YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

DOKTORA TEZİ

FATMA TİRYAKİ

İSTANBUL, 1993

Çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen, daima destekleyici ve yönlendirici olan saygıdeğer hocam Yard.Doç.Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Fatma TİRYAKİ

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

Çalışmamızın konusu,çok amaçlı optimizasyon sahasında yer alan çok amaçlı lineer kesirli programlama problemidir. Çalışmamız dört ana bölümle hedefine ulaşmaktadır.

Birinci bölümde lineer kesirli programlama, ikinci bölümde çok amaçlı lineer programlama, üçüncü bölümde ise çok amaçlı lineer kesirli programlama problemlerinin tanımları, uygulama alanları, özellikleri verilmiş ve literatürden çözüm yöntemleri ele alınmıştır.

Çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde ise çok amaçlı lineer kesirli programlama problemi için çözüm önerilerimiz yer almaktadır.

Karar verici amaçlar arasında öncelik tercihi yapmıyorsa "denk amaçlar durumu", öncelik tercihleri yapıyorsa "ön - celikli amaçlar durumu", öncelik tercihleri yanında tolerans bilgisini de veriyorsa "toleranslı amaçlar durumu" başlıkları altında üç ayrı çözüm önerisi takdim etmekteyiz.

SUMMARY

THE SOLUTION PROPOSALS FOR MULTIPLE OBJECTIVE LINEAR FRACTIONAL PROGRAMMING PROBLEM

The subject of this thesis is the problem of multiple objective linear fractional programming which occupies a place in the field of multiple criteria optimization. Our study achieves its aim with four main sections.

In the first section linear fractional programming, in the second section multiple objective linear programming,in the third section multiple objective linear fractional programming are given and also their definition,application areas, properties and solution methods are considered.

The fourth section, which constitutes orijinal part of our study, consists of solution proposals for multiple objective linear fractional programming problem.

In this thesis, we present three separate solution proposals under the titles that are given below.

1) If the decision maker doesn't give priority to objectives we can use "the case of equivalent objectives",
2) If the decision maker gives priority to objectives; we can use "the case of objectives with priority",
3) If the decision maker gives priority to objectives together with tolerance information; we can use "the case of objectives with tolerance".

G İ R İ Ş

Kıt kaynakların nasıl en iyi, en verimli şekilde kul - lanılabileceği her an rastladığımız bir sorundur. Bu ekonomik davranma arayışı bizi optimizasyon kavramına götürmek - tedir.

Kesirli programlama problemleri de, belirli kısıtlayıcı şartlar altında, kesirli fonksiyonun optimizasyonu problemleridir. Dolayısıyla amaç fonksiyonu denilen bu fonksiyonu maksimum (ya da minimum) yapan çözümler belirlenmeye çalı - şılmaktadır. Eğer kısıtlayıcı denklemler ve amaç fonksiyonunun payı ve paydası lineer yapıda ise problem lineer kesirli programlama problemidir.

Lineer programlamada, örneğin kâr maksimizasyonu ya da maliyet minimizasyonu ele alınırken, lineer kesirli programlamada stok/satışlar, kâr/maliyet, yatırım kazancı/sermaye vs. gibi kesirli formdaki amaçlar optimize edilir.

Gerçek yaşam problemlerinde genellikle optimize edilecek amaç sayısı birden fazladır ve bu durumda çok amaçlı optimizasyon sözkonusudur. Bu çalışmadaki amacımız da, birden fazla lineer kesirli kriter (amaç) içeren problemler için çözüm önerileri sunmaktır.

Lineer programlama ve ilgili olarak temel matematik kavramlarınbilindiği düşüncesi ile çalışmamızı dört bölümde topladık.

Birinci bölümde lineer kesirli programlama probleminin tanımı, özellikleri ve çözüm yöntemleri ele alınmaktadır.

İkinci bölümde, çok amaçlı lineer programlama probleminin tanımı, çok amaçlı karar verme sahasındaki yeri, temel kavramları ve çözümü için temel yaklaşımları ana hatlarıyla verilmiştir.

Üçüncü bölüm çok amaçlı lineer kesirli programlama problemine ayrılmış olup tanımı, temel kavramları, bir örneği ve çözüm yöntemleri anlatılmaktadır.

Çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde ise üç mümkün durum için çözüm önerilerimiz yer almaktadır.

"*Denk amaçlar durumu*"nda, karar vericinin amaçlarla ilgili öncelik tercihleri yoktur. Yaklaşımımızda hedef programlama, tek amaçlı lineer kesirli programlama ve kesirli hedef programlama kullanılarak çözüm bulunmaktadır. Yöntem bir örnek üzerinde de açıklanmaktadır.

"*Öncelikli amaçlar durumu*"nda, karar vericiden amaçların önem sıralaması istenmekte, bu sıra içinde en fazla k adımda (k amaçların sayısıdır) çok amaçlı lineer kesirli programlama problemine çözüm bulunmaktadır.

"*Toleranslı amaçlar durumu*"nda ise, karar vericiden amaçların önemine göre sıralama bilgisine ilave olarak, her bir amacın optimum değerinden bir sonraki öncelikli amaç lehine yapabileceği yüzdelik tolerans bilgisi istenmektedir. Böylece bir sonraki öncelikli amaçlar lehine esneklik sağlanmaktadır. Yine en fazla k adımda çözüm bulan önerimiz bir örnek üzerinde de açıklanmaktadır.

Çalışmamızın sonuç kısmında, ne yaptığımız, hangi boşluğu kapattığımız ve bu çalışmanın üzerine ileride ne yapılabileceği konusundaki düşüncelerimiz yer almaktadır.

BÖLÜM I

LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA

Programlama problemleri, arzu edilen amaçları gerçekleştirmede kısıtlı kaynakların dağıtımını ya da etkin kullanımı ele alır. Bu problemler, temel koşulları (kısıtları) sağlayan çok sayıda çözümlerle karakterize edilir. En iyi çözüm olarak belli bir çözümü seçme, problemde ifade edilen amaca bağlıdır. Hem problemin koşullarını hem de verilen amacı en iyi doyuran çözüm, programlama probleminin "*optimum*" çözümüdür (1).

Biz bu bölümde programlama problemlerinin ya da optimizasyonun özel bir alt sınıfı olan "lineer kesirli programlama problemleri" ile ilgileneceğiz. Bu nedenle önce kesirli programlamanın tanımını yapalım ve literatürdeki uygulama örneklerini verelim.

1. KESİRLİ (FRACTIONAL) PROGRAMLAMA

1.1. TANIMI VE FARKLI TİPLERİ

$$\max \{q(x) = \frac{n(x)}{d(x)} \mid x \in S\}$$

şeklindeki optimizasyon problemi "kesirli (fractional)

(1) GASS, S.I., "Linear Programming, Methods and Applications", Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1969, s.3.

programlama problemi" olarak adlandırılır. Burada

$$S = \{x \in R^n \mid h_i(x) \leq b_i, \quad i=1,\dots,m\}$$

dir ve S üzerinde $d(x) > 0$ dır. Şimdi kesirli programlamanın farklı tiplerini verelim:

i) Bütün $n(x)$, $d(x)$ ve $h_i(x)$ ler "afin" (affine) ise, yani lineer bir fonksiyon ve sabitin toplamı ise, probleme "lineer kesirli programlama problemi",

ii) $n(x)$ ve $d(x)$ ler kuadratik fonksiyonlar ve $h_i(x)$ ler afin ise, probleme "kuadratik kesirli programlama problemi",

iii) $n(x)$ konkav ve $d(x)$ ile $h(x)$ konveks ise probleme "konkav-konveks kesirli programlama problemi" denir.

1.2. LİTERATÜRDE KARŞILAŞILAN BAZI KESİRLİ PROGRAMLAMA ÖRNEKLERİ

1956 dan bu yana bir hayli kesirli programlama ile ilgili çalışmaya rastlanmıştır.

Gilmore ve Gomory 1963 de kağıt endüstrisi ile ilgili bir stok probleminde lineer kesirli amaç kullanmışlardır. Verilen kısıtlar altında, artık malların kullanılan hammadde miktarına oranını minimize ederek probleme çözüm önermişlerdir.

Mamulün verimliliğinin optimizasyonuna da endüstriyel alanda sık sık rastlanmaktadır.

Heinen 1971 de kaynak dağıtım probleminde (resource allocation problem) yatırım kazancını maksimize etmiştir. Bu, kârın sermayeye oranının maksimum yapılacağı anlamındadır (1). Mjelde ise 1978 de kaynak dağıtım probleminde kârın maliyete oranını maksimize etmiştir. Bir başka örnek enerji üretim planlamasıdır. Burada başlangıç yatırım fonları ve diğer kaynaklar problemin kısıtlarını oluşturur. İşletme kârı işletme maliyetine bölünür ve bu oran maksimum yapılır. İlave örnekler olarak, projelere işgüçlerinin atanması (assignment) probleminde birim zaman ya da maliyet başına kârın maksimum yapılması; yatırımların seçimi probleminde de kazanç oranı ya da kârın riske oranının maksimum yapılması verilebilir (2).

Kazancı, kârı, maliyeti ya da sermayeyi tanımlayan fonksiyonların durumlarına göre kesirli problem; lineer, kuadratik ya da konkav-konveks kesirli programlama problemleri olarak tanımlanır.

Zamanı içeren oran optimizasyon problemine örnek olarak Arisawa ve Elmaghraby'nin 1972 makalesi verilebilir. Yazarlar şebeke problemini ele almıştır. İlave yatırımlarla proje süresi azaltılabilir. "Birim zaman başına maliyetteki azalmayı maksimum yapacak şekilde, her bir faaliyete mevcut kaynaklar tahsis edilebilir" fikrinden hareketle yazarlar lineer kesirli amaç oluşturmuşlardır.

Dolaylı bir uygulama örneği verelim. Büyük ölçekli lineer programlar ayrışım (decomposition) prensipleri kullanılarak sonlu sayıda küçük lineer kesirli problemlere indirgenebilir. Bu kesirli programlarda amacı oluşturan oran, simpleks metodun minimum oran kuralından kaynaklanır. Bu tipteki ayrışım yöntemleri Lemke ve Powers, Abadie ve Williams, Bell gibi yazarlar tarafından önerilmiştir (3).

---

(1) SCHAIBLE, S., "Fractional Programming:Applications and Algorithms", EJOR, 7, 1981, s.111-120.

(2) MJELDE, K.M., "Allocation of Resources According to a Fractional Objective", EJOR, 2, 1978, s.116-124.

(3) SCHAIBLE, s. a.g.e.

2. LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA

2.1. TANIM

Lineer Kesirli Programlama (LKP) Problemi

$$\text{Amaç} \quad : \max \left\{ \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = z(x) \right\} \tag{1.1}$$

$$\text{Kısıtlar} : x \in S = \{x \in R^n \mid A x = b, \quad x \geq 0, \; b \in R^m\}$$

şeklindedir. Burada c ve d'ler, sırasıyla pay ve paydadaki fonksiyonların n boyutlu katsayılar vektörleri; x,n boyutlu karar değişkenleri vektörü; α ve β'lar ise sabitlerdir. Yapılan kabuller, S uygun çözümler kümesinin $\emptyset \neq S \subset R^n$ ve kompakt küme olması ve z amaç fonksiyonunun paydasının S de pozitif olması,yani

$$\min \{ d^T x + \beta \mid x \in S\} > 0$$

olmasıdır.

LKP probleminde şu geometrik özellikler vardır:

i) Her $\bar{z}$ için $(c^T x + \alpha) - \bar{z}(d^T x + \beta) = 0$ hiperdüzlemleri, $\{x \in R^n \mid z(x) = \bar{z}\}$ ve $r = \{x \in R^n \mid c^T x + \alpha = 0$ ve $d^T x + \beta = 0\}$ kümelerini içerir. r kümesine "*rotasyon kümesi*" denir. Payın 0-yüzey eğrisi ile paydanın 0-yüzey eğrisi arasındaki tüm kesişim noktaları kümesidir. R^2 de rotasyon kümesi "*rotasyon noktası*" olarak, R^3 de "*rotasyon ekseni*" olarak adlandırılır. Böylece $\bar{z}$ ler değiştikçe bu hiperdüzlemler lineer programlamada (LP) olduğu gibi birbirine paralel kaymaz, n-2 boyutlu bu rotasyon kümesinden geçerler.

ii) İki lineer fonksiyonun oranı olan z(x) fonksiyonu ne konvekstir ne de konkavdır (1,2).

Böylece z(x), iki lineer fonksiyonun oranı olarak lineer olmayan bir yapıda olmasına rağmen, keyfi $\bar{z}$-yüzey eğrisi için

$$\frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = \bar{z}$$

ifadesi düzenlenerek

$$(c-\bar{z}d)^T x = \beta\bar{z} - \alpha$$

lineer denklemi elde edilir. Bu nedenle LKP probleminin optimum çözümü varsa, S nin uç noktalarından en az birinde oluşur.

<u>Örnek:</u> Grafiği Şekil 1.1 de verilen

Amaç : $\max\{ \dfrac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} = z \}$

Kısıtlar: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 3$

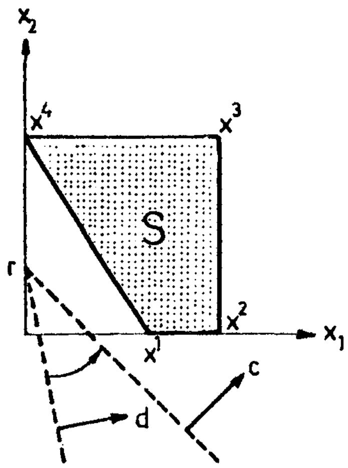
$x_1, x_2 \geq 0$

LKP problemini ele alalım. Problemin dört uç noktası vardır ve bu noktaların amaç değerleri de gösterilmiştir. Kesik çizgiler pay ve paydanın O-yüzey eğrileridir ve rotasyon

(1) BITRAN, G.R., "Experiments With Linear Fractional Problems", Naval Res. Log. Quart, Vol. 26, 1979, s. 689-693.

(2) GASS, S.I., a.g.e.

kümesi $r=(0,1)$ dir. Dairesel ok, lineer kesirli amaç fonksiyonunun gradyantını gösterir. Gradyant yönünde dönme gözönüne alınırsa, x^4 ün optimal nokta olduğu görülür.



$$x^1 = (2,0) \qquad z^1 = \frac{1}{9}$$

$$x^2 = (3,0) \qquad z^2 = \frac{2}{14}$$

$$x^3 = (3,3) \qquad z^3 = \frac{5}{17}$$

$$x^4 = (0,3) \qquad z^4 = 1$$

$$r=(0,1)$$

Şekil 1.1.

2.2. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

LKP problemlerinin çözüm yöntemlerini üç ana başlık altında inceleyelim:

1. Değişken dönüşümü yöntemi
2. Güncelleştirilmiş (updated) amaç fonksiyon yöntemi
3. Parametreye bağlı çözüm yöntemleri.

2.2.1. Değişken Dönüşümü Yöntemi

Charnes ve Cooper tarafından 1962 de verilmiştir. Paydanın kompakt S kümesinde her yerde pozitif olduğu ve değişken dönüşümünün

$$\rho = \frac{1}{d^T x + \beta}$$

ile yapıldığı kabul edilir. Bu dönüşüm ile amaç fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i x_i \rho) + \alpha \rho$$

olur. Her i için $y_i = x_i\rho$ dönüşümleri de yapılırsa, LKP problemi

$$\text{Amaç} \quad : \max \quad \{c^T y + \alpha\rho\}$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar: } & Ay - b\rho = 0 \\ & d^T y + \beta\rho = 1 \\ & 0 \leqslant y \in R^n, \; 0 \leqslant \rho \in R \end{aligned}$$

şeklinde n+1 değişkenli, m + 1 kısıtlı LP problemine dönüşür (1).

Teorem: z(x) in maksimumu, $Ax=b$, $x \geqslant 0$ ın uygun temel çözümünde meydana gelir.

İspatında şu yardımcı teorem gereklidir.

Yardımcı teorem:
$$\begin{aligned} & Ay - b\rho = 0 \\ & d^T y + \beta\rho = \gamma \\ & y, \rho \geqslant 0 \; (\gamma \neq 0, \text{ spesifik bir sayıdır.}) \end{aligned}$$

kısıtlarını sağlayan her y, ρ çözümlerinde $\rho > 0$ dır (2).

2.2.2. Güncelleştirilmiş (Updated) Amaç Fonksiyonu Yöntemi

Bitran ve Novaes tarafından 1973 de verilen bu yöntemde, kesirli amaç fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki bölgesel (local) gradyantı

---

(1) STEUER, R.E., "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application", John Wiley and Sons. Inc., 1986, s.337-362.

(2) SWARUP, K., "Linear Fractional Functionals Programming", Op. Res., 13, 1965, s.1029-1036.

$$\nabla z(\bar{x}) = \frac{(d^T\bar{x} + \beta)\, c - (c^T\bar{x} + \alpha)\, d}{(d^T\bar{x} + \beta)^2}$$

periyodik olarak yeniden hesaplanır. Bu gradyantlar, bir lineer programlama probleminin amaç fonksiyonu katsayıları olarak alınır ve böylece bir dizi LP problemi çözülerek LKP problemi çözülür.

Yöntemin algoritması şöyledir:

Adım 1) $i = 0$ alınız.

Adım 2) $i = i + 1$ yapınız.

Adım 3) $x^{(i)}$ noktasında amaç fonksiyonunun bölgesel gradyantını hesaplayınız.

Adım 4) $\max \{\nabla z(x^i)x \mid x \in S\}$ problemini çözerek $x^{(i+1)}$ uç noktasını bulunuz.

Adım 5) $x^{(i+1)} \neq x^{(i)}$ ise Adım 2 ye gidiniz, aksi halde Adım 6 ya gidiniz.

Adım 6) $x^{(i)}$, LKP probleminin optimal çözümüdür.

Bu yöntem, S nin sınırsız olması durumunda yakınsamayabilir (1).

2.2.3. Parametreye Bağlı Çözüm Yöntemleri

LKP problemlerinin çözüm yöntemleri arasında en genel ve gösterişlisi parametrik yaklaşımlardır ve önemli bir sınıf oluştururlar.

---

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.362

(1.1) problemini

$$\bar{\lambda} = \max \{ z(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \mid x \in S \}$$

şeklinde yeniden gösterelim. Bu problemin optimal çözümler kümesi $X^* \neq \emptyset$ olsun.

Parametrik yaklaşımın önerdiği fikir bu problemi indirekt olarak ele almaktır. Yani, bu probleme bir çözümün, $\lambda \in R$ parametre olmak üzere şu parametrik problemi

$$z(\lambda) = \max \{z_\lambda(x) = c^T x + \alpha - \lambda(d^T x + \beta) \mid x \in S\} \qquad (1.2)$$

çözme yoluyla bulunabileceğini ifade eder. $X^*(\lambda)$, bu problemin optimal çözümler kümesi olsun. (1.1) ve (1.2) arasındaki bağ şu teorem ile kurulur.

Teorem: $x \in X^*$ olması için g.v.y.ş. $x \in X^*(z(x))$ dir. Böylece $X^* = X^*(\bar{\lambda})$ dir. Ayrıca, $x \in X^*$ olması için g.v.y.ş. $z(\lambda) = 0$ olmasıdır.

Bu teorem, parametrik yaklaşımın temel teoremidir (1).

(1.1) probleminin amaç fonksiyonunun payı ve paydası afin olduklarından (1.2) nin amaç fonksiyonu da afindir, oysa $(c^T x + \alpha)/(d^T x + \beta)$ oranı afin değildir. Bu yaklaşımların değeri de (1.2) nin (1.1) den daha kolay incelenmesindedir.

Teoremden (1.2) nin optimal çözümü aynı zamanda (1.1) in optimal çözümüdür. Bu nedenle (1.1)i çözmek, aslında $z(\lambda) = 0$ ı sağlayan $\lambda = \bar{\lambda}$ yi bulmaya eşdeğerdir. Bu $z(\lambda)$ nın R de sürekli, konveks ve monoton azalan, $\lambda < \bar{\lambda}$ için $z(\lambda) > 0$ ve $\lambda > \bar{\lambda}$ için $z(\lambda) < 0$ gibi özellikleri vardır.

---

(1) SNIEDOVICH, M., "Fractional Programming Revisited", EJOR, Vol. 33, 1988, s.334-341.

(Şekil 1.2). Dolayısıyla $z(\lambda)=0$ ı sağlayan çözüm tektir.

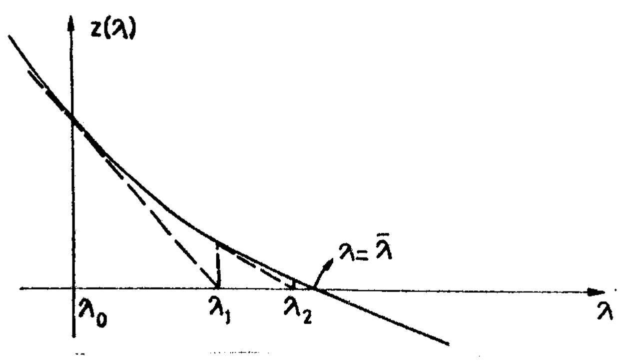
Bu düşünce ile parametrik yaklaşıma dayanan kesirli programlama algoritmaları, $z(\lambda)=0$ denklemine bir çözüm arayan iteratif prosedürlerdir. Bir örnek olarak Dinkelbach algoritmasını verelim.

Adım 1) $z(\lambda) \geq 0$ sağlanacak şekilde λ^L bularak $\lambda=\lambda^L$ alınız.

Adım 2) (1.2) problemini çözünüz. Eğer $|z(\lambda)| \leq \delta$ ise durunuz. Aksi halde Adım 3 e gidiniz.

Adım 3) $\lambda = \dfrac{c^T x^* + \alpha}{d^T x^* + \beta}$ alınız. Burada x^*, (1.2) nin Adım 2 de elde edilen optimal çözümüdür. Adım 2 ye geri dönünüz.

Yöntem Şekil 1.2 de kırık çizgi ile gösterildiği tarzda $\bar{\lambda}$ ye yakınsayarak $\{\lambda_i\}$ leri oluşturur. λ_i, $\bar{\lambda}$ ye yeteri kadar yaklaştığında, yani verilen $\delta \geq 0$ sabiti için $|z(\lambda_i)| \leq \delta$ olduğunda iterasyon sona erdirilir (1,2).



Şekil 1.2. Dinkelbach Yöntemiyle Elde Edilen $\{\lambda_i\}$ ler ve $z(\lambda)$ nın Gösterilişi

---

(1) IBARAKI, T., "Parametrik Approaches to Fractional Programs", Math. Prog., V. 26, 1983, s.345-362.

(2) SCHAIBLE, S., "Fractional Programming II, On Dinkelbach's Algorithm", Man. Sci., Vol. 22, No. 8, April, 1976, s.868-873.

Temelinde bu düşünce olan yaklaşımları ilk olarak Isbell ve Marlow 1956 da, Martos 1964 de kullanmıştır. Daha sonraları da benzer algoritmalar başka yazarlar tarafından verilmiştir.

Bir başka parametrik yaklaşım düşüncesi de Wolf tarafından 1985 de önerilmiştir. Wolf,(1.1) probleminin optimal çözümünü, bu problemle yakın ilişkisi olan ikâme bir LP probleminin parametrik analizini kullanarak hesaplamaktadır. Bunun için birinci adımda;

Amaç : $\eta(\delta) = \max c^T x + \alpha$

Kısıtlar : $x \in S$ (1.3)

$$d^T x + \beta = \delta, \; \delta \in \Delta$$

lineer parametrik programlama problemi çözülür. Burada

$$\Delta = \{\delta \in R \mid S \cap \{x \in R^n \mid d^T x + \beta = \delta\} \neq \emptyset\}$$

şeklindedir. İkinci adımda;

$$\max \left\{\frac{\eta(\delta)}{\delta} \mid \delta \in \Delta\right\} \quad (1.4)$$

probleminin optimal çözümü hesaplanır.

S nin kompaktlık kabulünden dolayı Δ parametre kümesi kapalı bir aralık tanımlar. Δ üzerinde η fonksiyonu sürekli, parça-parça lineer ve konkavdır. Δ aralığı S de $[\delta_j, \delta_{j+1}]$ $j = 1,\ldots,J$ gibi alt aralıklara ayrışabilir ve her bir alt aralıkta η fonksiyonu lineerdir. Yani, $j=1,\ldots,J$ için

$$\eta(\delta) = a_j\delta + b_j \quad , \quad \delta \in [\delta_j, \delta_{j+1}]$$

şeklindedir. (1.3) deki parametrik analizden a_j, b_j, $j=1,\ldots J$ katsayıları hesaplanabilir. $\eta(\delta)$ nın konkavlığından

$$b_j < b_{j+1} \qquad j=1,\ldots,J-1$$

dir. $\eta(\delta)/\delta$ fonksiyonunun (δ_j, δ_{j+1}) deki türevi

$$(\eta(\delta)/\delta)' = -b_j/\delta^2$$

olduğundan, $\eta(\delta)/\delta$ fonksiyonu $[\delta_j,\ \delta_{j+1}]$ aralığında

$$\begin{cases} b_j < 0 \text{ için tam monoton artan} \\ b_j = 0 \text{ için sabit} \\ b_j > 0 \text{ için tam monoton azalan} \end{cases}$$

dır. O halde Δ^o, (1.4) ün optimal çözümler kümesi olmak üzere,

i) $\eta(\delta) = a_j\delta$ şeklinde $[\delta_j, \delta_{j+1}]$ aralığı mevcutsa

$\Delta^o = [\delta_j,\ \delta_{j+1}]$ dir.

ii) $\eta(\delta) = a_j\delta + b_j$, $j=1,\ldots, J$ de $b_j \neq 0$ ise,

$$\delta^* = \begin{cases} \delta_{J+1} & , b_J < 0 \text{ ise} \\ \delta_1 & , b_1 > 0 \text{ ise} \\ \delta_j & , b_{j-1} < 0,\ b_j > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak $\Delta^o = \{\delta^*\}$ dır.

Böylece (1.4) probleminin optimal çözümü δ^o, (1.4) problemi direkt olarak çözülmeden, sadece b_j katsayıları karşılaştırılarak bulunur. $\delta \in \Delta$ için $x(\delta)$, (1.3) ün; X^* da

(1.1) in optimal çözümleri olmak üzere

$$X^{*} = \bigcup_{\delta \in \Delta^{o}} x(\delta)$$

elde edilir. (1.1) in optimal amaç fonksiyon değeri de $\eta(\delta^{o})/\delta^{o}$ ile hesaplanır (1).

---

(1) WOLF, H., "A Parametric Method for Solving the Linear Fractional Programming Problem", Op. Res., V. 33, No. 4, 1985, s.835-841.

BÖLÜM II

ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMA

1. ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME'DEKİ YERİ

Çok amaçlı lineer programlama konusuna geçmeden önce bu konunun *"Çok Kriterli Karar Verme"* (Multiple Criteria Decision Making) sahasındaki yerini görelim.

Çok kriterli karar verme, karar vericilerin birçok kriterlere göre seçenekleri (ürünler, projeler, vs.) tanımlamasına, değerlemesine, sıralamasına, derecelendirmesine, seçme ya da reddetmesine yardımcı olan kavramlar, yaklaşımlar, modeller ve yöntemler bütünüdür (1). Burada kriter ifadesi bir değerlendirme ölçüsüdür, hedefler (goals-targets) ve amaçlar (objectives) şeklinde sınıflandırılabilir. Hedef belli bir noktayı gösterirken, amaç genel olarak bir istek yönünü gösterir.

Çok kriterli karar vermenin üc ana unsuru; kararı veren karar vericiler, optimize edilmeye çalışılan kriterler kümesi ve içinden seçim yapılacak seçenekler kümesidir (2).

---

(1) COLSON, G., DE BRUYN, C., "Models and Methods in Multiple Criteria Decision Making", Special Issue of the Journal Mathematical and Comp. Modelling, Vol. 12, No. 10/11, Pergamon Press, Oxford, 1989, s.1201.

(2) ZIONTS, S., "Multiple Criteria Mathematical Programming: An Updated Overview and Several Approaches", in B.Karpak and S. Zionts, Multiple Criteria Decision Making and Risk Analysis Using Microcomputers, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989, s.7-60.

Çok Kriterli Karar Verme, seçeneklerin yapısına göre iki ana başlık altında incelenir. Bunlar:

i) Çok Nitelikli Karar Analizi (Multiattribute Decision Analysis)

ii) Çok Kriterli Optimizasyon (Multiple Criteria Optimization) ya da Çok Amaçlı Matematik Programlama (Multiple Objective Mathematical Programming)

dır. Çok nitelikli karar analizinde seçenekler kümesi sonlu ve ayrıktır. Seçenekler birer birer ele alınarak birçok kriterlere göre sıralanması, derecelendirmesi ve değerlendirilmesi yapılır. Çok kriterli optimizasyon ise daha çok uygun seçenekler sayısı büyük olan deterministik problemlere uygulanabilir. Seçenekler kümesi, karar değişkenleri üzerinde tanımlanmış kısıtlarla oluşturulur. Aynı anda birden fazla amaç fonksiyonu ele alınır. Her iki başlık altında da, uygun seçenekler, etkin algoritmalar kullanılarak küçük sayıda (tek olabilir) seçeneklere daraltılır. Bu daraltma sonucunda bulunan seçenekler kümesi, istenen çözümler kümesidir (1).

Biz, çalışmamızda, Çok Amaçlı Matematik Programlama üzerinde duracağız. Çok amaçlı matematik programlama problemi, genel olarak; x_1, $x_2,\ldots,x_n$ gibi n tane reel değişkenli

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq 0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

kısıtlar kümesi üzerinde

$$f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad j=1,2,\ldots,k$$

---

(1) STEUER, R.E., "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application", John Wiley and Sons, Inc. 1986, s.5.

. COLSON, G., DE BRUYN, C., a.g.e., s.vii-1201.

. VANDERPOOTEN, D., VINCKE, P., "Description and Analysis of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures", Math . Comput. Modelling, V.12, No. 10/11 1989, s.1221-1238.

. ROSENTHAL, R.E., "Concepts, Theory and Techniques: Principles of Multiobjective Optimization", Decision Sciences, V.16, 1985, s.133-152.

fonksiyonlarını aynı anda optimize (maksimize ya da minimize) eden bir problemdir. Bu problem, değişkenlerin yapılarına(sürekli, tamsayı vs.) veya g_i ve f_j fonksiyonlarının yapılarına (lineer ya da lineer olmayan, kesirli, konveks, türevlendirilebilen vs.) göre farklılık gösterebilir (1).

1.1. ÇOK AMAÇLI PROBLEMİN UYGULAMA ALANLARI

Tek amaçlı programlamada, kâr maksimizasyonu ya da maliyet minimizasyonu gibi tek bir amaç ele alınır. Oysa gerçek yaşam problemlerinde birden fazla ve de genellikle zıtlaşan amaçlar vardır. Çok amaçlı modelin uygulanabileceği problemlere örnek olarak şunları verebiliriz:

Petrol Rafineri Programı

Min {maliyet}
Min {ithal ham petrol}
Min {yüksek sülfürlü ham petrol}
Min {Talep durumundan sapmalar}

Üretim Planlama

Max {toplam net gelir}
Min {fazla mesailer}
Min {tamamlanmış mal stoğu}

Portföy Seçimi

Max {kâr}
Min {risk}
Max {kâr payları}
Min {hedeflerden sapmalar}

(1) VINCKE, P., "Analysis of Multicriteria Decision Aid in Europe", E.J.O.R., V.25, 1986, s.160-168.

<u>Taşıma</u>

Min {maliyet}
Min {taşıma süresi}
Max {belli bir proseste taşınan ürün}
Min {yakıt tüketimi}(1)

Şimdi, genel olarak verilen çok amaçlı matematik programlama probleminin lineer tipini inceleyelim.

2. ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMA (ÇALP) PROBLEMİ

Çok amaçlı lineer programlama problemi;

$$\text{Amaçlar}: \quad \begin{array}{l} \max \{c^1x = z_1\} \\ \max \{c^2x = z_2\} \\ \vdots \\ \max \{c^kx = z_k\} \end{array} \qquad (2.1)$$

$$\text{Kısıtlar}: \quad x \in S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geqslant 0,\ b \in R^m\}$$

şeklinde ya da "vektör maksimumu" formunda

$$\text{"max"} \quad \{Cx = z \mid x \in S\} \qquad (2.1)$$

olarak ifade edilebilir (2). Burada:

k : amaç sayısı,
c^i: i. amaç fonksiyonunun katsayıları (ya da gradyant vektörü bileşenleri),
z_i: i. amaç fonksiyonunun değeri (kriter değeri),
S : uygun çözümler bölgesi,

---

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.1-5.

(2) ISERMANN, H., STEUER, R.E., "Computational Experience Concerning Payoff Tables and Minimum Criterion Values Over the Efficient Set", E.J.O.R., V.33, 1987, s.91-97.

"max" : tüm amaçların aynı anda maksimize edileceğini gösteren ifade,

C : Amaç fonksiyonlarının k x n boyutlu katsayılar matrisi (matrisin satırlarını k tane amaç fonsiyonunun c^i gradyantları oluşturur),

z : amaç fonksiyonları vektörü (kriter vektörü)

dür (1).

max $\{Cx = z \mid x \in S\}$ problemine aynı zamanda lineer vektör maksimizasyonu problemi (LVMP) de denir ve "$x \in S$ üzerinde z yi maksimize etmek" demektir. Fakat z, vektör değerli olduğundan, kriter vektörleri arasında büyük, küçük ya da eşit olma şeklinde bir mukayese yapılmak istendiğinde bir düzenlemeye ihtiyaç duyulur. Bu düzenleme, tek amaçlı problemlerdeki "*optimallik*" kavramı yerine çok amaçlı prob - lemlere "*etkinlik*", "*baskınlık*" kavramlarını getirir. Böy - lece "max" sözcüğünün anlamı, problemin etkin çözümlerinin bulunması demektir. Karar vericinin (KV) de tercihleri göz- önüne alındığında, vektör maksimizasyonu probleminin anlamlı tanımı; "çok tercih edilen kriter vektörü z'yi hesaplamak için uygun bir $x \in S$ yi bulmaktır" şeklinde yapılabi - lir (2).

3. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

3.1. KARAR UZAYI, KRİTER UZAYI, İDEAL NOKTA

S kümesi "*karar uzayı*"nda uygun bölgeyi gösterirken,

$$Z = \{z \in R^k \mid z = Cx \ , \ x \in S\}$$

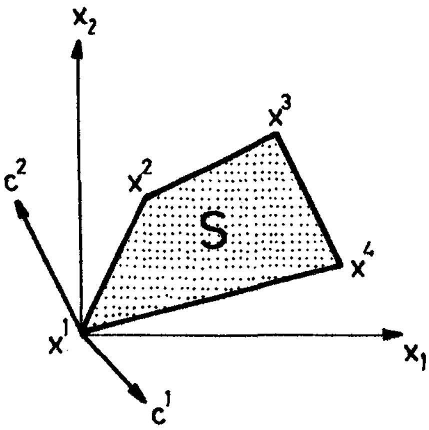
kümesi de "*kriter uzayı*"ndaki uygun bölgeyi gösterir. Yani Z, S deki tüm noktaların görüntü kümesidir.

---

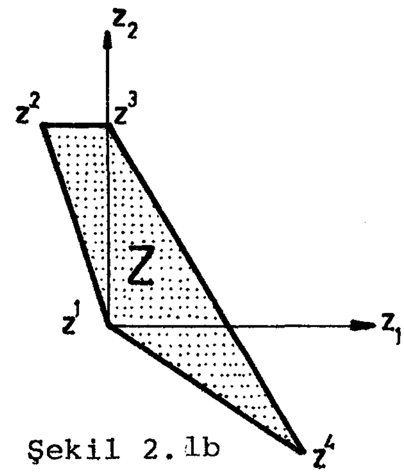
(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.138.

(2) ROSENTHAL, R.E., a.g.e.

Örnek:



Şekil 2.1a.



Şekil 2.1b

$c^1 = (1,-1)$ ve $c^2 = (-1,2)$ olan ÇALP problemini dik - kate alalım (Şekil 2.1a). S nin uç noktalarına ait kriter vektörleri

$$x^1 = (0,0) \qquad z^1 = (0,0)$$

$$x^2 = (1,2) \qquad z^2 = (-1,3)$$

$$x^3 = (3,3) \qquad z^3 = (0,3)$$

$$x^4 = (4,1) \qquad z^4 = (3,-2)$$

dir. Şekil 2.1b'den, Z bölgesinin konveks olduğu ve Z nin uç noktalarının, S nin uç noktalarının görüntüsü olduğu görülmektedir.

Tanım:

$z_i^* = \max\ \{z_i(x) \mid x \in S\}$ olacak şekilde $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_k^*)$ noktasına *"ideal nokta"* denir.

3.2. BASKINLIK (DOMİNANCE)

Tanım 1: $z^1, z^2 \in R^k$ iki kriter vektörü olsun. z^1 in z^2 yi *"basması"* (dominate) için g.v.y.ş. $z^1 \geqslant z^2$ ve $z^1 \neq z^2$

olmasıdır. (Yani, tüm i ler için $z_i^1 \geqslant z_i^2$ ve en azından bir i için $z_i^1 > z_2^2$ olmasıdır).

Tanım 2: $z^1, z^2 \in R^k$ iki kriter vektörü olsun. O halde, z^1 in z^2 yi *"kuvvetli basması"* (strongly dominate) için g.v.y.ş. $z^1 > z^2$ olmasıdır. (Yani, tüm i ler için $z_i^1 > z_i^2$ olmasıdır).

Tanım 1'i Tanım 2'den ayırdetmek için bazen *"zayıf"* (weakly) kelimesi kullanılır. Dikkat edilirse, bir kriter vektörü bir diğer kriter vektörünü kuvvetli basıyorsa, aynı zamanda zayıf da basar.

3.3.BASILAMAYAN (NONDOMINATED) KRİTER VEKTÖRLER

Tanım: $\bar{z} \in Z$ olsun. $\bar{z}$ nin *"basılamaz"* olması için g.v.y.ş. $z \geqslant \bar{z}$ ve $z \neq \bar{z}$ olacak şekilde bir başka $z \in Z$ nin mevcut olmamasıdır. Aksi halde $\bar{z}$, *"basılan"* bir kriter vektördür.

3.4. ETKİNLİK (EFFICIENCY)

Tanım: $\bar{x} \in S$ noktasının *"etkin"* (efficient) olması için g.v.y.ş. $Cx \geqslant C\bar{x}$ ve $Cx \neq C\bar{x}$ olacak şekilde bir başka $x \in S$ noktasının mevcut olmamasıdır. Aksi halde $\bar{x}$, *"etkin olmayan"* (inefficient) dır.

Tanım: "$\bar{x} \in S$ nin kriter vektörü", $\bar{z} = C\bar{x} \in Z$ dir.

Örnek:

Kriter Vektörü	Kriter Değerleri z_1	z_2	z_3	Hangi vektör tarafından (ve nasıl) basıldığı
z^1	-1	3	4	z^2 (kuvvetli)
z^2	2	4	6	
z^3	2	2	5	z^2 (zayıf), z^4 (zayıf)
z^4	3	2	5	
z^5	8	3	-1	z^6 (zayıf)
z^6	8	3	0	

Örnekteki z^1, z^3 ve z^5 kriter vektörleri, diğer vektörler tarafından kuvvetli ya da zayıf olarak basılmışlardır. z^2, z^4 ve z^6 vektörleri basılamayan kriter vektörleridir.

<u>Örnek:</u>

Uygun Nokta	Kriter Değerleri z_1	z_2	z_3	Hangi noktanın kriter vektörleri tarafından basıldığı
x^1	7	5	-1	
x^2	2	6	-2	
x^3	1	1	-2	x^1, x^2, x^4
x^4	5	2	-1	x^1
x^5	9	2	-6	

Uygun bölgenin x^1, x^2, x^3, x^4 ve x^5 gibi beş ayrık noktadan oluştuğunu kabul edelim. x^3 ve x^4 noktaları etkin değildir, çünkü x^3 ve x^4 ün kriter vektörleri basılmıştır. x^1, x^2 ve x^5 noktaları etkin noktalardır.

<u>Baskın Kümeleri Kullanarak Etkinliği Arama ve Grafik Gösterilişi</u>

Verilen bir $\bar{x} \in S$ noktasında etkinliği test etmek için önce *"baskın küme"* kavramını sunalım.

<u>Tanım:</u> $\bar{x} \in S$ olsun. $C^{\geq}$, k tane amaç fonksiyonun gradyantlarıyla oluşturulmuş *"yarı-pozitif kutupsal koni"*

$$C^{\geq} = \{y \in R^n \mid Cy \geqslant 0, \ Cy \neq 0\} \quad \cup \quad \{0 \in R^n\}$$

dir.

<u>Tanım:</u> Baskın küme

$$D_{\bar{x}} = \{\bar{x}\} \oplus C^{\geq}$$

dir, $\{\bar{x}\}$ ile $C^{\geq}$ nin küme toplamıdır. Yani, $\bar{x}$ noktasına ötelenmiş yarı-pozitif kutupsal konidir.

Baskın kümeyi yazmanın diğer bir yolu

$D_{\bar{x}} = \{x \in R^n \mid x=\bar{x} + y,\ Cy \geq 0,\ Cy \neq 0\}$

şeklindedir. $D_{\bar{x}}$ baskın kümesi, kriter vektörleri, $\bar{x} \in S$ nin kriter vektörünü basan tüm noktaları içerir.

Teorem: $D_{\bar{x}}$, $\bar{x} \in S$ noktasındaki baskın küme olsun. O halde, $\bar{x}$ nin etkin olması için g.v.y.ş. $D_{\bar{x}} \cap S=\{\bar{x}\}$ olmasıdır.

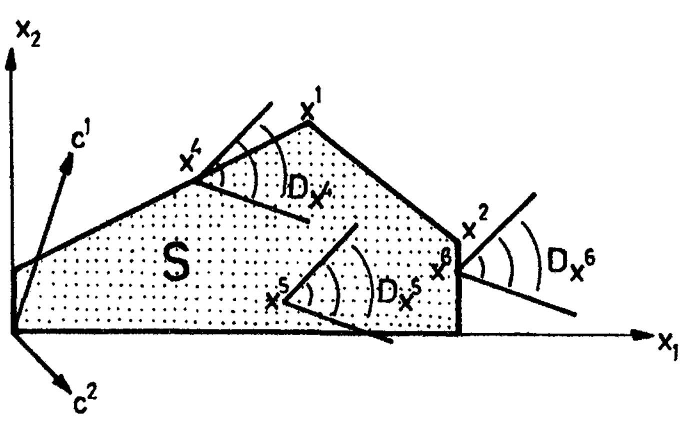
Etkinlik için şu notasyonları verelim:

$E = \{x \in S \mid x$, etkindir.$\}$

$E_x= \{x \in S \mid x$, S nin uç noktasıdır.$\}$

$E_\mu = \{\mu(x,v) \subset S \mid \mu(x,v)$, S nin x den çıkan ve v yönünde olan sınırsız etkin kenarıdır.$\}$

Örnek:



Şekil 2.2.

x^4 ve x^5 etkin değildir. Çünkü $D_{x^4} \cap S \neq \{x^4\}$ ve $D_{x^5} \cap S \neq \{x^5\}$ dir. x^6 etkindir, çünkü $D_{x^6} \cap S = \{x^6\}$ dır. Şekil 4.2 de

$$E = \gamma(x^1,x^2) \cup \gamma(x^2,x^3)$$

$$E_x = \{x^1,x^2,x^3\}$$

$$E_\mu = \emptyset$$

γ: konveks kombinezon operatörüdür (1).

3.5. TAM ETKİNLİK (PROPER EFFICIENCY)

"Tam etkinlik", çok amaçlı karar problemlerinde büyük önemi olan etkinlik kavramına ilave şart getirilerek oluşturulmuş bir tanımdır ve bu şarta uymayan etkin çözümleri elemek amacıyla verilmiştir.

Tam etkinlik tanımı ilk olarak Kuhn ve Tucker tarafından 1951 yılında ortaya atılmış, Geoffrion ise 1968 de geliştirilmiş tanımını vermiştir (1). Geoffrion'un bu tanımını vermeden önce, eğer $x \in S$ etkin ise; bir y noktasının bir amaçta x i geçtiğine, yani $z_i(y) > z_i(x)$ olduğuna ve sonra x noktasının y yi geçtiği bir başka amacın, örneğin z_j amacının olması gerektiğine dikkat edelim (aksi halde x, y tarafından basılır ve etkin olamaz).

<u>Tanım</u> : x, y, i ve j ler son ifadedeki gibi tanımlanmış olsun. O halde, her y,i,j için

$$\frac{z_i(y) - z_i(x)}{z_j(x) - z_j(y)} \leq M$$

şeklinde tanımlanmış $M > 0$ skaleri mevcut ise x etkin noktası, *"tam etkin" dir.*

---

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.145-154.

(2) ISERMANN, H., "Proper Efficiency and the Linear Vector Maximum Problem", Op.Res., V.22, 1974, s.189-191.

GULATI, T.R., ISLAM, M.A., "Proper Efficiency in a Linear Fractional Vector Maximum Problem with Generalized Convex Constraints", EJOR, V.36, 1988, s.339-345.

Bu tanımdaki oran, çözümün x den y ye değişmesinden meydana gelen i. amaçtaki artışın, j. amaçtaki azalmaya bölümüdür. Yani, tam etkin x noktası için, öyle bir M > 0 sayısı vardır ki, her i için ve en az bir j için, j. amaçtaki kayıba göre i. amaçtaki marjinal kazanç,bu M ile üstten sınırlıdır. Eğer bu oran sınırlandırılmazsa, değişmede z_j deki son derece küçük bir azalma için z_i de oldukça büyük artış elde edilebilir. Böyle bir değişme, rasyonel kişi tarafından asla kabul edilmeyeceğinden, karar verici daima tam etkin noktaları seçmelidir (1).

Isermann 1974 de ÇALP problemlerinin her etkin çözümünün tam etkin olduğunu ispatlamıştır.

<u>ÇALP'da Etkin Çözümlerin Özellikleri</u>

<u>Yardımcı Teorem 1:</u> $\bar{x} \in S$ nin, ÇALP probleminin bir etkin çözümü olması için g.v.y.ş.

$$\begin{aligned} &\text{Amaç} \quad : \max d^T y \qquad (d > 0) \\ &\text{Kısıtlar:} \ Ax = b \qquad\qquad\qquad\qquad (2.2) \\ &\qquad -Cx + Iy = -C\bar{x} \\ &\qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{aligned}$$

LP probleminin $\hat{y}=0$ olan $\hat{x},\hat{y}$ optimal çözümünün olmasıdır. Burada I, k x k boyutlu birim matris ve $d \in R^k$ dır.

<u>Yardımcı Teorem 2:</u> $\bar{x} \in S$ nin, ÇALP probleminin bir etkin çözümü olması için g.v.y.ş.

$$\begin{aligned} &\text{Amaç} \quad : \text{Min } (u^T b - w^T C\bar{x}) \\ &\text{Kısıtlar:} \ u^T A - w^T C \geqslant 0^T \qquad\qquad (2.3) \\ &\qquad w^T \geqslant d^T > 0^T \end{aligned}$$

(1) CHOO, E.U.,"Proper Efficiency and the Linear Fractional Vector Maximum Problem", Op.Res., V.32, No.1, 1984, s. 216-220.
ROSENTHAL, R.E., a.g.e.

LP probleminin $\hat{u}^T b - \hat{w}^T C\bar{x} = 0$ olan $\hat{u}^T$, $\hat{w}^T$ optimal çözümünün olmasıdır.

Bu iki LP problemi birbirinin dualidir. Dualite teorisinden, $\hat{x}$, $\hat{y}$ nin (2.2) nin optimal çözümü olması için g.v.y.ş. (2.3) ün $\hat{u}^T$, $\hat{w}^T$ optimal çözümünün olması ve $d^T\hat{y} = \hat{u}^T b - \hat{w}^T C\bar{x}$ olmasıdır. Böylece $\bar{x} \in S$ nin ÇALP probleminin etkin çözümü olması için g.v.y.ş. $\hat{u}^T b - \hat{w}^T C\bar{x} = 0 = d^T\hat{y}$ olmasıdır.

Teorem 1: $\bar{x} \in S$ nin ÇALP probleminin bir etkin çözümü olması için g.v.y.ş.tüm $x \in S$ ler için $v^{oT} C\bar{x} \geq v^{oT} Cx$ olacak şekilde tam pozitif bileşenleri olan $v^o \in R^k$ vektörünün mevcut olmasıdır.

Sonuç: ÇALP probleminin tüm etkin çözümler kümesi, çok parametreli LP

$$\text{Max } \{v^{oT} Cx \mid A\, x = b,\ x \geq 0\} \qquad (v > 0)$$

nin optimal çözümler kümesi ile özdeştir.

Teorem 2: $\bar{x}$, ÇALP probleminin etkin çözümü ise, aynı zamanda bu problemin bir tam etkin çözümüdür (1).

4. ÇALP PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN TEMEL YAKLAŞIMLAR

4.1. BİR AMAÇ DIŞINDA BÜTÜN AMAÇLARA MİNİMUM SEVİYELER KOYMA

Bu yaklaşımda i. amaç maksimum yapılmak üzere seçilir ve diğer amaçlar d_j $(j \neq i,\ j=1,\ldots,k)$ alt seviyeleri ile kısıtlara katılır. Matematiksel olarak yaklaşım;

$$\begin{aligned} &\text{Amaç} &&: \text{Max } c^i x \\ &\text{Kısıtlar} &&: c^j x \geq d_j \qquad (j \neq i,\ j=1,\ldots,k) \\ & && \quad x \in S \end{aligned}$$

(1) ISERMANN, H., a.g.e.

LP problemi şeklinde ifade edilir (1).

k-1 tane amacın kısıtlara katılmasından dolayı bu LP probleminin uygun bölgesi, S nin bir alt kümesidir. Sonra bu *"daraltılmış uygun bölge"* üzerinde seçilen amaç maksimum yapılır.

Bu yaklaşım sezgiseldir. Çünkü, hangi amaçların hangi alt sınırlarla kısıtlara dönüştürüleceği geniş ölçüde kullanıcının deneysel duyusuyla belirlenir (2).

4.2. ARDIŞIK SIRALAMA YÖNTEMİ

Bu yöntemde KV den, amaçları önem derecesine göre sıralaması istenir. Bulunacak çözüm, amaçları en önemli olandan başlayarak, önem sırasına göre tümünü maksimum yapan çözümdür.

(2.1) problemindeki k tane amacın indisleri, aynı zamanda KV nin önem sıralamasını göstersin. Yöntem şöyle çalışır:

Birinci adımda, $\max \{z_1(x) \mid x \in S\}$ problemi çözülerek z_1^* değeri bulunur. Problemde alternatif çözüm varsa, ikinci adımda;

$$\begin{aligned} &\text{Amaç} \quad : \max \{c^2 x = z_2\} \\ &\text{Kısıtlar:} \quad c^1 x = z_1^* \\ &\qquad\qquad\quad x \in S \end{aligned}$$

problemi çözülerek z_2^* değeri bulunur. Alternatif çözüm varsa, üçüncü adımda;

---

(1) ZIONTS, S., a.g.e.,

(2) STEUER, R.E., a.g.e., s.203

Amaç : max $\{c^3x = z_3\}$

Kısıtlar: $c^1x = z_1^*$

$c^2x = z_2^*$

$x \in S$

problemi çözülür. Böyle en fazla k adım sonra, (2.1)in çözümü bulunur. i. adımdaki problemde sadece bir tek çözüm elde ediliyorsa, problemin tamamının çözüldüğü kabul edilir. Bulunan çözüm de yine (2.1) in çözümüdür (1).

4.3. FAYDA FONKSİYON YAKLAŞIMI

Bu yaklaşımda KV nin bir U: $R^k \rightarrow R$ fayda fonksiyonu olduğu kabul edilir. U fayda fonksiyonu, kriter vektörlerinden reel eksene bir tasvirdir. Reel eksendeki değeri ne kadar büyükse, kriter vektörü o kadar tercih edilir.

Pratikte KV'nin U fayda fonksiyonunun asla bilinmediği kabul edilmektedir. Bu yaklaşımda U nun bilindiği kabul edilsin. O halde ÇALP problemini çözmenin bir yolu

$$\max \{U(z) \mid z = Cx,\ x \in S\}$$

problemini çözmek olacaktır. U yu elde etmedeki güçlükten dolayı ve çözülmesi gerekli problemin genellikle lineer olmasından dolayı yöntem ciddi şekilde ele alınmamıştır. Fakat yaklaşım, çok amaçlı çerçevesinde optimallik kavramını tanımlamada kullanışlıdır. Yani, (x^o, z^o) bu problemin optimal çözümü ise, x^o, ÇALP probleminin optimal çözümü ve z^o da optimal kriterler vektörüdür (2).

---

(1) EVREN, R., ÜLENGİN, F., "Yönetimde Çok Amaçlı Karar Verme", İ.T.Ü. Yayınları, Sayı: 1490, İ.T.Ü. Matbaası, Gümüşsuyu, İstanbul,1992, s.51-52.

(2) STEUER, R.E., a.g.e., s.146.

4.4. AĞIRLIKLI TOPLAMLAR YAKLAŞIMI

ÇALP'da sıkça kullanılan bir yaklaşımdır. $\lambda \in R^k$ *"ağırlıklandırma vektörü"*

$$\Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0 \,,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

kümesinin elemanı olmak üzere

$$\max \{ \lambda^T Cx \mid x \in S\} \qquad (2.4)$$

problemi oluşturulur. λ ne kadar iyi tahmin edilirse, bu problemin optimal çözümü, ÇALP probleminin arzu edilen çözümüne o kadar yaklaşmış olur. Yöntemin temeli, *"ÇALP de Etkin Çözümlerin Özellikleri"* alt başlığında verilen Teorem 1'e dayanır.

<u>Ağırlıklar İle Fayda Fonksiyonu Arasındaki İlişki</u>

KV nin bilinmeyen fayda fonksiyonu $U : R^k \to R$

$$U(z_1, z_2, \ldots, z_k) \equiv U(c^1x, c^2x, \ldots, c^kx)$$

nın türevlendirilebilir olduğu kabul edilsin. Keyfi bir $\bar{x} \in S$ noktasında U nun gradyantı

$$\nabla_x U = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U}{\partial z_i}\right) \nabla_x z_i$$

dir. $\nabla_x z_i = c^i$ olduğundan

$$\nabla_x U = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U}{\partial z_i}\right) c^i$$

dir. $\bar{x}$ noktasında birinci amaç $(\partial U/\partial z_1) > 0$ olsun. Bu özelliği ile birinci amaca *"referans kriter"* denir. Pozitif sayıya bölme vektörün yönünü değiştirmediğinden,

$$w_i = (\partial U/\partial z_i) \ / \ (\partial U/\partial z_1)$$

alarak, U nun $\bar{x}$ deki gradyantının yönü

$$\sum_{i=1}^{k} w_i c^i$$

dir. w_i ler normalize edilirse

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^i$$

elde edilir. Böylece ağırlıklı toplamlar yaklaşımı probleminde amaç fonksiyon gradyantı $\lambda^T C$, U nun gradyantının yönünü gösterir.

Ağırlıkları Belirleme

λ_i ağırlıklarını belirlemedeki güçlük, U nun genellikle lineer olmamasından kaynaklanır. Çünkü $\partial U/\partial z_i$ ler nokta - dan noktaya değişir. $\bar{x}$ ye *"yerel olarak bağlı"* λ_i ler şöyle belirlenir; $\bar{x}$ noktasında, $\bar{z}_i = c^i\bar{x}$ olmak üzere U ya teğet hiperdüzlem

$$\frac{\partial U}{\partial z_1}(\bar{z}_1 - c^1x) + \frac{\partial U}{\partial z_2}(\bar{z}_2 - c^2x) + \ldots + \frac{\partial U}{\partial z_k}(\bar{z}_k - c^kx) = 0$$

dir. $(\partial U/\partial z_1) > 0$ ile bölerek ve $z_i = c^ix$ alarak

$$1(\bar{z}_1 - z_1) + w_2(\bar{z}_2 - z_2) + \ldots + w_k(\bar{z}_k - z_k) = 0$$

elde edilir. w_i ler *"marjinal ikâme oranları"* olarak tanımlanabilir. Yani, diğer tüm kriter değerleri sabit tutularak, birinci kriterde Δ_1 birim azalmayı karşılamak için i. kriterde artırılması gerekli miktar Δ_i olmak üzere, $\bar{x}$ noktasında

$$w_i = \lim_{\Delta_1 \to 0} \frac{\Delta_1}{\Delta_i}$$

özelliğinden, $w_i = \Delta_1/\Delta_i$ dir.

$\Delta_1 = 1$ den $w_1 = 1$, $w_2 = 1/\Delta_2, \ldots, w_k = 1/\Delta_k$ ile hesaplanır ve w_i ler normalize edilerek $\bar{x}$ noktasındaki λ_i ler belirlenir (1).

KV nin U fayda fonksiyonu bilinmediği için, kendisinden değiş-tokuş (trade-off) bilgisi talep edilir. Yani, kriterlerin erişilen değerleri arasında diğerlerinin lehine birinden yapabileceği fedakarlık miktarı (veya tersi) istenir (2).

Bu bilgiler ışığında λ_i ağırlıkları ve bağlantılı olarak U nun gradyantının yönü belirlenir.

Bu yaklaşımda Δ_1, teoride sonsuz derecede küçük yapılmaya çalışılır. Fakat pratikte, KV nin değiş-tokuş sorularını başarılı cevaplayabilmesi için "*anlamlı derecede*" büyük alınmalıdır.

<u>$\lambda^T C$ Gradyantlarını Kullanarak Etkin Noktaları Bulma:</u>

<u>Tanım:</u> "*Kriter Konisi*", k tane amaç fonksiyon gradyantları $\{c^1, c^2, \ldots, c^k\}$ nın oluşturduğu kapalı ve konveks bir konidir.

<u>Tanım:</u> "*Sıfır vektör koşulu*", amaç fonksiyon grandyantlarının tam pozitif lineer kombinasyonunun sıfır vektörünü oluşturmasıdır. Yani, tüm i ler için $\alpha_i > 0$,

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.165-169.
(2) EVREN, R., ÜLENGİN, F., a.g.e., s.89.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^i = 0 \in R^n$$

olacak şekilde bir $\alpha \in R^k$ mevcut ise, sıfır vektör koşulu meydana gelir.

Tanım: *"Kriter konisinin relative içi"*, kriter konisini oluşturan temel c^i gradyantlarının tam pozitif lineer kombinezonlarının tümüdür.

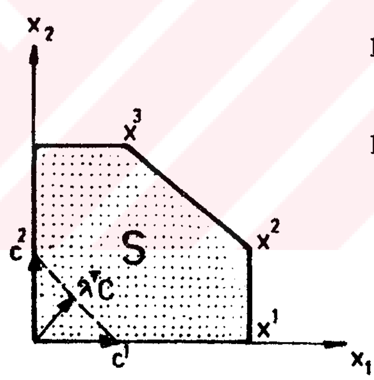
Kriter konisinin relative içine dayandırılan yöntem, etkinliğinin grafik bulunuşu için kullanışlı yöntemdir ve ÇALP problemlerine baskın küme yaklaşımından daha uygundur.

Örnek: Şekil 2.3'deki ÇALP probleminde, $\lambda^T C$ kümesi $\{x \in R^2 \mid x_1, x_2 > 0\}$ dır ve

$E = \gamma(x^2, x^3)$

$E_x = \{x^2, x^3\}$

$E_\mu = \emptyset$



Şekil 2.3.

dir. x^2 hariç $\gamma(x^1, x^2)$ kenarı etkin değildir. Bu kenar c^1 i maksimum yapar, fakat c^1, kriter konisinin relative içinin elemanı değildir.

Sıfır vektör koşulu oluştuğunda ise E = S olur. Çünkü sıfır vektörü, kriter konisinin relative içinin bir elemanıdır (1).

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.170-176.

4.5. YAKLAŞIK OPTİMALLİK ANALİZİ

Yöntem, S bölgesini daralttığı için bir *"daraltılmış uygun bölge"* yaklaşımıdır ve şöyle çalışır;

1. Belli bir $\bar{\lambda} \in \Lambda$ değeri için

$$\max \; \{\bar{z} = \bar{\lambda}\, Cx \;\; | \; x \in S\}$$

Problemi çözülerek maksimum z^* değeri bulunur.

2. z^* den daha küçük bir $\bar{z}$ seçilerek

$$\text{Amaç} \; : \max \; \{0^T x\}$$

$$\text{Kısıtlar:} \; x \in S$$

$$\bar{\lambda}^T Cx \geqslant \bar{z}$$

LP problemi çözülür. Bu adım, $\bar{\lambda}^T Cx \geqslant \bar{z}$ ilave kısıtıyla S bölgesini daraltır ve sıfır amaç fonksiyonuyla da daraltılmış uygun bölgenin tüm uç noktalarını bulur.

3. Daraltılmış uygun bölgenin her x^i uç noktasının $z^i \in R^k$ kriter vektörü hesaplanır.

4. En çok tercih edilen kriter vektörüne ait x^i noktası, ÇALP probleminin çözümü olarak seçilir (1).

4.6. VEKTÖR MAKSİMİZASYONU ALGORİTMALARI

ÇALP' nin bütün etkin çözümlerini bulan vektör maksimizasyonu algoritmaları literatürde 1970 lerden beri geniş biçimde yer almaktadır. Genel olarak bu algoritmalar etkin uç noktaları, etkin kenarları veya etkin yüzleri bulmaya yönelmiştir.

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.170-176, 206-207.

Algoritmalar esas olarak, Kısım 4.4 de verilen ağırlıklı toplamlar problemini kullanır. Her bir basılamayan uç nokta çözümüne karşılık,(LP notasyonları kullanılarak) $\lambda^T(C_B B^{-1} N - C_N) \geqslant 0$ olan bir konveks koni mevcuttur. Yöntemler bu konveks konileri ele alarak bütün etkin çözümleri bulur. Karar verici bu çözümlerin arasından seçim yapacaktır. Bulunan çözümler kümesi genelde çok büyük küme olduğundan, yaklaşım pratikte kullanışlı değildir (1).

Vektör maksimizasyonu teorisi kısaca Ek: 2'de verilmiştir.

4.7. HEDEF PROGRAMLAMA (HP) YAKLAŞIMI

Hedef programlama (goal programming), çok kriterli karar verme alanında en eski yaklaşımlardan biridir. Başlangıçta tek amaçlı LP uygulaması olarak Charnes ve Cooper tarafından 1955 ve 1961 lerde ortaya atılmış, 1960 ve 1970 lerde Ijiri, Lee ve Ignizio ile popüler olmuştur.

Bu yöntemin temel ilkesi şudur: Karar vericiden her bir amaç için erişilmesini arzu ettiği bir hedef değer belirlemesi istenir. Bu yönteme göre *"tercih edilen çözüm"* bu hedef değerlerden sapmaları minimize eden çözümdür.

Genel bir HP problemi:

$$\begin{array}{lll} \text{Hedef} & \{c^1x = z_1\} & (z_1 \geqslant t_1) \\ \text{Hedef} & \{c^2x = z_2\} & (z_2 \leqslant t_2) \\ \text{Hedef} & \{c^3x = z_3\} & (z_3 = t_3) \\ \text{Hedef} & \{c^4x = z_4\} & (z_4 \in [\, t_4^{\ell}, t_4^{\mu}]) \end{array} \qquad (2.5)$$

Kısıtlar: $x \in S$

(1) ZIONTS, S., a.g.e.

tiplerinin herhangi kombinasyonlarından birisi şeklinde ifade edilir. Burada t_i ler hedef seviyeleridir.

HP nin çözümü için iki temel yaklaşım vardır: *"Archimedian yaklaşım"* ve *"öncelikli (preemptive) yaklaşım"*. Literatürde Archimedian yaklaşım *"ağırlıklı hedef programlama"*, öncelikli yaklaşım *"lexicographic hedef programlama"* olarak da anılmaktadır (1).

Archimedian HP

(2.5) deki HP probleminin Archimedian formülasyonu;

$$\text{Amaç} \quad : \min \{w_1^- d_1^- + w_2^+ d_2^+ + w_3^- d_3^- + w_3^+ d_3^+ + w_4^- d_4^- + w_4^+ d_4^+\}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Kısıtlar:} & c^1x + d_1^- & & & \geq & t_1 \\ & c^2x \quad -d_2^+ & & & \leq & t_2 \\ & c^3x & -d_3^+ + d_3^- & & = & t_3 \\ & c^4x & & +d_4^- & \geq & t_4^{\ell} \\ & c^4x & & -d_4^+ & \leq & t_4^{\mu} \end{array}$$

$$x \in S$$

$$\text{tüm d'ler} \geq 0$$

şeklinde LP problemidir. Burada w ler, pozitif *"ceza"* ağırlıkları; d_i^+, d_i^- ler, t_i hedef seviyelerinden artı ve eksi yönde sapma değişkenleridir. Formülasyonda istenmeyen sapma değişkenleri yer almaktadır.

---

(1) ROMERO, C., "A Survey of Generalized Goal Programming (1970-1982)", E.J.O.R., Vol.25, 1986,s.183-191.
EVREN, R., ÜLENGİN, F., a.g.e., s.54.

Öncelikli HP

Öncelikli HP de hedefler önceliklerine göre gruplan - dırılarak indislenir. Küçük indisli hedef, bir sonraki hedeften sonsuz derecede daha önemlidir.

Öncelikli HP;

Hedef $\{c^1x = z_1\}$ $P_1(z_1 \leq t_1)$

Hedef $\{c^2x = z_2\}$ $P_2(z_2 \geq t_2)$

Hedef $\{c^3x = z_3\}$ $P_3(z_3 = t_3)$

Kısıtlar: $x \in S$

olsun. Burada P_j ler, j. öncelik seviyesindeki hedefleri belirtir. Ayrıca $P_j >>> P_{j+1}$ şeklinde olup çok daha büyük (ön - celikli) anlamındadır. Bu problem;

$$\text{Min } \{P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^+ + d_3^-)\}$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{Kısıtlar:} & c^1x - d_1^+ & & & \leq t_1 \\
 & c^2x & +d_2^- & & \geq t_2 \\
 & c^3x & & -d_3^+ + d_3^- & = t_3
\end{array}$$

$$x \in S$$

$$\text{tüm d'ler} \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Problemi, LP ile çözmek için üç optimizasyon aşaması gereklidir. Birinci aşamada;

Amaç : $\min \{d_1^+\}$

Kısıtlar : $c^1x - d_1^+ \leq t_1$

$$x \in S$$
$$d_1^+ \geq 0$$

LP problemi çözülür. Alternatif optimal çözüm varsa, ikinci aşamada;

Amaç : $\min \{d_2^-\}$

Kısıtlar: $c^1x \leq t_1 + (d_1^+)^*$

$c^2x + d_2^- \geq t_2$

$$x \in S$$
$$d_2^- \geq 0$$

LP problemi çözülür. Burada $(d_1^+)^*$, birinci aşamadaki d_1^+ nın optimal değeridir. Alternatif optimal çözüm varsa, üçüncü aşamada;

Amaç : $\min \{(d_3^+ + d_3^-)\}$

Kısıtlar: $c^1x \leq t_1 + (d_1^+)^*$

$c^2x \geq t_2 - (d_2^-)^*$

$c^3x - d_3^+ + d_3^- = t_3$

$$x \in S$$
$$d_3^+, d_3^- \geq 0$$

LP problemi çözülür. Burada $(d_2^-)^*$, ikinci aşamadaki d_2^- nin optimal değeridir. Üçüncü aşamada bulunan herhangi bir çözüm öncelikli HP nin çözümüdür.

Tek bir çözümü olan optimizasyon aşamasına rastlandığında diğer aşamalar çözülmez. Böylece alt sıradaki hedef - ler, HP'nin bulunan çözümlerini etkileyemez. Her bir aşama, daha önceki aşamalardan optimallik bilgisi aldığından, öncelikli HP yi çözme dinamik bir prosestir (1).

4.8. ETKİLEŞİMLİ (INTERACTIVE) YÖNTEMLER

Çok amaçlı matematik programlama araştırmalarında, 1977'lerdeki anlayış; "ÇALP problemi çözmek demek, genellikle, tüm etkin çözümlerin kümesini bulmak demektir".

1981'lerdeki anlayış; "Tüm etkin çözümler kümesi çok geniş olduğundan çok amaçlı problemin çözümü değildir".

1984'lerdeki anlayış; "Karar vericiden ek bilgiler alarak etkin çözümler kümesini daraltmak gerekir" şeklindedir.

Böylece etkin çözümlerin arasından seçim yapmak için sunulan yöntemlerin çoğu etkileşimlidir ve çok amaçlı programlamanın geleceği etkileşimli uygulamalardadır. Yöntemler hesaplama fazları ve ardarda gelen karar verme fazlarıyla tanımlanır. Her iterasyonda karar verici-analist veya karar verici-bilgisayar diyaloğu kurulur.

Etkileşimli yöntemlerde ilk olarak bir *"uzlaşık çözüm"* bulunur. Bu çözüm, çok kriterli problemle bağlantılı olan tek amaçlı problemin optimal çözümüdür. Karar vericiyle diyalog sayesinde kriterlerdeki istek ya da kabul seviyeleri belirlenir, kriterler arası değiş-tokuşlar tayin edilir ve belirli çözümler karşılaştırılır. Elde edilen bilgilerle oluşturulan yeni tek amaçlı problemin optimal çözümü, yeni uzlaşık çözümdür.

Literatürde sunulan etkileşimli yöntemlerin çoğunda *"matematiksel yakınsaklık"* özelliği görülür. Bu yakınsaklık, ya uygun çözümler bölgesini her adımda daraltarak, ya da her

---

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.285-294.

adımda bir veya daha fazla kriteri elimine ederek ya da uygun çözümlerin sadece sonlu alt kümesini ele alarak (örneğin LP de çokyüzlünün tepelerini) sağlanır.

Ayrıca karar verici etkileşmeler sonucu kendi problemini daha iyi öğrenir, örneğin amaçlar arasında nasıl değiş-tokuşlar yapacağını, iyileştirilmiş çözümleri nerede arayacağını ve nihai çözümü nasıl tanıyacağını anlar. Fakat bu arada, daha önce reddettiği uzlaşık çözümleri yeniden ele alması da mümkündür. Böylece yakınsaklık, matematiksel olmaktan çok *"psikolojik"* tir. Bu da karar vericinin her ne zaman isterse prosedürü durduracağı anlamına gelir (1).

Etkileşimli yöntemler; *"uygun bölgenin daraltılması"*, *"ağırlıklandırma vektörü uzayının daraltılması"*, *"kriter konisinin daraltılması"* ya da *"doğrultu arama"* (line search) yöntemleri olarak sınıflandırılabilir.

Daraltılmış uygun bölge yöntemine örnek olarak 1971 de Benayoun, Montgolfier, Tergny ve Laritchev tarafından sunulmuş *"STEM (Step) Yöntemi"* verilebilir. Bu yöntem çok amaçlı sahasında etkisi olan ilk etkileşimli yöntemdir.

Daraltılmış ağırlıklandırma vektör uzayı yöntemine örnek olarak Zionts ve Wallenius tarafından 1976 da sunulmuş ve 1983 de geliştirilmiş *"Z-W Yöntemi"* verilebilir.

Kriter konisinin daraltılması yöntemine örnek olarak Steuer'in 1977 de verdiği *"Daralan Gradyant Koni Yöntemi"*, doğrultu arama yöntemine örnek olarak da Geoffrion, Dyer ve Feinberg tarafından 1972 de sunulan *"GDF Yöntemi"* verilebilir. (2)

(1) VINCKE, P., "Analysis of Multicriteria Decision Aid in Europe", EJOR V.25, 1986, s.160-168.
EVREN R. ÜLENGİN, F., a.g.e., s.89.
VANDERPOOTEN, D., VINCKE, P., "Description and Analysis of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures", Math. Comput. Modelling, Vol.12, No. 10/11 1989, s.1221-1238.

(2) STEUER, R.E., a.g.e., s.361-389.

BÖLÜM III

ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA

1. ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA (ÇALKP) PROBLEMİ VE TANIMI

ÇALP da bir veya daha fazla amaç, α ve β lar sabit sayılar olmak üzere, lineer pay ve lineer paydanın oranı

$$\frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$$

şeklinde olabilir. Bu durumdaki problem ÇALKP problemidir ve

$$\begin{aligned} \text{Amaçlar :} \quad & \max \left\{ \frac{c^1 x + \alpha_1}{d^1 x + \beta_1} = z_1 \right\} \\ & \max \left\{ \frac{c^2 x + \alpha_2}{d^2 x + \beta_2} = z_2 \right\} \\ & \vdots \\ & \max \left\{ \frac{c^k x + \alpha_k}{d^k x + \beta_k} = z_k \right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{Kısıtlar :} \quad x \in S = \{x \in R^n \mid Ax = b, \ \ x \geq 0, \ b \in R^m\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada S, R^n nin boş olmayan alt kümesidir ve amaç fonksiyonlarının paydalarının S nin heryerinde pozitif olduğu kabul edilmektedir.

Paydalardaki d vektörleri sıfır vektörler olduğunda ÇALKP problemi, ÇALP problemi haline gelir (1).

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR, ÖRNEK VE TANIMLAMALAR

ÇALP da olduğu gibi, (3.1) probleminin çözümü, tüm etkin çözümler kümesidir. Fakat etkin çözümün Bölüm II'de verdiğimiz tanımı, ÇALKP çözüm algoritmaları için yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle etkinliğin zayıf-etkinlik (weak-efficiency) ve kuvvetli-etkinlik (strong-efficiency) tanımlarını verelim.

Zayıf-Etkinlik: $\bar{x} \in S$ noktasının *"zayıf-etkin"* (z-etkin) olması için g.v.y.ş. her i için $z_i(x) > z_i(\bar{x})$ olacak şekilde bir başka $x \in S$ noktasının olmamasıdır.

Kuvvetli etkinlik: $\bar{x} \in S$ noktasının *"kuvvetli-etkin"* (k-etkin) olması için g.v.y.ş. her i için $z_i(x) \geq z_i(\bar{x})$ ve en az bir i için $z_i(x) > z_i(\bar{x})$ olacak şekilde bir başka $x \in S$ noktasının olmamasıdır.

Kuvvetli-etkinlik tanımı, Bölüm II de verdiğimiz etkinlik tanımı ile aynıdır. Tanımlardan anlaşılacağı gibi z-etkinlik, k-etkinlik tanımının daha genel halidir. Böylece z-etkin noktalar kümesini E^W, k-etkin noktalar kümesini de E^S ile gösterirsek $E^S \subset E^W$ dir (2).

Choo, ÇALKP probleminde, uygun bölgenin sınırlı olması koşuluyla her etkin (kuvvetli) çözümün aynı zamanda tam etkin olduğunu ispatlamıştır (3).

---

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.336.

(2) KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., "Multiple Objective Linear Fractional Programming", Man. Sci., Vol. 27, No.9, 1981, s.1024-1039.

(3) CHOO, E.U., "Proper Efficiency and the Linear Fractional Vector Maximum Problem", Op. Res., Vol. 32, No. 1, Jan. Fab. 1984, s.216-220.

ÇALKP Örneği ve Tanımlar:

Amaçlar : max $\{-2x_1 + x_2 = z_1\}$

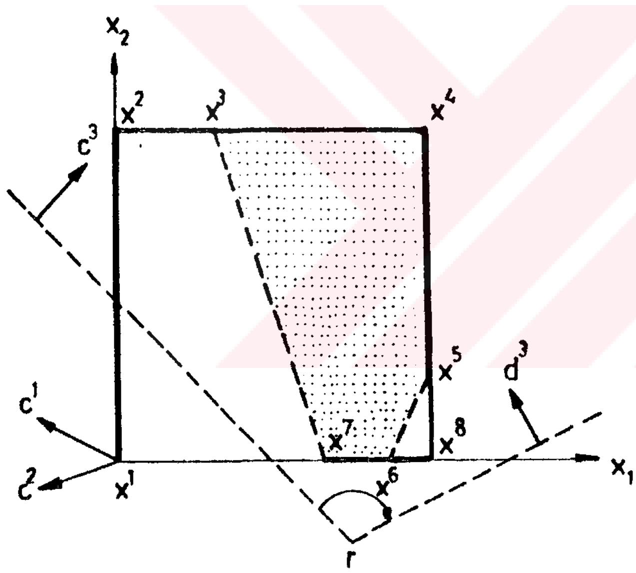
max $\{-3x_1 - x_2 = z_2\}$

max $\{\frac{x_1+x_2-2}{-x_1+2x_2+5} = z_3\}$

Kısıtlar: $x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



$x^1 = (0,0)$ $z^1 = (0,0,-\frac{2}{5})$

$x^2 = (0,4)$ $z^2 = (4,-4,\frac{2}{13})$

$x^3 = (\frac{4}{3},4)$ $z^3 = (\frac{4}{3}, -8,\frac{2}{7})$

$x^4 = (4,4)$ $z^4 = (-4,-16,\frac{2}{3})$

$x^5 = (4,1)$ $z^5 = (-7,-13,1)$

$x^6 = (\frac{7}{2},0)$ $z^6 = (-7,-\frac{21}{2},1)$

$x^7 = (\frac{8}{3},0)$ $z^7 = (-\frac{16}{3},-8,\frac{2}{7})$

Şekil 3.1

$x^8 = (4,0)$ $z^8 = (-8,-12,2)$

$S = \gamma(x^1, x^2, x^3, x^4)$ $r = (3, -1)$

$E^W = \gamma(x^1, x^2) \cup \gamma(x^2, x^3) \cup \underset{i=3}{\overset{7}{\gamma}} (x^i) \cup \gamma(x^6, x^8)$

$E^S = E^W - [\gamma(x^3, x^7) - \{x^3\}] - [\gamma(x^5, x^6) - \{x^6\}]$

ÇALKP da E^s kümesi aşağıda verildiği gibi, ÇALP daki özelliklerinden daha farklı olarak karşımıza çıkar.

a) E^s in kapalı olmasına gerek yoktur (Oysa ÇALP da E^s kapalıdır). Örneğin Şekil 3.1 de E^s kümesinin sınırlardaki doğru parçaları $[\gamma(x^3, x^7) - \{x^3\}]$ ve $[\gamma(x^5, x^6) - \{x^6\}]$, z-etkin olmasına rağmen k-etkin değildirler.

b) S nin iç noktalarından bazıları k-etkin olabilir (ÇALP da, S nin bir iç noktası k-etkin ise, S nin tümü k-etkindir).

c) S nin iki k-etkin uç noktası, S nin k-etkin kenarları yoluyla bağlanamaz. Örneğin x^1 ve x^8, S nin k-etkin kenarları yoluyla bağlanamaz (ÇALP da, bu uç noktalar bağlantılı graf oluşturur).

d) Kenar k-etkin olarak başlayabilir, fakat etkin ol - mayan bir kenar haline gelebilir. Örneğin, $\gamma(x^4, x^8)$ kenarı x^4 den x^5 e kadar k-etkindir, fakat x^5 den x^8 e kadar etkin değildir.(1,2)

Bu $\gamma(x^4, x^8)$ tipindeki kenarlara *"kırılan kenarlar"*, x^5 noktasına da *"kırılma noktası"* denir. $x^1, x^2, \ldots, x^8$ gibi noktalara *"tepeler"*, S nin x^1, x^2, x^4, x^8 gibi noktalarına da *"uç nokta"* denir.

Şekil 3.1 de zayıf ve kuvvetli-etkin tepeleri

$$E_v^w = \{x^i \mid 1 \leq i \leq 8\}, \quad E_v^s = E_v^w - \{x^5, x^7\}$$

ile, zayıf ve kuvvetli-etkin uç noktaları

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.349.

(2) NYKOWSKI, I., ZOLKIEWSKI, Z., "A Comprimise Procedure For The Multiple Objective Linear Fractional Programming Problem", E.J.O.R., V. 19, 1985, s.91-97.

$$E_x^w = \{x^1, x^2, x^4, x^8\} \quad , \; E_x^s = E_x^w$$

notasyonları ile gösterelim.

E^w nin sınırlarındaki $\gamma(x^3, x^7)$ ve $\gamma(x^5, x^6)$ doğru parçaları *"rastlantı düzlemleri"* (coincidence planes) üzerindedir. Örneğin $\gamma(x^3, x^7)$ doğru parçası, $z_2 = -8$ ve $z_3 = 2/7$ amaç fonksiyon yüzey eğrileriyle tanımlanmış düzlem üzerindedir (1). Bu kenarlar S nin k-etkin iç noktalarından oluşan kümeyi (Şekil 3.1'de taralı bölge) sınırlar, fakat E^s kümesine dahil değildirler. Çünkü bu kenarlar boyunca amaç fonksiyonlarının bölgesel türevlerinin bazı konveks kombinezonları sıfır (null) vektörü verir (2). Bu durum ileride etkinliğin grafik bulunuşunda açıklanacaktır.

3. ÇALKP DA E^s ve E^w NIN ÖZELLİKLERİ

<u>E^s ve E^w nin kapalılık özelliği</u>

S kümesi kompakt olsa bile, E^s kümesi genellikle kapalı bir küme değildir. Yukarıda da ifade ettiğimiz gibi, mutlaka $E^s = S$ olmadan da, S nin bazı iç noktaları k-etkin olabilir. ÇALP de $E^s = S$ hali, lineer amaç fonksiyonlarının gradyant vektörlerinin sabit olmasından dolayı geçerlidir. Fakat bunu ÇALKP ya genişletmek mümkün değildir.

E^s kümesinin aksine, E^w daima kapalı bir kümedir. Aşağıdaki teorenin ispatı, z keyfi sürekli fonksiyonları ve S keyfi bölgeleri için geçerlidir.

<u>Teorem:</u> ÇALKP nın tüm z-etkin çözümler kümesi E^w kapalıdır.

---

(1) STEUER, R.E., s.349.

(2) KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., a.g.e.

E^W nın *"yol-bağlantılılık"* (path-connectedness)özelliği

Teorem: S kümesi kompakt olduğunda, ÇALKP nın herhangi iki z-etkin çözümü, E^W daki sonlu sayıda lineer doğru parçalarının yolu ile bağlantılıdır.

S kümesi kompakt olmadığında, ÇALKP nın E^S ve E^W kümeleri bağlantılı olmayabilir (1).

Choo ve Atkins, iki amaçlı lineer kesirli programlama problemleri için, E^S kümesinin de yol-bağlantılılık özelliği olduğunu ispatlamışlardır (2).

ÇALKP problemleri için k-etkin çözümler, teorik olarak daha çok arzu edilen çözümlerdir. Fakat yöntemlerde genel - likle E^W ile çalışılır. Çünkü bu küme daima kapalıdır ve bağlantılılık özelliği vardır.

4. ÇALKP PROBLEMİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1. ETKİNLİĞİN GRAFİK OLARAK BULUNMASI (3)

ÇALP olmayan çok amaçlı programlamada, etkinliğin grafik olarak bulunması için baskın küme yaklaşımını kullanmak en iyi yoldur. (ÇALP da ise, kriter konisinin relative içine dayandırılan yöntem daha uygundur).

k- etkinlik için test şudur: $C^{\geq}$, $\bar{x}$ noktasında bölgesel amaç fonksiyon gradyantlarıyla hesaplanmış yarı-pozitif kutupsal koni olmak üzere, $D^S_{\bar{x}} = \{\bar{x}\} \oplus C^{\geq}$ baskın kümesini ele alalım. $\bar{x} \in S$ nin k-etkin olması için g.v.y.ş.

(1) CHOO, E.U., ATKINS, D.R., "Connectedness in Multiple Linear Fractional Programming", Man. Sci., Vol. 29, No.2 February 1983, s.250-255.

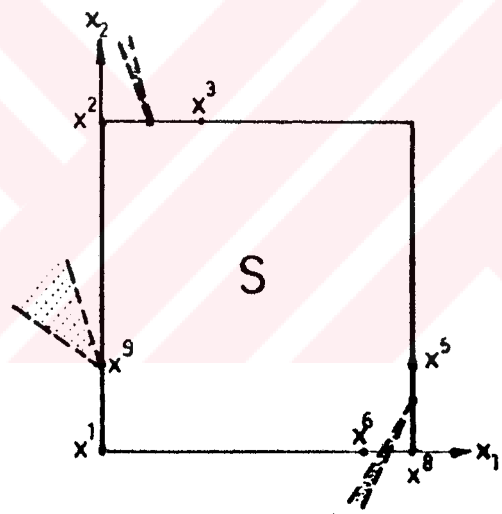
(2) CHOO, E.U. ATKINS, D.R., "Bicriteria Linear Fractional Programming", J. of Opt. Theo. and Appl. Vol. 36, No.2 February 1982, s.203-220.

(3) STEUER, R.E., a.g.e., s.349-351.

$D_{\bar{x}}^{S} \cap S = \{\bar{x}\}$ olmasıdır. $C^{\geq}$, $\bar{x}$ noktasına bağlı olarak değişeceği için, $D_{\bar{x}}^{S}$ de, $\bar{x}$ ile değişecektir.

z- etkinlik için test şudur: $C^{>}$, $\bar{x}$ noktasında bölgesel amaç fonksiyon gradyantlarıyla hesaplanmış tam-pozitif kutupsal koni olmak üzere, $D_{\bar{x}}^{W} = \{\bar{x}\} \oplus C^{>}$ baskın kümesini ele alalım. $\bar{x} \in S$ noktasının z-etkin olması için g.v.y.ş. $D_{\bar{x}}^{W} \cap S = \{\bar{x}\}$ olmasıdır. Yine $C^{>}$, $\bar{x}$ noktasına bağlı olarak değişeceği için, $D_{\bar{x}}^{W}$ da $\bar{x}$ ile değişecektir.

Şekil 3.1 deki ÇALKP problemine D^{W} ve D^{S} baskın kümelerini uygulayalım. Şekil 3.2, örneğin $\gamma(x^1, x^2)$ ve $\gamma(x^2, x^3)$ doğru parçalarının niçin z-etkin olduğunu, $\gamma(x^5, x^8)$ doğru parçasının niçin z-etkin olmadığını (weak-inefficient) gösterir.



Şekil 3.2. z-etkin çözümleri bulan D^{W} baskın kümeleri

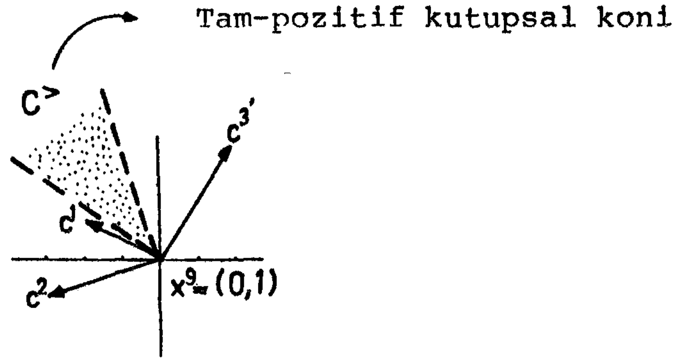
Açıklama: $c^1 = (-2,1)$

$c^2 = (-3,-1)$

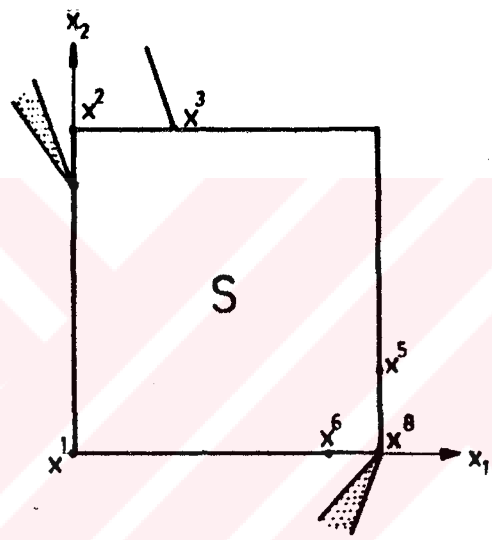
$$\frac{\partial z_3}{\partial x_1} = \frac{3x_2 + 3}{(-x_1+2x_2+5)^2}, \quad \frac{\partial z_3}{\partial x_2} = \frac{-3x_1 + 9}{(-x_1+2x_2+5)^2}$$

$x^9 = (0,1)$ noktası için; $\left.\frac{\partial z_3}{\partial x_1}\right|_{(0,1)} = \frac{6}{49}$,

$\left.\frac{\partial z_3}{\partial x_2}\right|_{(0,1)} = \frac{9}{49}$ yani grandyant vektörü $c^{3'} = (6,9)$ ya da $c^{3'} = (2,3)$ vektörü



Şekil 3.3, örneğin $\gamma(x^1, x^2)$ kenarının, x^3 noktasının ve $\gamma(x^6, x^8)$ doğru parçasının niçin k-etkin olduğunu gösterir.

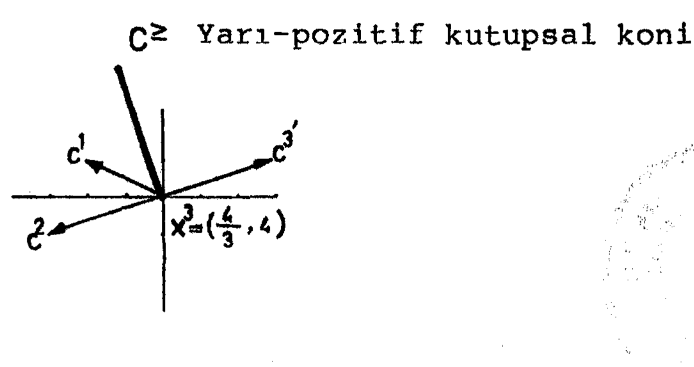


Şekil 3.3. k-etkin çözümleri bulan D^s baskın kümeleri

<u>Açıklama:</u>

$x^3 = (\frac{4}{3}, 4)$ noktası için; $\left.\frac{\partial z_3}{\partial x_1}\right|_{(\frac{4}{3},4)} = \frac{15}{p^2}$,

$\left.\frac{\partial z_3}{\partial x_2}\right|_{(\frac{4}{3},4)} = \frac{5}{p^2}$, $c^{3'} = (15,5)$ yada $c^{3'} = (3.1)$ vektörü



$\bar{x} \in \overset{7}{\underset{i=3}{\gamma}} (x^i)$ ler için $D^{W}_{\bar{x}} = \{\bar{x}\}$ dir. Fakat

$\bar{x} \in \overset{7}{\underset{i=3}{\gamma}} (x^i) - [\gamma(x^3,x^7) - \{x^3\}] - [\gamma(x^5,x^6) - \{x^6\}]$

durumunda $D^S_{\bar{x}} = \{\bar{x}\}$ dır.

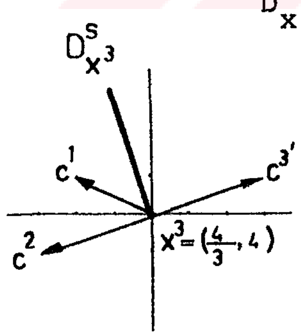
Açıklama: $[\gamma(x^3,x^7) - \{x^3\}]$ kenarı üzerinde sıfır vektör koşulu oluşmuyor. Böylece Stiemke'nin Alternatifler Teoremi'ne göre, her i için $c^i y \geq 0$, en az bir i için $c^i y > 0$ olacak şekilde bir $y \in R^2$, yani yarı-pozitif kutupsal koni

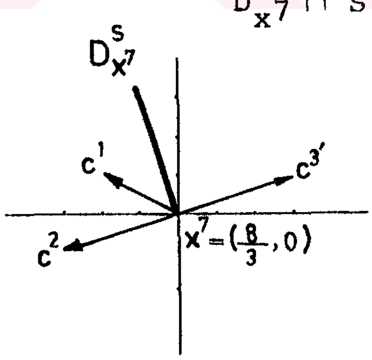
$$C^{\geq} = \{y \in R^2 \mid Cy \geq 0, \quad Cy \neq 0\} \cup \{0 \in R^2\}$$

mevcuttur (1). O halde, $D^S_{\bar{x}} = \{\bar{x}\} \oplus C^{\geq}$ baskın kümesi mevcuttur. $D^S_{\bar{x}} \cap S \neq \{\bar{x}\}$ olduğundan, bu kenar k-etkin değildir. Aynı şeyleri $[\gamma(x^5,x^6) - \{x^6\}]$ kenarı için de söyleyebiliriz.

x^3 ve x^7 için gösterelim.

$D^S_{x^3} \cap S = \{x^3\}$ $\qquad$ $D^S_{x^7} \cap S \neq \{x^7\}$





Koni mevcut iken Stiemke Teoremine göre sıfır vektör koşulunun oluşmadığını gösterelim.

---

(1) MANGASARIAN, O.L., "Nonlinear Programming", New York, Mc Graw Hill, 1969, s.32.

$x^3 = (-\frac{4}{3}, 4)$ için $c^1 = (-2,1)$

$c^2 = (-3,-1)$

$c^{3'} = (3,1)$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{array}\right\} \text{sıfır vektör koşulu oluşmadı.}$$

z_2 ve z_3 amaçlarının gradyantları zıt yönlü, $z_2 = -8$, $z_3 = 2/7$ yüzey eğrileri üstüstedir.

$[\gamma(x^3, x^7) - \{x^3\}]$ kenarının z-etkin olduğunu gösterelim. Gordan Teoremine (1) göre, örneğin x^3 noktasında $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 0$ olarak

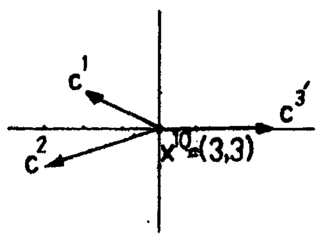
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^i = 0$$

sıfır vektör koşulu sağlanıyor. O halde tam-pozitif kutupsal koni mevcut değildir, yani $C^> = \emptyset$ dir ve $D^W_{\bar{x}} = \{\bar{x}\} \oplus C^> = \{\bar{x}\}$ dir.

Şekil 3.1'deki taralı iç bölgelerde de sıfır vektör koşulu sağlandığı için, $C^{\geq}$ konisi ve $C^>$ konisi oluşmuyor. Açıklayalım, örneğin $x^{10} = (3,3)$ noktası için;

$$\frac{\partial z_3}{\partial x_1}\Big|_{(3,3)} = \frac{12}{p^2}, \quad \frac{\partial z_3}{\partial x_2}\Big|_{(3,3)} = \frac{0}{p^2}$$

(1) MANGASARIAN, O.L., a.g.e., s.31.



$c^1 = (-2,1)$

$c^2 = (-3,-1)$

$c^{3'} = (12,0) \sim (3,0)$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_3 = \frac{5}{12}\alpha_2 \\ \alpha_2 \text{ keyfi} \end{array}\right\} \text{sıfır vektör koşulu var.}$$

Stiemke ve Gordon Teoremi Ek-3'de verilmiştir.

4.2. KORNBLUTH VE STEUER ALGORİTMASI

Kornbluth ve Steuer, ÇALKP probleminin çözümü için simpleks tabanlı bir çözüm algoritması vermiştir. Bu algoritma geleneksel etkinlik fikrinden ayrılarak z-etkinlik kavramını kullanır, S bölgesini daraltarak bir daraltılmış uygun bölge oluşturur. Bu bölgenin uç noktalarını tepeler olarak, S de kenar olmayan örneğin Şekil 3.1 de $\gamma(x^3, x^7)$ ve $\gamma(x^5, x^6)$ gibi kenarları da bu daraltılmış uygun bölgenin kenarları olarak ortaya çıkarır. Bu kenarlar, kesirli amaçların yüzey eğrileri boyunca uzanır. Tepeler, bu z-etkin kenarların bir yolu ile bağlantılıdır.

ÇALKP da mesele, uygun çözümler bölgesini daraltmak için kısıtlara katılacak yüzey eğrilerinin (bunlar algoritmada "θ_{max}*-kesme düzlemleri*" olarak anılır) nasıl hesaplanacağıdır. Çözüm algoritmasında kırılan kenarlar araştırılır, çünkü θ_{max}-kesme düzlemleri, bu kırılan kenar üzerindeki kırılma noktasında, daraltılmış uygun bölgenin bir tepesini oluşturur. Böylece algoritma, tüm z-etkin tepeleri bulmak suretiyle ÇALKP problemini çözmüş olur.

Çözüm Algoritması

Burada $S \neq \emptyset$ kümesi, sınırlı olarak kabul edilmektedir. Algoritma, S nin bir z-etkin uç noktasını bulma ile başlar. Bölüm I'de verilen yöntemler ile amaçların her biri teker teker maksimum yapılarak bir başlangıç z-etkin uç nokta (ilk tepe) bulunabilir.

Algoritma bulduğu her z-etkin tepeyi saklar ve inceler. Tepenin incelenmesi deyiminden şunlar anlaşılır:

1^{o}) Tepeden çıkan bütün kenarlar başlangıçta z-etkinlik için test edilir,

2^{o}) 1^{o} de bulunan bütün başlangıçta z-etkin kenarlar kırılma noktaları için test edilir,

3^{o}) 2^{o} de bulunan her bir kırılma noktası incelenir ve hangi yüzey eğrisi tarafından oluşturulduğu anlaşılır,

4^{o}) Kırılma noktasından geçen bu θ_{max}-kesme düzlemleri amaçların yüzey eğrileri olarak ÇALKP ya ilave edilir.

Şöyle ki; j. amacın $\bar{z}$-yüzey eğrisinin algoritmanın bulduğu ilk θ_{max}-kesme düzlemi olduğu kabul edilsin.

Daraltılmış ÇALKP:

Amaçlar : $\max \left\{ \dfrac{c^i x + \alpha_i}{d^i x + \beta_i} = z_i \right\} \qquad i = 1,\ldots,k$

Kısıtlar: $\qquad x \in S$

$$(c^j - \bar{z}\, d^j)x - d_j^{+} + d_j^{-} = -(\alpha_j - \bar{z}\beta_j)$$

$$d_j^{+}\ ,\ d_j^{-} \geq 0$$

şeklindedir. Daraltılmış kısıtlar kümesi, orijinal uygun bölge S yi kısıtlamaz. Çünkü d_j^- ve d_j^+ sapma değişkenleri uygun bölgeye ilave boyut ekler.

S nin z-etkin uç noktasını incelerken, bu noktadan çıkan kenarlardan birinin ya da birden fazlasının başlangıçta z-etkin olması muhtemeldir. Başlangıçta z-etkin çıkan kenarlar komşu z-etkin tepelerle sonuçlanacaktır (S nin uç noktalarına karşılık gelmeyebilir). Eğer proses, hiç bir z-etkin çıkan kenar bulamıyorsa, ilk z-etkin uç nokta ÇALKP nın tek (global maksimum) çözümüdür. Böylece tüm z-etkin tepeler bulunur ve incelenir. İncelenecek tepe kalmayınca algoritma durur.

Şimdi, algoritmanın dayandığı teori üzerinde duralım.

Başlangıçta z-etkin kenarlar için altproblem testi:

Vektör maksimizasyonu problemi olarak

$$\max \{ T(\bar{x})\, x \mid x \in S \} \qquad (3.2)$$

yi ele alalım. Burada k x n boyutlu $T(\bar{x})$ matrisinin i. satırı, (3.1) problemindeki i. amacın $\bar{x} \in S$ noktasındaki bölgesel türevidir. Yani $T(\bar{x})$ nin i. satırı

$$(d^i \bar{x} + \beta_i)\, c^i - (c^i \bar{x} + \alpha_i)\, d^i$$

olarak tanımlanır. Aslında i. amaç fonksiyonunun gerçek türevi

$$\frac{(d^i \bar{x} + \beta_i)\, c^i - (c^i \bar{x} + \alpha_i)\, d^i}{(d^i \bar{x} + \beta_i)^2}$$

dir. Fakat $\bar{x}$ tepesinde paydadaki ifade pozitiftir ve gradyant vektörünün yönünü değiştirmediğinden ihmal edilmiştir.

Tigan Teoremi(1): $\bar{x}$ nin (3.1) probleminde k-etkin olması için g.v.y.ş. $\bar{x}$ nin (3.2) de k-etkin olmasıdır. $\bar{x}$ nin (3.1) probleminde z-etkin olması için g.v.y.ş. $\bar{x}$ nin (3.2) de z-etkin olmasıdır.

Vektör maksimizasyonu probleminde z-etkin kenarlar şöyle aranır:

B z-etkin tabanı tanımlamak üzere,

$$\tilde{T}(\bar{x}) = T_B(\bar{x})\, B^{-1}N - T_N(\bar{x})$$

ifadesi $\bar{x}$ noktasında B ye karşılık gelen kx(n-m) boyutlu azaltılmış maliyet matrisi olsun. O halde B nin z-etkin olması için g.v.y.ş.

$$\lambda^T \tilde{T}(\bar{x}) \geq 0$$
$$\lambda^T e = 1$$
$$\lambda \geq 0$$

sistemini sağlayan $\lambda \in R^k$ nın mevcut olmasıdır. z-etkin tabana karşılık gelen her uç nokta z-etkindir. $\bar{x}$ de z-etkin taban B ve azaltılmış maliyet matrisi $\tilde{T}(\bar{x})$nin j.sütunu $\tilde{T}_j(\bar{x})$ olsun. j. tabandışı değişkenin girişiyle ilgili $\bar{x}$ den çıkan kenarın başlangıçta z-etkin olması için g.v.y.ş.

$$\max \{r \in R\}$$

$$\text{Kısıtlar: } \tilde{T}(\bar{x})y - \tilde{T}_j(\bar{x})w + re \leq 0$$

---

(1) KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., "Multiple Objective Linear Fractional Programming", Man. Sci., Vol. 27, No.9, Sep. 1981, s.1024-1039'dan TIGAN, S.T., "Sur le Probleme de la Programmation Vectorielle Fractionnaire", Mathematica-Revue D'Analyse Numerique et de Theorie de L'Approximation, Vol. 4, No. 1, 1975, s.99-103.

$$0 \leq y \in R^{n-m}$$
$$0 \leq w \in R$$
$$r \text{ serbest}$$

altprobleminin sınırlı amaç fonksiyon değerine sahip olmasıdır ($e \in R^k$ toplam vektörüdür).

ÇALP da amaç fonksiyonu matrisi ve azaltılmış maliyet matrisi etkin kenarlar boyunca hareket edildiğinde sabitlerdir, böylece başlangıçta z-etkin kenar sonraki uç noktaya kadar etkin kalır. ÇALKP da ise, lineerleştirilmiş amaç fonksiyon matrisi $T(x)$, z-etkin kenar boyunca hareket edildiğinde sabit değildir. Bu sebeple ÇALKP da kenar z-etkin başlayabilir ve bir uç noktadan diğerine varmadan önce etkin olmayan kenar haline gelebilir, yani kenar kırılabilir.

Başlangıçta z-etkin kenarlar boyunca kırılma noktalarını arama

$\bar{x} \in S$ noktasında z-etkin taban B olsun ve $\hat{x}$, j. tabandışı değişken girerken uygun bir pivot seçimiyle oluşacak komşu uç noktayı göstersin. $\bar{x}$ den çıkan başlangıçta z-etkin kenarla ilgili tabandışı değişken x_j ve x_j nin $\hat{x}$ deki değeri $\hat{\theta}$ olsun. x_j ile ilgili başlangıçta z-etkin kenar boyunca ilerlerken, kenarın z-etkin olmayan kenara dönüştüğü nokta - daki, yani kırılma noktasındaki θ nın değeri θ_{max} dır. İşte bu θ_{max} değeri hesaplanmak istenmektedir.

(1) $\theta_{max} < \hat{\theta}$ ise, kırılma noktası vardır ve $x_j = \theta_{max}$ olan bir noktada oluşur. Amacın kırılma noktasından geçen ve E^W z-etkin kümesinin sınır parçasını oluşturan en azından bir yüzey eğrisi vardır. Böyle yüzey eğrilerine θ_{max}-kesme düzlemleri denir. θ_{max}-kesme düzlemlerinin belirlenmesi ve probleme dahil edilmesi aşağıda anlatılacaktır.

(2) $\theta_{max} = \hat{\theta}$ ise, kenar bir sonraki tepeye kadar z-etkindir ve yine kırılan bir kenardır. $\theta_{max} = \hat{\theta}$ nın anlamı, komşu tepeden geçen bir θ_{max}-kesme düzlem - minin varlığıdır.

(3) $\theta_{max} > \hat{\theta}$ ise, tüm kenar z-etkindir ve hiçbir θ_{max}-kesme düzlemi tarafından kesilmez.

θ_{max} ın nasıl hesaplanacağına geçmeden önce B tabanı ve $\bar{x}$ noktasında azaltılmış maliyet matrisi $\tilde{T}(\bar{x})$ nin yapısını inceleyelim:

ÇALKP da amaçların türevleri sabit olmadığı için $\tilde{T}(\bar{x})$, $\bar{x}$ den çıkan kenar boyunca değişecektir. x_j ile ilgili kenar boyunca ilerlerken $\tilde{T}(\bar{x})$, aşağıdaki gibi θ nın bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

$z_i(x) = \dfrac{\ell_i(x)}{m_i(x)}$ olsun. Burada $\ell(x) = Cx + \alpha$ $m(x) = Dx + \beta$ dır. $\gamma(\bar{x},\hat{x})$ kenarı boyunca hareket edildiğinde

$$\ell(\theta) = \ell(\bar{x}) + \tilde{C}_j\theta \ , \quad m(\theta) = m(\bar{x}) + \tilde{D}_j\theta$$

elde edilir. Burada $\ell(\theta)$, $m(\theta)$, $\tilde{C}_j$ ve $\tilde{D}_j$ lar sütun vektörleridir. $\tilde{C}_j$ ve $\tilde{D}_j$ lar, pay ve paydanın azaltılmış maliyet matrisleri

$$\tilde{C} = C_B\, B^{-1}N - C_N, \quad \tilde{D} = D_B B^{-1}N - D_N$$

nin j. sütunlarıdır. Böylece

$$T(\theta) = m(\theta) \circ C - \ell(\theta) \circ D$$

$$= (m(\bar{x}) \circ C - \ell(\bar{x}) \circ D) + \theta(\tilde{D}_j \circ C - \tilde{C}_j \circ D)$$

$$= T(\bar{x}) + \theta(\tilde{D}_j \circ C - \tilde{C}_j \circ D)$$

olur. $m(\theta) \circ C$ notasyonu, C nin satırının $m(\theta)$ nın elemanlarıyla karşılıklı çarpıldığını gösterir, yani $m(\theta) \circ C$, MC ye eşdeğerdir, burada $M_{ii} = m_i(\theta)$ ve $i \neq j$ için $M_{ij} = 0$ dır.

O halde

$$\tilde{T}(\theta) = \tilde{T}(\bar{x}) + \theta H(\bar{x},j)$$

demektir. Burada $H(\bar{x},j)$;

$$H(\bar{x},j) = (\tilde{D}_j \circ C_B - \tilde{C}_j \circ D_B)B^{-1}N - (\tilde{D}_j \circ C_N - \tilde{C}_j \circ D_N)$$

matrisi, x_j ve B tabanıyla ilgili kenar boyunca azaltılmış maliyet matrisi $\tilde{T}(\bar{x})$ nin değişimini gösterir ve $\tilde{T}(\bar{x})$ ile aynı boyutta sabit bir matristir. Böylece

$$\begin{aligned} \lambda^T \left[\tilde{T}(\bar{x}) + \theta H(\bar{x},j)\right] &= \lambda^T \tilde{T}(\theta) \geq 0 \\ \lambda^T e &= 1 \qquad\qquad (3.3) \\ 0 \leq \lambda &\in R^k \end{aligned}$$

sistemini sağlayan θ nın maksimum değeri θ_{max} dır (1).(3.3) sisteminin θ nın bazı sabit değerlerince uygun olması için g.v.y.ş.

$$\begin{aligned} \text{Amaç} &: \max \{s \in R\} \\ \text{Kısıtlar} &: \lambda^T \left[\tilde{T}(\bar{x}) + \theta H(\bar{x},j)\right] - s\,e \geq 0 \\ & \lambda^T e = 1 \\ & 0 \leq \lambda \in R^k \qquad\qquad (3.4) \\ & 0 \leq s \in R \end{aligned}$$

olarak verilen LP problemi $P(\theta)$ nın optimal amaç fonksiyon değeri $s^*(\theta)$ nın negatif olmamasıdır.

(1) KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., "Multiple Objective Linear Fractional Programming", Man. Sci., Vol.27, No.9 1981, s.1024-1039.

<u>Kornbluth ve Steuer'in θ_{max} ı hesaplama algoritması</u>

Başlangıçta $\theta = \theta_0 = 0$ alınarak $P(\theta)$ probleminin (λ^*, s^*) optimal çözümü bulunur. $(\lambda, s) = (\lambda^*, s^*)$ alınarak (3.4) ü sağlayan θ nın en büyük negatif olmayan θ_1 değeri hesaplanır. Sonra $P(\theta_1)$ lineer programının (λ^*, s^*) optimal çözümü bulunur. $(\lambda, s) = (\lambda^*, s^*)$ alınarak (3.4) ü sağlayan θ nın en büyük $\theta_2 \geqslant \theta_1$ değeri hesaplanır ve $P(\theta_2)$ çözülür. θ nın $\theta_i \geqslant \theta_{i-1}$ değerini bulma ve $P(\theta_i)$ yi çözme prosesi, ya bazı i ler için $\theta_i, \hat{\theta}$ yı aşana kadar ya da bazı i ler için $s^*(\theta_i) \leqslant \varepsilon$ olana kadar tekrarlanır. Burada ε toleransı, önceden seçilmiş pozitif bir sayıdır.

Eğer bazı i ler için θ_i, $\hat{\theta}$ yı aşarsa, Kornbluth ve Steuer algoritması, $\theta_{max} > \hat{\theta}$ olduğuna ve kenarın kırılma noktası içermediğine karar verir.

Eğer bazı $\theta_i \leqslant \hat{\theta}$ için $s^*(\theta_i) \leqslant \varepsilon$ ise, algoritma, $P(\theta_i)$ nin optimal çözümü (λ^*, s^*) olarak, $(\lambda^*)^T H(\bar{x}, j) \geqslant 0$ olup olmadığını kontrol eder. Bu eşitsizlik varsa, kırılma noktasının mevcut olmadığı sonucuna varır, aksi halde ise kırılma noktasının mevcut olduğuna ve θ_{max} ın yaklaşık olarak θ_i ye eşit olduğuna karar verir (1).

Benson ise, işte bu noktada yani θ_{max} ın θ_i ye yaklaşık eşit olması durumunda bazen yanıldığını göstererek yeni bir yöntem önermiştir. Benson'un θ_{max} ı hesaplayan bu algoritmasını kısım 4.3 de vereceğiz.

Şimdi θ_{max} ın hesaplanmasından sonraki işlemler üzerinde duralım.

---

(1) BENSON, H.P., "Finding Certain Weakly-Efficient Vertices in MOLFP", Man. Sci., Vol. 31, No. 2, Feb.,1985,s.240-245.

θ_{max}-kesme düzlemlerinin belirlenmesi ve probleme katılması

θ_{max} verilirse, kesme düzlemleri aşağıdaki gibi belirlenir.

(1) $\theta = \theta_{max}$ olan (3.3) probleminin bütün λ_i^* alternatif çözümleri belirlenir.

(2) $I = \{ i \mid \lambda_i^* > 0\}$ olsun. I kümesi, yüzey eğrileri $\theta = \theta_{max}$ noktasından geçen ve ilave z-etkin tepelerle sonuçlanan amaçlar kümesidir.

(3) Kesme düzlemin gradyantı, daha önceden belirlenmiş kesme düzlemlerinin gradyantlarının lineer kombinezonu ise, böyle kesme düzlemlerin hiçbiri dikkate alınmaz.

Probleme dahil edilecek düzlemler belirlendikten sonra, uygun bölge aşağıdaki gibi daraltılır.

(1) Şu andaki tepenin (henüz incelenmemiş) $\bar{x}$ olduğu kabul edilsin. $x_j = 0$ tabandışı değişkenini tabana sokarak başlangıçta z-etkin kenar boyunca $\theta = \theta_{max}$ ı bulalım.

(2) $x_j = \theta_{max}$ daki z_i değeri $z_i(\theta_{max}) = \ell_i(\theta_{max})/m_i(\theta_{max})$ olsun ve $\tilde{c}^i$ ve $\tilde{d}^i$, pay ve payda fonksiyonlarının güncelleştirilmiş satırları olsun.

(3) Lineer amaçlar için

$$c_N^i x_N - d_i^+ + d_i^- = z_i(\theta_{max}) - z_i(\bar{x})$$

kullanılır.

(4) Kesirli amaçlar için;

$$(c^i_N - z_i(\theta_{max})\, d^i_N)x_N - d_i^+ + d_i^- = z_i(\theta_{max})m_i(\bar{x}) - \ell_i(\bar{x})$$

kullanılır (1).

4.3. BENSON YÖNTEMİ

Benson, 4.2. de verilen Kornbluth ve Steuer Algoritmasının ana bölümleriyle hemfikirdir, fakat θ_{max} ı hesaplayan bölümünün bazen yanıldığını göstererek yeni bir yöntem önermiştir.

Benson'un θ_{max} ı Hesaplayan Yöntemi

S nin z-etkin uç noktası $\bar{x}$ ve ilgili taban B olsun. x_j, j. tabandışı değişken olarak $\hat{\theta}$ değerine ulaşırsa, S nin $\bar{x}$ ye komşu olan $\hat{x}$ uç noktasındaki taban değişimini verir. $\bar{x}$ den $\hat{x}$ ya çıkan kenarın başlangıçta z-etkin olduğu varsayılsın. Bu kenar boyunca mümkün kırılma noktası aramak için (3.3) sistemini sağlayan θ nın maksimum değeri θ_{max} bulunmalıdır.

θ değeri sabit tutulursa, (3.3) sisteminin bazı λ larla sağlanması için g.v.y.ş.

Amaç : $\min \; e^T w$

Kısıtlar: $\lambda^T[\tilde{T}(\bar{x}) + \theta H(\bar{x},j)] + w \geq 0$

$$\lambda^T e = 1$$
$$\lambda, w \geq 0$$

LP probleminin optimal amaç fonksiyon değerinin sıfıra eşit olmasıdır. LP da dualite teoremiyle, bu LP probleminin optimal amaç fonksiyon değerinin sıfır olması için g.v.y.ş. dual LP problemi

(1) KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., a.g.e.

Amaç : max t

Kısıtlar: $[\tilde{T}(\bar{x}) + \theta H(\bar{x},j)]\ u + te \leq 0$

$$0 \leq u \leq e$$

nin optimal amaç fonksiyon değerinin de yinesıfır olmasıdır. Bu ifadeler birlikte ele alınırsa şunu vurgular. Verilen herhangi pozitif bir sayı p olarak, (3.3) sisteminin tüm $\theta \in [0,p]$ lerce sağlanması için g.v.y.ş.

Amaç : max t

Kısıtlar: $[\tilde{T}(\bar{x}) + \theta H(\bar{x},j)]\ u + te \leq 0$

$$0 \leq u \leq e$$

$$0 \leq \theta \leq p$$

olarak verilen T(p) probleminin optimal amaç fonksiyon değerinin $t^*(p) = 0$ olmasıdır. Böylece θ_{max}, $t^*(p) = 0$ yapan p nin maksimum değerine eşittir.

Herhangi pozitif p değeri için, $(u,t,\theta) = (0,0,0)$ çözümü T(p) probleminin bir uygun çözümüdür. Böylece tüm $p > 0$ lar için $t^*(p) \geq 0$ dır. Yine $t^*(p)$ nin tanımından, $t^*(p)$, p nin azalmayan fonksiyonudur. $t^*(p) = 0$ olduğu için, son iki ifadeden, bütün $p \in (0,\theta_{max}]$ lar için $t^*(p) = 0$ demektir. Ayrıca θ_{max} ın tanımı gereği, tüm $p > \theta_{max}$ lar için $t^*(p) > 0$ dır. Bütün bu gözlemler, θ_{max} ı bulacak yeni yönteme temel oluştururlar. Yöntem geliştirilmiş ikiye bölme prosedürünü kullanır. Aşağıda verilen yöntemde, ε ve δ, önceden verilen herhangi pozitif sayılardır.

Adım 1) $t^*(\hat{\theta}) = 0$ ya da $t^*(\hat{\theta}) > 0$ olup olmadığını belirleyiniz. $t^*(\hat{\theta}) = 0$ ise, $t^*(\hat{\theta} + \varepsilon)$ 'u hesaplayınız ve Adım 2'ye gidiniz. $t^*(\hat{\theta}) > 0$ ise, $\bar{t} > 0$ olacak şekilde $T(\hat{\theta})$ probleminin $(\bar{u},\bar{t},\bar{\theta})$ uygun çözümünü bulunuz, $L=0$, $U=\bar{\theta}$ alınız ve Adım 3 e gidiniz.

Adım 2) $t^*(\hat{\theta} + \varepsilon) = 0$ ise, $\theta_{max} > \hat{\theta}$ olduğunu, kenarın kırılma noktasının olmadığını anlayınız ve durunuz. $t^*(\hat{\theta} + \varepsilon) > 0$ ise, θ_{max} ın $\hat{\theta}$ ya yaklaşık olarak eşit olduğunu, yani kenarın kırılma noktasının olduğunu anlayınız ve durunuz.

Adım 3) $(U - L) \leq \delta$ ise, $\theta_{max} \in [L,U]$ olduğunu yani kenarın kırılma noktasının olduğunu anlayınız ve durunuz. Aksi halde Adım 4 e gidiniz.

Adım 4) $t^*[(L + U)/2] = 0$ ya da $t^*[(L + U)/2] > 0$ olup olmadığını belirleyiniz. $t^*[(L + U)/2] = 0$ ise, $L = (L + U)/2$ alınız. $t^*[(L + U)/2] > 0$ ise, $\bar{t} > 0$ olacak şekilde $p=(L + U)/2$ olan $T(p)$ probleminin $(\bar{u}, \bar{t}, \bar{\theta})$ uygun çözümünü bulunuz ve $U = \bar{\theta}$ alınız. Adım 3'e gidiniz.

Adım 1 de, $t^*(\hat{\theta}) = 0$ ise $\theta_{max} \geq \hat{\theta}$ dır ve Adım 2 kırılma noktasının var olup olmadığını belirler. Adım 2 de $\varepsilon > 0$ için $t^*(\hat{\theta} + \varepsilon) = 0$ ise $\theta_{max} > \hat{\theta}$ dır ve kırılma noktası mevcut değildir. Fakat $t^*(\hat{\theta} + \varepsilon) > 0$ ise $\theta_{max} \in [\hat{\theta}, \hat{\theta} + \varepsilon)$ dur. Bu durumda yöntemden, θ_{max} ın yaklaşık olarak $\hat{\theta}$ ya eşit olduğu anlaşılır. ε pozitif parametresi, yaklaşık eşitlik tanımını bozacak kadar büyük seçilmemelidir.

Adım 1 de $t^*(\hat{\theta}) > 0$ ise, $\theta_{max} \in [0, \bar{\theta})$ ve $\bar{\theta} \leq \hat{\theta}$ olacak şekilde $\bar{\theta}$ noktası seçilir. Adım 3 ve 4 de, θ_{max} ın içinde kaldığı aralığın uzunluğu, δ dan küçük ya da eşit kalana kadar aşama aşama azaltılır. Böylece kırılma noktası bulunur ve yöntem son bulur. Aralığın uzunluğu her seferinde en az yarısı kadar azaltıldığı için yöntem sonludur (1).

---

(1) BENSON, H.P., a.g.e.

4.4. HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI

(3.1) deki ÇALKP probleminde her bir amaca belli bir hedef değeri atanarak bir HP problemi elde edilebilir.(HP problemi hakkında bilgi, Bölüm II'de verilmiş idi). Probleme ilk olarak öncelikli HP modelinin, sonra da Archimedian HP modelinin uygulanışını görelim.

Öncelikli HP Modeli

Bu yöntem, her bir öncelik sınıfında sadece bir kriter fonksiyonu varsa uygulanabilir. Bu durumda, her j adımında sadece bir kriter fonksiyonu ele alınır. Eğer j. kriter lineer ise LP yöntemleri, lineer kesirli ise LKP yöntemleri kullanılır. Şöyle ki;

Genelliği kaybetmeksizin $j = 1$ alalım. S uygun bölgesi

$$\frac{c^1x + \alpha_1}{d^1x + \beta_1} + d_1^- - d_1^+ = z_1^*$$

kısıtı ilavesiyle daraltılır. $d^1x + \beta_1 > 0$ (kabul gereği) olduğu için

$$(c^1 - z_1^* d^1)x + d_1^-(d^1x + \beta_1) - d_1^+ (d^1x + \beta_1) = z_1^* \beta_1 - \alpha_1$$

lineer olmayan ifade elde edilir.

$$u_1^- = d_1^- (d^1x + \beta_1) \text{ve } u_1^+ = d_1^+(d^1x + \beta_1)$$

değişken dönüşümü yapılarak HP problemi,

$$\text{Amaç} \quad : \min \frac{w_1^-u_1^- + w_1^+u_1^+}{d^1x + \beta_1}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad (c^1 - z_1^* d^1)x + u_1^- - u_1^+ = z_1^* \beta_1 - \alpha_1 \qquad (3.5)$$

$$x \in S$$
$$x,\ u_1^-,\ u_1^+ \geq 0$$

şeklinde standart tek amaçlı lineer kesirli programlama problemi olarak formüle edilebilir. w_i^- ve w_i^+ lar, her bir i hedefi için "*hedef içi (intragoal) ağırlıklar*"dır, yani z_i^* a alttan ya da üstten ulaşmaya uygulanacak relative cezaları gösterir. Hiç bir suretle hedefler arasındaki relative önemi yansıtmaz.

z_1^* hedefine ulaşılırsa, (3.5) in optimal çözümünde $u_1^- = 0$ ve $u_1^+ = 0$ dır ve bir sonraki öncelik seviyesine geçmeden önce S kümesi

$$(c^1 - z_1^* d^1)\ x = z_1^* \beta_1 - \alpha_1$$

kısıtı ile daraltılır. Eğer z_1^* elde edilemeyip, ona en yakın $\hat{z}_1$ değeri elde edilirse, bu durumda S kümesi

$$(c^1 - \hat{z}_1 d^1)\ x = \hat{z}_1 \beta_1 - \alpha_1$$

kısıtı ile daraltılır.

Bu yöntem, herbir öncelik sınıfında sadece bir kesirli kriter varsa başarılıdır. Eğer iki tane fonksiyon varsa, problem

$$\text{Amaç} \quad : \min \left\{ \lambda_1 \left(\frac{w_1^- u_1^- + w_1^+ u_1^+}{d^1 x + \beta_1} \right) + \lambda_2 \left(\frac{w_2^- u_2^- + w_2^+ u_2^+}{d^2 x + \beta_2} \right) \right\}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad (c^1 - z_1^* d^1) x + u_1^- - u_1^+ = z_1^* \beta_1 - \alpha_1$$

$$(c^2 - z_2^* d^2) x + u_2^- - u_2^+ = z_2^* \beta_2 - \alpha_2$$

$$x \in S$$

$$x,\ u^-,\ u^+ \geq 0$$

şeklinde iki lineer kesirli fonksiyonun toplamıdır ve genellikle kuadratik kesirli fonksiyondur. Böylece tek amaçlı LKP yöntemleri kullanılamaz. Burada λ_i ler hedeflerin birbirlerine göre önemini yansıtan *"hedeflerarası (intergoal) ağırlıklar"* dır. λ_i leri tahmin etmek karar verici için çoğu zaman güçtür. İşte öncelikli HP modelinde, her öncelik sınıfında birden fazla kriter varsa böyle bir güçlükle karşılaşılır. Bu yöntemin iyi yönü, böyle hedeflerarası ağırlıkların be - lirtilmesine ihtiyaç göstermemesidir.

Archimedian HP Modeli

Bu modelde bütün kriterler aynı seviyededir. Değişken dönüşümü yapılarak

$$\text{Amaç} \quad : \min \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\frac{w_i^- u_i^- + w_i^+ u_i^+}{d^i x + \beta_i} \right) \qquad (3.6)$$

$$\text{Kısıtlar: } (c^i - z_i^* d^i)x + u_i^- - u_i^+ = z_i^* \beta_i - \alpha_i$$

$$i = 1,\ldots,k$$

$$x \in S$$

$$x,\ u^-,\ u^+ \geq 0$$

şeklinde lineer kısıtları olan, amaç fonksiyonu ise lineer kesirli fonksiyonların toplamı olarak genellikle lineer olmayan bir problem elde edilir. Bu problemin güçlüğü, birçok bölgesel optimumu olması ve emin bir şekilde çözümlememesidir. Problemin çözümü için Kornbluth ve Steuer'in önerdiği yöntem ÇALKP yı kullanmaktır. Çünkü ÇALKP algoritması tüm z-etkin tepeleri hesaplayarak tüm mümkün optimal çözümler kümesini belirler.

Şimdi, hedef sapmaları

$$v_i(x) = \frac{w_i^- u_i^- + w_i^+ u_i^+}{d^i x + \beta_i}$$

olsun ve

$$\min \{v_1(x),\ v_2(x),\ldots,\ v_k(x)\}$$

Kısıtlar: (3.6) nın kısıtları (3.7)

problemini dikkate alalım. (Burada min $\{v(x)\}$, max $\{-v(x)\}$ demektir). (3.6) ve (3.7) problemleri arasındaki geçiş, Bölüm II de ağırlıklı-toplamlar yaklaşımında olduğu gibidir. Yani, (3.6) nın bütünsel (global) optimumu, (3.7) nin bütün z-etkin tepe çözümleri civarındadır. Optimumu bulmak için (ya da kafi derecede yakın bir yaklaşımla karar prosesini sona erdirmek için) literatürde yer alan süzme (filtering) yöntemleri vs. kullanılabilir.

ÇALKP algoritması kullanımının bir üstünlüğü de, modelde kesirli amaçları ve kesirli hedefleri birleştirmesidir. Şöyle ki;

k tane kesirli kriter fonksiyonunun olduğu, bunların f tanesinin hedeflerinin z_i^* ve (k-f) tanesinin de maksimize edilecek amaçlar olduğu varsayılsın. f tane kesirli hedef için değişken dönüşümleri yapılır ve kısıtlar kümesi daraltılırsa

$$\max \ \{-v_1(x),\ldots,-\ v_f(x),\ z_{f+1}(x),\ldots,z_k(x)\} \qquad (3.8)$$

Kısıtlar: $(c^i - z_i^* d^i)x + u_i^- - u_i^+ = z_i^* \beta_i - \alpha_i \qquad i=1,\ldots,f$

$$x \in S$$

$$x,\ u^-,\ u^+ \geq 0$$

şeklinde ÇALKP problemi elde edilir.

Bu problemin çözümler kümesi, hem kesirli HP optimumunu (1,...,f hedeflerinin) hem de $v_i(x)$ hedef sapmalarına ve $z_i(x)$ amaçlarına göre elde edilen tüm z-etkin kümeyi içerir. Problemin $\bar{x}$ z-etkin tepesinde güncelleştirilmiş tablo, bu tepede amaçların relative önemini yansıtan λ_i ağırlıklarını belirlemede kullanılabilir.

(3.8) probleminin $\bar{x}$ z-etkin tepesinde güncelleştirilmiş tablonun azaltılmış tabandışı maliyetler matrisi W olsun. O halde bazı λ ağırlıklar vektörleri için $\bar{x}$ noktası,

$$\text{Amaç} \quad : \max \left\{ \sum_{i=1}^{f} - \lambda_i \, v_i(x) + \sum_{i=f+1}^{k} \lambda_i \, z_i(x) \right\}$$

Kısıtlar: (3.8) in kısıtları

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \; , \quad \lambda_i \geq 0$$

probleminin bir bölgesel optimumu olacaktır.

W kullanılarak,

$$\lambda^T W \geq 0 \; , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$$

sistemini sağlayan her bir λ ağırlandırma vektörü için $\bar{x}$ noktası bölgesel olarak optimal olacaktır. Böylece belli bir z-etkin tepe ile ilgili hedeflerarası ağırlıklandırma vektörleri kümesi, istenirse belirlenebilir. Bu ağırlıklar karar vericiden istenmez, aksine karar vericiye model tarafından sunulur. Ancak herbir kesirli hedefler için w_i^- ve w_i^+ hedefiçi ağırlıkları, önceden belirlenmiş bir küme olarak modelde kullanılır. Bu vektörlerin probleme tüm girişleri ya 0 ya da 1 alınarak yapılır. i. hedef küçük-eşit ise $w_i^- = 0$, $w_i^+ = 1$; büyük-eşit ise $w_i^- = 1$, $w_i^+ = 0$; eşitlik ise $w_i^- = w_i^+ = 1$ alınır (1).

---

(1) KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., "Goal Programming with Linear Fractional Criteria", EJOR,V.8, 1981, s.58-65.

4.5. NYKOWSKI - ZOLKIEWSKI (NZ) YAKLAŞIMI

Bu yaklaşımda (3.1) de verilen ÇALKP problemine karşılık gelen bir ÇALP problemi kurulmaktadır. Önce bu iki problem arasındaki temel bağıntıları verelim.

Burada S, yine R^n de boş olmayan, konveks ve kompakt bir kümedir. (3.1) probleminin k-etkin çözümler kümesi E^S olsun.

<u>Teorem:</u> ÇALKP probleminde $\bar{x} \in E^S$ ve tüm $x \in S$ ler için

$z_i(x) = \dfrac{\ell_i(x)}{m_i(x)} = \dfrac{c^i x + \alpha_i}{d^i x + \beta_i} > 0$ $(i=1,\ldots,k)$ ise, buna karşılık gelen

$$\max \{\Gamma(x) = [\ell_1(x),\ldots,\ell_k(x),-m_1(x),\ldots,-m_k(x)]^T \mid x \in S\}$$

ÇALP probleminin etkin çözümler kümesi E_Γ olmak üzere $\bar{x} \in E_\Gamma$ dır. ÇALKP probleminde $\bar{x} \in E^S$ ve tüm $x \in S$ ler için $z_i(x) < 0$ ise, buna karşılık gelen

$$\max \{\chi(x) = [\ell_1(x),\ldots,\ell_k(x), m_1(x),\ldots, m_k(x)]^T \mid x \in S\}$$

ÇALP probleminin etkin çözümler kümesi E_χ olmak üzere $\bar{x} \in E_\chi$ dır.

<u>Sonuç:</u> ÇALKP problemindeki amaç fonksiyonları bütün S kümesi üzerinde değişmez işarete sahipse

$$E^S \subset E_\psi \tag{3.9}$$

dir. Burada E_ψ, lineer kesirli probleme uygun biçimde karşılık gelen ÇALP probleminin etkin çözümler kümesidir.

Matematik programlama teorisine göre, amaç fonksiyonuna bir sabit ilave etme, optimal çözümler kümesini değiştirmez. Bu nedenle

$$\max \{L(x)= [\frac{\ell_1(x)}{m_1(x)}+\hat{d}_1,\ldots,\frac{\ell_k(x)}{m_k(x)}+\hat{d}_k]^T \mid x \in S\} \quad (3.10)$$

problemi (3.1) problemi ile eşdeğerdedir, yani $E^S = E_L^S$ dir. (3.1) de, tüm $x \in S$ ler için $z_i(x) > 0$ ($i= 1,\ldots,h$), fakat bazı (ya da tüm) $x \in S$ ler için $z_i(x) < 0$ ($i=h+1,\ldots,k$) olduğu kabul edilsin. (3.10) da $\hat{d}_i = 0$ ($i=1,\ldots h$),

$$\hat{\ell}_i = \min\{\ell_i(x) \mid x \in S\}, \quad \hat{m}_i = \min \{ m_i(x) \mid x \in S\} \quad (3.11)$$

olmak üzere $\hat{d}_i > - \hat{\ell}_i / \hat{m}_i$ ($i=h+1,\ldots,k$) almak (3.1) in tüm amaçlarını S de pozitif yapar. Bu durumda probleme karşılık gelen ÇALP problemi,

$$\max \{\Lambda(x)=[\ell_1(x),\ldots,\ell_h(x),\ell_{h+1}(x) + \hat{d}_{h+1} m_{h+1}(x),\ldots$$
$$\ldots,\ell_k(x) + \hat{d}_k m_k(x), -m_1(x),\ldots, -m_k(x)]^T$$
$$\mid x \in S\}$$

şeklindedir. $E^S = E_L^S$ eşitliğinden ve (3.9) dan

$$E^S \subset E_\Lambda$$

sonucu çıkarılır.

Bu sonuçlar ÇALKP problemine karşılık gelen ÇALP probleminin nasıl kurulduğunu ve z_i($i=1,\ldots,k$) fonksiyonlarının S deki işaretlerinde kabul yapmaya gerek olmadığını göstermektedir. Burada işaretler konusunda yapılacak tek esas kabul, (3.1) probleminde "tüm $x \in S$ ler için $m_i(x) > 0$ ($i=1,\ldots k$)" olmasıdır.

(3.1) de tüm $x \in S$ ler için $z_i(x) > 0$, $i=1,\ldots,k$ elde edilerek ÇALKP ya karşılık gelen ÇALP problemi

$$\max \{\Phi(x) = Gx \mid x \in S\} \quad (3.12)$$

kurulmuş olsun. Burada

$$G_{2k\times n} = \begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^k \\ -d^1 \\ \vdots \\ -d^k \end{bmatrix}$$

dır. Eğer ÇALP nın etkin çözümleri S nin sınırlarında ise, ÇALKP probleminin S nin içine ait k-etkin çözümleri yoktur. Benzer şekilde kırılma noktaları ve E^S in ÇALP deki etkin kümeden ayrılan özellikleri yoktur. Bunun kontrolu,

Amaç : min w

Kısıtlar: $Gz - Gy + u = 0$ (3.13)

$1^T u - v + w = 1$

$z \geq 0,\ y \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0$

LP problemi ile yapılabilir. Bu problemin uygun çözümü vardır ve $\bar{w}$, optimal amaç fonksiyonu değerini göstersin.

<u>Teorem:</u> (3.13) probleminde $\bar{w} = 0$ ise, $E_\Phi \cap$ iç$S = \emptyset$ dir, $\bar{w} > 0$ ise $E_\Phi = S$ dir (1).

<u>NZ Algoritması:</u>

Adım 0) ÇALKP problemine karşılık gelen ÇALP problemini (gerekli ise (3.10) ve (3.11) formüllerini kullanarak) kurunuz ve (3.13) problemini çözünüz. Eğer $\bar{w} = 0$ ise Adım 2'ye gidiniz. $\bar{w} > 0$ ise Adım 1 e gidiniz.

---

(1) NKOWSKI, I., ZOLKIEVSKI, Z., "A Compromise Procedure for the Multiple Objective Linear Fractional Programming Problem", EJOR, V.19, 1985, s.91-97 den BENVENISTE, M., "Testing for Complete Efficiency in a Maximization Problem", Math. Prog. V.12, 1977, s.285-288.

Adım 1) Kornbluth ve Steuer algoritmasını kullanarak z-etkin tepeler kümesi E_v^w yi bulunuz ve Adım 4 e gidiniz.

Adım 2) (3.12) problemini çözünüz ve S nin tüm k-etkin uç noktalar kümesi $E_\Phi^{uç}$ ü bulunuz, Adım 3 e gidiniz.

Adım 3) Tüm $\hat{x} \in E_\Phi^{uç}$ için aşağıdaki LP problemini çözünüz.

Amaç : $\max R = 1^T v$

Kısıtlar: $(\hat{\ell}_i d^i - \hat{m}_i c^i)x + v_i = \hat{m}_i \alpha_i - \hat{\ell}_i \beta_i$, $i=1,\ldots,k$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0,\ v \geq 0$$

Bu LP probleminde $R_{max} = 0$ olan noktalar, ÇALKP da k-etkindir, yani E_x^s kümesine aittir. Bunları saklayınız ve Adım 4 e gidiniz.

Adım 4)
$$T = \begin{cases} E_v^w, & \text{eğer Kornbluth-Steuer algoritması kullanılmışsa,} \\ E_x^s, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. T kümesini karar vericiye sununuz. Karar verici bu bilgiler ışığında final kararını verebilirse algoritmayı bitiriniz. DURUNUZ. Karar veremezse Adım 5 e gidiniz.

Adım 5) $j \in J_T = \{j \mid \hat{x}_j \in T\}$ olsun

$$f_i^M = \max \left\{ \frac{\ell_i(\hat{x}_j)}{m_i(\hat{x}_j)} \;\middle|\; j \in J_T \right\} , \qquad i=1,\ldots,k$$

$$f_i^m = \min \{\frac{\ell_i(\hat{x}_j)}{m_i(\hat{x}_j)} \mid j \in J_T\},$$

hesaplayınız ve

$$g_i(\hat{x}_j) = \frac{f_i^M - f_i(\hat{x}_j)}{f_i^M - f_i^m} \qquad i=1,\ldots,k$$

ile normalize edilmiş ödemeler tablosunu kurunuz.

Ödemeler tablosu

	$\hat{x}_j \ , \ j \in J_T$
$g_i(\hat{x}_j) \quad i=1,\ldots k$	$g_{ij} = g_i(\hat{x}_j)$

şeklindedir. Adım 6'ya gidiniz.

Adım 6) Ödemeler tablosunu kullanarak

$$\min \{ \max \left[g_i(\hat{x}_j) \mid i=1,\ldots,k \right] \mid j \in J_T \}$$

Chebyshev probleminin optimal çözümü olarak bir uzlaşık çözüm hesaplayınız. DURUNUZ (1).

(1) NYKOWSKI, I., ZOLKIEWSKI, Z., "A Comprimise Procedure for the Multiple Objective Linear Fractional Programming Problem",EJOR, V.19, 1985, s.91-97.

BÖLÜM IV

ÇALKP PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

(3.1) verilen ÇALKP problemini, notasyonda basitlik olması açısından

$$\text{Amaçlar} \quad : \max \{ z_i = \frac{a_i}{b_i} \} \quad i=1,\ldots,k \qquad (4.1)$$

$$\text{Kısıtlar} : x \in S = \{ x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geqslant 0,\ b \in R^m \}$$

şeklinde yeniden ifade edelim. Herhangi bir $x \in S$ için $b_i > 0$, $i=1,\ldots,k$ kabulünün yanısıra $\emptyset \neq S \subset R^n$ kompakt bir küme olsun.

Çözüm önerilerimizi, (4.1) probleminin aşağıdaki durumları için verelim.

1. DENK AMAÇLAR DURUMU

Bu önerimizde, KV nin z_i amaçları ile ilgili öncelik tercihlerinin olmadığını, diğer bir deyişle bütün amaçların aynı derecede önemli olduğunu kabul etmekteyiz.

z_i $(i=1,\ldots,k)$ amaç fonksiyonunun S üzerindeki optimal (maksimum) değeri z_i^* olsun. Şu halde $\forall\ x \in S$ için,

$$z_i = \frac{a_i}{b_i} \leqslant z_i^*$$

dır. Bütün amaçların optimal değerlerinin normalizasyonundan da faydalanarak, 1 sayısını bütün amaçlar için bir üst hedef olarak belirleyebiliriz.

Şöyle ki;

a) $z_i^* \neq 0$ ise;

$$\frac{z_i}{|z_i^*|} \leq \frac{z_i^*}{|z_i^*|}$$

dan

i) $z_i^* > 0 \longrightarrow \dfrac{z_i}{|z_i^*|} \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{a_i}{b_i|z_i^*|} \leq 1$

ii) $z_i^* < 0 \longrightarrow \dfrac{z_i}{|z_i^*|} \leq -1 \Longrightarrow 2 + \dfrac{z_i}{|z_i^*|} \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{a_i + 2b_i|z_i^*|}{b_i|z_i^*|} \leq 1$

b) $z_i^* = 0$ ise;

$$z_i \leq 0 \Longrightarrow z_i + 1 \leq 1 \Longrightarrow \frac{a_i + b_i}{b_i} \leq 1$$

elde edilir ve

$$z_i^* > 0 \Longrightarrow \frac{a_i}{b_i|z_i^*|} \leq 1$$

$$z_i^* < 0 \Longrightarrow \frac{a_i + 2b_i|z_i^*|}{b_i|z_i^*|} \leq 1$$

$$z_i^* = 0 \Longrightarrow \frac{a_i + b_i}{b_i} \leq 1$$

yazabiliriz. O halde

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i & , \quad z_i^* > 0 \\ a_i + b_i & , \quad z_i^* = 0 \\ a_i + 2b_i|z_i^*| & , \quad z_i^* < 0 \end{cases}$$

$$\hat{b}_i = \begin{cases} b_i|z_i^*| & , \quad z_i^* \neq 0 \\ b_i & , \quad z_i^* = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} \leq 1$$

olacak şekilde düzenleyebiliriz. Bu işlemle aynı zamanda amaçlar arasındaki birim farklılıklarını kaldırıp dengeyi de kurmuş oluyoruz.

$$\hat{a}_i \leq \hat{b}_i$$

den $$\sum_i \hat{a}_i \leq \sum_i \hat{b}_i \qquad (4.2)$$

yazılabilir.

Şu halde (4.1) probleminin çözümü için;

1. Yol: (4.2) eşitsizliği daima $\sum_i \hat{a}_i - \sum_i \hat{b}_i \leq 0$ şeklindedir. Böylece

$$\sum_i \hat{a}_i - \sum_i \hat{b}_i + s^- \geq 0 \qquad (4.3)$$

kısıtını S ye ilave ederek HP ile çözüm buluruz. Hedef değerini (4.3) de sıfırdan büyük-eşit alarak, hedefin altında kalmamaya çalışmaktayız. Bu durumda çözülecek problem;

Amaç : min s^-

Kısıtlar : $\sum_i \hat{a}_i - \sum_i \hat{b}_i + s^- \geq 0$

$x \in S \,, \quad s^- \geq 0$

şeklinde olacaktır.

2. Yol: a) (4.2) eşitsizliğinden

$$\frac{\sum_i \hat{a}_i}{\sum_i \hat{b}_i} \leq 1$$

yazarak max $\dfrac{\sum_i \hat{a}_i}{\sum_i \hat{b}_i} \cong 1$ yapmaya çalışırız. Bu durumda çözülecek problem;

$$\{\max z = \frac{\sum_i \hat{a}_i}{\sum_i \hat{b}_i} \mid x \in S\}$$

şeklinde tek amaçlı LKP problemi olacaktır.

b) $\dfrac{\sum_i \hat{a}_i}{\sum_i \hat{b}_i} \leq 1$ den kesirli HP ile çözüm buluruz.

Şöyle ki;

Hedef: $\{\dfrac{\sum_i \hat{a}_i}{\sum_i \hat{b}_i} = z\}$, $(z \geq 1)$ (4.4)

Kısıtlar: $x \in S$

kesirli HP problemidir. Bu problemde hedef değeri 1 den büyük-eşit alarak hedefin altında kalmamaya çalışmaktayız. Çözümü için S ye

$$\frac{\sum_i \hat{a}_i}{\sum_i \hat{b}_i} + d^- \geq 1$$

kısıtı katılır. $\sum_i \hat{b}_i > 0$ olduğundan

$$\sum_i \hat{a}_i + d^- (\sum_i \hat{b}_i) \geq \sum_i \hat{b}_i$$

yazılarak lineer olmayan bir ifade elde edilir.

$$u^- = d^- (\sum_i \hat{b}_i)$$

değişken dönüşümü ile (4.4) problemi;

Amaç $:\{ \min \ d^- = \dfrac{u^-}{\sum_i \hat{b}_i}\}$

Kısıtlar: $\sum_i \hat{a}_i + u^- \geq \sum_i \hat{b}_i$ (4.5)

$x \in S \; , \; u^- \geq 0$

şeklinde tek amaçlı LKP problemine dönüşür.

Yöntemimizi bir örnek üzerinde inceleyelim:

ÖRNEK:

Amaçlar : $\max \{ z_1 = \dfrac{-x_1 + x_2 - 4}{6x_1 + x_2 + 3} \}$

$\max \{ z_2 = \dfrac{x_1 - x_2 - 5}{x_2 + 1} \}$

$\max \{ z_3 = \dfrac{3x_1 + x_2 - 17}{-3x_1 + 16} \}$

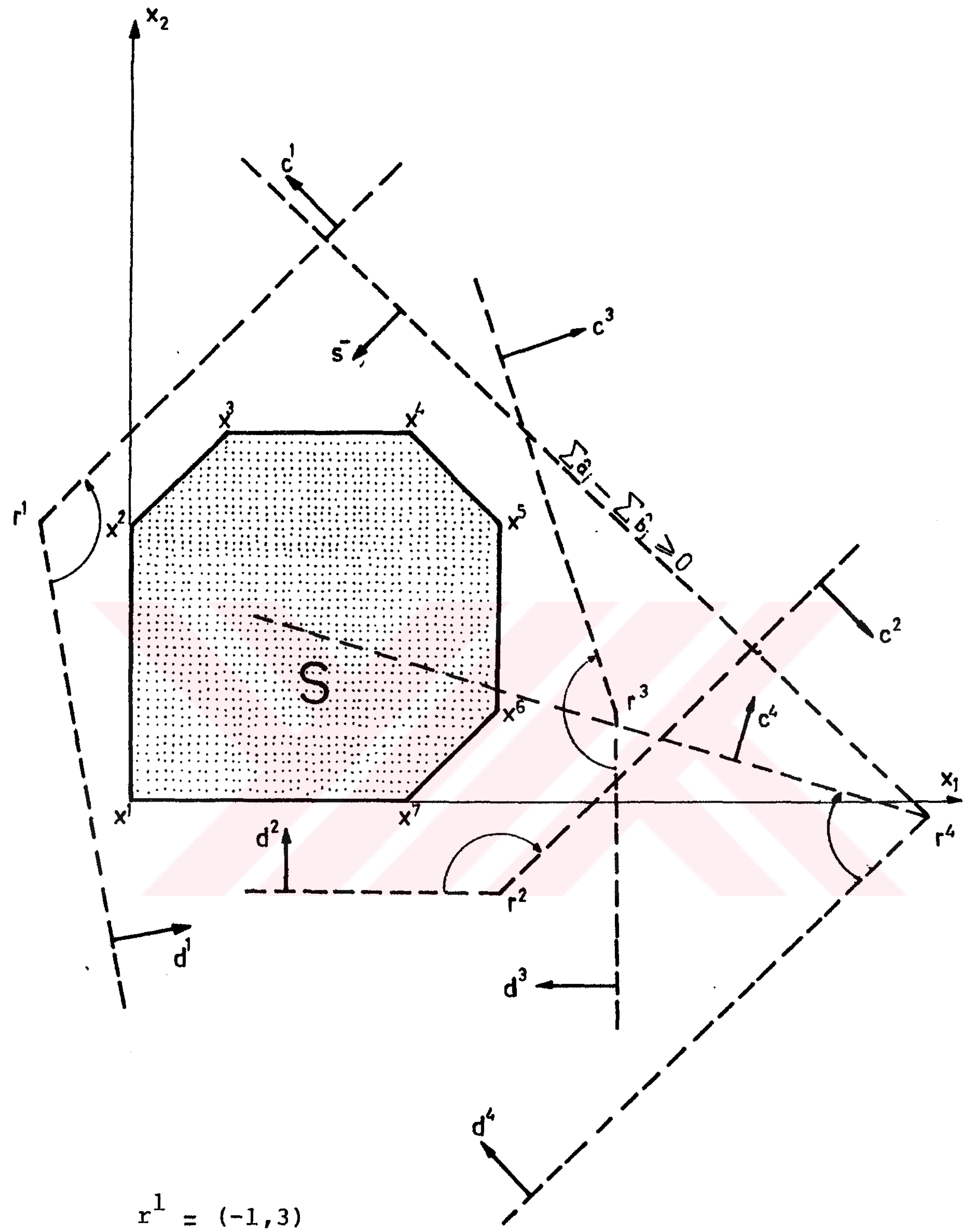
Kısıtlar:
$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 \, , \, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ÇALKP problemini ele alalım. Grafiği Şekil 4.1'de verilmiştir.

$x^1 = (0,0)$ $\quad z_1^1 = \dfrac{-4}{3}$ $\quad z_2^1 = -5$ $\quad z_3^1 = -\dfrac{17}{16}$

$x^2 = (0,3)$ $\quad z_1^2 = \dfrac{-1}{6}$ $\quad z_2^2 = -2$ $\quad z_3^2 = -\dfrac{7}{8}$

$x^3 = (1,4)$ $\quad z_1^3 = \dfrac{-1}{13}$ $\quad z_2^3 = \dfrac{-8}{5}$ $\quad z_3^3 = -\dfrac{10}{13}$



$r^1 = (-1,3)$

$r^2 = (4,-1)$

$r^3 = (\frac{16}{3},1)$

$r^4 = (8\ \frac{80}{111}\ ,\ -\ \frac{18}{111})$

Şekil 4.1.

$x^4 = (3,4) \quad z_1^4 = \frac{-3}{25} \quad z_2^4 = \frac{-6}{5} \quad z_3^4 = \frac{-4}{7}$

$x^5 = (4,3) \quad z_1^5 = -\frac{1}{6} \quad z_2^5 = -1 \quad z_3^5 = -\frac{1}{2}$

$x^6 = (4,1) \quad z_1^6 = -\frac{1}{4} \quad z_2^6 = -1 \quad z_3^6 = -1$

$x^7 = (3,0) \quad z_1^7 = -\frac{1}{3} \quad z_2^7 = -2 \quad z_3^7 = -\frac{8}{7}$

z_1 amaç fonksiyonu maksimum değerini $x^3 = (1,4)$ noktasında, z_2 amaç fonksiyonu maksimum değerini $\gamma(x^5,x^6)$ kümesinde, z_3 amaç fonksiyonu da maksimum değerini x^5 noktasında almıştır.

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i & , z_i^* > 0 \\ a_i + b_i & , z_i^* = 0 \\ a_i + 2b_i|z_i^*| & , z_i^* < 0 \end{cases} \qquad \hat{b}_i = \begin{cases} b_i|z_i^*| , & z_i^* \neq 0 \\ b_i & , z_i^* = 0 \end{cases}$$

$$z_1^* = -\frac{1}{13} \Longrightarrow \hat{a}_1 = -x_1 + x_2 - 4 + 2\cdot\frac{1}{13}(6x_1 + x_2 + 3) = -\frac{1}{13}x_1 + \frac{15}{13}x_2 - \frac{46}{13}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{6}{13}x_1 + \frac{1}{13}x_2 + \frac{3}{13}$$

$$z_2^* = -1 \Longrightarrow \hat{a}_2 = x_1 - x_2 - 5 + 2\cdot 1\,(x_2 + 1) = x_1 + x_2 - 3$$

$$\hat{b}_2 = 1\,(x_2 + 1) = x_2 + 1$$

$$z_3^* = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \hat{a}_3 = 3x_1 + x_2 - 17 + 2\cdot\frac{1}{2}(-3x_1 + 16) = x_2 - 1$$

$$\hat{b}_3 = \frac{1}{2}(-3x_1 + 16) = -\frac{3}{2}x_1 + 8$$

$$\frac{\hat{a}_1}{\hat{b}_1} \leq 1 \Longrightarrow \frac{-\frac{1}{13}x_1 + \frac{15}{13}x_2 - \frac{46}{13}}{\frac{6}{13}x_1 + \frac{1}{13}x_2 + \frac{3}{13}} \leq 1$$

$$\frac{\hat{a}_2}{\hat{b}_2} \leq 1 \Longrightarrow \frac{x_1 + x_2 - 3}{x_2 + 1} \leq 1$$

$$\frac{\hat{a}_3}{\hat{b}_3} \leq 1 \Longrightarrow \frac{x_2 - 1}{-\frac{3}{2}x_1 + 8} \leq 1$$

ise

$\Sigma \hat{a}_i \leq \Sigma \hat{b}_i$ den

$$\Sigma \hat{a}_i = \frac{12}{13}x_1 + 3\frac{2}{13}x_2 - 7\frac{7}{13}$$

$$\Sigma \hat{b}_i = -1\frac{1}{26}x_1 + 1\frac{1}{13}x_2 + 9\frac{3}{13}$$

$$\frac{12}{13}x_1 + 3\frac{2}{13}x_2 - 7\frac{7}{13} \leq -1\frac{1}{26}x_1 + 1\frac{1}{13}x_2 + 9\frac{3}{13} \quad (4.6)$$

yazılabilir.

1. Yol: (4.6) eşitsizliği daima $\frac{51}{26}x_1 + \frac{27}{13}x_2 - \frac{218}{13} \leq 0$ şeklindedir. Hedef değeri sıfır ve daha yukarısı şeklinde alırsak, çözeceğimiz problem

Amaç : min s^-

Kısıtlar: $\sum_i \hat{a}_i - \sum_i \hat{b}_i + s^- \geq 0$

$x \in S$, $s^- \geq 0$

şeklinde olacaktır. O halde

Amaç : min s^-

$$\frac{51}{26}x_1 + \frac{27}{13}x_2 + s^- \geq \frac{218}{13}$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 , x_2 , s^- \geq 0$$

probleminin çözümü Şekil 4.1'de görüldüğü gibi $x^4=(3,4)$ noktasıdır ve *"hedeften sapma miktarı"*, min $s^- = 2\frac{15}{26}$ dır.

Eğer $\{\max z = \frac{51}{26}x_1 + \frac{27}{13}x_2 - \frac{218}{13} \mid x \in S\}$ problemini çözersek, optimum çözüm $x^4=(3,4)$ noktası ve optimal amaç fonksiyon değeri de, max $z=-2\frac{15}{26}$ bulunur. Buradan max z + min $s^- = 0$ olduğu görülmektedir.

<u>2. Yol:</u> a) (4.6) ifadesinden

$$\max \; \{z_4 = \frac{\Sigma \hat{a}_i}{\Sigma \hat{b}_i} \mid x \in S\}$$

problemini çözelim. O halde

$$\max \; \{z_4 = \frac{\frac{12}{13}x_1 + 3\frac{2}{13}x_2 - 7\frac{7}{13}}{-1\frac{1}{26}x_1 + 1\frac{1}{13}x_2 + 9\frac{3}{13}} \mid x \in S\}$$

probleminin çözümü Şekil 4.1'den $x^4=(3,4)$ noktasıdır ve *"Hedefi gerçekleştirme oranı"* max $z = \frac{204}{271} \cong 0.753$ dür.

b) Kesirli HP problemi ile çözüm bulalım:

$$\text{Hedef: } \left\{ \frac{\frac{12}{13}x_1 + 3\frac{2}{13}x_2 - 7\frac{7}{13}}{-1\frac{1}{26}x_1 + 1\frac{1}{13}x_2 + 9\frac{3}{13}} = z \right\}, \quad (z \geq 1)$$

Kısıtlar: $x \in S$

problemini (4.5) deki tek amaçlı LKP problemine dönüştürelim.

$$\min d^- = \frac{u^-}{-\frac{1}{26}x_1 + 1\frac{1}{13}x_2 + 9\frac{3}{13}}$$

$$\frac{51}{26}x_1 + \frac{27}{13}x_2 + u^- \geq \frac{218}{13}$$

$$x \in S, \; u^- \geq 0$$

Bu problem çözülürse; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $u^- = 2\frac{15}{26}$ olarak optimal çözüm $x^4 = (3,4)$ noktası ve *"hedeften sapma oranı"* $\min d^- = \frac{67}{271} \cong 0.247$ bulunur.

Burada yine $\max z^4 + \min d^- = 1$ olduğunu görmekteyiz. Ayrıca $u^- = s^-$ dir. Şekil 4.1 den de görüleceği gibi 1.yoldaki $\Sigma \hat{a}_i - \Sigma \hat{b}_i = 0$ doğrusu, 2. yoldaki z^4 amacının rotasyon kümesinden geçen $z^4 = 1$ yüzey eğrisidir.

İki boyutlu bir örnekde 1. ve 2. yol ile bulduğumuz çözümler aynı x^4 noktasını vermiştir. Bu çözüm önerimizi test etmek için (4.1) deki kabullere uygun kalacak şekilde daha büyük boyutlu problemleri rasgele ürettik ve QSB (Quantitative Systems for Business, Prentice-Hall, Inc. 1985) paket programı ile çözümler bulduk. 1. ve 2. yol için bulduğumuz çözümler farklıydı. Bunun nedeni 1. yol da LP ve lineer HP ve 2. yolda ise lineer kesirli programlama ve lineer kesirli HP kullanmamızdır. Çünkü 1. yol da amaç fonksiyonlarının paralel kaymasına karşılık 2. yol da amaç fonksiyonlarının yüzey eğrileri rotasyon kümesinden geçmektedirler. Bulunan bu çözümler yine z-etkin çözümlerdir.

2. ÖNCELİKLİ AMAÇLAR DURUMU

Buradaki çözüm önerimiz, Bölüm II de verdiğimiz *"Ardışık Sıralama Yöntemi"*nin ÇALKP problemine uyarlaması şeklindedir.

Yöntem, KV den prosesin başında *"amaçları önem derecesine göre sıralama"* bilgisini talep eder. ÇALKP probleminde k tane amacın indisleri aynı zamanda KV nin amaçlardaki önem sıralamasını göstersin, yani $z_1 >>> z_2 >>> \ldots >>> z_k$ olsun.

Birinci adımda;

$$\max \quad \{z_1 = \frac{c^1x + \alpha_1}{d^1x + \beta_1} \mid x \in S\}$$

LKP problemi çözülür ve z_1^* bulunur. Problemin alternatif çözümü varsa,

$$\frac{c^1x + \alpha_1}{d^1x + \beta_1} = z_1^*$$

$$(c^1 - z_1^* d^1)x = z_1^* \beta_1 - \alpha_1$$

lineer ifadesi bir kısıt olarak S ye ilave edilir ve ikinci adımda;

$$\text{Amaç} \quad : \max \quad \{z_2 = \frac{c^2x + \alpha_2}{d^2x + \beta_2}\}$$

$$\text{Kısıtlar} : (c^1 - z_1^* d^1)\ x = z_1^* \beta_1 - \alpha_1$$

$$x \in S$$

LKP problemi çözülerek z_2^* optimal değeri bulunur. Problemin alternatif çözümü varsa, üçüncü adımda;

$$\text{Amaç} \quad : \max \{\ z_3 = \frac{c^3x + \alpha_3}{d^3x + \beta_3}\ \}$$

$$\text{Kısıtlar} : (c^1 - z_1^* d^1)x = z_1^* \beta_1 - \alpha_1$$

$$(c^2 - z_2^* d^2)x = z_2^* \beta_2 - \alpha_2$$

$$x \in S$$

çözülerek z_3^* optimal değeri bulunur. Bu şekilde devam ederek en fazla k adım sonra, ÇALKP probleminin *"tercih edilen çözümü"*nü buluruz. Problemi çözerken i. adım alternatif çözümlerin bulunmadığı bir optimizasyon adımı olsun. Bu durumda i + 1,...,k adımlarını çözmeye gerek yoktur ve i. adımdaki *"tek çözüm"* ÇALKP probleminin çözümüdür.

3. TOLERANSLI AMAÇLAR DURUMU

Burada KV den iki çeşit bilgi talep etmekteyiz. Birincisi yukarıda olduğu gibi amaçları önem derecesine göre sıralama bilgisi, ikincisi de her bir amacın optimal değerinden, bir sonraki önem sırasındaki amaç lehine, ne kadarlık bir yüzde miktar fedakarlık (tolerans) yapacağı bilgisidir. Sıralama bilgisi, KV den prosesin başında istenir. Tolerans bilgisi ise yine problemin çözümüne başlamadan alınabileceği gibi çözüm aşamalarında da alınabilir. Çözüm önerimiz şöyledir:

KV nin amaçlardaki öncelik sıralaması $z_1 >>> z_2 >>> \dots >>> z_k$ şeklinde olsun.

Birinci adımda, en yüksek öncelikli z_1 amacı S üzerinde optimum yapılır, yani

$$\max \ \{z_1 = \frac{c^1 x + \alpha_1}{d^1 x + \beta_1} \ | \ x \in S \}$$

LKP problemi çözülerek z_1^* bulunur. KV ye z_1^* değerinden ne kadarlık fedakarlık yapabileceği sorulur, KV, z_1^* dan % t_1 oranında toleransa razı olsun. O halde optimum değerden indirilecek miktar $\Delta z_1 = \frac{t_1}{100} \ |z_1^*|$ olmak üzere,

$$\frac{c^1 x + \alpha_1}{d^1 x + \beta_1} \geq z_1^* - \Delta z_1$$

eşitsizlik kısıtı S ye ilave edilerek,

$$[c^1 - (z_1^* - \Delta z_1)d^1]x \geq (z_1^* - \Delta z_1)\beta_1 - \alpha_1$$

$$x \in S$$

şeklinde daraltılmış uygun çözümler kümesi S_1 elde edilir.

İkinci adımda;

$$\max \ \{z_2 = \frac{c^2x + \alpha_2}{d^2x + \beta_2} \ | \ x \in S_1 \}$$

LKP problemi çözülerek z_2^* değeri bulunur. KV, ikinci önceliğe sahip z_2 amacı için % t_2 oranında tolerans yapmış olsun. O halde $\Delta z_2 = \frac{t_2}{100} \ |z_2^*|$ olarak

$$\frac{c^2x + \alpha_2}{d^2x + \beta_2} \geq z_2^* - \Delta z_2$$

kısıtı S_1 e ilave edilerek, S_1 kümesi S_2 kümesine daraltılır. Böylece üçüncü adımda;

Amaç : $\max \ \{ \ z_3 = \frac{c^3x + \alpha_3}{d^3x + \beta_3} \}$

Kısıtlar : $[\ c^1 - (z_1^* - \Delta z_1)d^1]x \geq (z_1^* - \Delta z_1)\beta_1 - \alpha_1$

$$[\ c^2 - (z_2^* - \Delta z_2)d^2]x \geq (z_2^* - \Delta z_2)\beta_2 - \alpha_2$$

$$x \in S$$

çözülerek z_3^* bulunur. Böylece en fazla k adım sonra ÇALKP probleminin *"tercih edilen çözümü"* bulunmuş olur. Eğer KV, i. adımda $1 \leq i \leq k$ tolerans yapmaya isteksiz ise $t_i = 0$ dır ve i. adımdaki çözüm, yine ÇALKP probleminin çözümüdür.

Yöntemi bir örnek üzerinde inceleyelim:

ÖRNEK: Grafiği Şekil 4.2'de verilen;

Amaçlar : $\max \{ z_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2 + 1} \}$

$\max \{ z_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2 + 1} \}$

$\max \{ z_3 = \dfrac{-x_1 + 3}{x_2 + 1} \}$

Kısıtlar : $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_2 \leq 2$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

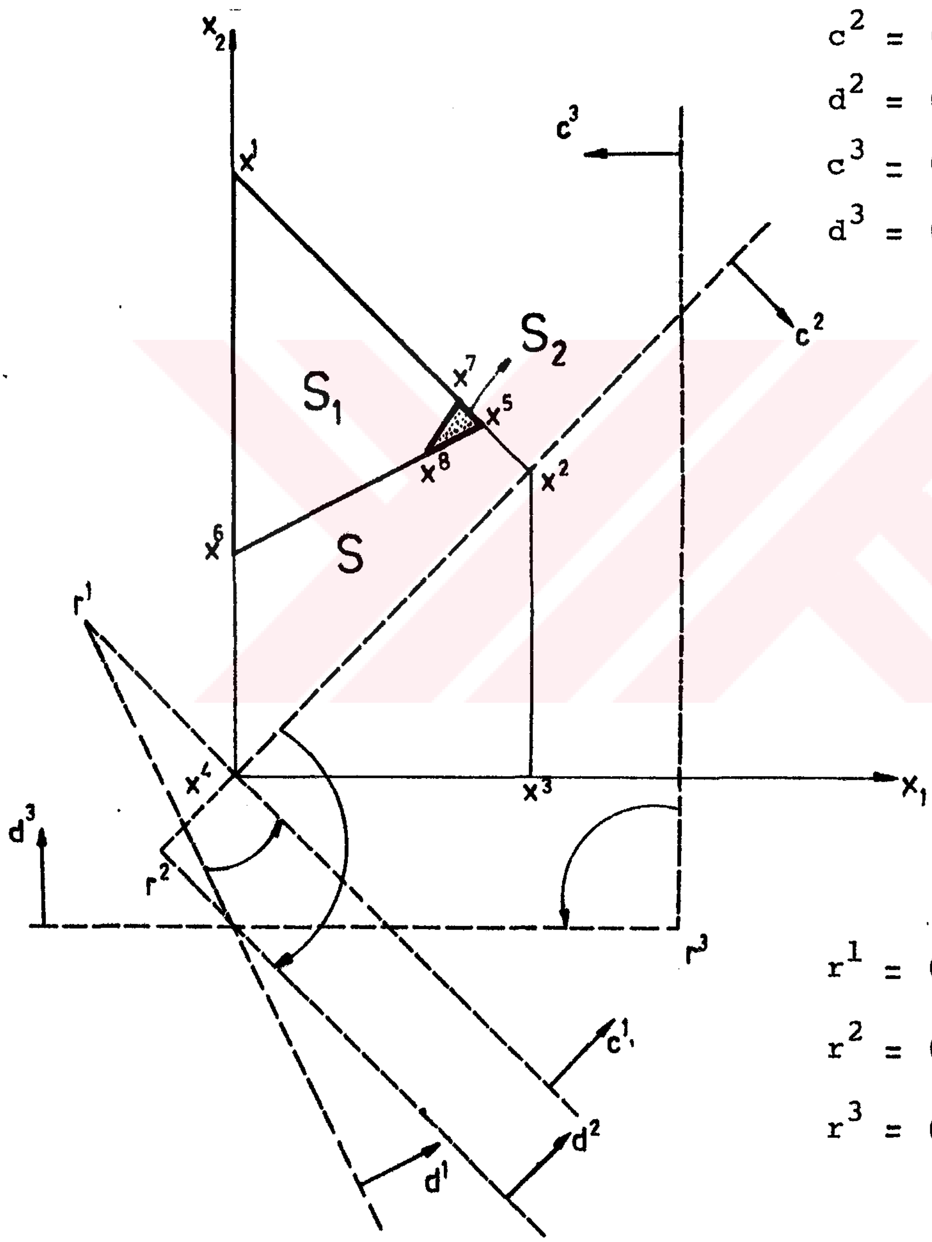
ÇALKP problemini dikkate alalım.

KV nin amaçlardaki öncelik sıralaması $z_1 >>> z_2 >>> z_3$ şeklinde olsun.

