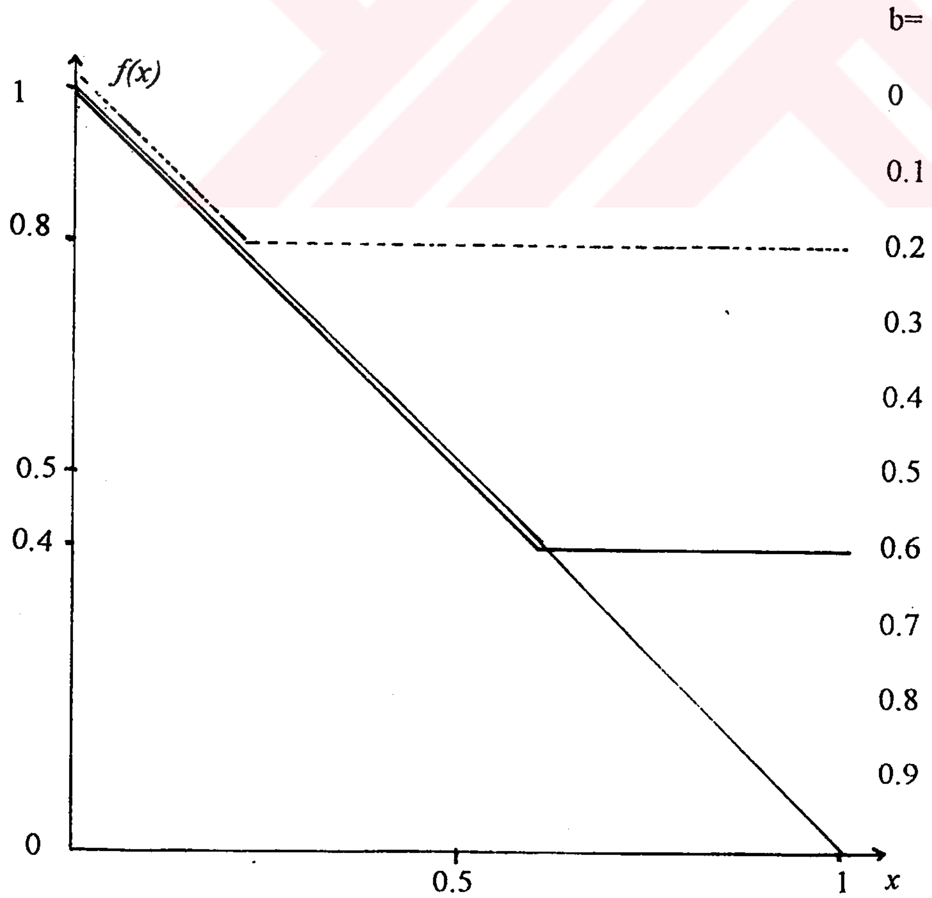
halini alır. Şimdi

$$h(x) = \left[(1-x) \wedge (1-b)\right]$$

olarak alıp sonucu grafikte inceleyelim.

Şekil 4.3.3 te $b = 0.2$ iken tüm x değerleri için *h(x)* in alacağı maksimum değerin 0.8 olduğunu nokta nokta olarak çizilmiş olan grafikten anlayabiliriz. Aynı şekilde $b = 0.6$ iken tüm x ler için koyu çizgi ile çizilmiş grafikten de *h(x)* in maksimum değerini 0.4 olarak görebiliriz.

Sonuç olarak $b' = 0.5 \vee \bigvee_x h(x) = 0.5 \vee (1-b)$ sonucuna ulaşırız. Yani $A' = \overline{A}$ iken $B' = 0.5 \vee \overline{B}$ olur.



Şekil 4.3.3 $A' = A$ iken R* Kullanarak Max-min Bileşimi Çıkarımı Sonucunun Grafiği

4) A' nü $A^{0.5}$ (*az çok A*) alalım. B' sonucunu bulalım.

$$B' = A^{0.5} o R_*$$

$$B' = \int_U \mu_A^{0.5}(u)/u \; o \int_{U\times V} \left[(1-\mu_A(u)) \vee (\mu_B(v))\right] \wedge \left[1-((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v))\right] / (u,v)$$

$$B' = \int_V \bigvee_{u\in U}\left[\mu_A^{0.5}(u) \wedge \left\{\left[(1-\mu_A(u)) \vee \mu_B(v)\right] \wedge \left[1-((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v))\right]\right\}\right] / v$$

Burada $\mu_A^{0.5}(u) = \sqrt{x}$, $\mu_B(v)=b$, $\mu_{B'}(v)=b'$ olarak alınırsa,

$$f(x) = \sqrt{x} \wedge \left\{\left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[1-((1-x) \wedge b)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$b' = \bigvee_x f(x)$$

şeklinde kolay bir ifade olur.

$$f(x) = \sqrt{x} \wedge \left\{\left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[1-((1-x) \wedge b)\right]\right\}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \wedge \left[(1-x) \vee b\right] \wedge \left[x \vee (1-b)\right]$$

olur.

Burada b' sonucuna ulaşmak üzere $x \in [0,1]$ için 0 dan 1 e, 0.1 adım ile değerler vererek aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$A' = A^{0.5} \text{ (az çok A) iken } \mu_{B'}(v) = \begin{cases} 0.6 & ; \quad \mu_B(v) \le 0.4 \\ \mu_B(v) & ; \quad \mu_B(v) > 0.4 \end{cases}$$

olur.

SONUÇ VE TARTIŞMA

İkili (Modern) mantıktan başlayarak, çok değerli mantıkta elde edilen sonuçlar, Fuzzy Mantık içinde kullanılmıştır. Çıkarımın özünü oluşturan Yaklaşık Usavurmada Fuzzy Çıkarım kalıplarının oluşması, gerektirme kurallarına (Implication Rules) bağlı olarak gerçekleşmiştir. Bu kurallar R_a, R_c, R_m, R_s, R_g, R_g, R_Δ, R_b ,... gibi sembollerle temsil edilmiştir. Bunlar için başlangıçta Modus Ponens (İleri zincir kuralı) ve Modus Tollens (Geri zincir kuralı) olarak adlandırılan çıkarım kalıpları kullanılmıştır.

İkili mantıktaki $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ operatörlerinden başka $\underline{\vee}$ operatörünün de önemli bir operatör olduğu bilinmektedir. Zadeh'ten başlayarak günümüze gelinceye kadar olan süreçte , bilim adamları çalışmalarında $\underline{\vee}$ operatöründen Fuzzy Mantık içerisinde az da olsa bahsetmişlerdir.

Bu çalışmada $\underline{\vee}$ operatörünün çok değerli mantıktan, fuzzy mantığa geçişi verilirken elde edilen sonuçlar, $\vee$, $\wedge$ operatörlerine ait sonuçların sınanması suretiyle elde edilmiştir. Özel olarak $\underline{\vee}$ operatörünün bulunduğu R_* ile temsil ettiğimiz fuzzy gerektirme kuralı, yapılan uygulamalar sonucu çıkarım kalıbını geçerli kılmaktadır. Burada kesin olmayan biricik sonuç, 0.5 için elde edilen değerlere ait yargıdır. Bu ise $\underline{\vee}$ operatörünün işlevinden kaynaklanmaktadır.

Bu çalışma ile $\underline{\vee}$ operatörünün fuzzy mantıktaki durumu anlaşılmaktadır. Buna bağlı olarak R_* gerektirme kuralı ile elde edilen sonuçlar Yaklaşık Usavurmada Fuzzy Çıkarım Mantığı içine yerleştirilmiş olmaktadır.

KAYNAKLAR

Aksoy, Y. (1995) Modern Mantık, YTÜ yayınları, 1995.

Baldwin, J.F., (1979)" A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic", Fuzzy Sets and Systems, 2, sayfa 309-325

Dubois, D. , Prade, H., (1979) " Operations in a Fuzzy-valued logic", Information and control , 43: sayfa 224-240

Dubois, D. (1979) "Quelques classes d'operateurs remarquables pour combiner des ensembles flous". Busefal. 29-35

Fukami,S.,Tanaka, K. Mizumoto, M., (1980) "Some considirations on fuzzy conditional inference", Fuzzy Sets and Systems, 4. sayfa 243-273

Kandel, A. (1986), Fuzzy Mathematical Techniques with Applications. Addison-Wesley

Karanfil, S. , (1994), " Bulanık Kümeler ve Bulanık Mantığa Giriş" Yüksek Lisans Tezi

Karanfil, S. , (1997), " Fuzzy Lojik probleminde Üyelik Fonksiyonlarının Belirlenmesinde Deneysel verilere dayanarak Bir yöntem Geliştirilmesi", Doktora Tezi

Karanfil, S. , Tekin, N. (1995) "Fuzzy Mantık - Temel Felsefesi, Kuralları, Keskin Mantıkla Karşılaştırılması ve uygulama alanları" Öneri (M.Ü.Sosyal Bil.Enst. Dergisi), 1, sayı 2, sayfa.3-15

Kauffmann A.(1975) , *Introduction to the Theory of Fuzzy Subset.* Vol.1, Academic Press, New York, sayfa 10-22

Kaynak, O. (1992) "Bulanık Denetim ve Uygulamaları", Şişe Cam Semineri. Sayfa 1-14

Klir G., Folger T, (1988) Fuzzy Sets, Uncertainity and Information. Prentice Hall, Englewood Cliffs. N.J.

Lee, C.C., (1990) "Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 20,No 2, Part I,II

Misawa, E.,A., (1992) " Application on Fuzzy Sets and Fuzzy Relations : Approximate Reasoning " , Lecture Notes, Oklahoma State Unıv.

Mizumoto, M. (1981) "Note on the Arithmetic Rule by ZADEH for Fuzzy Conditional Inference", Cybernetics and Sytems, 12. Sayfa 247-304

Mizumoto, M. (1982) “Fuzzy conditional inference under max - ⊗ composition”, Informational Sciences, 27, sayfa 183-209

Mizumoto, M. ,(1985) “Extended Fuzzy Reasoning”, Approximate Reasoning in Expert Systems: sayfa 71-85

Ross, T.J. (1995) Fuzzy Logic with Engineering Applications, McGraw Hill Co., Inc.

Sugeno, M., Takagi, T., (1983) “Multi Dimensional Fuzzy Reasoning”, Fuzzy Sets and Systems, sayfa. 313-325

Türkşen, İ. (1985)“ Bulanık kümeler kuramı ve uygulamaları”, Yöneylem Araştırması Dergisi, 1985, Cilt 4, Sayı 1

Zadeh, L., (1963)“ Fuzzy Sets”, Informatıon and Control, Vol.8, sayfa.338 - 353

Zadeh L.,(1972) “Fuzzy Set Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges”, I.Cybern.2, sayfa 4-34

Zadeh, L., (1975) “Calculus of Fuzzy Restriction”. Fuzzy Sets and their applications to Cognitive and Decision Processes. sayfa 1-39

Zadeh, L., (1977)“A theory of approximate reasoning”, Machine Intelligence Vol 9. sayfa 149-194

Zadeh, L., (1987) “The concept of Linguistic Variable and its Applications to approximate reasoning I-II-III”, Fuzzy Sets and Applications: Selected papers by Zadeh. Wiley-Interscience Pub.

Zimmermann, H.J., (1985) Fuzzy Set Theory- and its Applications .sayfa 131-169

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Erdoğan Mehmet ÖZKAN
Doğum Tarihi	: 2-12-1967
Doğum Yeri	: İstanbul
İlk Öğretim	: 1973-1978 Faik Binal İlkokulu
Orta Öğretim	: 1978-1981 Özel Yıldız Lisesi
Lise Öğretimi	: 1981-1984 Etiler Lisesi
Lisans Öğretimi	: 1984-1989 YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	: 1989-1992 YTÜ fen Bilimleri Enstitüsü
Göreve Başlama	: 1990 YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi
Doktora Öğrenimi	: 1992 YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü