YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU VE SONSUZ ARALIKLARDA VERİLMİŞ STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DENKLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Serpil ÖZTÜRK USLU

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 14 Mayıs 1998
Tez Danışmanı : Prof.Dr.Mehmet BAYRAMOĞLU (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Metin ARIK (BÜ)
: Prof.Dr.Yusuf AVCI (İÜ)

Metin Arık

İSTANBUL, 1998

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında hiç bir zaman yardım ve desteğini esirgemeyen değerli hocam *Sayın Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU'* na teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca destek ve yardımlarından dolayı *Sayın Prof. Yaşar ÖZDEMİR'* e, *Prof. Tahir ŞİŞMAN'* a, *Öğr.Gör.Dr. Zerrin Oer*'e, *Arş.Gör. Selmahan SELİM*'e ve manevi desteklerinden dolayı *eşime* ve *aileme* teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

H ayrılabilir uzay olsun. $H_1 = L_2(a,b;H)$ $(-\infty \le a < x < b \le \infty)$ ile (a,b) aralığında tanımlanmış Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim. Eğer $f(x), g(x) \in H_1$ elemanları için iç çarpımı

$$(f,g)_1 = \int_a^b (f,g)_H dx$$

ile tanımlanırsa H_1 bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur. İki bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde $L_2(0,\infty;H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \le x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu incelenmiş ve Green fonksiyonunun Hilbert-Schmidt tipli integral operatör oluşturduğu gösterilmiştir. Burada $Q(x)$, x in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde tersi kompakt olan normal operatör, h ise kompleks sayıdır.

İkinci bölümde $L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \le x \le \pi$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün spektrumu incelenmiş ve özdeğerler sayısının asimtotik ifadesi elde edilmiştir. Burada $Q(x)$, x in $[0,\pi]$ den alınmış herbir değerinde kendine eş operatördür. Elde edilen sonuçlar özel problemlere uygulanmıştır.

ABSTRACT

Let H be a seperable space. Let us denote by the set of functions by $H_1 = L_2(a, b; H)$ $(-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$ which is defined in the interval (a, b), Bachner measurable and satisfying the condition

$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

If the inner product for the elements $f(x), g(x) \in H_1$ is defined by

$$(f, g)_1 = \int_a^b (f, g)_H dx$$

then H_1 forms a seperable Hilbert space.

In the first chapter of this thesis which contains two chapters, Green function of operator which is formed by the differantial expression

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

in $L_2(0, \infty; H)$ space and the boundary condition $y'(0) - hy(0) = 0$ has been studied, and it has been proved that Green function forms integral operator in the type of Hilbert-Schmidt, where $Q(x)$ is normal operator whose inverse is compact at each value of x in $[0, \infty)$ and h is complex number.

In the second chapter, spectrum of operator which is formed by the differential expression

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

in $L_2(0, \pi; H)$ space and the boundary conditions

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0,$$

has been studied and asymptotic expression of number of eigenvalues have been obtained. Here, Q(x) is self adjoint operator at each value of x in $[0, \pi]$. The results which were obtained have been applied to specific problems.

1.0 GİRİŞ

Kendine eş adi diferansiyel denklemlerin spektral analizine ait çok sayıda makale ve kitaplar yazılmıştır. Örneğin Titchmarsh, E.C. nin [Titchmarsh, E.C., 1962], Coddincton ve Levinson, N. un [Coddincton, E.A.,ve Levinson, N.,1955], Naımark, M.A. ın [Naımark M.A., 1969], Levitan, B.M., ve Sargsyan, I.Ş., ın [Levitan, B.M., ve Sargsyan, I.Ş., 1991] kitaplarını ve son çalışmalardan Fulton, T.C., ve Pruess, S.A., [Fulton, T.C., ve Pruess, S.A., 1994] çalışmasını ve buradaki kaynakları gösterebiliriz. Son otuz seneden beri sınırsız operatör katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral özellikleri incelenmektedir.

Matematiksel fiziğin çok sayıda denklemlerini, kısmi türevli diferansiyel denklemleri, integro diferansiyel denklemleri, sonsuz sayıda adi diferansiyel denklemler sistemini operatör katsayılı adi diferansiyel denklem şeklinde yazılabildiğinden dolayı bu tür denklemlerin spektral özelliklerinin incelenmesi önemlidir.

Sınırsız operatör katsayılı Sturm-Liouville denkleminin spektral analizi ilk olarak 1967 yılında Kostiyuchenko, A.G., ve Levitan, B.M. tarafından verilmiştir.

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ aralığında tanımlanmış değerleri H - ya ait kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_0^\infty \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonlar kümesini $H_1 = L_2(a,b;H)$ ile gösterelim. Eğer H_1 e ait iki $f(x)$ *ve* $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(f,g)_1 = \int_a^b (f,g)_H dx$$

formülü ile tanımlarsak H_1 ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur. Bazen biz $\|.\|_H$ ve $(.,.)_H$ yı kısa olarak $\|.\|$ ve $(.,.)$ ile göstereceğiz.

Yukarıda sözü edilen Kostyuchenko, A.G., ve Levitan, B.N., ın çalışmasında $L_2(-\infty,\infty;H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün spektrumunun ayrık olduğu gösterilmiş ve özdeğerler sayısının asimtotik ifadesi bulunmuştur. Burada $Q(x)$, x in $(-\infty,\infty)$

lan alınmış herbir değerinde H da kendine eş alttan sınırlı, tersi tam sürekli olan ope-
atördür. Bu tür operatörün Green fonksiyonu 1968 yılında Levitan, B.M., [Levitan, 3.M., 1968] tarafından incelenmiştir. Not edelim ki diferansiyel operatörlerin Green onksiyonunun incelenmesine ait çok sayıda makale ve kitaplar vardır. [Stakgold, I., 979,Roach, G.F., 1982], [Fulton, T.C., Pruess, S.A., 1994] 1971 yılında $2n$ mertebe-
len

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

eklinde diferansiyel ifadenin Green fonksiyonunun bulunması ve özdeğerlerin asim-
otik ifadesi Bayramoğlu, M., nun (Bayramoğlu, M., 1971) çalışmasında verilmiştir. ›urada $Q_j(x)$ operatör fonksiyonlardır. Daha sonra bu konuya ait çok sayıda maka-
eler yayınlanmıştır.[Aslanov, G.I., 1976, 1994, Baymatov, K., 1973, Kasımov, E.A., 980, Kleyman E.G., 1974, Mışnayevsky, G.A., 1976, Oer, Z., 1997, Otelbayev, M., 973, Saıto, J., 1975, Tamura, H., 1974, Solomyak, M.Z., 1986] Bu konuyla ilgili 1990 ılına kadar çalışmaların referansı Otelbayev, M., in [Otebayev, M., 1990] kitabında erilmiştir.

ki bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde $L_2(0,\infty;H)$ uzayında erilmiş

$$-y'' + Q(x)y + \mu y \quad , \qquad 0 \le x < \infty \tag{1.1}$$

iferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{1.2}$$

ınır koşulu ile oluşan sınır değer probleminin Green fonksiyonu incelenmiştir. Bura-
a $Q(x)$, x in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde H Hilbert uzayında dönüşüm apan tersi tam sürekli olan normal operatör, h ise herhangi kompleks sayıdır.

kinci bölümde ise $L_2([0,\pi];H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \tag{1.3}$$

iferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \tag{1.4}$$

$$y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0 \tag{1.5}$$

sınır koşulları ile oluşan operatörün rezolventi ve özdeğerler sayısının asimtotik ifadesi bulunmuştur.

Burada $Q(x)$, x in $[0,\pi]$ dan alınmış herbir değerinde H da dönüşüm yapan kendine eş, alttan sınırlı ve tersi tam sürekli olan operatördür, h_1 , h_2 herhangi nonnegatif sayılardır.

Not edelim ki (1.1) - (1.2) probleminin Green fonksiyonu özel halde, $Q(x)$ kendine eş operatör olduğunda, Oer, Z., in tez çalışmasında incelenmiştir.

(1.3) - (1.5) probleminin rezolventi ise $h_1 = h_2 = 0$ olduğunda Duşdurov, M., (Duşdurov, M., 1981) tarafından incelenmiştir.

2.0 SONLU VE SONSUZ ARALIKLARDA VERİLMİŞ STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DENKLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

2.1. ÖN BİLGİLER

H herhangi ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. A ile H uzayında dönüşüm yapan ve tanım kümesi $D(A)$ ($\bar{D}(A) = H$, burada $\bar{D}(A)$ $D(A)$ nın H da kapanışıdır.) olan simetrik operatörü gösterelim. Eğer $f \in D(A)$ iken

$$(Af,f) \geq \gamma(f,f) \quad , \quad ((Af,f) \leq \beta(f,f))$$

olacak şekilde γ (β) sayısı varsa, ozaman A alttan(üstten) sınırlıdır denir. Eğer $\gamma > 0$ ($\beta < 0$) ise ozaman A pozitif (negatif) tanımlı operatördür denir. $\gamma = 0$ ($\beta = 0$) olduğunda A operatörüne nonnegatif (nonpozitif) operatör denir. Pozitif (negatif) tanımlı operatörün tersi tam sürekli ise operatörün spektrumu ayrıktır denir.

$$TT^* = T^*T$$

özelliğine sahip H da yoğun kümede tanımlanmış kapalı T operatörüne normal operatör denir. Burada T^* operatörü, T operatörünün H da eşleniğini gösterir. Son eşitlikten $D(T^*) = D(T)$ olduğu bellidir [Kato, T., 1980]. Not edelim ki, kendine eş operatör normal operatörün özel halidir. Herhangi T normal operatörü için spektral açılım formülü vardır. T kompakt (tam sürekli) normal operatör olduğunda T nin spektrumu ayrıktır ve özvektörleri tam ortanormal sistem oluşturur. o sayısının kompakt normal T operatörünün özdeğeri olmadığını varsayalım. Bu taktirde T nin spektrumu $S(T)$ sadece

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots$$

koşulunu sağlayan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0\right)$ özdeğerlerinden ibarettir. Bu özdeğerlere karşılık gelen ortanormal özvektörler sistemini

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

ile gösterelim. Bu şekildeki T operatörünün spektral açılımı

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$$

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}(Tx, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x, e_k)e_k$$

formülleri ile ifade edilir.

Son formüller sembolik olarak sırasıyla

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}(., e_k)e_k$$

$$T = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(., e_k)e_k$$

şeklinde yazılır. Burada

$$Te_k = \lambda_k e_k$$

olduğu gözönüne alınmıştır. Eğer f, $S(T)$ yi içeren herhangi bölgede tanımlanmış fonksiyon ise o zaman T operatörünün $f(T)$ fonksiyonu

$$f(T) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)(., e_k)e_k$$

formülü ile tanımlanır. $f(T)$ operatörünün normu

$$\|f(T)\| = \sup_{\lambda_k \in S(T)} |f(\lambda_k)|$$

dır. Özel olarak $f(T) = T$ ise o zaman

$$\|T\| = \sup_{\lambda_k \in S(T)} |\lambda_k|$$

dır. $f(T)$ nin eşleniği $f^*(T)$

$$f^*(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_k)}(., e_k)e_k$$

şeklinde yazılır. Örneğin $e^A = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k}(., e_k)e_k$ şeklinde tanımlanır.

$$\|e^A\| = \max_k |e^{\lambda_k}| = \max_k e^{Re\lambda_k}$$

olur.

Buradan T normal operatör iken $f(T)$ nin normal operatör olduğu görülür. T herhangi kompakt operatör olsun. T^*T nin kendine eş nonnegatif operatör olduğu açıktır. T^*T nin sıfırdan farklı özdeğerlerini

$$S_1^2 \geq S_2^2 \geq \ldots \geq S_n^2 \geq \ldots$$

ile gösterelim. $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ sayılarına T operatörünün S sayıları denir [Kato, T.]. Tanımdan görüldüğü gibi T nonnegatif kompakt operatör ise T - nin S sayıları T nin özdeğerleridir.

Eğer $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^p$ $(p \geq 1)$ serisi yakınsak ise o zaman T operatörü σ_p sınıfına aittir [Kato, T.] denir. σ_p kümesi operatörlerin toplamı ve skalerle çarpma işlemine göre lineer uzay oluşturur.

Eğer T - nin σ_p de normu

$$\|T\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} S_k^p\Big)^{1/p}$$

formülü ile tanımlanırsa o zaman σ_p Banach uzayı oluşturur. Özel olarak σ_1 sınıfına çekirdek, σ_2 sınıfına ise Hilbert-Schmidt (kısaca H-S) sınıfı denir. Bu uzaylarda T - nin normu sırası ile

$$\|T\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$$

$$\|T\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^2$$

formülleri ile tanımlanır.

H da dönüşüm yapan kompakt operatörler kümesi σ_∞ ile gösterilir. A, H da dönüşüm yapan herhangi sınırlı operatör ve $T \in \sigma_1$ olsun. O zaman TA ve $AT \in \sigma_1$ ve

$$\|AT\|_1 \leq \|A\|\|T\|_1 \quad , \quad \|TA\|_1 \leq \|T\|_1\|A\|$$

dır. Eğer $T \in \sigma_2$ ise o zaman

$$AT \in \sigma_2 \quad , \quad TA \in \sigma_2$$

ve

$$\|AT\|_2 \leq \|A\|\|T\|_2 \quad , \quad \|TA\|_2 \leq \|T\|_2\|A\|$$

dır. Bunların ispatı [Kato, T., 1980] da vardır.

(a, b) aralığında tanımlanmış değerleri H ya ait (H da dönüşüm yapan operatör) olan $f(t)$ fonksiyonuna (operatörüne) vektör (operatör) değerli fonksiyon denir. Bu tür fonksiyonlar için limit, süreklilik, türev, integral, v.s. kavramları matematik analizde olduğu gibi verilir. Örneğin vektör (operatör) fonksiyonu

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\| = 0$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman bu fonksiyon x noktasında kuvvetli süreklidir denir. Eğer $f'(x) \in H$ iken

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right\| = 0$$

ise f vektör fonksiyonu x noktasında kuvvetli türeve sahiptir ve $f'(x)$ elemanına f in x noktasında kuvvetli türevi denir. Kullanacağımız diğer terimler yeri geldiğinde verilecek veya kaynak gösterilecek. Çalışmamızda kullanacağımız uzayları tanımlayalım;

X_1 *Uzayı :* $A(x, s)$, H da tanımlanmış $(0 \leq x, s < \infty)$ operatör fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty \|A(x,s)\|^2 ds \right\} < \infty$$

olsun. Norm

$$\|A\|_{X_1} = \sqrt{\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x,s)\|^2 ds}$$

şeklinde tanımlanır.

X_2 *Uzayı :* $A(x, s)$, H da tanımlanmış $(0 \leq x, s < \infty)$ $H - S$ operatör değerli fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty \|A(x,s)\|_2^2 ds \right\} < \infty$$

olsun. Norm

$$\|A\|_{X_2} = \sqrt{\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x,s)\|_2^2 ds}$$

şeklinde tanımlanır.

$X_3^{(p)}$ $(p \geq 1)$ *Uzayı :* $A(x,s)$, H da dönüşüm yapan operatör değerli fonksiyon olmak üzere, normu

$$\|A(x,s)\|_{X_3^{(p)}} = \left\{ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \|A(x,s)\|^p ds \right\}^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

$A(x,s)$, H da dönüşüm yapan operatör fonksiyon olmak üzere $X_1^{(p)}$, $X_2^{(p)}$ ve $X_4^{(p)}$ $(p < 0; p > 0)$ uzaylarında norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|A(x,s)\|^2_{X_1^{(p)}} = \int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty \|A(x,s)Q^p(s)\|^2 ds \right\}$$

$$\|A(x,s)\|^2_{X_2^{(p)}} = \int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty \|A(x,s)Q^p(s)\|_2^2 ds \right\}$$

$$\|A(x,s)\|_{X_4^{(p)}} = \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \|A(x,s)Q^p(s)\| ds$$

Bu uzaylar Levitan, B.M., [Levitan, B.M., 1967] tarafından verilmiş ve bunların Banach uzayı oluşturduğu gösterilmiştir.

2.2. OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

Bu bölümde $L_2(0,\infty;H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y + \mu y \quad , \quad 0 \leq x < \infty \tag{2.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.2}$$

(2.1) Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ve (2.2) sınır koşulu ile oluşturulan sınır değer probleminin Green fonksiyonunu inceleyeceğiz. Burada h komplex sayı, $\mu > 0$ reel sayı, $Q(x)$ x in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde ayrılabilir H Hilbert uzayında dönüşüm yapan normal operatördür.

