YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARI EKSENDE ÜÇ ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMDEN OLUŞAN SİSTEM İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Coşkun GÜLER
Mat. Yük. Müh.
F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 11 Ekim 1996
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nizameddin İSKENDEROV (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Metin ARIK (B.Ü.)
: Prof. Dr. Tahir ALİYEV (İ.T.Ü.)

NİVERSİTE YAYIN NO:YTÜ.EN.DR.-97.0328/ENSTİTÜ YAYIN NO:EN.FBE-97.006
LDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIM-YAYIN MERKEZİ / İSTANBUL-1997

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Sayı : **EN.FBE-97.006**

Güler, Çoşkun.
Yarı Eksende Üç Adi Diferansiyel Denklemden Oluşan Sistem İçin Ters Saçılma Problemi / Coşkun Güler.

Kaynakça var.

ISBN 975-461-040-1

Y.T.Ü. Kütüphane ve Dokümantasyon Merkezi Sayı : **YTÜ.EN.DR-97.0328**

Baskı:Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi Matbaası-İstanbul
Tel : (0212) 259 70 70/2252

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın konusunu seçmemde ve her aşamasında değerli bilgi ve birikimlerini esirgemeyen, birlikte çalışmaktan büyük bir zevk aldığım değerli hocam sayın Prof. Dr. Nizameddin İskenderov ' a, Lisans öğrenimimden bu yana her zaman desteğini gördüğüm değerli hocam Bölüm Başkanımız sayın Prof. Tahir Şişman ' a, doktora çalişmalarım süresince yardımlarını esirgemeyen hocalarım sayın Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu ve sayın Doç. Dr. Abdullah Yıldız ' a, tezin yazım aşamasındaki katkılarından dolayı arkadaşlarım Araş. Gör. Reşat Köşker ' e ve Araş. Gör. Dr. Fatih Taşçı ' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca akademik kariyer yapmam için beni yönlendiren değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Behiç Çağal ve Rektörümüz sayın Prof. Dr. Turgut Uzel ' e teşekkür ederim.

Bütün çalişmalarım süresince beni büyük bir sabırla destekleyen eşim Güler Güler'e teşekkür etmeyi de gönülden bir borç bilirim.

ÖZET

Yarı eksende $(x \geq 0)$

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{3} c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x) \quad , \qquad k=1,2,3$$

adi diferansiyel denklemler sistemini gözönüne alalım.

Burada $c_{kj}(x)$ katsayıları, $c_{kk}(x)=0$ ve

$$|c_{kj}(x)| \leq c\exp(-\varepsilon x) \quad , \qquad k, j = 1, 2, 3,$$

şartlarını sağlayan kompleks değerli fonksiyonlardır.

Yukarıdaki denklemler sistemi için verilmiş iki problem birlikte ele alınarak, yarı eksende $S(\lambda)$ matris fonksiyonu, bu matris fonksiyonu ve tersinin elemanlarının yardımıyla ise saçılma verileri tanımlanmıştır.

Tüm eksende tanımlanmış ve $x<0$ olduğunda katsayıların sıfır olması halinde saçılma matrisi ile, saçılma verileri arasında önemli ilişkiler olduğu belirlenmiştir. Çözümün analitik temsilleri kullanılarak, Riemann Probleminin çözülebilirliği şartı dahilinde, verilen denklemler sisteminin katsayılarının, bu verilerin yardımı ile tek türlü tanımlandığı gösterilmiştir.

ABSTRACT

Let us consider the system of differential equations given on a semi-axis

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{3} c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x)\ , \qquad k=1,\ 2,\ 3,$$

where $c_{kj}(x)$'s are complex-valued functions satisfying $c_{kk}(x)=0$ and

$$|c_{kj}(x)|\le c\exp(-\varepsilon x)\ , \qquad k,\ j=1,2,3.$$

Two problems given for the above mentioned equations are considered simultaneously and matrix function $S(\lambda)$ is defined on the semi-axis. It is also scattering data are defined by means of that matrix function and the elements of its inverse.

Relationships between scattering matrix and scattering data are determined when the problem is given on the whole axis and coefficients are zero in case of $x < 0$. By using analytic representation of the solution it is shown that the coefficient of the system of equations is defined uniquely under the solvability condition of Riemann Problem.

BÖLÜM I. GİRİŞ

"Spektral analizin ve saçılma teorisinin ters problemleri" denildiğinde, spektral özelliklere ve saçılma verilerine göre, lineer operatörün bulunması anlaşılır. Nonlineer denklemlerin ters problemlerle yoğun ilişkisi öğrenildikten sonra, ters problemlere olan ilgi daha da artmıştır.

Bu tür denklemlere Korteweg-de Vries, Nonlineer Schrödinger, Sin-Gordon vs. nonlineer denklemlerini örnek olarak gösterebiliriz.

1967 yılında Gardner G., Green J., Kruskal M., Miura R., tüm eksende verilmiş lineer Sturm-Liouville

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad ,$$

denkleminin yardımı ile

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad ,$$

nonlineer Korteweg-de Vries denklemi için çözüm yöntemi geliştirmiştir (Gardner et.al, 1967). Bu yönteme literatürde "ters saçılma" veya "solitonlar yöntemi" denir.

Fourier yöntemi lineer diferansiyel denklemler için ne kadar önemli ise, "ters saçılma" yönteminin de nonlineer denklemler için o kadar önemli olduğunu söylemek mümkündür.

Son yıllarda "ters saçılma" yönteminin, Korteweg-de Vries denklemlerine uygulanmasının tesadüf olmadığı gösterilmiştir.

Zakharov ve Shabat 1971 yılında "ters saçılma" yöntemini

$$iq_t = q_{xx} + \chi q\,|q|^2 \qquad \chi > 0 \ ,$$

Shöridinger denklemine uygulamıştır (Zakharov et.al, 1971). Burada yardımcı lineer denklem olarak Dirak denklemler sistemi

$$B\frac{dy(x,\lambda)}{dx} + \Omega(x)y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda) \ ,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}, \ \Omega(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x) \\ Q(x) & -P(x) \end{pmatrix}$$

gözönüne alınmıştır.

M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newel ve H. Segur ise aynı Dirak denklemler sistemi ' nin yardımıyla ters saçılma yöntemini

$$u_{xt} = \sin u$$

Sin-Gordon denklemine uygulamıştır (Ablowitz et.al, 1973).

Sturm-Liouville operatörü için spektral verilere göre ters problem, sistematik olarak ilk defa Borg G. (1946) tarafindan öğrenilmiştir. Borg G., Sturm-Liouville operatörü için genellikle bir spektruma göre operatörün tanımlanamadığını ispatlamıştır. Borg G., Sturm-Liouville operatörünün iki spektrumu için (farklı sınır şartları için) operatörün tek türlü tanımlandığını göstermiştir . Borg G. aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem : $q(x)$ sürekli fonksiyon olsun. $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ sayıları ile,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (0 \le x \le \pi) \ , \tag{1.1}$$

denkleminin,

$$y'(0) - hy(0) = 0 \ ,$$
$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır şartları için özdeğerlerini; $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ sayılarıyla ise, (1.1) denkleminin,

$$y'(0) - hy(0) = 0 \ ,$$
$$y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0$$

sınır şartları için özdeğerlerini gösterelim. Burada h, H, H_1 reel sonlu sayılar ve H_1 sayısı H ' dan farklıdır.

O zaman $\{\lambda_m\}_0^\infty$ ve $\{\mu_n\}_0^\infty$ dizileri q(x) katsayısını ve h, H, H_1 sayılarını tek türlü tanımlamaktadır.

G. Borg ' un bu önemli sonuçlarından sonra ters problemler teorisinde Levinson (1949,1953) çok önemli araştırmalar yapmıştır. Levinson ' un ilk çalışmaları G. Borg ' un verdiği ispatların daha da basitleştirilmesi, sonraki çalışmaları ise "ters kuantum saçılma teorisi" ile ilgili olmuştur.

Ters saçılma problemlerinde Sturm-Liouville denklemi ile ilgili yapılan daha sonraki önemli çalışmalar L.A. Cudov (1949), V.A. Marchenko (1977), M.G. Kreyn (1951), J.M. Berezanskii (1958), H.M. Gelfand ve B.M. Levitan (1951), L.D. Faddaev (1964), P. Deift ve E. Trubovitz (1979) ve başka ünlü matematikçiler tarafından yapılmıştır.

1973 yılında Zakharov V.E. ve Manakov S.V. üç denklemden oluşan birinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklemler sistemi ile

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^{3} c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x) \ , \qquad k=1,2,3 \qquad (1.2)$$

nonlineer yansıyan ve birbirini etkilemeyen üç dalga,

$$Q_{1t} + c_1 Q_{1x} = i\gamma_1 Q_2^* Q_3^* \ ,$$

$$Q_{2t} + c_2 Q_{2x} = i\gamma_2 Q_1^* Q_3^* \ ,$$

$$Q_{3t} + c_3 Q_{3x} = i\gamma_3 Q_1^* Q_2^* \ ,$$

denklemi arasında yoğun ilişki olduğunu göstermiştir (Zakharov et.al, 1973).
(Burada $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -1$ *ve* $\gamma_i = \pm 1$ *dir.*)

Dirak sistemi ve birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemi için spektral analizin ve saçılma teorisinin ters problemleri M.G. Gasymov (1966, 1968), L.P. Nizhnik (1974), A.B. Shabat (1980), D.J. Kaup (1976), R.Beals ve R.R. Coufman (1984), P.J. Coudrey (1983) vs. tarafından, birinci mertebeden olan nonstasyoner hiperbolik denklemler sistemi için ise bütün eksende ve yarı eksende düz ve ters saçılma problemleri L.P. Nizhnik (1973, 1974, 1988), G. Anger (1990), L.P. Nizhnik ve V.G. Tarasov (1977, 1981), L. P. Nizhnik ve N.Ş . İskenderov (1990), N.Ş. İskenderov (1985, 1988) vs. tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmadaki amacımız (1.2) denklemler sistemi için yarı eksende $(x \geq 0)$ düz ve ters saçılma problemini incelemektir. (1.2) denklemler sistemi için yarı eksendeki problem, $x < 0$ olduğunda katsayıları sıfır olan tüm eksendeki probleme getirilir. Onun için çalışmamızın ikinci bölümü olan bütün eksende saçılma problemi temel sonuçları içeren üçüncü bölüm için, yardımcı bir rol oynamaktadır. Burada katsayıların $x < 0$ olduğunda sıfır olması, genel haldekinden farklı olarak tüm eksendeki S fonksiyonu ve bu fonksiyonun daha çok elemanlarının iyi özelliklere sahip olmasını sağlamaktadır. Bu özellikler, yarı eksendeki ters saçılma problemi ile, tüm eksendeki ters saçılma problemi arasında yoğun ilişki kurmaya imkan vermektedir. Bundan dolayı, yarı eksende ters problemin öğrenilmesinde analitik fonksiyonlar için Riemann problemi çok önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle, tezin ek kısmında Riemann probleminin öğrenilmesine de yer verilmiştir.

BÖLÜM II. BÜTÜN EKSENDE SAÇILMA PROBLEMİ

2.1. Düz saçılma problemi

Bu bölümde birinci mertebeden olan aşağıdaki üç adi diferansiyel denklemler sistemi için

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{3}c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x)\ ,\ k=1,2,3 \qquad -\infty<x<\infty \tag{2.1}$$

bütün eksende saçılma problemi incelenmiştir. Burada kompleks değerli $c_{kj}(x)$ fonksiyonları $c_{kk}(x)=0 \quad (k=1,2,3)$ ve

$$|c_{kj}(x)|\le c\exp(-\varepsilon|x|)\ ,\ k,j=1,2,3\ ,\ \varepsilon>0 \qquad (\varepsilon \textit{ ve } c \textit{ sabitlerdir}) \tag{2.2}$$

şartını sağlıyorlar. λ spektral parametre, ξ_1,ξ_2,ξ_3 ' ler ise, $\xi_1>\xi_2>0>\xi_3$ şartını sağlayan sabitlerdir.

İleride (2.1) sistemi için yarı eksende öğreneceğimiz ters saçılma problemini $x<0$ olduğunda

$$c_{kj}(x)=0\ ,\ k,j=1,2,3 \tag{2.3}$$

hali için bütün eksendeki probleme indirgeyeceğimizden aşağıda (2.1) sistemi için her zaman sadece bu hali gözönüne alacağız. O zaman (2.2) şartı yerine

$$|c_{kj}(x)|\le c\exp(-\varepsilon x), \qquad x>0 \tag{2.2$'$}$$

yazabiliriz.

Denklemin katsayıları keyfi $x\in(-\infty,\infty)$ için sıfır olduğunda (2.1) sistemi

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}=\lambda\xi_k y_k(x) \quad k=1,2,3$$

şekline gelir. Bu denklemler sisteminin genel çözümü

$$y_1(x) = c_1 \exp(i\xi_1\lambda x) \ ,$$

$$y_2(x) = c_2 \exp(i\xi_2\lambda x) \ , \qquad (2.4)$$

$$y_3(x) = c_3 \exp(\xi_3\lambda x) \ ,$$

olur. Burada c_1, c_2, c_3 ' ler x ' den bağımsız sabitlerdir. (2.3) ' e göre $x < 0$ olduğunda (özel halde $x \to -\infty$ için) (2.1) sisteminin çözümü

$$y_1(x) = y_1(0) \exp(i\xi_1\lambda x) \ ,$$

$$y_2(x) = y_2(0) \exp(i\xi_2\lambda x) \ , \qquad (2.5)$$

$$y_3(x) = y_3(0) \exp(i\xi_3\lambda x) \ ,$$

şeklindedir. Denklemin katsayıları (2.2) şartını sağladığından $x \to +\infty$ halinde de denklemler sisteminin çözümünün (2.4) çözümüne yakın olduğunu beklemek mümkündür . Başka bir deyişle aşağıdaki lemma doğrudur .

Lemma 2.1 . $c_{kj}(x)$ $(k,j = 1,2,3)$ katsayılarının (2.2) şartını sağladığını farzedelim . O zaman λ reel olduğunda keyfi sınırlı $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ çözümü aşağıdaki asimptota,

$$y_1(x) = A_1 \exp(i\xi_1\lambda x) + o(1) \ ,$$

$$y_2(x) = A_2 \exp(i\xi_2\lambda x) + o(1 \ , \qquad x \to +\infty \qquad (2.6)$$

$$y_3(x) = B \exp(i\xi_3\lambda x) + o(1 \ ,$$

sahip olur.

İspat . Aşağıdaki yardımcı fonksiyonlara

$$v_k(x) = y_k(x) - i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x')y_j(x')\exp(i\xi_k\lambda(x-x'))dx' \quad , \qquad k=1,2,3. \tag{2.7}$$

bakalım. Kolayca görüldüğü gibi

$$v_k'(x) = i\lambda\xi_k v_k(x) \quad , \qquad k=1,2,3,$$

olur. Buradan anlaşıldığı gibi, x ' den bağımsız öyle A_1, A_2, B sabitleri vardır ki, bu denklemler sisteminin çözümü

$$v_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) \quad ,$$

$$v_2(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) \quad ,$$

$$v_3(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) \quad ,$$

şeklindedir.

