

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eğrilik Çizgileri Korunarak
Bakülebilen Yüzeyler

Füsun Uras

Doktora Tezi

2.209
43

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ

EĞRİLİK ÇİZGİLERİ KORUNARAK BÜKÜLEBİLEN YÜZEYLER

Doktora Tezi
(Füsün URAS)

Tezin Dekanlığa teslim tarihi : 13. 6. 1983

Tezin savunulduğu tarih : 7.11.1983

DOKTORAYI YÖNETEN ÖĞ.ÜYESİ

Prof. Mustafa ŞENATALAR

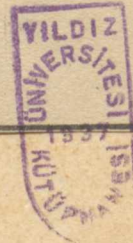
DİĞER JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER

Doç. Dr. İ. Hakkı ERDOĞAN

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R. 209
Alındığı Yer : Ten Bil. Tra. 43
Tarih : 26.5.1987
Fatura :
Fiatı : 1000 TL.
Ayniyat No : 1/6
Kayıt No : 44803
UDC : 512
Ek : 378.242



x

XCOMP.

4275

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

D.B. No 42715

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ * FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

EĞRİLİK ÇİZGİLERİ KORUNARAK

BÜKÜLEBİLEN YÜZEYLER

(Doktora Tezi)

Füsun URAS

İstanbul, 1983

İ Ç İ N D E K İ L E R

Nu.	Konu	Sahife
-	Özet	1
-	Summary	111
1	Giriş	1
2,3	Problemin Tanıtılması ve Konu Hakkında Bilinenlerin Özeti	4
4	Problemde Hareket Noktasını Oluşturan 2. Derece Denklemin Diskriminantının Orijinal Bir İfadesi	13
5	Ortalama ya da Gauss Eğriliği Sabit Yüzeyleri Kapsayan Özel Çözüm	16
6	Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilen Yüzeyle Paralel Yüzeylerle İlgili Teorem 1. ve Teorem 2.	20
7	Genel Halde Elde Edilen Diferansiyel Denklem Sisteminden $s_u s_v = 0$ Koşulu İle Bulunacak Özel Çözüm İle İlgili Sonuçlar ve Teorem 3.	23
8	Yalnız Bir Eğrilik Çizgiler Ailesi Düzlemsel Olan Yüzeylerin, Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilmeleri İçin Gerek ve Yeter Koşulu İçeren Teorem 4.	27
9	Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilen ve Bir Eğrilik Çizgiler Ailesi Düzlemsel Olan Yüzeylerin İnvariantları	29
10	Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilen Kanal Yüzeylerin İnvariantları, Denklemleri ve Teorem 5.	32
11	Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilen Joachimsthal Yüzeylerinin İnvariantları, Denklemleri ve Bunların Kanal Yüzeyler İle Olan İlgisini Veren Teorem 6.	38
12	Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilen ve Aynı Zamanda Hem Kanal Yüzey Hem de Joachimsthal Yüzeyi Olan Yüzeyler	42
13	Eğrilik Çizgileri Korunarak Bükülebilen ve Bir Eğrilik Çizgiler Ailesi Düzlemsel Olan Weingarten Yüzeyleri İle İlgili Teorem 7.	44
-	Kaynaklar	48

Ö Z E T

Bu çalışmada eğrilik çizgileri korunarak bükülebilir (Eçkb.) yüzlerin araştırılması problemi üzerinde durulmuştur. Problem ilk kez O.Bonnet tarafından ortaya atılmış ve incelenmiştir. Genel halde çözümü olanaksız gören bu problem, O.Bonnet'nin verdiği sonuçlar ile, temel diferansiyel geometri kitaplarında da yer almaktadır.

Bu çalışmamızda önce, konu hakkında bilinenlerin bir özeti verilir. Bu özet, değişik bir yöntem ile sunulmuştur; ayrıca, özellikle dönel yüzler özel halinde bazı ek sonuçlar içermekte ve yeterince aydınlanmamış noktalarla açıklık getirmektedir. Bundan sonra problem üzerinde yaptığımız kendi incelemelerimiz ve vardığımız yeni sonuçlar verilmektedir.

Çalışma iki bölüm halinde ve 13 numaraya ayrılarak sunulmuştur. Birinci bölüme ayrılan Nu. 1 den sonra, Nu. 2 ve 3 de problem hakkında bilinenler toplanmıştır.

Nu. 4 de, problem için hareket noktası oluşturan 2. derece cebirsel denklemin çok karmaşık olan diskriminantı, bazı çalışmalarda da geçen bir varyantın karesi olarak ifade edilmiştir. Ayrıca, bu amaçla tanımlanan $\bar{D}$ invariantlarının söz konusu denklemin katsayıları ile bağıntıları verilmiştir.

Nu. 5 de problemin bir özel çözümü söz konusu edilmiştir. Bu özel çözümün, H Ortalama ve K Gauss eğriliği sabit yüzeylerden Eçkb. yüzeyleri geçtiği ve $K=1/p^2 = \text{sbt.} > 0$ yüzeylerine paralel yüzeylerden oluştuğu gösterilmiştir. Nu. 6 da, Eçkb. yüzeylere paralel yüzeylerle ilgili sonuçları içeren Teorem 1. ve Teorem 2. ispatlanmıştır.

Nu. 7 de, problemin genel halde indirgendiği, $e(u,v)$, $g(u,v)$, $s(u,v)$ fonksiyonları arasında geçerli üç diferansiyel denklemin, $s=s(u)$ (ya da $s=s(v)$) halindeki özel çözümü araştırılmıştır. Böylece, genel çözümünden bu özel halde elde edilen sonucun, Nu. 2 de, ayrı bir inceleme ile bulunduğu söz ettiğimiz

Özel hale ait sonucu tüm kapsamı ile vermediği gösterilmiştir. Dolayısıyla Nu. 2 de sözü edilen ayrı incelemenin gerçekten zorunlu olduğu görülmüş olmaktadır. Bu Nu. da ayrıca her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel o yüzeyler arasında Eçkb. yüzeylerin sadece Monge yüzeylerinden ibaret oldu nu veren Teorem 3. ispatlanmaktadır.

Nu. 8 de, Eçkb. bir yüzeyin bir eğrilik çizgiler ailesinin düz sel olması için gerek ve yeter koşulu içeren Teorem 4. ispatlanmaktadır. N da ise Eçkb. ve bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan yüzeylere ait t büyüklükler birer değişkenli iki keyfi fonksiyona bağlı olarak elde edilm tir.

Nu. 10 da, Eçkb. kanal yüzeylerin büyüklükleri ve denklemleri de edilmiştir. Ayrıca bu yüzeylerin zarf olduğu bir parametrelili küre aile nin merkezler eğrisinin düzlemsel bir eğri olma zorunda olduğunu ifade eden Teorem 5. ispatlanmıştır.

Nu. 11, Eçkb. Joachimsthal yüzeylerinin incelenmesine ayrılmış bunlara ait büyüklükler ve denklemler elde edilmiştir. Kanal yüzeyler ve Joachimsthal yüzeyleri için elde edilen sonuçların karşılaştırılmasından rem 6. elde edilmiştir. Bu teoreme göre bir kanal yüzey Eçk. ancak bir Joachimsthal yüzeyine ve bir Joachimsthal yüzeyi de Eçk. ancak bir kanal yüzeye bükülebilir. Nu. 12 de, Eçkb. ve hem kanal yüzey hem de Joachimsthal yüzeyi olan yüzeylerin, izotermik yüzeylerin bir alt sınıfını oluşturan il yüzeyler olduğuna değinilmiş ve bu yüzeylerin büyüklükleri verilmiştir.

Son olarak Nu. 13 de, Eçkb. ortalama ya da Gauss eğriliği sabit yüzeylerden bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olanların büyüklükleri verilmiştir; ayrıca, bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan W. (Weingarten) lerinden Eçkb. yüzeylerin, sadece, bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel ve Eçkb. $K=1/p^2$ sbt. yüzeylerin paralellerinden oluştuğunu ifade eden Teor 7. ispatlanmıştır.

S U M M A R Y

In this dissertations, a study of determining the surfaces whose lines of curvature are preserved under bending (włcpub.) is given. This problem was first posed and worked on by O. BONNET. Although the solution of the problem, in the general case, does not seem possible, the results of O. BONNET appear in basic textbooks of differential geometry.

In the course of our study, first a summary of known facts is given. This is done from a diferent point of view, it includes some new results for the special case of surfaces of revolution and it clears out some ambiguous points. After the summary we state our results on the problem.

This work consists of two chapters in which there are thirteen paragraphs. The first paragraph is the introduction, the second and the third paragraphs contain the so far known material.

In the fourth paragraph, the very complicated discriminant of the quadratic algebraic equation, which is the starting point for solving the problem, is expressed as the square of an invariant which appears in some papers. Further, the relations between the invariants D , $\bar{D}$, which are defined for the above purpose, and the coefficients of the above mentioned equation are given.

The paragraph 5. is a particular solution of the problem. This particular solution contains the surfaces włcpub. with the property that the mean curvature H and the Gaussian curvature K are constant. It also contains the surfaces parallel to the ones for which $K=1/p^2=\text{constant}>0$.

In the 6th. paragraph, theorem 1. and theorem 2. are proved. These two theorems give results about the surfaces parallel to the surfaces włcpub.

In paragraph 7., we search for the particular solution in the form $s=s(u)$ (or $s=s(v)$) of three differential equations among the function

$e(u,v)$, $g(u,v)$, $s(u,v)$. Thus we have shown that the result obtained in this particular case of the general solution does not give us the result we have obtained in paragraph 2. with a different approach. Therefore it is seen that this mentioned approach is really necessary. Further in this paragraph we prove theorem 3. which states that the surfaces, whose both families of lines of curvature are planar and w/cpub., are just Monge surfaces.

In the 8th. paragraph, we prove theorem 4. which gives a necessary and sufficient condition for only one family of lines of curvature of surface w/cpub. to be planar.

In paragraph 9., we obtain all fundamental magnitudes of the surface w/cpub. whose one family of lines of curvature is planar as dependent on two arbitrary functions of one variable.

In the 10th. paragraph we obtain the equations and the fundamental magnitudes for canal surfaces w/cpub. Further we prove theorem 5. which shows that, the locus of centers of family of spheres enveloped by these surfaces are plane curves.

In paragraph 11., we study Joachimsthal surfaces w/cpub. and we obtain the fundamental magnitudes and equations for these surfaces. Later, theorem 6. is proved by comparing the results for canal surfaces and Joachimsthal surfaces. According to this theorem a canal surface w/cpub. can only be bent into a Joachimsthal surface and a Joachimsthal surface w/cpub. can only be bent into a canal surface.

In the 12th. paragraph, the surfaces which are both canal surfaces and Joachimsthal surfaces w/cpub. are shown to be an interesting subclass of isothermic surfaces, and we obtain the fundamental magnitudes for these surfaces.

Finally in paragraph 13. we give the fundamental magnitudes of surfaces w_lc_{pub}. of constant mean or Gaussian curvature with the property that a family of lines of curvature is planar. Further we prove theorem 7. which shows that W. (Weingarten) surfaces w_lc_{pub}. and whose one family of lines of curvature are planar are just the surfaces parallel to the ones with the property that a family of lines of curvature is planar and for which $K=1/p^2=\text{constant}$.

Riř.

1. Bu çalışmada, eğrilik çizgileri korunarak bükülebilen (Eçkb.) yüzlerin araştırılması problemi üzerinde durulacaktır. Oldukça eski ve çetli dönemlerde ele alınan bu problem ilk kez O.Bonnet tarafından ortaya çıkmıştır [1]. Bonnet bu çalışmasında, genel halde çözümü olanaksız görünen problemi mümkün olduğu oranda açıklığa kavuşturmuştur. Söz konusu çalışmada önce doğal olarak ayrılması gereken özel hallerin incelenmesi yapılmıştır. Daha sonra hesaplar genel hali oluşturan iki yüzey sınıfından her ikisinin de reel olduğu "reel hal" için değil, reel olmayan hal için yürütülmüş, gerçekleştirilmiş olan "reel hal" için de paralel işlemlerin yapılabileceğine işaret edilmiştir. Sonuç olarak: Eçkb. yüzeylerin invariyanntlarının belirtilmesi probleminin, Gauss eğriliği sabit olan yüzeylerle ilginç bir şekilde bağlantılı olduğu saptanmıştır. Gerçekten Bonnet, Eçkb. yüzeylerin eğrilik çizgilerinin, sabit Gauss eğrilikli bir yüzeyin eğrilik çizgileri ile aynı küresel tasvire sahip olduğunu ispat etmiştir⁽¹⁾. Söz konusu çalışmada ayrıca problemin çözümü, Gauss eğriliği sabit olan bir yüzey biliniyorsa (doğal olarak bazı özel hallerin dışında) kısmî türevli iki bilinmeyenli 1. mertebeden lineer iki denklemin çözümüne indirgenmiştir. W.Blaschke bu probleme [2] den kitabının 12 sahifesini ayırmış ve problemi invariyannt türevler ile inceleyerek özel hallere ait yüzeylerin denklemlerini vermiştir. Yukarıda açık ifade edilmediğine değindiğimiz küresel tasvir ile ilgili teorem burada da doğru ifade edilmemiştir. Gerçekten birbirine Eçkb. reel yüzey çiftinin eğrilik çizgilerinin küresel tasvirleri (birinin pozitif, ötekini negatif sabit Gauss eğrilikli birer yüzeyinki ile değil) sabit ve pozitif Gauss eğrilikli bir yüzeyin eğrilik çizgileri ile bu yüzeyin, yine aynı sabit ve pozitif Gauss eğrilikli olan, Hazzidakis dönüşümünükileri ile aynıdır [3].

¹⁾ Çalışmada açıkça ifade edilmemiş olmakla birlikte; Eçkb. yüzeylerden reel olanların eğrilik çizgilerinin sabit ve pozitif Gauss eğrilikli bir yüzeyin, reel olmayanların ise sabit ve negatif Gauss eğrilikli bir yüzeyin eğrilik çizgileri ile aynı küresel tasvire sahip olduğu görülmüş olmaktadır.

W.Blaschke'nin 1. eğrilik çizgisinin normal eğrilığının karesini bilinmeyen fonksiyon olarak yaptığı değişik inceleme, [1] deki gibi, bilinmeyen fonksiyona ait olan ikinci derece bir denkleme dayanmaktadır. Biz bu çalışmamızda, söz konusu ikinci derece denklemin çok karmaşık olan diskriminantının oldukça sade ve bazı çalışmalarda da [4] ortaya çıkan bir invariyanın tam karesi olduğunu gösterdik. W.Blaschke [2.s.234] de, söz konusu diskriminantın sıfır olduğu yüzeylerin, eğrilik çizgileri korunarak bükülemeyen yüzeyler için genel hali oluşturduğunu ifade etmektedir. Bu bakımdan diskriminantın çok sade bir şekilde ifade edilmiş olmasının bu genel haldeki yüzeylerin araştırılmasında önemli bir adım olduğu kanısındayız.

Çalışma konumuzu oluşturan problem L.P.Eisenhart'ın [3] deki kitabında da ele alınmış ve incelemede hareketli üçyüzlü yöntemi kullanılmıştır. Sonuçta reel halde yukarıda ifade ettiğimiz teorem gösterilmiştir.

Biz çalışmamızın birinci bölümünde problemi değişik bir şekilde ele alacağız. Gerçekten hesaplarımızda, Blaschke'nin yaptığı gibi invariyan türevleri kullanacağız ve bilinmeyen fonksiyon olarak - simetri dolayısıyla eğrilik çizgilerinin normal eğriliklerinin oranını seçeceğiz. Yüzeylerin invariyanları ve invariyan türevlerle çalışmanın, geometrik yorumlar bakımından, yararı açıktır. Genellikle [2] deki notasyonlar kullanılacaktır. Buna göre yüzeyin 1., 2. esas formlarının katsayıları sırasıyla E, F, G ve L, M, N ile; 1. ve 2. eğrilik çizgilerinin normal ve geodezik eğrilikleri sırasıyla $r, \bar{r}$; $-q, \bar{q}$ ile, invariyan türetme indisleri de sırasıyla (1), (2) ile gösterilecektir. O halde u, v eğrilik çizgileri parametrelerinde, P(u,v) bir nokta fonksiyonu olmak üzere

$$P_1(u,v) = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} , \quad P_2(u,v) = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial P(u,v)}{\partial v} \quad (1)$$

dir. Kısalık için

$$\sqrt{E} \equiv e , \quad \sqrt{G} \equiv g$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} \equiv P_u , \quad \frac{\partial P}{\partial v} \equiv P_v$$

österilimlerini kullanacağız.

$$q = \frac{e_v}{eg} = (\ln e)_2, \quad \bar{q} = \frac{g_u}{eg} = (\ln g)_1 \quad (2)$$

lduğu bilindiğine göre (1) ve (2) den

$$P_{12} + q \cdot P_1 = P_{21} + \bar{q} \cdot P_2 \quad (3)$$

uygunluk denkleminin geçerli olacağı açıktır.

