

28422

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

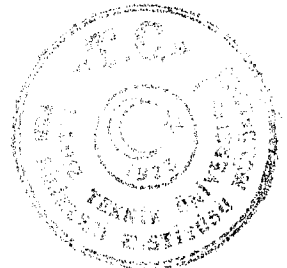
ÖRGÜ GRUBU İLE İLGİLİ CEBİRSEL YAPILAR
VE
BUNLARIN TEMSİLLERİ

DOKTORA TEZİ

Araş.Gör. Fügen (Torunbalcı) AYDIN

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İSTANBUL 1993



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖRGÜ GRUBU İLE İLGİLİ CEBİRSEL YAPILAR
VE
BUNLARIN TEMSİLLERİ

DOKTORA TEZİ

Araş.Gör. Fügen (Torunbalcı) AYDIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Tezin Savunulduğu Tarih :

Tez Danışmanı :

Diğer Jüri Üyeleri:

İSTANBUL 1993



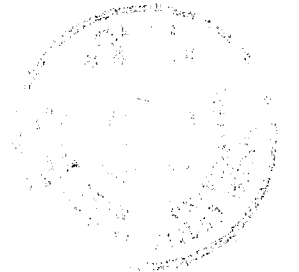
Ö N S Ö Z

Doktora tez çalışmalarım esnasında beni destekleyen ve yönlendiren danışman hocam Yard.Doç.Dr. Alemdar DEMİREL'e ve tezimi hazırlamamda büyük fedakarlık ve özveri göstererek engin bilgisiyle bana sürekli yardımcı olan değerli hocam Prof.Dr. Metin ARIK'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bana manevi destek sağlayan değerli eşim İbrahim AYDIN'a da ayrıca teşekkür ederim.

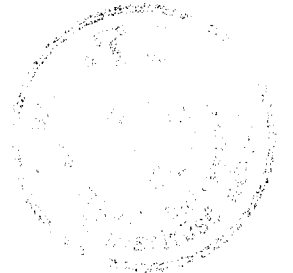
Fügen AYDIN

Mayıs, 1993



İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
SUMMARY	III
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. ÖRGÜLERİN MATEMATİKSEL YAPISI	
2.1. Örgülerin Oluşumu ve Artin Örgü Grubu	3
2.2. Düğümler ve Halkalar	9
2.3. Hecke Cebiri	12
2.4. Burau Temsili	15
BÖLÜM 3. MATRİS PSÖDOGRUPLAR VE ÖRGÜLER	
3.1. Örgü Grubuyla İlgili Yeni Bir Cebirin Bir Temsili	19
3.2. Üniter Kuantum Grupları Ve Osilatörler İle İlgili Tanımlar	32
3.3. Üniter Kuantum Grupları ve q-Osilatörleri...	35
3.4. Üniter Kuantum Grubu Kosetleri ve q-Osilatörleri	39
3.5. Kuantum Grassmann Manifoldları ve Kosetleri	45
3.6. Kuantum Grassmann Manifoldlarının Hecke Cebiri İle İlgisi	51
3.7. Kuantum Gruplarının ve Kuantum Grup Kosetlerinin Örgüler, Düğümler ve Halkalarla İlgisi	52
SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	60

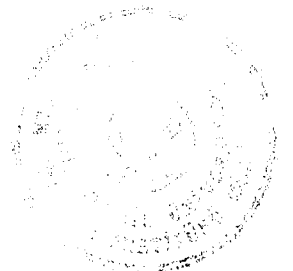


Ö Z E T

Bu tezde, örgü grubuyla ilgili bazı yeni cebirsel yapıları inceledik. Bu yapılardan ilki, Artin örgü grubunun, elemanları bir $*$ -cebrine ait olan matrislerle temsilidir. Bu temsil Burau temsiline benzer, fakat değişmeli olmayan matris elemanları, örgü grubu bağıntısının sağlanması için, belli bir takım değişme tipi bağıntıları gerçekleştirmelidirler. Bu elemanların ait olduğu $*$ -cebrinin bir Hilbert uzayı üzerinde Lineer operatörler olarak temsilini bulduk. Bu çözüme olanak sağlayan kabul, örgü grubunun üreteçlerinin temsil - lerinin köşegen olmayan elemanlarının genelleştirilmiş bir osilatör cebri yaratma ve yoketme operatörleriyle özdeşleştirilmesidir.

İncelediğimiz ikinci yeni cebirsel yapı, $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ Grassmann manifoldudur. Örgü grubu bağıntısının ve Hecke cebri yapısının bu Kuantum grup kosetiyle yakından ilgili olduğunu gösterdik ve bu kosetin, elemanları $m.n$ q -osilatörü cinsinden verilen operatörler olan açık matris temsillerini bulduk.

Son olarak, üniter kuantum gruplarıyla ve kuantum Grassmann manifoldlarıyla ilgili örgü, düğüm ve halkaları inceledik.

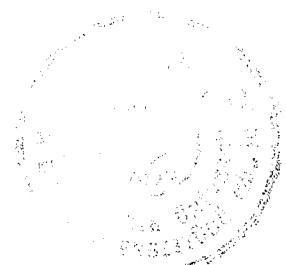


ALGEBRAIC STRUCTURES ASSOCIATED WITH THE BRAID GROUP AND THEIR REPRESENTATIONS

SUMMARY

In this thesis some new algebraic structures associated with the braid group are investigated. One of these structures is the representation of the Artin braid group in terms of matrices with matrix elements belonging to a $*$ -algebra. This representation is similar to the Burau representation except the fact that the noncommuting matrix elements have to satisfy commutation-like relations so that the braid group relation is satisfied. We find a representation of this $*$ -algebra as linear operators on a Hilbert space. The main point of our ausatz which gives rise to this solution is the identification of the nondiagonal elements of the representations of braid group, generators with the creation and annihilation operators of an oscillator algebra.

The second new algebraic structure we investigate is the quantum Grassmannian manifold $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$. We show that the braid group relation and Hecke algebra structure are intimately related to this quantum group coset and we find explicit matrix representations of this coset in terms of matrices whose elements are operators given in terms of $m.n$ q -oscillators. Finally we investigate the braids, knots and links associated with the unitary quantum groups and quantum Grassmannian manifolds.



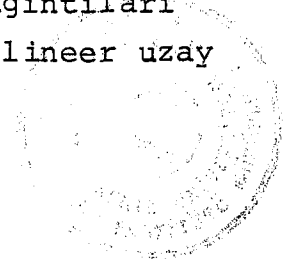
BÖLÜM - I

G İ R İ Ş

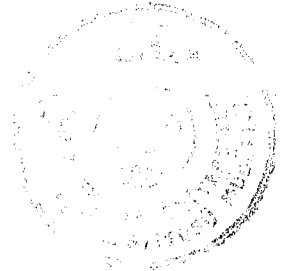
Son senelerde düğümler için cebirsel metodlar kullanılarak bulunan Jones polinomu [1], Homefly [2] ve Kauffman polinomu [3] düğümlerle yakından ilgili olan örgülerin oluşturduğu örgü grubu ile ilgili cebirsel yapıların önemini göstermiştir. Öte yandan kuantum grupları konusunda olan gelişme [4] ve bunların örgü grupları ile ilgisi de [5] oldukça ilgi çekmiştir.

Tarihsel olarak örgü grubu derinlemesine Artin [6] tarafından incelenmiştir. Örgü grubuyla ilgili olan kullana - cağımız özellikleri Kısım 2.1 de vereceğiz. Kısım 2.2 de ise örgülerin kapanmasıyla elde edilen düğümler ve halkaları inceleyeceğiz. Örgü grubu üzerine tanımlama Markov iz alma işlemi, kapanınca aynı düğüm ve halkaya yol açan örgü grubu elemanlarının aynı izi vermesini sağlar. Kısım 2.3 de inceleyeceğimiz Hecke cebirinin jeneratörlerinin sağladıkları bağıntıya ek olarak başka bir bağıntı daha sağlarlar. Hecke cebirinin Jones polinomuyla yakın bir ilişkisi vardır. Kısım 2.4 te ise n tane sicimin oluşturduğu örgü grubunun elemanlarının $n \times n$ reel veya kompleks matrislerle temsilini vereceğiz. Bu temsil Burau temsili [7] adıyla anılır.

Üçüncü bölümde örgü grubuyla ilgili yeni cebirsel yapıları inceleyeceğiz. Bununla ilgili olarak Kısım 3.1 de Burau temsiline benzer bir şekilde örgü grubunun her elemanının $n \times n$ bir matrisle temsil edilebileceğini gösterdik ve bu matrisin elemanlarını komütatif olmayan bir cebirin elemanları olarak aldık. Bu elemanların sağlaması gereken bağıntıları ve bu bağıntıları sağlayan ve sonsuz boyutlu bir lineer uzay



üzerine etkiyen operatörler bulduk. Kısım 3.2 de Üniter kuantum grupları, koset uzayları ve Osilatörler ile ilgili tanımları verdik. Kısım 3.3 de $SU_q(n)$ üniter kuantum gruplarının q -osilatörleri [8] ile ilişkisini, Kısım 3.4 te ise $SU_q(n)/U_q(n-1)$ kuantum kosetlerinin q -osilatörleri ile ilişkisini gözden geçirdik [9] . Bu bilgileri Kısım 3.5 te kuantum Grassmann manifoldlarının $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ şeklindeki koset uzaylarını inşa etmekte kullandık. Kısım 3.6 da da Grassmann kuantum manifoldlar adıyla anılan bu koset uzaylarının bir singüler Hecke cebirinin elemanları olduğunu gördük. Kısım 3.7 de $SU_q(n)$ kuantum gruplarının ve $SU_q(n)/U_q(n-1)$ kosetlerinin ve $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ şeklindeki koset uzaylarının temsillerinin hem örgülerle hem de düğümler ve halkalarla ilişkisini inceledik.



BÖLÜM 2

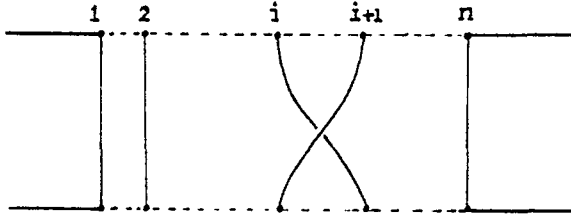
ÖRGÜLERİN MATEMATİKSEL YAPISI

2.1. ÖRGÜLERİN OLUŞUMU VE ARTIN ÖRGÜ GRUBU

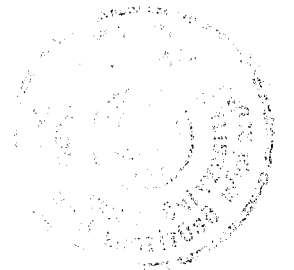
Örgü grupları, n tane sicimin sırayla birbiri üzerinden geçerek oluşturdukları örgülerin eşdeğerlik sınıflarıdır. Örgü gruplarını B_n ile göstereceğiz.

Örgülerin yapısından bahsedelim:

Örgüler, bir yatay düzlem üzerindeki n noktanın diğer yatay düzlem üzerindeki n noktaya direkt olarak n sicimle bağlandıkları zaman ortaya çıkan şekillerdir. Bir sicim boyunca her noktada ileri doğru hareket edilir, geriye dönme-ye müsaade edilmez. Düzlem üzerindeki n nokta belli bir şekilde sıralanarak bir doğru üzerine dizilebilir. Bu diziliş B_n örgü grubunun B_{n+1} örgü grubu içine tercihli bir yerleş-tilmesini gerektirir. Bu durumda Şekil.1 de olduğu gibi $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ jeneratörlerinin bulunduğu kabul edilebilir [7].



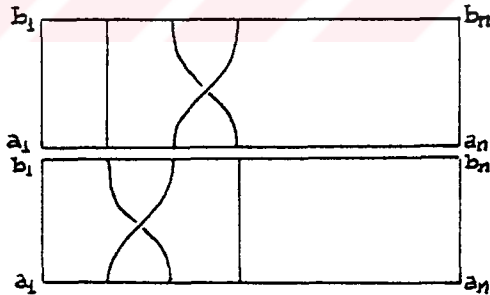
Şekil.1



Örgülerin yapısını geometrik olarak anlatalım:

Euclid uzayında iki karşıt kenarı $a_1 b_1 a_n b_n$ olan bir dikdörtgen alalım. Bu kenarların herbiri eşit olarak n tane noktaya sahip olsun. Bu iki karşıt kenardaki n noktaya $a_1 a_2 \dots a_n$ ve $b_1 b_2 \dots b_n$ denilsin. a lar ve b ler a_i lerden b_{c_i} lere doğru çizilen birbirini kesmeyen n tane sicimle birleştirilsin. (Burada c_i ler $c_1 c_2 \dots c_n$ $i=1,2,\dots,n$ nin bir permütasyonudur) Bu n tane sicimden oluşan eğrilere μ_i denilsin. Dikdörtgen düzlem üzerinde μ_i eğrilerinin ortogonal izdüşümü v_i olsun. Eğer v_i eğrileri sonlu sayıda tekrarlanan çiftler halinde birbirini kesiyorsa ve monotonik ise μ_i sicimlerinin düzenlenmiş şekline bir örgü denilir. Burada monotoniklik, her v_i nin $a_1 a_n$ ve $b_1 b_n$ arasındaki her paralel çizgiyi tam bir noktada kesmesi demektir.

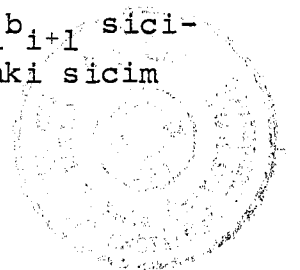
Eğer iki örgü, biri diğerine hiçbir sicimi kesmeksizin sürekli olarak dönüştürülebilirse iki örgünün eşit olduğu kabul edilir. İki örgünün birleşimi önceki $b_1 b_2 \dots b_n$ noktalarının sonraki $a_1 a_2 \dots a_n$ noktalarıyla uyuşacak şekilde iki dikdörtgenin üst üste konulmasıyla elde edilir (Şekil 2).



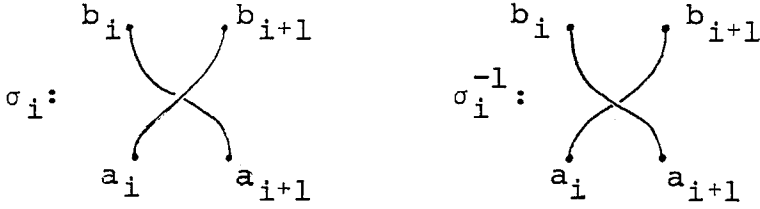
Şekil . 2

$a_1 a_n$ 'e yatay çizgi denildiğinde genel olarak sicimlerin dik olduğu, fakat iki komşu sicimin bazı yerlerde biri diğerinin üstünden çapraz geçerek birbirleriyle yerdeğiştirdiği kabul edilebilir.

Şekil 3'deki gibi $a_{i+1} b_i$ siciminin önünden $a_i b_{i+1}$ siciminin çapraz geçmesi σ_i ile gösterilir. Eğer sonraki sicim

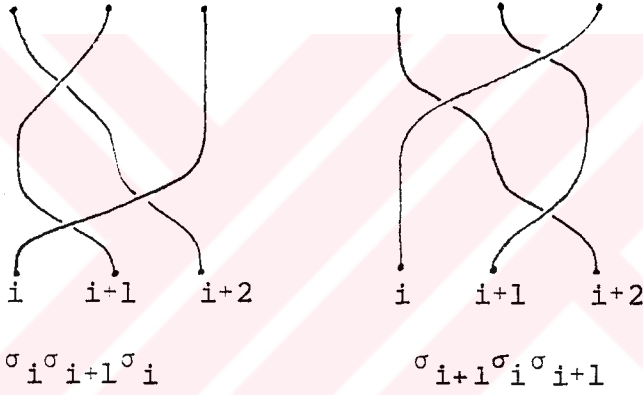


Öncekinin üstünden çapraz geçerse σ_i^{-1} ile gösterilir. Böylelikle bir örgü σ_i lerin kuvvetlerinin çarpımıyla tam olarak belirlenir.



Şekil. 3

$\sigma_i \sigma_j$ ve $\sigma_j \sigma_i$ örgülerinin $|i-j| > 1$ için eşit olduğu görülür. Ve $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ ve $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ örgüleri aynıdır (Şekil.4)



Şekil. 4

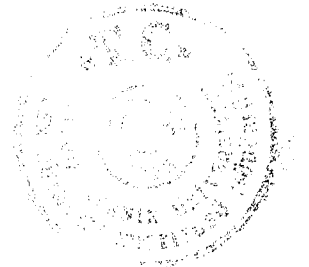
Gerçekte, ancak (n sicimle şekillenen) farklı örgüler, örgü grubunun elemanlarını temsil ederler.

Örgü grubu,

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2 \quad (2.1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad i \leq j-2 \quad (2.1.2)$$

ile tanımlanan sonsuz gruptur. Bu şekilde tanımlanan bir temsile Artin örgü grubu denilir.



(2.1.2) bağıntısından σ_i ve σ_j nin komütatif olduğunu söyleyebiliriz. Bu bağıntıda bazen

$$\sigma_i \rightarrow \sigma_i \quad (2.1.3)$$

kısaltılmış formunda yazılır.

Örgü grubu gerçekten,

$$a = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \quad (2.1.4)$$

$$\sigma = \sigma_1 \quad (2.1.5)$$

iki elemanı ile üretilebilir. a ve σ cinsinden B_n örgü grubu

$$\sigma_i = a^{i-1} \sigma a^{-(i-1)} \quad (2.1.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Örneğin B_3 grubu

$$a = \sigma_1 \sigma_2$$

ve

$$\sigma_1 = 1 \sigma_1 1$$

ile üretilir. Ve σ_2 , (2.1.6) ya göre yazılırsa

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= a \sigma_1 a^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \end{aligned}$$

bulunur. B_4 örgü grubu için

$$a = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\sigma_1 = 1 \sigma_1 1$$



$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= a \sigma_1 a^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= a^2 \sigma_1 a^{-2} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_3
\end{aligned}$$

bulunur.

B_n örgü grubu için (2.1.6) ifadesinin doğru olduğu kabul edilerek σ nın her değeri için

$$\sigma_{i+1} = a \sigma_i a^{-1}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$a = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$$

ve

$$\sigma = \sigma_1$$

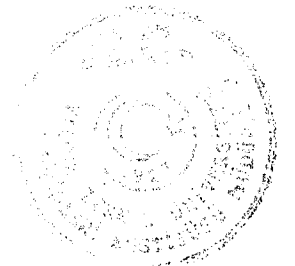
olmak üzere

$$\sigma_1 = 1 \sigma_1 1$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$$

⋮
⋮
⋮



$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1} &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1} \sigma_i \sigma_{n-1} \sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_i \sigma_{1+i} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_{i+1} \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}
\end{aligned}$$

olur.

Bu iki jeneratöre bağlı olarak soyut tanım

$$a^n = (a\sigma)^{n-1}$$

$$\sigma \underset{\neq}{\neq} a^{-k} \sigma a^k \quad 2 \leq k \leq \frac{n}{2} \quad (2.1.7)$$

ile verilir.

B_n örgü grubu $n=2$ olduğu zaman $a=(\sigma=\sigma_1)$ ile üretilen C_∞ gruptur. Chow $n > 2$ olduğu zaman örgü grubunun merkezinin a^n ile üretilen C_∞ olduğunu belirtmiştir.

$n = 3$ olduğu zaman

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \quad (2.1.8)$$

grubu,

$$a = \sigma_1 \sigma_2$$

$$b = a\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \quad (2.1.9)$$

olmak üzere

$$\sigma_1 = a^{-1}b \text{ ve } \sigma_2 = ba^{-1} \quad (2.1.10)$$

cinsinden üretilir. Ve (2.1.7) kısa tanımını

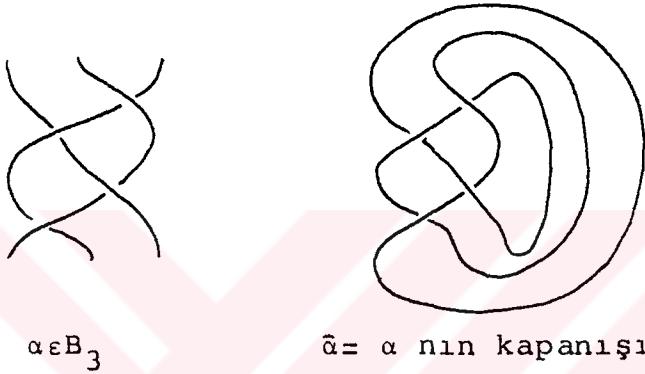
$$a^3 = b^2 \quad (2.1.11)$$

formuna indirgenir [12]



2.2. DÜĞÜMLER VE HALKALAR

Bir $\alpha \in B_n$ örgü verildiği zaman aşağıdaki şekildeki gibi örgünün alt ve üst serbest uçlarının n tane farklı yay ile birleştirilmesiyle oluşan şekiller, düğümleri meydana getirirler. Bu kapalı örgü $\hat{\alpha}$ ile gösterilir [7].



Şekil: 5

Halkalar da düğümlerin yönlendirilmesiyle oluşurlar. Eğer $\beta \in B_n$ ise bu şekilde kapatılarak elde edilen halka L_β ile gösterilir. Bu halkanın yönlendirmesi β üzerindeki yönlendirmeyle belirlenir [13].

Alexander her yönlendirilmiş halkanın bir örgünün kapanışına eşdeğer olduğunu ifade eder. Fakat düğümleri incelemek için örgülerden yararlanma teşebbüsleri önemli bir problemi ortaya çıkarır. Bu problem, kapalı bir örgü olarak bir L halkasının temsilinin genellikle tek olmamasıdır.

A. Markov eşdeğer kapanışlara sahip $\alpha \in B_n$ ve $\beta \in B_m$ örgüleri için cebirsel gerek ve yeter şartları bulmuştur. Bunlar Markov hareketleri denilen aşağıdaki dönüşümlerdir. Birinci tipteki bir Markov hareketi



$$\beta \longleftrightarrow \alpha \beta \alpha^{-1} \quad \alpha, \beta \in B_n$$

veya

$$\alpha \longleftrightarrow \beta \alpha \beta^{-1}$$

şeklindedir. İkinci tipteki bir Markov hareketi ise

$$\beta \longleftrightarrow \beta \sigma_n^{\pm 1}$$

veya

$$\alpha \longleftrightarrow \alpha \sigma_n^{\pm 1}$$

ile

$$B_n \longleftrightarrow B_{n+1}$$

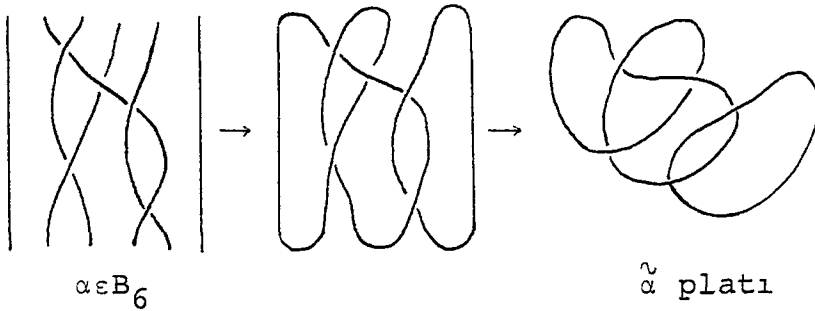
dönüşümleridir [7], [13].

Markov teoremini ifade edelim:

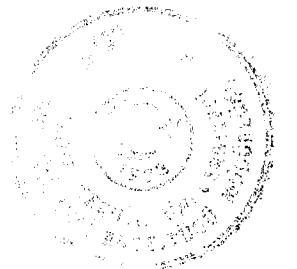
Eğer $\alpha \in B_n$ ve $\beta \in B_m$ örgüleri eşdeğer kapanışlara sahipse o zaman α yerine β alınarak birinci ve ikinci tipteki Markov hareketlerinin sonlu bir dizisi oluşturulur.

Markov teoremini direkt olarak uygulamak kolay değildir. Çünkü hareketlerin dizisi uzun olabilir ve birkaç farklı örgü grubu içinde geçebilir.

Örgülerden halkaları elde etmenin bir başka yolu plat metodudur. Bir plat kapalı bir şekildir. Bir $\alpha \in B_{2m}$ örgüsü Şekil 6 ya göre kapatıldığı zaman şekillenen yönlendirilmemiş bir $\tilde{\alpha}$ halkasıdır.



Şekil: 6



Her yönlendirilmemiş halka bazı (α, m) , $\alpha \in B_{2m}$ için $\tilde{\alpha}$ formundadır. Birman, Markov teoreminin bir benzerini aşağıdaki teoremle göstermiştir.

Birman Teoremi: Her m için C_m , XUYUZ kümesiyle üretilen B_{2m} örgü grubunun alt grubu olsun. Burada

$$X = \{\sigma_{2i-1}, \quad i=1, 2, \dots, m\}$$

$$Y = \{\sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i+1}\sigma_{2i}, \quad i=1, 2, \dots, m-1\}$$

$$Z = \{\sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i+1}^{-1}\sigma_{2i}^{-1}, \quad i=1, 2, \dots, m-1\}$$

dir. Aynı zamanda $S_k : B_{2k} \rightarrow B_{2k+2}$ dönüşümü

$$S_k(\alpha) = \alpha\sigma_{2k}$$

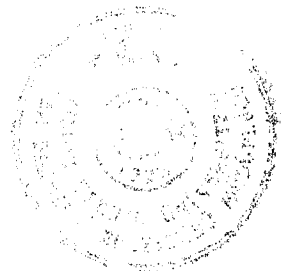
ile tanımlansın. O zaman

(a) Eğer $\alpha \in B_{2m}$, $x\tilde{\alpha}y = \tilde{\alpha}$ $x, y \in C_m$ için

$$\text{ve } \widetilde{S_m(\alpha)} = \tilde{\alpha}$$

(b) $\alpha \rightarrow x\alpha y$, $x, y \in C_m$ ve $\alpha \leftrightarrow S_m(\alpha)$, $\alpha \in B_{2m}$

hareketleriyle oluşturulan $U_m B_{2m}$ üzerindeki eşdeğerlik bağlantısı platların eşdeğerliliğiyle verilen eşdeğerlik bağlantısıyla aynıdır [7].



2.3. HECKE CEBİRİ

$H(q,n)$ Hecke cebiri $g_1 g_2 \dots g_{n-1}$ jeneratörleri için

$$g_i^2 = (q-1)g_i + q, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (2.3.1)$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,n-2 \quad (2.3.2)$$

$$g_i g_j = g_j g_i, \quad |i-j| \geq 2 \quad (2.3.3)$$

şartlarını sağlayan bir temsil ile oluşur. Bu cebire A_{n-1} tipinde $H(q,n)$ Hecke cebiri denilir. Burada q bir parametredir. Ve q parametresi her değeri alabilen bir kompleks sayı olarak düşünülür. Bu nedenle her $q \neq 0$ için B_n örgü grubu, σ_i leri g_i lere göndermek suretiyle elde edilen $H(q,n)$ deki bir temsile sahiptir.

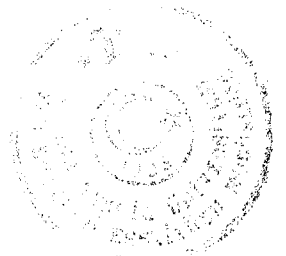
Örgü gruplarının σ_i jeneratörlerinin tümü eşleniktir. Ve örgü gruplarının 1-boyutlu temsillerinin tümü sıfır olmayan skalarlar yardımıyla sınıflandırılmıştır. İki boyutlu temsiller elde edilebilir. Fakat σ_i ler en çok iki özdeğere sahip olduğunda B_n nin tüm temsilleri tanımlanarak zengin bir yapı oluşturur. Böyle bir temsil altında σ_i nin imajı için g_i yazarak

$$g_i^2 + a g_i + b = 0 \quad (2.3.4)$$

formunda bir denklem elde edilir. Burada a ve b skalardır. İki sabitin karmaşa yaratmasından dolayı g_i belirli bir sabit ile modifiye edilmek suretiyle sabitlerden biri yok edilebilir ve (2.3.4) bağıntısı

$$g_i^2 = (q-1) g_i + q \quad (2.3.5)$$

formuna getirilir. Böyle bir temsil quadratik olarak isimlendirilir.



g_i ler en az iki özdeğere sahip olduğunda örgü gruplarının temsilleriyle $H(q,n)$ Hecke cebrinin temsillerini içeren bilgiler aynıdır.

Eğer (2.3.5) bağıntısında $q=1$ konulursa $H(1,n)$ cebri elde edilir. Bu cebir yarı-basit CS_n grup cebridir. Yarı basitlik açık bir koşuldur. Böylece $q, 1$ başlangıç değerinden azalarak değişirse $H(q,n)$ yarı-basit kalacaktır. Aynı zamanda $H(q,n)$ ve $H(q,n) \subseteq H(q,n+1)$ kapsamaları da bu de - formasyon altında hiç olmazsa n , çok daha büyük olmadığı ve $q, 1$ den çok uzak olmadığı zaman aynı kalmalıdır. Bununla ilgili bir teoremi ifade edelim:

Teorem 1: 1 'e yakın q için basit $H(q,n)$ modülleri (ya da B_n nin kuadratik indirgenemez temsilleri) Young diagramları ile birebir eşlenir.

S_n simetrik grubu $S_1 S_2, \dots, S_{n-1}$ jeneratörleri için

$$\begin{aligned} S_i^2 &= 1 \\ S_i S_{i+1} S_i &= S_{i+1} S_i S_{i+1} \\ S_i S_j &= S_j S_i \quad |i-j| > 2 \end{aligned}$$

temsilleri ile tanımlanır. g_i ler ve S_i ler cinsinden yazılmış bir kelimeyi minimal uzunluğa indirgemek istediğimizi düşünelim. Bu amaç için (2.3.1) bağıntısı (2.3.6) bağıntısı kadar işe yarar. Böylece S_n için S_i ler cinsinden indirgenmiş kelimeler sistemi basit olarak S_i için g_i yazmak sure - tiyle $H(q,n)$ için bir baz sağlayacaktır. Böyle uygun bir baz

$$\begin{aligned} & (g_{i_1} g_{i_1-1} \dots g_{i_1-k_1}) (g_{i_2} g_{i_2-1} \dots g_{i_2-k_2}) \dots (g_{i_p} g_{i_p-1} \dots \\ & \dots g_{i_p-k_p}) \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n-1 \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

dir. $H(q,n)$ nin boyutu $n!$ dir. $H(q,n)$ daima (2.3.9) yardımıyla $H(q,n+1)$ içine gömülü olarak gözönüne alınabilir.

Hecke cebirlerinde halkalar ile bağıntıları veren ör-gülerin geometrik şekli lineer fonksiyoneller ile bağlantılıdır. İlk olarak Ocneanu tarafından trace (iz)

$$\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$$

$$\text{tr}(1) = 1$$

$$\text{tr}(xg_n) = z\text{tr}(x), \quad x \in H(q,n)$$

şeklinde tanımlandı. Ve $H(q,n)$ cebri g_i lerin tanımlanmasıyla $H(q,n+1)$ cebri içine gömüldü. Burada z parametresi q dan bağımsız başka bir kompleks sayıdır. Trace (iz), birbirinden bağımsız olarak Lickorish ve Millet, Freyd ve Yetter, Ocneanu ve Hoste [2] tarafından keşfedilen yönlü halkaların iki değişkenli bir polinom invaryantıdır. Bunların özel bir hali klasik Alexander polinomudur. [11]

Diğer bir fonksiyonel, içinde

$$g_i g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i + g_{i+1} g_i + g_i + g_{i+1} + 1 = 0$$

bağıntısının sağlandığı Hecke cebirinin bir bölümü üzerinde bulunur. Bu lineer fonksiyonel, platlar teorisiyle yönlendirilmemiş halkalara karşı gelir. Böyle tanımlanan invaryant trace (iz) den gelen bir özelleştirme değildir. Ve ilkönce Jones tarafından yönlendirilmiş halkaların bir invaryantı olarak keşfedilmiştir. Bu ikinci lineer fonksiyonel istatistik-mekanikte buz-tipi modelleri ve Potts maddelerindeki partiyon fonksiyonu olarak ortaya çıkar.

Bu invaryantların topolojik bir yorumu şu an için mevcut değildir. Bu yönde $H(q,n)$ gruplarının temsillerini ve özellikle q ve z parametrelerinin manasını daha iyi anlamak önemli gözükmektedir.



$$b_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & -t \\ 0 & & & 0 & -t \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

$$b_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & 1 & -t & 0 \\ & & & 0 & -t & 0 \\ & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad 2 < i < n-2 \quad (2.4.6)$$

Burada köşegen üzerindeki $-t$ elemanı i -nci elemandır. Örneğin 3-boyutta indirgenmemiş Burau temsili aşağıdaki gibidir.

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu temsiller için $M^{-1} \beta_i M = b_i$ benzerlik dönüşümü kullanılarak indirgenmiş temsilleri elde ederiz. Bunlar

$$b_1 = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} -t(1+t) & t^2 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ 1 & -(1+t) & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Bunlar örgü gruplarının aşikâr olmayan çok basit fakat çok önemli temsilleridir. $n=2$ ya da $n=3$ olduğu zaman hariç, $t=2$ için bile bu temsillerin dürüst olup olmadığı bilinmezdi. Burau kendi temsilinin kapalı örgülerle bağlantılı olduğunu ve $\alpha \in B_n$ örgüsü ve ψ indirgenmiş Burau temsiliyse o zaman $\det(1-\psi(\alpha))$ nın bir $\hat{\alpha}$ halkasının Alexander polinomunun katı olduğunu farkettiler.

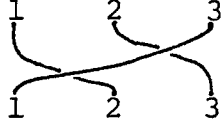
Pozitif örgüler için Burau temsilinin mekanik bir açıklaması mevcuttur. Örgüyü düzleme yaptırıp n yollu bir bowling yolu haline getirelim ve yolları örgüye göre birbiri üzerinden geçirelim. Bir yol boyunca giden bir topun her çaprazlamada aşağıdaki yola düşüp yoluna burada devam etme ihtimali $1-t$ olsun. İndirgenmemiş Burau matrisin (i,j) nci elemanı, i -nci yolda yola başlayan bir topun j -nci yolda yolu bitirmesi ihtimalidir.

$$\sigma_1 = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \curvearrowright & \curvearrowleft \\ 1 & 2 \end{array}$$

Örgüsü için indirgenmiş Burau matrisi

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

dir. $\sigma_1\sigma_2$ örgüsü için



indirgenmiş Burau matrisi

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{bmatrix} t & (1-t)t & (1-t)(1-t) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

dir.

Böylece pozitif bir örgünün, Burau matrisinin t cinsinden (polinom olan) elemanları $0 \leq t \leq 1$ için negatif değildir sonucu elde edilir [7].

BÖLÜM 3

MATRİS PSÖDOGRUPLARI VE ÖRGÜLER

3.1. ÖRGÜ GRUBU İLE İLGİLİ YENİ BİR CEBİRİN BİR TEMSİLİ

Örgü grubunu

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (3.1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| \neq 1 \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımladık. Bu grubun bir temsilinin Burau matrisleriyle verildiğini gösterdik. Bu matrisleri yukarıdaki ikinci özelliği (indirgenmemiş temsilde) blok köşegen seçilmeleriyle sağladık. Gerçekte de A , 2×2 bir matris olmak üzere şu şekilde bir temsildir:

$$\sigma_1 \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \dots \\ c & d & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \dots 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin

$$A A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1} \quad (3.1.4)$$

bağıntısını sağlaması gerekir. A_i matrisini bu bağıntıda yerlerine yazarsak 3-boyutta bu bağıntı

$$A_1 A_2 A_1 = A_2 A_1 A_2 \quad (3.1.5)$$

şeklını alır. O zaman

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.1.5) bağıntısında yerlerine yazılarak,

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+bac & ab+bad & b^2 \\ ca+dac & cb+dad & db \\ c^2 & cd & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ba & b^2 \\ ac & ada+bc & adb+bd \\ c^2 & cda+dc & cdb+d^2 \end{bmatrix}$$

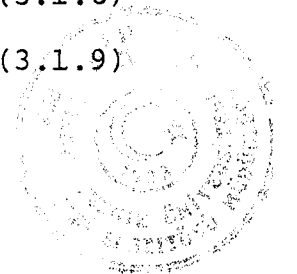
bulunur. Matrislerin eşitliğinden de

$$a^2+bac = a \quad (3.1.6)$$

$$d = cdb+d^2 \quad (3.1.7)$$

$$ab+bad = ba \quad (3.1.8)$$

$$db = adb+bd \quad (3.1.9)$$



$$ca+dac = ac \quad (3.1.10)$$

$$cd=cda+dc \quad (3.1.11)$$

$$cb+dad=ada+bc \quad (3.1.12)$$

bağıntılarını elde ederiz.

Önce bu bağıntılarda a, b, c, d lerin birbirleriyle komütatif olduğunu kabul edelim:

$$a(a+bc-1) = 0$$

$$d(d+bc-1) = 0$$

$$bad = 0$$

$$dac = 0$$

$$adb = 0$$

$$cda = 0$$

$$ad^2 = da^2 \text{ ya da } ad(d-a) = 0$$

bağıntılarından ya $a=0$ ya da $d=0$ veya $b=c=0$ olacaktır.

$d=0$ kabul edersek $a, b, c \neq 0$ olur. Ve

$$a+bc = 1$$

den

$$a=1-bc \quad (3.1.13)$$

bulunur. O zaman A matrisinin elemanları yerine yazılırsa

$$A = \begin{bmatrix} 1-bc & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Burau temsilleri gözönüne alınarak yazıldığında $bc=t$ alırsak



$$\begin{bmatrix} 1-t & \frac{1}{c}t \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

matrisi elde edilir. Bu matris benzerlik dönüşümü ($M^{-1}AM$) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} 1-t & \frac{1}{c}t \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

şeklinde yazılır.

Dolayısıyla a, b, c, d komütatif oldukları zaman (3.1.6-12) bağıntılarını sağlayan değerlerin basit bir benzerlik dönüşümüyle Burau temsili olduğunu gösterdik.

Şimdi (3.1.6-12) bağıntılarındaki a, b, c, d lerin komütatif olmadıklarını kabul edelim. Bunun için c -yaratma ve b -yoketme operatörlerini kullanarak

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinin elemanlarının bir $|n\rangle$ vektörleri üzerine etkisinin

$$\begin{aligned} b|n\rangle &= b_n|n-1\rangle \\ c|n\rangle &= c_n|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= a_n|n\rangle \\ d|n\rangle &= d_n|n\rangle \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

bağıntılarıyla verildiğini kabul edelim. Burada $|n\rangle$ vektörleri, $N|n\rangle = n|n\rangle$ $n = \dots, 1, 2, 3, 4, \dots$ olmak üzere özdeğerleri tamsayılar olan bir N operatörünün özvektörleridir $|n\rangle$ vektörleri cb operatörünün de özvektörleri olup, n 'nin fonksiyonları olan özdeğerleri $[n]$ ile göstererek



$$\begin{aligned}
[n]|n\rangle &= [N]|n\rangle = cb|n\rangle = cb_n|n-1\rangle = b_n c|n-1\rangle \\
&= b_n c_{n-1}|n\rangle \quad (3.1.17)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[n+1]|n\rangle &= [N+1]|n\rangle = bc|n\rangle = bc_n|n+1\rangle = c_n b|n+1\rangle \\
&= c_n b_{n+1}|n\rangle \quad (3.1.18)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi bu operatörleri kullanarak (3.1.6-12) bağıntılarının tek tek sağlandığını kontrol edelim.

$$(3.1.6) \text{ dan } bac|n\rangle = (a - a^2)|n\rangle$$

$$c_n ba|n+1\rangle = (a_n - a_n^2)|n\rangle$$

yazılarak

$$c_n b_{n+1} = \frac{a_n - a_n^2}{a_{n+1}} \quad (3.1.19)$$

$$(3.1.7) \text{ den } cdb|n\rangle = (d - d^2)|n\rangle$$

$$b_n cd|n-1\rangle = (d_n - d_n^2)|n\rangle$$

yazılarak

$$b_n c_{n-1} = \frac{d_n - d_n^2}{d_{n-1}} \quad (3.1.20)$$

$$(3.1.8) \text{ den } bad|n\rangle = ba|n\rangle - ab|n\rangle$$

$$d_n ba|n\rangle = a_n b|n\rangle - b_n a|n-1\rangle$$

yazılarak

$$a_n d_n = a_n - a_{n-1} \quad (3.1.21)$$

$$(3.1.9) \text{ dan } adb|n\rangle = db|n\rangle - bd|n\rangle$$

$$b_n ad|n-1\rangle = b_n d|n-1\rangle - d_n b|n\rangle$$

yazılarak

$$d_{n-1} a_{n-1} = d_{n-1} - d_n \quad (3.1.22)$$

$$(3.1.10) \text{ dan } dac|n\rangle = ac|n\rangle - ca|n\rangle$$

$$c_n da|n+1\rangle = c_n a|n+1\rangle - a_n c|n\rangle$$



yazılarak

$$d_{n+1} a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad (3.1.23)$$

$$(3.1.11) \text{ den } cda|n\rangle = cd|n\rangle - dc|n\rangle$$

$$a_n cd|n\rangle = d_n c|n\rangle - c_n d|n+1\rangle$$

yazılarak

$$d_n a_n = d_n - d_{n+1} \quad (3.1.24)$$

$$(3.1.12) \text{ den } bc|n\rangle - cb|n\rangle = dad|n\rangle - ada|n\rangle$$

$$c_n b|n+1\rangle - b_n c|n-1\rangle = d_n da|n\rangle - a_n ad|n\rangle$$

yazılarak

$$b_{n+1} c_n - c_{n-1} b_n = d_n a_n d_n - a_n d_n a_n \quad (3.1.25)$$

elde edilir.

(3.1.19), (3.1.20) ve (3.1.25) bağıntılarından

$$[n+1] = \frac{a_n - a_n^2}{a_{n+1}} \quad (3.1.26)$$

$$[n] = \frac{d_n - d_n^2}{d_{n-1}} \quad (3.1.27)$$

$$[n+1] - [n] = a_n d_n (d_n - a_n) \quad (3.1.28)$$

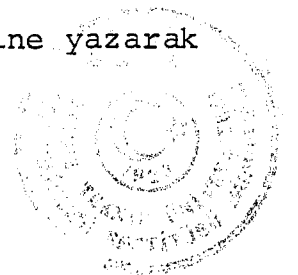
eşitliklerini elde ederiz. (3.1.22) ve (3.1.23) bağıntılarını kullanarak

$$(1-d_{n-1})(1-a_{n-1}) = (1-d_n)(1-a_n) \quad (3.1.29)$$

bağıntısını buluruz. Dolayısıyla $(1-d_n)(1-a_n) = q$ alınarak $(1-d_n)(1-a_n)$ n'den bağımsızdır.

$$d_n = 1 - \frac{q}{1-a_n} \quad (3.1.30)$$

yazabiliriz. Bu değeri (3.1.23) bağıntısında yerine yazarak



$$\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{q}{a_{n-1}} \quad (3.1.31)$$

elde edilir. Burada $U_n = \frac{1}{a_n}$ denilirse

$$U_n = 1 + qU_{n-1} \quad (3.1.32)$$

elde edilir. Bu seriyi açarak

$$U_1 = 1 + qU_0$$

$$U_2 = 1 + q + q^2 U_0$$

$$U_3 = 1 + q + q^2 + q^3 U_0$$

$$\vdots$$

$$U_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n U_0$$

yazabiliriz. Buradan

$$U_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n U_0 \quad (3.1.33)$$

olur. Burada $A = -1 + U_0 - qU_0$ denilirse

$$U_n = \frac{1 + Aq^n}{1 - q} \quad (3.1.34)$$

bulunur. $U_n = \frac{1}{a_n}$ olduğundan

$$a_n = \frac{1 - q}{1 + Aq^n} \quad (3.1.35)$$

ve

$$d_n = \frac{Aq^n(1 - q)}{q + Aq^n} \quad (3.1.36)$$

değerleri elde edilir. Bulduğumuz bu değerleri (3.1.26), (3.1.27) eşitliklerini kullanarak (3.1.28) bağıntısının gerçellenip, gerçekenmediğini gösterelim:

$$[n+1] - [n] = a_n d_n (d_n - a_n)$$



eşitliğinin birinci tarafı için

$$\frac{\frac{1-q}{1+Aq^n} - \left[\frac{1-q}{1+Aq^n} \right]^2}{\frac{1-q}{1+Aq^{n+1}}} - \frac{\frac{Aq^n(1-q)}{q+Aq^n} - \left[\frac{Aq^n(1-q)}{q+Aq^n} \right]^2}{\frac{Aq^{n-1}(1-q)}{q+Aq^{n-1}}} = \frac{(q+Aq^n)(1+Aq^{n+1})}{(1+Aq^n)^2} - \frac{q(q+Aq^{n+1})(q+Aq^{n-1})}{(q+Aq^n)^2} \quad (3.1.37)$$

ve eşitliğin ikinci tarafı için ise

$$\left(\frac{1-q}{1+Aq^n} \cdot \frac{Aq^n(1-q)}{q+Aq^n} \right) \cdot \left(\frac{Aq^n(1-q)}{q+Aq^n} - \frac{1-q}{1+Aq^n} \right) = \frac{(1-q)^3 Aq^n (A^2 q^{2n} - q)}{(1+Aq^n)^2 (q+Aq^n)^2} \quad (3.1.38)$$

elde edilir. Buradan (3.1.37) ve (3.1.38) ifadelerinin birbirine eşit olup olmadığına bakmalıyız. Paydaların eşit olduğu görülür. O halde

$$(1-q)^3 Aq^n (A^2 q^{2n} - q) = (Aq^n + q)^3 (1+Aq^{n+1}) - q^2 (Aq^{n+1})^3 \cdot (Aq^{n-1} + q)$$

ifadesi için işlemler yapılarak heriki tarafın

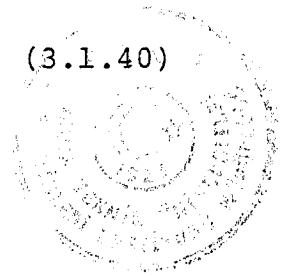
$$(1-3q+3q^2-q^3)(A^3 q^{3n} - Aq^{n+1})$$

ifadesine eşit olduğu görülür.

Ve buradan

$$C_n b_{n+1} = \frac{(q+Aq^n)(1+Aq^{n+1})}{(1+Aq^n)^2} \quad (3.1.39)$$

$$b_n C_{n-1} = \frac{q(q+Aq^{n+1})(q+Aq^{n-1})}{(q+Aq^n)^2} \quad (3.1.40)$$



elde edilir. Dolayısıyla b_n ler sıfırdan farklı serbest sayılar olmak üzere

$$c_n = \frac{1}{b_{n+1}} \cdot \frac{q(1+Aq^{n-1})(1+Aq^{n+1})}{(1+Aq^n)^2} \quad (3.1.41)$$

a_n ve d_n ise

$$a_n = \frac{1-q}{1+Aq^n}, \quad d_n = \frac{Aq^n(1-q)}{q+Aq^n}$$

denklemleriyle verilirse (3.1.6-12) bağıntılarının tümü sağlanır. Böylece örgü grubunun sonsuz boyutlu bir lineer uzay üzerinde bir temsilini elde ederiz. q ve A reel parametreler olarak alınırsa A matrisi hermityen seçilebilir. Yani;

$$A = A^\dagger$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$$

$a=a^*$, $d=d^*$, $c=b^*$ olur. Bu durumda Hilbert uzayındaki skaler çarpımın özelliğinden

$$\begin{aligned} \overline{\langle n-1 | b | n \rangle} &= \langle n | b^* | n-1 \rangle = \langle n | c | n-1 \rangle \\ \overline{b_n \langle n-1 | n-1 \rangle} &= c_{n-1} \langle n | n \rangle \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

olur. (3.1.16) daki özvektörlerin normalize olduğunu ($\langle n | n \rangle = 1$) kabul edersek

$$c_n = \overline{b_{n+1}} \quad (3.1.43)$$

buluruz. Dolayısıyla (3.1.41) bağıntısı α_n ler reel sayılar olmak üzere

$$c_n = b_{n+1} = e^{i\alpha_n} \sqrt{\frac{q(1+Aq^{n-1})(1+Aq^{n+1})}{(1+Aq^n)^2}} \quad (3.1.44)$$



şeklını alır.

Böylece a, b, c, d operatörlerinin bir Hilbert uzayında bir temsilini bulmuş olduk.

Şimdi (3.1.6-12) bağıntılarını aşağıdaki şekilde yazalım:

$$bac = a - a^2 \quad (3.1.45)$$

$$cdb = d - d^2 \quad (3.1.46)$$

$$ab = ba(1-d) \quad (3.1.47)$$

$$ca = (1-d)ac \quad (4.1.48)$$

$$bd = (1-a)db \quad (3.1.49)$$

$$dc = cd(1-a) \quad (3.1.50)$$

$$bc - cb = dad - ada \quad (3.1.51)$$

Ve bu bağıntıları kullanarak A matrisinin tersini elde etmeye çalışalım.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinin elemanlarından a ve d den en az birinin tersinin alınabilir (invertibil) olduğunu kabul edelim. Diyelim ki a^{-1} var olsun. O zaman

$$a - a^2 = bac$$

ve

$$ba = ab + bad$$

bağıntılarından

$$a - a^2 = bac = (ab + bad)c = abc + badc$$

olur. Buradan $dc = cd(1-a)$ yazılarak



$$a(1-a) = abc + bacd(1-a)$$

$$a(1-a) = abc + a(1-a)d(1-a)$$

olur. Bu bağıntı soldan a^{-1} ile çarpılarak

$$bc = (1-a) - (1-a)d(1-a) \quad (3.1.52)$$

elde edilir. bc yi (3.1.51) de yerine koyarak

$$cb = (1-d) - (1-d)a(1-d) \quad (3.1.53)$$

bulunur.

Şimdi A^{-1} matrisini, elemanları komütatif bir matrisin tersine benzer şekilde yazarak

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta_1^{-1} & -b\Delta_2^{-1} \\ -c\Delta_3^{-1} & a\Delta_4^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.54)$$

den

$$ad\Delta_1^{-1} - bc\Delta_3^{-1} = 1$$

$$-ab\Delta_2^{-1} + ba\Delta_4^{-1} = 0$$

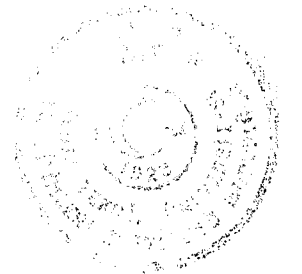
$$cd\Delta_1^{-1} - dc\Delta_3^{-1} = 0$$

$$-cb\Delta_2^{-1} + da\Delta_4^{-1} = 1$$

eşitlikleri bulunur. Burada Δ_1^{-1} , Δ_2^{-1} , Δ_3^{-1} ve Δ_4^{-1} değerlerini elde etmek için (3.1.47), (3.1.50), (3.1.52) ve (3.1.53) bağıntıları kullanılarak ve $(1-a)$ ve $(1-d)$ 'nin tersi alınabilir kabul edilerek

$$\Delta_4^{-1} = (1-d)\Delta_2^{-1}$$

$$\Delta_1^{-1} = (1-a)\Delta_3^{-1}$$



$$\Delta_3^{-1} = -(1-a)^{-1} (1-d)^{-1}$$

bulunur ve bu bağıntılardan da

$$\Delta_1^{-1} = -(1-d)^{-1}$$

$$\Delta_3^{-1} = - [(1-d)(1-a)]^{-1}$$

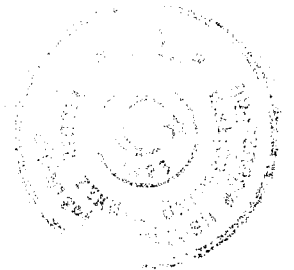
$$\Delta_2^{-1} = - [(1-a)(1-d)]^{-1}$$

$$\Delta_4^{-1} = - (1-a)^{-1}$$

bulunur. Bu değerler A^{-1} matrisinde yerlerine yazılırsa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -d(1-d)^{-1} & b(1-d)^{-1}(1-a)^{-1} \\ c(1-a)^{-1}(1-d)^{-1} & -a(1-a)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.55)$$

elde edilir.



3.2. ÜNİTER KUANTUM GRUPLARI VE OSİLATÖRLER İLE İLGİLİ TANIMLAR

Genel Lineer Grup:

A $n \times n$ matris, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ olmak üzere determinantı sıfırdan farklı tüm elemanları invertibl (tersi alınabilir) olan gruptur. Ve $GL(n, \mathbb{C})$ ile gösterilir. Yani;

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{A \mid A \text{ } n \times n \text{ matris, } a_{ij} \in \mathbb{C}, \det A \neq 0\}$$

Özel Lineer Grup:

$GL(n, \mathbb{C})$ grubundaki determinantı 1 olan matrislerin grubuna denir. Ve $SL(n, \mathbb{C})$ ile gösterilir. Yani;

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}), \det A = 1\}$$

Üniter Matris ve Üniter Grup:

$A \in GL(n, \mathbb{C})$ olmak üzere $AA^+ = I = A^+A$, $A^+ = (A^*)^T$ şartını sağlayan matrislere üniter matris denir.

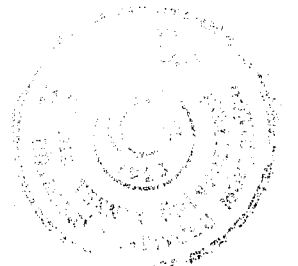
Üniter (invertibl) matrislerin grubuna üniter grup denir. Ve $U(n)$ ile gösterilir.

$$U(n) = \{A \mid A \text{ } n \times n \text{ matris, } a_{ij} \in \mathbb{C}, A^+ = A^{-1}\}$$

Özel Üniter Grup:

$U(n)$ üniter grubundaki determinantı 1 olan matrisler, bir alt grup formunda olup, bu gruba özel üniter grup denir. Ve $SU(n)$ ile gösterilir.

$$SU(n) = \{A \in U(n), \det A = 1\}$$



GLq(2, C) Grubu:

a, b, c, d ∈ C* olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisi sabit q-parametresi ile

$$ab = qba$$

$$ac = qca$$

$$bd = qdb$$

(3.2.1)

$$cd = qdc$$

$$bc = cb$$

$$ad - qbc = da - q^{-1}bc \quad (\equiv \Delta)$$

q-komütasyon bağıntılarını sağlayan ve quantum determinanti Δ sıfırdan farklı olan bütün A matrislerinin oluşturduğu quantum grubuna GLq(2, C) grubu denir.

A matrisine de q-parametrelili quantum matrisi denir.

Osilatörler Cebri:

a ve a* bir C* cebirinin elemanları olmak üzere

$$aa^* - a^*a = 1$$

(3.2.2)

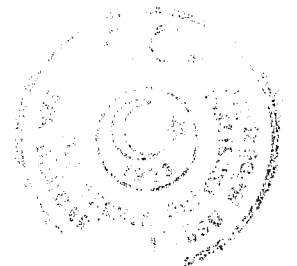
bağıntısı sağlayan operatörlere bir osilatörün sırasıyla yoketme ve yaratma operatörleri denir.

Bu operatörlerin Hilbert uzayındaki temsilleri $H = a^*a$ ve $Hx = \lambda x$ özdeğer denklemi kullanılarak

$$(a^*a)X_n = nX_n$$

(3.2.3)

şeklinde bulunur. Buradan



$$a^*a = N \quad (3.2.4)$$

elde edilir. Burada N , özdeğerleri $0,1,2,\dots$ olan sayı operatörüdür. Ve $N=N^*$ dır.

(3.2.1) bağıntısından

$$aa^* = N+1 \quad (3.2.5)$$

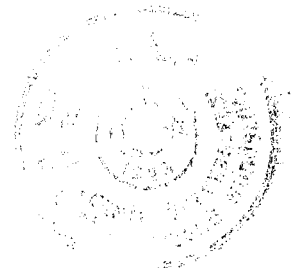
bulunur.

Sonuç olarak a , a^* ve N operatörleri arasındaki komütasyon bağıntıları (3.2.2), (3.2.4) ve (3.2.5) kullanılarak

$$aN - Na = a \quad (3.2.6)$$

$$a^*N - Na^* = -a^* \quad (3.2.7)$$

şeklinde bulunur [8].



3.3. ÜNİTER KUANTUM GRUPLARI VE q-OSİLATÖRLERİ

$SU_q(2)$ üniter quantum grubu gözönüne alındığında $A \in SU_q(2)$ ise $A^* A^T = I$ ve $\text{Det} A = 1$ bağıntıları sağlanacak şekilde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* \\ a_3^* & a_4^* \end{bmatrix}$$

matrisleri

$$A^* = (A^T)^{-1}$$

bağıntısıyla

$$A^* = \begin{bmatrix} a_4 & -q^{-1}a_3 \\ -qa_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -qa_2^* & a_1^* \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

şeklini alırlar. Dolayısıyla $A \in SU_q(2)$ için

$$(ab)^* = b^* a^*$$

ve $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere

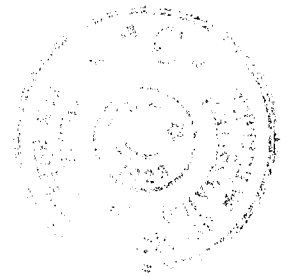
$$a_1 a_2 = q a_2 a_1$$

$$a_1 a_2^* = q a_2^* a_1$$

$$a_2 a_2^* = a_2^* a_2$$

$$a_1 a_1^* + q^2 a_2 a_2^* = 1 = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 \quad (3.3.3)$$

komütasyon bağıntıları yazılır. Böylece



$$a_1 a_1^* - q^2 a_1^* a_1 = 1 - q^2 \quad (3.3.4)$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} a_2^* a_2 &= 1 - a_1^* a_1 \\ &= q^{-2} (1 - a_1 a_1^*) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

elde edilir.

N özdeğerleri $0, 1, 2, \dots$ olan sayı operatörü olmak üzere

$$a_1^* a_1 = 1 - q^{2N} \quad (3.3.6)$$

dir. Buna göre (3.3.3) bağıntısından

$$a_1 a_1^* = 1 - q^{2(N+1)} \quad (3.3.7)$$

bulunur.

$a_2 a_2^*$ operatörünün durumu için

$$a_2^* a_2 = 1 - a_1^* a_1 = q^{-2} (1 - a_1 a_1^*)$$

olduğundan ve (3.3.6) bağıntısından,

$$a_2 a_2^* = q^{2N} \quad (3.3.8)$$

bulunur. Buna göre $\alpha, \alpha^* = \alpha$ özelliğini sağlayan bir operatör ve $i^2 = -1$ olmak üzere a_2 operatörü

$$a_2 = e^{i\alpha} q^N \quad (3.3.9)$$

şeklinde yazılır. Buradan $N^* = N$ olmak üzere

$$a_2^* = q^N e^{-i\alpha} \quad (3.3.10)$$

elde edilir. Böylece (3.3.8) bağıntısı ile



$$e^{i\alpha} q^N = q^N e^{i\alpha} \quad (3.3.11a)$$

$$e^{-i\alpha} q^N = q^N e^{-i\alpha} \quad (3.3.11b)$$

olur. Ayrıca (3.3.6) bağıntısından

$$q^N = (1 - a_1^* a_1)^{1/2} \quad (3.3.11c)$$

elde edilir. Buna göre $a_1 a_2 = q a_2 a_1$ bağıntısı ve (3.3.11) bağıntılarından da

$$e^{i\alpha} a_1 = a_1 e^{i\alpha} \quad (3.3.12a)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$e^{i\alpha} a_1^* = a_1^* e^{i\alpha} \quad (3.3.12b)$$

$$e^{-i\alpha} a_1 = a_1 e^{-i\alpha} \quad (3.3.12c)$$

$$e^{-i\alpha} a_1^* = a_1^* e^{-i\alpha} \quad (3.3.12d)$$

elde edilir. Ayrıca (3.3.12a) bağıntısından, $a_1 a_2 = q a_2 a_1$ ile

$$a_1 q^N = q^{N+1} a_1 \quad (3.3.13a)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$a_1^* q^N = q^{N-1} a_1^* \quad (3.3.13b)$$

ya da

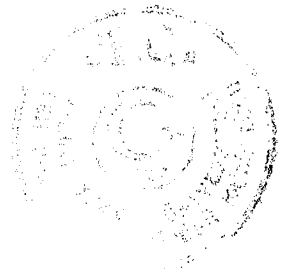
$$a_1^* q^{N+1} = q^N a_1^*$$

bulunur.

Şimdi τ negatif bir sayı olmak üzere

$$q = e^\tau$$

alındığında (3.3.13a) dan



$$a_1 e^{\tau N} = e^{\tau(N+1)} a_1$$

yazılır ve e^x in Maclaurin serisi

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

olduğundan

$$a_1 e^{\tau N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} a_1 N^m \quad (3.3.14a)$$

ve (3.3.13a) bağıntısından

$$e^{\tau(N+1)} a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} (N+1)^m a_1 \quad (3.3.14b)$$

olur. Bu iki eşitlikten,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} a_1 N^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} (N+1)^m a_1 \quad (3.3.14c)$$

eşitliği yazılır. Bu toplamlar açılarak ve τ ların katsayılarını özdeşleştirerek

$$a_1 N = (N+1) a_1, \dots$$

elde edilir. Buradan

$$N a_1^* = a_1^* (N+1)$$

olur.

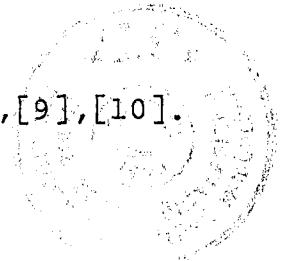
Sonuç olarak, $SU_q(2)$ üniter quantum grubundaki matrislerin matris elemanları q osilatörleridir ve

$$a a^* - q^2 a^* a = 1 - q^2$$

$$a N - N a = a$$

$$a^* N - N a^* = -a^*$$

komütasyon bağıntılarını sağlarlar diyebiliriz [8],[9],[10].



3.4. ÜNİTER KUANTUM GRUBU KOSETLERİ VE q-OSİLATÖRLERİ

Kısım 3.3 deki $A \in SU_q(2)$ matrisini

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -qa_2^* & a_1^* \end{bmatrix}$$

gözönüne alalım. Burada a_2 elemanı için

$$a_2 = e^{i\alpha} q^N$$

bağıntısında

$$q^N = (1 - a_1^* a_1)^{1/2}$$

yazılarak

$$a_2 = e^{i\alpha} (1 - a_1^* a_1)^{1/2} \quad (3.4.1)$$

ifadesi elde edilir. Ve

$$a_2^* = q^N e^{-i\alpha}$$

olduğundan A matrisinin yeni şekline M matrisi dersek

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & e^{i\alpha} (1 - a_1^* a_1)^{1/2} \\ -q e^{-i\alpha} (1 - a_1^* a_1)^{1/2} & a_1^* \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

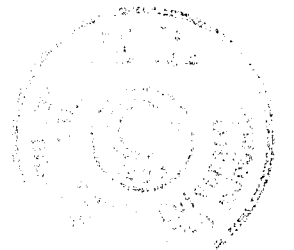
olur. a_1 operatörü için

$$a_1 = e^{i\alpha} a, \quad a^* = a_1^* e^{i\alpha}$$

olup,

$$aa^* = a_1 a_1^*$$

bulunur. Buna göre M matrisi



$$M = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} a & e^{i\alpha} (1-a^*a)^{1/2} \\ -qe^{-i\alpha} (1-a^*a)^{1/2} & e^{-i\alpha} a^* \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

şeklindedir. Burada

$$a' = (1-a^*a)^{1/2} \quad (3.4.4)$$

alınarak

$$M = \begin{bmatrix} a & a' \\ -qa' & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

elde edilir. İlk matris $SU_q(2)/U(1)$ kosetinin bir temsilcisidir. İkinci matris ise $SU_q(2)$ grubunun bir $U(1)=U_q(1)$ alt grubunu oluşturur. Koset elemanları ile q -osilatörleri arasında bire-bir bir tekabül mevcuttur.

M matrisinin ilk matrisinin elemanları arasında

$$aa^* - q^2 a^*a = 1 - q^2$$

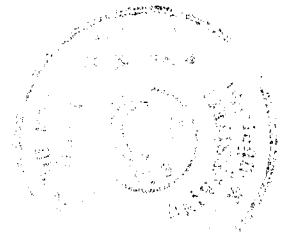
osilatör bağıntısı sağlanır. Bu bağıntı yardımıyla koset temsilleri

$$\begin{bmatrix} a & (1-a^*a)^{1/2} \\ -(1-aa^*)^{1/2} & a^* \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

şeklindedir. Çünkü $q^2(1-a^*a) = 1-aa^*$ dır.

O halde $SU_q(2)$ quantum grubunun elemanlarını

$$M = A_1 \chi_1 \quad (3.4.7)$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} a & (1-a^*a)^{1/2} \\ -(1-aa^*)^{1/2} & a^* \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.4.9)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ve

$$1-aa^* = q^2(1-a^*a)$$

bağıntısı geçerlidir. χ_1 matrisindeki α değeri a ve a^* q -osilatör operatörleriyle değişmeli olan bir reel fazdır. A_1 matrisine q -osilatör matrisi diyeceğiz.

M quantum matrisi

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & e^{i\alpha}(1-a_1^*a_1)^{1/2} \\ -qe^{-i\alpha}(1-a_1^*a_1)^{1/2} & a_1^* \end{bmatrix} \quad (3.4.10)$$

$$M^* M^T = I$$

bağıntısını sağlar. Burada $*$ M nin elemanları üzerinde Hermisyen eşleniği ve T de adi transpozeyi gösterir.

$$1-aa^* = q^2(1-a^*a)$$

bağıntısı kullanılarak M matrisinin elemanlarının quantum grubu komütasyon bağıntılarını sağladığı gösterilebilir [9].

Şimdi $SU_q(3)$ grubunu gözönüne alalım.

Bu grubun matris elemanları



$$A_{12} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_{12} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.11)$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad x_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $SU_q(3)$ ün bir elemanı

$$M = A_{12}(a) A_{23}(b) A_{12}(c) x_{12}(\alpha_1) x_{23}(\alpha_2) \quad (3.4.12)$$

şeklinde ifade edilmişti [9],[10]. Burada her A_{ii+1} matrisi 2×2 diagonal bloku $i, i+1$ nci pozisyona karşı gelen (2×2) q -osilatör matrisini ihtiva eder. Diagonal üzerindeki kalan elemanlar 1 dir ve diğer bütün elemanlar sıfırdır. Her x_{ii+1} matrisi ise diagonaldir ve i -nci diagonal eleman olarak $e^{i\alpha}$ yı $(i+1)$ nci diagonal eleman olarak $e^{-i\alpha}$ yı ve kalan diagonal elemanlar 1'i ihtiva ederler.

(3.4.12) bağıntısındaki $A_{12}(c) x_{12}(\alpha_1)$ matrisi $SU_q(2)$ alt grubunun bir elemanıdır, $x_{23}(\alpha_2)$ matrisi de $U(1)$ alt grubunu oluşturur. Dolayısıyla $A_{12}(c) x_{12}(\alpha_1) x_{23}(\alpha_2)$ matrisi $SU_q(3)$ quantum grubunun $U_q(2) = SU_q(2) \times U(1)$ şeklindeki quantum alt grubunu oluşturur.

O halde a ve b komütatif q -osilatörleri olmak üzere $A_{12}(a) A_{23}(b)$ matrisi $SU_q(3)/U_q(2)$ quantum koset uzayının bir temsilcisidir.

$SU_q(3)$ ün bir elemanı a, b ve c osilatörlerinin ve α, β, γ fazlarının yeniden tanımlanması ile

$$M = x_{23} x_{12} A_{12} A_{23} A_{12} \quad (3.4.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki χ_{ii+1} matrisleri [9] da kullanılan metotlarla ve osilatörlerin yeniden tanımlanmasıyla istenilen yere yazılabilir.

$$M = A_{12}(a)A_{23}(b)A_{12}(c)\chi_{12}(\alpha)\chi_{23}(\beta) \quad (3.4.14)$$

[9] daki metotlar kullanılarak $SU_q(3)$ ün bir elemanı

$$M = A_{23}A_{12}A_{23}\chi_{12}\chi_{23} \quad (3.4.15)$$

şeklinde de yazılabilir.

(3.4.12) ve (3.4.15) ifadeleri karşılaştırılarak ve χ_{ii+1} faz matrislerini yazmayarak bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlıyabiliriz. Bu durumda

$$A_{12}A_{23}A_{12} \simeq A_{23}A_{12}A_{23} \quad (3.4.16)$$

örgü grubu bağıntısı elde edilir.

Bu eşdeğerlik bağıntısı gerçekte

$$A_{12}(u)A_{23}(v)A_{12}(w)\chi_{12}(\lambda)\chi_{23}(\mu) = A_{23}(a)A_{12}(b)A_{23}(c)$$

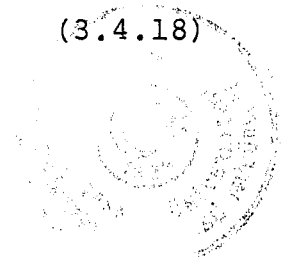
şeklinde bir bağıntıyı ifade eder. Benzer şekilde $A_i, A_{i+1}, \chi_i, \chi_{i+1}$ ile üretilen $SU_q(3)$ grubunu ve A_i matrislerini kullanarak

$$A_i A_{i+1} A_i \simeq A_{i+1} A_i A_{i+1} \quad (3.4.17)$$

örgü grubu bağıntısını elde ederiz.

Genelleştirildiğinde, [9] da bulunan temsillerden $SU_q(n)$ nin bir elemanı

$$M = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-k} A_i \prod_{i=1}^{n-1} \chi_i \quad (3.4.18)$$



şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin $SU_q(4)$ için bu formül yardımıyla

$$M = \prod_{k=1}^3 \prod_{i=1}^{4-k} A_i \prod_{i=1}^3 x_i$$

$$= \prod_{k=1}^3 A_1 A_2 \dots A_{4-k} x_1 x_2 x_3$$

$$M = A_1 A_2 A_3 A_1 A_2 A_1 x_1 x_2 x_3 \quad (3.4.19)$$

olarak bulunur. Burada $A_1 A_2 A_1 x_1 x_2 x_3$ matrisi $SU_q(4)$ grubunun $U_q(3) = SU_q(3) \times U(1)$ şeklindeki alt grubunun bir temsilcisidir. Dolayısıyla

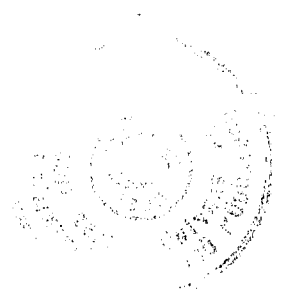
$$A_1 A_2 A_3 \quad (3.4.20)$$

matrisi $SU_q(4)/U_q(3)$ quantum kosetinin bir temsilcisi olarak düşünülebilir.

Bu şekilde devam edilerek $SU_q(n)/U_q(n-1)$ kosetinin temsilleri

$$\prod_{i=1}^{n-1} A_{ii+1} \quad (3.4.21)$$

matrisiyle özdeşleştirilebilir [9],[10].



3.5. KUANTUM GRASSMANN MANİFOLDLARI VE KOSETLERİ

Önce reel Grassmann manifoldlarının tanımını verelim.

$O(n+p)$, V^{n+p} üzerinde bir ortogonal grup olsun. $G_{p,n}$ de V^{n+p} deki tüm n -düzlemlerin kümesi olsun. O zaman $O(n+p)$ $G_{p,n}$ nin permütasyonlarının bir transitiv Lie grubudur. $O(n+p)$ Lie grubu $G_{p,n}$ üzerinde bir diferansiyel yapı oluşturur. Bu yapı ile $G_{p,n}$ bir Grassmann manifoldu olarak adlandırılır. p^n sabitini içeren $O(n+p)$ alt grubu $O(n) \times O(p)$ ile tanımlanabilir. Burada $p^n \in G_{p,n}$ olmak üzere p^n nin V^{n+p} deki ortogonal komplemanı p^p dir. Ve $O(n+p)/O(n) \times O(p)$ diferansiyel yapısına sahiptir.[14].

Kompleks Grassmann manifoldları, benzer şekilde kompleks lineer uzay üzerine $U(n)$ grubunun etkisi gözönüne alınarak inşa edilir.

Bu bölümde Kısım 3.4 de gözden geçirdiğimiz $SU_q(n)/U_q(n-1)$ koset uzaylarının inşasına benzer şekilde tüm kompleks quantum Grassmann manifoldlarını inşa edeceğiz. Önce kısalık açısından (3.4.21) de $A_{i,i+1}$ olarak tanımladığımız matrisleri A_i ve $\chi_{i,i+1}$ ile tanımladığımız matrisleri χ_i ile göstereceğiz.

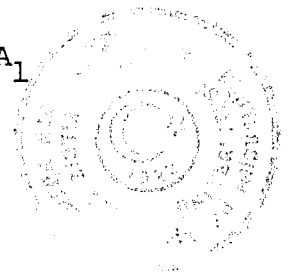
Örnek olarak $SU_q(4)/SU_q(2) \times SU_q(2) \times U(1)$ quantum kosetini inşa edelim.

$SU_q(4)$ ün bir elemanı (3.4.18) formülü yardımıyla

$$M = A_1 A_2 A_3 A_1 A_2 A_1 \chi_1 \chi_2 \chi_3 \quad (3.5.1)$$

şeklinde bulunur. Örgü grubu bağıntısı (3.4.17) ve $A_i A_j = A_j A_i$, $|i-j| \neq 1$ bağıntısı kullanılarak

$$A_1 A_2 A_3 A_1 A_2 A_1 \simeq A_1 A_2 A_1 A_3 A_2 A_1 \simeq A_2 A_1 A_2 A_3 A_2 A_1$$



$$\simeq A_2 A_1 A_3 A_2 A_3 A_1 \simeq A_2 A_3 A_1 A_2 A_1 A_3 \quad (3.5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bunu (3.5.1) de yerine koyarak

$$M = A_2 A_3 A_1 A_2 A_1 A_3 \chi_1 \chi_2 \chi_3 \quad (3.5.3)$$

bulunur. $SU_q(4)/SU_q(2) \times SU_q(2) \times U(1)$ quantum kosetini teşkil etmek demek (3.5.3) ifadesinin en sağındaki $SU_q(2) \times SU_q(2) \times U(1)$ e ait olan çarpanı elde etmek demektir. Bu çarpan da $A_1 A_3 \chi_1 \chi_2 \chi_3 = A_1 \chi_1 A_3 \chi_3 \chi_2$ ifadesidir. Dolayısıyla $SU_q(4)/SU_q(2) \times SU_q(2) \times U(1)$ kosetinin kanonik temsili

$$M = A_2 A_3 A_1 A_2$$

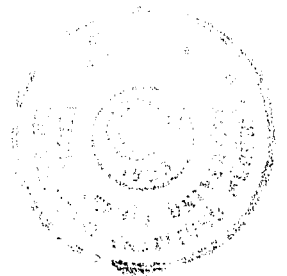
dir. $SU_q(k) \times SU_q(n-k) \times U(1)$ çarpanını elde etmek için gerekli düzenleme her zaman yapılabilir. Bunu bir lemma ile verelim:

Lemma:

$$A_k A_{k+1} \dots A_m A_{m+1} A_k \dots A_m \simeq A_{k+1} \dots A_{m+1} A_k \dots A_m A_{m+1}$$

İspat:

$$\begin{aligned} & A_k A_{k+1} A_{k+2} \dots A_m A_{m+1} A_k A_{k+1} \dots A_m \\ & \simeq A_k A_{k+1} A_k A_{k+2} \dots A_m A_{m+1} A_{k+1} \dots A_m \\ & \simeq A_{k+1} A_k A_{k+1} A_{k+2} \dots A_m A_{m+1} A_{k+1} \dots A_m \\ & \simeq A_{k+1} A_k A_{k+1} A_{k+2} A_{k+1} \dots A_m A_{m+1} \dots A_m \\ & \simeq A_{k+1} A_k A_{k+2} A_{k+1} A_{k+2} \dots A_m A_{m+1} A_{k+2} \dots A_m \\ & \simeq A_{k+1} A_{k+2} A_k A_{k+1} A_{k+2} \dots A_m A_{m+1} A_{k+2} \dots A_m \\ & \simeq A_{k+1} A_{k+2} A_k A_{k+1} A_{k+2} \dots A_m A_{k+2} A_{m+1} \dots A_m \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\simeq A_{k+1} A_{k+2} A_k A_{k+1} A_m A_{k+2} A_m A_{m+1} A_m \\
&\simeq A_{k+1} A_{k+2} A_m A_k A_{k+1} A_{k+2} A_{m+1} A_m A_{m+1} \\
&\simeq A_{k+1} A_{k+2} A_m A_{m+1} A_k A_{k+1} A_{k+2} \cdots A_m A_{m+1}
\end{aligned}$$

Örneğin

$$\begin{aligned}
A_3 A_4 A_5 A_3 A_4 &= A_3 A_4 A_3 A_5 A_4 \\
&= A_4 A_3 A_4 A_5 A_4 \\
&= A_4 A_3 A_5 A_4 A_5 \\
&= A_4 A_5 A_3 A_4 A_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 A_4 A_5 A_6 A_3 A_4 A_5 &= A_3 A_4 A_5 A_3 A_4 A_6 A_5 \\
&= A_3 A_4 A_3 A_5 A_4 A_6 A_5 = A_4 A_3 A_4 A_5 A_4 A_6 A_5 \\
&= A_4 A_3 A_5 A_4 A_5 A_6 A_5 = A_4 A_5 A_3 A_4 A_6 A_5 A_6 = A_4 A_5 A_6 A_3 A_4 A_5 A_6
\end{aligned}$$

olur.

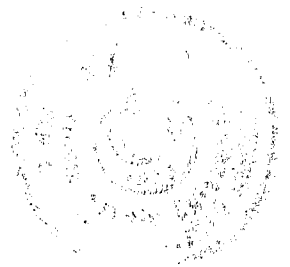
Bu Lemma ve $SU_q(n)$ kuantum grubunun (3.4.18) ile verilen temsili kullanılarak $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ kompleks Grassmann manifoldlarının q -deformasyonunun kanonik koset temsilleri

$$M = \prod_{\ell=0}^{m-1} \prod_{k=0}^{n-1} A_{m+k-\ell} \quad (3.5.4)$$

formülüyle verilir.

Örneğin $SU_q(4)/SU_q(2) \times SU_q(2) \times U(1)$ kanonik koset temsili bu formül ile

$$\begin{aligned}
M &= \prod_{\ell=0}^1 \prod_{k=0}^1 A_{2+k-\ell} \\
&= \prod_{\ell=0}^1 A_{2-\ell} A_{3-\ell} \\
&= A_2 A_3 A_1 A_2
\end{aligned}$$



şeklinde bulunur. Bu bizim daha önce bulduğumuz ifadeyle aynıdır. Bir başka örnek olarak $SU_q(5)/SU_q(3) \times SU_q(2) \times U(1)$ kuantum uzayının kanonik koset temsili

$$\begin{aligned} M &= \prod_{\ell=0}^1 \prod_{k=0}^2 A_{2+k-\ell} \\ &= \prod_{\ell=0}^1 A_2^{-\ell} A_{3-\ell} A_{4-\ell} \\ &= A_2 A_3 A_4 A_1 A_2 A_3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$SU_q(6)/SU_q(3) \times SU_q(3) \times U(1)$ kanonik koset temsili ise

$$M = A_3 A_4 A_5 A_2 A_3 A_4 A_1 A_2 A_3$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla (3.5.4) formülü; quantum Grassmann manifoldların koordinatlarının $m \times n$ tane q -osilatör den ibaret olduğunu gösterir. Burada q -osilatörlerin yaratma ve yoketme operatörleri

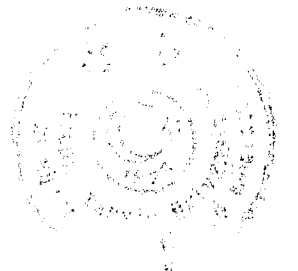
$$1 - aa^* = q^2 (1 - a^*a)$$

komütasyon bağıntısını sağlar.

(3.4.18) ve (3.5.4) formüllerinde A_i matrislerine bağlı olan q -osilatörleri bağımsız olarak alınabilir. Bu da örgü grubu bağıntılarına

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad |i-j| \neq 1 \quad (3.5.5)$$

$$A_i A_{i+1} A_i \simeq A_{i+1} A_i A_{i+1}$$



ek olarak

$$A_i^2 \simeq A_i \quad (3.5.6)$$

özelliğinin olmasını gerektirir. Bu özellik yazmadığımız faz matrisleri yerine konularak

$$A_i(a)A_i(b) = A_i(c)\chi_i(\lambda) \quad (3.5.7)$$

şeklinde yazılır. Burada a, b q -osilatörleri için c q -osilatörü ve λ fazı belirlenmiştir.

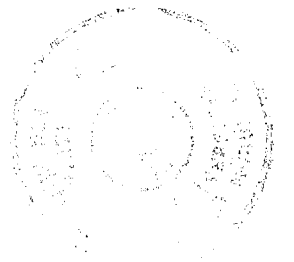
(3.5.6) bağıntısı, iki quantum matrisinin çarpımının yine bir quantum matrisi olduğu gerçeğinden elde edilir. Fakat bu özellik için iki quantum matrisinin elemanları bağımsız (birbirleriyle değişmeli) alınmalıdırlar. Fakat (3.5.6) bağıntısı A_i^{-1} in var olmasıyla yeniden yazılırsa (3.5.5) ve (3.5.6) bağıntıları örgü grubunu tanımlayacaktır. Bir quantum matrisi olarak A_i matrisinin A_i^{-1} inversi mevcuttur, fakat q^{-1} parametresine sahiptir. Bundan başka A_i^{-1} e karşı gelen osilatör, A_i e karşı gelen osilatör ile aynıdır.

Bununla birlikte, quantum Grassmann manifoldların temsillerinde A_i matrislerine karşı gelen q -osilatörleri bağımsız (komütatif) olmak zorundadır. Bundan dolayı A_i^{-1} (3.4.18) ve (3.5.4) formüllerinde gözönüne aldığımız matrislerin sınıfına ait olamaz.

$$A_i^{-1}(a) = \begin{bmatrix} a^* & -q^{-1}(1-a^*a)^{1/2} \\ q(1-aa^*)^{1/2} & a \end{bmatrix} \quad (3.5.8)$$

(3.4.18) ve (3.5.4) ifadeleri örgü grubunun iyi tanımlanmış elemanlarını verir, çünkü bu ifadeler A_i q -osilatör matrisinin inversini içermezler. Ve (3.4.18) ve (3.5.4) formüllerinin kullanımında hiçbir zaman (3.5.6) bağıntısını kullanmak zorunda kalmayız.

Böylece bu formülleri kullanarak her $SU_q(n)$ quantum grubuna ve her $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ quantum grup kosetlerine örgü grubunun iyi-tanımlanmış bir elemanının karşı geldiğini söyleyebiliriz.



3.6. KUANTUM GRASSMANN MANİFOLDLARIN HECKE CEBİRİ İLE İLGİLİ

Örgü grubu bağıntıları

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad |i-j| \neq 1$$

$$A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1}$$

ve

$$A_i^2 = A_i$$

bağıntısı birlikte $H(0, n)$ Singüler Hecke cebirini tanımlarlar. Bölüm 2 Kısım 2.3 den Hecke cebirinin tanımını hatırlamaya çalışalım: $H(q, n)$ Hecke cebiri

$$g_i^2 = (q-1)g_i + q, \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

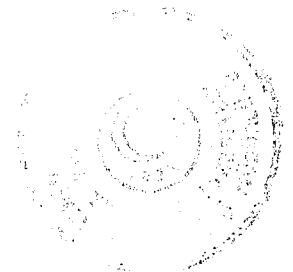
$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-2$$

$$g_i g_j = g_j g_i, \quad |i-j| \geq 2$$

bağıntılarını sağlayan temsillerden oluşuyordu. Bu bağıntıların ilkinde $q=0$ alınmasıyla $H(0, n)$ Singüler Hecke cebri elde edilir. Bu cebirin jeneratörleri invertible değildir. Bu tabiki

$$A^{-1}(a) = \begin{bmatrix} a^* & -q^{-1}(1-a^*a)^{1/2} \\ q(1-aa^*)^{1/2} & a \end{bmatrix}$$

invers osilatör matrislerinin var olmasıyla ilgilidir. Ve bu matrisler ifadelerimizde hiçbirzaman bulunmazlar.



3.7. KUANTUM GRUPLARININ VE KUANTUM GRUP KOSETLERİNİN ÖRGÜLER, DÜĞÜMLER VE HALKALARLA İLGİSİ

Önce $SU_q(n)$ quantum gruplarının oluşturdukları örgüleri inceleyelim. Bu grupları temsil eden elemanlar

$$M = \begin{matrix} n-1 & n-k & & n-1 \\ \Pi & \Pi & A_i & \Pi \\ k=1 & i=1 & & i=1 \end{matrix} \chi_i$$

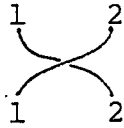
formülüyle elde edilmişti. Bu elde edilen elemanlar örgüleri oluştururlar. Bunların uçlarının birbirine bağlanmasıyla da kapalı bir şekil elde ederiz. Bu kapalı şekiller düğüm - lerdir. Ve bu düğümler üzerinde herhangi bir noktadan baş - layarak yine aynı noktaya döndüğümüz zaman bir halka oluş - tuğunu görürüz. Bu halkaların sayısı bir ve birden çok ola - bilir.

Şimdi örneklerle bu örgüleri, düğümleri ve halkaları elde etmeye çalışalım.

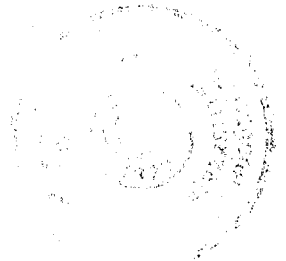
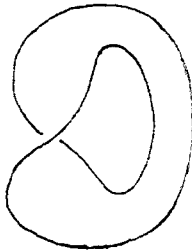
$SU_q(2)$ quantum grubunun bir elemanı

$$M = A_{12}$$

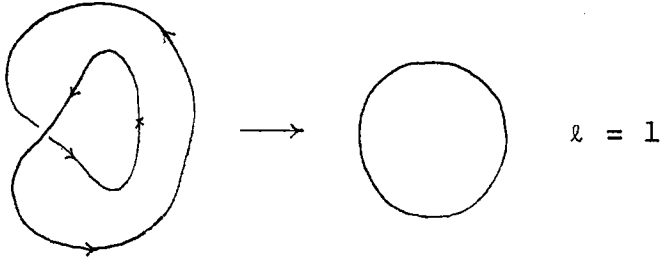
idi. Bu A_{12} matrisi bir örgü oluşturur. Bu örgüyü çizelim:



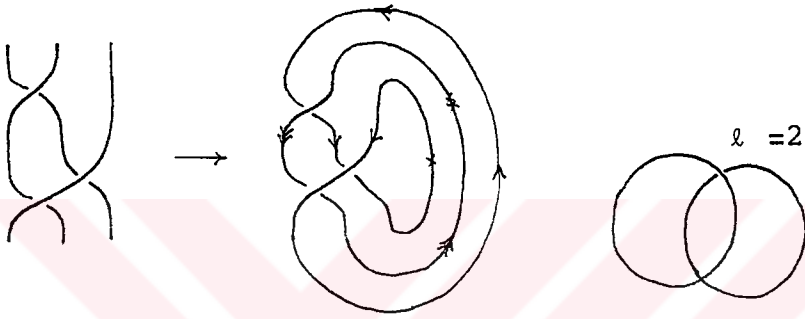
Bu örgünün uçlarını birbirine bağlayarak düğümü elde ederiz.



Bu düğüm üzerinde bir noktadan başlayarak hareket ettiğimiz de bir halkanın oluştuğunu görürüz.

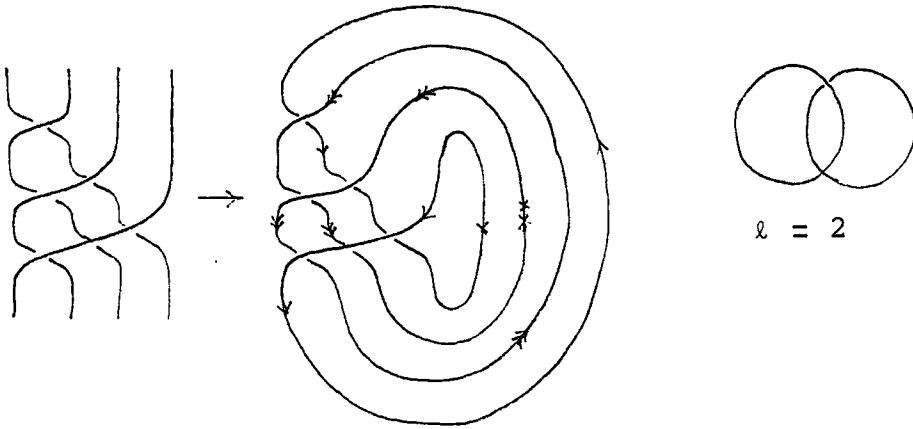


$SU_q(3)$ ün bir elemanını $M=A_{12}A_{23}A_{12}$ olarak bulmuştuk. Bu $A_{12}A_{23}A_{12}$ matrisleri bir örgü oluşturur. Bu örgüyü çizelim.



Burada halka sayısı $l = 2$ dir.

$SU_q(4)$ ün bir elemanı $M=A_{12}A_{23}A_{34}A_{12}A_{23}A_{12}$ idi. Bunun için örgüyü, düğümü ve halkaları elde edelim:



Burada halka sayısı $l=2$ dir.

Bu şekilde devam ederek $SU_q(n)$ ile ilgili örgülerin kapanışlarından l parçalı halkaları elde ederiz. Burada l halka sayısı $(n+1)/2$ nin tam kısmına eşittir.



Şimdi de $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ quantum grup kosetlerine karşı gelen örgüleri inceleyelim: Bu kosetlerin kanonik temsilleri

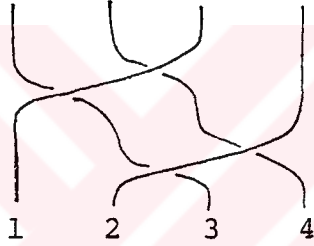
$$M = \prod_{\ell=0}^{m-1} \prod_{k=0}^{n-1} A_{m+k-\ell}$$

formülüyle elde edilmişti.

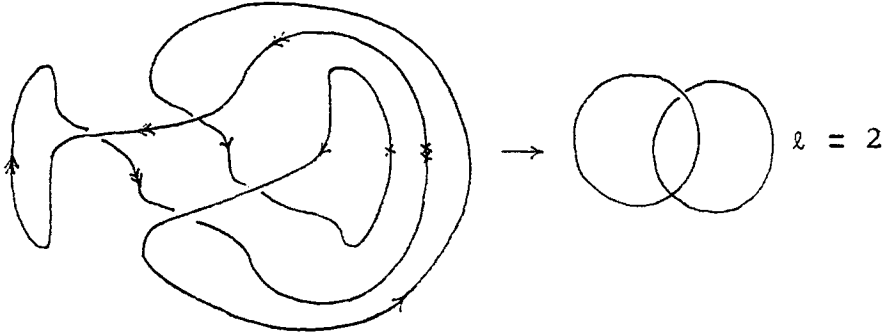
$SU_q(4)/SU_q(2) \times SU_q(2) \times U(1)$ kosetinin bir temsilcisi

$$M = A_{23}A_{34}A_{12}A_{23}$$

idi. Bu matrisler bir örgü oluşturur. Bu örgüyü çizelim:



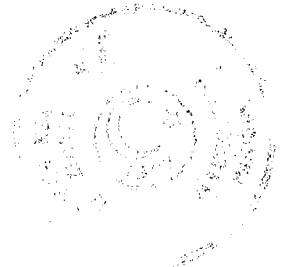
Bu örgünün uçlarını birbirine bağlayarak düğümü oluştururuz.



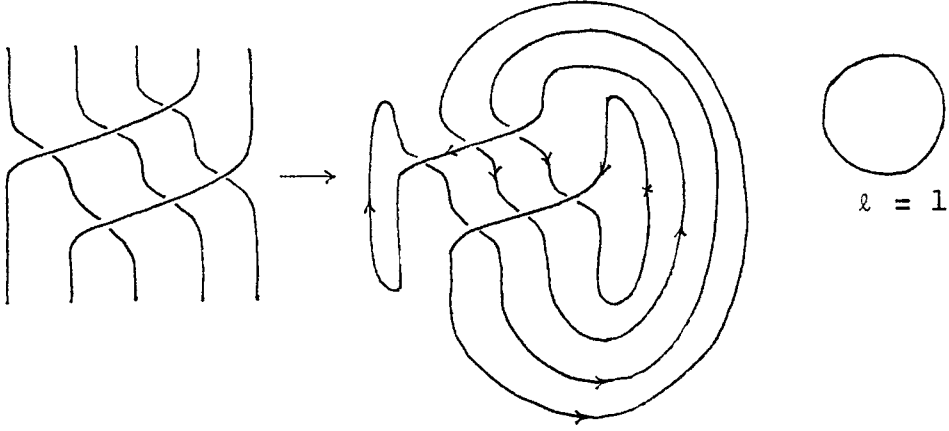
Bu düğümlerin açık şekli halkaları oluşturur. Burada halka sayısı $l=2$ dir.

$SU_q(5)/SU_q(3) \times SU_q(2) \times U(1)$ kosetinin temsilcisi

$$M = A_{23}A_{34}A_{45}A_{12}A_{23}A_{34}$$



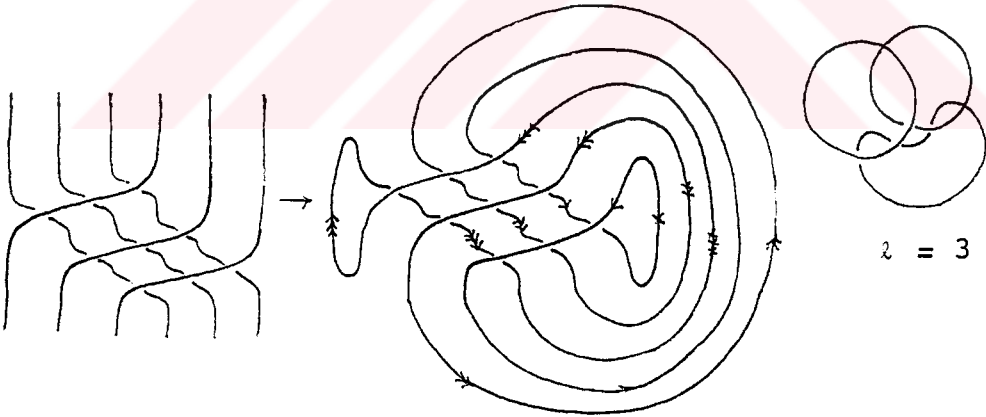
idi. Bu matrislerin oluşturduğu örgüyü, düğümü ve halkaları elde edelim.



$SU_q(6)/SU_q(3) \times SU_q(3) \times U(1)$ kosetinin temsilcisi

$$M = A_{34} A_{45} A_{56} A_{23} A_{34} A_{45} A_{12} A_{23} A_{34}$$

dür. Bunların oluşturduğu örgüyü, düğümü ve halkaları çizelim:



$SU_q(6)/SU_q(4) \times SU_q(2) \times U(1)$ in temsilcisi

$$M = A_{23} A_{34} A_{45} A_{56} A_{12} A_{23} A_{34} A_{45}$$

dir. Burada $\ell = 2$ halka bulunur.

Bu şekilde devam edilerek $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ ile ilgili örgülerin kapanışlarından ℓ parçalı halkaları elde

ederiz. Burada ℓ halka sayısı m ve n nin en büyük ortak bölüneni (E.B.O.B.) dir.

$SU_q(n)/U_q(n-1)$ koset temsilleri

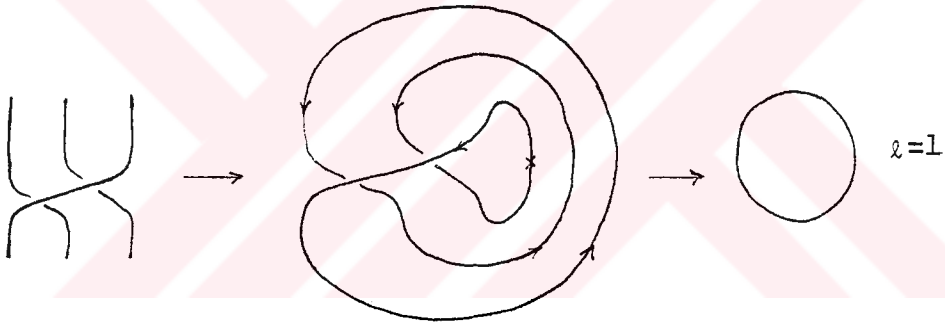
$$\prod_{i=1}^{n-1} A_{ii+1}$$

matrisleriyle verilmişti. Bunların oluşturdukları örgüler - den tek bir halka elde edilir.

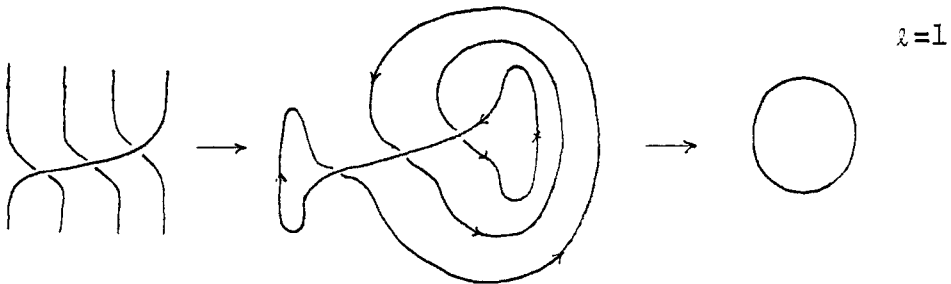
Örneğin $SU_q(3)/U_q(2)$ quantum kosetinin bir temsilcisi

$$M = A_{12}A_{23}$$

dir. Bu örgüyü çizelim



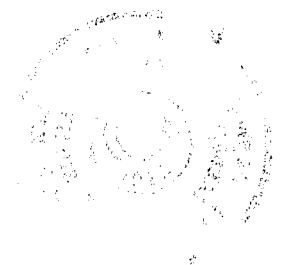
$SU_q(4)/U_q(3)$ ün bir temsilcisi $M=A_{12}A_{23}A_{34}$ dir.



SONUÇ

Kısım 3.1 de verdiğimiz, örgü grubunun elemanlarının bir Hilbert uzayında operatörler olan matrislerle temsili yeni bir cebirsel yapı oluşturmaktadır. Bu cebirsel yapı, hem matematikte diğer yapılarla ilişkisi açısından hem de bir Hilbert uzayında temsil edilebildiğinden dolayı Fizikte Kuantum mekaniksel bir sistem oluşturması açısından son derece ilgi çekicidir. Ortaya attığımız cebirin bir Hilbert uzayı üzerinde başka temsillerinin varlığı ise araştırılması gereken bir konudur.

Kısım 3.5 te verdiğimiz ve 3.6 ve 3.7 de diğer özelliklerini incelediğimiz $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ quantum Grassmann manifoldları son derece ilginç matematiksel bir yapı oluşturmaktadır. Bu koset uzayının elemanları $n.m$ tane q -osilatörü cinsinden ifade edilebildiğinden, bir anlamda bu uzay $n.m$ boyutlu bir q -osilatör uzayı olarak düşünülebilir. Halbuki $q=1$ hali için $SU_q(n+m)/SU_q(n) \times SU_q(m) \times U(1)$ Grassmann manifoldu ve $n.m$ boyutlu adi osilatör cebri tamamıyla değişik cebirsel yapılardır. Böylece $q=1$ için değişik olan kavramlar $q \neq 1$ için aynı kavramlar olarak birleşirler. Bu açıdan $q \neq 1$ hali, $q=1$ haline göre hem daha elemanter hem de daha önemlidir.

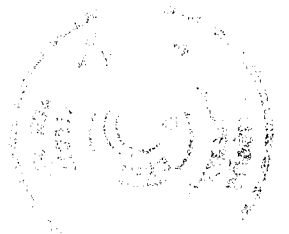


KAYNAKLAR

- [1] JONES, V., A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. AMS 12 (1985).
- [2] FREYD, P., YETTER, D., HOSTE, J., LICKORISH, W., MILLET, K. and OCNEANU, A., A new polynomial invariant of knots and links, Bull. AMS 12 (1985).
- [3] KAUFFMAN, L., State models and the Jones polynomial, to appear in Topology.
- [4] FADDEEV, L., Yu. RESHETIKHIN. and TAKHAJAN, L.A., Quantization of Lie Groups and Lie Algebras, preprint LOMI, 1987; DRINFELD, V.G., Quantum Groups, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, 798-820 (1986); JIMBO, M., Lett. Math. Phys. 11, 247 (1986); WORONOWICZ, S.L., Commun. Math. Phys. 111, 613 (1987)
- [5] KAUFFMAN, L.H., Knots and Physics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1991)
- [6] "New Developments in the Theory of Knots" ed. KOHNO, T., World Scientific, Singapore, 1989.
- [7] JONES, V., Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials. Annals of Mathematics, 126 (1987).
- [8] ARIK, M. and COON, D.D., J Math. Phys. 17, 524, (1975).



- [9] ARIK, M. and ÇELİK, S., Boğaziçi University preprint BUFB - 92 - 3 (1992) "Unitary quantum groups, quantum Projective spaces, and q-oscillators" Zeitschrift für Physik C de yayınlanacak.
- [10] ÇELİK, S., Kuantum Matris Grupları ve q-osilatörleri İ.T.Ü. Doktora Tezi (1992)
- [11] ALEXANDER, J., Topological Invariants of Knots and Links, Trans. AMS 30 (1928)
- [12] COXETER, H.S.M., MOSER, W.O.J., Generators and Relations for Discrete Groups. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1972)
- [13] BIRMAN, J.S. and WENZL, H., Braids, Link polynomials and a New Algebra Transactions of the American Mathematical Society, 313 (1989)
- [14] AUSLANDER, L., MACKENZIE, R.E., Introduction to Differentiable Manifolds Mc Graw-Hill Inc (1963).
- [15] MURPHY G.J., C^* -Algebras and Operator Theory Academic Press, Inc. (1990).



Ö Z G E Ç M İ Ş

Fügen AYDIN 1957 yılında Bursa'da doğdu. İlk öğrenimini Polatlı'da, orta öğrenimini Çorlu Lisesinde tamamladıktan sonra; 1975 yılında, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Lisans Bölümüne girdi. 1980 yılında adı geçen Fakülte-den mezun oldu. 1983-1985 yılları arasında, bir kamu kuruluşunda çalıştı. 1985 yılında Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde, Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 1986 yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne, Araştırma Görevlisi olarak girdi. 1987 yılında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Halen adı geçen Üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmekte olup, evli ve bir çocuk annesidir.