$x^1 = (0,4)$	$z_1^1 = \frac{4}{5}$	$z_2^1 = -\frac{4}{5}$	$z_3^1 = \frac{3}{5}$
$x^2 = (2,2)$	$z_1^2 = \frac{4}{7}$	$z_2^2 = 0$	$z_3^2 = \frac{1}{3}$
$x^3 = (2,0)$	$z_1^3 = \frac{2}{5}$	$z_2^3 = \frac{2}{3}$	$z_3^3 = 1$
$x^4 = (0,0)$	$z_1^4 = 0$	$z_2^4 = 0$	$z_3^4 = 3$
$x^5 = (\frac{5}{3},\frac{7}{3})$	$z_1^5 = \frac{3}{5}$	$z_2^5 = -\frac{2}{15}$	$z_3^5 = \frac{2}{5}$
$x^6 = (0,\frac{3}{2})$	$z_1^6 = \frac{3}{5}$	$z_2^6 = -\frac{3}{5}$	$z_3^6 = 1\frac{1}{5}$
$x^7 = (1\frac{17}{30},\ 2\frac{13}{30})$	$z_1^7 = \frac{120}{197}$	$z_2^7 = -\frac{13}{75}$	$z_3^7 = \frac{43}{103}$

$$S = \gamma(x^1, x^2, x^3, x^4)$$
$$S_1 = \gamma(x^1, x^5, x^6)$$
$$S_2 = \gamma(x^5, x^7, x^8)$$

$$c^1 = (1,1)$$
$$d^1 = (2,1)$$
$$c^2 = (1,-1)$$
$$d^2 = (1,\ 1)$$
$$c^3 = (-1,0)$$
$$d^3 = (0,1)$$



$$r^1 = (-1,1)$$
$$r^2 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$
$$r^3 = (3,-1)$$

Şekil 4.2.

$$x^8 = (1\frac{23}{57},\ 2\frac{23}{114}) \quad z_1^8 = \frac{3}{5} \qquad z_2^8 = -\frac{13}{75} \qquad z_3^8 = \frac{182}{365}$$

Birinci adımda;

$$\max \left\{ z_1 = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2 + 1} \;\middle|\; x \in S \right\}$$ problemi çözülür.

$S = \gamma(x^1, x^2, x^3, x^4)$

$z_1^* = \frac{4}{5}$ olarak $x^1 = (0,4)$ noktası birinci öncelikli amaç için optimal çözümdür.

KV, z_1^* dan yüzde 25 tolerans yapmış olsun. O halde

$t_1 = 25, \quad \Delta z_1 = \frac{25}{100} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$z_1^* - \Delta z_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

olarak

$$\frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2 + 1} \geq \frac{3}{5}$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 3$$

kısıtı, $r^1 = (-1,1)$ noktasından geçen ve S yi daraltan kısıttır.

Böylece

$$S_1 = \gamma(x^1, x^5, x^6)$$

kümesi elde edilir.

İkinci adımda;

$$\max \left\{ z_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2 + 1} \;\middle|\; x \in S_1 \right\}$$

problemi çözülür.

$z_2^* = -\frac{2}{15}$ olarak $x^5 = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ noktası ikinci adımın optimal çözümüdür.

KV, z_2^* dan % 30'luk bir tolerans yapsın.

$$t_2 = 30, \quad \Delta z_2 = \frac{t_2}{100} |z_2^*| = \frac{30}{100} |- \frac{2}{15}| = \frac{4}{100}$$

$$z_2^* - \Delta z_2 = -\frac{2}{15} - \frac{4}{100} = -\frac{13}{75}$$

olarak

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2 + 1} \geq -\frac{13}{75}$$

$$-88 x_1 + 62 x_2 \geq 13$$

lineer eşitsizliği $r^2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ den geçen ve S_1 i daraltan kısıtı oluşturur. Böylece

$$S_2 = \gamma(x^5, x^7, x^8)$$

kümesi elde edilir.

Üçüncü adımda;

$$\max \{z_3 = \frac{-x_1 + 3}{x_2 + 1} \mid x \in S_2\}$$ problemi çözülür.

$z_3^* = \frac{182}{365}$ olarak $x^8 = (1 \frac{23}{57}, 2 \frac{23}{114})$ noktası üçüncü adımda optimal çözümdür.

Böylece x^8 noktası, ÇALKP probleminin "*tercih edilen çözüm*"üdür.

S O N U Ç

"Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi İçin Çözüm Önerileri" isimli tezimizde, öncelikle, ÇALKP için alt yapı oluşturulmuş, problem ve uygulama alanları tanıtılmış, literatürden değişik çözüm yöntemleri verilmiştir.

Çok amaçlı programlama problemlerinde karar verici amaçları üç ayrı şekilde değerlendirir. Amaçları denk görür veya öncelik sırasına koyar ya da öncelikli amaçların optimal değerlerinden belirli oranlarda fedakarlık eder. Bu düşünceden hareketle ÇALKP problemine üç ayrı çözüm yöntemi önerdik. Bu yöntemler; amaçların denk olması durumunda "Denk Amaçlar Durumu", amaçlar arası önceliklerin kesin olması durumunda "Öncelikli Amaçlar Durumu", öncelikli amaçlarda fedakarlık edilmesi durumunda da "Toleranslı Amaçlar Durumu" başlıklarıyla verilmiştir.

Literatürdeki yöntemler genellikle tüm z-etkin çözümler kümesini ya da sonlu sayıda uç noktalar kümesini bularak KV ye sunmaktadır. KV nin alternatifleri değerlendirilip çözüm bulması pek mümkün değildir. Hele büyük boyutlu problemlerde bu iş oldukça güçtür. Önerdiğimiz yöntemler KV ye isteği doğrultusunda tek çözüm sunmaktadır. Ayrıca büyük boyutlu problemler için de rahatlıkla kullanılabileceğinden, bu sahadaki önemli bir boşluğu dolduracağı inancındayız.

Önerdiğimiz çözüm yöntemleri, bilgisayar programları yapılarak, gerçek hayat problemlerine uygulandığında daha da etkinleşecektir. Ayrıca, yöntemler nonlineer problemler için geliştirilebileceği gibi tam-sayılı çözümler elde edebilecek yapıya dönüştürülebilir kanısındayız. Bütün bunlar, gelecekte araştırmacılar için birer hedef olmalıdır.

EK: I. KONİLER, NORMLAR VE METRİKLER

Tanım: $V \neq \emptyset$ bir vektör uzayı olsun. $\forall v \in V$ ve $\alpha \geq 0$ skaleri için $\alpha v \in V$ ise V ye bir *"koni"* denir. $0 \in R^n$ orijini her konide bulunur. Orijinde bulunan $0 \in R^n$ konisinden başka tüm koniler sınırsız kümelerdir. Ayrıca koninin konveks olması gerekmez.

Örneğin, orijinden çıkan ışın bir konidir. Kapalı yarı-uzay, bir konveks konidir, fakat açık yarı-uzay bir koni değildir, çünkü orijini içermez. $\{x \in R^n \mid x \geq 0\}$ bölgesi ve R^n konveks konilere örneklerdir (1).

Tanım: Sonlu sayıda vektörler kümesinin tüm negatif olmayan lineer kombinezonları kümesine *"konveks koni"* denir (2). Yani,

$$V = \{v \in R^n \mid v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i \ , \ \alpha_i \geq 0\}$$

kümesi $\{v^1, v^2, \ldots v^k\}$ kümesiyle oluşturulmuş konveks bir konidir. v^i lere V nin *"üreteçleri"* denir.

---

(1) STEUER, R.E., "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application", John Wiley and Sons., Inc., 1986, s.38.

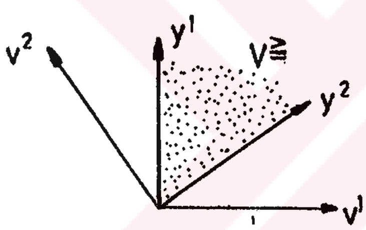
(2) BOULDING, K., SPIVEY, W.A., "Linear Programming and the Theory of the Firm", The Macmillan Company, New York, 1960, s.53.

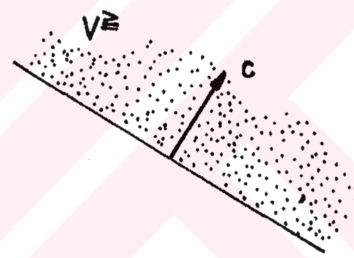
<u>Tanım:</u> $v^1, v^2, \ldots v^k$ lar V konveks konisinin üreteçleri ve $v^r \in \{v^1, v^2, \ldots, v^k\}$ olsun. Eğer v^r olmadan diğer v^i lerle yine V kümesi oluşturabiliyorsa v^r e *"temel olmayan"* (nonesential) üreteç denir. Temel olmayan üreteç, diğer üreteçlerin negatif olmayan lineer kombinezonu olarak ifade edilebilir, *"temel"* (essential) üreteç ise bunun yapılamadığı üreteçtir.

<u>Tanım:</u> $V \subset R^n$ bir koni olsun.

$$V^{\geqq} = \{y \in R^n \mid y^T v \geqslant 0, \text{ tüm } v \in V \text{ için}\}$$

konveks konisi, V nin *"negatif olmayan kutupsal konisi"*dir. $V^{\geqq}$ deki tüm vektörler V deki vektörlerin herbiri ile 90^o ye eşit ya da daha küçük açı yaparlar. V konveks olsun olmasın $V^{\geqq}$ konvekstir.





<u>Tanım:</u> $V \subset R^n$, $\{v^1, v^2, \ldots v^k\}$ vektörleriyle üretilmiş koni olsun.

$V^{\geq} = \{y \in R^n \mid y^T v^i \geqslant 0, \text{ tüm } i \text{ ler için}; y^T v^i > 0, \text{ en azından bir } i \text{ için}\} \cup \{0 \in R^n\}$

konveks konisi, V nin *"yarıpozitif kutupsal konisi"*dir. $\{0 \in R^n\}$orijini dahil edildi, çünkü orijinsiz $V^{\geq}$ bir koni değildir.

<u>Normlar ve Metrikler</u>

Normlar, vektörlerin uzunluklarını; metrikler, R^n deki noktalar arasındaki uzaklığın ölçümüdür.

Tanım: R^n den R ye tanımlanan $||.||$ fonksiyonunun bir "*norm*" belirlemesi için $u, v \in R^n$ ve $k \in R$ olmak üzere,

(i) $|| u || \geq 0$

(ii) $|| u || = 0 \iff u = 0$

(iii) $|| u + v || \leq ||u|| + ||v||$

(iv) $|| k.v || = |k| . ||u||$

şartlarının gerçeklenmesi gerek ve yeterdir.

Tanım : "*Lp-normları*" ailesini dikkate alalım. $v \in R^n$ nin Lp-normu;

$$|| v ||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right]^{1/p} \qquad p \in \{1,2,3,\ldots,\} \cup \{\infty\}$$

şeklindedir. p ye 1,2 ve ∞ değeri verildiğinde

$$|| v ||_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$|| v ||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} \qquad \text{(Euclid Normu)}$$

$$|| v ||_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \{| v_i |\} \qquad \text{(Tchebycheff Normu)}$$

olur.

Tanım: Bir vektörün herbir bileşenini vektörün normuna bölmek, vektörü "*normalize etmek*"tir. Normalize edilmiş vektörün, aynı norma göre normu birdir. (1)

(1) STEUER, R.E., a.g.e., s.36-43

Tanım : $x, y \in R^n$ olsun. R^n den R ye tanımlanan $\delta(x,y) = ||x-y||$ fonksiyonunun bir "*metrik*" belirlenmesi için

$$\begin{aligned} &(i) && \delta(x,y) \geq 0 \\ &(ii) && \delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ &(iii) && \delta(x,y) = \delta(y,x) \\ &(iv) && \delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z) \end{aligned}$$

şartlarının gerçeklenmesi gerek ve yeterdir. (1)

Tanım: "*Lp-metrikleri*" ailesini dikkate alalım. İki nokta $x,y \in R^n$ arasındaki uzaklık Lp-metriği olarak

$$||\, x-y \,||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right]^{1/p} \qquad p \in \{1,2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$$

şeklindedir. L_∞ - metriğine "*Tchebycheff metriği*"de denir.

Tanım: $x,y \in R^n$ olsun. x ve y arasındaki uzaklığın "*ağırlıklı Lp-metriği*", $\lambda \in R^n$ negatif olmayan ağırlıklar vektörü olmak üzere

$$||\, x-y \,||_p^{\lambda} = \left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \,|\, x_i - y_i \,|)^p \right]^{1/p} \qquad p \in \{1,2,\} \cup \{\infty\}$$

yapısındadır (2).

(1) MANGASARIAN, O.L., "Nonlinear Programming", Mc Graw-Hill Book Company, 1969, s.7-8.

(2) STEUER, R.E., a.g.e., s.44-45.

EK: 2. VEKTÖR MAKSİMİZASYONU TEORİSİ

Tanım: C kriter matrisinin taban sütunları C_B, tabandışı sütunları C_N; A kısıtlar matrisinin tabandışı sütunları N, taban sütunları da B olsun. O halde $W=C_B B^{-1}N-C_N$ matrisi k x(n-m) boyutlu "*azaltılmış maliyet matrisi*"dir.

Tanım : B nin bir "*etkin taban*" olması için g.v.y.ş. bazı $\lambda \in \Lambda$ için (2.4) probleminin bir optimal tabanı olmasıdır.

(2.4) ün azaltılmış maliyet satırı $\lambda^T w$ olduğundan B tabanının etkin olması için g.v.y.ş.

$$\lambda^T w \geqslant 0$$
$$\lambda > 0$$

sisteminin mevcut olmasıdır.

Teorem: $x \in S$, etkin taban B ile ilgili bir uç nokta olsun. O halde x, etkindir.

Teorem: $x \in S$, etkin uç nokta olsun. O halde x ile ilgili bir etkin B tabanı vardır.

Böylece, tüm etkin tabanların bulunmasıyla tüm etkin uç noktalar belirlenir.

Tanım: $\bar{B}$ ve $\hat{B}$ tabanları, ancak ve ancak birinden diğerine bir pivotta geçilebiliyorsa, "*bitişik*" (adjacent) tabanlardır.

Tanım: B, bir etkin taban olsun. O halde, B ile ilgili x_j nin "*etkin tabandışı değişken*" olması için g.v.y.ş.

$$\lambda^T W \geq 0$$

$$\lambda^T w^j = 0$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \Lambda$ nın mevcut olmasıdır. w^j, W nın j. sütunudur.

Teorem: $\bar{B}$ ve $\hat{B}$, bitişik etkin tabanlar, $\bar{x}$ ve $\hat{x}$ da bu tabanlarla ilgili uç noktalar olsun. O halde $\gamma(\bar{x},\hat{x})$ kenarı etkindir.

Etkin tabandışı değişkenlerin sütunlarında pozitif pivot elemanlar yoksa sınırsız etkin kenarlar aranır.

B etkin tabanı ile ilgili x_j tabandışı değişkeninin etkin olup olmadığını belirlemek için, aşağıdaki LP problemi kullanılır. Burada e, elemanları 1 lerden oluşan vektördür.

Teorem: B etkin tabanıyla ilgili olarak, W azaltılmış maliyet matrisi, x_j de tabandışı değişken olsun. O halde tabana girecek x_j nin sütunundaki tüm uygun pivotlar etkin pivotlardır.

$$\begin{aligned} \text{Amaç} \quad &: \max \{e^T v\} \\ \text{Kısıtlar} \quad &: Wy - w^j\delta + Iv = 0 \\ & 0 \leq y \in R^{n-m} \\ & 0 \leq \delta \in R \\ & 0 \leq v \in R^k \end{aligned} \qquad \text{(Ek 2.1)}$$

LP probleminin optimal amaç fonksiyon değeri sıfırdır.

Bu LP probleminin uygun bölgesi daima mevcut olduğundan iki sonuç vardır:

i) x_j nin "*etkin*" olması için g.v.y.ş. LP probleminin "*sınırlı*" olmasıdır.

ii) x_j nin "*etkin olmaması*" için g.v.y.ş. LP probleminin "*sınırsız*" olmasıdır.

Tanım: $\bar{B}$ ve $\hat{B}$ etkin tabanlarından birisi, diğerinden sadece etkin pivotlar yoluyla elde edilebiliyorsa, $\bar{B}$ ve $\hat{B}$ ya "*bağlantılıdır*" (connected) denir.

Teorem: Bütün etkin tabanlar bağlantılıdır.

Teorem: $\mu(x,v)$, S nin sınırsız etkin kenarı olsun. O halde x, etkin uç noktadır ve x ile ilgili etkin B tabanı vardır.

Böylece (Ek 2.1) problemi uygulanarak ve tüm etkin tabanlar arasında pivotlama yapılarak, S nin tüm uç noktaları ve tüm sınırsız etkin kenarları bulunabilir.

Tanım : S nin iki etkin uç noktası, S nin etkin kenarları yoluyla bağlanabiliyorsa, "*karar-bağlantılıdır*" (edge-connected) denir.

Teorem: S nin tüm etkin uç noktaları kenar-bağlantılıdır. (1)

(1) STEUER, R.E., a.g.e, s.216-220

EK: 3, LİNEER EŞİTSİZLİKLER VE ALTERNATİF TEOREMLERİ

Burada lineer eşitsizlikler için iki alternatif teoremi verelim. Tipik bir alternatif teoremi, sistem I ve II diyeceğimiz iki lineer eşitsizlikler ve/veya eşitlikler sistemini içerir. Teoremler, ya sistem I in bir çözümü olduğunu, ya da sistem II nin bir çözümü olduğunu fakat her ikisinin aynı anda asla olmadığını ifade eder.

Gordan'ın Alternatif Teoremi

Verilen herbir A matrisi için

ya

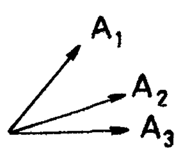
I $\quad A\,x > 0$ sisteminin x çözümü vardır,

ya da

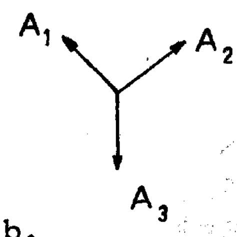
II $\quad A^T y = 0, \quad y \geq 0, \; y \neq 0$ sisteminin y çözümü vardır,

fakat her ikisi aynı anda değil.

Teoremin geometrik yorumu şöyledir: A nın satır vektörlerinin tümü ile tam dar açı ($< \frac{\pi}{2}$) yapan bir x vektörü vardır (Şekil a); ya da orijin, A nın satırlarının negatif olmayan lineer kombinezonu olarak aşikar olmayan (nontrivial) biçimde ifade edilebilir (Şekil b).



Şekil a.



Şekil b.

<u>Stiemke'nin Alternatif Teoremi</u>

Verilen her bir B matrisi için
ya

I $Bx \geqslant 0$, $Bx \neq 0$ sisteminin x çözümü vardır,
ya da

II $B^T y = 0$, $y > 0$ sisteminin y çözümü vardır,
fakat her ikisi aynı anda değil (1).

---

(1) MANGASARIAN, O.L., "Nonlinear Programming", New York, Mc Graw Hill, 1969, s.16-32.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

BENSON, H.P., "Finding Certain Weakly-Efficient Vertices in MOLFP", Man. Sci. Vol. 31, No. 2, Feb. 1985, s.240-245.

BITRAN, G.R., "Experiments With Linear Fractional Problems", Naval Res. Log. Quart, Vol.26, 1979, s.689-693.

BOULDING, K., SPIVEY, W.A., "Linear Programming and the Theory of the Firm", The Mac Millan Company, New York, 1960.

CHOO, E.U., "Proper Efficiency and the Linear Fractional Vector Maximum Problem", Op.Res., V.32, No.1, 1984, s.216-220.

CHOO, E.U., ATKINS, D.R., "Bicriteria Linear Fractional Programming", J.of. Opt. Theo. and Appl. Vol. 36, No 2, February, 1982, s.203-220.

CHOO, E.U. ATKINS, D.R., "Connectedness in Multiple Linear Fractional Programming", Man. Sci. Vol. 29, No. 2 February 1983, s.250-255.

COLSON, G., DE BRUYN, C., "Models and Methods in Multiple Criteria Decision Making", Special Issue of the Journal Mathematical and Comp. Modelling, Vol. 12, No. 10/11, Pergamon Press, Oxford, 1989, s.1201.

EVREN, R., ÜLENGİN, F., "Yönetimde Çok Amaçlı Karar Verme", İ.T.Ü. Yayınları, Sayı: 1490, İ.T.Ü. Matbaası, Gümüşsuyu, İstanbul, 1992 .

GASS, S.I., "Linear Programming, Methods and Applications", Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1969.

GULATI, T.R., ISLAM, M.A., "Proper Efficiency in a Linear Fractional Vector Maximum Problem With Genaralized Convex Constraints", EJOR, V.36, 1988, s.339-345.

IBARAKI, T., "Parametrik Approaches to Fractional Programs", Math. Prog., V.26, 1983, s.345-362.

ISERMANN, H., "Proper Efficiency and the Linear Vector Maximum Problem", Op. Res., V.22, 1974, s.189-191.

ISERMANN, H., STEUER, R.E., "Computational Experience Concerning Payoff Tables and Minimum Criterian Values Over the Efficient Set", EJOR, V.33, 1987, s.91-97.

KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., "Multiple Objective Linear Fractional Programming", Man. Sci. Vol. 27, No. 9 1981, s. 1024-1039.

KORNBLUTH, J.S.H., STEUER, R.E., "Goal Programming With Linear Fractional Criteria", EJOR, V. 8., 1981, s.58-65.

MANGASARIAN, O.L., "Nonlinear Programming", New York, Mc Graw-Hill, 1969.

MJELDE, K.M., "Allocation of Resources According to a Fractional Objective", EJOR, 2, 1978, s.116-124.

NYKOWSKI, I., ZOLKIEWSKI, Z., "A Compromise Procedure for the Multiple Objective Linear Fractional Programming Problem", EJOR, V. 19, 1985, s.91-97.

ROMERO, C., "A Survey of Generalized Goal Programming (1970-1982)", EJOR, Vol. 25, 1986, s.183-191.

ROSENTHAL, R.E., "Concepts, Theory and Techniques: Principles of Multiobjective Optimization", Decision Sciences, V.16, 1985, s.133-152.

SCHAIBLE, S., "Fractional Programming II, On Dinkelbach's Algorithm", Man. Sci., Vol. 22, No. 8, April, 1976, s. 868-873.

SCHAIBLE, S., "Fractional Programming: Applications and Algorithms", EJOR, 7, 1981, s.111-120.

SNIEDOVICH, M., "Fractional Programming Revisited", EJOR, V. 33, 1988, s.334-341.

STEUER, R.E., "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application", John Wiley and Sons. Inc., 1986.

SWARUP, K., "Linear Fractional Functionals Programming", Op. Res., 13, 1965, s.1029-1036.

VANDERPOOTEN, D., VINCKE, P., "Description and Analysis of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures", Math. Comput. Modelling, V.12,No.10/11, 1989, s.1221-1238.

VINCKE, P., "Analysis of Multicriteria Decision Aid in Europe", EJOR, V.25, 1986, s.160-168.

WOLF, H., "A Parametric Method for Solving the Linear Fractional Programming Problem", Op. Res., V.33, No. 4, 1985, s.835-841.

ZIONTS, S., "Multiple Criteria Mathematical Programming: An Updated Overview and Several Approaches", in B. Karpak and S. Zionts, Multiple Criteria Decision Making and Risk Analysis Using Microcomputers, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989, s.7-60.

ÖZGEÇMİŞ

1963 yılında İstanbul'da doğdum. İlk öğrenimimi İstanbul İ.Alâaddin Gövsa İlkokulunda, orta öğrenimini İstanbul Çapa Ortaokulu ve İstanbul Şehremini Lisesi'nde tamamladım. 1980 yılında Yıldız Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümüne girdim ve 1984 yılında mezun oldum. Yüksek lisansımı 1987 yılında Y.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Yönetimi'nde tamamladım. Aynı yıl Y.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladım. Halen bu görevi sürdürmekteyim. Evli ve iki çocuk annesiyim.