Yüzeyin Gauss eğrilliğini K , ortalama eğrilliğini H ile gösteriyoruz; halde $K = r \cdot \bar{r}$, $H = r + \bar{r}/2$ dir. Normal birim vektörünü $\vec{N}$ ile gösterdiğimiz (u,v) yüzeyi için türev ve uygunluk denklemlerini de [2.s.170,171] den buraya alıyoruz:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{11} &= -q \cdot \vec{x}_2 + r \cdot \vec{N}; & \vec{x}_{12} &= \bar{q} \cdot \vec{x}_2; & \vec{x}_{22} &= -\bar{q} \cdot \vec{x}_1 + \bar{r} \cdot \vec{N}; & \vec{x}_{21} &= q \cdot \vec{x}_1, \\ \vec{N}_1 &= -r \cdot \vec{x}_1, & \vec{N}_2 &= -\bar{r} \cdot \vec{x}_2; \end{aligned} \quad (4)$$

$$r_2 = q(\bar{r} - r), \quad \bar{r}_1 = \bar{q}(r - \bar{r}), \quad K = r \cdot \bar{r} = -\bar{q}_1 - q_2 - \bar{q}^2 - q^2. \quad (5)$$

BÖLÜM I

2. İki bölümden oluşan çalışmamızın bu birinci bölümünde önce, problemin çözümü çabalarının vardığı sonucu kendi yöntemimizle özetleyeceğiz. Sonra da, problemin indirgendiği ve genel çözümünün bulunması olanaksız görünen kısmî türevli diferansiyel denklem sisteminden, ilk aşamada çıkardığımız sonuçları vereceğiz.

Bu çalışmada yalnız reel olan yüzeyler söz konusu edilecektir. Esas itibariyle problemi genel hal için ele alacağız; yani aksi söylenmedikçe

$$K = r.\bar{r} \neq 0, \quad q\bar{q} \neq 0 \quad (6)$$

varsayacağız. Ancak özellikle $q.\bar{q} = 0$ özel hali için bazı açıklamalar yapma gereğini duyuyoruz. $K = 0$ özel hali üzerinde, yani açılabilir yüzeyler için, [2.s.227-229] da verilen ve çok açık olan sonuçlara eklenecek bir husus yoktur. Fakat $q\bar{q} = 0$ ($q = 0, \bar{q} \neq 0$) özel halinde ortaya çıkan özel Mulür yüzeylerinin (Monge yüzeyleri ya da Molding yüzeyler)⁽¹⁾ [2.s.233] da verilen denklemleri küçük pürüzler içermektedir. Birbirine Eçkb. Monge yüzeylerinin denklemleri, u, v eğrilik çizgileri parametrelerinde

$$\begin{aligned} x &= \frac{U(u)}{a} \cdot \cos av + \int V(v) \cdot \sin av \cdot dv \\ \vec{x} : \quad y &= \frac{U(u)}{a} \cdot \sin av - \int V(v) \cdot \cos av \cdot dv \\ z &= \frac{1}{a} \cdot \int \sqrt{a^2 - U'^2} \cdot du \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde olacaktır. Burada $U(u), V(v)$ keyfi fonksiyonları, a da keyfi bir sabiti göstermektedir. Aynı U, V ve değişik a lar ile elde edilen yüzeyler birbirlerine Eçk. bükülebilirler. Gerçekten bu yüzeylerin büyüklüklerini (7) den

(1) Bilindiği gibi genel mulür yüzeyler, düzlemsel bir eğrinin, eğri düzleminin genel bir açılabilir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanması sırasında, doğuracağı yüzeylerdir. Sözü edilen açılabilir yüzey genel bir silindire özelleşir elde edilen özel mulür yüzeylere Monge yüzeyleri (ya da Molding yüzeyler) denir. Bu yüzeylerin tanım özeliğinin $q\bar{q}=0, (q=0, \bar{q} \neq 0), (\bar{q}/r)_2=0$ olduğunu da biliyoruz. [2.s.233].

$$E = 1, \quad G = (U - V)^2, \quad F = 0;$$

$$L = - \frac{U''}{a \cdot \sqrt{a^2 - U'^2}}, \quad N = a(U - V) \cdot \sqrt{a^2 - U'^2}, \quad M = 0$$

$$r = - \frac{U''}{a \cdot \sqrt{a^2 - U'^2}}, \quad \bar{r} = \frac{a \cdot \sqrt{a^2 - U'^2}}{U - V}, \quad K = - \frac{U''}{U - V}$$

$$q = 0, \quad \bar{q} = \frac{U'}{U - V}$$

eklinde elde ederiz. Görülüyor ki 1. form a keyfi sabitinden bağımsızdır. olayısıyla a'nın çeşitli değerleri ile bulunacak yüzeyler birbirine Eçk. ükülebilirler. (7) den, a=1 için, Monge yüzeylerinin [3.s.307] de de verilen

$$x = U(u) \cdot \cos v + \int V(v) \cdot \sin v \cdot dv$$

$$\vec{x} : \quad y = U(u) \cdot \sin v - \int V(v) \cdot \cos v \cdot dv \quad (7')$$

$$z = \int \sqrt{1 - U'^2} \cdot du$$

denklemlerinin elde edileceği açıktır.

Burada Monge yüzeylerinin özel bir hali olan dönel yüzeyler için e sonucu vermek istiyoruz. (7) yüzeyi $V(v)=0$ için dönel yüzeye dönüşür. Ayrıca $\bar{u}=U(u)$ parametre dönüşümünü yapar $U'(u)=A(u)$ der ve $\bar{u}$ yi yeniden u ile gösterirsek (7) deki 3. denklem

$$z = \frac{1}{a} \cdot \int \sqrt{a^2 - A^2} \cdot \frac{du}{A}$$

eklini alır. (7) de a=1 koyarak (7') yü, yani Monge yüzeylerinin kullanılan denklemlerini elde ettiğimiz gibi, burada da a=1 için dönel yüzeylerin bilinen denklemlerini bulabilmek için

$$A(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}$$

almak uygundur.

Böylece

$$\vec{x} : (x = \frac{u}{a} \cdot \cos av, \quad y = \frac{u}{a} \cdot \sin av, \quad z = \frac{1}{a} \int \sqrt{a^2 \cdot (1 + f'^2)} - 1 \cdot du) \quad (8)$$

$$[a = 1 \text{ için } \vec{x}_0 : (x_0 = u \cdot \cos v, \quad y_0 = u \cdot \sin v, \quad z_0 = f(u))]$$

denklemini bulunur. Bu denklemlerden $\vec{x}$ dönel yüzeyinin büyüklüklerini:

$$E = 1 + f'^2, \quad G = u^2, \quad F = 0, \quad L = \frac{f' \cdot f''}{\sqrt{1 + f'^2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot (1 + f'^2)} - 1}$$

$$N = \frac{u \cdot \sqrt{a^2 \cdot (1 + f'^2)} - 1}{\sqrt{1 + f'^2}}, \quad M = 0 \quad (8')$$

$$(r = \frac{L}{E}, \quad \bar{r} = \frac{N}{G}, \quad K = \frac{f' \cdot f''}{u \cdot (1 + f'^2)^2}, \quad q = 0, \quad \bar{q} = \frac{1}{u \cdot \sqrt{1 + f'^2}})$$

olarak elde ederiz. Dönel yüzeyler için verdiğimiz bu sonuçları, Gauss ya da ortalama eğriliği sabit dönel yüzeyler özel hallerine uygulamak istiyoruz:

a) Gauss eğriliği $K = 1/p^2$ pozitif sabitine eşit olan küresel dönel yüzeyler için (8') den, c bir keyfi sabit olmak üzere,

$$1 + f'^2(u) = \frac{p^2}{c^2 - u^2}$$

bulunur. Ö halde bu yüzeylere Eçkb. (doğal olarak yine aynı Gauss eğriliği) küresel dönel yüzeylerin denklemleri, bu değerin (8) de konması ile, büyüklükleri de (8') den elde edilecektir. Bunları buraya ayrıca yazmaya gerek görmüyoruz. Ancak c keyfi sabitinin $c^2 = a^2 \cdot p^2$ özel değeri için $\vec{x}$ yüzeylerinin R=p yarıçaplı küreler olacağına işaret etmekle yetiniyoruz.

b) Ortalama eğriliği sabit dönel yüzeylerin Eçk. bükülebilme yönünden incelenmesinde dönel minimal yüzeylerin ayrıca ele alınması gerekmektedir:

0 halde (8) de bu kez, b keyfi bir sabit olmak üzere, $f(u)=b \cdot \ln(\sqrt{u^2 - b^2})$ alınırsa ($\vec{x}_0$ yüzeyi [3.s.150] ye göre bir dönel minimal yüzey olduğundan, $r = -b/u^2$, $\bar{r} = b/u^2$) $\vec{x}$ yüzeyleri bir dönel minimal yüzeye layısıyla birbirlerine Eçkb. yüzeyler olacaktır. Bu yüzeylerin büyüklüklerinde:

$$E = \frac{u^2}{u^2 - b^2}, \quad G = u^2, \quad F = M = 0$$

$$r = \frac{L}{E} = \frac{-b^2}{u^2 \cdot \sqrt{(a^2-1)u^2 + b^2}}, \quad \bar{r} = \frac{N}{G} = \frac{\sqrt{(a^2-1)u^2 + b^2}}{u^2}$$

elindedir ve artık minimal ($a^2 \neq 1$) değildirler.

Minimal yüzeyler özel halini böylece ayırdıktan sonra şimdi $r + \bar{r} =$ sbt. olan dönel yüzeylere geçebiliriz:

(8) den $\vec{x}_0$ yüzeyi için,

$$r + \bar{r} = \frac{u \cdot f'' + f' \cdot (1 + f'^2)}{u \cdot (1 + f'^2)^{3/2}}$$

unacaktır. Buradan $r + \bar{r} = 1/p$ yazılarak $f'(u) = Y(u)$ için elde edilecek diferiyel denklemin çözümünü, c bir keyfi sabiti göstermek üzere,

$$Y(u) = f'(u) = \frac{u^{2-c}}{\sqrt{4p^2 \cdot u^2 - (u^{2-c})^2}}$$

linde elde ettik. Artık ortalama eğriliği $1/2p$ sabitine eşit olan dönel yüzeylere Eçkb. dönel yüzeylerin denklemleri (8) den, büyüklükleri de (8') $f'(u)$ nun bu değeri ile elde edilecektir. Bunları buraya ayrıca yazmaya ek görmüyoruz. Sadece $f'(u)$ nun bu değeri ile $\vec{x}$ yüzeyinin ortalama eğrili-

ğinin, artık sabit olmayıp,

$$H = \frac{2p^2 \cdot (a^2 - 1) + u^2 - c}{2p \cdot \sqrt{4p^2 \cdot u^2 \cdot (a^2 - 1) + (u^2 - c)^2}}, \quad (a = 1 \text{ için } H = 1/2p),$$

şeklinde elde edileceğine dikkati çekmek istiyoruz.

3. Bu Nu. da genel hale ait sonuçlar özetlenecektir. Söz konusu bükülmemizde eğrilik çizgileri korunacağına göre birbirine bu koşulla büküldüğünü varsaydığımız iki yüzey için K , q , $\bar{q}$ invariyanntlarının aynı olduğu açıktır. Eğrilik çizgilerini koordinat eğrileri olarak seçeceğiz. O halde karşılıklı noktalarda karşılıklı invariyannt türevler de aynı olacaktır. Söz konusu yüzey çiftinde $r \cdot \bar{r}$ çarpımı aynı olmakla birlikte r ve $\bar{r}$ invariyanntları farklı olacaktır. O halde bilinmeyen fonksiyon olarak r (ya da $\bar{r}$) alınabilir (Blaschke $S=r^2$ yi, Bonnet $E \cdot r^2 = W$ yi almaktadır). Fakat $K=r \cdot \bar{r}$ çarpımı her iki yüzeyde aynı olduğu için, simetri düşüncesi ile

$$\frac{r}{\bar{r}} = T$$

oranını bilinmeyen fonksiyon olarak almak bize daha uygun görünmektedir. Buna göre

$$r^2 = T \cdot K, \quad \bar{r}^2 = K/T \quad (9)$$

olacaktır. (9) kullanılarak (5)_{1,2} Mainardi-Codazzi uygunluk denklemlerini T fonksiyonu için:

$$T_1 = -2\bar{q} \cdot T^2 + [2\bar{q} + (\ln K)_1] \cdot T \quad (10)$$

$$T_2 = -[2q + (\ln K)_2] \cdot T + 2q$$

şeklini alacağı hemen görülür. Bu denklemlerin (3) uyarınca yazılacak olan uygunluk koşulu, T için

$$[q.\bar{q} - K.(\frac{\bar{q}}{K})_2].T^2 + [(\ln K)_{12} + q.(\ln K)_1 + q_1 + \bar{q}_2 - 2q.\bar{q}].T + \\ + [q.\bar{q} - K.(\frac{q}{K})_1] = 0 \quad (11)$$

İkinci derece denklemini verir. Yineleyelim ki (10) ve (11) denklemlerinde tüm katsayılar bükülme invariyanları olup her iki yüzeyde de aynıdır. (6) koşulları, (11) denkleminin katsayılarının birlikte sıfır olmasını yani denklemin özdeş olarak gerçekleşmesini önler⁽¹⁾ [2.s.231].

Birbirine eğrilik çizgileri korunarak bükülebildiğini varsaydığımız reel yüzey çiftini S, S^0 ile gösterelim. Bunlara ait asal eğrilikler de sırası ile $r, \bar{r}; r^0, \bar{r}^0$ olsun. Buna göre eğer S, S^0 yüzey çifti gerçekten var ise (11) denkleminin kökleri farklı olmalı, yani diskriminantı sıfır olmamalı ve her iki

$$T = \frac{r}{\bar{r}}, \quad T^0 = \frac{r^0}{\bar{r}^0} \quad (12)$$

kökü de (10) denklemlerini sağlamalıdır.

Şimdi bunu araştıracağız. (11) denkleminin katsayılarını sırasıyla $A, B, \bar{A}$ ile göstererek denklemleri yeniden yazıyoruz.

$$A.T^2 + B.T + \bar{A} = 0. \quad (11')$$

(1) Burada bir uyarma yapmamız yararlı olacaktır. $K \neq 0$ için yazılmış olan (11) denkleminin tüm katsayılarının sıfır varsayılması koşulları, $q.q=0$, ($q=0$, $\bar{q} \neq 0$) ile birlikte $(\bar{q}/K)_2=0$, $((\bar{q}/r)_2=0)$, koşulunu da gerektirir ve bu koşullar (11) denkleminin özdeş olarak gerçekleşmesi için aynı zamanda yeter. Eğer $q.q=0$, $(\bar{q}/K)_2 \neq 0$ ise (11) denklemleri ($T \neq 0$ olduğundan) T için, bükülme invariyanları cinsinden yalnız bir değer verecektir ki bu, elde edilecek yüzeyin Eçk. bükülemediğini gösterir. Bu yüzden özel halleri terketmek için, daha açık deyimle özel hal olarak ayırdığımız yüzeyler dışında kalan Eçkb. yüzeyleri elde etmek istiyorsak, $K \neq 0$ ile birlikte $q.q \neq 0$ varsaymakla yetinebiliriz. Çünkü böylece $q=0$, ($\bar{q} \neq 0$), $(\bar{q}/K)_2=0$ yüzeylerinden başka bir Eçkb. yüzey terk edilmiş olmaz.

0 halde

$$T = \frac{r}{\bar{r}} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad T^0 = \frac{r^0}{\bar{r}^0} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (12')$$

($\Delta = B^2 - 4A\bar{A} \neq 0$) dır. Önce reel hal için bir noktayı saptayalım:

$$K = r \cdot \bar{r} = r^0 \cdot \bar{r}^0 = K^0$$

olup

$$\frac{r^0}{r} = \frac{\bar{r}}{\bar{r}^0} = x$$

dersek;

$$T \cdot T^0 = \frac{r}{\bar{r}} \cdot \frac{r^0}{\bar{r}^0} = \frac{r}{\bar{r}^0} \cdot \frac{r^0}{\bar{r}} = x^2 > 0$$

bulunur yani

$$T \cdot T^0 = \frac{\bar{A}}{A} > 0 \quad (13)$$

dır. Şimdi (11) denkleminin her iki T, T^0 kökünün de (10) denklemlerini sağladığını yazalım: Önce $(10)_1$, T ve T^0 için ayrı ayrı yazılır iki yan sırasıyla T^2 ve T^{02} ile bölünüp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left[\ln \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^0} \right) \right]_1 = \left[\ln \frac{1}{GK} \right]_1$$

bulunur. Bu denklemin (1) gereğince doğal olan integrasyonu ile, $V(v)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T^0} = \frac{V(v)}{G \cdot K} \quad (14)$$

bulunur. Benzer işlemlerle $U(u)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere $(10)_2$ den

$$T - T^0 = \frac{U(u)}{E \cdot K} \quad (14')$$

de edilir. $T \neq T^0$ varsayıldığından $U.V \neq 0$ dır. (13), (14), (14') gereğince $U.V < 0$ dır. Her zaman yapıldığı gibi u, v parametrelerine uygulanacak varsayılan uygun bir skala dönüşümü sonucunda genellik bozulmaksızın, $-1, V=1$ (ya da $U=1, V=-1$) alınabileceği açıktır⁽¹⁾.

Buna göre (14) ve (14') den (12) gereğince

$$(g.\bar{r})^2 - (g.\bar{r}^0)^2 = 1, \quad (e.r^0)^2 - (e.r)^2 = 1 \quad (15)$$

nuçları bulunur. Artık bu denklemlerden önce

$$e.r = Shs(u,v), \quad e.r^0 = Chs(u,v); \quad g.\bar{r}^0 = Shs(u,v), \quad g.\bar{r} = Chs(u,v), \quad (15')$$

zılabileceği, sonrada $K=K^0$ olması nedeni ile $\bar{s}(u,v) = s(u,v)$ olduğu görülür. Böylece

$$e.r = Shs(u,v), \quad g.\bar{r} = Chs(u,v); \quad e.r^0 = Chs(u,v), \quad g.\bar{r}^0 = Shs(u,v) \quad (16)$$

de edilir⁽²⁾.

1) [1] deki çalışmasında Bonnet'in incelediği hal, buradaki gösterilimlerle, $-2, V=2$ yani $U.V > 0$ alınmasına tekabül etmektedir ki bunun "reel hal" olmasına değinmiştik.

2) Daha titiz bir inceleme için $e_1, e_2, e_3, e_4 (\pm 1)$ olmak üzere önce (15') yerine $e.r = e_1.Shs, e.r^0 = e_2.Chs, g.\bar{r}^0 = e_3.Shs, g.\bar{r} = e_4.Chs$ yazılmalıdır. Bu halde yapılacak basit bir inceleme, e_i lerin çeşitli değerleri ile (16) yüzeylerinin düzlemsel simetriklerinin elde edileceğini gösterir. Hal-ki bir S yüzeyi Eğkb. ise bunun düzlemsel simetriği de (simetride r ve $\bar{r}$ yerine $-r$ ve $-\bar{r}$ gelecektir) bu özeliği sağlayacağından düzlemsel simetrikler arkanedilmektedirler. Dolayısıyla (16) genel sonuçtur.

Artık (16)_{1,2} ile belirlenen $r, \bar{r}$ invariyanlarının (5) uygunluk koşullarını sağlaması için de $s(u,v)$ fonksiyonunun ve e, g büyüklüklerinin g çekleyeceği denklemleri yazmak kolaydır. Gerçekten (16)_{1,2} sonuçları ile (5) denklemleri

$$e_v = g.s_v, \quad g_u = e.s_u; \quad s_{uu} + s_{vv} = -Shs.Chs \quad (17)$$

denklemlerine dönüşür. (6) gereğince $q.\bar{q} \neq 0$ olduğu için burada $s_u.s_v \neq 0$ varsayılması gerekecektir. Bununla birlikte (17) de $s_u.s_v = 0$ varsayılırsa (örneğin $s_v = 0, s_u \neq 0$) nasıl bir sonuçla karşılaşılacağını araştırmamız gerekir. Bir olumsuzlukla karşılaşılması beklenirken ilginç bir şekilde sonuçlanan bu araştırma ileride Nu. 7 de yapılacaktır.

O halde problem önce (17)₃ denkleminin çözümünü gerektirmektedir; bu s çözümü ile (17)_{1,2} denklem takımından e, g fonksiyonları bulunacak ve (16) dan da $r, \bar{r}$ invariyanları elde edilecektir. (17)₃ denklemi, sabit pozitif Gauss eğrilikli bir yüzeyin belirlenmesinde de aynen gelmektedir, [3.s.278]. O halde sabit pozitif Gauss eğrilikli bir yüzey ((6) koşullarına uygun) biliniyorsa $s(u,v)$ fonksiyonu da biliniyor demektir ve problem bu halde (17)_{1,2} denklemlerinin çözümüne indirgenmiş olur.

Öte yandan bir yüzeyin eğrilik çizgilerinin küresel tasvirindeki birinci form katsayıları [3.s.141] den

$$E^{(k)} = E.r^2, \quad G^{(k)} = G.\bar{r}^2, \quad F^{(k)} = 0 \quad (18)$$

olarak bilinmektedir. (16) ya göre S yüzeyimizin eğrilik çizgilerinin küresel tasviri için

$$E^{(k)} = Sh^2s, \quad G^{(k)} = Ch^2s, \quad F^{(k)} = 0 \quad (18')$$

S^0 yüzeyinin ki için de

$$E^{(k)0} = Ch^2s, \quad G^{(k)0} = Sh^2s, \quad F^{(k)0} = 0 \quad (18'')$$

alunur. Bu değerler ise sırasıyla sabit pozitif Gauss eğrilikli bir yüzeyin e bunun Hazzidakis dönüşümünün eğrilik çizgilerinin küresel tasvirine ait form katsayılarıdır [3.s.279].

Böylece, yukarıda-girişte-de söylediğimiz gibi, bazı açıklamalar, özellikle özel hallere yaptığımız eklentiler ve hesaplardaki yöntem değişikliği dışında, esas itibariyle bilinmekte olan sonuçların bir özetini vermiş olunuyoruz.

4. Bu Nu. da (11) denkleminin Δ diskriminantı üzerinde duracağız. Bu amaçla

$$D = \left(\frac{q}{r}\right)_1 \cdot \bar{r}, \quad \bar{D} = \left(\frac{\bar{q}}{r}\right)_2 \cdot r \quad (19)$$

invariantlarını tanımlıyoruz. D , $\bar{D}$ ile (11) denkleminin, A , $\bar{A}$ katsayılarının

$$A \cdot r = (q\bar{q} - \bar{D}) \cdot \bar{r}, \quad \bar{A} \cdot \bar{r} = (q\bar{q} - D) \cdot r \quad (20)$$

eklinde bağlı olduğunu göstermek kolaydır. B katsayısının D , $\bar{D}$ ile olan bağıntısı kolay görülmemekle birlikte ilginçtir. Gerçekten aşağıda

$$B = D + \bar{D} - 2q\bar{q} \quad (21)$$

olduğunu göstereceğiz. Doğal olarak bunun için, B nin (11) deki değeri gözönüne alınırsa,

$$D + \bar{D} = (\ln K)_{12} + q(\ln K)_1 + q_1 + \bar{q}_2 \quad (21')$$

olduğunu görmek yetecektir. Daima (5)_{1,2} ve (3) gözönünde bulundurularak:

$$\begin{aligned} (\ln K)_{12} &= (\ln r)_{12} + (\ln \bar{r})_{12} = \left(\frac{r_1}{r}\right)_2 + \left[\frac{\bar{q} \cdot (r - \bar{r})}{r}\right]_2 = \\ &= \left(\frac{r_2}{r}\right)_1 + \bar{q} \cdot \frac{r_2}{r} - q \cdot \frac{r_1}{r} + \left(\frac{\bar{q}}{r}\right)_2 \cdot r + \bar{q} \cdot \frac{q \cdot (r - r)}{r} - \bar{q}_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{q \cdot (\bar{r} - r)}{r} \right)_1 + q \cdot \bar{q} \cdot \left(\frac{\bar{r}}{r} - \frac{r}{r} \right) + \bar{D} - \bar{q}_2 - q \cdot \frac{r_1}{r} = \\
 &= D + \bar{D} - q_1 - \bar{q}_2 + q \cdot \bar{q} - q \cdot \bar{q} \cdot \frac{r}{r} - q \cdot \frac{r_1}{r}
 \end{aligned}$$

olduğu hesaplanacaktır. Öte yandan

$$q \cdot (\ln \bar{K})_1 = q \cdot \left[\frac{r_1}{r} + \frac{\bar{q} \cdot (\bar{r} - r)}{r} \right] = q \cdot \frac{r_1}{r} + q \cdot \bar{q} \cdot \frac{r}{r} - q \cdot \bar{q}$$

olduğundan:

$$(\ln K)_{12} + q \cdot (\ln K)_1 = D + \bar{D} - q_1 - \bar{q}_2$$

sonucu bulunur. Bu ise ispatını istediğimiz (21') bağıntısından başka bir şey değildir.

(11) denkleminin Δ diskriminantının D , $\bar{D}$ invariyanları cinsinden ifadesi ise, bu karmaşık ifadeler karşısında, beklenenin çok ötesinde sade olmaktadır. Gerçekten (20) ve (21) den

$$\Delta = B^2 - 4A \cdot \bar{A} = (D + \bar{D} - 2q \cdot \bar{q})^2 - 4(q \cdot \bar{q} - D)(q \cdot \bar{q} - \bar{D}) \quad (22)$$

yazılacak ve sonuçta

$$\Delta = (D - \bar{D})^2 \quad (22')$$

elde edilecektir. $\Delta = 0$ yani

$$D = \bar{D} \quad (23)$$

koşulunu sağlayan yüzeyler, doğal olarak, eğrilik çizgileri korunarak bükülemezler. Blaschke bu yüzeylerin Eçkb. yüzeylerin dışındaki tüm yüzeylerin genel halini oluşturduğunu ifade etmektedir [2.s.234]. Böylece, Eçkb. yüzeyler gibi ayrıcalıklı bir yüzey sınıfı dışındaki tüm yüzeylerin genel halini veren koşulu (23) deki gibi çok sade bir şekilde ifade etmiş oluyoruz.

(23) koşulunun sağlandığı yüzeylerden [4.s.49] da da söz edilmektedir. Bu yüzeyler için [4.s.11] deki (1.11) denkleminin yalnız A fonksiyonu in geçerli olacağı yani denklemin, ikinci bilinmeyen fonksiyon olan B yi ermeyeceği de ilginçtir.

Yüzeylerin iç yapısından doğan bu ilginç koşulun çeşitli incelemelere bir başlangıç oluşturabileceği kanısındayız.

Görüldüğü üzere D ve $\bar{D}$ invariyanıtları bükölme invariyanıtları değildirler. Bununla birlikte (22) deki Δ diskriminantı bir bükölme invariyanıttır. , $\bar{A}$, B bükölme invariyanıtlarıdır). O halde $(D - \bar{D})^2$ bir bükölme invariyanı olmaktadır. Gerçekten S ye Eçkb. S^0 yüzeyine ait D, $\bar{D}$ invariyanıtlarını , $\bar{D}^0$ ile gösterirsek,

$$D^0 = \bar{D}, \quad \bar{D}^0 = D \quad (24)$$

duğunu ve dolayısıyla $(D - \bar{D})^2 = (\bar{D}^0 - D^0)^2$ bulunacağını görmek kolaydır.

Eçkb. yüzeyler için (16), (17) denklemlerinden ilk aşamada elde ilebilen ve D, $\bar{D}$ invariyanıtları ile ilgili bazı sonuçları da burada vermek tiyoruz:

D ve $\bar{D}$ nin (19) daki tanımlarından (16) ve (17) ye göre

$$D = \frac{K}{Sh^3 s} \cdot [s_{uv} \cdot Shs - s_u \cdot s_v \cdot Chs], \quad \bar{D} = \frac{K}{Ch^3 s} \cdot [s_{uv} \cdot Chs - s_u \cdot s_v \cdot Shs], \quad (25)$$

gerleri elde edilir. Bu denklemler arasında s_{uv} yok edilir ve (17) gözönünde lundurulursa

$$\bar{D} \cdot Ch^2 s - D \cdot Sh^2 s = q \cdot \bar{q} \quad (25')$$

lunur. (11) denkleminin T ve T^0 kökleri için (11'), (16) ve (21) den

$$T = \frac{q \cdot \bar{q} - \bar{D}}{A} = \frac{r}{\bar{r}} = \frac{g}{e} \cdot \text{Ths}; \quad T^O = \frac{q \cdot \bar{q} - D}{A} = \frac{r^O}{\bar{r}^O} = \frac{g}{e} \cdot \text{Cths} \quad (26)$$

ve buradan da $T \cdot T^O$, $T - T^O$ oluşturularak

$$T \cdot T^O = \frac{\bar{A}}{A} = \frac{G}{E}, \quad D - \bar{D} = \frac{-A}{E \cdot K} = \frac{-\bar{A}}{G \cdot K} \quad (27)$$

elde edilir.

Ayrıca (21) ve (25') arasında $q \cdot \bar{q}$ yok edilirse B için

$$B = (D - \bar{D}) \cdot \text{Ch2s} \quad (28)$$

ifadesi bulunacaktır. Şimdi bu sonuçları basit bir uygulamada kullanacağız. (12') ve (22') gereğince yukarıki sonuçlar $D - \bar{D} \neq 0$ ($\Delta \neq 0$) için elde edildiğinden bu hipoteze aykırı olarak (27) ve (28) de $D - \bar{D} = 0$ varsayılırsa $A = \bar{A} = B = 0$ bulunacak, yani (11) denklemleri özdeş olarak gerçekleşeceği için (6) koşullarına ter düşülmüş olacaktır; bununla birlikte bu $D = \bar{D}$ ($\neq 0$) hipotezinde D, $\bar{D}$ nin (25) gerleri kullanılırsa $s(u, v)$ fonksiyonu için bulunacak diferansiyel denklemin integrasyonu sonucunda, $U(u)$, $V(v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$\text{Ths} = U(u) \cdot V(v), \quad (U' \cdot V' \neq 0) \quad (29)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. İlk bakışta çelişki gibi görülen bu durum gerçekte böyle değildir. Çünkü s fonksiyonunun (29) daki değerinin $U(u)$ ve $V(v)$ fonksiyonları ($U' \cdot V' \neq 0$) nasıl seçilirse seçilsin (17)₃ denklemini sağlayamayacağını görmek zor değildir. O halde s nin (29) şeklindeki değerleri ile Eçkb. bir yüzey elde edilebilmesi söz konusu değildir.

5. Burada (17)_{1,2} denklemlerinin, ilginç sonuçlar veren ve bazı özel halleri de içeren bir özel çözümünü vereceğiz. (17)_{1,2} de e ve g fonksiyonlarının özel olarak yalnız s nin fonksiyonu olduğunu varsayalım, yani $e=e(s)$, $g=g(s)$ olsun. (6) ya göre $s_u \cdot s_v \neq 0$ olduğundan, (17)_{1,2} den önce

$$e'(s) = g(s), \quad g'(s) = e(s)$$

a da

$$e''(s) = e(s), \quad g''(s) = g(s)$$

nacaktır. Buna göre genel çözüm, p, k keyfi sabitler olmak üzere

$$e(s) = p.Chs + k.Shs, \quad g(s) = k.Chs + p.Shs \quad (30)$$

inde elde edilecektir. O halde bu özel hal için problem, sadece (17)₃ leminden s(u,v) fonksiyonunun çözülmesine indirgenmiş olmaktadır. Denklemin lineer olmasının doğal sonucu olarak şunu da söyleyebiliriz ki e₀, (17)_{1,2} denklemlerinin herhangi bir çözüm takımı ise

$$e = e_0 + p.Chs + k.Shs, \quad g = g_0 + k.Chs + p.Shs \quad (31)$$

bir çözüm takımıdır. O halde şu sonucu ifade edebiliriz: Eçkb. bir yüzey niyorsa bu özeliği taşıyan iki parametrelili bir yüzey ailesinin invaryant- hiç bir işleme gerek olmaksızın doğrudan doğruya yazılabilir.

Şimdi bu özel çözümün önemli iki özel halinden sözedeceğiz:

a) (30) da p = k = a varsayarak

$$e = g = a.e^s \quad (32)$$

nacaktır. Buna göre (16) dan

$$r + \bar{r} = \frac{1}{a}, \quad r^0 + \bar{r}^0 = \frac{1}{a}, \quad r = \frac{e^{-s}.Shs}{a}, \quad \bar{r} = \frac{e^{-s}.Chs}{a}; \quad r^0 = \frac{e^{-s}.Chs}{a}, \quad \bar{r}^0 = \frac{e^{-s}.Shs}{a} \quad (33)$$

edilir. Görülüyor ki S ve S⁰ yüzeylerinin her ikisi de ortalama eğriligi sabit değere eşit olan yüzeylerdir. Doğal olarak (33) de (a) yerine (-a) s yerine (-s) alınarak bulunacak yüzeyler aynı sınıf içindedir; çünkü a

genel bir sabittir ve s , $(17)_3$ denkleminin çözümü ise $(-s)$ de çözümdür. koşulları altında elde ettiğimiz bu sonuçtan $[3, s. 296-297]$ de de söz mektedir ve (6) koşulları altında ortalama eğriligi sabit $1/a \neq 0$ olan yüzeyleri kapsar. (6) koşulunu kaldırırsak, ortalama eğriligi sabit olan yüzeyimiz için $q.\bar{q} = 0$ olacaktır. Düzlemi ve dönel silindiri bir yana bırakarak bu koşulun $q=0, \bar{q} \neq 0$ (ya da $\bar{q}=0, q \neq 0$) şeklinde sağlandığını varsayabiliriz. $q=0$ olduğuna göre $r_2=0$ dır ve $r+\bar{r}=sbt.$ olduğundan $\bar{r}_2=0$ bulunur. Böylece $r_2=\bar{r}_2=0$ dönel yüzey koşulları elde edilmiş olur. Ortalama eğriligi sabit olan yüzeylerin Eçk. bükülebildiği yüzeyleri ise Nu. 2 de elde etmiş ve da bu yüzeylerin ortalama eğriliklerinin sabit olmadığına dikkati çekmiş. Dönel ve minimal olmayan ortalama eğriligi sabit tüm yüzeylerin Eçk. bükülebildiği yüzeylerin de ortalama eğriligi aynı sabit değere eşit olduğu halde bu özeliğin dönel yüzeyler halinde bozulması ilginçtir.

Yukarıda $1/a \neq 0$ olduğu için minimal yüzeyler özel hali söz konusu değildir. Dolayısıyla bu hal için ayrı bir inceleme yapmamız gerekmektedir. Ortalama eğriligi sabit tüm yüzeyler, dolayısıyla minimal yüzeyler, izometrik yüzeylerdir. Yani bu yüzeylerin eğrilik çizgileri izometrik bir sistem oluştururlar. O halde $m(u).e=n(v).g$ yazılabilecektir. Yüzeyimiz minimal var olduğundan $r+\bar{r}=0$ olacak ve bu iki koşul (16) da gözönünde tutulursa Ths (29) sonucu bulunacaktır. Halbuki Nu. 4 de bu koşul ile Eçkb. bir yüzey elde edilemeyeceğini görmüştük. O halde, minimal olmayan tüm ortalama eğriligi sabit yüzeylerin Eçkb. yüzeyler olmasına karşın, Eçkb. bir minimal yüzey yoktur. Bu sonucun da (16) denklemlerinden elde edilmiş olması nedeniyle (6) koşulları altında bulunmuş olduğuna dikkat edilmelidir. Gerçekten, $q.\bar{q}=0$ ($q=0, \bar{q} \neq 0$) şulu ile elde edilecek minimal yüzey, yukarıda açıkladığımız nedenle, olmak zorundadır. Dönel minimal yüzeylerin ise Eçkb. yüzeyler olduğunu bunların Eçk. bükülebildiği yüzeyleri Nu.2 de belirtmiş ayrıca bu dönel yüzeylerin artık minimal olmadıklarına dikkati çekmiştik.

b) Şimdi de (30) da $k=0$ ($p \neq 0$) varsayalım. Böylece

$$e = p.Chs, \quad g = p.Shs$$

bulunur. Bu değerlerle (16) dan

$$r = \frac{Ths}{p}, \quad \bar{r} = \frac{Cths}{p}, \quad K = \frac{1}{2}; \quad r^0 = \frac{1}{p}, \quad \bar{r}^0 = \frac{1}{p} \quad (36)$$

de edilecektir. Görüldüğü gibi bu özel halde de Gauss eğriliği sabit ve zitif olan yüzeylerin (6) koşulunu sağlayanlarının tümü [3.s.278] ortaya kmaktadır. (36) dan ayrıca, $K=sbt.>0$ olan bu yüzeylerin Eçk. bükülebildiği yüzeylerinin küreler olacağı da görülmektedir.

(6) koşulunun kaldırılması ile doğacak sonucu bu hal için de açık- yalım: Açılabilir yüzeyleri bir yana bırakırsak (6) koşulu dışındaki yüzey- r için $q=0$, $\bar{q} \neq 0$, (ya da $\bar{q}=0$, $q \neq 0$) olduğunu biliyoruz. $q=0$ dan $r_2=0$, $K=sbt.$ n de $r_2 \cdot \bar{r} + r \cdot \bar{r}_2 = 0$ dolayısıyla $\bar{r}_2=0$ yazılabilecek ve böylece tekrar $r_2=\bar{r}_2=0$ nel yüzey koşulları elde edilecektir. Sabit ve pozitif Gauss eğrilikli dö- l yüzeylerin Eçk. bükülebildiği, doğal olarak yine aynı Gauss eğrilikli, yü- yleri ise Nu. 2 de belirtmiştik.

Şimdi (30) sonuçlarını genel olarak ele alalım: (30) ile tanımlı S^0 yüzeylerinin R , R^0 , $\bar{R}$, $\bar{R}^0$ asal eğrilik yarıçapları, (16) dan

$$R = k + p.Cths, \quad \bar{R} = k + p.Ths; \quad R^0 = p.+ k.Ths, \quad \bar{R}^0 = p + k.Cth s \quad (37)$$

arak bulunacaktır.

Öte yandan (16)_{1,2} ile (30) arasında e, g, s yok edilirse $H=r+\bar{r}/2$ ortalama eğrilik) olmak üzere

$$(p^2 - k^2)K + 2kH = 1 \quad (38)$$

şantısı bulunur. Bu özeliği sağlayan yüzeyler [5] de çalışma konusu edilmiş [6] da bu yüzeylerin $K=1/p^2$ sabit pozitif eğrilikli yüzeylere $(-k)$ uzaklı- nda paralel yüzeyler olduğuna değinilmiştir. O halde, Eçkb. özel yüzeyler arak gördüğümüz $K=sbt.>0$ yüzeylerine paralel yüzeylerin de Eçkb. yüzeyler

olduğu sonucunu elde etmiş oluyoruz. Artık bu sonucun ne oranda genelleştirilebileceği üzerinde durabiliriz. Bu amaçla aşağıda K#sbt. olmakla birlikte Eçkb. bir S yüzeyine paralel bir yüzeyin de bu özeliği sağlayıp sağlamadığını araştıracağız.

6. S yüzeyine a uzaklığında paralel olan S_a yüzeyine ($\vec{x}_a = \vec{x} + a \cdot \vec{N}$) ait büyüklükleri [3.s.178] den buraya alıyoruz:

$$E_a = E - 2a \cdot L + a^2 \cdot E^{(k)}, \quad F_a = F - 2a \cdot M + a^2 \cdot F^{(k)}, \quad G_a = G - 2a \cdot N + a^2 \cdot G^{(k)} \quad (39)$$

$$L_a = L - a \cdot E^{(k)}, \quad M_a = M - a \cdot F^{(k)}, \quad N_a = N - a \cdot G^{(k)}, \quad (R_a = R - a, \quad \bar{R}_a = \bar{R} - a)$$

Burada (k) lı büyüklükler S yüzeyinin küresel tasvirine aittir. Özel olarak koordinat eğrileri, burada olduğu gibi, eğrilik çizgileri ise (39) da

$$F = M = F^{(k)} = F_a = M_a = 0 \quad (40)$$

alınacaktır. (18) ve (40) uyarınca ve (16) ya göre (39) dan

$$E_a = (e - a \cdot Shs)^2, \quad G_a = (g - a \cdot Chs)^2, \quad (e_a = e - a \cdot Shs, \quad g_a = g - a \cdot Chs) \quad (41)$$

ve

$$r_a = \frac{Shs}{e - a \cdot Shs}, \quad \bar{r}_a = \frac{Chs}{g - a \cdot Chs}, \quad (e_a \cdot r_a = Shs, \quad g_a \cdot \bar{r}_a = Chs) \quad (41')$$

bulunur. (41') den görülüyor ki S yüzeyi için geçerli olan (16)_{1,2} bağıntı aynen buna paralel olan S_a yüzeyi için de aynı s(u,v) fonksiyonu ile geçerli dir. Öte yandan

$$(e_a)_v = g_a \cdot s_v, \quad (g_a)_u = e_a \cdot s_u \quad (42)$$

olduğunu da kolayca gerçekleyebiliriz. O halde S ye paralel olan S_a yüzeyi Eçkb. yüzeyler sınıfındandır. S_a ya Eçkb. S_a^0 yüzeyinin $r_a^0, \bar{r}_a^0$ asal eğriliklerinin

$$e_a \cdot r_a^0 = Chs, \quad g_a \cdot \bar{r}_a^0 = Shs, \quad (r_a^0 = \frac{Chs}{e - a \cdot Shs}, \quad \bar{r}_a^0 = \frac{Shs}{g - a \cdot Chs}) \quad (43)$$

klinde olacağı da açıktır. S^O yüzeyine b uzaklığında paralel olan S_b^* yüzeyinin r_b^* , $\bar{r}_b^*$ asal eğrilikleri için de, (16)_{3,4} ve (39) dan,

$$r_b^* = \frac{Chs}{e-b.Chs}, \quad \bar{r}_b^* = \frac{Shs}{g-b.Shs}, \quad (e_b^* = e-b.Chs, \quad g_b^* = g-b.Shs) \quad (44)$$

gerleri bulunur. (43) ve (44) ün karşılaştırılmasından hemem görülüyor ki, yüzeyi de Eçkb. yüzeyler sınıfından olmakla birlikte, a ve b sabitlerinin çbir değer takımı için S_a^O yüzeyi ile çakışmaz. Böylece şu teoremi de elde miş oluyoruz.

Teorem 1. Eçkb. her S yüzeyinin S_a paralel yüzeyleri de Eçkb. yüzeydir. Ancak S nin Eçk. büküldüğü S^O yüzeyinin hiç bir paraleli S nin hiç bir paraleline Eçk. bükülemez.

Paralellik dönüşümü ile ilgili bu incelememizi biraz daha ileri görmek istiyoruz: Yukarıda söz konusu ettiğimiz S_a^O yüzeyine b uzaklığında paralel yüzey S_{ab}^O ; S_b^* yüzeyine Eçkb. yüzey S_b^{*O} ve S_b^{*O} ye a uzaklıkta paralel yüzey de S_{ba}^{*O} olsun. S_b^{*O} yüzeyine ait büyüklüklerin,

$$r_b^{*O} = \frac{Shs}{e_b^{*O}}, \quad \bar{r}_b^{*O} = \frac{Chs}{g_b^{*O}}, \quad (e_b^{*O} = e_b^*, \quad g_b^{*O} = g_b^*) \quad (45)$$

klinde olacağını biliyoruz. Şimdi S_{ab}^O ve S_{ba}^{*O} yüzeylerine ait büyüklükleri yazalım: (43) den (41) uyarınca

$$e_{ab}^O = e_a^O - b.Chs, \quad g_{ab}^O = g_a^O - b.Shs, \quad (r_{ab}^O.e_{ab}^O = Chs, \quad \bar{r}_{ab}^O.g_{ab}^O = Shs) \quad (46)$$

5) den de yine (41) uyarınca

$$e_{ba}^{*O} = e_b^{*O} - a.Shs, \quad g_{ba}^{*O} = g_b^{*O} - a.Chs, \quad (r_{ba}^{*O}.e_{ba}^{*O} = Shs; \quad \bar{r}_{ba}^{*O}.g_{ba}^{*O} = Chs) \quad (47)$$

ılabilir.

$$e_a^O = e_a, \quad g_a^O = g_a; \quad e_b^{*O} = e_b^*, \quad g_b^{*O} = g_b^*$$

luğuna göre (46) dan (41) deki değerler ile

$$e_{ab}^o = e - a.Shs - b.Chs, \quad g_{ab}^o = g - a.Chs - b.Shs \quad (46')$$

(47) den de (44) değerleri ile

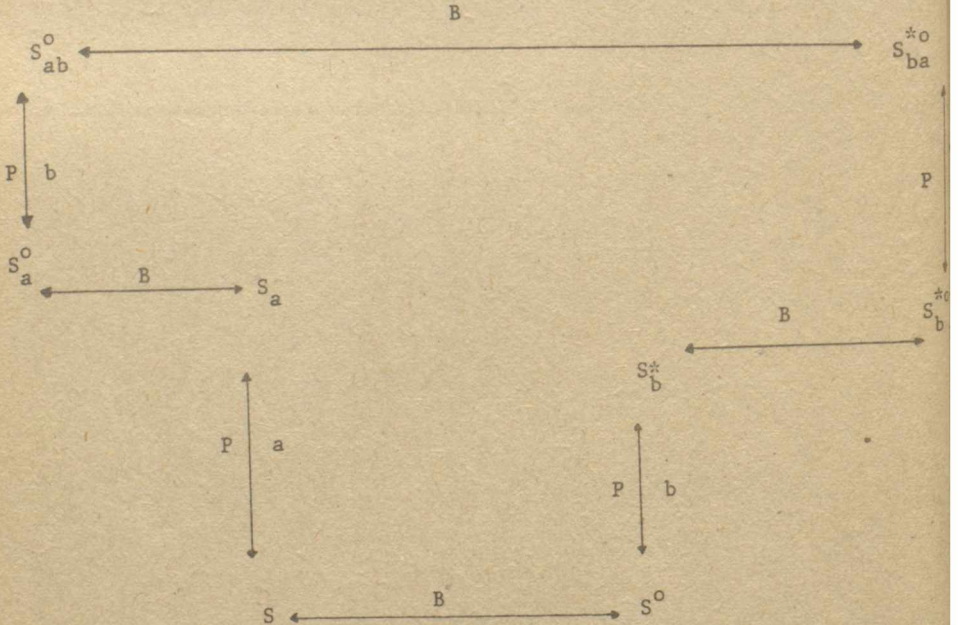
$$e_{ba}^{*o} = e - b.Chs - a.Shs, \quad g_{ba}^{*o} = g - b.Shs - a.Chs \quad (47')$$

sonucuna varılacaktır. (46') ve (47') sonuçlarının karşılaştırılmasından

$$e_{ba}^{*o} = e_{ab}^o, \quad g_{ba}^{*o} = g_{ab}^o \quad (48')$$

olduğu, yani S_{ba}^{*o} ve S_{ab}^o yüzeylerinin birbirine Eçkb, yüzeyler olduğu kanı-
lanmış olur. Böylece şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2. Eçkb. iki yüzeyden herbirine paralel iki yüzey birbir-
Eçk. bükülemezler, ancak paralellik ile elde edilen bu iki yüzeyin herbi-
Eçkb. iki yüzeye paralel iki yüzey birbirine Eçk. bükülebilir.



BÖLÜM II

Bu bölümde çalışma konumuzu oluşturan problemin oldukça genel ba-
özel çözümlerini vereceğiz.

7. Önce problemin indirgendiği (17) denklem sisteminin, Nu.2 de
zünü ettiğimiz

$$s_u \cdot s_v = 0, \quad (s_v = 0, s_u \neq 0)$$

el halindeki çözümü araştıracağız.

(17)₃ den $s=s(u)$ fonksiyonu, $b^2 > 1$ keyfi bir sabiti göstermek üze-

$$s'(u) = \sqrt{b^2 - Ch^2 s}, \quad \left(\int \frac{ds}{\sqrt{b^2 - Ch^2 s}} = u \right) \quad (49)$$

eklinde elde edilecektir. (17)_{1,2} den de $\bar{U}(u)$, $\bar{V}(v)$ keyfi fonksiyonlar ol-
ak üzere

$$g = \bar{U}(u) + \bar{V}(v), \quad e = \frac{\bar{U}'(u)}{s'(u)}, \quad (q=0, \bar{q} = \frac{s'(u)}{\bar{U} + \bar{V}}) \quad (50)$$

arak bulunur. Artık (16) dan S ve S^0 yüzeyleri için (50) uyarınca doğrudan
oğruya

$$r = \frac{Shs \cdot s'}{\bar{U}'}, \quad \bar{r} = \frac{Chs}{\bar{U} + \bar{V}}; \quad r^0 = \frac{Chs \cdot s'}{\bar{U}'}, \quad \bar{r}^0 = \frac{Shs}{\bar{U} + \bar{V}} \quad (51)$$

azılabilecektir. S ve S^0 yüzeylerinin, $q=0$ olması nedeni ile, birer mulür
üzey olacaklarını biliyoruz. Fazla olarak her iki yüzey için de

$$\left(\frac{\bar{q}}{r} \right)_2 = \left(\frac{s'(u)}{Chs} \right)_2 = 0, \quad \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}^0} \right)_2 = \left(\frac{s'(u)}{Shs} \right)_2 = 0 \quad (52)$$

zeliği gerçekleştiğinden bu yüzeyler, denklemlerini (7') de verdiğimiz Monge
üzeylerindendir. O halde (50), (51) büyüklükleri ile belirecek olan S , S^0
üzeylerinin denklemleri (7') şeklinde olacaktır.

Fakat (7') denklemleri ile verilen yüzeylerin büyüklükleri

$$E = 1, \quad G = (U(u) - V(v))^2, \quad (e = 1, g = U - V), \quad F = 0;$$

$$L = \frac{-U''}{\sqrt{1 - U'^2}}, \quad N = (U - V) \cdot \sqrt{1 - U'^2}, \quad M = 0 \quad (53)$$

$$(r = \frac{-U''}{\sqrt{1 - U'^2}}, \quad \bar{r} = \frac{\sqrt{1 - U'^2}}{U - V}, \quad q = 0, \quad \bar{q} = \frac{U'}{U - V})$$

şeklinde bulunacağına göre bunların (50) ve (51) deki büyüklüklerle nasıl bağdaştırılacağı araştırılmalıdır.

Önce (50) ve (51) deki u, v parametreleri ile (53) deki u, v parametrelerinin aynı olmamakla birlikte her iki çiftin de eğrilik çizgileri parametreleri olduğunu vurgulayalım. Karışıklığı önlemek amacı ile (50) ve (51) deki u, v parametrelerini $\bar{u}, \bar{v}$ ile e, g yi de $\bar{e}, \bar{g}$ ile gösterelim. O halde $\bar{u}, \bar{v}$ için en genel halde

$$\bar{u} = A(u), \quad \bar{v} = B(v) \quad (A'B' \neq 0) \quad (54)$$

yazılabilecektir. Bu dönüşümden sonra $s(\bar{u}) = s(A(u)) = s(u)$ dersek, (49)

$$s'(u) = \sqrt{b^2 - Ch^2 s(u) \cdot A'(u)} \quad (55)$$

bulunacak ve $\bar{e}, \bar{g}$ ile dönüşmüşleri olan e, g arasındaki bağıntıdan (53) g önünde bulundurulur

$$\bar{e} = \frac{\bar{U}'(\bar{u})}{s'(\bar{u})} = \frac{e}{A'(u)} = \frac{1}{A'(u)} \quad (56)$$

$$\bar{g} = \bar{U}(\bar{u}) + \bar{V}(\bar{v}) = \frac{g}{B'(v)} = \frac{U(u) - V(v)}{B'(v)}$$

elde edilecektir. Buradan önce

$$B'(v) = \frac{1}{k} = \text{sbt.}, \quad \bar{U}(\bar{u}) = k \cdot U(u) - k_0, \quad \bar{V}(\bar{v}) = k_0 - k \cdot V(v), \quad A'(u) = \frac{s'(u)}{k \cdot U'(u)}$$

sonra da (55) gereğince

$$Chs = \sqrt{b^2 - k^2 \cdot U'^2} \quad (58)$$

bulunur. Bu genel sonuçlardan sonra şimdi ilk olarak S yüzeyini ele alalım, ve bu yüzeyin büyüklüklerinin (53) den $u=u_1$, $v=v_1$ parametreleri ve $U(u)=U_1(u_1)$, $V(v)=V_1(v_1)$ fonksiyonları ile belirlediğini varsayalım; ayrıca bu 1. halde $A(u)=A_1(u_1)$, $k=c_1$ olsun. (51) deki r , $\bar{r}$ değerlerinin (53) deki r , $\bar{r}$ değerlerine eşitlenmesi ile (57) ve (58). gözönünde bulundurularak

$$b^2 = c_1^2, \quad A'_1(u_1) = \frac{-U''_1}{\sqrt{1-U'^2_1} \cdot \sqrt{c_1^2 - c_1^2 U'^2_1}} \quad (59)$$

sonucu elde edilir.

Şimdi de S^0 yüzeyini ele alalım ve bu yüzey için (53) de $u=u_2$, $v=v_2$, $U(u)=U_2(u_2)$, $V(v)=V_2(v_2)$ olduğunu varsayalım ve $A(u)=A_2(u_2)$, $k=c_2$ diyelim, yukarkine paralel olarak (51) deki r^0 , $\bar{r}^0$ ile (53) deki r , $\bar{r}$ nin eşitlenmesinden, (58) de gözönünde bulundurularak,

$$b^2 = 1 + c_2^2, \quad A'_2(u_2) = \frac{-U''_2}{\sqrt{1-U'^2_2} \cdot \sqrt{1 + c_2^2 - c_2^2 U'^2_2}} \quad (60)$$

$$(Shs = c_2 \cdot \sqrt{1 - U'^2_2}, \quad \bar{u} = A_2(u_2), \quad \bar{v} = \frac{v_2}{c_2})$$

elde edilir. S, S^0 yüzeyleri Eçkb. yüzeyler olduğundan (56) da ifade edilmiş olan $\bar{e}$ ve $\bar{g}$ her iki yüzey için de aynıdır. O halde

$$A'_1(u_1) = A'_2(u_2), \quad c_1 \cdot (U_1 - V_1) = c_2 \cdot (U_2 - V_2) \quad (61)$$

yazılabilir. (54) e göre buradan önce (parametreler için uygun başlangıç seçildiği varsayılarak),

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 (= u), \quad \frac{v_1}{c_1} = \frac{v_2}{c_2} (= v), \quad \bar{U} = A(u), \quad U_1 = \frac{U(u) + c_0}{c_1} \\ U_2 = \frac{U - c_0}{c_2}, \quad V_1 = \frac{V + c_0}{c_1}, \quad V_2 = \frac{V - c_0}{c_2} \end{aligned} \quad (61')$$

bulunacak, bu sonuçlar ile de

$$\begin{aligned} c_1^2 = c_2^2 + 1 (= c^2), \quad A'(u) = \frac{-U''}{\sqrt{c^2 - U'^2} \cdot \sqrt{c^2 - 1 - U'^2}} \\ (Chs = \sqrt{c^2 - U'^2}, \quad Shs = \sqrt{c^2 - 1 - U'^2}) \end{aligned} \quad (62)$$

elde edilecektir. Artık (61') değerlerinin (7') de konması ile S ve S⁰ yüzeylerinin denklemlerini aşağıdaki şekilde yazabileceğimiz açıktır:

$$\begin{aligned} S: x = \frac{U(u)}{c} \cdot \text{Cos}cv + \int V(v) \cdot \text{Sin}cv \cdot dv \\ y = \frac{U}{c} \cdot \text{Sin}cv - \int V \cdot \text{Cos}cv \cdot dv \end{aligned} \quad (63)$$

$$z = \frac{1}{c} \cdot \int \sqrt{c^2 - U'^2} \cdot du$$

$$\begin{aligned} S^0: x = \frac{U(u)}{c_2} \cdot \text{Cos}c_2v + \int V \cdot \text{Sin}c_2v \cdot dv \\ y = \frac{U}{c_2} \cdot \text{Sin}c_2v - \int V \cdot \text{Cos}c_2v \cdot dv \end{aligned} \quad (63')$$

$$z = \frac{1}{c_2} \cdot \int \sqrt{c_2^2 - U'^2} \cdot du, \quad (c_2 = \sqrt{c^2 - 1})$$

Görülüyor ki bu denklemler (7) denklemlerinin aynısıdır. Ancak (7) denklemlerinde a sabitinin çeşitli değerleri ile elde edilen tüm yüzeylerin birbirine Eçk. bükülebilmelerine karşın; (63) ve (63') ile beliren yüzey çiftleri (7) den a'nın sırasıyla a=c ve a= $\sqrt{c^2-1}$ değerleri ile bulunan özel çiftlerdir. Böylece şu sonuca ulaşmış oluyoruz. Genel halde elde edilen (17) denklemlerinin s_u.s_v=0 özel halindeki çözümü, Nu.2 de ayrıca incelenerek bulunan (7) özel çözümünü tümüyle vermemekte, bu çözüm kapsamına giren bir çözüm vermektedir. O halde Nu. 2 deki özel halin ayrıca incelenmesinde gerçekten zorluk bulunduğu görülmüş olmaktadır.

Burada şu hususa dikkati çekmek yararlı olacaktır: (7) yüzeyleri her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olan özel yüzeylerdir. Bunların Eçkb. yüzeyler olduğunu gördük. Hemen akla gelen soru, Eçkb. ve her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olan başka yüzeyler olup olmadığı sorusudur. Bu sorunun yanıtını şu teoremle veriyoruz.

Teorem 3. Her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olan bir yüzeyin Eçkb. bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, bunun bir Monge yüzeyi olmasıdır.

Gerçekten: Her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olan yüzeyimiz bir Monge yüzeyi ise bunun Eçkb. bir yüzey olduğunu biliyoruz. Tersine olarak söz konusu yüzeyin Monge yüzeyi olmadığını varsayalım. Nu. 3 de yapılan açıklamaya göre Monge yüzeyleri dışında Eçkb. yüzeyler ancak $q \cdot \bar{q} \neq 0$ genel halinde elde edilebilir. Bu koşul altında ise, yüzeyimiz için yazılacak olan (11) denkleminin özdeş olarak sağlanamayacağını görmüştük. Öte yandan yüzeyin her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olduğundan

$$\left(\frac{q}{r}\right)_1 = \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 = 0$$

dır. Bu ise (19) gereğince $D = \bar{D} = 0$ demektir. O halde (22') ye göre (11) denkleminin Δ diskriminantı sıfırdır. Dolayısıyla denklemin yalnız bir kökü bulunacak ve daha önce de açıkladığımız gibi yüzeyimiz Eçk. bükülemeyecektir.

8. Problemimizin (7) denklemleri ile verilen özel çözümünü oluşturan yüzeylerden başka, her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olan Eçkb. yüzeyin bulunmayışı bizi, yalnız bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan yüzeyler arasında Eçkb. yüzeyler bulunup bulunmadığının araştırılmasına yöneltir. Bu Nu. da bu araştırmayı yapacağız.

[2.s.181] den 1. (ya da 2.) eğrilik çizgiler ailesinin düzlemsel olma koşulunun

$$q_1 \bar{r} = r_1 \bar{q} \quad (\text{ya da } \bar{q}_2 \bar{r} = \bar{r}_2 \bar{q}) \quad (64)$$

olduğunu biliyoruz. Açılabilir yüzeylerde doğuranlar eğrilik çizgileri ailelerinden birini oluşturduğu için (64) koşulu bu özel halde $r=0$ (ya da $\bar{r}=0$) ile sağlanır. Çok özel olan bu hali daima konu dışı bıraktığımızdan (64) koşulunu

$$\left(\frac{q}{r}\right)_1 = 0 \quad (\text{ya da } \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 = 0), \quad K \neq 0 \quad (64')$$

şeklinde kullanacağız. Burada yalnız 1. eğrilik çizgiler ailesini düzlemsel varsayacağız. Buna göre temel koşulumuz

$$-\left(\frac{q}{r}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 \neq 0 \quad (65)$$

şeklinde olacaktır. (19) gereğince ve $K \neq 0$ olduğu için bu koşulu

$$D = 0, \quad (\bar{D} \neq 0) \quad (65')$$

şeklinde de ifade edebiliriz. (6) gereğince $q\bar{q} \neq 0$ olduğu yani (65) in $q=0$ ile sağlanamayacağı da doğaldır. (24) gözönünde bulundurulursa, S nin Eşk. bükülebildiğini varsaydığımız S^0 yüzeyi için (65') den

$$\bar{D}^0 = 0 \quad (D^0 \neq 0) \quad (65'')$$

yazılabilecektir. O halde S de 1. eğrilik çizgileri ailesi düzlemsel ise S^0 da 2. aile düzlemsel olmak zorundadır.

Artık (65) koşulumuzun (17) deki e, g, s fonksiyonları ile ifade edilmesi gerekmektedir. Bu işlem çok kolay olup (16) ve (17) uyarınca (65),

$$\left(\frac{s_v}{Shs}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{s_u}{Chs}\right)_v \neq 0 \quad (66)$$

şeklinde yazılabilecektir. (66) denkleminin genel çözümünün ise $U(u), V(v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$Th \frac{s}{2} = U(u).V(v) \neq 0 \quad (67)$$

olarak bulunacağı açıktır. Şimdi $U(u), V(v)$ keyfi fonksiyonlarının, (67) ile beliren $s(u,v)$ fonksiyonu (17)₃ denklemini sağlayacak şekilde seçilip seçilemeyeceklerini araştırmamız gerekmektedir. (67) den önce

$$\begin{aligned} s_u &= 2V \cdot \frac{U'}{1-U'^2 \cdot V^2}, \quad s_v = 2U \cdot \frac{V'}{1-U'^2 \cdot V^2}, \quad (U' \cdot V' \neq 0) \\ Shs &= \frac{2U \cdot V}{1-U'^2 \cdot V^2}, \quad Chs = \frac{1+U'^2 \cdot V^2}{1-U'^2 \cdot V^2} \end{aligned} \quad (68)$$

olduğu bulunacaktır. (17)₃ bu sonuçlarla yazılır ve sadeleştirilirse u ve v serbest değişkenlerinin U(u), V(v) fonksiyonları arasında

$$(1-U'^2 \cdot V^2) \left(\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V} \right) + 2(U'^2 \cdot V^2 + V'^2 \cdot U^2) + 1 + U^2 V^2 = 0 \quad (69)$$

denklemini elde edilir. U ve V fonksiyonlarının, bu denklem u, v serbest değişkenlerine göre özdeş olarak sağlanacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. (69) denkleminde, u, v serbest değişkenlerine göre çeşitli türetmeler ile bulunacak denklemler yardımı ile bazı işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} U'^2 &= a_1 U^4 - a_2 U^2 - a_0 \\ V'^2 &= a_0 V^4 + (a_2 - 1) V^2 - a_1 \end{aligned} \quad (70)$$

sonucu bulunur; burada a_0, a_1, a_2 keyfi sabitleri göstermektedir. Görüldüğü gibi U ve V fonksiyonları eliptik fonksiyonlardır.

Böylece şu teoremi elde etmiş oluyoruz:

Teorem 4. Eçkb. bir yüzeyin bir eğrilik çizgiler ailesinin düzlemsel olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu yüzeye ait olan $s(u, v)$ fonksiyonunun, (70) deki U(u), V(v) değerleri ile, (67) deki şekilde olmasıdır.

9. Artık bu yüzeylerin (invariantlarının) belirlenmesi için e, g fonksiyonlarının, $s(u, v)$ nin (67) deki değeri ile (17)_{1,2} den elde edilmele-ri gerekmektedir.

Önce (70) denklemleri ile beliren U(u), V(v) fonksiyonları yardımıyla u, v parametreleri üzerinde bir skala dönüşümü yapmak uygun olacaktır. Gerçekten (68) e göre $U'V' \neq 0$ olduğundan

$$\bar{u} = \ln U(u), \quad \bar{v} = \ln V(v) \quad (71)$$

parametre dönüşümünü yapabiliriz. Buna göre (70) gereğince

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{du} &= \frac{1}{U(u)} \cdot \frac{dU(u)}{du} = \sqrt{a_1 \cdot e^{2\bar{u}} - a_0 \cdot e^{-2\bar{u}} - a_2} \equiv A(\bar{u}) \\ \frac{d\bar{v}}{dv} &= \frac{1}{V(v)} \cdot \frac{dV(v)}{dv} = \sqrt{a_0 \cdot e^{2\bar{v}} - a_1 \cdot e^{-2\bar{v}} + a_2 - 1} \equiv B(\bar{v}) \end{aligned} \quad (72)$$

bulunacaktır. Öte yandan e, g fonksiyonlarının (72) uyarınca

$$\bar{e} = \frac{e}{A(\bar{u})}, \quad \bar{g} = \frac{g}{B(\bar{v})} \quad (73)$$

şekline dönüşeceği ve s(u,v) fonksiyonunun da (67) ve (71) den

$$\text{Th } \frac{s}{2} = e^{\bar{u}+\bar{v}}, \quad (s(\bar{u}, \bar{v}) = \ln \frac{1 + e^{\bar{u}+\bar{v}}}{1 - e^{\bar{u}+\bar{v}}}) \quad (74)$$

olarak elde edileceği açıktır. (17)_{1,2} denklemleri, yeni fonksiyon ve parametrelerle,

$$A(\bar{u}) \cdot \bar{e}_v = B(\bar{v}) \cdot \bar{g}_u \cdot s_v, \quad B(\bar{v}) \bar{g}_u = A(\bar{u}) \cdot \bar{e}_u \cdot s_u \quad (75)$$

olarak ifade edileceklerdir.

Artık $\bar{u}$, $\bar{v}$ parametrelerini yeniden u, v ile ve $\bar{e}$, $\bar{g}$ fonksiyonlarını da yine e, g ile göstereceğiz ve

$$u + v = t \quad (76)$$

diyeceğiz. O halde (74) den

$$s(u,v) = s(t) = \ln \left(\frac{1 + e^t}{1 - e^t} \right), \quad s'(t) = - \frac{1}{Sht} \quad (74')$$

$$Shs = - \frac{1}{Sht}, \quad Chs = - \frac{1}{Sht}$$

yazılabilecektir. Buna göre,

$$A(u) \cdot e_v = - \frac{1}{Sht} \cdot B(v) \cdot g, \quad B(v) \cdot g_u = - \frac{1}{Sht} A(u) \cdot e \quad (75')$$

şeklini alacak olan (75) denklemlerinden e, g fonksiyonları için

$$(A \cdot e)_{uv} + (A \cdot e \cdot Ctht)_v = 0, \quad (B \cdot g)_{uv} + (B \cdot g \cdot Ctht)_u = 0 \quad (77)$$

denklemleri bulunacaktır. Bu denklemlerin sırasıyla v ve u ya göre integrasyonu ile, $\bar{a}(u)$ ve $\bar{b}(v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$(A \cdot e)_u + A \cdot e \cdot Ctht = \bar{a}(u), \quad (B \cdot g)_v + B \cdot g \cdot Ctht = \bar{b}(v) \quad (78)$$

sonuçları elde edilir. Amaca uygun olması nedeni ile buradaki $\bar{a}(u)$ ve $\bar{b}(v)$ keyfi fonksiyonlarının a(u) ve b(v) keyfi fonksiyonları cinsinden

$$\bar{a}(u) = a''(u) - a(u), \quad \bar{b}(v) = b''(v) - b(v)$$

şeklinde ifade edilmiş olduğunu varsayacağız. Bu varsayımla genelliğin bozulmayacağı doğaldır. (78) de birinci mertebeye indirgenmiş olan kısmî türevli lineer denklemlerimiz bilindiği şekilde çözümlerse, h(u), k(v) yeni keyfi fonksiyonlar olmak üzere önce

$$A \cdot e = a'(u) - a(u) \cdot Ctht - \frac{k(v)}{Sht}, \quad B \cdot g = b'(v) - b(v) \cdot Ctht - \frac{h(u)}{Sht}$$

çözümleri elde edilir. Bu değerlerin (75') denklemlerini sağlaması için

$$a(u) = h(u), \quad b(v) = k(v)$$

alınmasının yeter ve gerek olduğunu görmek kolaydır. Böylece aradığımız

$$A \cdot e = h'(u) - h(u) \cdot Ctht - \frac{k(v)}{Sht}, \quad B \cdot g = k'(v) - k(v) \cdot Ctht - \frac{h(u)}{Sht} \quad (79)$$

çözümleri elde edilir. Artık Eçkb. S yüzeylerinden bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan yüzeylerin büyüklükleri (16), (74'), (79) dan

$$R = \frac{1}{r} = h(u) \cdot \text{Cht} - h'(u) \cdot \text{Sht} + k(v), \quad \bar{R} = \frac{1}{\bar{r}} = \frac{h(u)}{\text{Cht}} - k'(v) \cdot \text{Tht} + k(v)$$

$$q = \frac{B(v)}{h \cdot \text{Cht} - h' \cdot \text{Sht} + k}, \quad \bar{q} = \frac{A(u)}{k \cdot \text{Cht} - k' \cdot \text{Sht} + h} \quad (80)$$

$$(A(u) = \sqrt{a_1 \cdot e^{2u} - a_0 \cdot e^{-2u} - a_2}, \quad B(v) = \sqrt{a_0 \cdot e^{2v} - a_1 \cdot e^{-2v} + a_2 - 1})$$

olarak elde edilecektir. (16) dan, (80) yüzeylerinin Eşk. büküldükleri S^0 yüzeyleri için

$$R^0 = \frac{1}{r^0} = \frac{k}{\text{Cht}} - h' \cdot \text{Tht} + h, \quad \bar{R}^0 = \frac{1}{\bar{r}^0} = k \cdot \text{Cht} - k' \cdot \text{Sht} + h \quad (81)$$

değerleri bulunacaktır. Görüldüğü gibi,

$$\left(\frac{q}{r}\right)_1 = (B(v))_1 = 0, \quad \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 = (A(u))_2 = 0$$

olup S yüzeylerinin 1., S^0 yüzeylerinin de 2. eğrilik çizgiler aileleri düzlemseldir.

Böylece (17) denklemlerinin, yani Eşkb. yüzeyler probleminin birer değişkenli iki keyfi fonksiyona bağlı oldukça genel bir çözümünü elde etmiş bulunuyoruz. Problemin genel çözümünün bulunması olanaksız olduğuna göre, bu ölçüde genel bir özel çözümün belirtilmiş olmasının önemli bir aşama olduğu kanısındayız. Aşağıdaki Nu.larda söz konusu özel çözümümüzde geçen $h(u)$, $k(v)$ keyfi fonksiyonlarının çeşitli değerleri ile elde edilecek yüzey sınıflarından sözedeceğiz.

10. Bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan yüzeylerin önemli bir alt sınıfı, bu düzlemsel eğrilerin çemberlerden oluştuğu yüzeylerdir. Bu yüzeyler, merkezi genel bir eğri çizen ve yarıçapı bu eğrinin parametresine bağlı olarak değişen (bir parametrelili) bir küre ailesinin zarf yüzeyi olarak da elde edilir ve Kanal Yüzeyler adını alırlar. Buna göre dönel yüzeyler, söz konusu merkezler eğrisinin doğruya bozulduğu, bozulmuş kanal yüzeyler olarak da düşünülebilir. Kanal yüzeylerin tanım özeliği [2.s.175] den

$$r_1 \cdot \bar{r}_2 = 0 \quad (82)$$

eklinde bilinmektedir. Bu koşulun

$$r_1 = \bar{r}_2 = 0$$

eklinde gerçekleşmesi halinde her iki eğrilik çizgiler ailesi de çemberler-
en oluşan özel kanal yüzeyler elde edilir ki bunlara Dupin Siklidleri denir.
u yüzeyler için her iki eğrilik çizgiler ailesi de düzlemsel olduğundan
 $r_1 = 0$ için $q_1 = 0$, $\bar{r}_2 = 0$ için de $\bar{q}_2 = 0$ olacağının gösterilmesi çok ko-
aydır.), $D=\bar{D}=0$ bulunur ki bu halde (6) koşulu ile Eçkb. bir yüzey elde edi-
emeyeceğini biliyoruz. (6) koşulu kaldırılınca da, sonuçlarını Nu.2 den
ıldığımız dönel yüzey (bu hal için bir tor) özel hali elde edilecektir. 0
alde genel kanal yüzeyler için (82) koşulunun, örneğin

$$r_1 = 0 \quad (\bar{r}_2 \neq 0) \quad (82')$$

eklinde sağlandığını varsayabiliriz. Buna göre kolayca görülebilir ki (80)
üzeyinin bir kanal yüzey olması için gerek ve yeter koşul $h(u)$ keyfi fonk-
iyonunun, b_0 , b_1 keyfi sabitler olmak üzere

$$h(u) = b_0 \cdot e^u + b_1 \cdot e^{-u} \quad (83)$$

eklinde seçilmesidir. $h(u)$ nun bu değeri ile (80) den bu yüzeylerin invari-
antları için

$$R(v) = \frac{1}{r(v)} = k(v) + b_0 \cdot e^{-v} + b_1 \cdot e^v, \quad \bar{R} = \frac{1}{\bar{r}} = \frac{R \cdot \text{Cht} - R' \cdot \text{Sht}}{\text{Cht}} \quad (1)$$

$$q = \frac{B(v)}{k(v) + b_0 \cdot e^{-v} + b_1 \cdot e^v}, \quad \bar{q} = \frac{A(u)}{k \cdot \text{Cht} - k' \cdot \text{Sht} + b_0 \cdot e^u + b_1 \cdot e^{-u}} \quad (84)$$

1) Burada $R' \neq 0$ varsayacağız, çünkü $R' = 0$ için (5)₁ den $q = 0$ bulunacağından
u. 2 de söz konusu ettiğimiz Monge yüzeylerinin ₁ bir özel hali ortaya çı-
ar ki bu, sabit yarıçaplı ve merkezleri düzlemsel bir eğri çizen bir küre
ilesinin zarf yüzeyi olan özel bir boru yüzeyidir. Yüzeyin denklemleri (7)
e $U = R \cdot \cos(a \cdot u/R) + C$ alarak elde edilir.

yazılacaktır.

Doğal olarak A, B fonksiyonları (80) deki değerleri ile belirlidir. e, g de (79) da h(u) nun (83) değeri konarak bulunacaktır. S^0 yüzeyine ait R^0 , $\bar{R}^0$ invaryantları ise bu h(u) değeri ile (81) den yazılacaktır. (84) den ilk aşamada şu sonucu ifade edebiliriz:

Yukarıda da açıkladığımız gibi, genel kanal yüzeyler bir değişikli üç keyfi fonksiyona bağlıdır. Halbuki (84) invaryantları ile belirlenebilen Eçkb. kanal yüzeyler yalnız bir k(v) (yada R(v)) keyfi fonksiyonuna bağlıdır. Dolayısıyla, beklendiği gibi, tüm kanal yüzeyler değil bunların belirli bir alt sınıfı Eçkb. yüzeylerden oluşur. Şimdi bu alt sınıfa ait yüzeylerin denklemlerini belirtmek istiyoruz.

Genel kanal yüzeylerin [2.s.152] de verilen denklemlerinde g ve v parametresi eğrilik çizgisi parametresi değildir. Biz (84) büyüklükleri verecek olan denklemi aradığımıza ve bu büyüklükler eğrilik çizgileri parametrelerinde belirtildiğine göre söz konusu denklemi biraz değişik olarak aşağıdaki şekilde yazıyoruz:

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(v) + a(v) \cdot \vec{t}(v) + p(v) \cdot [\cos\theta(u,v) \cdot \vec{n}(v) + \sin\theta(u,v) \cdot \vec{b}(v)]$$

Burada $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ birim vektörleri, $\vec{r}(v)$ uzay eğrisinin Frenet üçyüzlüsü vektörlerini göstermektedir. $\vec{r}(v)$ eğrisinin yay uzunluğunu σ , eğrilikliğini κ , masasını da τ ile göstereceğiz ve

$$\frac{d\sigma}{dv} = b(v), \quad (p' = \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dv} = p' \cdot b(v)), \quad (86)$$

diyeceğiz. Buna göre a(v), p(v), b(v) fonksiyonları, yüzeyin zarf olduğu ailesinin R(v) yarıçapı ile

$$a(v) \cdot b(v) = -R(v) \cdot R'(v), \quad b(v) \cdot p(v) = R(v) \cdot \sqrt{b^2 - R'^2} \quad (87)$$

$$(a^2 + p^2 = R^2, \quad a \cdot (a' + b) + p \cdot p' = 0; \quad R, p > 0)$$

klinde bağlıdır. Kanal yüzeylerde bu $R(v)$ yarıçapının çemberlerden oluşan eğrilik çizgiler ailesine ait asal eğrilik yarıçapı olduğunu biliyoruz, o halde buradaki $R(v)$ fonksiyonu (84) deki $R(v)$ ile aynı olacaktır. Ayrıca u, v fonksiyonu, (85) de u parametresinin de, v parametresi gibi eğrilik çizgisi parametresi olmasını sağlayacak şekilde seçilecektir. Artık a, b, R fonksiyonları ile $\theta(u, v)$ nin (85) yüzeyine ait invaryantların ve e, g metrikliklerinin (84) ve (79) dakilerin aynı olmasını sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Bunun için Nu. 8 de uyguladığımız ve ileride gerektiğinde kullanacağımız yöntemi burada bu yüzeyler için tekrarlayacağız. (85) de $u = s, t$ eğrilerinin eğrilik çizgisi olduğu bilindiğine göre $u = s, t$ eğrilerinin de eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul $\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = F = 0$ olmasıdır. $\vec{x}_v$ nin değerleri (85) den hesaplanarak yerine konursa bu koşulun $\theta(u, v)$ fonksiyonu için

$$\theta_v = \frac{a \cdot b \cdot \kappa}{p} \cdot \sin \theta - b \cdot \tau \quad (88)$$

denkleminde dönüşeceğini görmek kolaydır. (88) gözönünde bulundurulursa $\vec{x}_u$ nin

$$\vec{x}_u = p \cdot \theta_u \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{n} + \cos \theta \cdot \vec{b}), \quad \vec{x}_v = (p' + a \cdot b \cdot \kappa \cdot \cos \theta) \left[-\frac{p}{a} \cdot \vec{t} + \cos \theta \cdot \vec{n} + \sin \theta \cdot \vec{b} \right] \quad (89)$$

klinde sadeleştiği görülür. Buradan

$$e = p \cdot \theta_u, \quad g = \frac{R}{a} \cdot (p' + a \cdot b \cdot \kappa \cdot \cos \theta) \quad (90)$$

bulunacaktır. Yüzeyin $\vec{N}$ normal birim vektörünü (89) dan

$$\vec{N} = - \left[\frac{a}{R} \cdot \vec{t} + \frac{p}{R} \cdot (\cos \theta \cdot \vec{n} + \sin \theta \cdot \vec{b}) \right] \quad (91)$$

tarafından elde ederiz. Buradan (87), (88) ve (90) da gözönünde bulundurularak $\vec{N}_v$ türevleri

$$\vec{N}_u = - \theta_u \cdot \frac{p}{R} \cdot [-\sin \theta \cdot \vec{n} + \cos \theta \cdot \vec{b}], \quad \vec{N}_v = - \frac{a \cdot g - p \cdot R'}{R^2} \cdot \left[-\frac{p}{a} \cdot \vec{t} + \cos \theta \cdot \vec{n} + \sin \theta \cdot \vec{b} \right] \quad (92)$$

şeklinde hesaplanır. (89) yardımıyla (92) deki $\vec{N}_u$, $\vec{N}_v$ vektörleri

$$\vec{N}_u = -\frac{\vec{x}_u}{R}, \quad \vec{N}_v = -\frac{a.g - p.R'}{a.R.g} \cdot \vec{x}_v \quad (93)$$

olarak da ifade edilebilir. (4) deki türev denklemleri hatırlanırsa bu sonuçlardan

$$r = \frac{1}{R}, \quad \bar{r} = \left(\frac{1}{R} - \frac{p.R'}{a.R.g} \right) \quad (94)$$

olarak bulunacağı anlaşılır. (79) ve (80) den bulunacak olan

$$e = \frac{-R}{A.Sht}, \quad g = \frac{R' - R.Ctht}{B} \quad (= -\frac{\bar{R}.Sht}{B}) \quad (95)$$

değerleri (90) ve (94) de gözönüne alınırsa önce

$$\bar{e}_u = \frac{-R}{A.p.Sht}, \quad \frac{a}{p} = B, \quad \left(\frac{R}{p} = \sqrt{1 + B^2} \right) \quad (96)$$

sonra da

$$\frac{a.b.\kappa}{p} . \cos\theta = \left(\ln \frac{R}{p} \right)' - Ctht \quad (= \frac{B.B'}{1+B^2} - Ctht) \quad (97)$$

bulunur. (97) den u ya göre türev alırsak, $\sin\theta$ için

$$\frac{a.b.\kappa}{p} . \sin\theta = \frac{A.p}{R.Sht} \quad (98)$$

bağıntısını elde ederiz. Son olarak (97) ve (98) den $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ özdeşliği yazılırsa, A, B nin (80) deki değerleri de gözönünde bulundurularak, u bir işlem sonucunda

$$b.\kappa = \frac{k_o}{(1+B^2).B}, \quad (k_o^2 = a_2^2 + 4a_o.a_1 \neq 0)^{(1)} \quad (99)$$

(1) $a_2^2 + 4a_o.a_1 \leq 0$ için (80) deki A ve B fonksiyonlarının birlikte reel olamayacağını görmek kolaydır. Çünkü u, v reel olan eğrilik çizgilerinin reelmiş parametreleri olduktan başka a_1 katsayıları da reeldir.

bulunacak ve bu değer ile (97), (98) den

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a_1 \cdot e^{u-v} - a_0 \cdot e^{v-u} - a_2 \cdot \text{Cht}}{k_0 \cdot \text{Sht}}, \quad \sin \theta = \frac{A \cdot \sqrt{1+B^2}}{k_0 \cdot \text{Sht}} \\ \left(\text{Tg } \frac{\theta}{2} \right) &= \frac{A \cdot \sqrt{1+B^2}}{k_0 \cdot \text{Sht} - a_2 \cdot \text{Cht} - a_0 \cdot e^{v-u} + a_1 \cdot e^{u-v}} \end{aligned} \quad (100)$$

sonuçlarına varılacaktır. (100) den v ye göre türev alınarak θ_v , hesaplanırsa

$$\theta_v = \frac{A}{\sqrt{1+B^2} \cdot \text{Sht}} = \frac{a \cdot b \cdot \kappa}{p} \cdot \sin \theta$$

bulunacaktır. Bu θ_v değeri (88) deki değerle karşılaştırılırsa $\tau=0$ gibi ilginç bir durum ortaya çıkar ki bunu şu teoremle ifade ediyoruz.

Teorem 5. Eçkb. bir kanal yüzeyin zarf olduğu küre ailesinin merkezler eğrisi düzlemsel bir eğri olmak zorundadır.

Böylece yalnız bir keyfi fonksiyona bağlı olduğunu belirttiğimiz Eçkb. kanal yüzeyler sınıfının denklemlerini elde etmiş bulunuyoruz. Gerçekten (85) denklemindeki bilinmeyen fonksiyonlardan $\theta(u,v)$, bilinen $A(u)$, $B(v)$ fonksiyonları cinsinden (100) de, öteki fonksiyonlar ise A , B fonksiyonları ve $R(v)$ keyfi fonksiyonu cinsinden

$$a(v) = \frac{R \cdot B}{\sqrt{1+B^2}}, \quad p(v) = \frac{R}{\sqrt{1+B^2}}, \quad b(v) = \frac{-\sqrt{1+B^2}}{B} \cdot R' \quad (101)$$

olarak belirlemiştir. $\vec{r}(v)$ merkezler eğrisi düzlemsel olacağına göre $\kappa(v)$ eğrilik fonksiyonu ile belirlidir ve (99) gereğince

$$\kappa(v) = \frac{-k_0}{R' \cdot (1+B^2)^{3/2}} \quad (102)$$

dir. Buradan hiç olmazsa teorik olarak şu sonucu ifade edebiliriz: $R(v)$ keyfi seçilirse $\kappa(v)$ yani merkezler eğrisi belirir. Tersine olarak merkezler eğrisi seçilirse $R(v)$ bir sabit farkı ile bellidir. Öte yandan [3.s.28] den $\kappa(v)$ eğriliği cinsinden düzlemsel bir eğrinin denklemlerinin

$$x(\sigma) = \int \cos[\int \kappa(\sigma) . d\sigma] . d\sigma, \quad y(\sigma) = \int \sin[\int \kappa(\sigma) . d\sigma] . d\sigma$$

şeklinde olacağını bildiğimize göre (101) ve (102) den $\vec{r}(v)$ eğrisi için

$$\begin{aligned} x(v) &= \int \left(- \frac{\sqrt{1+B^2}}{B} . R' \right) . \cos \left[\int \frac{k_0 dv}{B(1+B^2)} \right] . dv, \\ y(v) &= \int \left(- \frac{\sqrt{1+B^2}}{B} . R' \right) . \sin \left[\int \frac{k_0 dv}{B(1+B^2)} \right] . dv \end{aligned} \quad (103)$$

denklemlerini yazabiliriz.

Basit bir örnek olmak üzere (103) merkezler eğrisinin R_0 yarıçaplı bir çember olmasını istersek (102) de $\kappa = 1/R_0$ almamız yetecektir. Bu halde

$$R' = \frac{-k_0 . R_0}{(1+B^2)^{3/2}}$$

olması gerekecek ve (103) den söz konusu çemberin parametrik denklemleri

$$x(T) + m_0 = R_0 . \sin T, \quad y(T) + m_1 = - R_0 . \cos T, \quad (T = \int \frac{k_0 . dv}{B . (1+B^2)})$$

şeklinde elde edilecektir.

11. Joachimsthal yüzeyleri de [3.s.308], bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan yüzeyler ailesi içinde bir alt sınıf oluşturur. Monge yüzeylerinde bir eğrilik çizgiler ailesinin paralel düzlemlerde bulunduğu ve bunun sonucu olarak ikinci eğrilik çizgiler ailesinin de düzlemsel bir eğrinin, eğri düzleminin genel bir silindir üzerinde kaymadan yuvarlanması sırasında aldığı konumlardan oluştuğunu biliyoruz. Bu oluşumda birinci aileyi taşıyan düzlemlerin paralel olacak yerde, yani sonsuzdaki bir doğrudan geçecek yerde sonlu uzaklıkta sabit bir doğrudan geçmeleri istenebilirdi. Bu halde ikinci ailenin, artık düzlemsel değil, merkezleri bu doğru üzerinde bulunan küreler üzerinde bulunmak zorunda olduğu görülecekti. Fazla olarak bir küre kendisine ait eğrilik çizgisi boyunca yüzeyi dik açı ile kesecekti. İşte bir bakıma Monge yüzeylerinin genel hali olarak ta düşünülebilecek ol-

yüzeylere Joachimsthal yüzeyleri denir. Bu yüzeylere ait denklemleri [s.309] dan aşağıya alıyoruz:

$$\vec{x}(\bar{u}, \bar{v}) : (x = p(\bar{u}) \cdot \sin \theta \cdot \cos \bar{v}, \quad y = p(\bar{u}) \cdot \sin \theta \cdot \sin \bar{v}, \quad z = \bar{u} + p(\bar{u}) \cdot \cos \theta) \quad (104)$$

$$\left(\operatorname{Tg} \frac{\theta}{2} = V(\bar{v}) \cdot e^{\int \frac{d\bar{u}}{p(\bar{u})}} \right).$$

Burada $\bar{u}$, $\bar{v}$ eğrilik çizgileri parametreleri, $p(\bar{u})$ söz konusu kürelerin yarıçapları, $V(\bar{v})$ bir keyfi fonksiyondur. Görüldüğü gibi bu yüzeyler de Monge yüzeyleri gibi birer değişkenli iki keyfi fonksiyona bağlıdır. (104) yüzeylerinin tanım koşullarının, invariyanları cinsinden ifadesinin

$$\left(\frac{q}{r} \right)_1 = 0, \quad \bar{q}_2 = 0, \quad (\text{ya da } \left(\frac{q}{r} \right)_2 = 0, \quad q_1 = 0) \quad (105)$$

şeklinde olacağını görmek zor değildir ⁽¹⁾. Buna göre, (80) yüzeyleri arasında Joachimsthal yüzeylerini ayırmak için $\bar{q}_2 = 0$ koşulunu gerçeklemek gerekir ve yeter. Çok kolay görülür ki kanal yüzeyler halinde $h(u)$ fonksiyonunun seçimine olduğu gibi burada da $k(v)$ fonksiyonunun, c_0 , c_1 keyfi sabitler olmak üzere

$$k(v) = c_0 \cdot e^v + c_1 \cdot e^{-v} \quad (106)$$

1) 1. eğrilik çizgiler ailesini, $\vec{k}$ birim vektörlü Oz ekseninden geçen düzlemde varsayarsak, düzlemsellik koşulu olarak (105)₁ yazılabilecek, ayrıca yüzeyin $\vec{x}$ yer vektörü $\vec{x} = p \cdot \vec{x}_1 + b \cdot \vec{k}$ şeklinde ifade edilebilecektir. Buradan 2. invariyan türev alınır $p_2 \cdot \vec{x}_1 + (p \cdot q - 1) \cdot \vec{x}_2 + b_2 \cdot \vec{k} = 0$ bulunur. $\vec{x}_2$ de aynı düzleme paralel olamayacağına göre $p_2 = b_2 = p \cdot q - 1 = 0$ yani $q = 1/p$ ($q_2 = 0$) sonucuna varılır. Bundan başka $p \vec{x}_1 = \vec{x} - b \vec{k}$ dan $(\vec{x} - b \cdot \vec{k})^2 = p^2(u)$ yazılabilir ki $u, u = s \cdot b \cdot t$. eğrilerinin Oz eksenini üzerindeki $b \cdot \vec{k}$ noktası merkezli ve $p(u) = 1/q$ yarıçaplı küreler üzerinde olduğunu gösterir. Ayrıca $\vec{N} \cdot (\vec{x} - b \cdot \vec{k}) = p \cdot \vec{N} \cdot \vec{x}_1 = 0$ olduğu için bu küreler yüzeyi dik keser.

şeklinde seçilmesi bu sonucu sağlar. $k(v)$ nin bu değeri ile (81) den S^0 yüzeyi için

$$\bar{r}_2 = 0 \quad (107)$$

bulunur; yani S^0 yüzeyi bir kanal yüzeyidir. Bunun, bir bakıma karşıtı olan Nu. 11 de S yüzeyi $h(u)$ nun (83) değeri ile bir kanal yüzey ($r_1=0$ dolayısıyla $q_1=0$) olduğunda S^0 yüzeyi için

$$\left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 = \left(\frac{\bar{q}}{\bar{r}}\right)_2 = 0, \quad q_1^0 = q_1 = 0$$

koşulları gerçekleşmiş yani S^0 bir Joachimsthal yüzeyi olmuştur. Elde ettiğimiz bu ilginç sonucu şu teoremle ifade ediyoruz:

Teorem 6. Kanal yüzeylerden Eçkb. yüzeyler ancak Joachimsthal yüzeylerine ve Joachimsthal yüzeylerinden Eçkb. yüzeyler de ancak kanal yüzeylere Eçk. bükülebilirler.

Eçkb. Joachimsthal yüzeylerinin denklemlerini de belirtmek istersek, (104) genel denkleminde $p(\bar{u})$, $V(\bar{v})$ fonksiyonlarını ve $\bar{u}$, $\bar{v}$ parametrelerini, bu denklemler (106) daki $k(v)$ değeri ile (80) invaryantlarını vererek şekilde seçmemiz gerekmektedir. Bu işlemin benzerini oldukça ayrıntılı olarak Nu. 10 da yaptığımız için burada ayrıntıya girmeyeceğiz. Önce (104) denklemlerinden kullanacağımız büyüklükleri aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} \bar{e} &= p'(\bar{u}) + \cos\theta, \quad \bar{g} = p(\bar{u}) \cdot \sin\theta \cdot \left[1 + \left(\frac{V'(\bar{v})}{V(\bar{v})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\ R &= \frac{1}{r} = - \left[1 + \left(\frac{V'(\bar{v})}{V(\bar{v})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{p(\bar{u})}{\sin\theta} \cdot (p'(\bar{u}) + \cos\theta), \\ \left(\bar{q} = \frac{1}{p(\bar{u})}, \quad q = \frac{-\frac{\theta}{\bar{v}}}{p(\bar{u}) \cdot [p'(\bar{u}) + \cos\theta]} \cdot \left[1 + \left(\frac{V'(\bar{v})}{V(\bar{v})}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (108)$$

Şimdi bu sonuçlara

$$\bar{u} = a(u), \quad \bar{v} = b(v) \quad (109)$$

parametre dönüşümünü uygulayarak (106) daki $k(v)$ değeri ile yazılmış (79)

(80) büyüklüklerini elde etmeye çalışacağız. R , q , $\bar{q}$ invaryant olduğundan dönüşümde değerleri değişmez. $\bar{e}$, $\bar{g}$ nin ise

$$\bar{e} = \frac{e}{a}, \quad \bar{g} = \frac{g}{b}, \quad (110)$$

şeklinde değişeceğini biliyoruz. Önce (80) deki $qR=B(v)$ ve $\bar{q}.J(u)=A(u)$ bağıntılarını (108) büyüklükleri ile yazarsak

$$\frac{\bar{v}}{\sin \theta} = B(v), \quad p(\bar{u}) = \frac{J(u)}{A(u)}, \quad (J(u) \equiv h(u) + c_1 \cdot e^u + c_0 \cdot e^{-u})$$

ve (104) deki $T_g \frac{\theta}{2}$ değeri gözönünde bulundurulursa

$$\frac{V'(\bar{v})}{V(\bar{v})} = B(v), \quad p(u) = \frac{J(u)}{A(u)} \quad (111)$$

buluruz. Buna göre ve (79), (80), (108), (110) dan

$$(\bar{e} =) p'(\bar{u}) + \cos \theta = \frac{-R}{a' \cdot A \cdot \text{Sht}} \quad (= \frac{e}{a'})$$

$$(\bar{g} =) p(\bar{u}) \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{1 + B^2} = \frac{-J(u)}{b' \cdot B \cdot \text{Sht}} \quad (= \frac{g}{b'})$$

yazılacaktır. Buradan, R nin (108) ve $p(\bar{u})$ nin (111) deki değerleri ile $\sin \theta$ çözülürse

$$\sin \theta = \frac{J \cdot \sqrt{1 + B^2}}{a' \cdot A^2 \cdot \text{Sht}} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{-A}{b' \cdot B \cdot \sqrt{1 + B^2} \cdot \text{Sht}}$$

bulunur. Bu sonuç ise a' ve b' yü belirtecek olan

$$\frac{a' \cdot A^3}{J} = -b' \cdot B(1 + B^2) = h_0 \quad (= \text{sbt.}) \quad (112)$$

bağıntılarını verir. Artık $\sin \theta$ dolayısıyla $\cos \theta$ nin değerlerini

$$\sin\theta = \frac{A \cdot \sqrt{1+B^2}}{h_0 \cdot \text{Sht}}, \quad \cos\theta = \frac{A \cdot (A' \cdot \text{Sht} - A \cdot \text{Cht})}{h_0 \cdot \text{Sht}} \quad (113)$$

şeklinde elde ederiz. Buradan $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ özdeşliği yazılınca, k_0^2 (99) da tanımlandığı gibi olmak üzere, $h_0 = k_0$ bulunacağını Nu. 10 daki benzer işlemlerden biliyoruz. Böylece (104) denklemlerinde geçen fonksiyonlar

$$\ln V(\bar{v}) = \ln V(b(v)) = -k_0 \cdot \int \frac{dv}{B^2+1},$$

$$p(\bar{u}) = p(a(u)) = \frac{J(u)}{A(u)}, \quad (114)$$

$$\left(\int \frac{d\bar{u}}{p(\bar{u})} = \int \frac{A \cdot a' \cdot du}{J(u)} = k_0 \cdot \int \frac{du}{A^2} \right)$$

şeklinde alınır ve (112) ile beliren $a(u)$, $b(v)$ fonksiyonları ile (109) dönüşümü yapılırsa, invaryantları $k(v)$ nin (106) değeri ile (80) de verilmiş olan Eçkb. Joachimsthal yüzeylerinin denklemleri bulunmuş olacaktır. Kontrol bakımından, (113) den elde edilecek

$$\text{Tg } \frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{A \cdot \sqrt{1+B^2}}{k_0 \cdot \text{Sht} - a_1 \cdot e^{u-v} + a_0 \cdot e^{v-u} + a_2 \cdot \text{Cht}} \quad (115)$$

değeri ile (114) den bulunacak

$$\ln \text{Tg } \frac{\theta}{2} = k_0 \cdot \left(\int \frac{du}{A^2} - \int \frac{dv}{B^2+1} \right) \quad (115')$$

değerinin aynı olduğu gerçekleştirilebilir. Bu gerçeklemenin biraz uzunca olan işlemlerini özetlemeyi de burada gereksiz buluyoruz. Sadece (115) (ya da (113)) ile belirli olan θ değerinin (100) deki $\theta(=\bar{\theta})$ ile karşılaştırılmasından $\theta + \bar{\theta} = \pi$ elde edileceğine ve bu sonucun $\text{Tg } \frac{\theta}{2} \cdot \text{Tg } \frac{\bar{\theta}}{2} = 1$ olduğu görülerek gerçekleştirileceğine dikkati çekmek istiyoruz.

12. Nu. 10 da e, g büyüklükleri ve invaryantları (79) ve (80) de belirtilmiş bulunan Eçkb. ve bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan yüzeylerden $h(u)$ fonksiyonunun (83) özel değeri ile ayrılan Eçkb. kanal yüzeyleri belirttik; Nu. 11 de de $k(v)$ fonksiyonunun (106) özel değeri ile tanım-

lanan Eçkb. Joachimsthal yüzeylerini elde ettik. Doğal olarak hem $h(u)$ hem de $k(v)$ nin (83) ve (106) daki özel değerlere eşit olması durumu akla gelmektedir. Bu halde Eçkb. yüzeylerden kanal yüzey olan Joachimsthal yüzeyleri (ya da Joachimsthal yüzeyi olan kanal yüzeyler) elde edilecektir. Teorem 6.ya göre böyle yüzeylerin Eçk. büküldüğü yüzeyler de aynı özeliği taşıyacaklar yani S, S^0 yüzeyleri aynı sınıfa ait bulunacaklardır.

Nu. 10 ve Nu. 11 de açıkladıklarımıza göre, bu yüzeyler için (79) ve (80) de $h(u)$ ve $k(v)$ nin (83) ve (106) değerleri konursa önce

$$r_1 = q_1 = \bar{q}_2 = 0 \quad (\bar{r}_2 \neq 0) \quad (116)$$

sonucu elde edilecektir.

$$q_1 = \bar{q}_2$$

koşulunun izotermik yüzeylerin tanım koşulu olduğunu biliyoruz. O halde söz konusu yüzeylerimiz izotermik yüzeylerin bir alt sınıfını oluşturur. Ayrıca incelenmeye geçecek kadar ilginç olduğunu sandığımız bu S, S^0 yüzeylerine ait büyüklükleri (79) ve (80) den; (83) ve (106) yardımıyla aşağıya yazıyoruz:

$$\begin{aligned} e &= \frac{-(m_0 \cdot e^v + m_1 \cdot e^{-v})}{A(u) \cdot Sht}, & g &= \frac{-(m_1 \cdot e^u + m_0 \cdot e^{-u})}{B(v) \cdot Sht}, \\ R &= \frac{1}{r} = m_0 \cdot e^v + m_1 \cdot e^{-v}, & \bar{R} &= \frac{1}{\bar{r}} = \frac{m_1 \cdot e^u + m_0 \cdot e^{-u}}{Cht}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{m_0 \cdot e^v + m_1 \cdot e^{-v}}{B}, & \frac{1}{\bar{q}} &= \frac{m_1 \cdot e^u + m_0 \cdot e^{-u}}{A}, \\ R^0 &= \frac{1}{r^0} = \frac{m_0 \cdot e^v + m_1 \cdot e^{-v}}{Cht}, & \bar{R}^0 &= \frac{1}{\bar{r}^0} = m_1 \cdot e^u + m_0 \cdot e^{-u}, \\ (A^2(u) &= a_1 \cdot e^{2u} - a_0 \cdot e^{-2u} - a_2, & B^2(v) &= a_0 \cdot e^{2v} - a_1 \cdot e^{-2v} + a_2 - 1; \\ t &= u + v; & e_0 + b_1 &= m_0; & b_0 + c_1 &= m_1.) \end{aligned} \quad (117)$$

Bu yüzeylere ait denklemlerin Nu. 10 daki kanal yüzeylerin denklemlerinde

$$R(v) = m_0 \cdot e^v + m_1 \cdot e^{-v}$$

konarak elde edileceği açıktır. Gerek Nu. 10, gerek Nu. 11 ve gerekse burada elde edilen yüzey denklemlerinin oldukça karmaşık olduğu görülmektedir. Bu durumun, yüzeylerin incelenmesi bakımından, zannedildiği kadar önemli olmadığı doğaldır. Çünkü yüzeylerin iç özellikleri onların invariyanları ile belirir. Dolayısıyla esas olan invariyanların yeterince sade ifade edilebilmesidir ki bu husus yukarıda söz konusu olan yüzeylerde oldukça ileri düzeyde sağlanmış bulunmaktadır. Bununla birlikte yukarıda vermiş olduğumuz denklemler, bunlara ait belirli bir yüzeyin şekli hakkında bir fikir edinmek istenirse, bu yüzeyin çeşitli kesit eğrilerinin - bilgisayar aracılığı ile - belirtilmesi için gereklidir.

13. Ortalama ya da Gauss eğriligi sabit olan yüzeylerden (6) koşulları dışında kalanların, yani dönel olanların, Eçk. büküldükleri dönel yüzeyleri Nu. 2 de belirttik. Bu yüzeylerden (6) koşulları altında Eçk. bükülebilenlerin büyüklükleri için de Nu. 5 de (32), (33) ve (35), (36) sonuçlarını verdik. Nu. 5 de ayrıca, $K \neq 1/p^2$ sabit ve pozitif Gauss eğrilikli yüzeylere paralel olan yüzeylerin de Eçkb. yüzeyler olduğunu ve bu yüzeylerin ortalama ve Gauss eğriliklerinin (38) deki lineer bağıntı ile bağlı bulunduğunu gördük. Bilindiği gibi ortalama eğrilik ve Gauss eğriligi arasında genel bir bağıntı bulunan yüzeylere Weingarten (W.) yüzeyleri denir. Bu Nu. da önce Nu. 5 de elde ettiğimiz Eçkb. ortalama ya da Gauss eğriligi sabit yüzeylerden bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olanların büyüklüklerini vereceğiz; sonra da Eçkb. ve bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan W. yüzeylerine ait bir teorem ispatlayacağız.

Büyüklükleri (32) ve (33) de $s(u,v)$ fonksiyonu cinsinden verilen Eçkb. ortalama eğriligi sabit yüzeylerden bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olanları ayırmak için, bu sonuçlarda, $s(u,v)$ fonksiyonunun (67) değerinin konması ya da, aynı anlamda olmak üzere, (71) dönüşümü yapıldıktan sonra, $s(u,v)$ nin (74') değerinin konması yetecektir. Buna göre (32) ve (33) den Eçkb. ve bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan $1/2a$ sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin büyüklükleri, $A(u)$ ve $B(v)$ nin (80) değerleri ile,

$$A(u).e = B(v).g = -a.Cth \frac{t}{2} ; \quad (118)$$

$$r = \frac{1}{a.(Cht+1)} , \quad \bar{r} = \frac{Cht}{a.(Cht+1)} \quad (r^o = \frac{Cht}{a.(Cht+1)} , \quad \bar{r}^o = \frac{1}{a.(Cht+1)})$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde (35) ve (36) dan bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan $1/p^2$ sabit ve pozitif Gauss eğrilikli yüzeylerin büyük-
lükleri de

$$A(u).e = -p.Ctht, \quad B(v).g = \frac{-p}{Sht} , \quad (119)$$

$$r = \frac{1}{p.Cht} , \quad \bar{r} = \frac{Cht}{p} , \quad (r^o = \bar{r}^o = \frac{1}{p})$$

olarak bulunur. (118) ve (119) dan görülüyor ki (118) yüzeyleri (119) yüzeylerinin $p=a$ olmak üzere $(-a)$ uzaklığındaki paralelleridir. Eçkb. her yüzeyin paralelinin de Eçkb. bir yüzey olduğunu Teorem 1. den zaten biliyoruz. Burada sadece bu özeliğin, ortalama eğriligi sabit bir yüzey ile Gauss eğriligi sabit bir yüzey arasında gerçekleşmekte olduğu saptanmaktadır. (118) ve (119) yüzeylerinden bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan W. yüzeylerinin incelendiği [7] de de sözedilmektedir. Eçkb. ve bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan (119) yüzeylerinin çok özel W. yüzeylerinden olduğunu ($K=1/p^2$) biliyoruz. Bu yüzeylere $(-k)$ uzaklığında paralel olan yüzeylerin de Eçkb. ve bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan W. yüzeylerinden olacağı doğaldır; fazla olarak bu W. yüzeyleri (38) özel bağıntısını sağlarlar, ($p=k=a$ özel halinde (118) yüzeyleri elde edilir.) Burada şu soru akla gelmektedir: Bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan W. yüzeylerinden Eçkb. başka yüzeyler var mıdır? Bu sorunun yanıtını şu teoremle veriyoruz.

Teorem 7. Bir eğrilik çizgiler ailesi düzlemsel olan Eçkb. yüzeyler arasında W. yüzeyi olanlar sadece (119) yüzeyleri ve bunların paralelleridir.

İspat : W. yüzeyi olma koşulu çeşitli şekillerde ifade edilebilir; Örneğin açılabilir yüzeyler ($K=0$) dışındaki yüzeyler için $R, \bar{R}$ asal eğrilik yarıçapları arasında yazılan

$$R_u \cdot \bar{R}_v = R_v \cdot \bar{R}_u \quad (120)$$

bağıntısı yüzeyin W. yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul olarak alınabilir. O halde (80) yüzeyleri arasında (120) bağıntısını sağlayanları ayırmamız gerekmektedir. (80) den bulunacak olan

$$R_u = (h - h'') \cdot \text{Sht}, \quad \bar{R}_v = \frac{\text{Sht} \cdot (k' \cdot \text{Sht} - k'' \cdot \text{Cht} - h)}{\text{Ch}^2 t},$$

$$R_v = h \cdot \text{Sht} - h' \cdot \text{Cht} + k', \quad \bar{R}_u = \frac{h' \cdot \text{Cht} - h \cdot \text{Sht} - k'}{\text{Ch}^2 t}$$

değerleri (120) de konursa u, v serbest değişkenleri arasında özdeş olarak sağlanması gereken

$$\text{Sh}^2 t \cdot (h - h'') \cdot (k' \cdot \text{Sht} - k'' \cdot \text{Cht} - h) = - (h \cdot \text{Sht} - h' \cdot \text{Cht} + k')^2 \quad (120')$$

fonksiyonel denklemi elde edilir. Denklemin $h'=k''=0$ için özdeş olarak sağlandığı açıkça görülüyor. O halde açık olan bu çözüm dışında bir çözüm olup olmadığının araştırılması gerekmektedir. $h(u)$ ve $k(v)$ fonksiyonları, bu denklem bir özdeşlik olacak şekilde seçileceklerine göre ilk sonuç denklemde $v=-u$ konarak

$$[k'(v)]_{v=-u} = k'(-u) = h'(u) \quad (121)$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan (120') özdeşliğini u nun, $[h(u)-h''(u)]$ fonksiyonunu sıfır yaptığını varsayabileceğimiz reel ya da kompleks bir u_0 değeri için yazdığımızı düşünürsek, c_0, c_1 sabit olmak üzere

$$k'(v) = c_0 \cdot e^v + c_1 \cdot e^{-v} \quad (122)$$

ya da, b_0 yeni bir sabiti gösterdiğine göre,

$$k(v) = c_0 \cdot e^v - c_1 \cdot e^{-v} + b_0 \quad (122')$$

sonucunu elde ederiz. (121) gereğince (122) den doğrudan doğruya

$$h'(u) = c_0 \cdot e^{-u} + c_1 \cdot e^u \quad (123)$$

ve dolayısıyla

$$h(u) = c_1 \cdot e^u - c_0 \cdot e^{-u} + p \quad (123')$$

değerini buluruz; burada p yeni bir sabiti göstermektedir. $h(u)$ ve $k(v)$ nin bu değerleri ile c_0 , c_1 , b_0 , p sabitleri ne olursa olsun (120') özdeşliği-
nin sağlandığını görmek kolaydır. Artık (122'), (123') sonuçları ile (80) den

$$R = p \cdot Cht + b_0, \quad \bar{R} = \frac{p}{Cht} + b_0 \quad (124)$$

$$(A.e = - p \cdot Ctht - \frac{b_0}{Sht}, \quad B.g = \frac{-p}{Sht} - b_0 \cdot Ctht)$$

bulunacaktır. Bu değerlerin $b_0=0$ için (119) ile aynı olduğu görülmektedir.
 $b_0 \neq 0$ için ise (41), (41'), (73) ve (74') gözönünde bulundurularak (124) yü-
zeylerinin (119) yüzeylerine ($-b_0$) uzaklığında paralel yüzeyler olduğunu gör-
mek kolaydır. Bu ise ispatı istenen sonuçtur.

KAYNAKLAR

- [1]. O. BONNET, *Mémoire sur la théorie des surfaces, Applicables sur une surface donnée*, (Journale de l'Ecole Polytechnique, T.25, 1867).
- [2]. W. BLASCHKE, (Çeviri K.Erim), *Diferansiyel Geometri Dersleri*, 1949.
- [3]. L.P. EISENHART, *A Treatise On The Differential Geometry Of Curves And Surfaces*, 1960.
- [4]. Z. SOYUÇOK, *Sonsuzküçük Rijitlik ve Dönel Olmayan Sonsuzküçük Rijit Kapalı Zar Örneklerinde Sabit İç Basınç Halindeki Gerilme Dağılımı*, (İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi, 1978).
- [5]. F. ŞEMİN, *Sur Une Classe de Surfaces - W.* (İ.Ü. Fen Fakültesi Mecmuası, C. 21, Sayı 1, 1956).
- [6]. A. ÖZKAN, *Genelleştirilmiş Bäcklund Dönüşümü Üzerine*, (İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi, T.O.Kabakçaoğlu Anı Kitabı, 1974).
- [7]. A. ÖZKAN, *Über W. Flächen, Auf Der Die Kurven Der Festen Krümmung Mit Den Krümmungslinien 3 - Seckseck - Waben Bilden*, (İ.Ü. Fen Fakültesi Mecmuası, C. 22, 1957).

ADAYIN KISA ÖZGEÇMİŐİ

Füsun URAS 16.5.1954 yılında İstanbul'da doğmuş, ilk öğrenimini İstanbul Oruç Gazi İlkokulu'nda, orta öğrenimini de Çamlıca Kız Lisesi'nde tamamlamıştır. 1972 yılında İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümüne kaydolmuş, 1977 yılı Haziran döneminde mezun olmuştur. 22.9.1977 tarihinde İ.D.M.M. Akademisi Temel Bilimler Bölümü Yüksek Matematik Kürsüsü asistanlığına aday olarak, 17.1.1979 tarihinde de aynı göreve asaleten atanmıştır. Hâlen Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