Bu çözümleri (2.7) ' de yerine yazarsak,

$$y_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx' \quad ,$$

$$y_2(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_2\lambda(x-x'))dx' \quad , \tag{2.8}$$

$$y_3(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' \quad ,$$

integral denklemler sistemi elde edilir.

Bu integral denklemler sisteminin çözümünün varlığı ve tekliğini ispatlayalım.

(2.8) integral denklemler sistemini aşağıdaki şekilde düzenleyip

$$y_1(x)\exp(-i\xi_1\lambda x) = A_1 + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{1j}(x')y_j(x')\exp(-i\xi_1\lambda x')dx'$$

$$y_2(x)\exp(-i\xi_2\lambda x) = A_2 + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{2j}(x')y_j(x')\exp(-i\xi_2\lambda x')dx' \ ,$$

$$y_3(x)\exp(-i\xi_3\lambda x) = B + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{3j}(x')y_j(x')\exp(-i\xi_3\lambda x')dx' \ ,$$

ve

$$z_1(x) = y_1(x)\exp(-i\xi_1\lambda x), \qquad z_2(x) = y_2(x)\exp(-i\xi_2\lambda x), \qquad z_3(x) = y_3(x)\exp(-i\xi_3\lambda x)$$

dönüşümlerini yaparsak

$$z_1(x) = A_1 + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{1j}(x')\,z_j(x')\exp(i\lambda(\xi_j - \xi_1)x')dx' \ ,$$

$$z_2(x) = A_2 + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{2j}(x')\,z_j(x')\exp(i\lambda(\xi_j - \xi_2)x')dx' \ ,$$

$$z_3(x) = B + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{3j}(x')\,z_j(x')\exp(i\lambda(\xi_j - \xi_3)x')dx' \ ,$$

olur. Bu denklemin $z(x)=\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix}$ çözümünü ardışık tekrar yönteminin yardımıyla

$$z(x)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(x) \tag{2.9}$$

şeklinde arayalım. Burada

$$z^{(k)}(x)=\begin{pmatrix} z_1^{(k)}(x) \\ z_2^{(k)}(x) \\ z_3^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \qquad z^{(0)}(x)=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{pmatrix},$$

$$z^{(k)}=i\int_x^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & c_{12}\exp(i\lambda(\xi_2-\xi_1)x') & c_{13}\exp(i\lambda(\xi_3-\xi_1)x') \\ c_{21}\exp(i\lambda(\xi_1-\xi_2)x') & 0 & c_{23}\exp(i\lambda(\xi_3-\xi_2)x') \\ c_{31}\exp(i\lambda(\xi_1-\xi_3)x') & c_{32}\exp(i\lambda(\xi_2-\xi_3)x') & 0 \end{pmatrix} z^{(k-1)}dx'$$

k=1, 2, 3 (2.10)

dir.

(2.9) serisinin yakınsaklığını göstermek için $\sum_{k=0}^{\infty}\left|z_j^{(k)}(x)\right|$ serisinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir.

$$z_1^{(0)}(x)=A_1 ,$$

$$z_2^{(0)}(x)=A_2 ,$$

$$z_3^{(0)}(x)=B ,$$

$$\max(|A_1|, |A_2|, |B|)=A ,$$

olsun. O zaman (2.10) ' a göre,

$$z_j^{(k)}(x)=i\int_x^{\infty}\sum_{l=1}^{3}c_{jl}(x')\exp(i\lambda(\xi_l-\xi_j)x')z^{(k-1)}(x')dx' \qquad (j=1,2,3)$$

dir. (2.2) şartına göre, $(j=1,2,3)$

$$\left|z_j^{(1)}(x)\right|\le 2Ac\int_x^{\infty}\exp(-\varepsilon x')dx'=\frac{2Ac}{\varepsilon}\exp(-\varepsilon x) \quad ,$$

$$\left|z_j^{(2)}(x)\right|\le\int_x^{\infty}\frac{2Ac}{\varepsilon}\exp(-\varepsilon x')2c\exp(-\varepsilon x')dx'=\frac{2^2Ac^2}{\varepsilon}\frac{\exp(-2\varepsilon x)}{2\varepsilon}=A(\frac{2c}{\varepsilon})^2\frac{1}{2!}\exp(-2\varepsilon x) \quad ,$$

$$\left|z_j^{(3)}(x)\right|\le\int_x^{\infty}\frac{2^2Ac^2}{2\varepsilon^2}\exp(-2\varepsilon x')2c\exp(-\varepsilon x')dx'=\frac{2^3Ac^3}{2.3.\varepsilon^3}\exp(-3\varepsilon x)$$

$$=A(\frac{2c}{\varepsilon})^3\frac{1}{3!}\exp(-3\varepsilon x)$$

olur. Tümevarım yöntemi ile $\forall k>3$ için,

$$\left|z_j^{(k)}(x)\right|\le A(\frac{2c}{\varepsilon})^k\frac{1}{k!}\exp(-k\varepsilon x)$$

olduğunu gösterebiliriz.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2c}{\varepsilon})^k\frac{1}{k!}\exp(-k\varepsilon x)$$

majorant serisi $\forall x\ge 0$ için yakınsak olduğundan (2.9) serisi de düzgün yakınsaktır.

Çözüm sınırlı fonksiyonlar sınıfinda arandığından dolayı, öyle M sabiti vardır ki,

$$|y_k(x)| \leq M \qquad (k=1,2,3)$$

dır. O zaman, (2.2) şartını ve λ 'nın reel olduğunu gözönüne alarak büyük pozitif x ' ler için (2.8) ' den

$$|y_1(x) - A_1 \exp(i\xi_1\lambda x)| = \left| i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx'\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{3}\int_x^{\infty} |c_{1j}(x')||y_j(x')||\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))|dx' \leq M\sum_{j=1}^{3}\int_x^{\infty}|c_{1j}(x')|dx'$$

$$\leq Mc\sum_{j=1}^{3}\int_x^{\infty}\exp(-\varepsilon x')dx' = \frac{3Mc}{\varepsilon}\exp(-\varepsilon x)$$

elde edilir. Buradan, $\varepsilon > 0$ olduğundan $x \to +\infty$ için

$$y_1(x) - A_1\exp(i\xi_1\lambda x) \to 0$$

olur. Yani,

$$y_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + o(1), \qquad x \to +\infty ,$$

asimptotu doğrudur.

Benzer olarak (2.8) denklemler sisteminin ikinci ve üçüncü eşitliğinden (2.6) ' nın diğer eşitliklerini de ispatlayabiliriz.

Tanım : (2.1) denklemler sisteminin $x \to +\infty$ daki çözümünü $x \to -\infty$ daki çözümüne dönüştüren matris fonksiyona bütün eksende saçılma matrisi denir.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi verilen başlangıç $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ Cauchy verilerine göre (2.1) denklemler sisteminin çözümü var ve bu çözüm tektir. Lemma 2.1 ' e göre ise her bir çözüm için (2.6) asimptotik formülü doğrudur.

(2.1) denklemler sisteminin katsayıları (2.2) şartını sağladığından, bu halde bütün eksende saçılma matrisi

$$(A_1\exp(i\xi_1\lambda x), A_2\exp(i\xi_2\lambda x), B\exp(i\xi_3\lambda x))^T =$$

$$diag(\exp(i\xi_1\lambda x), \exp(i\xi_2\lambda x), \exp(i\xi_3\lambda x))(A_1, A_2, B)^T$$

vektörünü,

$$(y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x), y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x), y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x))^T =$$

$$diag(\exp(i\xi_1\lambda x), \exp(i\xi_2\lambda x), \exp(i\xi_3\lambda x))(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T$$

vektörüne dönüştüren bir matris olur. Bu matrisi $S^{\prime}_1$ ile gösterirsek

$$S^{\prime}_1 \begin{pmatrix} A_1\exp(i\xi_1\lambda x) \\ A_2\exp(i\xi_2\lambda x) \\ B\exp(i\xi_3\lambda x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x) \\ y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x) \\ y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x) \end{pmatrix}$$

veya

$$S^{\prime}_1 \begin{pmatrix} \exp(i\xi_1\lambda x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\xi_2\lambda x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\xi_3\lambda x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \exp(i\xi_1\lambda x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\xi_2\lambda x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\xi_3\lambda x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise

$$\begin{pmatrix} \exp(-i\xi_1\lambda x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\xi_2\lambda x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\xi_3\lambda x) \end{pmatrix} S^{f_1} \begin{pmatrix} \exp(i\xi_1\lambda x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\xi_2\lambda x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\xi_3\lambda x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) ' de x=0 yazılırsa, S^{f_1} saçılma matris fonksiyonunun,

$(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T$ vektörünü $(A_1, A_2, B)^T$ vektörüne dönüştürdüğü görülür.

2.2. Çözümün integral temsilleri

(2.1) sisteminin çözümünün integral temsili denildiğinde homojen denklemin $(c_{kj}(x) = 0\ ,\ k,j = 1,2,3)$ çözümünü homojen olmayan denklemin çözümüne dönüştüren ve sonsuzluktaki asimptotları homojen denklemin çözümü ile aynı olan matris fonksiyonlar anlaşılır. Bu integral temsilleri, homojen denklemin çözümü olan aşağıdaki altı vektörü

$$h^1(x,\lambda) = (y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x),\ y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x),\ y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x))\ ,$$

$$h^2(x,\lambda) = (A_1 \exp(\ \xi_1\lambda x),\quad y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x),\ y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x))\ ,$$

$$h^3(x,\lambda) = (A_1 \exp(i\xi_1\lambda x),\quad A_2 \exp(i\xi_2\lambda x),\quad y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x))\ ,$$

$$h^4(x,\lambda) = (A_1 \exp(i\xi_1\lambda x),\quad A_2 \exp(i\xi_2\lambda x),\quad B\exp(i\xi_3\lambda x))\ ,$$

$$h^5(x,\lambda) = (y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x),\ A_2\exp(i\xi_2\lambda x),\quad B\exp(i\xi_3\lambda x))$$
$$h^6(x,\lambda) = (y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x),\ y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x),\ B\exp(i\xi_3\lambda x)) \tag{2.12}$$

(2.1) sisteminin çözümüne dönüştürür.

Yukarıda görüldüğü gibi,

$$h^4(x,\lambda) = (A_1\exp(i\xi_1\lambda x),\ A_2\exp(i\xi_2\lambda x),\ B\exp(i\xi_3\lambda x))$$

asimptotuna ($x \to \infty$ için sınır şartına) sahip olan çözüm (2.8) denklemini sağlıyor. Buna benzer olarak, $h^1(x,\lambda)$, $h^2(x,\lambda)$, $h^3(x,\lambda)$, $h^5(x,\lambda)$, $h^6(x,\lambda)$ sınır şartlarına sahip çözümlerin sağladığı integral denklemler sistemlerini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$h^1(x,\lambda)$ için,

$$y_1(x) = y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x) - i\int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_2(x) = y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x) - i\int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_2\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_3(x) = y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x) - i\int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' ,$$

$h^2(x,\lambda)$ için,

$$y_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_2(x) = y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x) - i\int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_2\lambda(x-x'))dx'$$

$$y_3(x) = y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x) - i\int_0^x \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' ,$$

$h^3(x,\lambda)$ için,

$$y_1(x)=A_1\exp(i\xi_1\lambda x)+i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3}c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_2(x)=A_2\exp(i\xi_2\lambda x)+i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3}c_{2j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_2\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_3(x)=y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x)-i\int_0^{x}\sum_{j=1}^{3}c_{3j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' ,$$

$h^5(x,\lambda)$ için,

$$y_1(x)=y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x)-i\int_0^{x}\sum_{j=1}^{3}c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_2(x)=A_2\exp(i\xi_2\lambda x)+i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3}c_{2j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_2\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_3(x)=B\exp(i\xi_3\lambda x)+i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3}c_{3j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' ,$$

$h^6(x,\lambda)$ için,

$$y_1(x)=y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x)-i\int_0^{x}\sum_{j=1}^{3}c_{1j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_1\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_2(x)=y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x)-i\int_0^{x}\sum_{j=1}^{3}c_{2j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_2\lambda(x-x'))dx' ,$$

$$y_3(x)=B\exp(i\xi_3\lambda x)+i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3}c_{3j}(x')y_j(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' .$$

Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.2. (2.1) denklemler sisteminin $c_{kj}(x)$ $(k, j = 1,2,3)$ katsayılarının (2.2) ve (2.3) şartlarını sağladıklarını farzedelim. O zaman, $Im\lambda = 0$ olduğunda (2.12) deki herbir vektör için (2.1) sisteminin tek bir sınırlı çözümü var ve bu çözümler aşağıdaki şekilde gösterilen integral temsillere sahiptirler.

1. tip integral temsili

$$y_1(x) = y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x) + y_1(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{11}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + y_2(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{12}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{13}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_2(x) = y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x) + y_1(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{21}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + y_2(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{22}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{23}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \qquad (2.13)$$

$$y_3(x) = y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x) + y_1(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{31}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + y_2(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{32}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{33}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

2. tip integral temsili

$$y_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + A_1\int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{11}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + y_2(0)\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{12}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{13}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_2(x) = y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x) + A_1\int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{21}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + y_2(0)\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{22}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad (2.14)$$

$$+y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{23}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_3(x) = y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x) + A_1\int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{31}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + y_2(0)\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{32}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{33}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ .$$

3. tip integral temsili

$$y_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + A_1\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{12}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{13}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_2(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + A_1\int_{-\infty}^{\infty} R_{21}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{22}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad (2.15)$$

$$+y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{23}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_3(x) = y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x) + A_1\int_{-\infty}^{\infty} R_{31}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{32}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{33}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

4. tip integral temsili

$$y_1(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{11}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{13}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_2(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{21}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{-\infty}^{\infty} R_{22}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{23}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \qquad (2.16)$$

$$y_3(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{31}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{-\infty}^{\infty} R_{32}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{33}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

5. tip integral temsili

$$y_1(x) = y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x) + y_1(0)\int_{\xi_1 x}^{\infty} R_{11}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{\xi_2 x}^{\infty} R_{12}^5(x,\tau)\exp(i\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\infty} R_{13}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_2(x)=A_2\exp(i\xi_2\lambda x)+y_1(0)\int_{\xi_1 x}^{\infty}R_{21}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+A_2\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{22}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\infty}R_{23}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{2.17}$$

$$y_3(x)=B\exp(i\xi_3\lambda x)+y_1(0)\int_{\xi_1 x}^{\infty}R_{31}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+A_2\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{32}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\infty}R_{33}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ ,$$

6. tip integral temsili

$$y_1(x)=y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x)+y_1(0)\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{11}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+y_2(0)\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{12}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{\xi_3 x}^{\infty}R_{13}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ ,$$

$$y_2(x)=y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x)+y_1(0)\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{21}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+y_2(0)\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{22}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{\xi_3 x}^{\infty}R_{23}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{2.18}$$

$$y_3(x)=B\exp(i\xi_3\lambda x)+y_1(0)\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{31}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+y_2(0)\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{32}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{\xi_3 x}^{\infty}R_{33}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ .$$

Burada integral temsillerin çekirdekleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlamaktadır.

$$\left|R_{k3}^{4}(x,\tau)\right| \le N\exp(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}) \qquad \tau \le \xi_3 x \quad ,$$

k=1,2,3

$$\left|R_{k1}^{4}(x,\tau)\right| \le N\exp(-\varepsilon\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3}) \qquad \tau \ge \xi_1 x \quad ,$$

Üstelik bunlar (2.1) denklemler sisteminin katsayılarıyla aşağıdaki şekilde ilişkilidir.

$$R_{13}^{1}(x,\xi_3 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(x) \ , \quad R_{21}^{1}(x,\xi_1 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}(x) \ ,$$

$$R_{23}^{1}(x,\xi_3 x) = -\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(x) \ , \quad R_{31}^{1}(x,\xi_1 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(x) \ ,$$

$$R_{12}^{2}(x,\xi_2 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}(x) \ , \quad R_{21}^{2}(x,\xi_1 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}(x) \ ,$$

$$R_{31}^{2}(x,\xi_1 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(x) \ , \quad R_{32}^{2}(x,\xi_2 x) = -\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}(x) \ , \tag{2.19}$$

$$R_{12}^{3}(x,\xi_2 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}(x) \ , \quad R_{13}^{3}(x,\xi_3 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(x) \ ,$$

$$R_{23}^{3}(x,\xi_3 x) = \frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(x) \ , \quad R_{32}^{3}(x,\xi_2 x) = -\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}(x) \ ,$$

$$R_{21}^{4}(x,\xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}(x) \ , \quad R_{31}^{4}(x,\xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(x) \ ,$$

$$R_{13}^{4}(x,\xi_3 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(x) \ , \quad R_{23}^{4}(x,\xi_3 x) = \frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(x) \ ,$$

$$R_{21}^{5}(x,\xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}(x) \ , \quad R_{31}^{5}(x,\xi_1 x) = \frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(x) \ ,$$

$$R^5_{12}(x,\xi_2 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}(x)\ , \qquad R^5_{32}(x,\xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}(x)\ ,$$

$$R^6_{12}(x,\xi_2 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}(x)\ , \qquad R^6_{32}(x,\xi_2 x) = \frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}(x)\ ,$$

$$R^6_{13}(x,\xi_3 x) = -\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(x)\ , \qquad R^6_{23}(x,\xi_3 x) = -\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(x)$$

İspat . Örneğin 4. tip integral temsili için lemmanın ispatını verelim. İspatı vermeden önce çözümün ne için (2.16) şeklinde arandığını anlamaya çalışalım.

(2.1) denklemler sisteminin $x \to +\infty$ daki asimptotu

$h^4(x,\lambda) = (A_1\exp(i\xi_1\lambda x),\ A_2\exp(i\xi_2\lambda x),\ B\exp(i\xi_3\lambda x))$ olan çözümünün aranması, (2.8) integral denklemler sisteminin çözümünün aranmasına eşdeğerdir.

(2.8) ' in yardımıyla alınan ikinci

$$y_1^{(2)}(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{1j}(x')y_j^{(1)}(x')\exp[i\xi_1\lambda(x-x')]dx'\ ,$$

$$y_2^{(2)}(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{2j}(x')y_j^{(1)}(x')\exp[i\xi_2\lambda(x-x')]dx'\ ,$$

$$y_3^{(2)}(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x')y_j^{(1)}(x')\exp[i\xi_3\lambda(x-x')]dx'\ ,$$

yaklaşımında,

$$y_1^{(1)}(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x)\ ,$$

$$y_2^{(1)}(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x)\ ,$$

$$y_3^{(1)}(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) \quad ,$$

birinci yaklaşımını gözönüne alırsak,

$$y_1^{(2)}(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + i\int_x^\infty c_{12}(x')A_2\exp(i\xi_2\lambda x')\exp[i\xi_1\lambda(x-x')]dx'$$

$$+i\int_x^\infty c_{13}(x')B\exp(i\xi_3\lambda x')\exp[i\xi_1\lambda(x-x')]dx' \ ,$$

$$y_2^{(2)}(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + i\int_x^\infty c_{21}(x')A_1\exp(i\xi_1\lambda x')\exp[i\xi_2\lambda(x-x')]dx'$$

$$+i\int_x^\infty c_{23}(x')B\exp(i\xi_3\lambda x')\exp[i\xi_2\lambda(x-x')]dx' \ ,$$

$$y_3^{(2)}(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) + i\int_x^\infty c_{31}(x')A_1\exp(i\xi_1\lambda x')\exp[i\xi_3\lambda(x-x')]dx'$$

$$+i\int_x^\infty c_{32}(x')A_2\exp(i\xi_2\lambda x')\exp[i\xi_3\lambda(x-x')]dx' \ ,$$

olur. İfadeleri düzenlersek

$$y_1^{(2)}(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + A_2\int_{-\infty}^{\xi_2 x}\tfrac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}\left(\tfrac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_2}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}\tfrac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}\left(\tfrac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$y_2^{(2)}(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}\tfrac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}\left(\tfrac{\tau-\xi_2 x}{\xi_1-\xi_2}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}\tfrac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}\left(\tfrac{\xi_2 x-\tau}{\xi_2-\xi_3}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$y_3^{(2)}(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}\left(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau + A_2\int_{\xi_2 x}^{\infty}\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}\left(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_2-\xi_3}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

olacaktır. Buradan

$$y_1^{(2)}(x) = A_1\exp(i\xi_1\lambda x) + A_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}\left(\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_2}\right)H(\xi_2 x-\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}\left(\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_2}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau \;,$$

$$y_2^{(2)}(x) = A_2\exp(i\xi_2\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}\left(\frac{\tau-\xi_2 x}{\xi_1-\xi_2}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}\left(\frac{\xi_2 x-\tau}{\xi_2-\xi_3}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$y_3^{(2)}(x) = B\exp(i\xi_3\lambda x) + A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}\left(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3}\right)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+A_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}\left(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_2-\xi_3}\right)H(\tau-\xi_2 x)\exp(i\lambda\tau)d\tau \;,$$

olur. Burada;

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

Heaviside fonksiyonudur.

$$K_{12}^{(2)}(x,\tau) = \frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{12}\left(\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_2}\right)H(\xi_2 x-\tau) \;,$$

$$K_{13}^{(2)}(x,\tau) = \frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}\left(\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}\right) \;,$$

$$K_{21}^{(2)}(x,\tau)=\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}(\frac{\tau-\xi_2 x}{\xi_1-\xi_2}) \quad ,$$

$$K_{23}^{(2)}(x,\tau)=\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(\frac{\xi_2 x-\tau}{\xi_2-\xi_3}) \quad ,$$

$$K_{31}^{(2)}(x,\tau)=\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3}) \quad ,$$

$$K_{32}^{(2)}(x,\tau)=\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{32}(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_2-\xi_3})H(\tau-\xi_2 x) \quad ,$$

ile gösterirsek,

$$y_1^{(2)}(x)=A_1\exp(i\xi_1\lambda x)+A_2\int_{-\infty}^{\infty}K_{12}^{(2)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}K_{13}^{(2)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad ,$$

$$y_2^{(2)}(x)=A_2\exp(i\xi_2\lambda x)+A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}K_{21}^{(2)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}K_{23}^{(2)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad ,$$

$$y_3^{(2)}(x)=B\exp(i\xi_3\lambda x)+A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}K_{31}^{(2)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+A_2\int_{-\infty}^{\infty}K_{32}^{(2)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad ,$$

olacaktır. Çözümün üçüncü yaklaşımını yazarsak

$$y_1^{(3)}(x)=A_1\exp(i\xi_1\lambda x)+A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}K_{11}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+A_2\int_{-\infty}^{\infty}K_{12}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}K_{13}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad ,$$

$$y_2^{(3)}(x)=A_2\exp(i\xi_2\lambda x)+A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}K_{21}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+A_2\int_{-\infty}^{\infty}K_{22}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}K_{23}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ ,$$

$$y_3^{(3)}(x)=B\exp(i\xi_3\lambda x)+A_1\int_{\xi_1 x}^{\infty}K_{31}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+A_2\int_{-\infty}^{\infty}K_{32}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+B\int_{-\infty}^{\xi_3 x}K_{33}^{(3)}(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ ,$$

olduğu görülür.

Çözümün ikinci ve üçüncü yaklaşımı için aldığımız ifadeler, bizi çözümün (2.16) şeklinde aranabileceği düşüncesine getirir.

Şimdi de Lemma 2.2 yi 4. tip integral temsili için ispatlayalım.

(2.16) integral temsilini (2.8) integral denklemler sisteminde yerine yazıp, A_1, A_2, B sabitlerinin keyfi olduklarını gözönüne alırsak , $R_{kj}^4(x,\tau)$ (k,j=1, 2, 3 için) fonksiyonları için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz.

$\xi_1 x \le \tau < \infty$ için,

$$R_{11}^4(x,\tau)-i\int_x^{\infty}R_{21}^4(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{12}(x')dx'-i\int_x^{\infty}R_{31}^4(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{13}(x')dx'=0$$

$$R_{21}^4(x,\tau)-\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}\left(\frac{\tau-\xi_2 x}{\xi_1-\xi_2}\right)-i\int_x^{\frac{\tau-\xi_2 x}{\xi_1-\xi_2}}R_{11}^4(x',\tau-\xi_2 x+\xi_2 x')c_{21}(x')dx'$$

$$-i\int_x^{\frac{\tau-\xi_2 x}{\xi_1-\xi_2}}R_{31}^4(x',\tau-\xi_2 x+\xi_2 x')c_{23}(x')dx'=0\ ,$$

$$R_{31}^4(x,\tau)-\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3})-i\int_x^{\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3}} R_{11}^4(x',\tau-\xi_3 x+\xi_3 x')c_{31}(x')dx' \tag{2.20}$$

$$-i\int_x^{\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_1-\xi_3}} R_{21}^4(x',\tau-\xi_3 x+\xi_3 x')c_{32}(x')dx'=0 \quad .$$

$-\infty<\tau<\infty$ için ,

$$R_{12}^4(x,\tau)-\frac{i}{\xi_1-\xi_2}H(\xi_2 x-\tau)c_{21}(\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_2})-i\int_x^{\infty} R_{22}^4(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{12}(x')dx'$$

$$-i\int_x^{\infty} R_{32}^4(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{13}(x')dx'=0 \quad ,$$

$$R_{22}^4(x,\tau)-i\int_x^{\infty} R_{12}^4(x',\tau-\xi_2 x+\xi_2 x')c_{21}(x')dx'-i\int_x^{\infty} R_{32}^4(x',\tau-\xi_2 x+\xi_2 x')c_{23}(x')dx'=0$$

$$R_{32}^4(x,\tau)-\frac{i}{\xi_2-\xi_3}H(\tau-\xi_2 x)c_{32}(\frac{\tau-\xi_3 x}{\xi_2-\xi_3})-i\int_x^{\infty} R_{12}^4(x',\tau-\xi_3 x+\xi_3 x')c_{31}(x')dx'$$

$$-i\int_x^{\infty} R_{22}^4(x',\tau-\xi_3 x+\xi_3 x')c_{32}(x')dx'=0 \quad .$$

$-\infty<\tau\leq\xi_3 x$ için,

$$R_{13}^4(x,\tau)-\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3})-i\int_x^{\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}} R_{23}^4(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{12}(x')dx'$$

$$-i\int_x^{\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}} R_{33}^4(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{13}(x')dx=0 \quad ,$$

$$R_{23}^4(x,\tau)-\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(\frac{\xi_2x-\tau}{\xi_2-\xi_3})-i\int\limits_x^{\frac{\xi_2x-\tau}{\xi_2-\xi_3}}R_{13}^4(x',\tau-\xi_2x+\xi_2x')c_{21}(x')dx'$$

$$-i\int\limits_x^{\frac{\xi_2x-\tau}{\xi_2-\xi_3}}R_{33}^4(x',\tau-\xi_2x+\xi_2x')c_{23}(x')dx'=0 \quad , \qquad (2.21)$$

$$R_{33}^4(x,\tau)-i\int\limits_x^0 R_{13}^4(x',\tau-\xi_3x+\xi_3x')c_{31}(x')dx'-i\int\limits_x^\infty R_{23}^4(x',\tau-\xi_3x+\xi_3x')c_{32}(x')dx'=0$$

Bu integral denklemler sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği ardışık yaklaşım yönteminin yardımıyla ispatlanır. Örneğin (2.21) ' i ispatlayalım.

$\tau\le\xi_3x$ için,

$$R_{13}^{4(0)}(x,\tau)=\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(\frac{\xi_1x-\tau}{\xi_1-\xi_3}) \quad ,$$

$$R_{23}^{4(0)}(x,\tau)=\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(\frac{\xi_2x-\tau}{\xi_2-\xi_3}) \quad ,$$

$$R_{33}^{4(0)}=0 \quad ,$$

almakla

$$R_{13}^{4(n)}(x,\tau)=i\int_{x}^{\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}} R_{23}^{4(n-1)}(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{12}(x')dx'$$

$$+i\int_{x}^{\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}} R_{33}^{4(n-1)}(x',\tau-\xi_1 x+\xi_1 x')c_{13}(x')dx' \ ,$$

$$R_{23}^{4(n)}(x,\tau)=i\int_{x}^{\frac{\xi_2 x-\tau}{\xi_2-\xi_3}} R_{13}^{4(n-1)}(x',\tau-\xi_2 x+\xi_2 x')c_{21}(x')dx'$$

$$+i\int_{x}^{\frac{\xi_2 x-\tau}{\xi_2-\xi_3}} R_{33}^{4(n-1)}(x',\tau-\xi_2 x+\xi_2 x')c_{23}(x')dx' \ ,$$

$$R_{33}^{4(n)}(x,\tau)=i\int_{x}^{\infty} R_{13}^{4(n-1)}(x',\tau-\xi_3 x+\xi_3 x')c_{31}(x)dx'+i\int_{x}^{\infty} R_{23}^{4(n-1)}(x',\tau-\xi_3 x+\xi_3 x')c_{32}(x')dx'$$

olacaktır.

$$\max\{\frac{1}{\xi_1-\xi_3},\frac{1}{\xi_2-\xi_3}\}=\frac{1}{\xi_2-\xi_3} \ ,$$

$$\max\ \{\exp(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3})\ ,\ \exp(-\varepsilon\frac{\xi_2 x-\tau}{\xi_2-\xi_3})\ \}=\exp(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}) \ ,$$

olduğundan

$$\left|R_{13}^{4(0)}(x,\tau)\right|\le\frac{1}{\xi_2-\xi_3}\exp(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}) \ ,$$

$$\left|R_{23}^{4(0)}(x,\tau)\right|\le\frac{1}{\xi_2-\xi_3}\exp(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}) \ ,$$

$$R_{33}^{4(0)}(x,\tau)=0 \ ,$$

yazabiliriz.

Tümevarım yönteminin yardımıyla,

$$\left|R_{k3}^{4(n)}(x,\tau)\right| \le \frac{1}{n!}\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)^n \exp(-n\varepsilon x)\frac{1}{\xi_2-\xi_3}\exp\left(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}\right) \ , \qquad k=1,2,3$$

olduğunu gösterebiliriz.

$$R_{k3}^{4}(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} R_{k3}^{4(n)}(x,\tau) \ ,$$

serisi düzgün yakınsaktır. Çünkü majorant serisi olan

$$\frac{1}{\xi_2-\xi_3}\exp\left(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)^n\exp(-n\varepsilon x) \le \frac{1}{\xi_2-\xi_3}\exp\left(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)^n$$

$$=\frac{1}{\xi_2-\xi_3}\exp\left(-\varepsilon\frac{\xi_1 x-\tau}{\xi_1-\xi_3}\right)\exp\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)$$

serisi de yakınsaktır.

(2.20) denklemlerinde $\tau=\xi_1 x$, (2.21) denklemlerinde $\tau=\xi_3 x$ yazarsak (2.19) eşitliğinin

$$R_{21}^{4}(x,\xi_1 x)=\frac{i}{\xi_1-\xi_2}c_{21}(x) \ ,$$

$$R_{31}^{4}(x,\xi_1 x)=\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{31}(x) \quad ,$$

$$R_{13}^{4}(x,\xi_3 x)=\frac{i}{\xi_1-\xi_3}c_{13}(x) \quad ,$$

$$R_{23}^{4}(x,\xi_3 x)=\frac{i}{\xi_2-\xi_3}c_{23}(x) \quad ,$$

ifadelerini elde etmiş oluruz.

2.3. Çözümün analitik integral temsilleri

(2.2) de altı tane integral temsili olduğunu görmüştük. Bu integral temsillerinde sınırlar $-\infty$ *dan* $+\infty$ ' a kadar değiştiğinde , bu integral temsillerini (veya çözümlerini) reel eksenden analitik olarak devam ettirmek mümkün değildir.

Reel eksenden analitik devam ettirilebilen integral temsillere çözümün analitik integral temsilleri diyeceğiz. Analitik temsile sahip olan çözümler, bütün eksende ters problemin öğrenilmesinde çok önemli bir yer tutar.

Lemma 2.3. (2.1) denklemler sisteminin keyfi sınırlı çözümü aşağıdaki analitik integral temsillere sahiptirler.

$$y(x,\lambda)=(I+W_{-}(x,\lambda))\exp(i\lambda Jx)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.22}$$

$$y(x,\lambda) = (I + W_{+}(x,\lambda))\exp(i\lambda Jx)\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} . \tag{2.23}$$

Burada

$$J = diag\,(\xi_1 , \xi_2 , \xi_3) \;\; ,$$

$$W_{-}(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \widetilde{W}_{-}(x,\tau,\lambda)\exp(i\lambda\tau)d\tau \;\; ,$$

$$W_{+}(x,\lambda) = \int_{0}^{\infty} \widetilde{W}_{+}(x,\tau,\lambda)\exp(i\lambda\tau)d\tau \;\; ,$$

$$\widetilde{W}_{-}(x,\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} H[\tau-(\xi_3 - \xi_1)x]R^1_{11}(x,\tau+\xi_1 x) & R^2_{12}(x,\tau+\xi_2 x) & R^3_{13}(x,\tau+\xi_3 x) \\ H[\tau-(\xi_3-\xi_1)x]R^1_{21}(x,\tau+\xi_1 x) & R^2_{22}(x,\tau+\xi_2 x) & R^3_{23}(x,\tau+\xi_3 x) \\ H[\tau-(\xi_3-\xi_1)x]R^1_{31}(x,\tau+\xi_1 x) & R^2_{32}(x,\tau+\xi_2 x) & R^3_{33}(x,\tau+\xi_3 x) \end{pmatrix} \tag{2.22'}$$

$$\widetilde{W}_{+}(x,\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} R^4_{11}(x,\tau+\xi_1 x) & R^5_{12}(x,\tau+\xi_2 x) & R^6_{13}(x,\tau+\xi_3 x) \\ R^4_{21}(x,\tau+\xi_1 x) & R^5_{22}(x,\tau+\xi_2 x) & R^6_{23}(x,\tau+\xi_3 x) \\ R^4_{31}(x,\tau+\xi_1 x) & R^5_{32}(x,\tau+\xi_2 x) & R^6_{33}(x,\tau+\xi_3 x) \end{pmatrix} \tag{2.23'}$$

şeklindedir.

Burada $C = (C_1, C_2, C_3)^T$ *ve* $D = (D_1, D_2, D_3)^T$ vektörleri $y(x,\lambda)$ çözümüne göre tek türlü tanımlanırlar ve tersine, keyfi C ve D vektörleri için (2.22) ve (2.23) formülleri sınırlı fonksiyonlar sınıfında (2.1) denklemler sisteminin çözümlerini verir.

$\widetilde{W}_-(x,\tau,\lambda)$ *ve* $\widetilde{W}_+(x,\tau,\lambda)$ matris çekirdekleri katsayılarla tek türlü tanımlanır ve $x \geq 0$ için aşağıdaki şekilde ilişki vardır.

$$i[\,J,\ \widetilde{W}_-(x,0,\lambda)\ ] = -\,c(x),$$

$$i[\,J,\ \widetilde{W}_+(x,0,\lambda)\ ] = c(x), \qquad x>0 \qquad (2.24)$$

$$i[\,J,\ \widetilde{W}_+(x,0,\lambda) - \widetilde{W}_-(x,0,\lambda)\ ] = c(0), \qquad (2.25)$$

burada $[A,B] = AB - BA$ iki matrisin kommutantıdır.

İspat . (2.22) ve (2.23) analitik matris integral temsillerinin sütunları, (2.13) - (2.18) integral temsillerinden oluşturulduğundan bu temsillerin denklemler sistemini sağladığı görülmüştür.

(2.22) ve (2.23) den aşağıdaki

$$(I + W_-(x,\lambda))\exp(i\lambda Jx)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = (I + W_+(x,\lambda))\exp(i\lambda Jx)\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

eşitliğini yazabiliriz.

$(C_1, C_2, C_3)^T$ vektörünü $(D_1, D_2, D_3)^T$ vektörüne dönüştüren matrise geçit matrisi denir. Geçit matrisini $S^{f_2}(\lambda)$ ile gösterelim. Yani

$$(D_1, D_2, D_3)^T = S^{f_2}(\lambda)\,(C_1, C_2, C_3)^T$$

dir. (2.26) ' dan

$$S^{f_2}(\lambda) = \exp(-i\lambda Jx)(I + W_+(x,\lambda))^{-1}(I + W_-(x,\lambda))\exp(i\lambda Jx)$$

veya

$$\exp(i\lambda Jx)S^{f_2}(\lambda)\exp(-i\lambda Jx) = (I + W_+(x,\lambda))^{-1}(I + W_-(x,\lambda)) \tag{2.27}$$

elde edilir. Burada x=0 yazılırsa

$$S^{f_2}(\lambda) = (I + W_+(0,\lambda))^{-1}(I + W_-(0,\lambda)) \tag{2.28}$$

olur.

(2.19), (2.22′), (2.23′) ifadelerinden (2.24) ve (2.25) kolayca ispatlanır.

Aşağıda vereceğimiz lemma $S^{f_1}(\lambda)$ *ve* $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonlarının üçgen matrislerin çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini göstermektedir.

Lemma 2.4. $(A_1, A_2, B)^T$, $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T$ vektörleri $(C_1, C_2, C_3)^T$, $(D_1, D_2, D_3)^T$ vektörleri ile aşağıdaki üçgen matrislerin yardımıyla

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_{11}^-(\lambda) & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 1 + b_{22}^-(\lambda) & 0 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & 1 + b_{33}^-(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f_{12}(\lambda) & f_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & f_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0,\lambda) \\ y_2(0,\lambda) \\ y_3(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^-(\lambda) & a_{13}^-(\lambda) \\ 0 & 1 & a_{23}^-(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0,\lambda) \\ y_2(0,\lambda) \\ y_3(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+d_{11}^{+}(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^{+}(\lambda) & 1+d_{22}^{+}(\lambda) & 0 \\ d_{31}^{+}(\lambda) & d_{32}^{+}(\lambda) & 1+d_{33}^{+}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} , \qquad (2.32)$$

ifade edilir. Burada, $b_{ii}^{-}(\lambda)$ $(i=1,2,3)$, $a_{12}^{-}(\lambda)$, $a_{13}^{-}(\lambda), a_{23}^{-}(\lambda)$ aşağı düzlemde ($Im\lambda < 0$ için) analitik fonksiyonlar d_{kj}^{+} ler ($Im\lambda > 0$ için) ise yukarı düzlemde analitik fonksiyonlardır.

$$b_{ii}^{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} b_{ii}(\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad (i=1,2,3) \ ,$$

$$d_{11}^{+}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} R_{11}^{4}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \qquad d_{21}^{+}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} R_{21}^{4}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$d_{22}^{+}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} R_{22}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \qquad d_{31}^{+}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} R_{31}^{4}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \qquad (2.33)$$

$$d_{33}^{+}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} R_{33}^{6}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \qquad d_{32}^{+}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$a_{12}^{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} R_{12}^{2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau, \qquad a_{13}^{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} R_{13}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$a_{23}^{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} R_{23}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$b_{21}(\lambda)$, $b_{31}(\lambda)$, $b_{32}(\lambda)$, $f_{12}(\lambda)$, $f_{13}(\lambda)$, $f_{23}(\lambda)$ fonksiyonları ise reel eksende tanımlanmış $\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$, şeklinde olan fonksiyonlardır.

İspat . (2.29) ifadesini ispatlamak için çözümün, $(C_1, C_2, C_3)^T$ vektörü ile ifade edilen (2.22) analitik temsilini (2.8) integral denklemler sisteminde yerine yazalım.

(2.22) analitik temsilinin çekirdeklerinin sağladığı denklemleri gözönüne alırsak, (2.29) ' u ispatlamış oluruz.

Benzer şekilde (2.30), (2.31), (2.32) ifadeleri de ispatlanabilir.

(2.29) - (2.32) formüllerinin $S^{f_1}(\lambda)$ *ve* $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonlarının tanımlarını gözönüne alırsak, bu matris fonksiyonları iki taraflı üçgen matrislerin çarpanları şeklinde yazabiliriz.

$$S^{f_1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & a^-_{12}(\lambda) & a^-_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & a^-_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+b^-_{11}(\lambda) & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 1+b^-_{22}(\lambda) & 0 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & 1+b^-_{33}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & f_{12}(\lambda) & f_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & f_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+d^+_{11}(\lambda) & 0 & 0 \\ d^+_{21}(\lambda) & 1+d^+_{22}(\lambda) & 0 \\ d^+_{31}(\lambda) & d^+_{32}(\lambda) & 1+d^+_{33}(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \qquad (2.34)$$

$$S^{f_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & f_{12}(\lambda) & f_{13}(\lambda) \\ 0 & 1 & f_{23}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+b^-_{11}(\lambda) & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 1+b^-_{22}(\lambda) & 0 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & 1+b^-_{33}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (2.35)$$

$$= \begin{pmatrix} 1+d_{11}^{+}(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^{+}(\lambda) & 1+d_{22}^{+}(\lambda) & 0 \\ d_{31}^{+}(\lambda) & d_{32}^{+}(\lambda) & 1+d_{33}^{+}(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{-}(\lambda) & a_{13}^{-}(\lambda) \\ 0 & 1 & a_{23}^{-}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.28) ' den

$$W_{+}(0,\lambda) = \begin{pmatrix} d_{11}^{+}(\lambda) & 0 & 0 \\ d_{21}^{+}(\lambda) & d_{22}^{+}(\lambda) & 0 \\ d_{31}^{+}(\lambda) & d_{32}^{+}(\lambda) & d_{33}^{+}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$W_{-}(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^{-}(\lambda) & a_{13}^{-}(\lambda) \\ 0 & 0 & a_{23}^{-}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olduğu görülür.

Bu formüllerden görüldüğü gibi $S^{f_1}(\lambda)$ *ve* $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonları birbiri ile tek türlü tanımlanır.

(2.34) ve (2.35) formüllerinden ise $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfırlarının, $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfırları kutup noktalarının ise, $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonunun kutup noktaları olduğunu kolayca görebiliriz.

(2.34) formülünden görüldüğü gibi $S^{f_1}(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları $1+b_{kk}^{-}(\lambda)=0$ $(k=1,2,3)$ denkleminin, kutup noktaları ise $1+d_{ii}^{+}(\lambda)=0$ $(i=1,2,3)$ denkleminin kökleridir.

$S^{f_1}(\lambda)$ *ve* $S^{f_2}(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları ve kutup noktalarının sonlu sayıda olduğu aşağıdaki lemmadan alınır.

Lemma 2.5. Öyle $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki,

1. $1 + d_{ii}^{+}(\lambda)$ $(i = 1,2,3)$ fonksiyonları $Im\lambda > -\varepsilon_0$,

$1 + b_{kk}^{-}(\lambda)$ $(k = 1,2,3)$ fonksiyonları ise $Im\lambda < \varepsilon_0$

için analitik fonksiyonlardır. $|\lambda| \to \infty$ olduğunda aşağıdaki asimptotik ilişkiler doğrudur.

$$1 + d_{ii}^{+}(\lambda) = 1 + o(1) \quad (i = 1,2,3) \quad Im\lambda \geq -\varepsilon_0 ,$$

$$1 + b_{kk}^{-}(\lambda) = 1 + o(1) \quad (k = 1,2,3) \quad Im\lambda \leq \varepsilon_0 ,$$

2. $1 + d_{ii}^{+}(\lambda)$ *ve* $1 + b_{kk}^{-}(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları sonlu sayıdadır.

3. $0 < |Im\lambda| < \varepsilon_0$ olduğunda,

$1 + d_{ii}^{+}(\lambda) \neq 0$ $(i = 1,2,3)$ *ve* $1 + b_{kk}^{-}(\lambda) \neq 0$ $(k = 1,2,3)$ olacaktır.

İspat . $|R_{11}^{4}(0,\tau)| \leq N\exp(-\varepsilon\frac{\tau}{\xi_1 - \xi_3})$ olduğundan,

$$|d_{11}^{+}(\lambda)| \leq \int_0^\infty |R_{11}^{4}(0,\tau)|\,|\exp(i\lambda\tau|\,d\tau$$

$$\leq N\int_0^\infty \exp(-\varepsilon\frac{\tau}{\xi_1 - \xi_3})|\exp(iRe\lambda\tau)|\,|\exp(-Im\lambda\tau)|\,d\tau$$

$$= N\int_0^\infty \exp\left[-\tau(Im\lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3})\right]d\tau = \frac{N}{Im\lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}}$$

$Im\lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3} > 0$ *veya* $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}$ olduğunda integral yakınsaktır.

Keyfi $\varepsilon_0 \le \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}$ için, $Im\lambda > \frac{-\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}$ olduğundan dolayı $1 + d_{11}^{+}(\lambda)$ fonksiyonu $Im(\lambda) \ge -\varepsilon_0$ için analitik olur.

$d_{11}^{+}(\lambda)$ fonksiyonu için $\left|d_{11}^{+}(\lambda)\right| < \dfrac{1}{Im\lambda + \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3}}$ olduğundan,

$|\lambda| \to \infty$ için $\left|d_{11}^{+}(\lambda)\right| \to 0$ olur. Buradan da, $1 + d_{11}^{+}(\lambda) = 1 + o(1)$, $|\lambda| \to \infty$ için olduğu görülür.

$1 + d_{11}^{+}(\lambda)$ fonksiyonu $Im\lambda > -\varepsilon_0$ da analitik olduğundan ve $|\lambda| \to \infty$ için 1 ' e yaklaştığından bu fonksiyonun sıfirları sınırlı bir bölgede olabilir. Analitik fonksiyonlar için teklik teoremine göre ise, bu sıfirlar sonlu sayıdadır.

Diğer fonksiyonlar içinde, lemmanın birinci, ikinci kısmı ve sıfirların sonlu sayıda olması benzer şekilde ispatlanır.

ε_1 ile reel eksenden sıfirlara kadar olan uzaklığı gösterelim.

$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \frac{\varepsilon}{\xi_1 - \xi_3})$ olsun. O zaman lemmanın üçüncü kısmı ε_0 ' ın bu tanımından alınır.

2.4. Bütün eksende ters saçılma problemi

(2.1) denklemler sistemi için ters saçılma problemi denildiğinde, verilmiş $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonuna, bu matris fonksiyonunun sıfirlarına ve kutup noktalarına göre denklemin katsayılarının bulunması anlaşılır.

$S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfirları ,$1 + b_{kk}^{-}(\lambda) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ kutup noktaları ise, $1 + d_{ii}^{+}(\lambda) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ denklemlerinin çözümleri olduğundan lemma

2.5 ' e göre sıfırların ve kutup noktalarının sayısı sonludur. $S^{f_1}(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarını $\lambda_1^-, \lambda_2^-, ..., \lambda_n^-$ ile kutup noktalarını ise $\lambda_1^+, \lambda_2^+, ..., \lambda_m^+$ ile gösterelim.

Bütün eksende ters problemin çözümü aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem . (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının (2.2) ve (2.3) şartlarını sağladığını farzedelim. O zaman (2.27), (2.28) formülleri ile verilmiş $\exp(i\lambda Jx)S^{f_2}(\lambda)\exp(-i\lambda Jx)$ ve $S^{f_2}(\lambda)$ fonksiyonları için sıfırları olan Riemann probleminin çözümünün varlığı ve tekliği şartları dahilinde $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonu, bu matris fonksiyonunun $\lambda_1^-, \lambda_2^-, ..., \lambda_n^-$ sıfırları, $\lambda_1^+, \lambda_2^+, ..., \lambda_m^+$ kutup noktalarına göre (2.1) denklemler sisteminin katsayıları tek türlü tanımlanırlar.

İspat . $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonunun verildiğini farzedelim. (2.34) formülünün yardımıyla $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonunu (2.35) ' in yardımıyla oluşturabiliriz.

$S^{f_1}(\lambda)$ ' nın sıfırları $S^{f_2}(\lambda)$ ' nın sıfırları, $S^{f_1}(\lambda)$ ' nın kutup noktaları ise $S^{f_2}(\lambda)$ ' nın kutup noktaları olması nedeniyle ters problemin çözümlenebilmesi, $S^{f_2}(\lambda)$ fonksiyonuna, $\lambda_1^-, \lambda_2^-, ..., \lambda_n^-$ kutup noktalarına ve $\lambda_1^+, \lambda_2^+, ..., \lambda_m^+$ sıfırlarına göre (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının bulunması problemine indirgenir.

$S^{f_2}(\lambda)$ fonksiyonu verildiğinde (2.27) - (2.28) formüllerine göre, $W_+(x,\lambda)$ *ve* $W_-(x,\lambda)$ matris fonksiyonlarını teoremin şartlarına göre bulabiliriz.

(2.24) ve (2.25) formüllerine göre ise denklemin katsayıları belirlenir.

BÖLÜM III. YARI EKSENDE ÜÇ ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMDEN OLUŞAN SİSTEM İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Bu bölümde üç adi diferansiyel denklemden oluşan sistem için yarı eksende iki farklı problem aynı anda ele alınmış düz ve ters saçılma problemi incelenmiştir. Ters problem için teklik teoremi ispatlanmış ve katsayıların, saçılma matrisine, bu matrisin sıfırlarına ve kutup noktalarına göre bulunması yöntemi verilmiştir.

3.1. Saçılma problemi

Verilmiş sınır şartlarına ve çözümün asimptotik ifadesine göre yarı eksende (2.1) denklemler sistemi için çözümün aranması problemine saçılma problemi denir.

(2.1) denklemler sistemi için yarı eksende aşağıdaki iki problemi gözönüne alalım.

Birinci problemde,

$$y_3^1(0) = y_1^1(0) \quad , \tag{3.1}$$

sınır şartı ve $x \to +\infty$ için,

$$\begin{aligned} y_1^1(x,\lambda) &= A_1 \exp(i\xi_1 \lambda x) + o(1) \quad , \\ & \qquad\qquad\qquad x \to +\infty \\ y_2^1(x,\lambda) &= A_2 \exp(i\xi_2 \lambda x) + o(1) \quad , \end{aligned} \tag{3.2}$$

asimptotik ifadesi veriliyor.

İkinci problemde ise,

$$y_3^2(0) = y_2^2(0) \quad , \tag{3.3}$$

sınır şartı ve $x \to +\infty$ için,

$$y_1^2(x,\lambda) = A_1 \exp(i\xi_1\lambda x) + o(1) \ , \qquad x \to +\infty \ , \tag{3.4}$$
$$y_2^2(x,\lambda) = A_2 \exp(i\xi_2\lambda x) + o(1)$$

asimptotik ifadesi veriliyor.

Bu iki problemin birlikte ele alınmasını yarı eksende saçılma problemi olarak adlandıracağız.

Lemma 3.1. (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının (2.2) şartını sağladığını farzedelim. Bu durumda birinci ve ikinci problem için saçılma problemi, $L_\infty(E,E_3)$ (burada $E=(-\infty,\infty)$ dur) uzayında aşağıdaki integral denklemler sistemine eşdeğer olur.

$$y_k^p(x) = A_k \exp(i\xi_k\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{kj}(x')y_j^p(x')\exp(i\xi_k\lambda(x-x'))dx' \ ,$$
$$y_3^p(x) = B_p \exp(i\xi_3\lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^3 c_{3j}(x')y_j^p(x')\exp(i\xi_3\lambda(x-x'))dx' \ , \tag{3.5}$$

Burada,

$$B_p = A_p + i\int_0^\infty \sum_{j=1}^3 [c_{pj}(x')\exp(-i\xi_p\lambda x') - c_{3j}(x')\exp(-i\xi_3\lambda x')]y_j^p(x')dx'$$
$$k=1,2 \ ; \ p=1,2 \tag{3.6}$$

dir.

***İspat*.** Bu lemmanın ispatı için birinci bölümdeki (2.8) denklemler sisteminde (3.1) ve (3.3) sınır şartlarını gözönüne almak gereklidir. Bu şekilde lemma ispatlanır.

(3.5) denklemler sisteminde (2.2) şartını dikkate alırsak, (lemma 2.1 ' de olduğu gibi)

$$y_3^p(x) = B_p \exp(i\xi_3 \lambda x) + o(1) \qquad x \to \infty , \qquad p = 1,2 , \qquad (3.7)$$

alınır.

Teorem 3.1. (2.1) denklemler sisteminin katsayıları (2.2) şartını sağlasın. O zaman keyfi verilmiş A_1 , A_2 için yarı eksende birinci ve ikinci problemin tek bir çözümü vardır.

İspat . Lemma 3.1 ' e göre (2.1) denklemler sistemi için yarı eksende saçılma problemi (3.5) integral denklemler sistemine eşdeğerdir. (2.2) şartından ve denklemler sisteminin Volterra tipinden integral denklemler sistemi olmasını kullanarak ardışık yaklaşım yönteminin yardımıyla (3.5) integral denklemler sisteminin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek mümkündür. Bu şekilde teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1 ' e göre verilmiş, $A = (A_1 , A_2)^T$ vektörü için yarı eksende 1. ve 2. problemin tek bir çözümü vardır ve (3.7) formülüne göre de, bu çözümlere tek bir şekilde $B = (B_1 , B_2)^T$ vektörü karşılık gelir.

A vektörünü B vektörüne dönüştüren $S(\lambda)$ matris fonksiyonuna yarı eksende saçılma matrisi denir.

Eğer 2.1 denklemler sisteminin katsayıları sıfır ise, o zaman (3.6) formülünden göründüğü gibi ; $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ olur. Yani S matrisi birim matris olur.

$\det(S(\lambda))$ fonksiyonunun sıfırlarına S matrisinin sıfırları denir. Böylelikle, (2.1) denklemler sistemi için (3.1) - (3.2) ve (3.3) - (3.4) sınır şartları verildiğinde S matris fonksiyonu ve bu fonksiyonun sıfırlarını tanımlamak mümkündür. Bu tür problemlere düz saçılma problemi denir.

3.2. $S(\lambda)$ fonksiyonunun özellikleri

(2.1) denklemler sistemi için yarı eksende ters saçılma probleminin çözümü için $S(\lambda)$ matris fonksiyonunun ve bu matris fonksiyonunun tersinin elemanlarının farklı bölgelerde analitik olan, sınırda ise çarpımları veya farkları verilen, iki fonksiyonun çarpımı veya farkı şeklinde gösterilebilmesi özellikleri (Riemann problemi) çok önemlidir. İleride ters problemi çözerken (2.1) denklemler sisteminin bu çarpanlarla ifade edilebildiğini göstereceğiz.

Yarı eksende (2.1) denklemler sisteminin çözümünün integral temsilleri $h^j(\lambda)$ vektörlerinin bileşenleri arasında önemli bir ilişki kurmaya imkan verir. Bu ilişki bazı özel durumlarda analitik fonksiyonların yardımıyla verilir.

Lemma 3.2. Keyfi verilmiş B_1, B_2 için

$$y_1^2(0,\lambda)-y_2^2(0,\lambda)=(1+R_-(\lambda))(B_1-B_2)\ , \tag{3.8}$$

$$y_1^1(0,\lambda)-y_2^1(0,\lambda)=(1+M_-(\lambda))(B_1-B_2)\ , \tag{3.9}$$

dir. Burada

$$R_-(\lambda)=\int_{-\infty}^{0}\left[R_{33}^4(0,\tau)-R_{13}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.10}$$

$$M_-(\lambda)=\int_{-\infty}^{0}\left[R_{33}^4(0,\tau)-R_{23}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.11}$$

dur.

İspat . 4. tip integral temsilinden

$$y_1^1(0)-y_1^2(0)=(B_1-B_2)\int_{-\infty}^{0}R_{13}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.12}$$

$$y_2^1(0) - y_2^2(0) = (B_1 - B_2)\int_{-\infty}^{0} R_{23}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \tag{3.13}$$

$$y_3^1(0) - y_3^2(0) = (B_1 - B_2)(1 + \int_{-\infty}^{0} R_{33}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau) \ , \tag{3.14}$$

yazabiliriz.

(3.14) ' den (3.12) ' yi ve (3.13) ' ü çıkartır, (3.1) ve (3.3) sınır şartlarını gözönüne alırsak,

$$y_1^2(0) - y_2^2(0) = (1 + \int_{-\infty}^{0} \left[R_{33}^4(0,\tau) - R_{13}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)(B_1 - B_2) \ ,$$

$$y_1^1(0) - y_2^1(0) = (1 + \int_{-\infty}^{0} \left[R_{33}^4(0,\tau) - R_{23}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)(B_1 - B_2) \ ,$$

olur. Burada (3.10) ve (3.11) ifadeleri gözönüne alındığında, lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.3. Eğer $A_1 = 0$ ise keyfi A_2 için,

$$y_1^1(0,\lambda) = G_{1-}^1(\lambda)A_2 \ , \tag{3.15a}$$

$$y_1^1(0,\lambda) = L_-^1(\lambda)(1 + M_-(\lambda))(B_2 - B_1) \ , \tag{3.15b}$$

$$y_2^1(0,\lambda) = (1 + G_{2-}^1(\lambda))A_2 , \tag{3.16a}$$

$$y_2^1(0,\lambda) = (1 + L_-^1(\lambda))(1 + M_-(\lambda))(B_2 - B_1) \ , \tag{3.16b}$$

$$y_1^2(0,\lambda) = G_{1-}^2(\lambda)A_2 \ , \tag{3.17a}$$

$$y_1^2(0,\lambda) = L_-^2(\lambda)(1+R_-(\lambda))(B_2-B_1) \ , \tag{3.17b}$$

$$y_2^2(0,\lambda) = (1+G_{2-}^2(\lambda))A_2 \ , \tag{3.18a}$$

$$y_2^2(0,\lambda) = (1+L_-^2(\lambda))(1+R_-(\lambda))(B_2-B_1) \ , \tag{3.18b}$$

olur. Burada,

$$G_{1-}^1(\lambda) = (1-\int_{-\infty}^{0} R_{13}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{-\infty}^{0} R_{12}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \tag{3.19}$$

$$G_{2-}^1(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} R_{22}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{0} R_{23}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau(1-\int_{-\infty}^{0} R_{13}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{0} R_{12}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \tag{3.20}$$

$$G_{1-}^2(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} R_{13}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau(1-\int_{-\infty}^{0} R_{23}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$
$$(1+\int_{-\infty}^{0} R_{22}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau) + \int_{-\infty}^{0} R_{12}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ , \tag{3.21}$$

$$G_{2-}^2(\lambda) = (1-\int_{-\infty}^{0} R_{23}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+\int_{-\infty}^{0} R_{22}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau) - 1 \ , \tag{3.22}$$

dir. L_-^1 *ve* L_-^2 ise,

$$L_-^1 = G_{1-}^1(1+G_{2-}^1-G_{1-}^1)^{-1} \ , \tag{3.23}$$

$$L_-^2 = G_{1-}^2(1+G_{2-}^2-G_{1-}^2)^{-1} \ , \tag{3.24}$$

dir.

İspat . 3. tip integral temsilinde

$$1-\int_{-\infty}^{0} R_{13}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \neq 0 \ , \qquad 1-\int_{-\infty}^{0} R_{23}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$y_1^1(0,\lambda)=A_2(1-\int_{-\infty}^{0} R_{13}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{-\infty}^{0} R_{12}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \ ,$$

$$y_2^2(0,\lambda)=A_2(1-\int_{-\infty}^{0} R_{23}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+\int_{-\infty}^{0} R_{22}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau) \ ,$$

$$y_2^1(0,\lambda)=A_2(1+\int_{-\infty}^{0} R_{22}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{0} R_{23}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$
$$(1-\int_{-\infty}^{0} R_{13}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{-\infty}^{0} R_{12}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau) \ ,$$

$$y_1^2(0,\lambda)=A_2(\int_{-\infty}^{0} R_{13}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau(1-\int_{-\infty}^{0} R_{23}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$
$$(1+\int_{-\infty}^{0} R_{22}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)+\int_{-\infty}^{0} R_{12}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau) \ ,$$

olur. Böylece (3.15a), (3.16a), (3.17a) ve (3.18a) ifadeleri ispatlanmış olur.

(3.16a) ' dan (3.15a) ' yı çıkartırsak,

$$y_2^1(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda)=(1+G_{2-}^1(\lambda)-G_{1-}^1(\lambda))A_2$$

olur. $(1+G_{2-}^1(\lambda)-G_{1-}^1(\lambda))\neq 0$ olmak üzere,

$$A_2=(1+G_{2-}^1(\lambda)-G_{1-}^1(\lambda))^{-1}(y_2^1(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda))$$

yazabiliriz. (3.9) ifadesinden ise,

$$y_2^1(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda)=(1+M_-(\lambda))(B_2-B_1)$$

elde edilir. Bu ifadeyi A_2 ' de yerine yazarsak,

$$A_2=(1+G_{2-}^1(\lambda)-G_{1-}^1(\lambda))^{-1}(1+M_-(\lambda))(B_2-B_1)$$

A_2 ' nin ifadesi (3.15a) ve (3.16a) da yerine yazılırsa (3.15b), (3.16b) ispatlanmış olur. (3.18a) ' dan (3.17a) ' yı çıkartırsak,

$$y_2^2(0,\lambda)-y_1^2(0,\lambda)=(1+G_{2-}^2(\lambda)-G_{1-}^2(\lambda))A_2$$

olur.

$(1+G_{2-}^2(\lambda)-G_{1-}^2(\lambda))\neq 0$ olmak üzere,

$$A_2=(1+G_{2-}^2(\lambda)-G_{1-}^2(\lambda))^{-1}(y_2^2(0,\lambda)-y_1^2(0,\lambda))$$

yazabiliriz. (3.8) ifadesinden ise

$$y_2^2(0,\lambda)-y_1^2(0,\lambda)=(1+R_-(\lambda))(B_2-B_1)$$

olacaktır. Bu ifadeyi A_2 ' de yerine yazarsak,

$$A_2=(1+G_{2-}^2(\lambda)-G_{1-}^2(\lambda))^{-1}(1+R_-(\lambda))(B_2-B_1)$$

olur. A_2 ' nin ifadesi (3.17a) ve (3.18a) ' da yerine yazılırsa, (3.17b), (3.18b) ispatlanmış olur.

Lemma 3.4. $B_1 = B_2 = B$ olsun. O zaman 1. ve 2. problemin çözümleri aynıdır. Özel halde

$$y_1^k(0,\lambda) = y_2^k(0,\lambda) = y_3^k(0,\lambda)$$

olacaktır. Eğer $\alpha(\lambda) = y_i^k(0,\lambda)$ $\quad (i = 1,2,3\,;\ k = 1,2)$ ise,

$$\alpha(\lambda) = (1 + N_+(\lambda))B \tag{3.25}$$

$$\alpha(\lambda) = (1 + N_-(\lambda))A_1 \tag{3.26}$$

olur. Burada,

$$1 - \int_0^\infty (R_{31}^6(0,\tau) + R_{32}^6(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau \neq 0$$
$$1 - \int_{-\infty}^0 (R_{12}^2(0,\tau) + R_{13}^2(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau \neq$$

olmak üzere,

$$1 + N_+(\lambda) = (1 + \int_0^\infty R_{33}^6(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1 - \int_0^\infty (R_{31}^6(0,\tau) + R_{32}^6(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$1 + N_-(\lambda) = (1 + \int_{-\infty}^0 R_{11}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1 - \int_{-\infty}^0 (R_{12}^2(0,\tau) + R_{13}^2(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

dir.

İspat . 2. tip integral temsilinde, $B_1 = B_2 = B$ olduğunda,

$$(1 - \int_{-\infty}^0 \left[R_{12}^2(0,\tau) + R_{13}^2(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)\alpha(\lambda) = A_1(1 + \int_{-\infty}^0 R_{11}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)$$

veya

$$\alpha(\lambda)=(1-\int_{-\infty}^{0}\left[R_{12}^{2}(0,\tau)+R_{13}^{2}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+\int_{-\infty}^{0}R_{11}^{2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)A_1$$

olur. Bu şekilde (3.26) ispatlanmış olur.

6. tip integral temsilinde $B_1=B_2=B$ olduğunda benzer olarak,

$$\alpha(\lambda)(1-\int_{0}^{\infty}\left[R_{31}^{6}(0,\tau)+R_{32}^{6}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)=B(1+\int_{0}^{\infty}R_{33}^{6}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)$$

veya

$$\alpha(\lambda)=(1+\int_{0}^{\infty}R_{33}^{6}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1-\int_{0}^{\infty}\left[R_{31}^{6}(0,\tau)+R_{32}^{6}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}B$$

olur. Böylece (3.25) ifadesi ispatlanmış olur.

Lemma 3.5. Eğer $B_1=0$ ise,

$$y_1^1(0,\lambda)=M_{1+}^1(\lambda)A_2=n_+(\lambda)(1+M_-(\lambda))B_2 \qquad (3.27)$$

$$y_2^1(0,\lambda)=(1+M_{2+}^1(\lambda))A_2=(1+n_+(\lambda))(1+M_-(\lambda))B_2 \qquad (3.28)$$

olur. Burada,

$$1-\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\neq 0$$

ve

$$(1+\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)M_{1+}^{1}(\lambda))\neq 0$$

olmak üzere,

$$M_{1+}^{1}(\lambda)=(1-\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ ,$$

$$M_{2+}^{1}(\lambda)=\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau M_{1+}^{1}(\lambda)\ ,$$

$$n_{+}(\lambda)=M_{1+}^{1}(\lambda)\left[1+\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)M_{1+}^{1}(\lambda)\right]^{-1}$$

şeklindedir.

İspat . 5. tip integral temsilinde, 1. problem için

$$y_{1}^{1}(0,\lambda)=((1-\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)A_{2}$$

$$y_{2}^{1}(0,\lambda)=((1+\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+(1-\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$
$$\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau))A_{2}$$

olur. Buradan,

$$y_{1}^{1}(0,\lambda)=M_{1+}^{1}(\lambda)A_{2}\ , \tag{3.29}$$

$$y_{2}^{1}(0,\lambda)=(1+M_{2+}^{1}(\lambda))A_{2}\ , \tag{3.30}$$

olduğu görülür. İkinci kısmı ispatlayalım. (3.30) ' dan (3.29) ' u çıkartırsak,

$$y_2^1(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda)=(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))A_2 \quad ,$$

olduğu görülür. Buradan ise,

$$A_2=(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}(y_2^1(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda))$$

olur. Lemma 3.2 ' den,

$$y_2^1(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda)=(1+M_-(\lambda))(B_2-B_1)$$

dir. Bu ifade A_2 ' de yerine yazılırsa,

$$A_2=(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}(1+M_-(\lambda))(B_2-B_1) \quad , \tag{3.30a}$$

olarak elde edilir. Bu ifade (3.29) ' da yerine yazılırsa,

$$y_1^1(0,\lambda)=M_{1+}^1(\lambda)(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}(1+M_-(\lambda))(B_2-B_1)$$

olur. $B_1=0$ olduğunda,

$$y_1^1(0,\lambda)=n_+(\lambda)(1+M_-(\lambda))B_2$$

olduğu görülür. Burada,

$$n_+(\lambda)=M_{1+}^1(\lambda)(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}$$

$$=M_{1+}^1(\lambda)(1+\int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+\int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau M_{1+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}$$

$$n_+(\lambda)=M_{1+}^1(\lambda)(1+\int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1-\int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)M_{1+}^1(\lambda))^{-1}$$

olacaktır. Böylece, (3.27) ispatlanmış oldu.

A_2 ifadesi (3.30) ' da yerine yazılırsa,

$$y_2^1(0,\lambda) = (1+M_{2+}^1(\lambda))(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}(1+M_{-}(\lambda))(B_2-B_1) \quad ,$$

olacaktır. $B_1 = 0$ için,

$$(1+M_{2+}^1(\lambda))(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}$$

$$= (1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda)+M_{1+}(\lambda))(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1}$$

$$= 1+M_{1+}^1(\lambda)(1+M_{2+}^1(\lambda)-M_{1+}^1(\lambda))^{-1} = 1+n_+(\lambda)$$

olduğundan dolayı

$$y_2^1(0,\lambda) = (1+n_+(\lambda))(1+M_{-}(\lambda))B_2$$

olacaktır. Böylece, (3.28) ifadeside ispatlanmış oldu.

Lemma 3.6. Eğer $B_2 = 0$ ise,

$$A_2 = M_{1+}^2(\lambda) y_1^2(0,\lambda) \quad , \tag{3.31}$$

$$y_1^2(0,\lambda) = (1+m_+(\lambda))(1+R_{-}(\lambda))B_1 \quad , \tag{3.32}$$

$$y_2^2(\lambda) = m_+(\lambda)(1+R_{-}(\lambda))B_1 \quad , \tag{3.33}$$

olur. Burada,

$$M_{1+}^{2}(\lambda)=(1+\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\lambda)\exp(i\lambda\tau)d\tau-\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)\ ,$$

$$m_{+}(\lambda)=\left[1-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1-\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)M_{1+}^{2}(\lambda)\right]^{-1}-1$$

dir.

İspat . 5. tip integral temsilinde, $B_2=0$ için 2. problemi gözönüne alırsak,

$$A_2=\left[1+\int_{0}^{\infty}(R_{22}^{5}(0,\tau)-R_{32}^{5}(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau\right]^{-1}(\int_{0}^{\infty}(R_{31}^{5}(0,\tau)$$

$$-R_{21}^{5}(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)y_{1}^{2}(0,\lambda)$$

buradan ise,

$$A_2=M_{1+}^{2}(\lambda)y_{1}^{2}(0,\lambda)$$

olur. Bu şekilde (3.25) ifadesi ispatlanmış oldu.

5. tip integral temsili için 2. problemi gözönüne alırsak,

$$y_2^2(0,\lambda)=((1+\int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1+\int_0^\infty(R_{22}^5(0,\tau)-R_{32}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$\cdot\int_0^\infty(R_{31}^5(0,\tau)-R_{21}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau+\int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)y_1^2(0,\lambda) \qquad (3.34)$$

alınır.

$B_2=0$ için (3.8) ifadesinden,

$$y_1^2(0,\lambda)-y_2^2(0,\lambda)=(1+R_-(\lambda))B_1 \quad , \qquad (3.35)$$

(3.34) ' den ise,

$$y_1^2(0,\lambda)-y_2^2(0,\lambda)=(1-\int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1+\int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)$$

$$(1+\int_0^\infty(R_{22}^5(0,\tau)-R_{32}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_0^\infty(R_{31}^5(0,\tau)-R_{21}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)y_1^2(0,\lambda)$$

(3.36)

elde edilir.

(3.35) ve (3.36) ifadelerinden,

$$y_1^2(0,\lambda)=(1-\int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1+\int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1+\int_0^\infty(R_{22}^5(0,\tau)$$

$$-R_{32}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_0^\infty(R_{31}^5(0,\tau)-R_{21}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+R_-(\lambda))B_1$$

yazılabilir. Buradan da,

$$y_1^2(0,\lambda) = (1 + m_+(\lambda))(1 + R_-(\lambda))B_1$$

olduğu görülür. Bu şekilde (3.32) ispatlanmış oldu.

(3.34) ' den,

$$y_1^2(0,\lambda) = ((1 + \int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1 + \int_0^\infty (R_{22}^5(0,\tau) - R_{32}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$\int_0^\infty (R_{31}^5(0,\tau) - R_{21}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau + \int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1} y_2^2(0,\lambda)$$

olur. Buradan,

$$y_1^2(0,\lambda) - y_2^2(0,\lambda) = (((1 + \int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1 + \int_0^\infty (R_{22}^5(0,\tau) - R_{32}^5(0,\tau))$$

$$\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1} \int_0^\infty (R_{31}^5(0,\tau) - R_{21}^5(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau$$

$$+ \int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1} - 1)y_2^2(0,\lambda) \qquad (3.37)$$

yazabiliriz. (3.35) ve (3.37) ifadelerinden,

$$y_2^2(0,\lambda) = m_+(\lambda)(1 + R_-(\lambda))B_1$$

şeklinde olduğu görülür. Böylece, (3.33) de ispatlanmış oldu.

$S(\lambda)$ fonksiyonu ve tersinin elemanlarının çarpanlara ayırma ve diğer önemli özellikleri, teorem 3.2 ' de verilmiştir.

Teorem 3.2. (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının (2.2) şartını sağladığını farzedelim. O zaman, $S(\lambda)$ matris fonksiyonunun sonlu sayıda λ ' lardan dolayı

$$S^{-1}(\lambda) = \|\gamma_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^{2}$$

tersi vardır. $S_{11}(\lambda)$, $\gamma_{22}^{-1}(\lambda), \gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda)$ fonksiyonları ise aşağıdaki çarpanlara

$$S_{11}(\lambda) = (1+R_{-}(\lambda))^{-1}(1+R_{+}(\lambda)) \ , \tag{3.38}$$

$$\gamma_{22}^{-1}(\lambda) = (1+M_{-}(\lambda))^{-1}(1+M_{+}(\lambda)) \ , \tag{3.39}$$

$$\gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda) = (1+N_{-}(\lambda))^{-1}(1+N_{+}(\lambda)) \ , \tag{3.40}$$

sahiptirler. $S_{22}(\lambda)-S_{12}(\lambda)$, $\gamma_{11}(\lambda), \gamma_{21}(\lambda), \gamma_{12}(\lambda)$ fonksiyonları ise,

$$S_{22}(\lambda)-S_{12}(\lambda) = 1+G_{-}(\lambda) \ , \tag{3.41}$$

$$\gamma_{11}(\lambda) = (1+N_{-}(\lambda))^{-1}(1+R_{-}(\lambda))(1+m_{+}(\lambda))+\widetilde{r}_{-}(\lambda) \ , \tag{3.42}$$

$$\gamma_{21}(\lambda) = m_{1+}(\lambda)(1+R_{-}(\lambda)) \ , \tag{3.43}$$

$$\gamma_{12}(\lambda) = (1+N_{-}(\lambda))^{-1}(1+M_{-}(\lambda))n_{+}(\lambda)-\widetilde{h}_{-}(\lambda) \ , \tag{3.44}$$

şeklindedir. Burada,

$$R_{-}(\lambda)=\int_{-\infty}^{0}(R_{33}^{4}(0,\tau)-R_{13}^{4}(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.45}$$

$$R_{+}(\lambda)=\int_{0}^{\infty}(R_{11}^{4}(0,\tau)-R_{31}^{4}(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.46}$$

$$M_{-}(\lambda)=\int_{-\infty}^{0}(R_{33}^{4}(0,\tau)-R_{23}^{4}(0,\tau))\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.47}$$

$$M_{+}(\lambda)=\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1-\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$.(1-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ , \tag{3.48}$$

$$m_{1+}(\lambda)=M_{1+}^{2}(\lambda)(1+m_{+}(\lambda))\ ,$$

$$M_{1+}^{2}(\lambda)=(1+\int_{0}^{\infty}R_{22}^{5}(0,\lambda)\exp(i\lambda\tau)d\tau-\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$(\int_{0}^{\infty}R_{31}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)\ , \tag{3.49}$$

$$m_{+}(\lambda)=(1-\int_{0}^{\infty}R_{21}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-(1-\int_{0}^{\infty}R_{32}^{5}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)M_{1+}^{2}(\lambda))^{-1}-1\ ,$$

$$1+N_{+}(\lambda)=(1+\int_{0}^{\infty}R_{33}^{6}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(1-\int_{0}^{\infty}\left[R_{31}^{6}(0,\tau)+R_{32}^{6}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\ , \tag{3.50}$$

$$1+N_{-}(\lambda)=(1-\int_{-\infty}^{0}\left[R_{12}^{2}(0,\tau)+R_{13}^{2}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+\int_{-\infty}^{0}R_{11}^{2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)$$

(3.51)

$$1+G_{-}(\lambda)=(1+\int_{-\infty}^{0}R_{33}^{4}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(-(1-\int_{-\infty}^{0}R_{13}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$.\int_{-\infty}^{0}R_{12}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+(1-\int_{-\infty}^{0}R_{23}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+\int_{-\infty}^{0}R_{22}^{3}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)),$$

(3.52)

$$\tilde{r}_{-}(\lambda)=(1+\int_{-\infty}^{0}R_{11}^{2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\left[R_{12}^{2}(0,\tau)+R_{13}^{2}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau(1+R_{-}(\lambda)),$$

(3.53)

$$\tilde{h}_{-}(\lambda)=(1+\int_{-\infty}^{0}R_{11}^{2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{-\infty}^{0}R_{12}^{2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau(1+M_{-}(\lambda)) \qquad (3.54)$$

dır.

İspat . (3.38) ifadesini ispatlayalım.

$$\begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$B_1 = S_{11}(\lambda)A_1 + S_{12}(\lambda)A_2$$

$$B_2 = S_{21}(\lambda)A_1 + S_{22}(\lambda)A_2 \tag{3.55}$$

yazabiliriz. 4.tip integral temsili için birinci ve ikinci problem gözönüne alınır ve (3.55) şeklinde düzenlenirse, (3.38) ifadesini ispatlamış oluruz.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda) & \gamma_{22}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı ise $B_1 = 0$ için $\gamma_{22}(\lambda)B_2 = A_2$ olur. 5. tip integral temsili için birinci problemi gözönüne alırsak,

$$y_2^1(0,\lambda) - y_1^1(0,\lambda) = (1 + \int_0^\infty R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau - (1 - \int_0^\infty R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}$$

$$.(1 - \int_0^\infty R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)\int_0^\infty R_{32}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)A_2 \ , \tag{3.56}$$

olduğu görülür. 4. tip integral temsili için birinci problemi gözönüne alırsak

$$y_2^1(0,\lambda) - y_1^1(0,\lambda) = (1 + \int_{-\infty}^0 \left[R_{33}^4(0,\tau) - R_{23}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau)B_2 \tag{3.57}$$

olur. (3.56), (3.57) ve $A_2 = \gamma_{22}(\lambda)B_2$ ifadesinden (3.39) ispatlanmış olur.

$$\hat{S}(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) - S_{11}(\lambda) & S_{22}(\lambda) - S_{12}(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{12}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda) & \gamma_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

dır. O halde,

$$\begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda)-S_{11}(\lambda) & S_{22}(\lambda)-S_{12}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2-B_1 \end{pmatrix}$$

olur. Burada,

$$B_2-B_1=(S_{21}(\lambda)-S_{11}(\lambda))A_1+(S_{22}(\lambda)-S_{12}(\lambda))A_2$$

dir. $A_1=0$ için,

$$B_2-B_1=(S_{22}(\lambda)-S_{12}(\lambda))A_2$$

olacaktır.

3. ve 4. tip integral temsillerinde birinci ve ikinci problem için,

$$y_2^2(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda)=(1+\int_{-\infty}^{0} R_{33}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)(B_2-B_1)\ ,$$

$$y_2^2(0,\lambda)-y_1^1(0,\lambda)=((1-\int_{-\infty}^{0} R_{23}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1+\int_{-\infty}^{0} R_{22}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)$$
$$-(1-\int_{-\infty}^{0} R_{13}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}\int_{-\infty}^{0} R_{12}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)A_2$$

yazabiliriz. Bu iki ifade,

$$B_2 - B_1 = (S_{22}(\lambda) - S_{12}(\lambda))A_2$$

şeklinde yazılırsa, (3.41) ifadesi ispatlanmış olur.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda)+\gamma_{22}(\lambda) & \gamma_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 - B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $B_1 = B_2 = B$ için

$$(\gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda))B_1 = A_1$$

olur. 2. ve 6. tip integral temsillerinden,

$$A_1 = (1 - \int_{-\infty}^{0} (R_{12}^2(0,\tau) + R_{13}^2(0,\tau)) \exp(i\lambda\tau) d\tau) + (1 + \int_{-\infty}^{0} R_{11}^2(0,\tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau\ )^{-1}$$

$$.(1 - \int_{0}^{\infty} (R_{31}^6(0,\tau) + R_{32}^6(0,\tau)) \exp(i\lambda\tau) d\tau)^{-1} (1 + \int_{0}^{\infty} R_{33}^6(0,\tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau) B_1$$

yazabiliriz. Böylece (3.40) ispatlanmış olur.

$B_2 = 0$ olsun. 2. tip integral temsilinde ikinci problemi gözönüne alırsak,

$$A_1 = (1 + \int_{-\infty}^{0} R_{11}^2(0,\tau) \exp(i\lambda\tau) d\tau)^{-1} (y_1^2(0,\lambda) - \int_{-\infty}^{0} (R_{12}^2(0,\tau) + R_{13}^2(0,\tau)) \exp(i\lambda\tau) d\tau\, y_2^2(0,\lambda))$$

olur. Lemma (3.6) ' dan $y_1^2(0,\lambda)$ *ve* $y_2^2(0,\lambda)$ ' yı A_1 ifadesinde yerine yazıp,
$A_1 = \gamma_{11}(\lambda) B_1$ olduğunu gözönüne alırsak (3.42) ifadesi ispatlanmış olur.

(3.31) ifadesinde ise (3.32) ' yi yerine yazıp $A_2 = \gamma_{21}(\lambda)B_1$ olduğu gözönüne alınırsa, (3.43) ifadesi ispatlanmış olur.

$B_1 = 0$ olsun. 2. tip integral temsilinde birinci problemi gözönüne alırsak,

$$A_1 = (1 + \int_{-\infty}^{0} R_{11}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)^{-1}(1 - \int_{-\infty}^{0} R_{13}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)y_1^1(0,\lambda)$$

$$-y_2^1(0,\lambda)\int_{-\infty}^{0} R_{12}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau)$$

olur. Lemma (3.5) ' den, $y_1^1(0,\lambda)$ *ve* $y_2^1(0,\lambda)$ ' yı A_1 ifadesinde yerine yazıp,

$A_1 = \gamma_{12}(\lambda)B_2$ olduğunu gözönüne alırsak (3.44) ifadesi ispatlanmış olur.

3.3. Yarı eksende ters saçılma problemi

Yarı eksende ters saçılma problemi verilmiş $S(\lambda)$ matris fonksiyonuna göre (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının bulunmasıdır.

Aşağıda vereceğimiz teorem yarı eksendeki ters saçılma problemini bütün eksende $x < 0$ için katsayıları sıfır olan probleme indirger.

Teorem 3.3. Katsayıları (2.2) şartını sağlayan (2.1) denklemler sisteminin saçılma matrisi $S(\lambda) = \|S_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^{2}$ olsun. O zaman $S^{-1}(\lambda)$ matris fonksiyonu, $S(\lambda)$ matris fonksiyonunun, tersinin elemanlarının yardımı ile (3.38), (3.39), (3.40) çarpanlara ayırma formüllerinden (Riemann probleminin çözülmesi ile) elde edilen $N_-(\lambda)$, $N_+(\lambda)$, $R_-(\lambda)$, $M_-(\lambda)$ analitik fonksiyonları ile aşağıdaki şekilde

$$S^{f_1}(\lambda)=\begin{pmatrix} 1+m_+(\lambda) & n_+(\lambda) & 1+N_+(\lambda) \\ m_+(\lambda) & 1+n_+(\lambda) & 1+N_+(\lambda) \\ m_+(\lambda) & n_+(\lambda) & 1+N_+(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+R_-(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 1+M_-(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) & -1 \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.58)$$

ifade edilir.

Burada, $m_+(\lambda)$ *ve* $n_+(\lambda)$ fonksiyonları

$$r_-(\lambda)=-[1+\tilde{r}_-(\lambda)(1+N_-(\lambda))(1+R_-(\lambda))^{-1}] \ ,$$

$$h_-(\lambda)=\tilde{h}_-(\lambda)(1+N_-(\lambda))(1+M_-(\lambda))^{-1} \ ,$$

alınmakla, (3.42) ve (3.44) formüllerinin yardımı ile,

$$m_+(\lambda)-r_-(\lambda)=(1+N_-(\lambda))(1+R_-(\lambda))^{-1}\gamma_{11}(\lambda)$$

$$n_+(\lambda)-h_-(\lambda)=(1+N_-(\lambda))(1+M_-(\lambda))^{-1}\gamma_{12}(\lambda)$$

Riemann probleminin çözümünden bulunur.

İspat . $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun $B_2=0$ olduğunda ikinci problemin çözümü olduğunu farzedelim. O zaman,

$$A_1=\gamma_{11}(\lambda)B_1 \ , \qquad A_2=\gamma_{21}(\lambda)B_1$$

olur.

$$S^{f_1}(\lambda)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0,\lambda) \\ y_2(0,\lambda) \\ y_3(0,\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

eşitliğinde lemma 3.6 ' nın (3.32) ve (3.33) ifadelerini gözönüne alırsak

$$S^{f_1}(\lambda)\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+m_+(\lambda))(1+R_-(\lambda)) \\ m_+(\lambda)(1+R_-(\lambda)) \\ m_+(\lambda)(1+R_-(\lambda)) \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

elde ederiz. $y(x,\lambda)$ fonksiyonu birinci problemin $B_1 = 0$ halindeki çözümü olduğu zaman

$$A_1 = \gamma_{12}(\lambda)B_2\,, \qquad A_2 = \gamma_{22}(\lambda)B_2$$

olur. Lemma 3.5 ' de (3.27), (3.28) ifadelerini gözönüne alarak, (3.59) ' dan

$$S^{f_1}(\lambda)\begin{pmatrix} \gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{22}(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_+(\lambda)(1+M_-(\lambda)) \\ (1+n_+(\lambda))(1+M_-(\lambda)) \\ n_+(\lambda)(1+M_-(\lambda)) \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

olacaktır.

Birinci ve ikinci problemin çözümlerinin aynı olduğunu farzedelim. Yani $B_1 = B_2 = B$ olsun. O zaman,

$$A_1 = (\gamma_{11}(\lambda) + \gamma_{12}(\lambda))B_1$$

$$A_2 = (\gamma_{21}(\lambda) + \gamma_{22}(\lambda))B_1$$

olur. Lemma (3.4) ' de (3.25) ifadesi gözönüne alınırsa, benzer olarak (3.59) ' dan

$$S^{f_1}(\lambda)\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda)+\gamma_{22}(\lambda) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+N_+(\lambda) \\ 1+N_+(\lambda) \\ 1+N_+(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

elde edilir. (3.60), (3.61), (3.62) ' yi matris formunda yazarsak,

$$S^{f_1}(\lambda)\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) & \gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda) & \gamma_{22}(\lambda) & \gamma_{21}(\lambda)+\gamma_{22}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+m_+(\lambda))(1+R_-(\lambda)) & n_+(\lambda)(1+M_-(\lambda)) & 1+N_+(\lambda) \\ m_+(\lambda)(1+R_-(\lambda)) & (1+n_+(\lambda))(1+M_-(\lambda)) & 1+N_+(\lambda) \\ m_+(\lambda)(1+R_-(\lambda)) & n_+(\lambda)(1+M_-(\lambda)) & 1+N_+(\lambda) \end{pmatrix}$$

olacaktır. İfadeyi düzenler ve

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\lambda) & \gamma_{12}(\lambda) & \gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{12}(\lambda) \\ \gamma_{21}(\lambda) & \gamma_{22}(\lambda) & \gamma_{21}(\lambda)+\gamma_{22}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) & -1 \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğunu gözönüne alırsak teoremi ispatlamış oluruz.

(3.58) ifadesinden kolayca görüldüğü gibi $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonunun determinantı

$$\det S^{f_1}(\lambda) = \det S(\lambda)(1 + R_{-}(\lambda))(1 + M_{-}(\lambda))(1 + N_{+}(\lambda)) \tag{3.63}$$

olur. Buradan görüldüğü gibi $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfırları, $S(\lambda)$ matris fonksiyonu $(1 + R_{-}(\lambda))$, $(1 + M_{-}(\lambda))$ *ve* $(1 + N_{+}(\lambda))$ fonksiyonlarının sıfırlarından oluşur. $S(\lambda)$ matris fonksiyonu ve bu sıfırlara saçılma verileri diyeceğiz.

Tüm eksende $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonu ve $S^{f_1}(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfırlarına göre (2.1) denklemler sisteminin katsayıları tek türlü tanımlandığından aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 3.4. (2.1) denklemler sisteminin katsayılarının (2.2) şartını sağladığını farzedelim. O zaman $S(\lambda)$ matrisine, bu matrisin ve $1 + R_{-}(\lambda)$, $1 + M_{-}(\lambda)$, $1 + N_{+}(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarına göre denklemin katsayıları tek türlü tanımlanır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada üç adi diferansiyel denklemler sistemi için yarı eksende düz ve ters saçılma problemi incelenmiştir. Yarı eksendeki ters saçılma problemi, çözümün analitik temsillerinden yararlanılarak, katsayıları $x < 0$ için sıfır olan haldeki, tüm eksendeki ters saçılma problemine indirgenmiştir.

Yarı eksende verilmiş $S(\lambda)$ saçılma matrisi ile tüm eksendeki $S^{f_1}(\lambda)$ saçılma matrisi ve bu matrislerin sıfırları ile kutup noktaları arasında önemli bir ilişki olduğu görülmüştür. Verilmiş denklemin katsayılarının, tüm eksendeki saçılma matrisi ile tek türlü tanımlanan $S^{f_2}(\lambda)$ matrisinin çarpanlarının yardımı ile ifade edilebildiği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1- Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Segur H. (1973a), Method for solving the Sin-Gordon equation , Phys. Rev. Lett., 30, pp.1262-1264.

2- Ablowitz M.J. and Segur H., Solitons and the inverse scattering transform, siam Philadelphia 1981.

3- Anger G., Invers Problems in Differential Equations.-Akademie-Verlag Berlin.-1990-256p.

4- Beals R.and Coifman R.R. , Scattering and Inverse Scattering for first order systems, Commonications on pure and Applied Mathematics. Vok. XXXVII. 39-90 (1984).

5- Berezanskii Ju. M., Shödinger denklemi için spektral analizin ters problemlerinde teklik teoremi. Trudy Moskov. Mat. Obsc. 1958, C.7. No:3.

6- Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-liouvillschen Eigenwertaufgabe. -Acta Math., 1946. Bd.78. N.1 , S.1-96.

7- Caudrey P.J. , The inverse spectral problem for a system of three coupled first order equations. Proceedings of the Royal Irish Academy-1983-Vol. 83A, N.1-P.23-31.

8- Cudov L.A., Sturm-Liouville ' nin ters problemleri, Mat. sb., 1949, 25(67), No:3, S.451-454.

9- Deift P. and Trubowitz E., Inverse scattering on the line. -Comm. Pure and Appl. Math., 1979, V.32, P.121-251.

10- Faddaev L.D., Bir boyutlu Shödinger denkleminde S matrisinin özellikleri. Tr. Mat. in. AN SSSR, 1964, 73, S.314-336.

11- Gardner C., Green J.,Kruskal M., Miura R., Amethod for solving the korteweg-de Vries equation. -Phys. Rev. Letters, 1967, 19, P.1095-1098.

12- Gasymov M.g. and Levitan B.M. , Dokl. Akad. Nauk SSSR 167(1966) , 967=Soviet Math.Dokl. 7(1966) , 495. MR 33#2859.

13- Gasymov M.g., Trudy Moskov. Mat. Obsc. 19(1968) , 41=Trans. Moskow Math. Soc. 19(1968), 41.MR 39#2418.

14- Gelfand I.M., Levitan B.M., Diferansiyel denklemin spektral fonksiyona göre belirlenmesi. Izv. AN. SSSR, 1951, Matematik konuları, C.15, 309-360.

15- Iskenderov N.Sh., Direct and inverse scattering problem for a system of three hyperbolic equations of the first order on semi-axis with given scattering waves. Kiev, 1985. 20p (Preprint/ AN Ukr SSR, Institute of Mathematics, 85.87).

16- Iskenderov N. Sh., Inverse nonstationary scattering problem for a system of four hyperbolic equations of the first order on semi-axes. Kiev, 1988. -52p (Preprint / AN Ukr SSR, Institute of Mathematics, 88.38).

17- Iskenderov N. Sh., Scattering problem for a hyperbolic system of four equations of the first order on semi-axes. // Boundary value problems for differential equations. - Kiev. Institute of Mathematics, / AN Ukr SSR, 1988. - p53-55.

18- Kaup D.J., The three-wave interaction - A jondisper sive, studies in applied mathematics 55, 9-44 (1976).

19- Kreyn M.G., Sturm-Liouville için ters problemin çözümü. Dok. Ak. Nauk SSSR, 1951, C.76, No:1, S 21-24.

20- Levinson N., The inverse Sturm-Liouville problem. -Math. Tidsskr. B ,1949, p.25-30.

21- Levinson N., On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase. - Danske vid. Selsk. Mat. Fys. Medd., 1949, V.25, N.9,p.25.

22- Levinson N. Certain relations between phase shifts and scattering potential. - Phys. Rev., 1953, v.89.

23- Levitan B.M., Sturm-Liouville ' in ters problemleri, Nauka, 1984.

24- Marchenko B.A., Sturm-Liouville operatörleri ve uygulamaları, 1977, Kiev, Naukova Dumka.

25- Nizhnik L.P., Vu F.L., Kendi kendine eşlenik olmayan matris potansiyeller için yarı eksende saçılma problemi, Kiev, 1974. Ukr. Mat. Dergisi, C.XXVI, 4.

26- Nizhnik L.P., The nonstationary scattering problem, "Naukkova Dumka", Kiev,1973

27- Nizhnik L.P.,Tarasov V.G., The inverse nonstationary problem for a hyperbolic system of equations, Soviet Math. Dokl. Vol 18 (1977), No.2.

28- Nizhnik L.P.,Tarasov V.G., The inverse nonstationary scattering problem for a hyperbolic system of equations, Direct and inverse scattering problems, -Kiev, Institute of Mathematics AN Ukr SSR, 1981. P.61-76.

29- Nizhnik L.P., Integrating multidimensional nonlinear equations by the inverse scattering method. // Nonlinear phenomena and turbulance : Proc. of II International workshop, Kiev, USSR, 1983. -New York : Gordon and Breach , 1984. P.1525-1528.

30- Nizhnik L.P., The inverse scattering problems for the hyperbolic equations and their applications to the nonlinear integrable system // Nonlinear and turbulent process : Proc. of III International Workshop, Kiev, USSR, 1987. -Kiev : Naukova Dumka, 1988. -2. -P.118-121.

31- Nizhnik L.P., The inverse scattering problems for the hyperbolic equations and their application of nonlinear integrable system // Reports on Math. Phys. -1988. -26, N.2. -P.261-283.

32- Nizhnik L.P., Iskenderov N.Sh., Inverse nonstationary scattering problem for a hyperbolic system of three equations of the first order on semi-axis. // Ukr.Mat. z., 1990-42, No:7-p.931-938.

33- Petkov V., Scattering theory for hyperbolic operators.- Amsterdam : North - Holland. -1989, -374 p.

34- Shabat A.B., An inverse scattering problem. Diff. Uravn. 15. 1978. pp.1824-1834, Diff. Equations 15. 1980. pp.1299-1307.

35- Zakharov V.E., Shabat A.B., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 118 (1971). [Sov. Phys. - JETP 34, 62 (1972)].

36- Zakharov V.E., Manakov S.V., Soviet Phys. JEPT Lett. (1973), 18, 243.

37- Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevski L.P., Solitonlar teorisi : Ters problemler yöntemi, 1980, Moskova, Nauka.

EK. RIEMANN PROBLEMİ

Şimdi ise yarı eksende, ters problemin öğrenilmesinde bize gerekli olan Riemann problemini kısaca anlatalım.

Riemann problemi aşağıdaki gibi verilir. Kompleks düzlemde kapalı Γ konturu (bu kontur sonsuzluktanda geçebilir), kontur üzerinde tanımlanmış N. mertebeden $G(\lambda)$ matris fonksiyonu verilmiştir. Kontur üzerinde,

$$\Psi_1(\lambda)\Psi_2(\lambda) = G(\lambda) \tag{E.1}$$

şartını sağlayan, konturun içinde ve dışında analitik olan $\Psi_1(\lambda)$ *ve* $\Psi_2(\lambda)$ fonksiyonlarının bulunması problemi Riemann problemi olarak adlandırılır. Burada görüldüğü gibi Riemann probleminin çözümü tek türlü değildir. Gerçekten $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda)$ aranan çözüm g ' de tersi olan matris fonksiyon ise, o zaman $\Psi_1 g$ *ve* $g^{-1}\Psi_2$ matris fonksiyonları da aynı $G(\lambda)$ fonksiyonu için Riemann probleminin çözümü olacaktır. Bu durumdan kurtulmak için Riemann problemini normalize etmek gerekir. Bunun için Ψ_1 *veya* Ψ_2 fonksiyonlarının analitiklik bölgesinin herhangi bir noktasında değerini vermek yeterlidir.

$$\lambda \to \infty \quad \text{için} \quad \Psi_1(\lambda) \to I \ ,$$

veya

$$\lambda \to \infty \quad \text{için} \quad \Psi_2(\lambda) \to I \ ,$$

ise buna kanonik normalize denir.

1. Regüler Riemann problemi

Ψ_1 *ve* Ψ_2 matris fonksiyonları analitiklik bölgelerinde, $\det\Psi_1 \neq 0$, $\det\Psi_2 \neq 0$ şartlarını sağlıyorsa bu tür Riemann problemine, regüler Riemann problemi denir. Normalize edilmiş Riemann probleminin çözümü tektir.

Gerçekten $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(1)}$ *ve* $\Psi_1^{(2)}, \Psi_2^{(2)}$ Riemann probleminin iki çözümü ise kontur üzerinde,

$$\Psi_1^{(1)}\Psi_2^{(1)} = \Psi_1^{(2)}\Psi_2^{(2)}$$

olacaktır. Buradan

$$\chi(\lambda) = \left[\,\Psi_1^{(2)}(\lambda)\right]^{-1}\Psi_2^{(1)}(\lambda) = \Psi_2^{(2)}(\lambda)\left[\,\Psi_2^{(1)}(\lambda)\right]^{-1}$$

yazabiliriz. Görüldüğü gibi bu fonksiyon bütün kompleks düzleme devam ettirilmiş analitik fonksiyondur ve sonsuzda birim matrisine yaklaştığından dolayı sınırlıdır. Liouville teoremine göre $\chi(\lambda)$ fonksiyonu sabit matris, yani $\chi(\lambda) = I$ dır. Buradan

$$\Psi_1^{(2)}(\lambda) = \Psi_1^{(1)}(\lambda)$$

$$\Psi_2^{(2)}(\lambda) = \Psi_2^{(1)}(\lambda)$$

olur.

Regüler Riemann probleminin çözümü singüler integral denklemler sistemine indirgenir. Γ konturunun dışında alınmış λ_0 noktası için $\Psi_2(\lambda_0) = g$ olsun. Riemann probleminin çözümünü

$$\Psi_1^{-1}(\lambda) = h + \int_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi \qquad \text{konturun içinde}$$

$$\Psi_2(\lambda) = h + \int_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi \qquad \text{konturun dışında} \tag{E.2}$$

şeklinde arayalım.

$\Psi_2(\lambda_0) = g$ olduğundan dolayı

$$h = g - \int_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi \qquad \text{(E.3)}$$

olur. Kontur üzerinde ise Sohocxi - Plemel formülüne göre

$$\Psi_1^{-1}(\lambda) = h + vr.\int_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + \pi i \Phi(\lambda)$$

$$\Psi_2(\lambda) = h + vr.\int_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi - \pi i \Phi(\lambda) \qquad \text{(E.4)}$$

yazabiliriz. (E.3) ile (E.4) ' ü (E.1) ' de yerine yazarsak

$$g - \int_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + \pi i \Phi(\lambda) T(\lambda) + vr.\int_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi = 0 \qquad \text{(E.5)}$$

$$T = (G + I)(G - I)^{-1}$$

olur.

Özel halde Γ konturu $(-\infty, \infty)$ aralığı olursa ve normalize kanonik ise (h=g=1) (E.5) denklemler sistemi aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{1}{\pi i}\left(vr.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + I\right) + \Phi(\lambda) T(\lambda) = 0 \ . \qquad \text{(E.6)}$$

Eğer N=1 olursa Ψ_1 *ve* Ψ_2 skaler fonksiyonlar olur. Bu halde regüler Riemann problemi açık formda çözüme sahiptir.

(E.1) ifadesinden

$$\ln \Psi_2(\lambda) - \ln \Psi_1^{-1}(\lambda) = \ln G(\lambda) \qquad \text{(E.7)}$$

olur. Ψ_1 *ve* Ψ_2 fonksiyonlarının regülerliğine göre analitik oldukları bölgelerde sıfırları yoktur. O zaman bu bölgelerde Ψ_1 *ve* Ψ_2 fonksiyonlarının logaritmalarıda analitik fonksiyonlardır ve Cauchy integrali şeklinde gösterilebilirler.

$$\ln\Psi_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi\ , \qquad Im\lambda < 0$$

$$\ln\Psi_1^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi\ , \qquad Im\lambda > 0\ . \tag{E.8}$$

Bu ifadeler (E.7) denklemini sağlamaktadırlar. Buradan

$$\Psi_2(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi\right)\ , \qquad Im\lambda < 0$$

$$\Psi_1(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi\right)\ , \qquad Im\lambda > 0\ . \tag{E.9}$$

olur. (E.9) formülü regüler Riemann probleminin çözümünü verir. Burada (E.8) integralinin yakınsak olması, özel halde ise $G(\lambda)$ matris fonksiyonunun kutup noktası ve sıfırlarının olmaması Riemann probleminin çözülebilirliği için gerekli şarttır.

Matris halinde, regüler Riemann probleminin çözümünün olması için $G(\lambda)$ matris fonksiyonunun sınırlı ve determinantının sıfırdan farklı olması yeterli değildir. Kontur üzerinde olan keyfi λ için $G(\lambda)$ matris fonksiyonunun reel kısmının $ReG(\lambda) > 0$ olması şartı gerekli şarttır (Zakharov et.al, 1980). İleride regüler Riemann probleminin çözülebilirliğini kabul edeceğiz. Gördüğümüz gibi normalize şartlar dahilinde çözülebilirlik tek olur.

2. Singüler Riemann problemi

$\Psi(\lambda)$ matris fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ için $\det\Psi(\lambda_0)=0$ oluyorsa o zaman λ_0 'a $\Psi(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfırı denir. Bu noktada $\Psi^{-1}(\lambda)$ fonksiyonunun tekilliği sonlu mertebeden kutup noktası olur. $\lambda=\lambda_0$ noktasında $\Psi^{-1}(\lambda)$ fonksiyonu birinci mertebeden kutup noktasına sahip olduğunda yani $\lambda=\lambda_0$ civarında $\Psi^{-1}(\lambda)$ fonksiyonunun seriye açılımı

$$\Psi^{-1}(\lambda)=\frac{A}{\lambda-\lambda_0}+C+\ldots$$

şeklinde ise bu noktaya basit nokta denir. O zaman $\Psi(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi seriye açılabilir.

$$\Psi(\lambda)=B+D(\lambda-\lambda_0)+\ldots$$

Burada

$$AB=BA=0$$

$$AD+CB=BC+DA=1$$

olur. Skaler halde B=0 olacak ve $\lambda=\lambda_0$ basit sıfır olacaktır. Bu hal için Riemann problemini öğrenelim. $\Psi_1(\lambda)$ fonksiyonunun Γ konturu içinde, $\Psi_2(\lambda)$ nın ise konturun dışında analitik ve bu fonksiyonlarının sıfırlarının aynı sayıda olduklarını farzedelim. $\Psi_1(\lambda)$ ' nın sıfırlarını $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ile $\Psi_2(\lambda)$ ' nın sıfırlarını ise $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ ile gösterelim. Bu sıfırlar Γ konturu üzerinde değildirler.

$$\Psi_1(\infty)=1,\qquad \Psi_2(\infty)=1$$

olsun. Şimdide aşağıdaki yardımcı fonksiyonlara bakalım.

$$\tilde{\Psi}_1(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda-\mu_j}{\lambda-\lambda_j}\Psi_1(\lambda)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda-\mu_j}\Psi_2(\lambda)$$

$\tilde{\Psi}_1$ *ve* $\tilde{\Psi}_2$ fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. Aynı zamanda,

$$\tilde{\Psi}_1(\infty)=\tilde{\Psi}_2(\infty)=1$$

dir.

$$\tilde{\Psi}_1(\lambda)\tilde{\Psi}_2(\lambda)=\Psi_1(\lambda)\Psi_2(\lambda)=G(\lambda)$$

şeklinde regüler Riemann problemine dönüşür. Bununda çözümü (E.9) formülünde verilmiştir. Buradan görüldüğü gibi sıfırları olan Riemann probleminin tekliği bozulur. Bu tür problemlerde normalizeden başka sıfırların nasıl yerleştiğide verilmelidir.

Yukarıdaki problem yalnız aşağı ve yukarıda sıfırların eşit olması halinde geçerlidir.

ÖZ GEÇMİŞ

14.08.1965 : Kastamonu ' da doğdu.

30.06.1982 : İlk, orta, lise öğrenimini İstanbul ' da bitirdi.

12.05.1987 : Y.T.Ü. Matematik Mühendisliği Bölümünü bitirdi.

20.04.1988 -30.11.1990 : Tarihleri arasında Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma Görevlisi olarak çalıştı.

20.11.1990 : Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimini bitirdi.

01.12.1990 - 31.03.1992 : Tarihleri arasında Yedek subay öğretmen olarak askerlik hizmetini Hatay Dörtyol ' da Kuzuculu Kazım Karabekir Lisesinde yaptı.

15.06.1992 : Y.T.Ü. Matematik Mühendisliği Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı. Halen aynı görevine devam etmektedir.

13.02.1993 : Güler Güler ile evlendi.

01.10.1993 : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora Öğrenimine başladı.