Bu problemi çözmek için $Q(x)$ operatör değerli fonksiyon üzerine bazı koşullar ekleyeceğiz.

(2.1) , (2.2) probleminin Green fonksiyonu $G(x,\xi;\mu)$, x ve ξ nin $[0,\infty)$ aralığından alınmış herbir değerinde H da dönüşüm yapan lineer sınırlı ve aşağıdaki özelliklere sahip operator fonksiyona denir.

1-) $G(x,\xi;\mu)$, $(x\,,\xi)$ $(0 \leq x \;\; , \;\; \xi < \infty)$ nin sürekli operatör fonksiyonudur.

2-) $\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}$ $\xi \neq x$ olduğunda (x,ξ) nin sürekli fonksiyonudur ve

$$\frac{\partial G(x,x+0;\mu)}{\partial \xi} - \frac{\partial G(x,x-0;\mu)}{\partial \xi} = -I$$

dır. Burada I, H da birim operatördür.

3-) $x \neq \xi$ olduğunda

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + Q(\xi)G(x,\xi;\mu) + \mu G(x,\xi;\mu) = 0$$

4-) $\frac{\partial G(x,0;\mu)}{\partial \xi} - hG(x,0,\mu) = 0$

$Q(x)$ operatör fonksiyonunun x in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde normal operatör olduğunu ve aşağıdaki özellikleri sağladığını varsayacağız.

1-) $Q(x)$ in tanım kümesi $\mathcal{D}(Q(x)) = D$ $\;x$ - den bağımsız ve $\bar{\mathcal{D}} = H$ olsun. Burada $\bar{\mathcal{D}}$ kümesi D nin kapanmasıdır.

2-) Herbir $x \in [0,\infty)$ için $Q(x)$ in regular noktalar kümesi

$$\Lambda = \{|arg\lambda - \pi| < \varepsilon_0 \ , \quad 0 < \varepsilon_0 < \pi \ - \text{sabitsayıdır}\}$$

bölgesine ait olsun.

3-) x in herbir değerinde $Q^{-1}(x)$ H - da tam sürekli operatör olsun.

4-) $|x-\xi| \leq 1$ olduğunda

$$\|[Q(x) - Q(\xi)]Q^{-a}(x)\| \leq c|x-\xi| \quad , \quad 0 < a < \frac{3}{2} \quad , \quad c = \text{sabit}$$

olsun.

5-) $|x-\xi| > 1$ olduğunda

$$\|Q(\xi)e^{-\frac{1}{2}|x-\xi|Q^{1/2}(x)}\| < B \quad , \quad B = \text{sabit}$$

olsun.

6-) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_i(x)|^{3/2}}$ serisi yakınsak olsun ve serinin toplamı $F(x) \in L_1(0,\infty)$, yani $\int_0^{\infty} F(x)dx < \infty$ olsun.

Burada

$|\alpha_1(x)| \leq |\alpha_2(x)| \leq \cdots \leq |\alpha_n(x)| \leq \cdots$ x in herbir değerinde $Q(x)$ in H da özdeğerleridir. Genelliği bozmadan

$|\alpha_1(x)| \geq 1$ olduğunu varsayacağız. Biz gerektiğinde $Q(x)$ üzerine başka koşullar da ekleyeceğiz. Parametrik yöntemine göre $G(x,\xi;\mu)$ operator fonksiyonunu

$$G(x,\xi;\mu) = g(x,\xi;\mu) - \int_0^{\infty} g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]G(s,\xi;\mu)ds \qquad (2.3)$$

integral denkleminin çözümü şeklinde arayacağız. Burada

$$g(x,\xi;\mu) = \frac{\chi^{-1}}{2}[e^{-\chi|x-\xi|} - (h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}]$$
$$\chi = (Q(x) + \mu I)^{1/2}$$

χ ve χ nin diğer fonksiyonları $Q(x)$ operatör fonksiyonunun spektral açılımı ile tanımlanır. Biz (2.3) integral denkleminin tek çözüme sahip olduğunu ve bu çözümün (2.1) - (2.2) probleminin Green fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. Green fonksiyonu için (2.3) denkleminin formal olarak elde edilmesi [Z.Oer] gösterilmiştir. Biz (2.3) denklemini çeşitli uzaylarda inceleyeceğiz. (2.3) ifadesindeki integral operatörü N ile gösterelim.

$$NA(x,\eta)=\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]A(s,\eta)ds \tag{2.4}$$

Burada $A(x,\eta)$, x ve η nın $[0,\infty)$-a ait herbir değerinde H da dönüşüm yapan lineer sınırlı operatördür. $\mu>0$ büyük değerlerinde N operatörünün gözönüne alınan uzaylarda büzen operatör olduğunu ve $g(x,\xi;\mu)$ nün de bu uzaya ait olduğunu gösterirsek (2.3) denkleminin sabit nokta prensibine göre tek çözüme sahip olduğunu göstermiş oluruz.

Önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.1 : Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1)-6) koşullarını sağlıyor ise o zaman $\mu>0$ büyük değerlerinde N operatörü X_1 ve X_2 uzaylarının her birinde büzen operatördür. (X_1 ve X_2 uzaylarının tanımı girişte verilmiştir.) ve $g(x,\xi;\mu)$ bu uzaylara aittir.

İspat: $g(x,\xi;\mu)\in X_2$ yani

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \|g(x,\xi;\mu)\|_2^2 dx d\xi < \infty$$

olduğunu gösterelim.

$g(x,\xi;\mu)$ nin ifadesinden görüldüğü gibi x,ξ ve μ nün herbir değerinde normal operatördür.

$g(x,\xi;\mu)$ yü

$$g(x,\xi;\mu)=g_1(x,\xi;\mu)+g_2(x,\xi;\mu)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$g_1(x,\xi;\mu)=\frac{\chi^{-1}}{2}e^{-\chi|x-\xi|}\ ,\ g_2(x,\xi;\mu)=\frac{\chi^{-1}}{2}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}$$

dır. Bu taktirde

$$N_1A(x,\eta)=-\int_0^\infty g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi$$

$$N_2A(x,\eta)=-\int_0^\infty g_2(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi$$

olmak üzere

$$NA(x,\eta) = N_1 A(x,\eta) + N_2 A(x,\eta)$$

şeklinde yazılır.

Biz $\mu > 0$ nün büyük değerlerinde N_1 ve N_2 operatörlerinin normunun istenildiği kadar küçük olduğunu gösterirsek N nin de büzen olduğunu göstermiş oluruz. $g(x,\xi,\mu)$ nün ifadesinden

$$\|g(x,\xi;\mu)\|_2 \leq \|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}\|_2 + \|\chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}\|_2$$

yazabiliriz. $g(x,\xi;\mu) \in X_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için

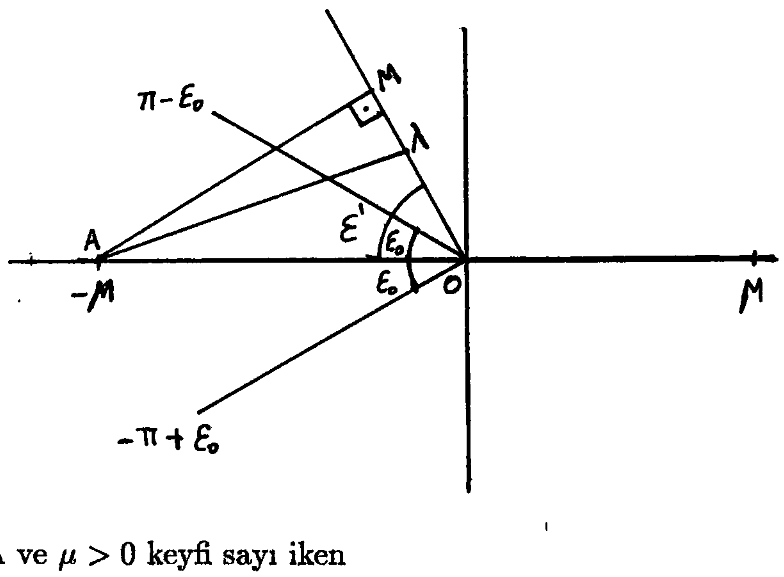
$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}\|_2^2 d\xi < \infty \quad ,$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|\chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}\|_2^2 d\xi < \infty$$

sağladığını göstermemiz yeterlidir. Bu sınırlandırmalardan birincisini gösterelim. $Q(x)$ normal operatörünün (x sabit tutulduğunda) spektral açılımını kullanırsak,

$$\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|} = \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j(x)+\mu)^{-1/2}e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\xi|}(.,e_k)e_k \tag{2.5}$$

şeklinde yazılır. $\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}$ kökünün $Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} > 0$ olduğunu kabul edeceğiz. $\mu > 0$ ve $\alpha_j(x)$ ler Λ nın dışında olduğundan dolayı (2.5) den $|\alpha_j(x)+\mu|$ ve $Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}$ yi sınırlandıralım.



$\alpha_j(x) \in \Lambda$ ve $\mu > 0$ keyfi sayı iken

$|\alpha_j(x)+\mu| = (\lambda$ ile $-\mu$ arasındaki uzaklık) $\geq AM = \mu Sin\varepsilon' \geq \mu Sin\varepsilon_0$ dır. Burada $AM \perp OM$ dır. Böylece $|\alpha_j(x)+\mu| \geq \mu Sin\varepsilon_0$ dır.

$-\pi+\varepsilon_0 < arg(\alpha_j(x)+\mu) < \pi-\varepsilon_0$

$-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2} < arg\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} < \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon_0}{2}$ olmak üzere

$arg\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} = \varphi$ olsun. O halde $-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon_0}{2}$

$$\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} = \sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|e^{i\varphi}} = \sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}(Cos\varphi + iSin\varphi)$$
$$Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} = \sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Cos\varphi$$

olur. $\varphi < \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon_0}{2}$ $(0<\varepsilon_0<\pi)$ olduğundan $Cos\varphi > Sin\frac{\varepsilon_0}{2}$ ve buna göre

$$Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu} > \sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2} \qquad \text{ve}$$
$$e^{-2Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\xi|} < e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}sin\frac{\varepsilon_0}{2}|x-\xi|}$$

olur. Bu eşitsizlikleri gözönüne alarak aşağıdaki işlemleri yapabiliriz.

$$\left\|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}\right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2(Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu})|x-\xi|}$$
$$\left\|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}\right\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}|x-\xi|}$$
$$\left\|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}\right\|_{X_2}^2 = \int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}|x-\xi|}d\xi$$

$$= \int_0^{\infty}dx\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\int_0^{x}|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}(x-\xi)}d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_x^{\infty}|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}(\xi-x)}d\xi\right\}$$
$$= \int_0^{\infty}dx\sum_{j=1}^{\infty}\left\{|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}x}\int_0^{x}e^{2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}\xi}d\xi + \right.$$
$$\left. + |\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}x}\int_x^{\infty}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}\xi}d\xi\right\}$$
$$\leq \int_0^{\infty}dx\sum_{j=1}^{\infty}\left\{|\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}x}\left|\frac{e^{2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}\xi}}{2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}\right|_0^{x} + \right.$$
$$\left. + |\alpha_j(x)+\mu|^{-1}e^{2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}x}\left|\frac{-e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}\xi}}{2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}\right|_x^{\infty}\right\}$$

$$\leq \int_0^\infty dx \sum_{j=1}^\infty \left\{ \frac{1}{2|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2} Sin\frac{\varepsilon_0}{2}} - \frac{e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}x}}{2|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2} Sin\frac{\varepsilon_0}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2} Sin\frac{\varepsilon_0}{2}} \right\}$$

$$\leq \int_0^\infty dx \sum_{j=1}^\infty \left\{ \frac{1}{|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2} Sin\frac{\varepsilon_0}{2}} - \frac{e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}x}}{2|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2} Sin\frac{\varepsilon_0}{2}} \right\}$$

$$\leq c \int_0^\infty dx \left\{ \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2}} \right\} \qquad \text{veya}$$

$$\|\chi^{-1} e^{-\chi|x-\xi|}\|_{X_2} \leq c \int_0^\infty dx \left\{ \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2}} \right\} \tag{2.5'}$$

$\frac{1}{|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2}} < \frac{c}{|\alpha_j(x)|^{3/2}}$ (herbir $\mu > 0$ değerinde) olduğunu gözönüne alarak 6) koşulundan

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{|\alpha_j(x)+\mu|^{3/2}} \in \mathcal{L}(0,\infty) \qquad \text{olur.}$$

Son ifade ve (2.5′) den

$$\|\chi^{-1} e^{-\chi|x-\xi|}\|_{X_2} \leq c$$

olduğu elde edilir. İkinci toplam benzer şekilde sınırlandırılır. Böylece $g(x,\xi;\mu) \in X_2$ olduğu gösterildi.

$$NA = -\int_0^\infty \{g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)] + g_2(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]\} A(\xi,\eta) d\xi$$

operatörünün X_2 uzayında büzen operatör olduğunu gösterelim.

$NA = N_1A + N_2A$ olmak üzere N_1A yı sınırlandıralım.

$$N_1A = -\int_0^\infty g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi$$
$$= -\int_{|x-\xi|\leq 1} g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi - \int_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi$$
$$= a_1 + b_1$$

$$\|N_1A\|_2 \leq \|a_1\|_2 + \|b_1\|_2 \ , \quad \|N_1A\|_2^2 \leq 2(\|a_1\|_2^2 + \|b_1\|_2^2)$$

özelliğini ve $(H-S)$ operatörünün normu için aşağıdaki teoremi kullanacağız.

Teorem : A sınırlı, B $(H-S)$ tipli operatör ise o zaman AB ve BA $(H-S)$ tipli operatör olur ve

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|\|B\|_2 \ , \quad \|BA\|_2 \leq \|B\|_2\|A\|$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$$\|a_1\|_2^2 = \| \int_{|x-\xi|\leq 1} g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi\|_2^2$$

$$\leq \Big(\int_{|x-\xi|\leq 1} \|g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]\|\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi\Big)^2 \tag{2.6}$$

$$\|g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]\| \leq \|g_1(x,\xi;\mu)Q^a(x)\|\|Q^{-a}(x)[Q(x)-Q(\xi)]\|$$

olduğu kolayca görülür. Koşul 4) den

$$\leq c|x-\xi|\|g_1(x,\xi;\mu)Q^a(x)\| \quad \text{dir.}$$

Böylece (2.6) nın sağ tarafı

$$\Big(\int_{|x-\xi|\leq 1} \|g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]\|\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi\Big)^2$$

$$\leq c^2 \Big(\int_{|x-\xi|\leq 1} |x-\xi|\|g_1(x,\xi;\mu)Q^a(x)\|\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi\Big)^2$$

olur. $g_1(x,\xi;\mu)$ nün ifadesini gözönüne alarak son integral;

$$\int_{|x-\xi|\leq 1} |x-\xi|\|Q^a(x)g_1(x,\xi;\mu)\|\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|x-\xi|\leq 1} |x-\xi|^{1+\varepsilon}|x-\xi|^{-\varepsilon}\|Q^a(x)\chi^{-2-\varepsilon}\|\|\chi^{1+\varepsilon}e^{-\chi|x-\xi|}\|\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi$$

şeklinde yazalım.

Şimdi $\|Q^a(x)\chi^{-2-\varepsilon}\|$ yı sınırlandıralım. Spektral açılım förmülünden

$$\big\|Q^a(x)(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{2}(-2-\varepsilon)}\big\| = \sup_j \big|\alpha_j^a(x)|\alpha_j(x)+\mu|^{\frac{1}{2}(-2-\varepsilon)}\big|$$

yazılır. $\mu > 0$ iken

$$|\alpha_j(x)| < c|\alpha_j(x) + \mu| \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

olduğu kolayca görülür.

Burada c^*, j ve x den bağımsız sabittir.

$$\sup_j |\alpha_j^a(x)(\alpha_j(x) + \mu)^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}| \leq c \sup_j |\alpha_j(x) + \mu|^a |\alpha_j(x) + \mu|^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

$a - 1 - \frac{\varepsilon}{2} = \zeta$ ile gösterelim. $0 < a < \frac{3}{2}$ olduğunu gözönüne alarak $\varepsilon > 0$ sayısını $\zeta < 0$ olacak şekilde seçelim.

O zaman

$$\sup_j |\alpha_j^a(x)(\alpha_j(x) + \mu)^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}| < c \sup_j |\alpha_j(x) + \mu|^{\zeta} < c\mu^{\zeta}$$

elde edilir. Böylece

$$\|Q^a(x)(Q(x) + \mu)^{\frac{1}{2}(-2-\varepsilon)}\| \leq c\mu^{\zeta} \qquad (\zeta < 0) \tag{2.7}$$

olduğu ispatlandı.

$\||x - \xi|^{1+\varepsilon}\chi^{1+\varepsilon}e^{-\chi|x-\xi|}\|$ yı sınırlandıralım .

$|x - \xi|^{1+\varepsilon}\chi^{1+\varepsilon}e^{-\chi|x-\xi|}$ $\quad x, \xi, \mu > 0$ ın herbir değerinde H da tam sürekli normal operatör olduğundan

$$\||x - \xi|^{1+\varepsilon}\chi^{1+\varepsilon}e^{-\chi|x-\xi|}\| = \sup_j \left||x - \xi|^{1+\varepsilon}|\alpha_j(x) + \mu|^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}e^{-\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|}\right|$$

yazabiliriz.

$$\leq \sup_j \left||x - \xi|^{1+\varepsilon}|\alpha_j(x) + \mu|^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}e^{-2Re\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\xi|}\right| \leq$$

$$\leq \sup_j \left||x - \xi|^{1+\varepsilon}|\alpha_j(x) + \mu|^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}e^{-2\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi| Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}\right| < c \tag{2.8}$$

Son eşitsizlikte $\delta > 0$, $q > 0$ iken bütün $t \geq 0$ için $t^{\delta}e^{-qt} \leq c$ olduğu gözönüne alındı.

(2.6) , (2.7) , (2.8) den

$$\|a_1\|_2^2 \leq c^2\mu^{2\zeta}\Big(\int_{|x-\xi|\leq 1} |x - \xi|^{-\varepsilon}\|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi\Big)^2$$

$$= c^2\mu^{2\zeta} \int_{|x-\xi|\leq 1} |x - \xi|^{-\varepsilon}\|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \int_{|x-\xi'|\leq 1} |x - \xi'|^{-\varepsilon}\|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi'$$

---

* c ile farklı sabitler göstereceğiz.

Bu eşitsizliğin $[0,\infty)$ aralığında x-e göre integralini alalım;

$$\int_0^\infty \|a_1\|_2^2 dx \leq c^2\mu^{2\zeta}\int_0^\infty \Big[\int\limits_{|x-\xi|\leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon}\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi \int\limits_{|x-\xi'|\leq 1} |x-\xi'|^{-\varepsilon}\|A(\xi',\eta)\|_2 d\xi'\Big] dx$$

Burada $\xi - x = u$, $\xi' - x = u'$ dönüşümü yapılırsa

$$= c^2\mu^{2\zeta}\int_0^\infty dx \int\limits_{|u|\leq 1} |u|^{-\varepsilon}\|A(u+x,\eta)\|_2 du \int\limits_{|u'|\leq 1} |u'|^{-\varepsilon}\|A(u'+x',\eta)\|_2 du'$$

$$= c^2\mu^{2\zeta}\int\limits_{|u|\leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\|_2 \|A(u'+x,\eta)\|_2 dx$$

$$\leq c^2\mu^{2\zeta}\int\limits_{|u|\leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \Big(\int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\|_2^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \|A(u'+x,\eta)\|_2^2 dx\Big)^{1/2}$$

$$\leq c^2\mu^{2\zeta}\int\limits_{|u|\leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \Big(\int_u^\infty \|A(v,\eta)\|_2^2 dv\Big)^{1/2}\Big(\int_{u'}^\infty \|A(v',\eta)\|_2^2 dv'\Big)^{1/2}$$

$$\leq c^2\mu^{2\zeta}\int\limits_{|u|\leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \Big(\int_0^\infty \|A(v,\eta)\|_2^2 dv\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \|A(v',\eta)\|_2^2 dv'\Big)^{1/2}$$

$$\leq c^2\mu^{2\zeta}\Big(\int\limits_{|u|\leq 1} |u|^{-\varepsilon} du\Big)^2 \int_0^\infty \|A(v,\eta)\|_2^2 dv \leq c^2\mu^{2\zeta}\int\limits_0^\infty \|A(v,\eta)\|_2^2 dv$$

olur. Böylece

$$\|a_1\|_2^2 \leq c^2\mu^{2\zeta}\int\limits_0^\infty \|A(x,\eta)\|_2^2 dx$$

veya

$$\|a_1\|_{X_2} \leq c\mu^\zeta \|A(x,\eta)\|_{X_2}$$

bulunur.

Şimdi b_1 toplamını sınırlandıralım.

$$b_1 = -\int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)[Q(x)-Q(\xi)]A(\xi,\eta)d\xi$$

$$= -\int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)Q(x)A(\xi,\eta)d\xi + \int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)Q(\xi)A(\xi,\eta)d\xi$$

$$= b_1^1 + b_1^2$$

diyelim ve

$$\|b_1^1\|_2^2 = \| \int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)Q(x)A(\xi,\eta)d\xi\|_2^2$$
$$\leq c\Big(\| \int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)Q(x)A(\xi,\eta)d\xi\|_2^2 + \| \int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)Q(x)A(\xi,\eta)d\xi\|_2^2\Big)$$
$$= c(d_1^2 + d_2^2)$$

şeklinde yazalım.

d_1^2 yi sınırlandıralım.

$$d_1^2 = \| \int\limits_{|x-\xi|>1} g_1(x,\xi;\mu)Q(x)A(\xi,\eta)d\xi\|_2^2$$
$$\leq \Big(\int\limits_{|x-\xi|>1} \|g_1(x,\xi;\mu)Q(x)\|\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi\Big)^2$$

$g_1(x,\xi;\mu)$ nün ifadesini gözönüne alırsak

$$\|g_1(x,\xi;\mu)Q(x)\| = \frac{1}{2}\|(Q(x)+\mu)^{-1/2}e^{-(Q(x)+\mu)^{1/2}|x-\xi|}Q(x)\|$$
$$= \frac{1}{2}\|(Q(x)+\mu)^{-1/2}e^{-1/2(Q(x)+\mu)^{1/2}|x-\xi|}Q(x)e^{-1/2(Q(x)+\mu)^{1/2}|x-\xi|}\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|(Q(x)+\mu)^{-1/2}e^{-1/2Q^{1/2}(x)|x-\xi|}Q(x)e^{-1/2(Q(x)+\mu)^{1/2}|x-\xi|}\|$$
$$\leq c\|(Q(x)+\mu)^{-1/2}e^{-1/2(Q(x)+\mu)^{1/2}|x-\xi|}\|$$
$$= c\sup_j |\alpha_j(x)+\mu|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}Re([\alpha_j(x)+\mu])x-\xi|}$$
$$\leq c\sup_j |\alpha_j(x)+\mu|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}$$
$$\leq ce^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}$$

olur. Buradan ve d_1^2 için elde edilen son eşitsizlikten

$$\|d_1^2\|_2^2 \leq c^2\Big(\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi|}\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi\Big)^2$$
$$= c^2\Big(\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi|}\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi\Big)\Big(\int\limits_{|x-\xi'|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi'|}\|A(\xi',\eta)\|_2 d\xi'\Big)$$

olur. Bu eşitsizliği x değişkenine göre $[0,\infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^\infty \|d_1^2\|_2^2 dx \leq c^2\int_0^\infty \Big[\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi|}\|A(\xi,\eta)\|_2 d\xi \int\limits_{|x-\xi'|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi'|}\|A(\xi',\eta)\|_2 d\xi'\Big] dx$$

bulunur. $\xi - x = u$, $\xi' - x = u'$ dersek, son ifadeden

$$\int_0^\infty \|d_1^2\|_2^2 dx \leq c^2 \int_0^\infty dx \int\limits_{|u|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u|}\|A(u+x,\eta)\|_2 du \int\limits_{|u'|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u'|}\|A(u'+x,\eta)\|_2 du'$$

$$= c^2 \int\limits_{|u|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u|} du \int\limits_{|u'|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u'|} du' \int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\|_2^2 \|A(u'+x,\eta)\|_2^2 dx$$

$$= c^2 \int\limits_{|u|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u|} du \int\limits_{|u'|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u'|} du' \Big(\int_u^\infty \|A(v,\eta)\|_2^2 dv\Big)^{1/2} \Big(\int_{u'}^\infty \|A(v',\eta)\|_2^2 dv'\Big)^{1/2}$$

$$\leq c^2 \int\limits_{|u|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u|} du \int\limits_{|u'|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u'|} du' \Big(\int_0^\infty \|A(v,\eta)\|_2^2 dv\Big)^{1/2} \Big(\int_0^\infty \|A(v',\eta)\|_2^2 dv'\Big)^{1/2}$$

$$= c^2 \Big(\int\limits_{|u|>1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|u|} du\Big)^2 \int_0^\infty \|A(x,\eta)\|_2^2 dx \leq c^2 \mu^{2\zeta} \int_0^\infty \|A(x,\eta)\|_2^2 dx$$

veya

$$\|d_1^2\|_{X_2} < c\mu^\zeta \|A(x,\eta)\|_{X_2}$$

bulunur. d_2^2 de benzer şekilde sınırlandırılırsa

$$\|b_1^1\|_{X_2} < c\mu^\zeta \|A(x,\eta)\|_{X_2}$$

elde edilir. Buradan b_1^2 için de 5) koşulu gözönüne alınarak [Kleyman, 1977] de olduğu gibi benzer işlemler yapıldığında sonuçta

$$\|b_1\|_{X_2} \leq c\mu^\zeta \|A(x,\eta)\|_{X_2}$$

bulunur. Böylece $\mu > 0$ büyük değerlerinde

$$\|N_2\|_{X_2} \leq c\mu^\zeta \qquad \zeta < 0$$

olacak şekilde seçebiliriz. Buna göre N operatörünün $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde X_2 uzayında büzen operatör olduğunu ispatladık. $g(x,\xi;\mu) \in X_2$ olduğundan (2.3) denkleminin $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde X_2 uzayında çözümün varlığını ve tekliğini gösterdik. Benzer şekilde (2.3) denkleminin X_1 uzayında da çözümünün varlığı ve tekliği gösterilebilir. Şimdi aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.2 : $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1) , 2) , 3) koşullarını sağlasın ve ek olarak $|x-\xi| \leq 1$ iken

$$\|Q^{-1/2}(x)Q^{1/2}(\xi)\| \leq c$$

olsun. Bu taktirde $g(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonu $X_4^{(1/2)}$ uzayına ait, yani

$$\sup_{0\leq x<\infty} \int_0^\infty \|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| d\xi < \infty$$

olur.

İspat :

$$\int_0^\infty \|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| d\xi = \int\limits_{|x-\xi|\leq 1} \|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| d\xi + \int\limits_{|x-\xi|>1} \|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| d\xi$$
$$= a(x) + b(x)$$

şeklinde yazalım $|x-\xi| \leq 1$ iken

$$\begin{aligned}\|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| &= \frac{1}{2}\Big\|\Big[\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|} + \chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}\Big]Q^{1/2}(\xi)\Big\| \\ &\leq \Big\|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(x)Q^{1/2}(\xi)\Big\| + \\ &\quad + \Big\|\chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(x)Q^{1/2}(\xi)\Big\|\end{aligned}$$

lemmanın koşulundan

$$\leq c\Big[\Big\|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}Q^{1/2}(x)\Big\| + \Big\|\chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}Q^{1/2}(x)\Big\|\Big]$$

olur. Spektral açılım formülüne göre

$$\leq c\sup_j \Big(|\alpha_j(x)+\mu|^{\frac{-1}{2}}|e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\xi|}||\alpha_j(x)|^{\frac{1}{2}} + |\alpha_j(x)+\mu|^{\frac{-1}{2}}|e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}(x+\xi)}||\alpha_j(x)|^{\frac{1}{2}}\Big)$$

$x \geq 0\,,\ \xi > 0$ iken $x+\xi \geq |x-\xi|$ olduğundan

$$\leq c\sup_j \Big[|\alpha_j(x)|^{-\frac{1}{2}}\sqrt{Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}e^{-\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}|\alpha_j(x)|^{\frac{1}{2}} +$$

$$+|\alpha_j(x)|^{\frac{-1}{2}}(\sqrt{Sin\frac{\varepsilon_0}{2}})^{-\frac{1}{2}}e^{-\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}|\alpha_j(x)|^{\frac{1}{2}}\Big]$$

olur. $cSin\frac{\varepsilon_0}{2} = c_1(\mu)$ dersek

$$\leq c_1(\mu)e^{-\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}$$

veya

$$\|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| \leq c_1(\mu)e^{-\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}$$

olur. Buradan

$$\sup_{0\leq x<\infty}\int_{|x-\xi|\leq 1}\|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\|d\xi \leq c_1(\mu)\sup_{0\leq x<\infty}\int_{|x-\xi|\leq 1} e^{-\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}d\xi < \infty$$

Böylece

$$\sup_{0\leq x<\infty} a(x) < \infty$$

bulunur.

$|x-\xi| > 1$ iken 5) koşulundan

$$b(x) = \int\limits_{|x-\xi|>1} \|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\|d\xi$$

$$\begin{aligned}
\|g(x,\xi;\mu)Q^{1/2}(\xi)\| &= \frac{1}{2}\left\|[\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}+\chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}]Q^{1/2}(\xi)\right\| \\
&\leq \left\|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}Q^{1/2}(\xi)\right\| + \left\|\chi^{-1}(h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+\xi)}Q^{1/2}(\xi)\right\| \\
&= a_1 + a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left\|\chi^{-1}e^{-\frac{1}{2}\chi|x-\xi|}Q^{1/2}(\xi)e^{-\frac{1}{2}\chi|x-\xi|}Q^{-1}(\xi)Q(\xi)\right\| \\
&= \left\||Q(x)+\mu|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{|Q(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}Q(\xi)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{Q(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}Q^{-1/2}(\xi)\right\| \\
&\leq c\left\||Q(x)+\mu|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{|Q(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}Q^{-1/2}(\xi)\right\| \\
&= c\sup_j|\alpha_j(x)+\mu|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{|\alpha_j(x)+\mu|}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}Q^{-1/2}(\xi) \\
&\leq c|\alpha_j(x)|^{-1/2}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}|\alpha_j(x)|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}|x-\xi|} \\
&\leq c_1e^{-\frac{1}{2}|x-\xi|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}\sqrt{\mu}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sup_{0\leq x<\infty} b(x) \leq c_1\sup_{0\leq x<\infty}\int_{|x-\xi|\geq 1} e^{-\frac{1}{2}|x-\xi|\sqrt{\mu}Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}d\xi \leq c_1\sup_{0\leq x<\infty}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}|x-\xi|sin\frac{\varepsilon_0}{2}}d\xi < \infty$$

$$\sup_{0\leq x<\infty} b(x) < \infty$$

olur.

Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 2.3 : $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1) ve 3) koşullarını sağlasın ve ek olarak $|x-s| \leq 1$ iken

$$\|Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(s)\| \leq c \tag{2.9}$$

olsun. O taktirde

$$\frac{\partial^2 g(x,s;\mu)}{\partial s^2} \in X_4^{(-\frac{1}{2})} \qquad x \neq s$$

yani

$$\sup_{0\leq x<\infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s) \right\| ds < \infty$$

olur. Burada

$$\int_0^\infty = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \Big(\int_0^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty} \Big)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat :

$$\sup_{0\leq x<\infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s) \right\| ds$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s) \right\| &\leq \left\| \left[\chi e^{-\chi|x-s|} - \chi(h-\chi)(h+\chi)^{-1} e^{-\chi(x+s)}\right] Q^{-1/2}(s) \right\| \\
&\leq \left\| \chi e^{-\chi|x-s|} Q^{-1/2}(x) Q^{1/2}(x) Q^{-1/2}(s) \right\| + \\
&\quad + \left\| (h-\chi)(h+\chi)^{-1} \chi e^{-\chi(x+s)} Q^{-1/2}(x) Q^{1/2}(x) Q^{-1/2}(s) \right\|
\end{aligned}$$

(2.9) dan

$$\begin{aligned}
&\leq c\Big(\left\| \chi e^{-\chi|x-s|} Q^{-1/2}(x) \right\| + \left\| (h-\chi)(h+\chi)^{-1} \chi e^{-\chi(x+s)} Q^{-1/2}(x) \right\| \Big) \\
&\leq c\Big(\left\| \chi e^{-\chi|x-s|} Q^{-1/2}(x) \right\| + \left\| \chi e^{-\chi(x+s)} Q^{-1/2}(x) \right\| \Big)
\end{aligned}$$

Spektral açılıma göre

$$\Big(\chi e^{-\chi|x-s|} Q^{-1/2}(x) f \,,\, f\Big) = \int_\sigma (\lambda+\mu)^{1/2} e^{-(\lambda+\mu)^{1/2}|x-s|} \lambda^{-1/2} (dE_\lambda f,\, f)$$

$$\left| (\lambda+\mu)^{1/2} e^{-(\lambda+\mu)^{1/2}|x-s|} \lambda^{-1/2} \right| \leq c e^{-(Re\sqrt{\lambda+\mu})|x-s|} \leq c e^{-\sqrt{|\lambda+\mu|}(Sin\frac{\varepsilon_0}{2})|x-s|}$$

$$\left| \Big(\chi e^{-\chi|x-s|} Q^{-1/2}(x) f \,,\, f\Big) \right| \leq c e^{-\sqrt{|\lambda+\mu|}|x-s| Sin\frac{\varepsilon_0}{2}} (f \,,\, f)$$

Buradan

$$\left\|\chi e^{-\chi|x-s|}Q^{-1/2}(x)\right\| \leq ce^{-\sqrt{|\lambda+\mu|}|x-s|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}$$

ve

$$\int_0^\infty \left\|\chi e^{-\chi|x-s|}Q^{-1/2}(x)\right\|ds \leq c\int_0^\infty e^{-\sqrt{|\lambda+\mu|}|x-s|Sin\frac{\varepsilon_0}{2}}ds \ \leq \ c_1(\mu)$$

$$\sup_{0\leq x<\infty}\int_0^\infty \left\|\chi e^{-\chi|x-s|}Q^{-1/2}(x)\right\|ds \leq \ c_1(\mu) \ < \ \infty$$

elde edilir. Benzer şekilde ikinci toplam da sınırlandırılır. Bununla lemma ispatlandı.

2.3. GREEN FONKSİYONUNUN BİRİNCİ TÜREVİ

(2.3) denkleminin ξ değişkenine göre formal olarak türevini alırsak

$$\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}=\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}-\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial\xi}ds$$

olur. Şimdi $X_3^{(p)}$ $(p\geq 1)$ Banach uzayında aşağıdaki denklemi gözönüne alalım ($X_3^{(p)}$ uzayının tanımı daha önce verilmiştir).

$$K(x,\xi;\mu)=\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}-\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]K(s,\xi;\mu)ds \qquad (2.10)$$

Bu denklemde integral ifadenin μ nün büyük değerlerinde $X_3^{(p)}$ de büzen operatör olduğu daha önce gösterilmiştir. Eğer

$$\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}\in X_3^{(p)} \quad \text{yani ,} \quad \sup_{0\leq x<\infty}\int_0^\infty\left\|\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}\right\|^p d\xi<\infty$$

olduğunu gösterirsek (2.10) denkleminin $X_3^{(p)}$ uzayında tek çözüme sahip olduğunu göstermiş oluruz.

Bizim için

$\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}\in X_3^1\equiv X_3$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}\in X_3$ olduğunu gösterelim. $g(x,\xi;\mu)$ nin ifadesinden

$$\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{-\chi(\xi-x)}+\frac{1}{2}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(x+\xi)} & , \quad x<\xi\\ \frac{1}{2}e^{-\chi(x-\xi)}+\frac{1}{2}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(x+\xi)} & , \quad x>\xi\end{cases} \qquad (2.11)$$

olur. $\xi>x$ olsun. İlk terimi sınırlandıralım. Yani

$$\sup_{0\leq x<\infty}\int_x^\infty\|-\frac{1}{2}e^{-\chi(\xi-x)}\|d\xi \;\leq\; \sup_{0\leq x<\infty}\int_x^\infty\|e^{-\chi(\xi-x)}\|d\xi<\infty$$

olduğunu gösterelim. Spektral açılım formülünden

$$\|e^{-\chi(\xi-x)}\|=\|e^{-\sqrt{Q(x)+\mu}(\xi-x)}\|=\|\int_\sigma e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(\xi-x)}dE_\lambda\|$$

Burada $E_\lambda(x)$, $Q(x)$ operatörünün spektral fonksiyonudur. $Re\sqrt{\lambda+\mu}>0$ olduğu gözönüne alınırsa, son eşitliğin sağ tarafı

$$\leq\max_{\lambda\in\sigma(A)}|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(\xi-x)}|=\max_{\lambda\in\sigma(A)}e^{-Re\sqrt{\lambda+\mu}(\xi-x)}\leq e^{-\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}(\xi-x)}$$

Böylece $\|e^{-\chi(\xi-x)}\| \leq e^{-\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}(\xi-x)}$, Buradan

$$\int_x^\infty \|e^{-\chi(\xi-x)}\|d\xi \leq \int_x^\infty e^{-\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}(\xi-x)}d\xi = e^{\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}x}\int_x^\infty e^{-\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}\xi}d\xi =$$

$$= -e^{\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}x}\frac{e^{-\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}\xi}}{\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}}\Big|_x^\infty = \frac{1}{\sqrt{\mu Sin\varepsilon_0}} < \frac{c}{\sqrt{\mu}}$$

Böylece $\sup_x \int_x^\infty \|e^{-\chi(\xi-x)}\|d\xi < \frac{c}{\sqrt{\mu}} < \infty$ dır. Diğer terimler benzer şekilde sınırlandırılarak sonuçta $\mu > 0$ büyük değerlerinde $\frac{\partial g}{\partial \xi} \in X_3$ bulunur. Buradan $K(x,\xi;\mu)$ de X_3 uzayının ve bundan dolayı $X_3^{(p)}$ $(p \geq 1)$ uzayının da elemanıdır.

$\xi < x$ olduğunu varsayarak ($\xi > x$ benzer şekilde incelenir). (2.10) denkleminin ∞ dan ξ e kadar integralini alalım;

$$\int_\infty^\xi K(x,\xi;\mu)d\xi = g(x,\xi;\mu) - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\int_\infty^\xi K(s,\xi;\mu)dsd\xi \quad (2.12)$$

(2.3) denklemi ile (2.12) denklemi aynıdır. (2.3) denklemi tek çözüme sahip olduğundan

$$\int_\infty^\xi K(s,\xi;\mu)d\xi = G(x,\xi;\mu)$$

dır.

$\xi \neq x$ için $K(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonu sürekli yani, $h \to 0$ iken

$$\|K(x,\xi+h;\mu) - K(x,\xi;\mu)\| \to 0$$

olduğunu gösterelim.

Bu nedenle (2.10) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım;

$$K(x,\xi;\mu) - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} = -\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds -$$
$$-\int_0^\infty \{g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\}\{K(s,\xi;\mu) - \frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}\}ds \quad (2.13)$$

$$L(x,\xi;\mu) = K(x,\xi;\mu) - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}$$
$$\ell(x,\xi;\mu) = -\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds$$

diyelim. Bu taktirde (2.13) denklemi

$$L(x,\xi;\mu) = \ell(x,\xi;\mu) - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]L(s,\xi;\mu)ds \quad (2.14)$$

şeklinde yazılır.

$$\Delta L(x,\xi;\mu) = L(x,\xi+h;\mu) - L(x,\xi;\mu)$$

$$\Delta \ell(x,\xi;\mu) = \ell(x,\xi+h;\mu) - \ell(x,\xi;\mu)$$

dersek (2.14) den

$$\Delta L = \Delta \ell - N(\Delta L) \tag{2.15}$$

denklemini elde ederiz. (2.15) denklemini X_5 uzayında inceleyelim. X_5 uzayının tanımını bir daha hatırlatalım. Bu uzay elemanları H da dönüşüm yapan $A(x,\xi)$ operatör fonksiyonları ($0 \leq x$, $\xi < \infty$) olmak üzere, normları

$$\|A(x,\xi)\|_{X_5} = \sup_{0\leq x<\infty} \sup_{0\leq \xi<\infty} \|A(x,\xi)\|_H$$

şeklinde tanımlanan Banach uzayıdır.

Lemma 2.1. de olduğu gibi N operatörü $\mu > 0$ büyük değerlerinde X_5 uzayında da büzen operatör olduğu gösterilir.

Buna göre $(I+N)^{-1}$ var ve X_5 de sınırlıdır.

$\|(I+N)^{-1}\|_{X_5} = A$ diyelim. Bu taktirde

$$\|\Delta L\|_{X_5} \leq A\|\Delta \ell\|_{X_5} \tag{2.16}$$

bulunur.

Lemma 2.4 : Keyfi $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ vardır ki $|h| < \delta$ iken

$$\|L(x,\xi+h;\mu) - L(x,\xi;\mu)\|_{X_5} < \varepsilon \tag{2.17}$$

olur.

İspat : Sabit $\delta > 0$ için $\zeta > \delta$ seçelim ve

$$\begin{aligned}\Delta \ell(x,\xi;\mu) &= \int_0^{\xi-\zeta} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds + \\ &+ \int_{\xi-\zeta}^{\xi+\zeta} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds + \\ &+ \int_{\xi+\zeta}^{\infty} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds = a_1 + a_2 + a_3\end{aligned}$$

şeklinde yazalım.

$\|a_1\|_{X_5}$ i sınırlandıralım. a_1 için $s < \xi - \zeta$ dır. Yani $\xi - s > \zeta$, $\xi - s + h > \zeta + h$ ve buradan $|h| < \delta$ olduğundan $\xi - s + h > \zeta + h > \zeta - \delta$, $(-\delta < h < \delta)$ olur.

Buna göre ξ ve s nin bu değerlerinde

$$\Delta \frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi} = \int_0^h \frac{\partial^2 g(s,\xi+t;\mu)}{\partial t^2} dt$$

doğrudur. Buradan

$$\left\| \Delta \frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi} \right\|_H = \left\| \int_0^{|h|} \frac{\partial^2 g(s,\xi+t;\mu)}{\partial t^2} \right\|_H dt \leq \int_0^{|h|} \left\| \frac{\partial^2 g(s,\xi+t;\mu)}{\partial t^2} \right\| dt$$

olur. Son ifadeyi sınırlandıralım. $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}$ türevinin bir terimini alarak sınırlandırmayı yapalım (diğer terimler benzer şekilde sınırlandırılır).

$$\int_0^{|h|} \left\| \frac{\partial^2 g(s,\xi+t;\mu)}{\partial \xi^2} \right\|_H dt = \frac{1}{2} \int_0^{|h|} \| \chi e^{-\chi(\xi+t-s)} \|_H dt \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_0^{|h|} \sup_j |\alpha_j(x) + \mu|^{\frac{1}{2}} e^{-Re|\alpha_j(x)+\mu|^{\frac{1}{2}}(\xi+t-s)} dt$$

bu eşitliği $(\xi + t - s)$ ile çarpıp bölelim;

$$\leq \int_0^{|h|} \frac{1}{2} \sup_j |\alpha_j(x) + \mu|^{\frac{1}{2}} (\xi + t - s) e^{-|\alpha_j(x)+\mu|^{\frac{1}{2}}(\xi+t-s)} \frac{1}{\xi + t - s} dt$$

$t > 0$ olmak üzere $te^{-t} \leq 1$ olduğundan

$$\leq \int_0^{|h|} \frac{1}{2} \sqrt{\mu} \sqrt{Sin \frac{\varepsilon_0}{2}} \frac{dt}{\xi + t - s} \leq c \int_0^{|h|} \frac{dt}{\xi + t - s} \leq$$
$$\leq c \int_0^{|h|} \frac{dt}{\zeta - s} = \frac{c}{\zeta - \delta} |h| < \frac{c\delta}{\zeta - \delta}$$

bulunur. Böylece, $\|a_1\|_{X_5} \leq \frac{c\delta}{\zeta-\delta}$ olur. Benzer işlemler $\|a_2\|_{X_5}$ ve $\|a_3\|_{X_5}$ için de yapıldığında sonuçta,

$\|\Delta \ell(s,\xi;\mu)\| \leq \varepsilon$ bulunur.

Böylece $K(x,\xi;\mu) - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}$ operatör fonksiyonunun ξ-e göre sürekli olduğunu gösterdik.

$K(x,\xi;\mu) = \frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}$ $\quad \xi \neq x$ de süreklidir.

$\frac{\partial g}{\partial \xi}$, $\xi \neq x$ iken ξ ye göre sürekli olduğunu gösterelim:

$$\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi} = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\chi(\xi-x)} + \frac{1}{2}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(x+\xi)} &, \quad x<\xi \\ \frac{1}{2}e^{-\chi(x-\xi)} + \frac{1}{2}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(x+\xi)} &, \quad x>\xi \end{cases}$$

$\xi < x$ olsun. Bu halde

$$\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi} = \frac{1}{2}e^{-\chi(x-\xi)} + \frac{1}{2}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(x+\xi)}$$

dır. $x-\xi = t$ diyelim. h küçük sayı olsun. $h \to 0$ iken

$$\left\|\frac{\partial g(x,\xi+h;\mu)}{\partial\xi} - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial\xi}\right\| \to 0$$

olduğunu gösterelim.Spektral açılım formülünden

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-\chi(t-h)} - e^{-\chi t}\right\|_H &= \sup_{\|f\|=1}\left|\int_\sigma (e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(t-h)} - e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t})d(E_\lambda f,f)\right| \le \\
&\le \sup_{\|f\|=1}\int_\sigma \left|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(t-h)} - e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t}\right| d(E_\lambda f,f) \\
&= \sup_{\|f\|=1}\left(\int_{\sigma\cap K_R}\left|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(t-h)} - e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t}\right|\right) d(E_\lambda f,f) + \\
&+ \int_{\sigma\cap K_R'}\left|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(t-h)} - e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t}\right| d(E_\lambda f,f) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Burada K_R merkezi orjinde yarıçapı R olan çember, K_R' ise çemberin dışıdır.

$\varepsilon > 0$ herhangi pozitif sayı olsun. $|h| < t$ varsayalım. R sayısını öyle büyük seçelim ki $|\lambda+\mu| > R$ iken

$$\left|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(t-h)} - e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Bu taktirde,

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Şimdi R I_2 deki sayı olsun. $\delta > 0$ sayısını öyle küçük seçelim ki, $|h| < \delta$ olduğunda $|\lambda+\mu| < R$ iken

$$\left|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}(t-h)} - e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t}\right| = \left|e^{-\sqrt{\lambda+\mu}t}(e^{\sqrt{\lambda+\mu}h} - 1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Bu taktirde,

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Böylece öyle $\delta > 0$ sayısı var ki $|h| < \delta$ iken

$$\|e^{-\chi(t-h)} - e^{-\chi t}\|_H < \varepsilon$$

olur. $\xi > x$ hali benzer şekilde incelenir.

$x = \xi$ noktasında $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ sıçrayışa sahip olduğunu gösterelim.

(2.11) ifadesinde olduğu gibi ikinci terimler ξ-ye göre süreklidir. Bundan dolayı ilk terimleri inceleyelim.

$h > 0$ varsayalım.

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \xi}\right|_{\xi=x+h} = -\frac{1}{2}e^{-h\chi} \quad , \quad \left.\frac{\partial g}{\partial \xi}\right|_{\xi=x-h} = \frac{1}{2}e^{-h\chi}$$

$$\left[\left.\frac{\partial g}{\partial \xi}\right|_{\xi=x+h} + \frac{1}{2}I\right]\chi^{-2} = -\frac{1}{2}(e^{-h\chi} - I)\chi^{-2} = \alpha(x,\xi,h)$$

diyelim.

$$\begin{aligned}
\|\alpha(x,\xi,h)\|_H &= \sup_{\|f\|=1}\left|\int_\sigma -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda+\mu}\left[e^{-h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1\right] d(E_\lambda f, f)\right| \\
&\le \sup_{\|f\|=1}\int_\sigma \left|\frac{1}{\lambda+\mu}\left[e^{-h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1\right]\right| d(E_\lambda f, f) \\
&= \sup_{\|f\|=1}\int_{\sigma\cap K_R} \left|\frac{1}{\lambda+\mu}\left[e^{-h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1\right]\right| d(E_\lambda f, f) + \\
&\quad + \int_{\sigma\cap K'_R} \left|\frac{1}{\lambda+\mu}\left[e^{-h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1\right]\right| d(E_\lambda f, f) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

I_2 **için :** $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olsun. R yi öyle büyük seçebiliriz ki $\lambda \in \sigma \cap K'_R$ iken $\frac{1}{|\lambda+\mu|} < \frac{\varepsilon}{4}$ olsun. Bu taktirde $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak.

I_1 **için :** R-yi I_2 deki gibi seçelim. $\delta > 0$ sayısını öyle küçük seçelim ki $h < \delta$ iken $\lambda \in \sigma \cap K_R$ iken $\left|\frac{1}{\lambda+\mu}(e^{-h\sqrt{\lambda+\mu}} - 1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Bu taktirde $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

Böylece burada $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ var ki, $h < \delta$ iken

$\|\alpha(x,\xi,\mu)\|_H < \varepsilon$ olur.

Böylece

$$\Big\|\Big[\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{1}{2}I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \xrightarrow{h\to 0} 0$$

olduğu gösterildi. Benzer şekilde

$$\Big\|\Big[\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + \frac{1}{2}I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \xrightarrow{h\to 0} 0$$

gösterilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big[\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H = \\
&= \Big\|\Big[\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{1}{2}I\Big]\chi^{-2} + \Big[-\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + \frac{1}{2}I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \le \\
&\le \Big\|\Big[\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{1}{2}I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H + \Big\|\Big[-\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + \frac{1}{2}I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \xrightarrow{h\to 0} 0
\end{aligned}$$

dır. $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ nin geri kalan terimlerinin ξ-ye göre sürekli olduğunu gözönüne alırsak sonuçta

$$\Big\|\Big[\frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \xrightarrow{h\to 0} 0$$

çıkar. $\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \xi}$ operatör fonksiyonu $\xi = x$ noktasında da sürekli olduğundan $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ ile $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ $\xi = x$ noktasında aynı sıçrayışa sahiptir. Böylece

$$\Big\|\Big[\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \xrightarrow{h\to 0} 0$$

elde edilir.

$f \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(Q(x))$ olsun. f elemanının $(Q(x) + \mu I)$ operatörünün tanım kümesine ait olduğu açıktır.

$(Q(x) + \mu I)$ operatörüne f fonksiyonunu uygulayalım ve

$(Q(x) + \mu I)f = g$ diyelim. Buradan

$f = \chi^{-2}g$ olur. (2.18) den, h nın küçük değerlerinde

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big[\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I\Big]f\Big\| &\le \Big\|\Big[\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I\Big]\chi^{-2}\Big\|_H \|g(x)\|_H < \\
&< \varepsilon\|g(x)\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\xi = x$ noktasında

$$[G'_\xi(x, x+0, \mu) - G'_\xi(x, x-0, \mu)]f = -f$$

olur.

Bununla $G(x, \xi; \mu)$ operatör fonksiyonunun $\xi = x$ noktasında sıçrayışa sahip ve sıçrayışın $-I$ ya eşit olduğunu, yani

$$G'_\xi(x, x+0, \mu) - G'_\xi(x, x-0, \mu) = -I$$

dır.

2.4. GREEN FONKSİYONUNUN İKİNCİ TÜREVİ

$$\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} = \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds \tag{2.19}$$

ifadesini

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \xi} = &-\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds- \\ &-\int_0^\infty \Big\{g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\Big\}\left[\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \xi}\right]ds\end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklinde yazalım.

$$\mathcal{L}(x,\xi;\mu) = \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad \text{ve}$$

$$\ell(x,\xi;\mu) = -\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds$$

olsun. Bu taktirde (2.20) denklemi

$$\mathcal{L}(x,\xi;\mu) = \ell(x,\xi;\mu) - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\mathcal{L}(s,\xi;\mu)ds$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin her iki yanını formal olarak ξ ye göre türetelim.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} = \frac{\partial \ell(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}ds$$

Buradan

$$\frac{\partial g(x,x+0;\mu)}{\partial \xi} - \frac{\partial g(x,x-0;\mu)}{\partial \xi} = -I$$

ifadesini kullanırsak ve

$$\begin{aligned}\ell(x,s;\mu) = &-\int_0^{\xi-0} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds- \\ &-\int_{\xi+0}^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds\end{aligned}$$

şeklinde yazarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \xi} = &-\int_0^{\xi-0} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds- \\ &-g(x,\xi-0;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial g(\xi-0,\xi;\mu)}{\partial \xi}- \\ &-\int_{\xi+0}^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds+ \\ &+g(x,\xi+0;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial g(\xi+0,\xi;\mu)}{\partial \xi}\end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial \ell}{\partial \xi} = -\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds +$$
$$+ g(x,\xi;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\left\{\frac{\partial g(\xi+0,\xi;\mu)}{\partial \xi} - \frac{\partial g(\xi-0,\xi;\mu)}{\partial \xi}\right\}$$
$$\frac{\partial \ell}{\partial \xi} = -g(x,\xi;\mu)[Q(\xi)-Q(x)] - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds$$

$\frac{\partial \ell}{\partial \xi} = \ell_1(x,\xi;\mu)$ elde edilir. Lemma 2.1. e benzer şekilde aşağıdaki lemma ispatlanabilir.

Lemma 2.5 : $Q(x)$ operatör fonksiyonu Lemma 2.1. koşullarını sağlıyorsa o zaman $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörü $X_1^{(s)}$, $X_2^{(s)}$, $X_4^{(s)}$ uzaylarının herbirinde büzen operatördür.

ℓ_1-in $X_4^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olduğunu gösterirsek Lemma 2.5. e göre aşağıdaki denklemin tek çözümü var ve çözüm $X_4^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olur. Aşağıdaki denklemi gözönüne alalım,

$$M(x,\xi;\mu) = \ell_1(x,\xi;\mu) - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]M(s,\xi;\mu)ds \tag{2.21}$$

$\ell_1(x,\xi;\mu) \in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ olduğunu gösterelim. Bu nedenle $\ell_1(x,\xi;\mu)$ yü aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\ell_1(x,\xi;\mu) = -g[Q(\xi)-Q(x)] - \int\limits_{|s-\xi|\le 1} g[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}ds -$$
$$- \int\limits_{|s-\xi|>1} g[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}ds = b_1 + b_2 + b_3$$

$b_1 \in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ olduğunu gösterelim.

$$\|b_1\|_{X_4^{(-\frac{1}{2})}} = \sup_{0\le x<\infty}\int_0^\infty \|g(x,\xi;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]Q^{-1/2}(\xi)\|d\xi$$
$$\le \sup_{0\le x<\infty}\int\limits_{|x-\xi|\le 1} \|g(x,\xi;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]Q^{-1/2}(\xi)\|d\xi +$$
$$+ \sup_{0\le x<\infty}\int\limits_{|x-\xi|>1} \|g(x,\xi;\mu)[Q(\xi)-Q(x)]Q^{-1/2}(\xi)\|d\xi = a_1 + a_2$$

diyelim ve a_1 , a_2 nin sonlu sayı olduğunu gösterelim. a_1 in ifadesinde $g = g_1 + g_2$ olduğunu gözönüne alarak, işlemleri $g_1(x, \xi; \mu)$ toplamı için yapalım.

$$
\begin{aligned}
|x-\xi| \le 1 : &\|g_1(x,\xi;\mu)[Q(\xi) - Q(x)]Q^{-1/2}(\xi)\| \\
&\le \|(Q(x)+\mu)^{-1/2} e^{-\sqrt{Q(x)+\mu}|x-\xi|}[Q(\xi) - Q(x)]Q^{-1/2}(\xi)\| \\
&\le \|(Q(x)+\mu)^{-1/2} e^{-\sqrt{Q(x)+\mu}|x-\xi|}Q^{1/2}(\xi)\| + \\
&\quad + \|(Q(x)+\mu)^{-1/2} e^{-\sqrt{Q(x)+\mu}|x-\xi|}Q(x)Q^{-1/2}(\xi)\| \\
&\le \|e^{-\sqrt{Q(x)+\mu}|x-\xi|}\| \|(Q(x)+\mu)^{-1/2}Q^{1/2}(\xi)\| + \\
&\quad + \|e^{-\sqrt{Q(x)+\mu}|x-\xi|}\| \|(Q(x)+\mu)^{-1/2}Q(x)Q^{-1/2}(\xi)\|
\end{aligned}
$$

$|x-\xi| \le 1$ iken $\|Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(\xi)\| \le c$ kosulundan

$$\le c e^{-\sqrt{|\alpha_1(x)|}|x-\xi|} \le c$$

elde edilir. İkinci toplamın da sınırlı olduğu benzer şekilde gösterilir. Böylece $a_1 < \infty$ olduğu gösterildi.

5) koşulu kullanılarak $a_2 < \infty$ olduğu ispatlanır.

Sonuçta $\|b_1\|_{X_4^{(-\frac{1}{2})}} < \infty$ dır. Yani $b_1 \in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ olur.

$\|b_2 Q^{-\frac{1}{2}}(\xi)\|$ yi sınırlandıralım.

$$
\begin{aligned}
\|b_2 Q^{-1/2}(\xi)\| &= \| \int\limits_{|s-\xi|<1} g[Q(s) - Q(x)] \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} Q^{-1/2}(\xi) ds \| \\
&\le \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s) - Q(x)] \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} Q^{-1/2}(\xi)\| ds \\
&= \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)][\frac{\chi}{2} e^{-\chi(\xi-s)} - \\
&\quad - \frac{\chi}{2}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(s+\xi)}]Q^{-1/2}(\xi)\| ds \\
&\le \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s) - Q(x)]\chi e^{-\chi(\xi-s)}Q^{-1/2}(\xi)\| ds + \\
&\quad + \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s) - Q(x)]\chi(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(s+\xi)}Q^{-1/2}(\xi)\| ds \\
&= J_1 + J_2
\end{aligned}
$$

$\|J_2\|$ yi sınırlandıralım.

$$\|J_2\| = \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s)-Q(x)]\chi(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(s+\xi)}Q^{-1/2}(\xi)\|ds$$
$$\leq c \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s)-Q(x)]\chi e^{-\chi(s+\xi)}Q^{-1/2}(\xi)\|ds$$
$$\leq c \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s)-Q(x)](Q(s)-\mu I)^{1/2}e^{-(Q(s)+\mu I)^{1/2}(s+\xi)}Q^{-1/2}(\xi)\|ds$$

$|s-\xi|<1$ olduğunda $\|Q^{1/2}(s)Q^{-1/2}(\xi)\| \leq c_1$ koşulu kullanılarak

$$\leq c_2 \int\limits_{|s-\xi|<1} \|g[Q(s)-Q(x)]e^{-(Q(s)+\mu I)^{1/2}(s+\xi)}\|ds$$

bulunur.

$$\|g[Q(s)-Q(x)]e^{-(Q(s)+\mu I)^{1/2}(s+\xi)}\| =$$
$$= \|g[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}(Q(s)+\mu I)^{1/2}|s-\xi|}e^{\frac{1}{2}(Q(s)+\mu I)^{1/2}|s-\xi|}e^{-(Q(s)+\mu I)^{1/2}(s+\xi)}\|$$
$$\leq \|g[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}(Q(s)+\mu I)^{1/2}|s-\xi|}\|\|e^{\frac{1}{2}(Q(s)+\mu I)^{1/2}|s-\xi|}e^{-(Q(s)+\mu I)^{1/2}(s+\xi)}\|$$
$$\leq \|g[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}(Q(s)+\mu I)^{1/2}|s-\xi|}\|$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$\|J_2\| \leq c_2 \int\limits_{|s-\xi|\leq 1} \|g[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}(Q(s)+\mu I)^{1/2}|s-\xi|}\|ds \qquad (2.22)$$

elde edilir.

J_1 için de (2.22) şeklinde sınırlandırma yapılır.

$\|b_3Q^{-1/2}(\xi)\|$ yı sınırlandıralım.

$$\|b_3Q^{-1/2}(\xi)\| = \|\int\limits_{|s-\xi|>1} g[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}Q^{-1/2}(\xi)ds\|$$
$$\leq \int\limits_{|s-\xi|>1} \|g[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}Q^{-1/2}(\xi)\|ds$$
$$= \int\limits_{|s-\xi|>1} \|g[Q(s)-Q(x)](Q(\xi)+\mu I)^{1/2}e^{-|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}Q^{-1/2}(\xi)\|ds$$

$$\|g[Q(s)-Q(x)](Q(\xi)+\mu I)^{1/2}e^{-|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}Q^{-1/2}(\xi)\|$$

$$= \|g[Q(s)-Q(x)](Q(\xi)+\mu I)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}Q^{-1/2}(\xi)\|$$

$$\leq \|g[Q(s)-Q(x)](Q(\xi)+\mu I)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}Q^{-1/2}(\xi)\|\|e^{-\frac{1}{2}|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}\|$$

$$\leq c\|g[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}\| \qquad (2.23)$$

bulunur. (2.22) ve (2.23) den

$$\|(b_2+b_3)Q^{-1/2}(\xi)\|_H \leq c\int_0^\infty \|g[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}|s-\xi|(Q(\xi)+\mu I)^{1/2}}\|_H ds$$

dır. Bu integralin sınırlı olması lemma 2.3. de olduğu gibi gösterilir. Böylece $\ell_1 \in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ bulunur.

$f \in \mathcal{D}\{Q(x)\} = D$ olduğunda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}(f) = M(f) \quad (s \neq \xi)$$

denklemini sağladığını gösterelim.

$f \in \mathcal{D}\{Q(x)\} = D$ olsun. O taktirde (2.21) denklemi

$$M(f) = \ell_1(f) - \int_0^\infty g[Q(s)-Q(x)]M(s,\xi,\mu)(f)ds$$

şeklini alır. Bu ifadenin ξ_0 dan ξ ye kadar integralini alalım.

$$\int_{\xi_0}^{\xi} M(f)d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi}\ell_1(f)d\xi - \int_0^\infty g[Q(s)-Q(x)]\Big(\int_{\xi_0}^{\xi}M(s,\xi,\mu)(f)d\xi\Big)ds$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(x,\xi;\mu)-\mathcal{L}(x,\xi_0;\mu)] =& \big[\ell(x,\xi;\mu)-\ell(x,\xi_0;\mu)\big]f-\\ &-\int_0^\infty g[Q(s)-Q(x)]\big[\mathcal{L}(s,\xi;\mu)-\mathcal{L}(s,\xi_0;\mu)\big]fds\end{aligned} \qquad (2.24)$$

bulunur.

$$\int_{\xi_0}^{\xi}\ell_1(x,\xi;\mu)(f)d\xi = \big[\ell(x,\xi;\mu)-\ell(x,\xi_0;\mu)\big]f$$

olduğu gösterilirse (2.24) denkleminin çözümünün tekliğinden

$$\int_{\xi_0}^{\xi}M(x,\xi;\mu)d\xi = \big[\mathcal{L}(x,\xi;\mu)-\mathcal{L}(x,\xi_0;\mu)\big](f)$$

yani,

$$M(x,\xi;\mu)(f) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}(f) \qquad (2.25)$$

bulunur.

$$\mathcal{L}(x,\xi;\mu) = \frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} - \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}$$

olduğundan (2.25) ve lemma 2.3. den $s \neq \xi$ de $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}$ nin varlığı ve $X_4^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olduğu çıkar. Böylece geriye (2.25) in ispatı kalır.

$$\ell(x,\xi;\mu) = -\int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds$$

dır.

(ξ_0,ξ) aralığında keyfi $\bar{\xi}$ seçelim. O zaman $Q^{-1}(\xi)Q(\bar{\xi})$ de H da sınırlı operatördür. Gerçekten $\xi > \bar{\xi}$ olsun. Bu taktirde $\xi = \bar{\xi} + k + r$ (k tamsayı , $0 < r < 1$) şeklinde yazabiliriz.

$|x-\xi| \leq 1$ iken $\|Q(x)Q^{-1}(\xi)\| < c$ olduğunu kabul edelim.

$$Q^{-1}(\xi)Q(\bar{\xi}) = Q^{-1}(\xi)Q(\xi-1)Q^{-1}(\xi-1)\cdots Q^{-1}(\bar{\xi}+r)Q(\bar{\xi})$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\|Q^{-1}(\xi)Q(\bar{\xi})\| \leq \|Q^{-1}(\xi)Q(\xi-1)\|\|Q^{-1}(\xi-1)Q(\xi-2)\|\cdots\|Q^{-1}(\bar{\xi}+r)Q(\xi_n)\| \leq c$$

yani, $Q^{-1}(\xi)Q(\bar{\xi})$ sınırlı operatördür.

ℓ yi f-e uygulayalım.

$$\begin{aligned}\ell(x,\xi;\mu)(f) &= \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}(f)ds \\ &= \int_{|x-s|\leq 1} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}(f)ds + \\ &\quad + \int_{|x-s|>1} g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}(f)ds = a_1 + a_2\end{aligned}$$

$a_1(x,\xi,\mu)$ iki halde inceleyelim.

1) $|x-\xi| > 2$ olması halinde :

$|s-\xi| \geq |x-\xi| - |x-s| > 1$

integral altındaki fonksiyon ve ξ ye göre türevi sınırlı operatördür.

2) $|x-\xi| < 2$ olması halinde :

$f = Q^{-1}(\xi)h$, $h \in H$ alalım.

Bu durumda integral altındaki ifadenin kendisi ve ξ ye göre türevinin sınırlı operatör olduğu görülür.

$a_2(x,\xi;\mu)$ yi inceleyelim.

$$a_2(x,\xi;\mu) = \int\limits_{|s-\xi|>1} g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial g(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}(f)ds$$

Burada $g(x,\xi;\mu)$ çarpanı ve 5) koşulundan dolayı integral altındaki fonksiyon sınırlı operatör fonksiyondur. Ek olarak $a_2(x,\xi;\mu)$ yi sınırlı operatörde olduğu gibi integral işareti altında türevi alınabilir.

Bu integral ξ ye göre türetildiğinde de sınırlı operatördür.

Gerçekten $|s-\xi| > \gamma > 0$ olduğunda da aşikardır. $s-\xi$ nin sıfıra yakın değerlerinde f elemanını $f = Q^{-1}(s)[Q(s)Q^{-1}(\bar{\xi})]Q(\bar{\xi})f$ şeklinde yazalım.

Buradan sınırlı operatörlerde olduğu gibi integral altı operatör fonksiyonu ξ ye göre türetilebilir. Bununla (2.21) yani $\frac{\partial \ell}{\partial \xi}$ için önce yazdığımız formal türev doğrudur.

$x \neq \xi$ olduğunda $G(x,\xi;\mu)$ Green fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağladığını gösterelim :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = G(x,\xi;\mu)[Q(\xi) + \mu I]$$

olduğunu göstermek için

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds$$

denkleminin her iki yanını formal olarak ξ ye göre türetelim;

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - \frac{\partial K}{\partial \xi} \tag{2.26}$$

Burada

$$K = \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}ds$$

dir. $G'_\xi(x,x+0;\mu) - G'_\xi(x,x-0;\mu) = -I$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \xi} &= \int_0^\xi g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds + g(x,\xi;\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\frac{\partial G}{\partial \xi} + \\ &+ \int_\xi^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds - g(x,\xi;\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\frac{\partial G}{\partial \xi} \\ &= -[g(Q(\xi) - Q(x))] + \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifadeyi (2.26) da yazarsak

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = [g(Q(\xi) - Q(x))] - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}ds \tag{2.27}$$

bulunur. $g(x,\xi;\mu)$ denklemi sağladığından yani,

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + [Q(x) + \mu I]g = 0 \ , \quad \xi \neq x$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = [Q(x) + \mu I]g$$

olur. (2.27) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} - [Q(x) + \mu I]g = [g(Q(\xi) - Q(x))] - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}ds$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = g[Q(\xi) + \mu I] - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2} ds$$

dır.

$f \in D$ (burada D , $Q(x)$ operatörlerinin tanım kümesidir) iken

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(f) = g[Q(\xi) + \mu I](f) - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi^2}(f) ds \quad (2.28)$$

olur.

$[Q(\xi) + \mu I](f) = \alpha$ diyelim. Buna göre (2.28) ifadesi

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}[Q(\xi)+\mu I]^{-1}\alpha = g(x,\xi;\mu)\alpha - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}[Q(\xi)+\mu I]^{-1}\alpha ds \quad (2.29)$$

şeklini alır. (2.29) denklemini (2.3) denklemi ile karşılaştıralım.

(2.3) denkleminin tek çözüme sahip olduğunu gözönüne alırsak

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}[Q(\xi) + \mu I]^{-1}\alpha = G(x,\xi;\mu)\alpha \quad (2.30)$$

olduğunu buluruz. $[Q(\xi) + \mu I]^{-1}\alpha = f$ ve $\alpha = [Q(\xi) + \mu I]f$ olduğunu gözönüne alırsak (2.30) ifadesi

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} f = G(x,\xi;\mu)[Q(\xi) + \mu I]f$$

şeklinde yazılır.

Burada herbir $\xi \geq 0$ için f elemanlar kümesi H da yoğun olduğundan ($\bar{D} = H$ olduğu gözönüne alınır)

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + G(x,\xi;\mu)[Q(\xi) + \mu I] = 0 \quad (\xi \neq x)$$

bulunur.

Not edelimki, en başta Green fonksiyonunun 3) özelliğine sahip olması anlamı, $f \in D$ iken

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} f + G(x,\xi;\mu)[Q(\xi) + \mu I]f = 0$$

denkleminin sağlanması anlamına gelir.

2.5. SINIR KOŞULUNUN SAĞLANMASI

$G(x,\xi;\mu)$ nün

$$\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} - hG(x,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} = 0 \tag{2.31}$$

sınır koşulunu sağladığını gösterelim.

$$G(x,\xi;\mu) = g(x,\xi;\mu) - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]G(s,\xi;\mu)ds$$

denkleminin $\xi = 0$ noktasındaki türevi

$$\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} ds \tag{2.32}$$

olur.

$$hG(x,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} = g(x,\xi;\mu)h - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]G(s,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} hds \tag{2.33}$$

(2.32) ve (2.33) ifadelerini (2.31) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} - hG(x,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} = \frac{\partial g(x,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} - \\ - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} ds - \\ - g(s,\xi;\mu)h + \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]hG(s,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} ds\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} - hg\Big|_{\xi=0} = 0$$

olduğundan denklem

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} - hG\Big|_{\xi=0} = - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} ds + \\ + \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]hG(s,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} ds\end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece

$$\Big[\frac{\partial G}{\partial \xi} - hG\Big]_{\xi=0} = - \int_0^\infty g(x,s;\mu)[Q(s)-Q(x)]\Big[\frac{\partial G(s,\xi;\mu)}{\partial \xi} - hG(s,\xi;\mu)\Big]_{\xi=0} ds$$

N büzen operatör olduğundan elde edilen homojen denklemin sadece sıfır çözümü vardır. Yani,

$$\frac{\partial G(x,\xi;\mu)}{\partial \xi} - hG(x,\xi;\mu)\Big|_{\xi=0} = 0$$

olur. Eğer biz elde ettiğimiz Green fonksiyonunun yardımı ile H_1 de

$$A_\mu f = \int_0^\infty G(x,\xi;\mu) f(\xi) d\xi \quad , \quad \mu > 0$$

integral operatörünü oluşturursak, ispatladığımız

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|G(x,\xi;\mu)\|_2^2 dx d\xi < \infty$$

özelliğinden A_μ nün H_1 de Hilbert-Schmidt tipli operatör olduğu elde edilir. Böylece A_μ (2.1) - (2.2) sınır değer probleminin oluşturduğu operatörün ters operatörü (rezolvent operatör) olduğu görülür. Eğer $Q(x) = Q^*(x)$ ve h reel sayı ise o zaman Lemma 2.2 yi kullanarak $G(x,\xi;\mu)$ nun simetrik olduğu gösterilebilir.

Örnek 2.1 : Kuantum mekaniğinde rastlanan [Dolph, 1961]

$$-\Delta U + \iiint_D K(X,X')U(X')dX' = \lambda U \tag{2.34}$$

$$U|_\gamma = 0 \tag{2.35}$$

$$U'_X(0,x_2,x_3) - hU(0,x_2,x_3) = 0 \tag{2.36}$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada $X = (x_1,x_2,x_3)$, $X' = (x'_1,x'_2,x'_3)$, D silindirik bölge:

$(x_2,x_3) \in \Omega$, $0 \le x_1 < \infty$, Ω düzlemin sonlu bölgesi, γ, D silindirinin sınırıdır. h kompleks sayıdır. (2.34) deki integral operatörün çekirdeği $K(X,X') = K(X',X)$

$$\iiint_D |K(X,X')|^2 dX dX' < \infty$$

koşulunu sağlayan ve $K(X,X') = K_1(X - X') + K_2(X + X')$ şeklinde gösterilebilen fonksiyondur. x_1 in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde $L_2(\Omega)$ uzayında dönüşüm yapan $Q(x_1)$ operatörünü

$$Q(x_1)U = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \iiint_D K(X,X')U(X')dX'$$

formülü ile tanımlayalım. Bu taktirde (2.34) - (2.36) sınır değer problemi bu bölümde incelediğmiz

$$-\frac{d^2U}{dx_1^2} + Q(x_1)U = \lambda U$$
$$U'(0) - hU(0) = 0$$

problemi şeklinde yazılır. Bununla (2.34) - (2.36) probleminin Green fonksiyonu özellikleri incelenebilir.

Örnek 2.2 : $0 \le x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ bölgesinde

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + P(x)\Big(-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y^2 U\Big) = f(x,y) \tag{2.37}$$

$$U_x(0,y) - hU(0,y) = 0 \tag{2.38}$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada $P(x)$, $|P(x)| \ge 1$ koşulunu sağlayan kompleks değerli fonksiyon, h kompleks sayıdır. (2.37) - (2.38) problemini operatör katsayılı sınır değer problemi şeklinde yazalım. B ile

$B = -\frac{d^2}{dy^2} + y^2$ Hermit operatörünü $H = L_2(-\infty,\infty)$ uzayında aşağıdaki şekilde tanımlayalım. B nin tanım kümesi

$D(B) = \{V(y) \in L_2(-\infty,\infty) : V'(y)$ $(-\infty,\infty)$ aralığının herbir sonlu alt aralığında mutlak sürekli ve $-V'' + y^2V \in L_2(-\infty,\infty)\}$ şeklinde $V(y) \in D(B)$ elemanına etkisi

$$BV = -V'' + y^2 V$$

ifadesi ile tanımlanırsa, böyle tanımlanmış B nin kendine eş operatör olduğu açıktır [Titchmarsh, E.C., 1962]. $Q(x) = P(x)B$ diyelim. $B = B^*$ olduğundan $x \in [0,\infty)$ in herbir değerinde

$$Q(x)^* = (P(x)B)^* = B^*\overline{P(x)} = \overline{P(x)}B$$

$$Q(x)Q^*(x) = P(x)B\overline{P(x)}B = \overline{P(x)}BP(x)B = Q^*(x)Q(x)$$

dır. Yani $Q(x)$, H da normal operatördür. (2.37) - (2.38) problemini $H_1 = L_2([0,\infty),H)$ uzayında

$$-\frac{d^2U}{dx^2} + Q(x)U = f(x) \quad , \quad f(x) \in L_2([0,\infty),H)$$
$$U'(0) - hU(0) = 0$$

operatör katsayılı denklem şeklinde yazabiliriz. Böylece (2.37) - (2.38) probleminin Green fonksiyonu incelenebilir.

3.0 SONLU ARALIKTA STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DENKLEMİNİN SPEKTRUMUNUN İNCELENMESİ

3.1. L OPERATÖRÜNÜN REZOLVENTİ

Bu bölümde $L_2([0,\pi],H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{3.1}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0 \tag{3.3}$$

sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün rezolventini (Green fonksiyonunu) inceleyeceğiz ve özdeğerler sayısının asimtotik ifadesini bulacağız.

(3.1) - (3.3) ifadelerinde $Q(x)$, x in $[0,\pi]$ den alınmış herbir değerinde H uzayında dönüşüm yapan, kendine eş, alttan 1 ile sınırlı ve tersi tam sürekli olan operatör, h_1 ve h_2 negatif olmayan herhangi reel sayılardır. Ek olarak $Q(x)$ in aşağıdaki koşulları da sağladığını varsayalım:

1-) $Q(x)$ lerin tanım kümesi $D(Q(x)) = D$ x den bağımsız, $\bar{D} = H$ (burada $\bar{D}$ kümesi D nin kapanışıdır), $f \in D$ iken $Q(x)f$ in $[0,\pi]$ de sürekli olduğunu varsayalım.

2-) $Q(x)$ operatörünün özdeğerlerini

$$\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \ldots \leq \alpha_n(x) \leq \ldots$$

ile gösterelim. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{-3/2}(x)$ serisinin yakınsak olduğunu ve serinin toplamı $F(x)$ in $L_1(0,\pi)$ ye ait, yani $\int_0^\pi F(x)dx < \infty$ olduğunu varsayalım.

D' ile $\sum\limits_{k=1}^{m} f_k \varphi_k(x)$ şeklinde toplamları gösterelim. Burada $\varphi_k(x)$ $[0,\pi]$ de tanımlanmış ikinci türevi sürekli ve (3.2) , (3.3) koşullarını sağlayan fonksiyonlar, f_k lar ise D nin keyfi elemanlarıdır. D' nin $L_2([0,\pi],H)$ uzayında yoğun olduğu kolayca görülür. L' ile tanım kümesi D' ve $y \in D'$ iken

$$L'y = -y'' + Q(x)y$$

formülü ile tanımlanan operatörü gösterelim. Böyle tanımlanmış L' operatörünün $L_2([0,\pi],H)$ uzayında simetrik, alttan 1 ile sınırlı olduğu kolayca gösterilebilir. L'

simetrik olduğundan dolayı kapanışa sahiptir. Yukarıda sözü edilen L operatörü L' nin kapanışı olarak tanımlanır. Yani,

$$\bar{L}' = L$$

dır. Basitlik için L operatörünün $L_2([0,\pi], H)$ uzayında kendine eş olduğunu varsayacağız. Aksi taktirde, yani $L \neq L^*$ ise o zaman biz L nin Friedrichs anlamda kendine eş genişletilmesi ile uğraşmamız gerekecekti. Böyle tanımlanmış L operatörünün spektrumu saf ayrıktır. Yani spektrum sadece özdeğerlerden ibarettir. [Levitan B.M., and Suvorçenkova G.A., 1968] L nin özdeğerleri

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots$$

olsun. Biz özdeğerlerden oluşan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2}$$

serisinin yakınsaklığını, yani L operatörünün rezolventinin Hilbert - Schmidt $(H-S)$ tipli operatör olduğunu ve L nin μ $(\mu > 0)$ sayısını aşmayan özdeğerlerinin sayısı

$$N(\mu) = \sum_{\mu_n < \mu} 1$$

fonksiyonunun $\mu \to \infty$ iken asimtotik ifadesini bulacağız. L sınırsız operatör olduğundan $n \to \infty$ iken $\mu_n \to \infty$ dır.
$U(\xi)$, $[0,\pi]$ de tanımlı operatör fonksiyon ve $\xi \neq x$ değerlerinde $U(\xi)$ ikinci türeve sahip olsun ve

$$U'(x+0) - U'(x-0) = I$$

koşulunu sağlasın. Böyle fonksiyonun varlığı kolayca gösterilir. $V(\xi)$ de ikinci türevi sürekli operatör değerli veya vektör değerli fonksiyon olsun.
L nin rezolventinin $H-S$ tipli olduğunun gösterilmesi aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 3.1 : 1-) - 2-) koşulları sağlanıyorsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}$ serisi yakınsaktır.
L operatörü pozitif olduğundan $\mu > 0$ iken $(L + \mu I)^{-1}$ operatörü vardır ve sınırlıdır.
Teoremi ispatlayalım.

Sabit tutulmuş keyfi $x \in [0,\pi]$ için

$$G(\xi, x; \mu) = \frac{1}{2}\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}$$

olsun. Burada $\chi = (Q(x) + \mu I)^{1/2}$ dır ve $Q(x)$ in spektral açılımı ile tanımlanır. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_0^{\pi}[U(\xi)V''(\xi) - U''(\xi)V(\xi)]d\xi = \int\limits_0^{x-0}[U(\xi)V''(\xi) - U''(\xi)V(\xi)]d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x+0}^{\pi}[U(\xi)V''(\xi) - U''(\xi)V(\xi)]d\xi$$

$$= -V(x) + \left[U(\xi)V'(\xi) - U'(\xi)V(\xi)\right]_0^{\pi} \quad (3.4)$$

elde edilir. $\psi_n(x)$ L nin μ_n- e karşılık özvektörü olsun. Bu taktirde

$$-\psi_n''(x) + Q(x)\psi_n(x) = \mu_n\psi_n(x)$$

$$\psi'(0) - h_1\psi(0) = 0$$

$$\psi'(\pi) + h_2\psi(\pi) = 0$$

olur.

$$U(\xi) = G(\xi, x; \mu) = \frac{1}{2}\chi^{-1}e^{-\chi|x-\xi|}$$

$$V(\xi) = \psi_n(\xi)$$

alalım. $\xi \neq x$ olsun. $\xi > x$ iken

$$U(\xi) = \frac{1}{2}\chi^{-1}e^{-\chi(\xi-x)}$$

ve

$$U'(\xi) = -\frac{1}{2}\chi^{-1}\chi e^{-\chi|\xi-x|} = -\chi U(\xi)$$

$$U''(\xi) = -\frac{1}{2}\chi^{-1}\chi^2 e^{-\chi(\xi-x)} = \chi^2 U(\xi)$$

dır.

$\xi < x$ iken

$$U(\xi) = \frac{1}{2}\chi^{-1}e^{\chi(\xi-x)}$$

ve

$$U'(\xi) = \frac{1}{2}\chi^{-1}\chi e^{\chi|\xi-x|} = \chi U(\xi)$$

$$U''(\xi) = \frac{1}{2}\chi^{-1}\chi^2 e^{-\chi(\xi-x)} = \chi^2 U(\xi)$$

olur.

$\xi = x$ olsun. Bu taktirde

$$U'(x+0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} U'(\xi) = -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} e^{-\chi(\xi - x)} = \frac{1}{2} I$$

$$U'(x-0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} U'(\xi) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} e^{\chi(\xi - x)} = -\frac{1}{2} I$$

$$U'(x+0) - U'(x-0) = I$$

bulunur.

(3.4) eşitliğinden

$$\int_0^\pi [U(\xi)V''(\xi) - U''(\xi)V(\xi)]d\xi = \int_0^\pi \{G(\xi,x;\mu)[Q(\xi) - \mu_n]\varphi_n(\xi) - \\ - [Q(x) + \mu I]G(\xi,x;\mu)\varphi_n(\xi)\}d\xi \\ = -\varphi_n(x) + (G\psi_n' - G'\psi_n)\Big|_0^\pi$$

elde edilir.

$$\psi_n'(0) - h_1\psi_n(0) = 0$$

$$\psi_n'(\pi) + h_2\psi_n(\pi) = 0$$

sınır koşullarından

$$\int_0^\pi \{G(\xi,x;\mu)[Q(\xi) - \mu_n]\psi_n(\xi) - [Q(x) + \mu I]G(\xi,x;\mu)\psi_n(\xi)\}d\xi =$$

$$= -\psi_n(x) + G(\pi,x;\mu)\psi_n'(\pi) - G'(\pi,x;\mu)\psi_n(\pi) - G(0,x;\mu)\psi_n'(0) + \\ + G'(0,x;\mu)\psi_n(0)$$

$$= -\psi_n(x) - G(\pi,x;\mu)h_2\psi_n(\pi) - G'(\pi,x;\mu)\psi_n(\pi) - G(0,x;\mu)h_1\psi_n(0) + \\ + G'(0,x;\mu)\psi_n(0)$$

$$= -\psi_n(x) + \ell(x,\mu)$$

olur. Böylece

$$\int_0^\pi G(\xi,x;\mu)(-\mu_n - \mu)\psi_n(\xi)d\xi = -\psi_n(x) + \ell(x,\mu)$$

dır. Buradan

$$-(\mu_n + \mu)\int_0^\pi G(\xi,x;\mu)\psi_n(\xi)d\xi = -\psi_n(x) + \ell(x,\mu)$$

$$\frac{\psi_n(x)}{\mu_n+\mu} = \int_0^\pi G(\xi,x;\mu)\psi_n(\xi)d\xi + \frac{\ell(x,\mu)}{\mu_n+\mu} = a_n + b_n$$

şeklinde yazalım. Burada

$$a_n = \int_0^\pi G(\xi,x;\mu)\psi_n(\xi)d\xi \quad , \qquad b_n = \frac{\ell(x,\mu)}{\mu_n+\mu}$$

dır. Böylece

$$\frac{\psi_n(x)}{\mu_n+\mu} = a_n + b_n \tag{3.5}$$

(3.5) in iç çarpımını yazalım.

$$\left(\frac{\psi_n(x)}{\mu_n+\mu}, \frac{\psi_n(x)}{\mu_n+\mu}\right) = \left(a_n+b_n\ ,\ a_n+b_n\right) = \|a_n\|^2 + 2(a_n,b_n) + \|b_n\|^2 = \frac{\|\psi_n\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}$$

N keyfi doğal sayı olmak üzere

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\|\psi_n\|^2}{(\mu_n+\mu)^2} = \sum_{n=1}^{N} \left(\|a_n\|^2 + 2(a_n,b_n) + \|b_n\|^2\right)$$

olsun. $\psi_n(x)$, (3.1) probleminin μ_n özdeğerlerine karşılık gelen ortanormal özvektörleri olduğundan

$$\int_0^\pi S_N(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_0^\pi \|\psi_n(x)\|^2 dx}{(\mu_n+\mu)^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}$$

dır.

$\{e_i\}$ H da herhangi ortanormal baz olsun. Bu taktirde Bessel eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |(a_n,e_i)|^2 &= \sum_{n=1}^{N} \left| \int_0^\pi (G(\xi,x;\mu)\psi_n(\xi)d\xi\ ,\ e_i) \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left| \int_0^\pi (\psi_n(\xi)\ ,\ G(\xi,x;\mu)e_i)d\xi \right|^2 \\ &\le \int_0^\pi \left\| G(\xi,x;\mu)e_i) \right\|^2 d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} |(a_n,e_i)|^2 &\le \int_0^\pi \sum_{i=1}^{\infty} \|G(\xi,x;\mu)e_i\|^2 d\xi \\ &= \int_0^\pi \sum_{i=1}^{\infty} \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \left|G(\xi,x;\mu)e_i\ ,\ e_j)\right|^2 \Big] d\xi \\ &= \int_0^\pi \sum_{i,j=1}^{\infty} \left|g_{ij}(\xi,x;\mu)\right|^2 d\xi\end{aligned} \tag{3.6}$$

Burada $g_{ij} = \big(G(\xi,x;\mu)e_i\ ,\ e_j\big)$, $G(\xi,x;\mu)$ operatörünün $\{e_i\}$ ortanormal bazında matris elemanlarıdır. Böylece

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}|(a_n,e_i)|^2 \le \int_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|g_{ij}(\xi,x;\mu)\right|^2 d\xi$$

veya

$$\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|^2 \le \int_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|g_{ij}(\xi,x;\mu)\right|^2 d\xi$$

dir.

$Q(x)$ tam sürekli kendine eş operatör olduğundan H nın bazı olarak $Q(x)$-in ortanormal özvektörleri H da baz olarak kabul edilirse $G(\xi,x;\mu)$ nin matrisi

$$G = \left\{\delta_{ij}\frac{1}{2\chi_i}e^{-|\xi-x|\chi_i}\right\}$$

şeklinde olur.

Burada δ_{ij} Kroneker sembolüdür ve $\chi_i = (\alpha_i(x)+\mu)^{1/2}$ dır. Bu sembollerle (3.6) dan

$$\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|^2 \le \int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4{\chi_i}^2}e^{-2|\xi-x|\chi_i}d\xi \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4{\chi_i}^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i(x)+\mu}$$

dır. (3.7) de integral ve toplam sembollerinin yeri değiştirilirse

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{N}\|a_n\|^2 dx \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4{\chi_i}^2}\Big[\int_0^{\pi}e^{-2|\xi-x|\chi_i}d\xi\Big]dx \tag{3.8}$$

elde edilir.

Şimdi içteki integrali hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}e^{-2|\xi-x|\chi_i}d\xi &= \int_0^{x}e^{-2|\xi-x|\chi_i}d\xi + \int_x^{\pi}e^{-2|\xi-x|\chi_i}d\xi\\ &= \frac{1}{2\chi_i}e^{-2|\xi-x|\chi_i}\Big|_0^x - \frac{1}{2\chi_i}e^{-2|\xi-x|\chi_i}\Big|_x^{\pi}\\ &= \frac{1}{2\chi_i}\big(2-e^{-2x\chi_i}-e^{-2(\pi-x)\chi_i}\big) \le \frac{1}{\chi_i}\end{aligned}$$

olduğunu gözönüne alırsak (3.8) deki sınırlandırmadan

$$\sum_{n=1}^{N} \|a_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4\chi_i{}^3} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_i(x)+\mu)^{3/2}}$$

elde ederiz.

$\|b_n\|$ sınırlandıralım:

$$b_n = \frac{\ell(x,\mu)}{\mu_n+\mu} =$$
$$= \frac{-G(\pi,x;\mu)h_2\psi_n(\pi) - G'(\pi,x;\mu)\psi_n(\pi) - G(0,x;\mu)h_1\psi_n(0) + G'(0,x;\mu)\psi_n(0)}{\mu_n+\mu}$$
$$= \frac{-G(\pi)h_2\psi_n(\pi) - G'_\xi(\pi)\psi_n(\pi) - G(0)h_1\psi_n(0) + G'_\xi(0)\psi_n(0)}{\mu_n+\mu}$$

olduğundan

$$\|b_n\| \leq \frac{\|G(\pi)h_2\psi_n(\pi)\|}{\mu_n+\mu} + \frac{\|G'_\xi(\pi)\psi_n(\pi)\|}{\mu_n+\mu} + \frac{\|G(0)h_1\psi_n(0)\|}{\mu_n+\mu} + \frac{\|G'_\xi(0)\psi_n(0)}{\mu_n+\mu}$$
$$\leq c\left(\frac{\|\psi_n(\pi)\|}{\mu_n+\mu}\|G(\pi)\| + \frac{\|\psi_n(\pi)\|}{\mu_n+\mu}\|G'_\xi(\pi)\| + \frac{\|\psi_n(0)\|}{\mu_n+\mu}\|G(0)\| + \frac{\|\psi_n(0)\|}{\mu_n+\mu}\|G'_\xi(0)\|\right) \tag{3.9}$$

$c = max\{1, h_1, h_2\}$ dır. $\int_0^\pi \|\psi_n\|^2 dx = 1$ ve $\alpha_1(x) \geq 1$ olduğundan $\mu > 0$ sayısının büyük değerlerinde

$$\int_0^{(\alpha_1+\mu)^{-1/3}} \|\psi_n\|^2 dx < 1 \tag{3.10}$$

olur.

$$\xi'_{n,\mu} = \inf_x \|\psi_n(x)\|^2 \quad , \quad x \in [0, (\alpha_1+\mu)^{-1/3}] \tag{3.11}$$

olsun. O taktirde (3.10) dan

$$\xi'_{n,\mu}(\alpha_1+\mu)^{-1/3} < 1 \quad , \quad \xi'_{n,\mu} < (\alpha_1+\mu)^{1/3} \tag{3.12}$$

olur. (3.11) den $\lim_{\mu\to\infty} \xi'_{n,\mu} = \|\psi_n(0)\|^2$ dır. Böylece $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists N > 0$ var ki, $\mu > N$ iken $\|\psi_n(0)\|^2 - \varepsilon < \xi'_{n,\mu}$ olur.

$$\|\psi_n(0)\|^2 - \varepsilon < (\alpha_1+\mu)^{1/3}$$

$$\|\psi_n(0)\|^2 < (\alpha_1+\mu)^{1/3} + \varepsilon \tag{3.13}$$

olur. Benzer şekilde

$$\|\psi_n(\pi)\|^2 - \varepsilon < \xi'_{n,\mu}$$

$$\|\psi_n(\pi)\|^2 < \xi'_{n,\mu} + \varepsilon$$

$$\|\psi_n(\pi)\|^2 < (\alpha_1 + \mu)^{1/3} + \varepsilon \tag{3.14}$$

olur. (3.9) ifadesinin her iki yanının karesini alalım.

$$\begin{aligned}\|b_n\|^2 \leq{}& \frac{\|\psi_n(\pi)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}\|G(\pi)\|^2 + \frac{\|\psi_n(\pi)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}\|G'_\xi(\pi)\|^2 + \frac{\|\psi_n(0)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}\|G(0)\|^2 + \\ &+ \frac{\|\psi_n(0)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}\|G'_\xi(0)\|^2 + 2\frac{\|\psi_n(\pi)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}\|G(\pi)\|\|G'_\xi(\pi)\| + \\ &+ 2\frac{\|\psi_n(\pi)\|\|\psi_n(0)\|}{(\mu_n+\mu)^2}\|G'_\xi(0)\|\|G(0)\| + 2\frac{\|\psi_n(\pi)\|\|\psi_n(0)\|}{(\mu_n+\mu)^2}\|G(\pi)\|\|G(0)\| + \\ &+ 2\frac{\|\psi_n(\pi)\|\|\psi_n(0)\|}{(\mu_n+\mu)^2}\|G(\pi)\|\|G'_\xi(0)\| + 2\frac{\|\psi_n(0)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}\|G(0)\|\|G'_\xi(0)\| + \\ &+ 2\frac{\|\psi_n(\pi)\|\|\psi_n(0)\|}{(\mu_n+\mu)^2}\|G'_\xi(\pi)\|\|G'_\xi(0)\|\end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.15) i, x e göre $[0,\pi]$ üzerinde integre eder ve 1 den N ye kadar toplamını alırsak ve (3.13) , (3.14) gözönüne alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\int_0^\pi \|b_n\|^2 dx \leq{}& \sum_{n=1}^{N}\int_0^\pi \{(\alpha_1+\mu)^{1/3}+\varepsilon\}\frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\Big[\|G(\pi)\|^2 + \|G'_\xi(\pi)\|^2 + \\ &+ \|G(0)\|^2 + \|G'_\xi(0)\|^2 + 2\|G(\pi)\|\|G'_\xi(\pi)\| + 2\|G'_\xi(0)\|\|G(0)\| + \\ &+ 2\|G(\pi)\|\|G(0)\| + 2\|G(\pi)\|\|G'_\xi(0)\| + 2\|G(0)\|\|G'_\xi(0)\| + \\ &+ 2\|G'_\xi(\pi)\|\|G'_\xi(0)\|\Big]\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde ederiz. $G(\xi, x; \mu)$ nün ifadesinden

$$\|G(0)\| = \frac{1}{2}(\alpha_1+\mu)^{-1/2}e^{-(\alpha_1+\mu)^{1/2}x}$$

$$\|G(\pi)\| = \frac{1}{2}(\alpha_1+\mu)^{-1/2}e^{-(\alpha_1+\mu)^{1/2}(\pi-x)}$$

$$\|G'_\xi(0)\| = \frac{1}{2}e^{-(\alpha_1+\mu)^{1/2}x}$$

$$\|G'_\xi(\pi)\| = \frac{1}{2}e^{-(\alpha_1+\mu)^{1/2}(\pi-x)}$$

olduğu görülür.

Şimdi aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^N \frac{\|G'_\xi(0)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}dx = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\int_0^\pi \frac{1}{4}e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}x}dx$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{1}{8}\frac{1}{(\alpha_1+\mu)^{1/2}}e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}x}\Big|_\pi^0$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{\left(1-e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}\pi}\right)}{8(\alpha_1+\mu)^{1/2}}$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^N \frac{\|G(0)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}dx = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\int_0^\pi \frac{1}{4}(\alpha_1+\mu)^{-1}e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}x}dx$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{1}{4}\frac{1}{(\alpha_1+\mu)}\frac{1}{2(\alpha_1+\mu)^{1/2}}e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}x}\Big|_\pi^0$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{\left(1-e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}\pi}\right)}{8(\alpha_1+\mu)^{3/2}}$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^N \frac{\|G'_\xi(\pi)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}dx = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\int_0^\pi \frac{1}{4}e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}(\pi-x)}dx$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{1}{4}\frac{e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}(\pi-x)}}{2(\alpha_1+\mu)^{1/2}}\Big|_0^\pi$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{\left(1-e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}\pi}\right)}{8(\alpha_1+\mu)^{1/2}}$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^N \frac{\|G(\pi)\|^2}{(\mu_n+\mu)^2}dx = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\int_0^\pi \frac{1}{4}(\alpha_1+\mu)^{-1}e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}(\pi-x)}dx$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{\left(1-e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}\pi}\right)}{8(\alpha_1+\mu)^{3/2}}$$

(3.16) nın sağ tarafındaki integralleri sırası ile c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 , c_7 , c_8 , c_9 , c_{10} ile gösterirsek

$$c_1 \le \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{\left((\alpha_1+\mu)^{1/3}+\varepsilon\right)}{8(\alpha_1+\mu)^{1/2}}\left(1-e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}\pi}\right)$$

$\mu \to \infty$ iken $c_1 = 0\left(\sum\limits_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\right)$ elde edilir. Benzer şekilde

$$c_2 \le \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}\frac{\left((\alpha_1+\mu)^{1/3}+\varepsilon\right)}{8(\alpha_1+\mu)^{3/2}}\left(1-e^{-2(\alpha_1+\mu)^{1/2}\pi}\right)$$

$\mu \to \infty$ iken

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = 0\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}\Big)$$

olduğu bulunur. (3.16) yı gözönüne alırsak

$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^\pi \|b_n\|^2 dx = 0\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}\Big)$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{N} \|b_n\|^2 dx = t_1(\mu) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}$$

olur. Buradan $\mu \to \infty$ iken $t_1(\mu) \to 0$ dır. Şimdi aşağıdaki ifadeyi sınırlandıralım.

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{n=1}^{N}(a_n, b_n)\Big| dx \le \int_0^\pi \sum_{n=1}^{N} |(a_n, b_n)| dx \le \Big(\sum_{n=1}^{N} \int_0^\pi \|a_n\|^2 dx\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{N} \int_0^\pi \|b_n\|^2 dx\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{2}\Big(\int_0^\pi \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i + \mu)^{-3/2} dx\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}\Big)^{1/2} t_1(\mu)^{1/2}$$

yani

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{i=1}^{N}(a_n, b_n)\Big| dx \le t_2(\mu)\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}\Big)^{1/2}$$

dır.

Daha önceki bütün eşitsizlikleri gözönüne alırsak

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2} \le \frac{1}{4} \int_0^\pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha_i + \mu)^{3/2}} + t(\mu)\Big[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2} + \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}\Big)^{1/2}\Big]$$

sonucu elde edilir. Burada $\mu \to \infty$ iken $t(\mu) \to 0$ dır. Buradan

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2} \le \frac{1}{4} \int_0^\pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_i + \mu)^{3/2}} dx + T(\mu) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\mu_n + \mu)^2}$$

$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\pi \alpha_i^{-3/2}(x) dx$ serisi yakınsak olduğundan dolayı $T(\mu) \sum_{n=1}^{N} (\mu_n + \mu)^{-2}$ ifadesi N nin herbir değerinde μ ye göre sonsuz küçülendir. Bundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2}$ serisi yakınsaktır. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 3.2 : L operatörünün rezolventi Hilbert-Schmidt tipli operatördür.

3.2. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLER SAYISININ ASİMTOTİK İFADESİ

Bu bölümde $Q(x)$ operatör fonksiyonunun 1-) - 2-) koşullarına ek olarak
3-) $|x-\xi| \leq 1$ iken

$$\|(Q(x)-Q(\xi))Q^{-a}(x)\| \leq c|x-\xi| \quad , \qquad (0 < a < \frac{3}{2}) \quad , \qquad c = sabit > 0$$

koşullarını sağladığını varsayalım. Bu taktirde $\|b_n\|^2$ ve $|(a_n, b_n)|^2$ değerlendirmelerini [Titchmarsh, E.C., 1962] kitabında (Bölüm XVII , §17-11) olduğu gibi yapılabilir. Sadece bütün işlemlerde modül yerine norm (operatör veya vektörün) yazmamız gerekir. Bu taktirde sonuçta $\mu \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik ifade elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha_j+\mu)^{3/2}}[1+o(1)] \tag{3.17}$$

Burada $\mu \to \infty$ iken $o(1) \to 0$ dır.

Şimdi $\mu > 0$ herhangi reel sayı, $N(\mu)$ ise L operatörünün μ yü aşmayan özdeğerler sayısı, yani

$$N(\mu) = \sum_{\mu_n < \mu} 1$$

olsun;

[Titchmarsh, E.C., 1958] gösterildiği gibi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n+\mu)^2} = \int_0^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda+\mu)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\mu)^3}d\lambda$$

Buradan (3.17) ifadesi

$$\int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\mu)^3}d\lambda \sim \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \quad , \quad \mu \to \infty \tag{3.18}$$

veya Titchmarsh, E.C. ın [Titchmarsh, E.C., 1958] Touber tipli teoremini kullanalım. Bunun için [Titchmarsh, E.C., 1958] deki (22.34.3) koşulunu [Kostyuchenko, A.G. and Levitan, B.M., 1967] çalışmasında olduğu gibi aşağıdaki koşulla değiştirelim:

Öyle c_1 ve c_2 sabitleri var ki,

$$\frac{c_1}{t^{3/2}}\sum_i \int_{\alpha_i(x)<t} dt \leq \sum_i \int_{\alpha_i(x)\geq t} \frac{dx}{\alpha_i^{3/2}(x)} \leq \frac{c_2}{t^{3/2}}\sum_i \int_{\alpha_i(x)\leq t} dt \tag{3.19}$$

koşulları sağlanıyor.

Bu koşullar altında (3.18) formülünden sözü edilen Titchmarsh'ın Tauber tipli teoremini kullanırsak $\mu \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{\alpha_i(x)<\lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{1/2} dx \tag{3.20}$$

asimtotik ifadesi elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 3.3 : $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1-) - 3-) koşullarını ve (3.19) eşitsizlikleri sağlanıyorsa o zaman $N(\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ iken asimtotik davranışı (3.20) formülü ile elde edilir.

Not 1. Eğer $H = R^n$ yani, n boyutlu uzay ise o zaman (3.1) - (3.3) problemi n tane denklemden ibaret sistem olur ve bu taktirde λ nın büyük değerlerinde $\{x : \alpha_j(x) < \lambda\} = [0, \pi]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ olur. (3.20) formülünden $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\pi} (\lambda - \alpha_j(x))^{1/2} dx \sim \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda^{1/2} \int_0^{\pi} dx = n\lambda^{1/2}$$

veya $N(\lambda) \sim n\lambda^{1/2}$ elde edilir. Böylece Sturm-Liouville ($n = 1$ hali) problemi için belli $N(\lambda) \sim \lambda^{1/2}$, $\lambda \to \infty$ (3.21) sonucu çıkar. Eğer (3.1) - (3.3) Sturm-Liouville probleminin K. özdeğerini μ_k ile gösterirsek (3.21) asimtotik ifadesinden $N(\mu_k) \sim \mu_k^{1/2}$ ve $N(\mu_k) = k$ olduğu gözönüne alınırsa $k \sim \mu_k^{1/2}$ veya buradan belli $\mu_k \sim k^2$ $(k \to \infty)$ formülü elde edilir.

Not 2. Sonlu sistem için (3.19) koşulunu eklemeden $N(\lambda)$ nın asimtotik ifadesi ($\lambda \to \infty$ iken) direkt olarak (3.18) eşitliğinden elde edilir. Bu taktirde (3.17) den, $\mu \to \infty$ iken

$$\int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\mu)^3} d\lambda \sim \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \sim \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\mu^{3/2}} = \frac{n\pi}{8\mu^{3/2}}$$

veya

$$\int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\mu)^3} d\lambda \sim \frac{n\pi}{8\mu^{3/2}} \quad , \quad \mu \to \infty \tag{3.22}$$

(3.22) asimtotik ifadesinden Hardy, Littlewoold'un Tauber tipli (Titchmarsh, E.C., 1958, bölüm XXII, § 22.30) aşağıdaki teoremini kullanılalım.

Teorem 3.4 : $f(y)$ azalmayan nonnegatif fonksiyon ve $x \to \infty$ iken

$$\int_0^\infty \frac{f(y)}{(x+y)^\alpha}dy \sim \frac{c}{x^\beta}$$

ise, burada $\alpha > 1$, $0 < \beta < \infty$ dır. O zaman

$$f(x) \sim \frac{c\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-\beta-1}$$

dır.

Bu teoreme göre (3.22) ifadesinden yazabiliriz:

$$N(\lambda) \sim \frac{n\pi}{8}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}\lambda^{3-\frac{3}{2}-1} = \frac{n\pi}{8}\frac{2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\lambda^{1/2} = n\lambda^{1/2}$$

Böylece $\lambda \to \infty$ iken $N(\lambda) \sim n\lambda^{1/2}$ dır.

Örnek 3.1 : $0 \le x \le \pi$, $-\infty < y < \infty$ şeritinde

$$-\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + P(x)\Big(\frac{-\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} + y^2 U(x,y)\Big) = \lambda U(x,y) \tag{3.23}$$

$$U'_x(0,y) - h_1 U(0,y) = 0 \tag{3.24}$$

$$U'_x(\pi,y) + h_2 U(\pi,y) = 0 \tag{3.25}$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada $P(x) \ge 1$ koşulunu sağlayan $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli herhangi bir fonksiyon, $h_1 \ge 0$, $h_2 \ge 0$ reel sayılardır. H ile $L_2(-\infty,\infty)$ uzayını gösterelim. $H = L_2(-\infty,\infty)$ (3.23) - (3.25) problemini $H_1 = L_2(0,\pi;H)$ uzayında operatör katsayılı sınır değer problemi şeklinde yazalım.

$$LU = -\frac{d^2U}{dx^2} + Q(x)U \quad , \quad 0 \le x \le \pi \tag{3.26}$$

$$U'(0) - h_1 U(0) = 0 \tag{3.27}$$

$$U'(\pi) + h_2 U(\pi) = 0 \tag{3.28}$$

Burada $U(x)$, x in $[0,\pi]$ den alınmış herbir değerinde H nın elemanı, $Q(x)$ ise H uzayında

$$Q(x)U(x) = P(x)\Big(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2\Big)U$$

ifadesi ile tanımlanmış operatördür.

$Q(x) = P(x)B$ diyelim. Burada B Bölüm 1 örnek 2 deki operatördür.

$B = B^*$ olduğundan $Q(x)$, x in $[0,\pi]$ den alınmış herbir değerinde H da kendine eş olacaktır.

B nin spektrumunun sadece $\beta_k = 2k+1$, $k = 0,1,2,\ldots$ özdeğerlerinden [Titchmarsh, E.C.,1962] ibarettir. Buradan $Q(x)$ operatörünün x in herbir değerinde spektrumunun sadece

$$\alpha_k(x) = P(x)\beta_k \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

özdeğerlerinden ibaret olduğu açıktır. Buradan $Q(x)$ in 1-) - 3-) koşullarını sağladığı kolayca görülür. Örneğin, 2-) koşulun sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^{3/2}(x)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[P(x)\beta_k]^{3/2}} = \frac{1}{P^{3/2}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{3/2}} \\ &= c\frac{1}{P^{3/2}(x)} = F(x) \in L_1(0,\pi)\end{aligned}$$

Böylece (3.23) - (3.25) veya (3.26) - (3.28) probleminin rezolventi $H-S$ tipli operatördür.

SONUÇ

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde $L_2(0,\infty;H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu incelenmiş ve Green fonksiyonunun Hilbert-Schmidt tipli integral operatör oluşturduğu gösterilmiştir.
Burada $Q(x)$, x in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde tersi kompakt olan normal operator, h ise kompleks sayıdır.
İkinci bölümde ise $L_2(0,\pi;H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün spektrumu incelenmiş ve özdeğerlerin sayısının asimtotik ifadesi elde edilmiştir. Burada $Q(x)$, x in $[0,\pi]$ den alınmış herbir değerinde kendine eş operatördür.

KAYNAKLAR

ASLANOV, G.I., (1976), Yarı Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerleri Sayısının Asimtotik Davranışı Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR 32, No:3 S.3-7 (R)*

ASLANOV, G.I., (1994), Hilbert Uzaylarında Sınırsız Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemler Üzerine DAN ROSSII, 1994, V.337, No.1 (R)

BAYRAMOĞLU, M., (1971), Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, "Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları" Sbornik, Bakü : Bilim, 144-166 (R)

BOYMATOV, K.CH., (1973), Operatör Diferansiyel Denklemin Spektrumunun Asimtotik Davranışı Usp. Mat. Nauk, V.5, 28, 207-208 (R)

CODDINGTON, E.A. and LEVINSON, N., (1955), Theory of Ordinary Differantial Equations, New York : Mc Graw-Hill

DOLPH, C.L., (1961), Recent Developments in Some Non-Self-Adjoint Problems of Mathematical Physics, Bull Amer. Math. Soc. 67 N1 1-69

DUŞDUROV, M.G., (1981), Sonlu Aralıkta Sturm-Liouville Operatör Denkleminin Rezolventi Temat. Sb. nouç trudov. Azerb. inst. nettichim. im M. Azizbekova Bakü, 100-105

FULTON, T.C., Pruess, S.A., (1994), Eigenvalue and Eigenfunction Asymtoties For Regular Sturm-Liouville Problems, J. Math. Anal. Appl., 188, 297-340

KASIMOV, E.A., (1980), Yüksek Mertebeden Operatör Katsayılı Diferansiyel Operatörlerin Kendine Eşleniği Izv. AN. Kaz. SSR, Ser. fiz-mat. No:1, 37-41

KATO, T., (1980), Perturbation Theory For Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlog

KLEYMAN, E.G., (1977), Normal Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Green Fonksiyonu Üzerine, Vestnik, Mosk. Univ., No:5, 47-53 (R)

KOSTYUCHENKO, A.G. and LEVİTAN, B.M., (1967), Asymtotic Behaviour of The Eigenvalue of The Sturm-Liouville Operator Problem, Funct. Analysis Appl. 1, 75-83 (R)

* R, Kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

LEVİTAN, B.M., (1968), Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, Mat. Sb. 76(118), No:2, 239-270 (R)

LEVİTAN, B.M. and SARGSYAN, I.S., (1991), Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluzeer, Dordrechz

LEVİTAN, B.M. SUVORÇENKOVA G.A., (1968), Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Spektrumunun Ayrıklığı için Yeterli Koşul. Fonkt. Anal. Pril., No:2, 56-62

NİŞNAYEVSKİ, G.A., (1976), Sturm-Lioville Operatör Probleminin Green Fonksiyonu ve Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, Dokl. Akad Nauk SSSR, 203, No:4, 762-765 (R)

NAİMARK, M.A., (1969), Lineer Diferansiyel Operatörler, Nauka, Moskova (R)

OER, Z., (1997), Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Green Fonksiyonu ve Ayrılma Probleminin İncelenmesi, Doktora Tez Çalışması, İstanbul.

OTELBAYEV, M., (1990), Sturm-Liouville Operatörünün Spektrumunun Davranışı, Alma Ata: Bilim. (R)

ROACH, G.F., (1982), Green Functions, Cambridge University Press.

SAITO, J., (1975), Spectral Theory For Second Order Differantial Operators With Long Range Operator Valued Coefficients I Limmiting Absorption Principle Japon J. Math. New. Ser 1, pp 311-349

SAITO, J., (1975), Spectral Theory For Second Order Differantial Operators With Long Range Operator Valued Coefficients II. Eigenfunction Expansions and The Shrödinger Operator with Long-Range Potentials, Japon J. Math. New. Ser 1, pp 351-382

SOLOMYAK, M.Z., (1986), Asymtotics of the Spectrum of the Schrödinger Operator with Nonregular Homogenous Potential, Math, Uss R Sbornik Vol.55, No:1, 19-37

STAKGOLD, I., (1979), Green Functions and Boundary Value Problems, Inter-Science, New York.

TİTCHMARSH, E.C., (1962), "Eigenfunctions Expansions Associated with Second Order Differantial Equations", 2nd ed., Vol.I, Oxford Univ. Press, London

TİTCHMARSH, E.C., (1958), "Eigenfunctions Expansions Associated with Second Order Differantial Equations", 2nd ed., Vol.II, Oxford Univ. Press, London

YOSİDA, K., (1980), Functional Analysis, Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Serpil ÖZTÜRK USLU
Doğum Tarihi	: 10.07.1964
Doğum Yeri	: Çayırlı/Erzincan
İlk Öğretim	: 1971-1976 Gürsel İlkokulu
Orta Öğretim	: 1976-1982 Namık Kemal Ortaokulu 50. Yıl Çağlayan Lisesi
Lisans Öğretimi	: 1984-1988 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğretimi	: 1988-1990 Y.T.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü
Göreve Başlama	: 1989 Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi
Doktora Öğretimi	: 1992- Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü