

28423

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN İNVARİANT İMBEDDİNG
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

İffet TAYLAN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

DOKTORA TEZİ

F.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tez Savunma Tarihi :
Tez Danışmanı :
Jüri Üyeleri :

2 Aralık 1993
Prof. Dr. Behiç ÇAĞAL (Y.T.Ü.)
Prof. Dr. Erol YARIZ (M.Ü.)
Doç. Dr. Mustafa SIVRI (M.S.Ü.)

İSTANBUL, Aralık 1993

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

BÖLÜM I

1.1 Giriş	1
1.2 Adi Diferansiyel Denklemlerde Sınır Değer Problemleri	1
1.3 Başlangıç Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri	3
1.4 Sınır Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri	4
1.5 Adi Diferansiyel Denklemler İçin k-nokta Sınır Değer Problemlerinin Çözümlerinin Varlık ve Tekliği	5

BÖLÜM II

İnvariant İmbedding Yönteminin Genel Sınır Koşulları ile Lineer Çok Nokta Sınır Değer Problemlerine Uygulamaları

2.1 Genel Sınır Koşulları	8
2.2 Çok Noktalı Sınır Değer Problemlerine Uzanımları	14

BÖLÜM III

3.1 Lineer Olmayan Çok Noktalı Sınır Değer Problemleri için Yapı Analizleri	26
3.2 Başlangıç Değer Problemlerine İndirgeme	31

BÖLÜM IV

4.1 Ayrık Denklem İçin Çok noktalı Sınır Değer Problemleri	38
--	----

BÖLÜM V

5.1 Çok Noktalı Sınır Değer Problemlerine İnvariant İmbedding Yönteminin Uygulanması	43
5.2 Sonuç	50

KAYNAKLAR	51
-----------	----

ÖZGEÇMİŞ	54
----------	----

ÖZET

Bu çalışmada çok noktalı sınır değer problemlerinin invariant imbedding yöntemi ile çözümü yapılmıştır. Bu yöntemin en önemli avantajı başlangıç değer problemi ile sonuçlanmasıdır.

Birinci bölümde, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri kısaca anlatılarak, adi diferansiyel denklemler için k-nokta sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği verilmiştir.

İkinci bölüm invariant imbedding yönteminin genel sınır koşulları ile lineer çok noktalı sınır değer problemlerine uygulamalarını içerir.

Üçüncü bölümde lineer olmayan çok noktalı sınır değer problemleri için yapı analizlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ayrık denklem için çok noktalı sınır değer problemleri kısaca özetlenmiştir.

Beşinci bölümde ise çok noktalı sınır değer problemlerine invariant imbedding yönteminin uygulanması yapılmıştır.

Çalışma sırasında çok noktalı sınır değer problemlerinin mühendislikte karşılaşılan uygulamaları araştırılmış ancak somut bir örnek belirlenememiştir. Bu nedenle de uygulama herhangi bir adi diferansiyel denklem için yapılabilmektedir.

SUMMARY

In this work, the solution of multipoint boundary value problems with the invariant imbedding method is done. The most important advantage of this method is that it is concluded by the initial value problem.

In the first section, the numerical solutions of differential equations are shortly explained and existence and uniqueness of solutions of k -point boundary value problems for ordinary differential equations are given.

The second section includes the applications of invariant imbedding method to linear multipoint boundary value problems with general boundary conditions.

In the third section structure analyses for large scale nonlinear multipoint boundary value problem are given.

In the fourth section multipoint boundary value problems for discrete equations are shortly summarized.

In the fifth section, the invariant imbedding method is applied to the multipoint boundary value problems.

During this work, the applications of multipoint boundary value problems to engineering has been searched, but a concrete example has not been determined. For this reason, the application has been done for an ordinary differential equation.

BÖLÜM I

1.1 Giriş

Her fiziki olay içerdiği parametreler ve bu parametrelerin çeşitli mertebeden türevlerine göre denge bağıntısı olarak karşımıza çıkar. Bu bağıntı genelde bir diferansiyel denklemdir.

Belli koşullar altında böyle bir bağıntıyı sağlayan bağımlı değişkenlerin teorik olarak bulunması bazı özel yapıdaki denklemler için mümkündür. Ancak çoğunlukla teorik çözüm bulma imkânı olmaz. Ayrıca bazı hallerde bulunan teorik çözüm uygulamacı için bir anlam ifade etmez. Uygulayıcıya daima bilinmeyen fonksiyonun kesikli değerleri gerekli olur. Bu tür çözümlerin bulunmasında sayısal çözüm yöntemlerini gerektirir. Diferansiyel denklemlerin türüne veya yapısına veya mertebesine bakılmaksızın belli koşullar altında istenilen sayısal çözümlerini bulabilmek için geliştirilen çeşitli yöntemler mevcuttur.

1.2 Adi Diferansiyel Denklemlerde Sınır Değer Problemleri

Herhangi bir birinci mertebeden adi diferansiyel denklem bir başlangıç değer problemi olduğu halde, iki veya daha yüksek mertebeden bir adi diferansiyel denklem bir başlangıç değer problemi olabileceği gibi bir sınır değer problemi de olabilir. Örnek olarak,

$$y'' = f(x, y, y') \quad 1.2.1$$

şeklinde verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem bir başlangıç değer problemi ise başlangıç noktası olan $x=a$ 'da $y=y_0$ ve $y'=y_0'$ gibi iki koşulun verilmesi gerekirdi. Bir sınır değer problemi ise o zaman iki sınır koşulundan birinin $x=a$ ve diğerinin $x=b$ noktasında

çözümü sağlaması gerekir. Eğer sınır koşulu olarak aralığın $x=a$ ve $x=b$ uçlarındaki $y(a)$ ve $y(b)$ ordinatları verilmiş ise böyle bir problem birinci tip sınır değer problemi adını alır. Eğer sınır koşulları aralığın uç noktalarında fonksiyonun birinci türevleri olarak verilmiş ise yani $y'(a)$ ve $y'(b)$ veriliyor ise o zaman problem ikinci tip sınır değer problemi olur. Üçüncü tip sınır değer probleminde ise sınır koşulları ordinatlar ve türevlerinin lineer kombinezonu olarak verilir.

Sınır değer problemleri pek çok alanda uygulayıcının, karşısına çıkar. Örneğin uygulamalı matematikte, optimizasyon teorisinde, teorik fizikte, mühendislikte, ısı ve kütle transferinde, transport teoride dinamik sistemlerde bu tür problemlerle karşılaşılır.

Başlangıç değer problemindekine benzer şekilde, teorik ya da kapalı formdaki çözümde integrasyon sabitleri bulunduran sınır değer problemlerinin genel çözümü, verilen koşulların kullanılmasıyla integrasyon sabitleri belirlendikten sonra bir tek çözüm olarak sabitleştirilir. Ancak her adi diferansiyel denklem başlangıç veya sınır koşulları olsa bile analitik olarak ya da kapalı bir çözüm vermez. O zaman bir sayısal yaklaşım uygulamak gerekir. Sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği doğrudan doğruya sınır koşulları ile ilişkilidir.

Bir sınır değer probleminin diferansiyel denklemi ve sınır koşulları bağımlı değişken ve onun türevleri cinsinden lineer ise o probleme lineer sınır değer problemi denir ve lineer sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri lineer olmayan sınır değer problemlerinin çözümlerinden çok daha kolay bulunur.

Denk.(1.2.1) ile verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli fonksiyonlar olmak üzere, bir $L(y)$ operatörü kullanarak

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad 1.2.2$$

gibi yazılır. Burada diferansiyel denklemin sol tarafı L operatörü ile ifade edilmiştir. Böyle bir problemin sınır koşulları ise $x=a$ ve $x=b$ noktalarındaki ordinatlar ve türevlerinin lineer kombinezonu olarak U_a , U_b lineer operatörlerini kullanarak

$$\begin{aligned} U_a(y) &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha \\ U_b(y) &= \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta \end{aligned} \quad 1.2.3$$

şeklinde yazılabilir.

Homogen sınır değer problemi L , U_a , U_b Lineer operatörleri kullanılarak

$$L(y) = 0 \quad 1.2.4$$

$$U_a(y) = 0$$

$$U_b(y) = 0 \quad 1.2.5$$

şeklinde,

Homogen olmayan sınır değer problemi ise

$$L(y) = r(x) \quad 1.2.6$$

$$U_a(y) = 0$$

$$U_b(y) = 0 \quad 1.2.7$$

şeklinde sembolize edilebilir.

1.3 Başlangıç Değer Probleminin Sayısal Çözümleri

Bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için kullanılabilecek çeşitli tek adım integrasyon yöntemleri bilinmektedir. Bütün bu yöntemlerde ortak olan husus, çözümün birbirinden ayrık ve genellikle eşit aralıklı noktalarda elde edilmiş olmasıdır.

Adım adım integrasyon yöntemleri içinde bir ayırım yaparak yöntemleri tek adım ve çok adım yöntemleri olarak ikiye ayırmak mümkündür. Tek adım yöntemleri ile işlemde, sadece bir önceki noktada bağımlı değişkenin değeri gerekirken, çok adım yöntemlerinde sadece bir önceki değil, daha önceki belli sayıda noktada bağımlı değişkenin değerleri gerekir. Bu nedenle tek adım yöntemleri kendi kendine integrasyona başlayabilir; çok adım yöntemleri ise başlangıçta bilinmesi gereken belli sayıda noktadaki çözümler tek adım yöntemi ile bulunduktan sonra çözüme devam edilebilir.

1.4 Sınır Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri :

Sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılmakta olan yöntemler iki ana grupta toplanabilirler. Bu gruplardan birincisi başlangıç değer yöntemleri, diğeri ise sonlu fark yöntemi ile bilinmektedir. Başlangıç değer yöntemleri ile bir sınır değer probleminin çözümü için, problem önce bir başlangıç değer problemine dönüştürülür ve daha sonra böyle bir problemin sayısal çözümünde kullanılan bir algoritma uygulanır. Sonlu farklar yöntemlerinde ise sınır değer probleminin diferansiyel denklemi sonlu farklar ifadeleri yardımı ile cebirsel denklem sistemleri haline dönüştürülür ve problem böyle bir sistemin çözümü halini alır. Bu yöntemin uygulaması sırasında elde edilen katsayı matrisi genellikle band matris halindedir ve bu nedenle aynı boyutlu fakat yoğun bir katsayı matrisine oranla daha kolay çözülebilmektedir. Ancak yöntemin pek pratik olmaması, yeterli bir çözüm için gerekli olan matrisin boyutunun çok kere büyük olması ve böylece gereken işlemin hem uzun zaman alması hem de sonuçlar da hataların büyümesi sonlu farklar yerine başlangıç değer yönteminin

kullanılmasını daha uygun kılmaktadır.

Başlangıç değer yöntemleri adı altında toplanan yöntemler arasında tümleyici çözümler yöntemi veya taşıma matrisi ile çözüm, özel çözümler yöntemi, bitişik denklemler yöntemi, Kalnins yöntemi, Riccati dönüşümü (Riccati transformation veya İnvariant imbedding veya field yöntemi) adı ile bilinen yöntemler sayılabilir.

1.5 Adi Diferansiyel Denklemler İçin k-nokta Sınır Değer Problemlerinin Çözümlerinin Varlık ve Tekliği

Sınır koşulları lineer olan, lineer diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri olarak çözümlerinin varlığı ve tekliğini kanıtlamak mümkündür. Genelde lineer olmayan diferansiyel denklemler için durum böyle değildir. Fakat [J.Henderson ve L.Jackson] son birkaç yıl içinde lineer olmayan denklemlerin sınır değer problemleri olarak çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

[J.Henderson ve L.Jackson] $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$, $y_{ij} \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^k m_j = n$ ve $2 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad 1.5.1$$

$$y^{(i)}(x_j) = y_{ij}, \quad 0 \leq i \leq m_j - 1, \quad 1 \leq j \leq k \quad 1.5.2$$

sınır değer problemi ile ilgilenmiş ($2 \leq k \leq n$ olmak üzere herhangi bir k-sabiti) bu tip bir sınır değer problemine k-nokta sınır değer problemi demiştir. $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ sınır koşulları sayılan m_j nin bir özel seçimi $1 \leq j \leq k$ olmak üzere yazılmıştır.

Bu diferansiyel denklemlerde;

(A) $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(a, b) \times \mathbb{R}^n$ üzerinde süreklidir;

(B) Denk.(1.5.1) için başlangıç değer probleminin çözümleri (a, b) de tektir;

- (C) Denk.(1.5.1) gibi bütün çözümleri (a,b) nin kapsamındadır;
- (D) Eğer $[c,d]$, (a,b) nin kapalı alt aralığı $\{y_j(x)\}$, $[c,d]$ üzerinde düzgün sınırlı olan Denk(1.5.1) in çözümlerinin dizisi ise $\{y_{jk}(x)\}$ 'in alt dizisi vardır. Öyle ki her $0 \leq i \leq n-1$ için $\{y_{jk}^i(x)\}$, $[c,d]$ üzerinde düzgün olarak yakınsar.

Şeklindeki hipotezler araştırılır.

[Hartman] A-C hipotezlerini sağlaması halinde (a,b) üzerindeki Denk.(1.5.1) için bütün n -nokta sınır değer problemlerinin çözümlerinin olması halinde, (a,b) üzerinde $2 \leq k \leq n$ ile Denk. (1.5.1) in bütün k -nokta sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliğini ispatlamıştır. Daha sonra [Hartman] ve [Klaasen] (A) - (D) hipotezleri sağlandığında ve (a,b) üzerinde Denk.(1.5.1) için bütün n -nokta sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığını ayrı ayrı ispatladılar.

[Sherman], (A) hipotezini sağlayan lineer diferansiyel denklemler için (a,b) de Denk.(1.5.1) için bütün 2-nokta sınır değer problemlerinin tek çözümlerinin varlığı, (a,b) üzerinde Denk.(1.5.1) için bütün k -nokta sınır değer problemlerinin $2 \leq k \leq n$ tek çözümlerinin varlığını göstermiştir.

[Peterson] Denk.(1.5.1) için bütün $(n-1)$ -nokta sınır değer problemlerinin (a,b) de bir tek çözümlerinin olduğu varsayıldığında aynı sonucun çıkabileceğini ispatlamıştır.

Çözümün tekliği için aşağıda verilen iki teorem yukarıdaki tanımlar ve yardımcı bilgiler altında [J. Henderson ve L. Jackson] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 1.5.1 : $2 \leq h-1 < h < n$ olacak şekilde bir h tamsayı için (a,b) üzerinde Denk.(1.5.1) in bütün h ve $(h-1)$ -nokta sınır değer prob

lemlerinin en fazla bir çözümü olduğunda diferansiyel denklem Denk.(1.5.1) in (A) ve (B) koşullarını sağladığını varsayalım. O zaman (a,b) üzerinde $2 \leq k \leq h$ olmak üzere Denk.(1.5.1) in bütün k -nokta sınır değer problemlerinin en fazla bir çözümü vardır.

Teorem 1.5.2 : (A) ve (B) hipotezleri Denk.(1.5.1) denklemleriyle sağlanırsa ve (a,b) üzerinde Denk.(1.5.1) için tüm $(n-1)$ -nokta sınır değer probleminin en çok bir çözümü varsa (a,b) üzerinde Denk. (1.5.1) için tüm k -nokta sınır değer problemlerinin $2 \leq k \leq n-1$ olduğu yerde her k için en fazla bir çözümü vardır.

BÖLÜM II

İnvariant İmbedding Yönetiminin Genel Sınır Koşulları ile Lineer Çok Nokta Sınır Değer Problemlerine Uygulamaları

2.1 Genel Sınır Koşulları

Son yıllarda invariant imbedding çözüm tekniği bir çok problemlere uygulanmaktadır. İnvariant imbedding yöntemi diferansiyel denklemlerin iki noktalı sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerinde sık sık kullanılabilen güçlü bir yöntem olduğu gibi en etkili özelliklerinden biride iki noktalı sınır değer problemlerini başlangıç değer problemlerine dönüştürebilmesidir. Şu anda invariant imbedding ismine dayanarak büyük bir literatür kütlesi oluşmaktadır.

İnvariant imbedding yönteminin formülasyonunda çeşitli avantajlar vardır. En önemlisi invariant imbedding yönteminin bir başlangıç değer problemi ile sonuçlanmasıdır. Başlangıç değer problemlerinin bilgisayarlar kullanılarak sayısal çözümleri iyi oturtulmuştur. İnvariant imbedding yöntemi ile elde edilen Riccati denklemlerinin sayısal çözümlerinde doğruluk değeri yüksektir. Öyle ki bir adımda oluşan hatalar sonraki adımda büyümeyiz.

En genel lineer iki nokta sınır değer problemi invariant imbedding tekniği kullanılarak başlangıç değer şekline indirgenebilir.

$$\frac{dy}{dx} = F(x)y + g(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad 2.1.1$$

Lineer türevlenebilir denklemleri (vektör-matris) notasyonu kullanılır ve

$$Ay(0)+By(L)=p \quad 2.1.2$$

genel sınır koşulları ile açıklanan n. mertebeden iki nokta sınır değer problemi ele alınsın. y , g ve p n-vektörleri ve A ve B tekil olmayan nxn matrisleridir. F ve g elemanları, bağımsız değişken x'in parçasal sürekli fonksiyonlarıdır.

İnvariant imbedding yönteminin esası başlangıç değer problemini daha büyük bir grup problemde imbedding etmeye ve daha büyük sınıfın elemanları arasındaki ilişkiyi saptamaya dayanmaktadır. Burada imbedding parametresi L uzunluğundaki parametredir. Sınır değer problemlerinin çözümü aralık uzunluğuna bağlı olur. İki nokta sınır değer probleminin lineerliğinden U 'nun $n \times n$ matrisi V 'nin bir n -vektörü olduğu yerde

$$y = U(x, L)p + V(x, L) \quad 2.1.3$$

yazılır. Denk.(2.1.3) teki gösterilim çözümün hem bağımsız değişken x 'in değerine hemde L aralık uzunluğuna bağlı olduğunu vurgulamak için kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= FU \\ AU(0, L) + BU(L, L) &= I \end{aligned} \quad 2.1.4$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= FV + g \\ AV(0, L) + BV(L, L) &= \bar{0} \end{aligned} \quad 2.1.5$$

olacak şekilde seçilmiştir.

Sınır değer problemi $L=1$ olduğunda sağlanabilir.

Değişken uzunlukla çözüm kümesinin elemanları arasındaki fonksiyonel ilişkileri bulmak için Denk.(2.1.4)'ün imbedding parametresi L 'ye bağlı olarak türevi alınır. (U_x birinci argümente göre kısmi türev, U_L ikinci argümente göre kısmi türev almayı ifade eder.)

$$\begin{aligned} U_{xL} &= FU_L \\ AU_L(0, L) + BU_L(L, L) &= -BU_x(L, L) \end{aligned} \quad 2.1.6$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde Denk.(2.1.5) in türevi alındığında

$$V_{xL} = FV_L$$

$$AV_L(O,L) + BV_L(L,L) = -BV_x(L,L) \quad 2.1.7$$

Denk.(2.1.4) , Denk.(2.1.6) ve Denk.(2.1.7)'den U_L ve V_L kısmi türevlerinin bilinmeyen fonksiyonlar gibi düşünüldüğü ve U_L , V_L ve U 'nun aynı lineer diferansiyel denklemi ve aynı sınır koşullarını sağladığını gösterir. Bu koşullar altında

$$\begin{aligned} U_L(x,L) &= -U(x,L) BU_x(L,L) \\ V_L(x,L) &= -U(x,L) BV_x(L,L) \end{aligned} \quad 2.1.8$$

bağıntılarının doğruluğu görülür.

Denk.(2.1.4) ve Denk.(2.1.5)'i kullanarak Denk.(2.1.8) denklemleri

$$U_L(x,L) = -U(x,L) BF(L) U(L,L) \quad 2.1.9$$

ve

$$V_L(x,L) = -U(x,L) B[F(L)V(L,L) + g(L)] \quad 2.1.10$$

şeklinde yazılır. Denk.(2.1.9) ve Denk.(2.1.10)' dan L 'nin bağımsız değişken ve x 'in bir parametre olduğu diferansiyel denklem sistemidir. Bu sistem $U(x,x)$ ve $V(x,x)$ gibi bazı başlangıç koşulları önceden verilmiş olsaydı çözülebilirdi.

Riccati değişkenleri

$$r(L) = U(L,L) \quad 2.1.11$$

$$S(L) = V(L,L) \quad 2.1.12$$

r , $n \times n$ matrisi ve S bir n -vektör olmak üzere tanımlanmışlarsa, bundan sonraki adım r ve S için diferansiyel denklemler elde etmektir. Burada

r ve S her ikisinde L 'nin fonksiyonlarıdır. Denk.(2.1.11)' in L ye göre türevi alındığında,

$$r_L = U_x(L, L) + U_L(L, L) \quad 2.1.13$$

elde edilir. Denk.(2.1.4) ve Denk.(2.1.11)'den

$$\begin{aligned} U_L(L, L) &= -U(L, L)BFU(L, L) \\ &= -rBFr \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece Denk (2.1.13)

$$r_L = (I-rB)Fr \quad 2.1.14$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} S &= V(L, L) \text{ den} \\ S_L &= V_x(L, L) + V_L(L, L) \\ V_L(L, L) &= -U(L, L)B[F(L)V(L, L) + g(L)] \\ &= -rB[FV + g] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_L &= FV + g - rB[FV + g] \\ &= (I-rB)(FV + g) \end{aligned}$$

$$S_L = (I-rB)(FS + g) \quad 2.1.15$$

bulunur.

Denk.(2.1.14) ve Denk.(2.1.15)' in klasik Riccati denklemi olarak çözümleri, başlangıç değer probleminin bir önceki bilinmeyen sınır koşullarına varır. Eğer r ve S nin değerleri herhangi bir L değerinde belirlenebilirse, sistem başlangıç değer problemi gibi çözülebilir. Bu başlangıç koşulları aşağıdaki gibi elde edilir. Bir Taylor serisinde

$x=L$ noktası civarında açılarak

$$U(0,L)=U(L,L) - U_x(L,L)L + \dots \quad 2.1.16$$

$$V(0,L)=V(L,L) - V_x(L,L)L + \dots$$

yazılır. Denk.(2.1.4) ve Denk.(2.1.5)'den $U(0,L)$ ve $V(0,L)$

aşağıdaki gibi çözümlere

$$AU(0,L) + BU(L,L)=I$$

$$AU(0,L) = I-BU(L,L)$$

$$U(0,L) = A^{-1} [I-BU(L,L)] \quad 2.1.17 \text{ a}$$

$$U(0,L) = A^{-1} (I-Br) \quad 2.1.17 \text{ b}$$

$$AV(0,L)+BV(L,L) = \bar{0}$$

$$AV(0,L) = -BV(L,L) \quad 2.1.18.a$$

$$V(0,L) = -A^{-1}BS \quad 2.1.18 \text{ b}$$

Denk.(2.1.17) ve Denk.(2.1.18) kullanılarak Denk.(2.1.16)

$$A^{-1}(I-Br) = r - FrL + \dots$$

$$I-Br = Ar - AFrL + \dots$$

$$(A+B)r = I + AFr(L)L + \dots$$

$$r(L) = (A+B)^{-1} [I + AFr(L)L + \dots]$$

şekline dönüşür. Aynı zamanda

$$V(0,L) = V(L,L) - V_x(L,L)L + \dots$$

$$-A^{-1}BS = S - FS(L) - g(L) + \dots$$

$$BS = AS - AFSL - Ag(L)L + \dots$$

$$S = (A+B)^{-1} \{ [AFS(L) + g(L)]L + \dots \} \quad 2.1.19$$

şekline dönüşür.

Eğer Riccati değişkenleri $L \rightarrow 0$ iken sonluysa

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow 0} \Gamma(L) &= (A+B)^{-1} \\ \lim_{L \rightarrow 0} S(L) &= \overline{0}\end{aligned}\quad 2.1.20$$

olacak şekilde Denk.(2.1.19) daki 1.dereceden ve daha yüksek terimler $L \rightarrow 0$ iken yok sayılabilir. $A+B$ matrisinin tekil olduğu durumda Riccati değişkenlerinin toplamı $L \rightarrow 0$ iken sonsuza yaklaşabilir. Bu tür problemler $LU(L,L)$ formunda uygun yeni Riccati değişkenleri tanımlanabilirler. Daha sonra L'Hospital kuralı yeni değişkenin sınırlayıcı özelliğini değerlendirmek için kullanılır.

Riccati sistemi başlangıç koşulu

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow 0} \Gamma(L) &= (A+B)^{-1} \\ \lim_{L \rightarrow 0} S(L) &= \overline{0}\end{aligned}\quad 2.1.20$$

ve

$$\Gamma_L = (I - \Gamma B) F \Gamma \quad 2.1.14$$

$$S_L = (I - \Gamma B)(F S + g(L)) \quad 2.1.15$$

denklemleriyle tanımlandığı gibi $L=0$ dan $L=1$ e doğru tek bir ileri geçişle integre edilebilir.

Aynı zamanda $U(x,L)$ ve $V(x,L)$ 'in değerleri istenen herhangi bir x değeri veya değerleri için

$$\begin{aligned}U_L(x,L) &= -U(x,L) B U_x(L,L) \\ V_L(x,L) &= -U(x,L) B V_x(L,L)\end{aligned}\quad 2.1.18$$

ve

$$\Gamma(L) \approx U(L,L)$$

$$S(L) \approx V(L,L)$$

denklemlerinden elde edilen bir grup denklemi integre ederek

$$\begin{aligned}
 U_L(x,L) &= -U(x,L)BFr & L \geq x \\
 V_L(x,L) &= -U(x,L)BF [S+g(L)] & 2.1.21
 \end{aligned}$$

Burada

$$U(x,x) = f(x)$$

$$V(x,x) = S(x)$$

başlangıç koşulları geçerlidir.

Normal olarak Denk.(2.1.21) gibi bir grup denklem, L değişkeni x 'e yaklaştıkça her istenen sonuç noktası sisteme eklenir.

2.2 Çok Noktalı Sınır Değer Problemlerine Uzanımları:

$$L[y] = y''' + ay'' + by' + cy = g(x) \quad 2.2.1$$

denklemini ile verilen Lineer diferansiyel denklemin

$$y(0) = y_1,$$

$$y(\alpha) = y_2 \quad (0 < \alpha < 1) \quad 2.2.2$$

$$y(1) = y_3$$

koşulları ile çözümü için aşağıdaki yol izlenir. a, b, c bağımsız x değişkeninin fonksiyonu olsunlar. Bu problem aralık uzunluğunun değişken olduğu daha büyük bir grup problem içine yerleştirilebilir. Denk.(2.2.1) ve Denk.(2.2.2)'nin lineerliği bir avantaj olarak alındığında U_1, U_2, U_3 ve V fonksiyonları

$$\begin{aligned}
 L[U_1] &= 0, & L[U_2] &= 0, & L[U_3] &= 0, \\
 U_1(0,L) &= 1, & U_2(0,L) &= 0, & U_3(0,L) &= 0, \\
 U_1(\alpha L, L) &= 0, & U_2(\alpha L, L) &= 1, & U_3(\alpha L, L) &= 0, & 2.2.3 \\
 U_1(L, L) &= 0, & U_2(L, L) &= 0, & U_3(L, L) &= 1,
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 L\{V\} &= g(x), \\
 V(0,L) &= 0, \\
 V(\alpha L, L) &= 0, \\
 V(L, L) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.2.4}$$

olacak şekilde seçildiğinde

$$y(x) = y_1 U_1(x, L) + y_2 U_2(x, L) + y_3 U_3(x, L) + V(x, L) \tag{2.2.5}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 L\{U_{1L}\} &= 0, \\
 U_{1L}(0, L) &= 0, \\
 U_{1L}(\alpha L, L) &= -\alpha U_{1x}(\alpha L, L), \\
 U_{1L}(L, L) &= -U_{1x}(L, L);
 \end{aligned}
 \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned}
 L\{U_{2L}\} &= 0, \\
 U_{2L}(0, L) &= 0, \\
 U_{2L}(\alpha L, L) &= -\alpha U_{2x}(\alpha L, L), \\
 U_{2L}(L, L) &= -U_{2x}(L, L);
 \end{aligned}
 \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned}
 L\{U_{3L}\} &= 0, \\
 U_{3L}(0, L) &= 0, \\
 U_{3L}(\alpha L, L) &= -\alpha U_{3x}(\alpha L, L), \\
 U_{3L}(L, L) &= -U_{3x}(L, L);
 \end{aligned}
 \tag{2.2.8}$$

$$\begin{aligned}
 L\{V_L\} &= 0, \\
 V_L(0, L) &= 0, \\
 V_L(\alpha L, L) &= -\alpha V_x(\alpha L, L), \\
 V_L(L, L) &= -V_x(L, L);
 \end{aligned}
 \tag{2.2.9}$$

denklemleri elde edilir. Burada U_x (birinci argümente göre kısmi türev), U_L (ikinci argümente göre kısmi türev) türevi ifade eder Eğer $U_{\underline{L}}, U_{\underline{2L}}, U_{\underline{3L}}$ ve V_L fonksiyonları gözönüne alındığında aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\begin{aligned}
 U_{\underline{L}}(x,L) &= U_{\underline{L}}(0,L)U_1(x,L) + U_{\underline{L}}(\alpha L,L)U_2(x,L) + U_{\underline{L}}(L,L)U_3(x,L), \\
 U_{\underline{L}}(x,L) &= -\alpha U_{\underline{Lx}}(\alpha L,L)U_2(x,L) - U_{\underline{Lx}}(L,L)U_3(x,L), \\
 U_{\underline{2L}}(x,L) &= U_{\underline{2L}}(0,L)U_1(x,L) + U_{\underline{2L}}(\alpha L,L)U_2(x,L) + U_{\underline{2L}}(L,L)U_3(x,L), \\
 U_{\underline{2L}}(x,L) &= -\alpha U_{\underline{2Lx}}(\alpha L,L)U_2(x,L) - U_{\underline{2Lx}}(L,L)U_3(x,L), \\
 U_{\underline{3L}}(x,L) &= U_{\underline{3L}}(0,L)U_1(x,L) + U_{\underline{3L}}(\alpha L,L)U_2(x,L) + U_{\underline{3L}}(L,L)U_3(x,L), \quad 2.2.10 \\
 U_{\underline{3L}}(x,L) &= -\alpha U_{\underline{3Lx}}(\alpha L,L)U_2(x,L) - U_{\underline{3Lx}}(L,L)U_3(x,L), \\
 V_L(x,L) &= V_L(0,L)U_1(x,L) + V_L(\alpha L,L)U_2(x,L) + V_L(L,L)U_3(x,L), \\
 V_L(x,L) &= -\alpha V_{Lx}(\alpha L,L)U_2(x,L) - V_{Lx}(L,L)U_3(x,L),
 \end{aligned}$$

Aşağıdaki tanımlamalar yapıldığında;

$$\begin{aligned}
 r_{11}(L) &= \alpha L U_{\underline{Lx}}(\alpha L,L), & S_{11}(L) &= \alpha^2 L^2 U_{\underline{Lxx}}(\alpha L,L), \\
 r_{12}(L) &= L U_{\underline{Lx}}(L,L), & S_{12}(L) &= L^2 U_{\underline{Lxx}}(L,L), \\
 r_{21}(L) &= \alpha L U_{\underline{2Lx}}(\alpha L,L), & S_{21}(L) &= \alpha^2 L^2 U_{\underline{2Lxx}}(\alpha L,L), \\
 r_{22}(L) &= L U_{\underline{2Lx}}(L,L), & S_{22}(L) &= L^2 U_{\underline{2Lxx}}(L,L), \\
 r_{31}(L) &= \alpha L U_{\underline{3Lx}}(\alpha L,L), & S_{31}(L) &= \alpha^2 L^2 U_{\underline{3Lxx}}(\alpha L,L), \\
 r_{32}(L) &= L U_{\underline{3Lx}}(L,L), & S_{32}(L) &= L^2 U_{\underline{3Lxx}}(L,L), \\
 r_{41}(L) &= \alpha L V_x(\alpha L,L), & S_{41}(L) &= \alpha^2 L^2 V_{xx}(\alpha L,L), \\
 r_{42}(L) &= L V_x(L,L), & S_{42}(L) &= L^2 V_{xx}(L,L),
 \end{aligned} \quad 2.2.11$$

Denk.(2.2.10) ve Denk.(2.2.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 L U_{\underline{L}}(x,L) &= -r_{11}(L)U_2(x,L) - r_{12}(L)U_3(x,L), \\
 L U_{\underline{2L}}(x,L) &= -r_{21}(L)U_2(x,L) - r_{22}(L)U_3(x,L), \\
 L U_{\underline{3L}}(x,L) &= -r_{31}(L)U_2(x,L) - r_{32}(L)U_3(x,L), \\
 L V_L(x,L) &= -r_{41}(L)U_2(x,L) - r_{42}(L)U_3(x,L),
 \end{aligned} \quad 2.2.12$$

elde edilir.

Buradaki amaç, $r_{11}, r_{12}, \dots, S_{11}, S_{12}, \dots$ değişkenlerini kullanan bir grup diferansiyel denklemler kurmaktır. r ve S 'ler L 'nin fonksiyonları olmak üzere Denk.(2.2.11)' in ilk denkleminin L 'ye göre türevi alındığında,

$$r_{11} = \alpha U_{1x}(\alpha L, L) + \alpha^2 L U_{1xx}(\alpha L, L) + \alpha L U_{1xL}(\alpha L, L) \quad 2.2.13$$

Denk.(2.2.11) den

$$\alpha U_{1x}(\alpha L, L) = \frac{r_{11}(L)}{L} \quad 2.2.14$$

ve

$$\alpha^2 L U_{1xx}(\alpha L, L) = \frac{S_{11}(L)}{L} \quad 2.2.15$$

dir.

Denk.(2.2.12)' nin ilk denklemin x 'e göre türevi alındığında

$$U_{11x}(x, L) = -r_{11}(L) U_{2x}(x, L) - r_{12}(L) U_{3x}(x, L)$$

olur.

Böylece $x = \alpha L$ alındığı zaman,

$$U_{11x}(\alpha L, L) = -r_{11}(L) U_{2x}(\alpha L, L) - r_{12}(L) U_{3x}(\alpha L, L),$$

veya Denk.(2.2.11) kullanılarak

$$U_{11x}(\alpha L, L) = - \frac{r_{11}(L) r_{21}(L)}{\alpha L} - \frac{r_{12}(L) r_{31}(L)}{\alpha L} \quad 2.2.16$$

elde edilir.

Denk.(2.2.14) ve Denk.(2.2.16), Denk.(2.2.13)' e yerleştirildiğinde

$$r_{11} = \frac{(1 - r_{21}) r_{11}}{L} + \frac{S_{11} - r_{12} r_{13}}{L} \quad 2.2.17$$

elde edilir. Burada benzer şekilde

$$S_{III}=2\alpha^2 L U_{DXX}(\alpha L, L) + \alpha^3 L^2 U_{DXXX}(\alpha L, L) + \alpha^2 L^2 U_{DXXL}(\alpha L, L) \quad 2.2.18$$

dir. Denk.(2.2.11)'den

$$U_{DXX}(\alpha L, L) = \frac{S_{II}}{\alpha^2 L^2} \quad 2.2.19$$

Denk.(2.2.6)'dan

$$U_{DXXX}(\alpha L, L) = -a(\alpha L)U_{DXX}(\alpha L, L) - b(\alpha L)U_{IX}(\alpha L, L) \\ - C(\alpha L)U_I(\alpha L, L)$$

yada Denk.(2.2.6)'nın sınır koşulları ve Denk.(2.2.11)'in tanımlarını

kullanarak

$$U_{DXXX}(\alpha L, L) = - \frac{a(\alpha L)S_{II}(L)}{\alpha^2 L^2} - \frac{b(\alpha L)r_{II}(L)}{\alpha L} \quad 2.2.20$$

ve Denk.(2.2.12) den

$$U_{IIXX}(x, L) = -r_{II}(L)U_{2XX}(x, L) - r_{I2}(L)U_{3XX}(x, L)$$

veya

$$U_{IIXX}(\alpha L, L) = - \frac{r_{II}(L)S_{2I}(L)}{\alpha^2 L^2} - \frac{r_{I2}(L)S_{3I}(L)}{\alpha^2 L^2} \quad 2.2.21$$

dir. Denk.(2.2.18) ve Denk.(2.2.21) birleştirilerek

$$S_{III} = \frac{2S_{II}}{L} - \frac{r_{II}S_{2I} + r_{I2}S_{3I}}{L} - \alpha a(\alpha L)S_{II} - \alpha^2 L b(\alpha L)r_{II} \quad 2.2.22$$

elde edilir.

Denk.(2.2.17) ve Denk.(2.2.22) Riccati Denklemleridir. Yapılan işlemleri takip ederek r'ler ve S'ler için bir Riccati Denklemleri kümesi elde edilir. Bu küme aşağıda oluşturulmuştur.

$$r_{11L} = \frac{(1-r_{21})r_{11}}{L} + \frac{S_{11}-r_{12}r_{31}}{L},$$

$$r_{12L} = \frac{(1-r_{32})r_{12}}{L} + \frac{S_{12}-r_{11}r_{22}}{L},$$

$$r_{21L} = \frac{(1-r_{21})r_{21}}{L} + \frac{S_{21}-r_{22}r_{31}}{L},$$

$$r_{22L} = \frac{(1-r_{32})r_{22}}{L} + \frac{S_{22}-r_{21}r_{22}}{L},$$

$$r_{31L} = \frac{(1-r_{21})r_{31}}{L} + \frac{S_{31}-r_{32}r_{31}}{L},$$

$$r_{32L} = \frac{(1-r_{32})r_{32}}{L} + \frac{S_{32}-r_{31}r_{22}}{L},$$

$$r_{41L} = \frac{(1-r_{21})r_{41}}{L} + \frac{S_{41}-r_{42}r_{31}}{L},$$

$$r_{42L} = \frac{(1-r_{32})r_{42}}{L} + \frac{S_{42}-r_{41}r_{22}}{L},$$

$$S_{11L} = \frac{2S_{11}}{L} - \frac{r_{11}S_{21} + r_{12}S_{31}}{L} - \alpha a(\alpha L)S_{11} - \alpha^2 L b(\alpha L)r_{11},$$

$$S_{12L} = \frac{2S_{12}}{L} - \frac{r_{11}S_{22} + r_{12}S_{32}}{L} - a(L)S_{12} - Lb(L)r_{12},$$

$$S_{21L} = \frac{2S_{21}}{L} - \frac{r_{21}S_{21} + r_{22}S_{31}}{L} - \alpha a(\alpha L)S_{21} - \alpha^2 L b(\alpha L)r_{21} - \alpha^3 L^2 c(\alpha L)$$

$$S_{22L} = \frac{2S_{22}}{L} - \frac{r_{21}S_{22} + r_{22}S_{32}}{L} - a(L)S_{22} - L b(L)r_{22},$$

$$S_{31L} = \frac{2S_{31}}{L} - \frac{r_{31}S_{21} + r_{32}S_{31}}{L} - \alpha a(\alpha L)S_{31} - \alpha^2 L b(\alpha L)r_{31},$$

$$S_{32L} = \frac{2S_{32}}{L} - \frac{r_{31}S_{22} + r_{32}S_{32}}{L} - a(L)S_{32} - L b(L)r_{32} - L^2 c(L),$$

$$S_{41L} = \frac{2S_{41}}{L} - \frac{r_{41}S_{21} + r_{42}S_{31}}{L} - \alpha a(\alpha L)S_{41} - \alpha^2 L b(\alpha L)r_{41} + \alpha^3 L^2 g(\alpha L)$$

$$S_{42L} = \frac{2S_{42}}{L} - \frac{r_{41}S_{22} + r_{42}S_{32}}{L} - a(L)S_{42} - L b(L)r_{42} + L^2 g(L) \quad 2.2.23$$

Bu denklemlerin incelenmesinde, eğer bir grup başlangıç koşulu varsa, denklemleri nümerik olarak başlangıç değer yöntemlerini kullanarak integre edilmesinin olası olduğunu ortaya çıkarır. Başlangıç koşulları ve başlangıç türevleri aşağıda belirtildiği gibi L'Hospital's kuralı kullanılarak belirlenebilir. Taylor serisi kullanılarak

$$U_1(0,L) = U_1(\alpha L,L) - \alpha L U_{1x}(\alpha L,L) + \frac{\alpha^2 L^2}{2!} U_{1xx}(\alpha L,L)$$

$$- \frac{\alpha^3 L^3}{3!} U_{1xxx}(\alpha L,L) + \dots$$

yazılır. Denk.(2.2.11) 'in tanımlarını ve Denk. (2.2.6) 'nın diferansiyel denklemleri ve sınır koşulları ışığında önceki denklemler

$$1 = -r_{11}(L) + \frac{1}{2}S_{11}(L) + \frac{\alpha L a(\alpha L)}{6} S_{11}(L) + \frac{\alpha^2 L^2}{6} b(\alpha L) r_{11}(L) + 0(L^2) \quad 2.2.24$$

şekline dönüşür. Denk.(2.2.24)'ün L'ye göre türevi alındığında

$$0 = -r_{11L}(L) + \frac{1}{2}S_{11L}(L) + \frac{\alpha}{6}a(\alpha L)S_{11}(L) + \frac{\alpha L}{6}[a_x(\alpha L)S_{11} + a(\alpha L)S_{11L}(L) + 2ab(\alpha L)r_{11}(L)] + 0(L) \quad 2.2.25$$

denklemini elde edilir. Riccati değişkenleri $(r_{11}, r_{12}, S_{11}, S_{12}, \dots)$ nin ve türevlerinin $L \rightarrow 0$ iken sonlu olduğu tahmini yapılırsa Denk.(2.2.24) ve Denk.(2.2.25)'de $L \rightarrow 0$ iken limite geçerek

$$1 = -r_{11}(0) + \frac{1}{2}S_{11}(0) \quad 2.2.26$$

ve

$$0 = -r_{11L}(0) + \frac{1}{2}S_{11L}(0) + \frac{\alpha}{6}a(0)S_{11}(0) \quad 2.2.27$$

şekline dönüşür. Benzer şekilde

$$U_1(0, L) = U_1(L, L) - LU_{1x}(L, L) + \frac{L^2}{2}U_{1xx}(L, L) - \frac{L^3}{6}U_{1xxx}(L, L) + \dots$$

denkleminde ve Denk.(2.2.11) , Denk.(2.2.6)' dan

$$1 = -r_{12}(0) + \frac{1}{2} S_{12}(0) \quad 2.2.28$$

elde edilir. L'ye göre türev alınarak limite geçildiğinde

$$0 = -r_{12L}(0) + \frac{1}{2} S_{12L}(0) + \frac{1}{6} S_{12}(0) \quad 2.2.29$$

elde edilir.

Ayrıca

$$U_1(\alpha L, L) = U_1(L, L) - (1 - \alpha) L U_{1x}(L, L) + \frac{(1 - \alpha)^2}{2!} L^2 U_{1xx}(L, L) - \frac{(1 - \alpha)^3}{3!} L^3 U_{1xxx}(L, L) + \dots$$

yukarıdaki gibi Denk.(2.2.11), Denk.(2.2.6) dan

$$0 = - (1 - \alpha) r_{12}(0) + \frac{(1 - \alpha)^2}{2} S_{12}(0) \quad 2.2.30$$

elde edilir. L'ye göre türev alınarak

$$0 = - (1 - \alpha) r_{12L}(0) + \frac{(1 - \alpha)^2}{6} S_{12L}(0) + \frac{(1 - \alpha)^3}{6} a(0) S_{12}(0) \quad 2.2.31$$

elde edilir.

Ayrıca

$$U_1(L,L) = U_1(\alpha L,L) + (1-\alpha)LU_{1x}(\alpha L,L) + \frac{(1-\alpha)^2}{2!}L^2U_{1xx}(\alpha L,L) \\ + \frac{(1-\alpha)^3}{3!}L^3U_{1xxx}(\alpha L,L) + \dots$$

olduğu için yukarıdaki işlemlerle

$$0 = \frac{1-\alpha}{\alpha} r_{11}(0) + \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha^2} s_{11}(0) \quad 2.2.32$$

$$0 = \frac{1-\alpha}{\alpha} r_{11}(0) + \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha^2} s_{11L}(0) - \frac{(1-\alpha)^3}{6\alpha^2} a(0)s(0) \quad 2.2.33$$

elde edilir.

U_2 , U_3 ve V yi yukarıdaki gibi kullanarak, buna benzer denklemler kümesi yazılabilir. Bu 32 bilinmeyen içinde 32 lineer denklemlerin kümesi ile sonuçlanır. Matris gösterilimini kullanarak ve 32×32 matrisinin bir grup 4×4 lere ayrılabilceğini gözlemleyerek, elde edilen bağıntılar aşağıdaki denklemlerle özetlenir.

$$[A] \begin{bmatrix} r_{11}(0) \\ s_{11}(0) \\ r_{11L}(0) \\ s_{11L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [B] \begin{bmatrix} r_{12}(0) \\ s_{12}(0) \\ r_{12L}(0) \\ s_{12L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[A] \begin{bmatrix} r_{21}(0) \\ s_{21}(0) \\ r_{21L}(0) \\ s_{21L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [B] \begin{bmatrix} r_{22}(0) \\ s_{22}(0) \\ r_{22L}(0) \\ s_{22L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[A] \begin{bmatrix} r_{31}(0) \\ S_{31}(0) \\ r_{31L}(0) \\ S_{31L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [B] \begin{bmatrix} r_{32}(0) \\ S_{32}(0) \\ r_{32L}(0) \\ S_{32L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] \begin{bmatrix} r_{41}(0) \\ S_{41}(0) \\ r_{41L}(0) \\ S_{41L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [B] \begin{bmatrix} r_{42}(0) \\ S_{42}(0) \\ r_{42L}(0) \\ S_{42L}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.2.3$$

Bu denklemlerdeki 4x4 matrisleri

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha a(0)}{6} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-(1-\alpha)^3 a(0)}{6\alpha^2} & \frac{1-\alpha}{\alpha} & \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha^2} \end{bmatrix}$$

$$[B] \equiv \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -(1-\alpha) & \frac{(1-\alpha)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}a(0) & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{(1-\alpha)^3}{6}a(0) & -(1-\alpha) & \frac{(1-\alpha)^2}{2} \end{bmatrix} \quad 2.2.35$$

ile verilen Denk.(2.2.34) kolayca çözülebilir. Denk.(2.2.23) 'ün sayısal integrasyonu için başlangıç koşulları değil, sadece başlangıç türevlerinin değerleri elde edilir.

Denk.(2.2.11) de gösterilen Riccati değişkenlerinin tanımlarının seçimindeki amaç açıkça görülür. Bu tanımlarda L'kullanılmadıkça Riccati değişkenlerinin sonsuz başlangıç koşulları olurdu. Analitik çözümler için bu sorun ifade etmez. Fakat sayısal çalışmalarda, sonsuz değerler atılmalıdır. Sınır değer problemlerinin sonucu, Denk.(2.2.34) de elde edildiği gibi başlangıç koşulları ve (türevleri) ile Denk. (2.2.23) Riccati denklemlerini integre ederek elde edilir; önceki bölümde olduğu gibi Denk.(2.2.10) ile verilen ek türevlenebilir denklemleri her sonuç için eklenir. Eklenen denklemler için başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} U_1(x,x) &= 0, & U_2(x,x) &= 0 \\ U_3(x,x) &= 1, & V(x,x) &= 0 \end{aligned} \quad 2.2.36$$

şeklindedir.

BÖLÜM III

3.1 Lineer Olmayan Çok Noktalı Sınır Değer Problemleri İçin Yapı Analizleri :

Lineer olmayan çok noktalı sınır değer probleminde çok özel olarak,

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i=1, 2, \dots, n \quad 3.1.1$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri

$$g_i(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), \dots, x_1(t_\ell), \dots, x_n(t_m)) = 0$$

$$m \geq 2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \ell = 1, 2, \dots, m \quad 3.1.2$$

bağıntıları ile verilen genel lineer olmayan sınır koşullarını içerirler.

Burada f_i ve g_i kendi argümentlerine göre iki kere türeve sahiptir.

f_i , $[t_1, t_m]$ üzerinde t 'ye göre süreklidir.

Denk.(3.1.1) ve Denk.(3.1.2) ile verilen lineer olmayan çok noktalı sınır değer probleminin genellikle kapalı (analitik) çözümü yoktur. Genelde değişik türdeki ardışık tekrar algoritmaları sayısal bir çözümün elde edilmesinde kullanılmaktadır. Bu algoritmalar lineer olmayan çok noktalı sınır değer problemini bir başlangıç değer problemine indirgeyebilir.

Denklem ve sınır matrislerinin oluşumu:

Denklem matrislerinin herbir satırı t ye göre türevine karşılık gelen $\dot{x}_i$ ve herbir sütuna karşılık gelen x_j lerden oluşan matrisdir. Eğer x_j sistem değişkeni f_i fonksiyonunda görülürse $e_{ij} = 1$, diğer tarzda $e_{ij} = 0$ dır. Böylece E ile gösterilen denklem matrisi birinci mertebede lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin herbirinde sistem değişkenlerinin oluşumunu gösterir.

örneğin

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_3, t)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_3, x_4, t)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_3, t)$$

$$\dot{x}_4 = f_4(x_2, t)$$

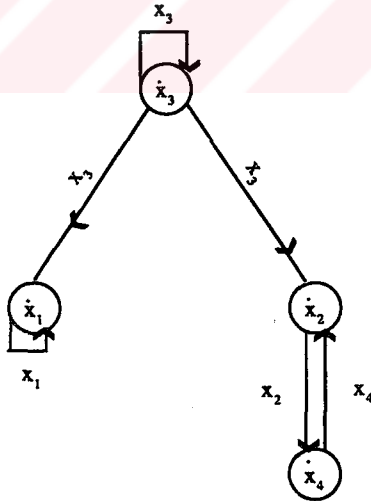
3.1.3

E denklem matrisi

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

şeklindedir.

Lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi için D_e sıralı ikililer kümesi (Digraf) $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ ($\dot{x}$ kümesi ile gösteriliyor.) noktalarının bir kümesidir.



Şekil 3.1.1

Şekil 3.1.1 e karşı gelen D_e digrafını gösteriyor. Bir f_i fonksiyonundaki x_j argümenti j inci noktadan i inci denkleme giden bir yol olarak alınıyor ve doğrultusu bir okla gösteriliyor.

$n \times n$ B_i alt matrisinin elemanları olan b_{ij} 'ler aşağıdaki kurala göre ya 1 veya 0 dır. Eğer $t=t_i$ de $x_j(t_i) \in x_i$ sistem değişkeni $g_i \in G$ sınır koşulunda görülürse $b_{ij}=1$ diğer tarzda $b_{ij}=0$ dır.

Örneğin

$$\begin{aligned} g_1(x_3(t_2)), x_3(t_2) &= 0, & g_2(x_1(t_1)), x_3(t_2) &= 0, \\ g_3(x_1(t_2)), x_4(t_2) &= 0, & g_4(x_4(t_2)), x_4(t_2) &= 0, \end{aligned} \quad 3.1.4$$

ile verilen üç noktalı genel lineer olmayan sınır koşulları ele alınsın. burada Denk.(3.1.4) ' ün sınır matrisi

$$B = [B_1 | B_2 | B_3]$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{c} t_1 \qquad \qquad \qquad t_2 \qquad \qquad \qquad t_3 \\ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad 3.1.15$$

ile verilmektedir.

Erişebilirlik Matrisi :

$\dot{x}_j$ dan $\dot{x}_i$ ye $\dot{x}_1\dot{x}_j$ yolu varsa $\dot{x}_i$ ya $\dot{x}_j$ dan erişebilir denir. Şekil (3.1.1) de $\dot{x}_3$ dan $\dot{x}_1$ ya erişebilir, fakat $\dot{x}_3$ ya $\dot{x}_1$ dan erişilememektedir. Yoldaki çizgilerin sayısı yolun uzunluğunu verir. $\dot{x}_3$ dan $\dot{x}_1$ ya kadar uzunluk 2 dir.

Elemanları r_{ij} ile gösterilen R erişibilme matrisini gözönüne alalım ve eğer $\dot{x}_i$ lar $\dot{x}_j$ da erişebilir ise $r_{ij}=1$ aksi halde $r_{ij}=0$ dır.

Teorem 3.1.1: n elemanlı D_0 digrafı için aşağıdaki bağıntı vardır.

$$R=I+E+E^2+...+E^{n-1}=(I+E)^{n-1} \quad 3.1.6$$

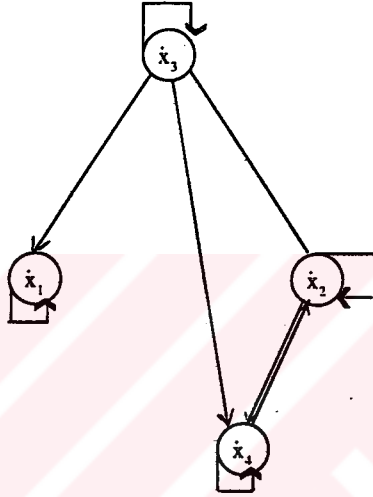
Burada I, nxn boyutlu birim matristir. Denk. (3.1.3) erişibilme matrisi

$$R = (I+E)^3 = (I+E)^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 3.1.7$$

ile verilmektedir.

Eğer $\dot{x}_i, \dot{x}_j$ ve $\dot{x}_k$ herbir ayrık bu üç nokta için $\dot{x}_i\dot{x}_j$ ve $\dot{x}_j\dot{x}_k$ yolları D_0 içinde olduğunda $\dot{x}_i\dot{x}_k$ yoluda D_0 içerisinde ise D_0 nin (transitif) geçişken olduğunu söyleyebiliriz. Digraf içerisinde erişibilme kavramı bu iki bağıntıda geçişgenlik kavramının bir karşılığıdır. D_0 diagramın D_0 transitif kapalılığı D_0 yi kapsayan en küçük geçişken digrafıdır.

Teorem 3.1.2 : D_e içerisinde herhangi iki tane ayrık $\dot{x}_i$ ve $\dot{x}_j$ noktaları için yalnız ve yalnız $\dot{x}_j$ D_e de $\dot{x}_i$ noktasından erişebilir ise $\dot{x}_i \dot{x}_j$ yolu D_e' içindedir.



Şekil 3.1.2

D_e' transitif olarak kapanışı

Denk.(3.1.3) için E' ters matris denklemi

$$E' = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3.1.

Denk.(3.1.3) için E^* simetrize matrisi

$$E^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 3.1.9$$

Denk.(3.1.9) $E^* = E + E'$ denklemini sağladığı görülmektedir.

Teorem 3.1.3 : E' ve E^* Denk(3.1.1) 'in E matris denkleminin sırasıyla ters ve simetrize olmuş matrisleri olsun. Burada $E^* = E' + E$ denklemi çıkartılabilir.

3.2 Başlangıç Değer Problemine İndirgeme

Birinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem sisteminde bir $\dot{x}_i$ noktasının bir $\dot{x}_j$ noktasına erişebilmesini gösteren erişebilirliği gözönüne alalım. Denk. (3.1.3) erişebilme matrisini Denk.(3.1.7) ile verildiğini göstermiş olalım. Denk.(3.1.7) matrisinin aşağıdaki sanal birinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere sahip oluruz.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \bar{f}_1(x_1, x_3, t) & \dot{x}_2 &= \bar{f}_2(x_2, x_3, x_4, t) \\ \dot{x}_3 &= \bar{f}_3(x_3, t) & \dot{x}_4 &= \bar{f}_4(x_2, x_3, x_4, t) \end{aligned} \quad 3.2.1$$

örneğin Denk.(3.2.1) $\dot{x}_1$ ün yalnız ve yalnız x_2 noktasına değil aynı zamanda x_3 ve x_4 noktalarında da en son olarak bağımlı olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan $\overline{f}_1$ içindeki x_2 argümenine $\dot{x}_2$ karşılık gelir. $\overline{f}_1$ deki aynı argümentler x_2, x_3 ve x_4 noktalarına bağımlı oluyor ve $\overline{f}_1$ de x_3 argümenine karşı gelen $\dot{x}_3, \overline{f}_1$ nin argümentlerini içeren x_3 e bağlıdır.

Bu özellikler sırasıyla $\dot{x}_2, \dot{x}_3$ ve $\dot{x}_4$ için başlangıç koşulları olarak a_2, a_3 ve a_4 verildiği zaman (3.1.3) örneğin $x_2(t)$, $x_3(t)$ ve $x_4(t)$ nin çözümleri biçimsel olarak karşılıklı denklemlerin integre edilmeleriyle elde edilebileceklerini gösteriyor. Yani Denk.(3.2.2) elde ediliyor.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= h_1(a_1, a_3, t), & x_2(t) &= h_2(a_2, a_3, a_4, t) \\ x_3(t) &= h_3(a_3, t), & x_4(t) &= h_4(a_2, a_3, a_4, t) \end{aligned} \quad 3.2.2$$

Denk.(3.2.2) 'den kolaylıkla gösterilebilir ki, Denk.(3.1.3) 'e eşdeğer erişebilme matrisi

$$\hat{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 3.2.3$$

Bu gösterilimleri (3.2.1) teoreminde toplayıp genelleştirmek mümkündür.

Teorem 3.2.1 :Denk.(3.2.1); Denk.(3.1.1) için $x_i(t_1)=a_i$ ($i=1,2,\dots,n$) başlangıç koşullarının verildiğini varsayalım. Eğer Denk. (3.1.1)'e karşı gelen R erişebilme matrisinin i, j verileri $j=1,\dots,n$, $n_1 \leq n$ $i=1,2,\dots,n$ sıfırdan farklı iseler o zaman $t > t_1$ için Denk.(3.1.1) başlangıç değer probleminin $x_i(t)$ çözümleri a_i başlangıç koşullarının fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Yani

$$x_i(t)=h_i(a_1, a_2, \dots, a_n, t), \quad t > t_1, \quad i=1,2,\dots,n \quad 3.2.4$$

Çok noktalı sınır değer probleminin başlangıç değer problemine indirgenmesi ile ilgili şu yol izlenebilir :

Birinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklem kümesinden genel lineer olmayan sınır kümesine erişebilmeyi gözönüne alalım. (3.1.3) örneğinin Denk.(3.2.3) tarafından verilen eşdeğer $\hat{R}$ erişibilme ve Denk.(3.1.4) tarafından verilen B_2 ve B_3 sınır alt matrisleri için aşağıdaki işlemleri gözönüne alalım.

$$B_2 \hat{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 3.3.1a$$

$$B_3 \hat{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 3.3.1b$$

$B_2 \hat{R}$ ve $B_3 \hat{R}$ matrislerini sırasıyla $t=t_2$ ve $t=t_3$ noktasında $a_i (i=1,2,3,4)$ başlangıç koşullarından $g_i (i=1,2,3,4)$ genel lineer olmayan sınır koşullarına erişebilmeyi gösteren matrisler olduğu Denk.(3.3.1) 'den doğrudan doğruya açık bir şekilde görülmektedir. Denk.(3.1.4) ve Denk.(3.3.1) kullanarak birinci mertebeden lineer olmayan adı diferansiyel denklemler tarafından genel lineer olmayan sınır koşullarına erişebilme matrisi olarak tanımlendirilen (3.3.2) erişibilme matrisi ile

$$\bar{R} = B_1 + (B_2 + B_3) \hat{R} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 3.3.2$$

$n \times n$ $\bar{R}$ Boolean matrisini tanımlayalım. Analitik bakış açısından B_1 , $B_2 \hat{R}$ ve $B_3 \hat{R}$ işlemleri t_1 , t_2 ve t_3 noktalarında 3.2.2 çözümlerinin Denk.(3.2.3) genel lineer olmayan sınır koşullarının içerisine yerleştirildikleri görülür. Denk.(3.1.4) ve Denk.(3.2.2)' den başlangıç koşullarının fonksiyonları olarak biçimsel olarak tekrar yazılarak aşağıdaki genel lineer olmayan sınır koşulları elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(a_1) &= 0, & \bar{g}_2(a_1, a_3) &= 0 \\ \bar{g}_3(a_1, a_2, a_3, a_4) &= 0, & \bar{g}_4(a_2, a_3, a_4) &= 0 \end{aligned} \quad 3.3.3$$

Denk.(3.3.3)' e karşı gelen Boolean matrisinin Denk.(3.3.2) ile verilen $\bar{R}$ erişebilme matrisine eşdeğer olduğu kolayca görülmektedir. Bu gözlemler Teorem(3.3.1) de ifade edilerek genelleştirilir.

Teorem 3.3.1 : R (veya $\hat{R}$) Denk.(3.1.1) n tane birinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin erişebilme matrisi ve $B = [B_1 | B_2 | \dots | B_m]$ Denk.(3.1.2) için $n \times n.m$ sınır matrisi olsun. Buradaki Denk.(3.1.1) için a_1 başlangıç koşullarının Denk.(3.1.2) için genel lineer olmayan sınır koşullarına erişebildiklerini gösteren tek $n \times n$ lik erişibilme matrisi Denk.(3.3.4) ile verilmektedir.

$$\bar{R} = B_1 + \left(\sum_{j=2}^m B_j \right) \hat{R} \quad 3.3.4$$

Böylece Denk.(3.1.3) ve Denk.(3.1.4) ile verilen lineer olmayan çok noktalı sınır değer problemlerini Denk.(3.3.3) cebirsel

denklemlerinden oluşmuş sistemin a_1 kökünün bulunmasına indirgemiş oluyoruz.

Denk.(3.3.3)' den denemeyle $\bar{g}_1$ denklemi sadece a_3 başlangıç koşulunu kapsadığı ve bunun biçimsel olarak a_3 için $\bar{g}_1$ nin çözülmesinde geriye kalan denklemlerden bağımsız olarak çözümün mümkün olduğu kolayca görülür. a_3 ün bilinmesinden sonra $a_1, \bar{g}_2$ den çözülebilir. Benzer olarak a_1 ve a_3 ün bilinmesinden sonra madem ki geriye kalan iki denklem a_2 ve a_4 leri kapsadığından a_2 ve a_4 başlangıç koşulları $\bar{g}_2$ ve $\bar{g}_4$ nin aynı zamanda çözülmesi ile elde edilir. Bir sonuç olarak tüm başlangıç koşulları Denk.(3.3.3)' den çözülebilir. Bu ise, $\bar{R}$ erişebilme matrisi içindeki her bir g_i satırı ve herbir a_j sütununun en son olarak sıfır olmayan bir eleman olmak zorunda olduklarını gösterir. Denk.(3.3.2) tarafından verilen $\bar{R}$ matrisi böylece herbir satır ve herbir sütunda sıfır olmayan elemanlara sahiptir.

Teorem 3.3.2 : (Varoluş için global gerekli koşul)

(varoluş koşulu) $\bar{R}$ Denk.(3.1.1)'den Denk.(3.1.2)'ye $n \times n$ boyutlu erişebilme matrisi olsun. Eğer lineer olmayan çok noktalı sınır değer problemi ile çözüme sahip ise Denk.(3.3.4) ile tanımlanan $\bar{R}$ matriside dolu n rankına sahiptir.

Başlangıç Koşullarının Araştırılması İçin Kullanılan Algoritma :

Eğer lineer olmayan çok noktalı sınır değer probleminde global gerekli koşul saptanmıyor ise bir çözüm denenmesine gerek yoktur. Bu teorem (3.1.4) ü gerekli koşulun araştırılmasında çok etkilidir. Bunun için kullanılan algoritma aşağıdaki gibi özetlenmiştir.

Adım 1 Denk.(3.1.1) birinci mertebeden lineer olmayan adi di -

feransiyel denklem sistemleri ve genel lineer olmayan sınır koşullarından E matris denklemi ve B sınır matrisi sırası ile oluşturulur.

Adım 2 Denk. (3.1.6)' dan E denklem matrisine karşı gelen R erişebilme matrisi belirlenir.

Adım 3 B nin B_i ($i=1,2,...,m$) alt matrisleri kullanılarak Denk(3.3.4) bulunur. Ve başlangıç koşullarından genel lineer olmayan sınır koşullarına bağlayan $\bar{R}$ erişebilme matrisi elde edilir.

Adım 4 $\bar{R}$ matrisinin rangı araştırılır. Lineer olmayan çok noktalı sınır değer probleminde varoluş gereklilik koşulu sağlandığı zaman çok büyük lineer olmayan çok noktalı sınır değer probleminin minimum alt aralıklara haiz çok noktalı sınır alt problemine parçalanarak çözülebilir.

BÖLÜM IV

4.1 Ayırık Denklem İçin Çok Noktalı Sınır Değer Problemleri

Lineer Sistemler

$$\sum_{i=0}^N L_i y(t_i) = \ell \quad 4.1.1$$

sınır koşulları ile birlikte $A(t)$, elemanları $a_{ij}(t)$ olan $n \times n$ lik bir matris, $1 \leq i, j \leq n$; $y(t)$ bileşenleri $y_i(t)$ $1 \leq i \leq n$ olan $n \times 1$ lik vektör, $f(t)$ bileşenleri $f_i(t)$ olan $n \times 1$ lik vektör, $1 \leq i \leq n$; I_{∞} , $\{0, 1, 2, \dots\}$ ayırık noktaların kümesi ; L_i , $0 \leq i \leq N$ elemanları C_{pq}^d olan $1 \leq p, q \leq n$ verilen $n \times n$ matrisleri; ℓ bileşenleri ℓ_i olan $n \times 1$ vektörü $1 \leq i \leq n$; t_i , $t_0=0$ da $t_i < t_{i+1}$ şeklinde sıralanmış olmak üzere değişken katsayılı n lineer fark denkleminin

$$y(t+1) = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in I_{\infty} \quad 4.1.2$$

kümesi gözönüne alınsın.

$A(t)$ ve $f(t)$ fonsiyonu $t \in I_{\infty}$ için tanımlanmış oldukları varsayıldığında, $Y(t)$ yide $Y(0) = E$ (birim matris) olacak şekilde

$$y(t+1) = A(t)y(t), \quad t \in I_{\infty} \quad 4.1.3$$

homogen fark sisteminin temel matris çözümü olarak gösterilsin. G matrisi,

$$G = \sum_{i=0}^N L_i Y(t_i) \quad 4.1.4$$

olarak tanımlansın.

Teorem 4.1.1 : G matrisi tekil olmadığında Denk. (4.1.1) ve Denk.(4.1.2)' nin keyfi bir f vektörü için tek bir çözümü vardır ve, bu

$$y(t) = Y(t) G^{-1} f + \sum_{s=0}^{t_k-1} H(t,s) f(s) \quad 4.1.5$$

denklemleri ile gösterilmiştir. Bu denklemlerde

$$\begin{aligned} H(t,s) &= Y(t) [E - G^{-1} \sum_{i=k}^N L_i Y(t_i)] Y(s+1)^{-1}, & t_{k-1} \leq s \leq t \leq t_k-1 \\ &= -Y(t) G^{-1} \sum_{i=k}^N L_i Y(t_i) Y(s+1)^{-1}, & t_{k-1} \leq t \leq s \leq t_k-1 \end{aligned} \quad 4.1.6$$

denklemleri olacak şekilde $H(t,s)$ Green matrisidir.

Görüş 1 $Y(t)$ temel matris $\prod_{s=1}^0 A(s) = E$, olmak üzere

$Y(t) = \prod_{s=1}^0 A(s)$ gösterilimine sahiptir.

G matrisi $n-m$ ($1 \leq m \leq n$) rangına sahip olduğu zamanki durumu gözönüne alacağız.

Lemma 4.1.2 : A , $n \times n$ matrisi ve x ve b nin her ikisinde n boyutlu vektörler olmak üzere

$$Ax=b \quad 4.1.7$$

lineer cebirsel denklemlerinin verilen bir sistemi, A nın rangının $n-m$ ($1 \leq m \leq n$) olduğu varsayılıyor. lineer cebirsel Denk.(4.1.7)'yi Δ ,

$$d_a A=0 \quad 4.1.9$$

sağlayan, $1 \leq a \leq m$, satır vektörleri d_a olan lineer bağımsız vektörleri, $m \times n$ lik bir matris olmak üzere yalnız ve yalnız Denk.(4.1.8)'in ise bir çözümü vardır.

$$\Delta b=0 \quad 4.1.8$$

Denk.(4.1.8) durumu sabit tutulursa Denk.(4.1.7)' nin herhangi bir çözümü k_a , $1 \leq a \leq m$ keyfi sabitleri, C_a , $1 \leq a \leq m$ arasında

$$AC_a=0 \quad 4.1.10$$

denklemlerini sağlayan m tane lineer bağımsız sütun vektörü ve s

$$\Delta p=0 \quad 4.1.11$$

i sağlayan herhangi bir p sütun vektörü için

$$A s p=p \quad 4.1.12$$

olacak şekilde b den bağımsız $n \times n$ matrisi olmak üzere

$$x = \sum_{a=1}^m k_a C_a + s b \quad 4.1.13$$

verilebilir.

Teorem 4.1.3 : G matrisinin rangı $n-m$ ($1 \leq m \leq n$) olsun. Burada Denk.(4.1.1) ve Denk.(4.1.2) Δ kendi satır vektörleri

$$d_a G=0$$

sağlayan d_a , $1 \leq a \leq m$ lineer bağımsız vektörleri olan bir $m \times n$ matrisi olmak üzere

$$\Delta f - \Delta \sum_{i=0}^N L_i Y(t_i) \sum_{s=0}^{t_i-1} Y(s+1)^{-1} f(s) = 0 \quad 4.1.14$$

olursa yukarıdaki bağıntı f için geçerlidir ve Denk.(4.1.1) ve Denk.(4.1.2)' den herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu k_a , ($1 \leq a \leq m$) keyfi sabitler $u_a(t)$, $1 \leq a \leq m$ arasında

$$\sum_{i=0}^N L_i u_a(t_i) = 0$$

sınır koşullarını sağlayan

$$y(t+1) = A(t)y(t), \dots \quad t \in I_{\infty}$$

denkleminin m lineer bağımsız çözümleri s , $\Delta p=0$ ' ı sağlayan n boyutlu p vektörü için

$$Gsp=p$$

olacak şekilde $f(t)$ ve ℓ den bağımsız bir matris ve $H(t,s)$,
 $t_{k-1} \leq s \leq t \leq t_k - 1$, $1 \leq k \leq N$ için

$$\begin{aligned} H(t,s) &= Y(t) \left[E - s \sum_{i=k}^N L_i Y(t_i) \right] Y(s+1)^{-1}, & t_k \leq s \leq t \leq t_k - 1 \\ &= -Y(t) s \sum_{i=k}^N L_i Y(t_i) Y(s+1)^{-1}, & t_{k-1} \leq t \leq s \leq t_k - 1 \end{aligned}$$

olacak şekilde Green matrisi olmak üzere

$$y(t) = \sum_{a=1}^m k_a u_a(t) + Y(t) s \ell + \sum_{s=0}^{t_k-1} H(t,s) f(s)$$

denklemleri verilebilir.

Lineer Olmayan Sistemler

$$\sum_{i=0}^N L_i y(t_i) = \ell \quad 4.1.1$$

sınır koşulları ile birlikte

$$y(t+1) = f(t, y(t)), \quad t \in I_- \quad 4.1.2$$

lineer olmayan n tane fark denklemlerinin kümesi alınsın. $f(t, y(t))$,
 $(t, y) \in [t_0, t_N] \times \mathbb{R}^n$ kendi argümentleri içinde sürekli oldukları var-
sayılan $f_i(t, y(t))$, $1 \leq i \leq n$ bileşenlerine haiz $n \times 1$ lik bir vektördür.
 n -vektör değerlikli fonksiyonların kümesini,

$$\|y\| = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I_{\infty}} \{ |y_i(t)| \}$$

$$0 \leq t \leq t_N$$

normunu haiz tüm $t \in I_{\infty}$ için tanımlanan B ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.4 : $A(t)$,

$$y(t+1) = A(t)y(t)$$

nin $Y(t)$ temel çözümü var olacak şekilde $n \times n$ matrisi ve

$$G = \sum_{i=0}^N L_i Y(t_i)$$

şeklinde tanımlanmış G matrisi tekil olmasın ve K verilen pozitif sabit ve

$$\|f(t,y) - A(t)y\| \leq Q$$

$$\{(t,y) : t \in I_{\infty}, 0 \leq t \leq t_N, \|y\| \leq 2K\}$$

$$\|H\| = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I_{\infty}} \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{t_N-1} |H_{ij}(t,s)|$$

$$0 \leq t \leq t_N$$

olmak üzere

$$\|Y(t)G^{-1}I\| \leq K$$

$$Q\|H\| \leq K$$

yı sağlayan Denk.(4.1.1) ve Denk.(4.1.2)'nin çözümüdür.

BÖLÜM V

5.1 Çok Noktalı Sınır Değer Problemlerine İnvariant İmbedding

Yönteminin Uygulanması

İnvariant imbedding yöntemi, birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler ile onların karakteristik adi diferansiyel denklemleri arasındaki bağıntılara dayanır. m tane kısmi türevli denklemlerden oluşan

$$\sum_{j=1}^n (\partial u_i / \partial v_j) G_j(u, v) = F_i(u, v), i=1, \dots, m \quad 5.1.1$$

sistemi ile onların karakteristik adi diferansiyel denklemleri arasındaki bağıntılar verilebilir. Denk.(5.1.1) sisteminde

$$u=(u_1, \dots, u_m)^T, v=(v_1, \dots, v_n)^T, G=(G_1, \dots, G_n)^T \text{ ve} \\ F=(F_1, \dots, F_m)^T \text{ dir.}$$

Denk.(5.1.1) sistemi

$$u_v(v) = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial v_1 & \partial u_1 / \partial v_n \\ \partial u_m / \partial v_1 & \partial u_m / \partial v_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$u_v(v).G(u, v) = F(u, v)$$

şeklinde yazılabilir.

Vektörel değerli $u=w(v)$ fonksiyonu Denk.(5.1.1) sisteminin bir çözümü olduğunda; r serbest bir parametre olmak üzere

$$du_i / dr = F_i(u, v), i=1, \dots, m$$

5.1.2

şeklinde tanımlanan doğrultu alanı $u=w(v)$ in her noktasında $w_i(v)$ integral eğrilerine teğettir.

Denk.(5.1.1) sisteminin çözümüne "integral yüzeyi" denir. $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ için Denk.(5.1.2) diferansiyel denklemlerine Denk.(5.1.1) sistemine karşılık gelen karakteristik denklemler denir. Karakteristik denklemlerin $\{u(r), v(r)\}$ çözümünde "karakteristik eğri" veya kısaca "karakteristik" denir. Denk.(5.1.2) karakteristik denklemlerin $u(r)$ ve $v(r)$ kısmi çözümlerinde sırasıyla "temel karakteristik eğri" ve "karakteristik yüzey eğrisi" de denir.

Integral yüzeyinin bir noktasından geçen karakteristik eğri o noktada yüzeye teğettir.

Invariant imbedding denklemlerinin karakteristikler kuramından yararlanılarak, elde edilişlerinde anlatım kolaylığı için iki noktalı sınır değer problemi ele alınırsa,

$$u'(t) = F(t, u, v), u(0) = a \quad 5.1.3$$

$$v'(t) = G(t, u, v), v(L) = b$$

bağıntıları $(m+n)$ -boyutlu adi diferansiyel denklem sistemi için iki-nokta sınır değer problemi olarak ifade edilebilir.

Burada $a=(a_1,...,a_m)^T$ ve $b=(b_1,...,b_n)^T$ verilen vektörlerdir. Ayrıca F ve G fonksiyonları $[0,L]$ de t 'ye göre süreklidir ve u ve v 'ye göre sürekli olarak türetilbildikleri varsayılacaktır.

Bu sınır değer problemi

$$u'(t) = F(t, u, v), u(0) = a \quad 5.1.4$$

$$v'(t) = G(t, u, v), v(0) = s$$

başlangıç değer problemi ailesine dönüştürülecektir.

Burada $s=(s_1, \dots, s_n)^T$ n-boyutlu parametredir.

Buradaki amaç Denk.(5.1.4) başlangıç değer problemini çözmek değildir. Fakat s parametresine E^n üzerinde gerçek başlangıç değerini araştırır gibi değerler verilirse, s'in bu değerleriyle elde edilecek olan $\{u(t,s), v(t,s)\}$ çözümleri karakteristik eğriler gibi düşünüldüğünde bu eğriler

$$u_t + u_v(t,v)G(t,u,v) = F(t,u,v), \quad u(0,v) = a \quad 5.1.5$$

Couchy probleminin $u(t,v)$ integral yüzeyini oluştururlar.

m tane kısmi türevli birinci mertebeden denklemden oluşan

$$u_t + u_v(t,v)G(t,u,v) = F(t,u,v), \quad u(0,v) = a$$

sistemine

$$u'(t) = F(t,u,v), \quad u(0) = a$$

$$v'(t) = G(t,u,v), \quad v(L) = b$$

sınır değer problemiyle ilgili "invariant imbedding denklemi" denir.

Sınır değer problemlerine yukarıdaki gibi bir yaklaşım daha karmaşık sınır koşulları içinde genişletilebilir.

Örneğin daha karmaşık sınır koşulları ile verilen, aşağıdaki iki-nokta sınır değer problemini ele alalım;

$$u'(t) = F(t,u,v), \quad u(0) = f(v(0)) \quad 5.1.6$$

$$v'(t) = G(t,u,v), \quad g(u(L), v(L)) = 0$$

Bu sınır değer probleminin çözümü,

$$u'(t) = F(t,u,v), \quad u(0) = f(s) \quad 5.1.6$$

$$v'(t) = G(t,u,v), \quad v(0) = s$$

başlangıç değer probleminin çözümüne dönüştürülür.

Denk.(5.1.6) nın çözümü aynı zamanda bir Denk.5.1.7 bağıntısında

başlangıç değer probleminin çözümünde olur.

$$u_t(t,v) + u_v(t,v)G(t,u,v) = F(t,u,v)$$

$$u(0,v) = F(v) \quad 5.1.7$$

Blasius Denklemi :

$$v''' + v''v = 0 \quad 5.2.1$$

denklemin Blasius Denklemi denir.

$$v(0) = v'(0) = 0 \quad v'(\infty) = 1.0 \quad 5.2.2$$

$v'(\infty) = 1.0$ sınır değeri $R < \infty$ için $v'(R) = 1.0$ ile yer değiştirilir. v' hızının üç değişik konumda gözlemlendiği varsayıldığında, Denk.(5.2.1) ve Denk.(5.2.2)'nin çözümü için

$$v'(0) = 0, \quad v'(1) = 0.425, \quad v'(2) = 0.8 \quad 5.2.3$$

sınır koşulları kullanılır.

$v''' + v''v = 0$ denklemin invariant imbedding'i uygulamak için bu denklem birinci mertebeden sisteme dönüştürülür. Bunun için $v'(t) = u(t)$ yi yüzey karakteristiği belirlenir.

$$u' = w \quad u(0) = 0$$

$$w' = -vw \quad u(1) = 0.425$$

$$v' = u \quad u(2) = 0.8$$

formülasyonundan $[0,1]$ üzerinde

$$\partial u / \partial t + (\partial u / \partial v)u - (\partial u / \partial w)vw = w, \quad u(0,v,w) = 0 \quad 5.2.4$$

invariant imbedding denklemini elde edilir.

Denk.(5.2.4) , $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq v \leq V$, $0 \leq w \leq W$

küpü üzerinde düzgün ağ yerleştirilerek ve Denk.(5.2.4)'e

$$\frac{1}{\Delta t} [u_{n,i,j} - u_{n-1,i,j}] + \left(\frac{1}{\Delta v}\right) [u_{n,i,j} - u_{n,i-1,j}] u_{n,i,j} - v_i w_i / \Delta w \\ \times [u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1}] = w_j$$

yaklaşarak ve küp üzerinde bağlantı kurulur. Burada $u_{n,i,j} \approx u(n\Delta t, i\Delta v, j\Delta w)$ dir. $v_i = 0$ ve $w_j = 0$ sınır noktaları için Denk.(5.2.4)'e benzeyen bir açıklık kullanılır. Yukarıda ki denklem $u_{n,i,j}$ de 2.derecedendir ve açık olarak şöyle çözülebilir.

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\right) [u_{n,i,j} - u_{n-1,i,j}] + \left(\frac{1}{\Delta v}\right) [u_{n,i,j} - u_{n,i-1,j}] u_{n,i,j} - v_i w_i / \Delta w \\ \times [u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1}] = w_j$$

$$\frac{1}{\Delta v} u_{n,i,j}^2 + \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{u_{n,i-1,j}}{\Delta t} \right] u_{n,i,j} - \frac{v_i w_j}{\Delta w} [u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1}] \\ - w_j - \frac{u_{n-1,i,j}}{\Delta t} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta v} = A, \quad \frac{1}{\Delta t} - \frac{u_{n,i-1,j}}{\Delta v} = B$$

$$-\frac{v_i w_i}{\Delta w} [u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1}] - w_j - \frac{u_{n-1,i,j}}{\Delta t} = C$$

ile gösterirsek

$$A u_{n,i,j}^2 + B u_{n,i,j} + C = 0 \quad u_{n,i,j} \text{ çözülebilir.}$$

$$y'' + 2y'' - 3y' = 1$$

$$y(0) = 1, \quad y(1/2) = 0, \quad y(1) = -1$$

üç noktalı sınır değer probleminin invariant imbedding yöntemi ile çözümü

$$v''' + 2v'' - 3v' = 1$$

denkleminin invariant imbedding'i uygulamak için bu denklem birinci mertebeden sisteme dönüştürülür. Bunun için

$$v' = u$$

$$v'' = u' = w$$

$$v''' = u'' = w'$$

dönüşümünden

$$w' + 2w - 3u = 1$$

$$w' = 1 - 2w + 3u$$

bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = F(t, u, v), \quad u(0, v) = a$$

invariant imbedding denkleminde bulunan değerler yerine yazılarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v} u + \frac{\partial u}{\partial w} (1 - 2w + 3u) = w, \quad u(0, v, w) = 1$$

$$\frac{1}{\Delta t} (u_{n,i,j} - u_{n-1,i,j}) + \frac{1}{\Delta t} (u_{n,i,j} - u_{n-1,i,j}) u_{n,i,j}$$

$$+ \frac{1}{\Delta w} (1 - 2w_i + 3u_{n,i,j}) \cdot (u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1}) = w_j$$

$$\frac{1}{\Delta v} u_{n,i,j}^2 + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{u_{n,i-1,j}}{\Delta v} \right) u_{n,i,j} + \frac{1}{\Delta w} (1 - 2w_j + 3u_{n,i,j}) \cdot (u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1})$$

$$-w_j - \frac{1}{\Delta t} u_{n-1,i,j} = 0$$

$$A = \frac{1}{\Delta v} \quad \frac{1}{\Delta t} - \frac{u_{n,i-1,j}}{\Delta v} = B$$

$$C = \frac{1}{\Delta w} (1 - 2w_j + 3u_{n,i,j}) \cdot (u_{n-1,i,j} - u_{n-1,i,j-1}) - w_j - \frac{1}{\Delta t} u_{n-1,i,j}$$

$$A u_{n,i,j}^2 + B u_{n,i,j} + C = 0 \quad \text{çözülerek,}$$

Invariant imbedding yöntemi ile elde edilen çözüm ve tam çözüm aşağıdaki tabloda verilmiştir.

TABLO

X	Tam Çözüm	Invariant Imbedding
0.0	1.00000000	1.00000000
0.1	0.76653047	0.76653120
0.2	0.55810810	0.55810929
0.3	0.36541997	0.36542142
0.4	0.18127019	0.18127173
0.5	0.17763568 X 10 ⁻¹³	0.15094280 X 10 ⁻⁶
0.6	-0.18294510	-0.18294372
0.7	-0.37133966	-0.37133852
0.8	-0.56842260	-0.56842176
0.9	-0.77708252	-0.77708207
1.0	-1.00000000	-1.00000000

SONUÇ

Sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılmakta olan yöntemler iki ana grupta toplanabilirler. Bunlardan birincisi başlangıç değer yöntemleri, ikincisi ise sonlu fark yöntemi diye bilinmektedir. Sonlu fark yönteminin pek pratik olmaması yeterli bir çözüm için gerekli olan matrisin boyutunun çok kere büyük olması hem de sonuçlarda hataların büyümesi sonlu farklar yerine başlangıç değer yönteminin kullanılmasını daha uygun kılmaktadır.

Bu çalışmada kullanılan invariant imbedding yöntemi başlangıç değer yöntemleri arasındadır.

Invariant imbedding yönteminin formülasyonundaki avantaj başlangıç değer problemi ile sonuçlanması ve başlangıç değer probleminin çözümünün daha az süre ve basit algoritmalarla yapılabilmesidir. Buradaki sakınca ise çok noktalı sınır değer problemi ve verilerine göre karşılaşılan koşulların karmaşıklığı nedeniyle başlangıç değer problemine dönüştürme sırasında işlemlerin belli bir algoritma ile saptanamamasıdır.

KAYNAKLAR

- 1- AGARWAL, RAVI P.
On Multipoint Boundary Value Problems for Discrete Equations.
J.Math. Anal. Appl., 1983, 96, no.2, 520-534.
- 2 - AGARWAL, RAVI P.
Quasilinearization and Approximate Quasilinearization for Multipoint Boundary Value Problems.
J. Math. Anal. Appl., 1985, 107. 317-330
- 3- ALSPAUGH, DALE W.
Application of Invariant Imbedding to Linear Multipoint Boundary Value Problems with General Boundary Conditions.
Appl. Math. Comput., 1979, 5, no.3, 213-232
- 4- BAILEY, P. and WING, G.
Some recent developments in Invariant Imbedding with Applications
J. Math. Phys., 1965, no. 6, 453 - 462
- 5- BALKANAY E.
İki Nokta Sınır Değer Problemlerinin Sayısal çözümleri için
Invariant Imbedding Yöntemi ve Quasi Linearization Tekniği ile
Invariant Imbedding Yönteminin Birleştirilmesi.
Doçentlik Tezi, 1979
- 6- BARR D. and SHERMAN T.
Existence and Uniqueness of Solutions of Three-Point Boundary Value Problems.
J. Differential Equations 13,197-212 (1973)
- 7- CASTI J., KALABA R.
Imbedding Methods in Applied Mathematics
1973. Addison - Wesley Publishing Comp.
- 8- CHARLES J. AMICK.
An Existence Theorem for a Certain Class of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems.
- 9- COLLATZ L.
The Numerical Treatment of Differential Equations.
Springer-Verlag
Berlin Herdelberg. New York 1966

- 10- ÇAĞAL B.
Sayısal Analiz.
İstanbul-1989
- 11- ELOE, P. W. and GRIMM L. J.
Differential Systems and Multipoint Boundary Value Problems.
Z. Angew. Math. Mech., 1982, 62, no. 11, 630-632
- 12- GOLBERG, M.
A Generalized Invariant Imbedding Equations.
J. Math. Anal. Appl., 1971, 34, 590 - 601
- 13- GREENSPAN D., CASULLI V.
Numerical Analysis For Applied Mathematics science, and Engineering.
1988 Addison-Wesley Publishing Company
- 14- GREGUS M., NEUMAN F. and ARSCOTT F. M.
Three-Point Boundary Value Problems in Differential Equations.
J. London Math. Soc. (2), 3 (1971), 429-436
- 15- HENDERSON J. and JACKSON L.
Existence and Uniqueness of Solutions of k-point Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.
J. Differential Equations, 48, 373-385 (1983)
- 16- MEYER, GUNTER H.
Initial Value Methods for Boundary Value Problems.
Academic Press, 1973, New York and London
- 17- MOHAN K. KADALBAJOO and K. SANTHANA RAMAN
Cubic Spline and Invariant Imbedding for Solving Singular Two - point Boundary Value Problems.
J. Math. Anal. Appl., 1985, 112 , 22 - 35
- 18- OJİKA, TAKEO
Structure Analyses For Large Scale Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems.
J. Math. Anal. Appl., 1983, 92, no.1, 139-162
- 19- OJİKA, TAKEO
Modified Deflation Algorithm for the Solution of Singular Problems.
II. Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems.
J. Math. Anal. Appl. , 1987, 123, 222 - 237

0- RACHUNKOVA I.

$2n$ - Point Problems for Differential Equations of the n th Order.
J. Math. Anal. Appl., 1990, 145, 100 - 111

1- RAO D.R.K.S., MURTY K.N. and RAO A.S.

Existence and Uniqueness Theorems for Four Point Boundary Value
Problems for Fourth Order Differential Equations.
Indian J. pure Appl. Math. 13(9) : 1006-1010, September 1982

2- ROBERTS, S.M.

Reduction and the Kagiwada-Kalaba Method of Invariant Imbedding.
J. Math. Anal. Appl. 1979, 72, no.2, 615-628

3- SCHEID F.

Numerical Analysis
Schaum's outline Series. 1968, 422 S.

4- SCOTT, M.R.

Invariant Imbedding and its Applications to Ordinary Differential
Equations. 1973 Addison-Wesley Pub. Comp.

5- SCHWANK F.

Sınır Değer Problemleri
Çeviren: S. Sacit Tameroğlu
İ.T.Ü. İstanbul-1963

ÖZGEÇMİŞ

1953 yılında Uşak'ta doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Uşak'ta tamamladım. 1974-1975 Yaz döneminde Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümünden iyi derece ile mezun oldum. 1977 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Yüksek Lisans öğreniminde Pekiyi derece ile tamamladım. Uşak Banaz Lisesi, Uşak Lisesi ve Uşak Eğitim Enstitüsünde Matematik Öğretmenliği yaptım. 1982 yılında Asistan olarak göreve başladığım Yıldız Teknik Üniversitesinde halen Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evliyim ve bir kızım var.

TEŞEKKÜR

Tezimi yöneten, çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen ve daima yol gösterici olan sayın Hocam Prof. Dr. Behiç ÇAĞAL'a teşekkür ederim.

İffet TAYLAN