

MEUSNIER TEOREMİ YARDIMIYLA
YAPILAN
BİR TASVİR HAKKINDA

173563

Yıldız Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü'nce

"FEN DOKTORU"

Unvanı verilmesi için kabul edilen tezdır.

NEDRET KARASIN

Tezin Enstitüye verildiği tarih: 26 Haziran 1984

Tezin savunulduğu tarih : 25 Eylül 1984

Doktora Yöneticisi	: Prof.Dr.Asaf V.GÜNHAN	(İTÜ)
Jüri Üyesi	: Prof.Ömür ARIKAN	(YÜ)
Jüri Üyesi	: Doç.Behiç ÇAĞAL	(YÜ)

.İstanbul,1985

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
SUMMARY	II
1. GİRİŞ	1
2. MEUSNIER TEOREMİ HAKKINDA GENEL BİLGİ ...	7
2.1 Yüzey Şeridi	7
2.2 Şerid eğrisinin asal normal vektörü .	16
2.3 İkinci Esas Form	19
2.4 Meusnier Teoremi	22
3. MEUSNIER TEOREMİ YARDIMIYLA YAPILAN YÜZEY TASVİRİ.....	27
3.1 Genel Tasvir.....	28
3.2 Sabit θ	29
3.3 Sabit olmayan θ	36
3.3.1 Eğriliği sabit eğriler	38
3.3.1.1 Silindir yüzeyi üzerinde Öklid Helisi sabit θ	39
3.3.1.2 Silindir yüzeyi üzerinde olmayan Öklid helisi	42
3.3.1.3 Silindir yüzeyi üzerinde olmayan sabit eğrilikli eğriler	45
3.3.2 Eğriliği sabit olmayan eğriler	49
4. SONUÇLAR	55
KAYNAKLAR	57

ÖZET

Bu çalışmada yüzeyleri, üzerindeki eğriler vasıtası ile karakterize eden Meusnier Teoremi kullanılmak suretiyle bir tasvir geliştirilmiştir.

Meusnier teoremine göre bir yüzeyin herhangi bir adi noktasındaki düzlemsel kesitleri ile elde edilen eğrileri arasında bazı bağıntılar vardır.

Bu çalışmada, bu bağıntılardan yararlanmak suretiyle, yüzeyden ayrılmış, eğriliği sabit olan veya olmayan eğriler kullanılarak, Meusnier Teoremi ile yapılan tasvirde eğriler arasında özel bir perspektif afinitenin varlığı bulunmuştur.

Ani perspektif afinite olarak adlandırılan bu özelliği kullanılmak suretiyle yüzeylerin teşekkülü açıklanmış bulunmaktadır.

SUMMARY

In this thesis, the theorem of Meusnier has been used to develop a mapping which characterizes the surfaces by means of their curves overall.

According to the theorem of Meusnier, there are some rules between the curves which obtained plane sections of the surface on any regular point.

It is found a special perspective affinity when the mapping was made between the curves by the Meusnier Theorem.

Those curves we used were on the surface or separated from the surface.

The formation of surfaces has been illustrated by using the special kind of perspective affinity which is called instantaneous perspective affinity has different directions from one point to another.

I. G İ R İ Ş

1.1. Yüzeylerin birbiri üzerine tasviri (mapping) denildiğinde bir S_1 yüzeyinin herhangi bir parçasının diğer bir S_2 yüzeyinin belirli bir parçasını karşılması, ve karşıt olarak da, S_2 yüzeyinin, o belirli parçasının S_1 yüzeyinin ilk seçilen parçasına tekabül etmesi anlaşılmaktadır.

Yani iki yüzey parçası birbirine biünivok olarak tekabül ediyorsa, bu yüzeyler birbiri üzerine tasvir edilebilir denilir.

Bu söylenilenleri analitik olarak da ifade etmek mümkündür.

Söyleki S_1 ve S_2 yüzeyleri

$$(1) \quad S_1 \begin{pmatrix} x_1 = x_1(u, v) \\ y_1 = y_1(u, v) \\ z_1 = z_1(u, v) \end{pmatrix} \quad S_2 \begin{pmatrix} x_2 = x_2(u, v) \\ y_2 = y_2(u, v) \\ z_2 = z_2(u, v) \end{pmatrix}$$

denklemleri ile verilsinler; S_1 yüzeyinin bir $M_1(u_1, v_1)$ koordinatlı noktası S_2 yüzeyinin $M_2(u_2, v_2)$ noktasına biünivok olarak tekabül ettiği takdirde, yani bu iki noktayı birbirine belirli şartlarla tekabül ettiren

$$(2) \quad \begin{pmatrix} u_1 = f(u_2, v_2) \\ v_1 = g(u_2, v_2) \end{pmatrix}$$

fonksiyonlarını alalım. Bu fonksiyonlar B_1 ve B_2 tanım bölgeleri içinde sürekli ve türevi alınabilir olmak üzere, ters fonksiyonların da aynı tanım bölgesi içinde, sürekli, türevi alınabilir bir fonksiyon olması gerekli olmakla beraber,

$$(3) \frac{D(u_1, v_1)}{D(u_2, v_2)} \neq 0$$

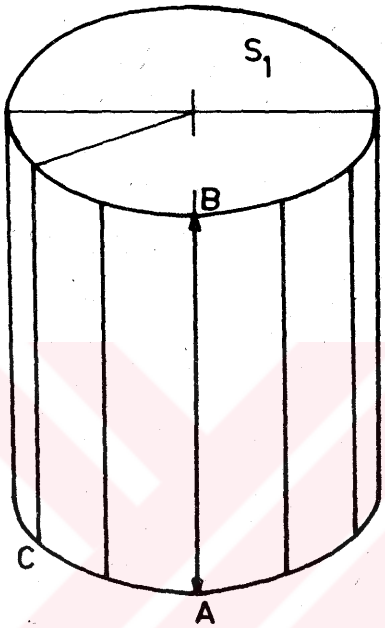
fonksiyonel determinantı da yukarıdaki şartı sağladığı takdirde, S_1 ve S_2 yüzeylerinin birbiri üzerine B_1 ve B_2 tanım bölgeleri içinde tasviri yapılmış olur, veya *tasvir edilebilir*, denilir.

Bu söylenilenleri daha açıklığa kavuşturmak üzere göze hitap eden bir geometrik örnek üzerinde açıklıyalım: (Şekil: 1 a) da gösterilen bir basit dönel silindir parçası, birkaç ana doğrusu gösterilmek suretiyle bu iki, eksene dik paralel tabanı arasındaki anadoğruların uzunluğunun eşitliği aşikârdır.

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = C(A)$$

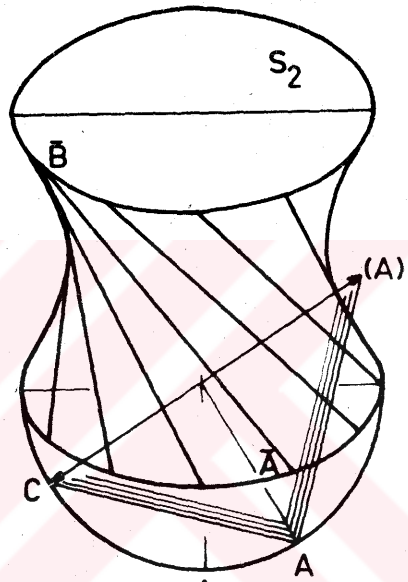
Şekil: 1 b de ise bu dönel silindirin bir tabanı sabit tutulmak üzere, diğer tabanının birinciye yaklaştırılması örneğin, iki taban arasındaki anadoğru parçalarının *uzunluklarının sabit kalması suretiyle*, tabanın birini veya taban dairesini kendi etrafında belirli bir açı kadar döndürmekle mümkündür.

O halde (Şekil: 1 a) ve (Şekil: 1 b) de verilen bu iki S_1 ve S_2 yüzeyleri aynı taban ve aynı anadoğru uzunluğuna sahip, biri dönel silindir yüzeyi parçası, diğeri bir dönel



a.

Sek.1



b.

hiperboloid parçasıdır. Bir dönel silindir yüzeyi parçası, yani iki tabanı ile sınırlanmış bir S_1 yüzeyi, ana doğrularının Öklid uzunluk ölçüsü anlamında, *uzunluğa sadık* bir tasviri yapıldığı takdirde bir dönel hiperboloid yüzeyine dönüşür.

O halde yukarıda açıklanan S_1 ve S_2 yüzeyleri biri özel şartlarla seçilen bir dönel silindir parçası, diğeri de yine özel şartlarla seçilen bir dönel hiperboloid parçasıdır.

Burada (2) denklemiyle verilen f ve g fonksiyonları da her iki yüzeyin anadoğrularının eşit kalmasını sağlayan dönüşüm fonksiyonlarıdır.

Böylece:

a) Bu, uzunluğa sadık kalmak üzere yapılan tasvirlerle *izometrik tasvirler* denir.

b) Alınan S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerinde başka geometri elemanlarının da sabit olması veya dönüşüm esnasında sabit kalması düşünülebilir. Örneğin yüzeylerin birbiri üzerinde tasvirinde yüzeylerden biri üzerindeki üç nokta arasında bulunan açı sabit kalmak üzere, diğer yüzey üzerindeki birbirine karşı gelen noktalar arasındaki açığa eşit kalıyorsa, böyle tasvirlerle *açı sadakati olan veya konform tasvirler* denilir [1]

Bu gibi tasvirler bilhassa analizde büyük yer tuttuğu gibi pratikte de çok rastlanan tasvir şekilleridir.

Örneğin yer küresi üzerindeki bir parçanın kağıt üzerinde gösterilmesi, bir küre parçasının bir düzlem üzerine

tasviri problemi olup, küre yüzeyi üzerindeki mevkilerden (noktalardan) birinden diğerine geçiş yönleri, yani bu doğrultular arasındaki açılar düzlem üzerindeki tasviri olan noktalar arasında aynen bulunmalıdır. Aksi halde büyük kargaşalıklara sebep olur.

Bunlardan başka yapılan tasvirlerde iki yüzey arasında bazı bağıntıların sabit kalması, bazı invaryantların saptanması suretiyle pek çok tasvir şekilleri verilebilir.

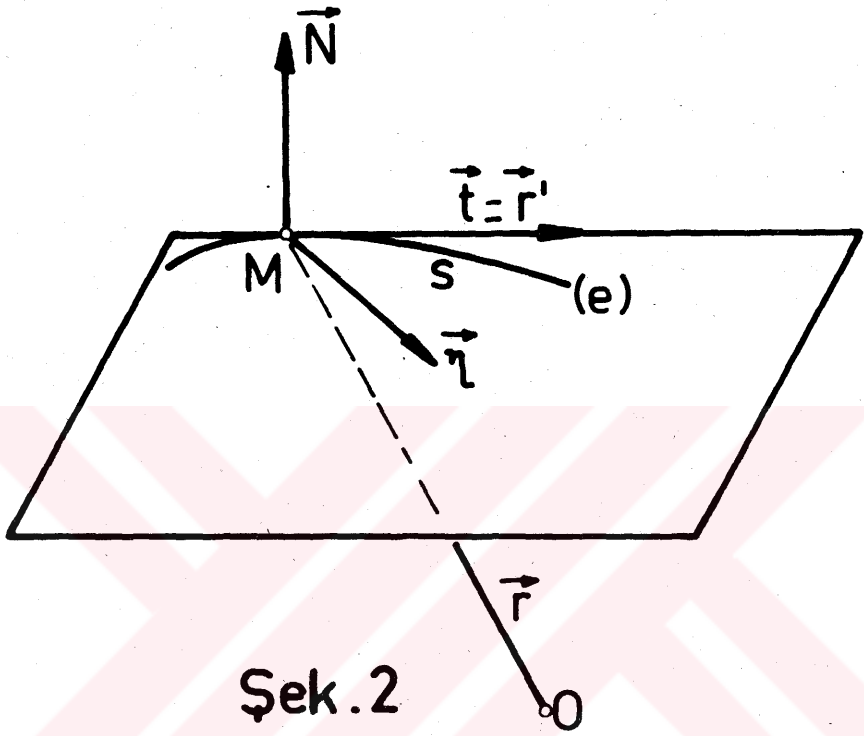
Örneğin;

c) İki yüzeyin bir eğrisi boyunca olan eğriliklerinin sabit kalması suretiyle yapılan tasviri gibi, veya diğer geometrik, diferensiyel geometrik veya kinematik geometrik özelliklerin sabit tutulması suretiyle, yani tasvirin invaryantlarını saptamak suretiyle, bir takım yeni tasvirlerin de yapılabilmesi mümkündür.

Bu yoldan yüzeylerin bazı diferensiyel geometrik özellikleri incelenerek bir takım yeni özellikleri, tasvir invaryantlarından yararlanarak elde edilebilir.

MADDE 3 de Meusnier Teoreminin yüzeylerin herhangi bir noktasındaki eğrileri hakkında vermiş olduğu invaryantlık kararından yararlanmak suretiyle yeni bir tasvir geliştirilmiş bulunmaktadır.

Bu nedenle MADDE 2 de Meusnier Teoremi ve yüzey invaryantları hakkında bilgi verilecektir.



Şek. 2

2. MEUSNIER TEOREMİ HAKKINDA GENEL BİLGİ

2.1 Yüzey Şeridi

$\{\vec{r}(s), \vec{N}(s)\}$ yüzeyinin bir M noktasındaki $\vec{N}$ normal birim vektörünün verilmesiyle, yönelmiş yüzey elemanı tespit edilmiş olur.

Yüzey elemanlarının bir şerid teşkil edebilmeleri için, yüzey elemanının^(*) düzlemi, daima eğrisinin teğetinden geçmelidir, yani $\vec{t}$ teğet vektörü, $\vec{t} \cdot \vec{N} = 0$ olmak üzere $\vec{N}$ normal vektörüne dik olmalıdır.

Burada $\{\vec{r}(s), \vec{N}(s)\}$ şeridinin parametresi (s) yay uzunluğu olarak seçilmiştir (şekil: 2) .

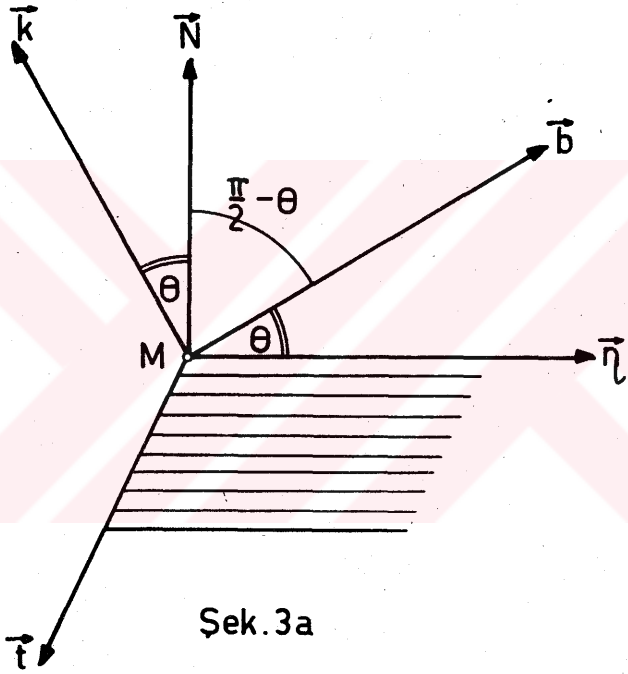
$\vec{n}$ yüzey elemanına ait birim vektörü,

$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ teğet birim vektörü ve $\vec{N}$ vektörü de,

yüzey normal birim vektörü olarak alındığında, bunlar arasında aşağıdaki bağıntıların sağlanacağı aşikârdır.

$$(4) \begin{pmatrix} \vec{t}^2 = 1 & \vec{t} \cdot \vec{N} = 0 & \vec{n} \times \vec{N} = -\vec{t} \\ \vec{N}^2 = 1 & \vec{N} \cdot \vec{n} = 0 & \vec{t} \times \vec{n} = \vec{N} \\ \vec{n}^2 = 1 & \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 & (\vec{t}, \vec{n}, \vec{N}) = 1 \end{pmatrix}$$

(*) Bir M noktası ile ondan geçen ε düzleminden meydana gelen geometrik şekle bir yüzey elemanı denir.

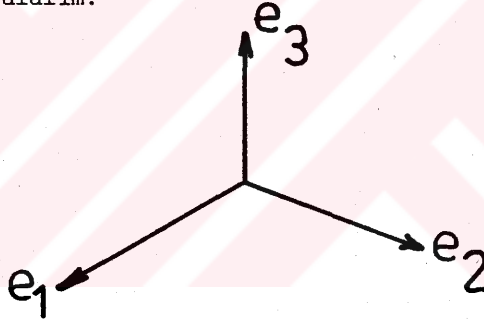


Şek.3a

Böylece yüzeyin e eğrisi üzerinde M noktasında, $\{\vec{t}, \vec{N}, \vec{\eta}\}$ dan oluşan Darboux üçyüzlüsü denilen bir üçyüzlü elde ederiz. Yüzeyin aynı noktasına $\{\vec{t}, \vec{k}, \vec{b}\}$ den ibaret fremet üçyüzlüsünü de tekabül ettirebiliriz (Şekil:3 a).

Bu iki üçyüzlüde $\vec{t}$ teğet vektörü ortaktır. Ayrıca $\vec{k}$ asal normal vektörü ile $\vec{N}$ yüzey normal birim vektörü arasındaki açı θ ve doğal olarak $\vec{b}$ binormal vektörü ile $\vec{N}$ yüzey normali arasındaki açıda $(-\frac{\pi}{2} - \theta)$ dır.

$\{\vec{t}, \vec{N}, \vec{\eta}\}$ nın türev denklemlerini yazmadan önce, birim vektörleri sırasıyla $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olan herhangi bir dik üçyüzlü alalım.



Bu üçyüzlüde verilen bir parametreye göre türev denklemlerini hesaplırsak $\{\vec{t}, \vec{N}, \vec{\eta}\}$ üçyüzlüsüne de aynı türev formüllerini uygulayabiliriz.

Herhangi bir üçyüzlü şekilde görüldüğü gibi bir sağ sistem teşkil ediyorsa,

$$(5) \quad \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1$$

$$(6) \quad \vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \vec{e}_1 = 0$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(t) , \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2(t) , \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_3(t)$$

bir t parametresinin fonksiyonları olsun.

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} , \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} , \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} \quad \text{türevlerinin gösterdiği}$$

bu vektörlerin $t = t_0$ değerine karşı gelen yukarıki üçyüzlüye göre

$$a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

bileşenlerini düşünürsek

$$(7) \quad \left(\begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_1}{dt} = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} = a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{array} \right) \quad \text{yazabiliriz.}$$

(5) ve (6) denklemlerinden türevleri alınarak

$$(5') \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} = 0 \\ \vec{e}_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} = 0 \\ \vec{e}_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} + \vec{e}_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0 \end{pmatrix}$$

$$(6') \quad \begin{pmatrix} \frac{d\vec{e}_1}{dt} \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \frac{d\vec{e}_2}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \frac{d\vec{e}_1}{dt} = 0 \end{pmatrix}$$

bulunur ve (7) deki türevleri (5') ve (6') de yerine koyarsak

$$\vec{e}_1(\vec{a}_{11}\vec{e}_1 + \vec{a}_{12}\vec{e}_2 + \vec{a}_{13}\vec{e}_3) + \vec{e}_1(\vec{a}_{11}\vec{e}_1 + \vec{a}_{12}\vec{e}_2 + \vec{a}_{13}\vec{e}_3) = 0$$

$$a_{11} + a_{11} = 0 \quad a_{11} = 0$$

$$\vec{e}_2(\vec{a}_{21}\vec{e}_1 + \vec{a}_{22}\vec{e}_2 + \vec{a}_{23}\vec{e}_3) + \vec{e}_2(\vec{a}_{21}\vec{e}_1 + \vec{a}_{22}\vec{e}_2 + \vec{a}_{23}\vec{e}_3) = 0$$

$$a_{22} + a_{22} = 0 \quad a_{22} = 0$$

$$\vec{e}_3(\vec{a}_{31}\vec{e}_1 + \vec{a}_{32}\vec{e}_2 + \vec{a}_{33}\vec{e}_3) + \vec{e}_3(\vec{a}_{31}\vec{e}_1 + \vec{a}_{32}\vec{e}_2 + \vec{a}_{33}\vec{e}_3) = 0$$

$$a_{33} + a_{33} = 0 \quad a_{33} = 0$$

$$\vec{e}_2(\vec{a}_{11}\vec{e}_1 + \vec{a}_{12}\vec{e}_2 + \vec{a}_{13}\vec{e}_3) + \vec{e}_1(\vec{a}_{21}\vec{e}_1 + \vec{a}_{22}\vec{e}_2 + \vec{a}_{23}\vec{e}_3) = 0$$

$$a_{12} + a_{21} = 0 \quad a_{12} = -a_{21} = c$$

$$\vec{e}_3(\vec{a}_{21}\vec{e}_1 + \vec{a}_{22}\vec{e}_2 + \vec{a}_{23}\vec{e}_3) + \vec{e}_2(\vec{a}_{31}\vec{e}_1 + \vec{a}_{32}\vec{e}_2 + \vec{a}_{33}\vec{e}_3) = 0$$

$$a_{23} + a_{32} = 0 \quad a_{23} = -a_{32} = a$$

$$\vec{e}_1(\vec{a}_{31}\vec{e}_1 + \vec{a}_{32}\vec{e}_2 + \vec{a}_{33}\vec{e}_3) + \vec{e}_3(\vec{a}_{11}\vec{e}_1 + \vec{a}_{12}\vec{e}_2 + \vec{a}_{13}\vec{e}_3) = 0$$

$$a_{31} + a_{13} = 0 \quad a_{31} = -a_{13} = b$$

a, b, c katsayıları bulunur.

a, b, c katsayılarına göre (7) formüllerini tekrar düzenliyorum:

$$(7') \quad \begin{pmatrix} \frac{d\vec{e}_1}{dt} = c\vec{e}_2 - b\vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b & c \end{vmatrix} \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} = a\vec{e}_3 - c\vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \\ c & a \end{vmatrix} \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} = b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ a & b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = W \times \vec{e}_1$$

a, b, c katsayılarına lineer bağımlı olan $\vec{W}$ Darboux vektörü,

$$\vec{W} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \quad \text{eşitliğiyle verilir [2]}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = W \times \vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = W \times \vec{e}_2, \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} = W \times \vec{e}_3$$

formülleri ile, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ Kartezyen baz vektörlerinin türevleri Darboux vektörü cinsinden ifade edilir.

$\{\vec{t}, \vec{N}, \vec{n}\}$ üçyüzlüsünde türev formüllerini (7') ye uygulayarak:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n} - b\vec{N}$$

$$(8) \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -c\vec{t} + a\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = b\vec{t} - a\vec{n}$$

bulunur.

Burada $\{\vec{t}, \vec{N}, \vec{n}\}$ vektörleri e eğrisinin s yay uzunluğunun fonksiyonları olup, a, b, c gelişi güzel sayılar olmayıp, yüzey ve üzerindeki eğrinin verilmesiyle belirlenen özel sayılardır. Bunlar.

$$a = \frac{1}{T_g} \quad \text{Jeodezik burulma } (T_g \text{ jeodezik burulma yarıçapı})$$

$$c = \frac{1}{R_g} \quad \text{Jeodezik eğrilik } (R_g \text{ jeodezik eğrilik yarıçapı})$$

$$b = \frac{1}{R_n} \quad \text{Normal eğrilik (} R_n \text{ normal eğrilik yarıçapı)}$$

olarak adlandırılır.

Bu, a, b, c katsayıları (8) denklemlerinin sırasıyla $\vec{n}, \vec{t},$ ve $\vec{n}$ vektörleriyle skaler çarpılması ile elde edilirler.

$$\vec{n} \cdot \vec{N}' = -a$$

$$(9) \quad \vec{t} \cdot \vec{N}' = b$$

$$\vec{n} \cdot \vec{t}' = c$$

a ve b miktarları, $\{\vec{r}(s), \vec{N}(s)\}$ fonksiyonlarının, seçilen parametreye göre birinci mertebeden türevlerine ve c ise fonksiyonların ikinci mertebeden türevine bağlı olmaktadır.

Bu bağıllık yukarıda söylendiği gibi Frènet üçyüzlüsündeki teğet, asal normal, binormal arasındaki bağıntıya benzer bir bağıntıdır.

$\vec{r}(s)$ nin eğriliğinin (9) denklemlerinden elde edilen şekline göre,

$$\vec{t}'^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ifadesi bulunur.}$$

Ayrıca eğrilerin eğrilik yarıçapı [3]

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \vec{r}''^2$$

olduğundan,

$$(10) \quad \frac{1}{\rho^2} = b^2 + c^2 \quad \text{sonucuna varılır.}$$

2.2 Şerid eğrisinin Asal normal vektörü

$\vec{k}(s) = \rho \vec{r}''(s)$ ifadesinden (8) ve (10) denklemlerinin kullanılmasıyla $\vec{k}(s)$ için,

$$(11) \quad \vec{k} = \frac{c \vec{\eta} - b \vec{N}}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \text{sonucuna varılır.}$$

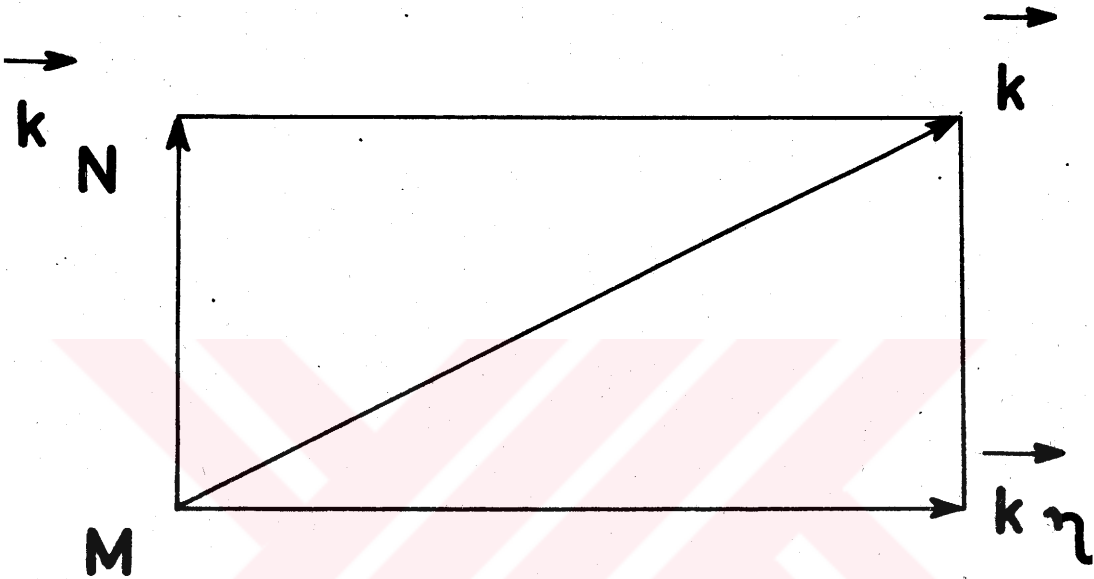
$\vec{k}$ asal normal birim vektörünün $\vec{N}$ ve $\vec{\eta}$ ile teşkil ettiği ϕ_1 ve ϕ_2 açıları

$$(12) \quad \cos \phi_1 = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos \phi_2 = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

ve (10) denklemi kullanılarak, ρ için ϕ_1 ve ϕ_2 ile olan aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$(13) \quad \frac{1}{\rho} \cos \phi_1 = -b$$

$$\frac{1}{\rho} \cos \phi_2 = c$$



Şek. 3 b

Bunu geometrik olarak göstermek için yüzey üzerinde bir M noktasından geçen e eğrisinin;

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{k} \quad \text{asal normal vektörünü,}$$

$\vec{t}$ teğeti ve $\vec{N}$ normali doğrultusunda parçalara ayıralım (Şekil: 3 b).

Böylece ;

$\vec{k}_N$ yüzeyin normal eğrilik vektörü (normal bileşeni),

$\vec{k}_n$ jeodezik eğrilik vektörü veya teğetsel eğrilik vektörü, (teğet bileşeni) olmak üzere

$$(14) \quad \vec{k} = \vec{k}_N + \vec{k}_n \quad \text{eşitliği yazılabilir.}$$

$\vec{N}$, yüzeyin normal birim vektörü olduğuna göre

$$\vec{k}_N = b \cdot \vec{N}$$

ve $\vec{k}_g$ de yüzeyin teğet doğrultusunda olduğundan,

$$\vec{k}_n = c \cdot \vec{n}$$

b ye şeridin normal eğriliği

c ye de jeodezik eğriliği denir.

Şekil:4 a'da görüleceği gibi e eğrisinin C eğrilik merkezinden $\vec{k}$ asal normaline çizdiğimiz dikmenin yüzey normal doğrultusunu kestiği nokta C_N ve $\vec{n}$ vektörü ve-
ya uzantısının kestiği nokta C_n ise burada

$$MC = \rho, \cdot MC_N = R_N, \cdot MC_\eta = R_g \quad \text{olup, } C_N,$$

normal eğrilik merkezi C_η ise jeodezik eğrilik merkezi-
dir.

2.3 İkinci Esas Form

Yüzeylerin geometrisi iki kuadratik diferensiyel
forma dayanır. Bunlardan birinci esas form, yüzeyin invar-
yant kuadratik diferensiyel formudur.

$$(15) \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 = I \quad \text{veya}$$

$$\sum_{i=1}^3 = dr_i \cdot dr_i = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = I \quad \text{olup,}$$

burada,

$$(16) \quad E = \vec{r}_u^2, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v^2 \quad \text{dir.}$$

Daha önce $\{\vec{r}(s), \vec{N}(s)\}$ fonksiyonlarının bir
yüzey şeridi teşkil ettiklerini söylemiştik.

(9) denkleminde, normal eğriliği

$$\vec{r}' \cdot \vec{N}' = b$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = b \quad \text{olmak üzere veya}$$

$$b = \frac{1}{ds^2} (\vec{dr} \cdot \vec{dN}) \text{ şeklinde yazılarak}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}[u(t), v(t)] \text{ ile verilen yüzey için}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \text{ ve}$$

$$d\vec{N} = \vec{N}_u \cdot du + \vec{N}_v \cdot dv \text{ olmak üzere ve ikisinin}$$

çarpımı da;

$$(17) -(\vec{dr} \cdot \vec{dN}) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = II^{(*)}$$

olarak II. Esas formu elde edilir.

Burada;

$$(18) L = -(\vec{r}_u \cdot \vec{N}_u), 2M = -(\vec{r}_u \cdot \vec{N}_v + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_u), N = -(\vec{r}_v \cdot \vec{N}_v)$$

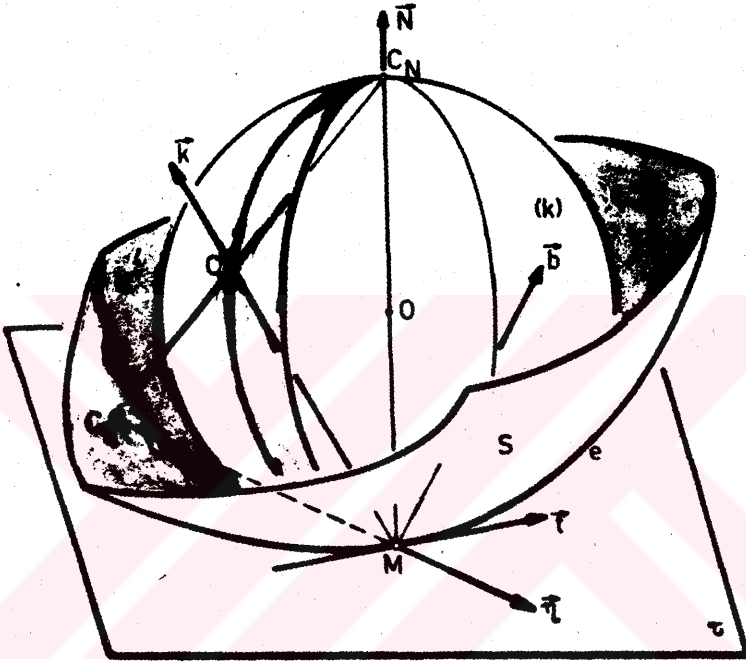
olduğundan (17) denklemini *yüzeyin yeni bir invaryant kuadratik diferensiyel formudur*. Buna *ikinci esas form* denilir.

Yukarıda şeridin b normal eğriliğini

$$b = \frac{1}{ds^2} (\vec{dr} \cdot \vec{dN}) \text{ şeklinde göstermiştik. Pa-}$$

rantezin içindeki $\vec{dr} \cdot \vec{dN}$ çarpımı II. ci esas form ve ds^2 de I. nci esas forma eşit olduğundan,

(*) Maddenin başında alınan $\vec{N}$ vektörü ile II. esas formdaki N katsayısı karıştırılmamalıdır.



Sek.4 a

TÜRKİYE
BİLİMSEL ve TEKNİK
ARAŞTIRMA KURUMU
KÜTÜPHANESİ

$$(19) \quad -b = \frac{II}{I} \quad \text{sonucuna varılır.}$$

Bu sonuç aynı zamanda,

$$(19') \quad \frac{II}{I} = III \quad (**)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

2.4 MEUSNIER TEOREMİ

Yüzey üzerindeki herhangi bir M noktası ve bu noktadan geçen τ teğet düzlemi düşünüldüğünde, teğet düzlem, yüzeyin M noktasından geçen, yüzey üzerindeki bütün eğrilerin teğetlerini içinde taşır. Yüzey normali bu teğet düzleme dik olan doğrudur (Şekil:4 a).

Yüzey üzerindeki herhangi bir e eğrisinin M noktasındaki $\vec{t}$ teğeti düşünüldüğünde, M noktasındaki teğet, asal normal ve binormal bu noktadaki frënet üçyüzlüsünü belirler ($\vec{b}$, $\vec{k}$, $\vec{t}$).

Yine yukarıdaki madde de elde edilen (19) denklemi ile (10) ve (11) denklemleri gözönüne alınarak $\vec{N}$ ve $\vec{k}$ nın skaler çarpımı ile

$$(20) \quad \vec{N} \cdot \vec{k} = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \text{bulunur.}$$

(**) Bibliyografyada [3] nolu eserin 50 S.128 ile karş.

b, bir şeridin normal eğriliği olduğuna göre, (19) denklemi de gözönüne alınmak suretiyle türevelere bağlı katsayılar arasında

$$\frac{\vec{N} \cdot \vec{k}}{\rho} = \frac{II}{I} = \frac{L du^2 + 2 M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2}$$

bağıntısı elde edilir.

Bu eşitliğin sağ tarafı aynı zamanda $\frac{du}{dv}$ ile orantılı, yani teğet doğrultusuna bağlıdır. Yüzey üzerindeki diğer eğrilerin eğrilik merkezleri de oskülâtör düzlemi, yani teğet ve asal normalin belirttiği düzlem içinde bulunduğundan, *bu C eğrilik merkezleri, yüzeyin M noktasından geçen normali üzerindeki eğrilik merkezinin dik izdüşümüdür* (şekil: 4 a).

Bu nedenle yüzey üzerindeki eğrilerin eğrilik merkezleri, çapı, yüzeyin R_N eğrilik yarıçapına eşit olan bir k küre yüzeyi üzerinde bulunurlar.

Diğer eğriler aynı Oskülâtör düzleme ve aynı teğete sahip olduğundan bu açıklamanın tersi Meusnier Teoremi olarak zikredilir.

MEUSNIER TEOREMİ : "Yüzeye ait aynı noktadan geçen ve aynı Oskülâtör düzlemi haiz olan bütün yüzey eğrilerinin, eğrilikleri de birbirine eşittir."

O halde bir yüzey üzerindeki eğrilerin eğriliklerinin incelenmesi Meusnier Teoremi yardımıyla, yüzeyin düzlemsel kesitlerinin eğriliklerinin araştırılmasına dönüşür.

Bu özellik Madde 3 de daha geniş olarak ele alınacaktır.

Teoremin değişik şekillerde ifade edilmesi de mümkündür. Şöyleki;

Bir yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin teğetinden geçen, yüzeyin düzlemsel kesitleri, yüzey üzerindeki eğrilerle aynı eğriliğe sahiptirler.

veya;

Çizgi elemanından geçen bütün düzlemsel kesitlerin eğrilik merkezleri bu sabit yarıçaplı küre üzerinde bulunurlar.

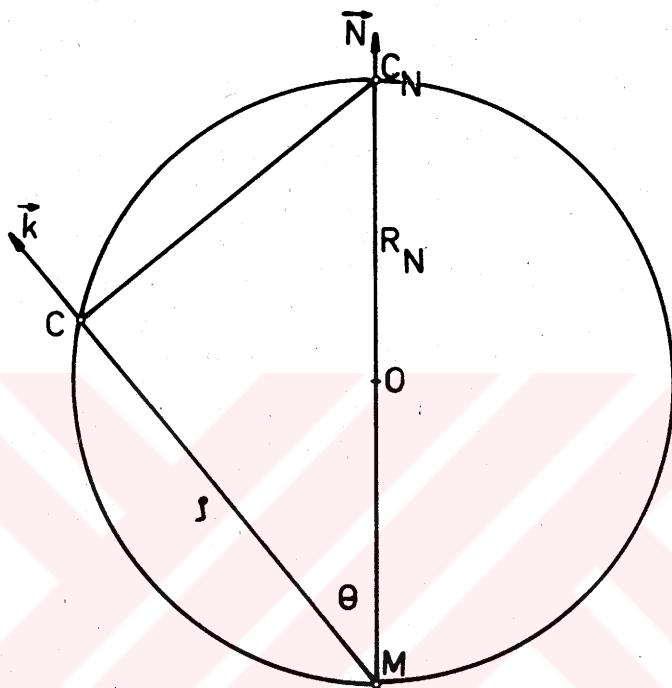
(Şekil: 4 a) dan görüleceği üzere $\vec{t}$ teğeti ve e eğrisinin M noktasındaki normal eğrilik merkezi C_N olduğuna göre, bu C_N nin, Oskülâtör düzlemi üzerindeki dik izdüşümü C olup, bu nokta $\overline{MC} = R_N$ çaplı daire üzerindedir. (Şekil 4 b).

Buna *Meusnier Dairesi* denir.

Bu daire, Meusnier küresinin, M noktasına ait Oskülâtör düzleminin küre ile kesitidir.

Bu daire, Meusnier küresinin, M noktasına ait Oskülâtör düzleminin küre ile kesitidir.

Meusnier Teoremi şu yönden de açıklanabilir: Yüzeyin herhangi bir M noktasındaki Oskülâtör düzlemi ile θ açısı yapan M den geçen doğrunun t teğetiyle birlikte belirttiği düzlem, rektifiyan düzlem, R_N çaplı Meusnier dairesini



Sek. 4 b

taşıyan düzlemdir.

Bu da bizi aşağıdaki sonuca götürür;

$\vec{k}$ ve $\vec{N}$ vektörlerinin skaler çarpımı ile

$$\vec{k} \cdot \vec{N} = \cos \theta$$

(20) denklemine göre

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{N}}{\rho} = -b \quad \text{olduğundan}$$

yukarıdaki ifade

$$(21) \quad \frac{\cos \theta}{\rho} = -b \quad \text{sabit olarak elde edilir.}$$

Bu b sabiti normal kesitte (yani dik kesitte)

$$\theta = 0 \quad \text{olduğundan} \quad \frac{1}{R_N} \quad \text{ye eşittir.}$$

Bu nedenle;

$$(22) \quad \rho = R_N \cos \theta$$

olarak $\overline{MC}$ uzunluğunun $\overline{MC} = \rho = R_N \cos \theta$

olduğu ispatlanmış olur.

3 . MEÜSNIER TEOREMİ YARDIMIYLA YAPILAN BİR YOZEY TASVİRİ

Şek. 4(a) daki M noktasında gösterilen Meusnier küresinin gerekli düzlemlerle olan kesitlerini ayıralım.

Böylece M noktasındaki (τ) teğet düzlemine dik olan $\overline{MC}_N$ yüzey normali ile diğer normaller de $\vec{k}$ asal normalini taşıyan düzlem ile yani (v) normal düzleminin kesiti olan daire Şek.4(b) de gösterilmişti. Ayrıca yine $\overline{MC}_N$ yüzey normali yani küre çapından geçen ve (e) eğrisinin $\vec{t}$ teğeti ile birlikte meydana getirdiği (μ) rektifiyan düzlemi ile olan daire kesitini de alarak, birbirine dik olan bu iki düzlemi Şekil 5(a) da gösterelim.

Birbirini dik olarak $\overline{HMC}_N$ doğrusu boyunca kesen (v) normal düzlemi ile (μ) rektifiyan düzlemi içindeki daire kesitleri her iki düzlemde aksonometrik olarak gösterilsin.

Bu iki daire $\overline{MC}_N$ ortak çaplı elipsler olarak görülmürler. Bu elipslerden (v) düzlemi içindeki elipsin $\overline{HC}_N$ arakesitinin üstünde kalan yarısı ve (μ) düzlemi içindeki elipsin $\overline{HC}_N$ arakesit doğrusunun önparçasındaki yarısıdır. Şek:5a. Ayrıca M noktasında (σ) Oskülatör düzlemine dik olan (μ) düzlemi içindeki $\vec{b}$ binormal doğrultusu da çizilmiş bulunmaktadır.

Yüzeyin üzerindeki (e) eğrisi daima olduğu gibi, M noktasında $\vec{t}$ teğetine değmek üzere (σ) Oskülatör düzleminin bir tarafından gelip (v) normal düzlemini de-

lerek (G) nın diğer tarafına geçer. (**)

O halde (e) eğrisi M noktasında Öskülâtör düzleminin ön tarafından $\vec{t}$ teğetine değmek suretiyle Şek.5 a da görüldüğü üzere (v) düzleminin diğer tarafına geçmektedir. Bu duruma göre yüzey üzerindeki (e) eğrilerinin C eğrilik merkezleri $\overline{MC}_N$ çaplı Meusnier küresi üzerinde bulunurlar.

3.1

(G) Öskülâtör düzlemi ile (μ) rektifiyan düzleminin arasındaki açı, $\vec{k}$ asal normali ile $\vec{N}$ yüzey normali arasındaki θ açısıdır. (**)(**)

O halde M noktasındaki (C) eğrilik dairesinin (C) eğrilik merkezi R_N yüzey eğrilik yarıçapından Meusnier teoremi yardımıyla $R = R_N \cos \theta$ olarak elde edilir.

Burada Meusnier teoremi yardımıyla bir karşılıklı tekâbül veya tasvir düşünülebilir.

Şöyleki lâlettayin bir yüzeyin üzerindeki noktalarda, yüzeye ait iki eğri arasında Meusnier teoremi yardımıyla bir tasvir yapıldığı takdirde yukarıdaki açıklamalara göre bu iki eğri arasında birinin eğrilik yarıçapı diğerinin, eğrilerin normalleri arasındaki açının kosünüsü ile orantılıdır.

(**) Kaynaklar (1) dezikredilen eserin Chap.4. S.66 ile karşı.

(**)(**)

Normal düzlem rektifiyan ve Öskülâtör düzleme dik olduğundan bu düzlemlerle olan arakesit doğruları $\vec{N}$ ve $\vec{k}$ doğrularıdır.

Bir uzunluğun kosünüs ile orantılı olması iki uzunluk arasında bir dik izdüşüm alma prensibini ortaya koyar.

Bu düşünce tarzı bizi herhangi bir yüzeyin Meusnier teoremi yardımıyla kendi kendisi üzerinde yapılabilecek bir tasvirinin bulunduğu açıkça göstermektedir.^(*)

O halde her yüzey, kendi kendisi üzerine, Meusnier teoremi yardımıyla aşağıdaki şekillerde tasvir edilebilir.

Teorem 1. (Tanım Teoremi)

Yüzey üzerinde aynı Oskülâtör düzleme sahip eğrilerden birine ait eğrilik merkezi diğerine ait eğrilik merkezinin dik izdüşümü olup, esas yüzey ile tasvir yüzeyi arasında, yüzey normal ve asal normal tekabülü vardır.

Ayrıca eğrilerin eğrilik yarıçapları arasındaki oran, normaller arasındaki açının kosünüsüne eşittir.

3.2 Teorem 1 de tanımlanan Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan tasviri herhangi bir yüzeyin lâetttayın bir adi noktasına tatbik edelim. Bu takdirde yüzey üzerindeki M noktasına ait $(\vec{b}, \vec{k}, \vec{t})$ Frênêt elemanlarını ve bir de $(\vec{b}, \vec{k})$ normal düzlemi içinde bulunan yüzey normalini alalım (Şekil 5 a). $(\vec{b}, \vec{k}, \vec{N})$ normal vektörlerinin içinde bulunduğu $(\checkmark)$ normal düzlemi $\vec{t}$ teğetine dik olan bir düzlemdir. $\vec{N}$ ve $\vec{k}$ doğrultuları arasında kalan θ açısı yuka-

^(*) Bu açıklık yüzeyin üzerinde bulunan bütün noktalarına ait olmayabilir. (3) denkleminde verilen fonksiyonel determinantın sıfırdan farklı olması yüzey üzerindeki adi nokta için varolduğu takdirde, tasvir şeklinin mütakabil noktası kosünüs fonksiyonunun özel değerleri (sıfır ve bir) için sıfır olabilir. Bu da ancak θ açısının özel olan değerleri için vardır.

rıdaki açıklamalarda gösterilen açı olmak üzere (Şekil:6 a) da $\theta = 30^\circ$ olarak alınsın. Bu takdirde birbirine dik izdüşüm sisteminde $\vec{t}$ $\vec{N}$ düşey düzlemi içindeki eğrilik daire-sinin çapı $\rho = \overline{MC}_N$ olarak alınsın. Yüzey normali de $\vec{t}$ doğrultusuna dik olduğundan yüzeye ait M noktası x ek-seni üzerinde $M' = M''$ olarak seçildiğinde, yüzeyin M noktasındaki eğrilik dairesinin yarıçapı belirli bir ρ değerindedir.

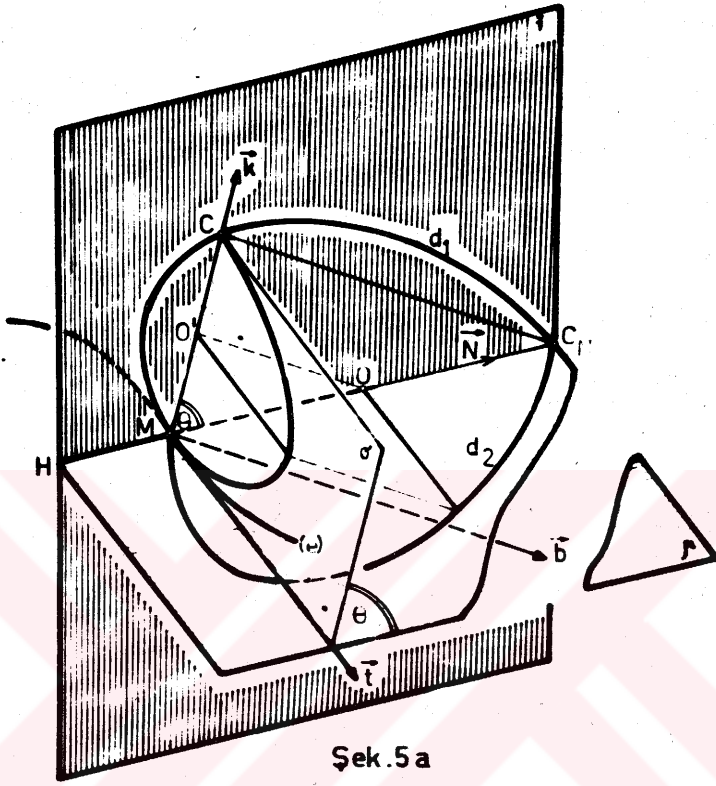
(Şekil: 6 a ve Şekil: 6 b) de $\rho = 10$ cm. olarak alın-mak suretiyle $(\vec{t}, \vec{N})$ düşey düzlemi içinde $O' = O''$ mer-kezli ρ yarıçaplı $d_1 = d_1'$ dairesi alınmış ve $(\vec{b}, \vec{k})$ yatay düzlemi içinde bulunan $\vec{k}$ ile $\vec{t}$ nin belirttiği düz-lem de (γ) normal düzlemine yani yatay düzleme dik olduğun-dan $(\vec{t}, \vec{N})$ düzlemi içindeki dairenin $(\vec{t}, \vec{k})$ düzlemine iz-düşürülmesi ile $O'_1 = O''_1$ merkezli $\overline{d}_1''$ elipsi elde edilir.

Aynı durum $\rho = 10$ cm ve $\theta = 60^\circ$ alınmak suretiyle (Şekil: 6 b) de gösterilmiştir.

$\vec{t}$ teğeti boyunca kesişen bu iki düzlem içinde bulu-nan daire ve dik izdüşümü olan elips arasında, izdüşüm ışın-ları afinite ışınları doğrultusu ve iki düzlemin arakesit doğrusu da afinite eksenî olmak üzere bir perspektif afin bağıntı olduğu aşîkârdır. (*) Bu sonuç ile aşağıdaki teorem saptanır.

(*)

[4] de zikredilen eserin madde 2.20 5.87 ile karşı.



Şek.5 a

Teorem : 2

Lâlettayın bir yüzeyin herhangi bir noktasında Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan tasvirde, yüzey üzerindeki noktadan geçen keyfi bir eğrinin teğeti afinite ek-seni, O noktadaki binormal doğrultusu afinite ışını doğrultusu olmak üzere, aralarında bir dik perspektif afinite vardır.

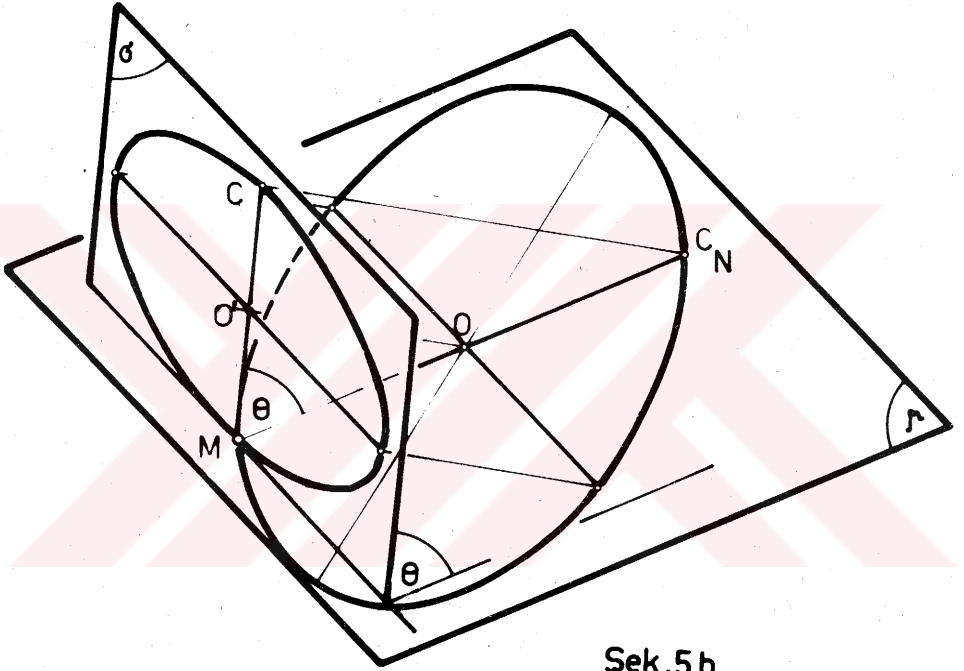
Burada her yüzeyin yapısı, yüzey üzerindeki eğriler ağı vasıtası ile ve bu eğrilerin diferensiyel geometrik özelliklerine göre, tüm yüzeyin küçük parçası için elde edilmiş bulunmaktadır. Bu küçük yüzey parçaları için elde edilen özellikler genişletilerek (teşmil edilerek), özellikler tüm yüzey için geçerli hale getirilirler.

Bu perspektif afinitenin herhangi bir yüzey üzerindeki M noktasında daha görünüşlü bir resminin elde edilmesi için sırasıyla x, y, z aksonometrik eksenlerini Frènet üçyüzlüsünün $\vec{b}, \vec{k}, \vec{t}$ vektörlerinin doğrultularına tekabül ettirelim. Bu takdirde x, y düzlemi için y eksenini ile $\theta = 30^\circ$ lik açı yapan $\vec{N}$ doğrultusu alınmak ve $\vec{N} \vec{t} = y, z$ düzlemi içindeki ρ yarıçaplı daire aksonometrik yoldan çizilir. (*)

Şekil 5 a daki d_1, d_2 daireleri ve Oskulatör düzlem içindeki izdüşümü de böylece belirtilmiş olur (Şekil:6 c).

(*)

[5] de zikredilen eserin VIII Madde 2.2.2.5.122



Şek.5 b

Burada $x y z$ aksonometrik eksenleri sırasıyla $\vec{b} \vec{k} \vec{t}$ vektörlerine tekabül ettirilmiştir. O halde $\vec{t} \vec{k}$ düzlemi içindeki d_1 eğrilik dairesi, $Y Z$ düzleminin döndürülmesi suretiyle çizilebilir. Bunun için $\overline{BC}$ çaplı daire ve uzaydaki M noktası $Y Z$ düzlemi içinde döndürülerek M_0 noktası elde edilir. $M_0 B = k_0$ doğrultusu olup O_0 merkezli ve $\rho = 60$ mm. yarıçaplı d_1^0 eğrilik dairesi $Y Z$ düzleminin dönmüş izdüşümünde çizilir. Böylece k_0 ve buna dik olan t_0 doğrultuları dairenin birbirine dik çapları olup, M_0 ve C_N^0 ile I_0 ve II_0 noktalarının BC etrafında geriye döndürülmesi ile bir eşlenik çapı MC_N ve diğeri I, II doğrultularından ibaret olan ve uç noktaları t_0 doğrultusu ile belirtilen elips, eksenleri bulunmak suretiyle çizilir. (**)

Böylece $K Z$ düzlemi içindeki d_1 dairesinin izdüşümü olan d_1 elipsi çizilmiş olur.

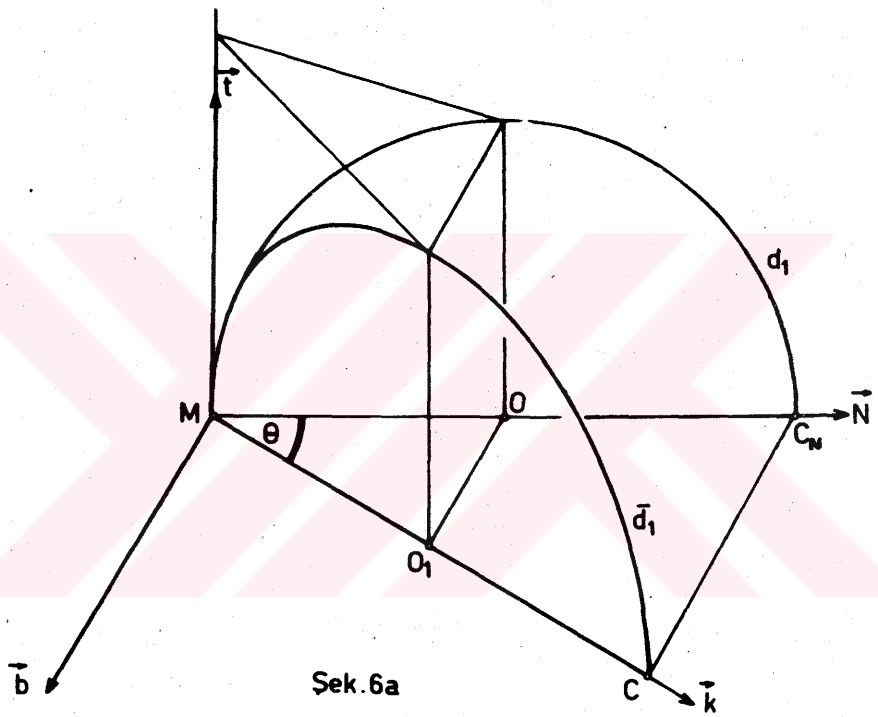
$x y$ düzlemi içinde y eksen ve dolayısıyla k doğrultusu ile θ açısını kapatan $\vec{N}$ doğrultusu AB etrafında M noktasının bu düzlem içine döndürülmesi ile çizilebilir;

Şöyleki

AB çaplı yarım daire M_0 noktasında AB yi dik açı altında gören nokta olduğundan, M_0 noktasında k_0 doğrultusu ile $\theta = 30^\circ$ lik açı kapatan N_0 doğrultusu AB dönme eksenini III noktasında keser.

(**) [6]

[7] da gösterilen eserin Madde 76-77
S.25 ve S.146-148



Böylece M III doğrultusu $\vec{k}$ doğrultusu ile θ açısını kapatan doğrultu olarak aksonometrik resimde gösterilmiş olur (Şekil: 6 c).

$\overline{MC}_N$ çaplı d_1 dairesi dolayısı ile d_1 elipsi, b doğrultusunda $\vec{t} \vec{N}$ düzlemi içine izdüşürülmek suretiyle d_1 eğrilik dairesi ile perspektif afin olan M noktasındaki $\overline{d}_1$ elipsi yine eşlenik çapları yardımıyla eksenleri bulunarak çizilir (Şekil: 6 c).

3.3

Madde .3 de elde edilen (19) ve (20) denklemleri gözönüne alınarak,

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{N}}{\rho} = \frac{II}{I} \quad \text{veya}$$

$$(23) \quad \cos \theta = \frac{II}{I} \rho \quad \text{neticesi elde edilir.}$$

(23) denklemi incelendikde I ve II formlarının yüzey sabitleri olduğu ve ρ eğrilik yarıçapının da yüzey üzerinde alınan eğriye bağlı olduğu hemen görülür. Bu nedenle yukarıda Teorem 1 ile belirtilen Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan tasvirlerde, yüzey üzerinde seçilen eğrinin ρ eğrilik yarıçapının sabit veya değişen olması aşîkârdır.

Aşağıdaki bölümlerde bu özellikler ayrı ayrı incelenecektir.



3.3.1 Eğriliği sabit eğriler

Yüzey üzerinde seçilen eğrinin eğriliğini sabit olarak alalım. Bu takdirde ilk akla gelen örnek sabit eğrilikli bir uzay eğrisi olan Öklid helisinin seçimidir. Öklid helisinin taşıyıcı yüzeyi, genel olarak bir dönel silindir olup, silindir yüzeyinin yüzey normali silindir yüzeyi üzerindeki noktadan silindir eksenine çizilen dik düzlem içindeki nokta ile eksen noktasını birleştiren doğrudur. Aynı zamanda bu doğru Öklid helisinin adı geçen noktadaki k asal normal doğrultusudur. Öklid helisi sabit eğimli bir eğri olarak tanımlandığından ayrıca sabit eğrilikli olması nedeniyle ρ eğrilik yarıçapı Öklid helisine ait bütün noktalarda

$$(24) \quad \rho = \frac{d^2}{r} \quad \text{dir.}$$

Bunun bulunması, helisin düşey düzlem içindeki noktasında kurulan, bir yarım ekseni helis noktasının eksenden olan r uzaklığı ve diğer yarım ekseni de d helis parametresi olan elipsin, büyük ekseninin tepe noktasındaki eğrilik dairesidir (*) (Şekil:7 a).

(*)

[6] ve [7] de zikredilen eserlerin Madde 114 S.11 ve Madde 71-S.138 ile karşılaştır.

3.3.1.1

Helisin her noktasında aynı ρ yarıçaplı olan bu eğrilik dairesi $\vec{k}$ asal normali üzerinde merkez noktasına sahip olduğundan, helisin yatay izdüşüm dairesinin r yarıçapından ρ yu çıkarmak suretiyle elde edilen $(r-\rho)$ yarıçaplı daire yatay izdüşümü olan (0) helisi, eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir.

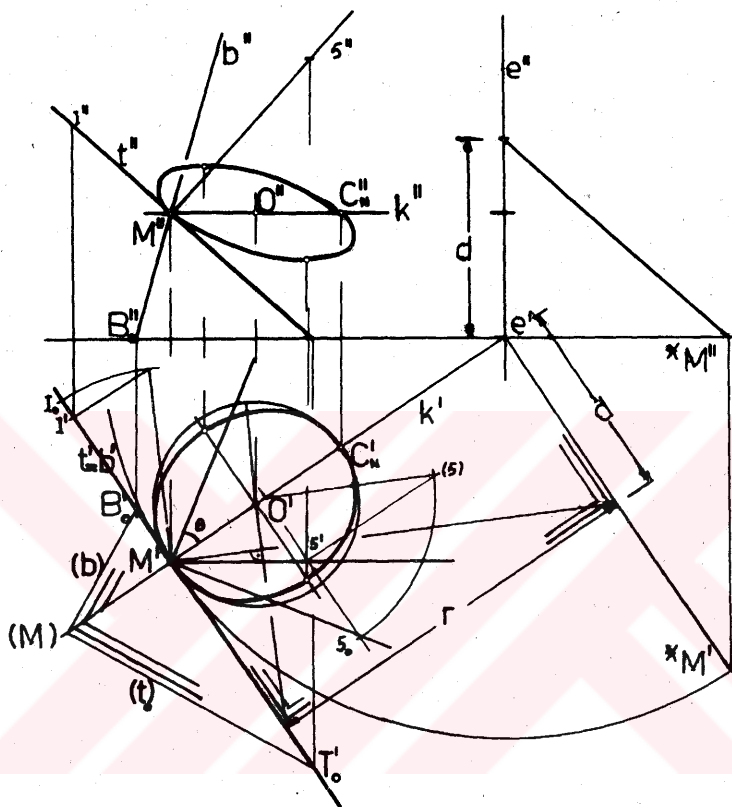
Her Öklid helisi bir dönel silindir yüzeyi üzerinde bulunduğundan, silindir yüzeyinin $\vec{N}$ normali ile helisin $\vec{k}$ asal normali aynı olup teğetin (Şekil:6 a daki) belirtmiş olduğu teğet - yüzey normali düzlemi ile teğet - asal normal düzlemin arasındaki θ açısı bu konumda 0^0 dir.

O halde Teorem 1'e göre Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan tasvirde iki yüzey aynı olup, Teorem 2'ye göre değerlendirme yapıldığı takdirde, silindir yüzeyi üzerindeki helis eğrisinin teğete ve eksene dik olan asal normali de afinite ışını doğrultusu olarak alınmak suretiyle, asal normal doğrultuları yatay doğrultular olurlar.

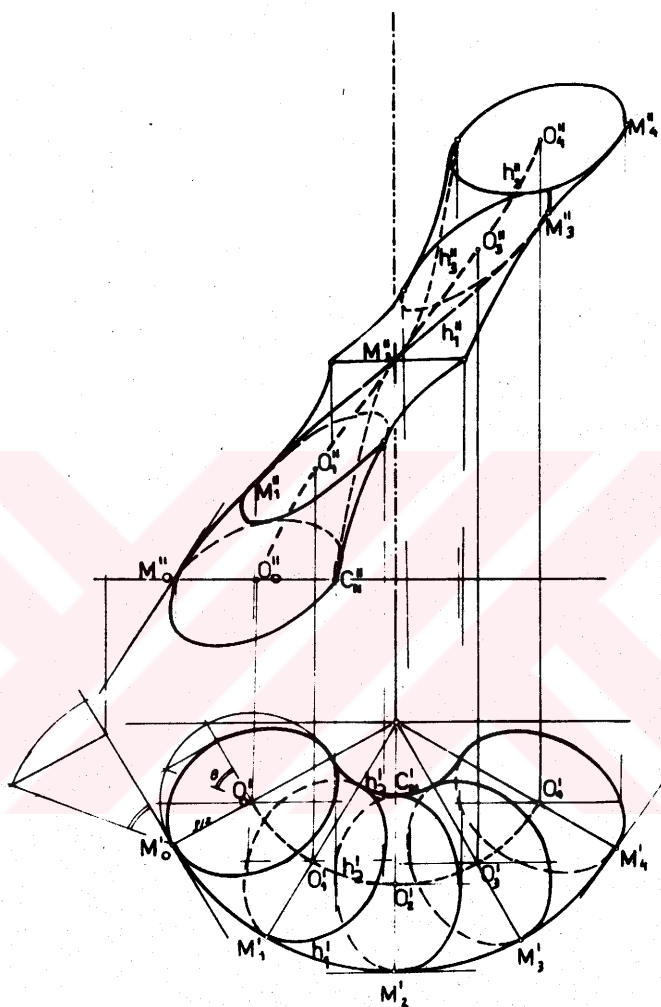
Böylece, afinite ışınları, afinitenin H çakışma düzlemine paralel olduğundan, perspektif afin olan iki şekil, aralarında *kongruent* olurlar. Buradan aşağıdaki sonuca varılır.

Teorem 3

Bir dönel silindir yüzeyinin üzerinde bulunan sabit eğrilikli bir eğri (bir öklid helisi) boyunca Meusnier Teoremine göre yapılan tasvir, yüzeyi kendi kendisine dönüştürür (çakıştırır).



Sek.7 a



Sek. 7 b

3.3.1.2

Ayrıca bir Öklid helisi boyunca alınan eğrilik daireleri $\vec{t}, \vec{k}$ düzlemi içinde sabit ρ yarıçaplı dairelerden ibaret olup bu dairelerin t_i teğetlerine değdiği M_i noktaları ve dolayısıyla dairelerin merkezi olan O_i noktaları ile M_i lere merkez karşıtı olan i^{C_N} noktaları da aynı asal normal (yatay doğru) üzerinde bulunmaktadır.

Bu üç noktayı taşıyan yatay doğruya ait M_i noktası helisel hareketi yaptığıında diğer noktalarda bu harekete iştirak ederler. Böylece eğrilik dairesinin asal normali üzerindeki bu üç nokta aralarındaki uzaklığı muhafaza ederek mütakabilen h_1, h_2, h_3 helislerini çizerler.

(Şekil:7 b) den görüleceği üzere M_i, O_i, i^{C_N} noktaları e' noktasından O_i noktasına göre $\vec{r}_0$ yarıçaplı daireleri çizerler.

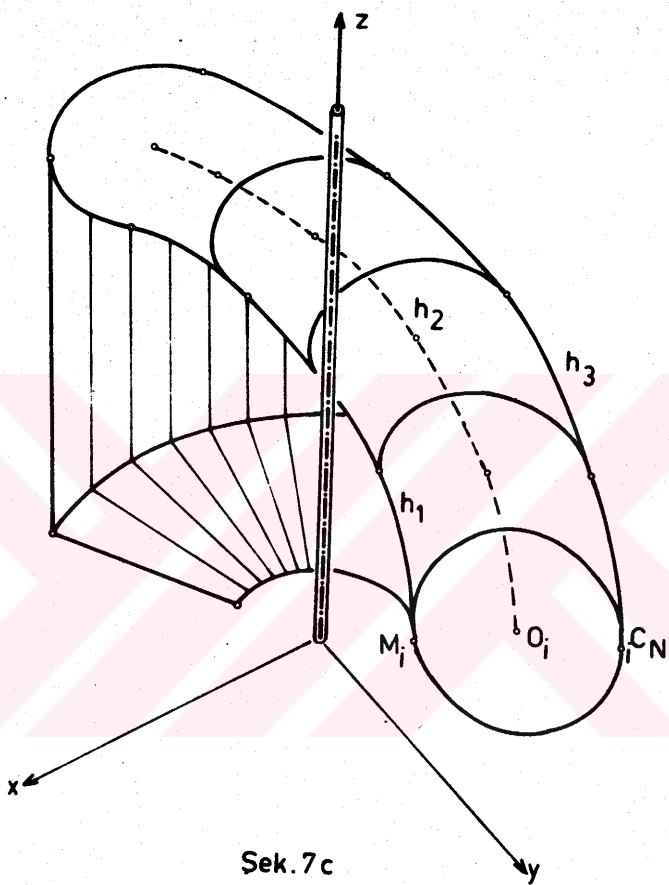
Böylece bu daireler mütakabilen h_1, h_2, h_3 helislerinin h'_1, h'_2, h'_3 yatay izdüşümleri e' merkezli konsantrik dairelerden ibarettir.

Bu üç noktayı taşıyan doğrunun, helislerin asal normal olması, bu helislerin ikişer ikişer Bertrand eğri çiftini tanımlaması için yeterlidir. (**)

Ayrıca (Şekil:7 c) de $\vec{t}, \vec{k}$ düzlemi içindeki eğrilik dairesinin bu helisel hareketle meydana getirdiği sıklık yüzey düşünülmüş ve aksonometrik olarak (belirli) bir parçası gösterilmiştir.

(**)

[3] de gösterilen eserin Bertrand Eğrileri §.15 S.40 bak.



Eğrilik dairesinin M, O, C_N dışında kalan noktaları, helis Oskülâtör düzleminin eğiminin sabit olması nedeniyle, aynı parametrelili helisel harekete iştirak ederler. O halde bu harekette sabit eğimli olan $\vec{t}, \vec{k}$ düzlemi içindeki bir dairenin çizdiği bir helisel yüzey elde edilir.

Bu helisel yüzey bir serpantin yüzeyi olduğundan ve ayrıca M_1 noktasının yörünge helisinin eğrilik dairesi olduğundan *bu serpantin yüzeyi her noktada eğriliği sabit olan bir yüzeydir.*

(Şekil:7 c) de teğet asal normal düzlemi x, y düzlemi alınmak suretiyle M_1, O_1 ve iC_N noktalarının yörüngeleri olan h_1, h_2, h_3 helisleri ve eğrilik dairesinin x, y düzlemi içindeki muhtelif konumları alınmak suretiyle yüzey parçası çizilmiştir ve şeklin daha iyi bir görünümünün elde edilmesi için, şekil taşıyıcı silindir yüzeylerinin arka yarısı üzerinde olmak üzere gösterilmiştir.

Bu yüzeyin eğrilik dairesi tarafından doğurulmuş olması yüzeyin her noktasında sabit eğimli olmasını ve M_1, O_1, iC_N noktaları tarafından çizilen h_1, h_2, h_3 helislerini taşımasını sağlar. (*)

(*)

h_1 ve h_3 helisleri eğrilik dairesinin noktalarının yörüngesi olduğundan yüzey üzerinde, O_1 noktası ise dairenin merkezi olduğundan yüzey üzerinde değildir.

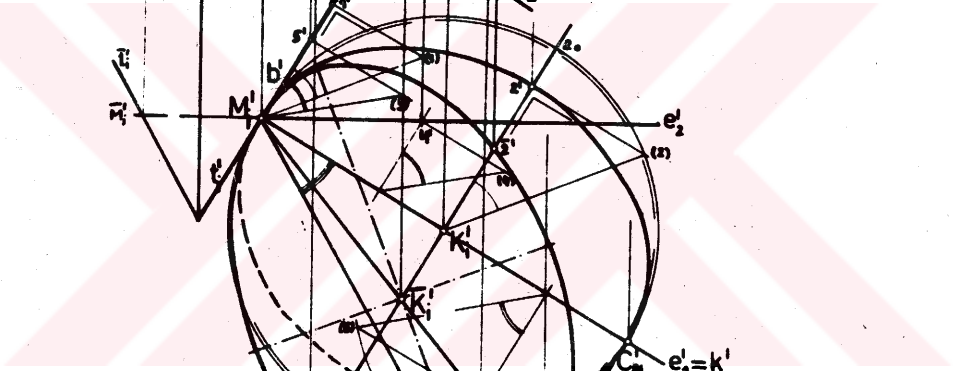
3.3.1.3

Ayrıca silindir yüzeyi üzerinde bulunmayan sabit eğrilikli eğrilerin, ρ eğrilik yarıçapları sabit olduğundan, teğetle yüzey normalinin ve teğetle asal normalin teşkil ettiği düzlemler arasında kalan θ açısı sabit olacaktır.

Böylece yüzeyin her noktasındaki eğrilik dairesi bir afin transformasyona tabi tutulmak suretiyle, yüzey üzerinde bulunan sabit eğrilikli bir eğri boyunca Meusnier Teoremi vasıtasıyla tasvir edilmiş olur. Birinci eğriye ait eğrilik dairelerinin merkezlerinin geometrik yeri her noktadaki eğri teğetinden geçen asal normalle meydana gelen düzlem üzerinde binormal doğrultusunda izdüşürülmüş olur.

Bu mülâhazayı eğrilik merkezlerinin geometrik yeri bir Öklid helisi olan sabit yarıçaplı bir daireye uygularsak, daire kendi düzlemi ile sabit bir θ açısı yapan bir düzlem üzerinde eliptik bir izdüşüme sahip olacaktır (şekil: 7 b).

O ve M noktalarının düşey eksen etrafında dönmesi ve eksen doğrultusuna paralel düzgün bir ötelenme hareketi yapmasıyla, M noktasının yörüngesi de bir Öklid helisinden ibaret olur. Böylece M noktasından geçen $(\vec{t} \ \vec{k})$ düzlemi içinde bulunan belirli yarıçaplı bu dairenin meydana getirdiği yüzey, bir dairesel helis yüzeyidir.



46

M noktasının yörüngesi olan h_1 helisi M'_0 konumunda yörüngenin yatay izdüşümü ile h'_2 dairesi ile sikklik yüzeyi meydana getiren O merkezli ve sabit eğrilikli eğrinin, eğrilik merkezidir. Bu $\overline{MC'_N} = \rho$ çaplı dairenin O' merkezi de h_2 helisini çizer. Daire t k düzlemi içinde bulunduğundan C_N noktası da M noktasının hareketine uygun olan helisi çizer. Ancak M'_1 noktasının çizdiği helis ile dairenin hareketindeki M noktasının yörünge eğrisi birbirinden farklı helisler olup bütün bu eğriler dairesel helis yüzeyi üzerinde bulunurlar.

M_0 konumundaki dairenin Madde 3.2 de açıklanan θ - açısı altındaki izdüşümü, yatay düzlemle θ açısı yapan düzlem içersinde bir eksenı dairenin çapı kadar diğer eksenı bu çapın $\cos \theta$ ile çarpımı kadar olan elipslerden ibarettir.

Bu elipsler daire düzlemi ile θ açısını kapattığından, yatay izdüşümde $\overline{M'_0C'_N}$ doğrultusunda alınan $\rho = \overline{M'_0C'_N}$ doğrultusu elipsin büyük eksenı ve bu doğruya O'_0 noktasından çizilen dikme üzerinde her iki tarafa doğru alınan

$\frac{\rho \cos \theta}{2}$ uzunlukları da küçük eksenı olan elipslerden ibarettir.

Yatay izdüşümde M'_1 , O'_1 ve C'_N noktaları daima h_1 dairesinin çapları doğrultusundadır.

Böylece yatay izdüşümde yukarıda sıralanan noktaların hepsi aynı merkezli dairelerin üzerinde bulunurlar. Ayrıca yatay izdüşümü bu daireler olan helisler de vardır.

Bunlardan M_1 noktasının yörüngesi olan h_1 helisi, düşey izdüşümde dairelerin yatay doğru parçaları olarak görülmesi nedeniyle sıklık yüzeyin, düşey çevresinin parçalarından ibarettir.

Meusnier Teoremine göre h_1 eğrisinin her noktadaki eğrilik dairesi, sabit çaplı olup Teorem 3 de zikredilen tasvir yapılsın, bu takdirde M noktasının çizdiği h_1 helisi, her iki yüzeyin ortak bir eğrisidir. O_1 merkezli ρ ve $\rho \cos 0$ eksenli elipslerin çizdiği serpantin yüzeyi, dairesel helis yüzeyi ile, her M_1 noktasındaki eğrinin, t_1 teğeti afinite eksen ve h_1 helisinin b doğrultusu, afinite ışınları doğrultusu, olmak üzere aralarında bir perspektif afinite vardır.

Meusnier Teoremi ile yapılan bu tasvir, aynı zamanda elde edilen bu iki yüzeyin her an değişen bir afinite eksen ve bu afinite eksenine bağlı olarak değişen afinite ışınlarına göre elde edilen tasvirleridir.

Bu özelliği aşağıdaki Teoremle tespit edebiliriz.

Teorem 4

Meusnier Teoremine göre birbiri üzerine tasvir edilmiş iki sıklık helis yüzeyinin sabit açı altında iki düzlemle olan kesiti bir daire ve elips olsun. Bu kesit daire ve elipsleri arasında, düzlemlerin arakesit doğrusu afinite eksen ve bu eksen üzerindeki daire ve elipsin ortak noktasının çizdiği helisin binormal doğrultusu afinite ışını olmak üzere her anda, bir ani perspektif afinite vardır.

3.3.2 EĞRİLİĞİ SABİT OLMAYAN EĞRİLER

Eğriliği sabit olmayan bir eğri olarak, periyodik değişen eğrilikli bir eğriyi yani sikloid helisini alalım. (**)

Sikloid helisinin bir eğik daire silindir yüzeyi üzerinde bulunması düşünülebilir ise de, bunu taşıyıcı yüzeyinden ayırarak Teorem 1 ve Teorem 2 de verilen tasvir özelliklerini eğriye tatbik etmek suretiyle kullanalım.

Şekil:8 de gösterilen M_1 noktası (M_1' , M_1'') yatay ve düşey izdüşümü ile verilen bir sikloid helisine ait nokta olsun. Bu noktadaki sikloid helisinin teğeti, sikloid helisinin aynı parametrelili bir Öklid helisi ile perspektif afin olması nedeniyle, şekilden görüleceği üzere $\overline{M_1'}$ ve $\overline{M_1''}$ helis noktasındaki $\overline{t_1'}$, $\overline{t_1''}$ helis teğetleri yardımıyla çizilir.

M_1 noktasındaki t_1 teğetine dik olan (v) normal düzlemi e_1 e_2 esas doğruları yardımıyla gösterilir (Şekil:8).

e_1 doğrusu aynı zamanda M_1 noktasındaki sikloid helisinin $\vec{k}$ asal normali olduğundan bu noktadaki eğrilik yarıçapı, e_1 doğrusunun yatay düzleme paralel olması nedeniyle e_1 doğrusu üzerine aynen taşınır. Böylece elde edilen K_1' noktası ve tanzim doğrusu ile bunu karşılayan K_1'' noktası e_1' doğrusu üzerinde bulunur.

(**) [8] de bildirilen çalışmalarla karşılaştırınız.

M_i noktasındaki eğrilik dairesi $M_i K_i$ yarıçaplı daire olup $\vec{t}$, $\vec{k}$ düzlemi içindedir. Bu dairenin çizilmesi için t_i doğrusu üzerinde seçilen 1 noktasının döndürülmesi ile, bu düzlem içinde, t_i ye paralel olan doğrultuların ve dolayısı ile eğrilik dairesinin t_i ye paralel olan çapının izdüşümdeki görüntüsü, dairenin e_i' ye dik çapının 2., 3. noktaları yardımıyla 2' ve 3' elips tepeleri elde edilir. (Şekil: 8 de bu dönme açısı tek çizgi ile işaretlenmiştir.)

Böylece M_i noktasındaki eğrilik dairesi, eksenleri $M_i C_N$ ve 2' 3' olan elips bilinen yollardan çizilir.

(v) normal düzlemi içinde bulunan $\vec{k}$ asal normali, $\vec{N}$ yüzey normali ve $\vec{b}$ binormali doğrultularını saptayalım. Bunun için e_1, e_2 esas doğrularının belirttiği düzlemini e_1 esas doğrusu etrafında, e_2 üzerinde alınan 4 noktasını döndürelim (Şekil: 8).

Böylece $t' = b'$ binormaline ait 5' noktası döndürülmek suretiyle 5'(5) yüksekliği elde edilerek b'' düşey izdüşümü M_i'' 5'' doğrusu olarak elde edilir. (Şekil 8 de bu dönme açısı iki çizgi ile işaretlenmiştir.)

Ayrıca 6 noktası yardımıyla, yüzey normali ile asal normal arasında $\theta = 30^\circ$ alınmak suretiyle $\overline{M_i C_N}$ doğrultusu elde edilir. Bu doğrultu üzerinde K_i noktasının b doğrultusundaki izdüşümü K_i' noktasını verir. M_i noktasına ait K_i merkezli eğrilik dairesi ve dolayısıyla yatay ve düşey izdüşümdeki $M_i' C_N'$ ve 2' 3' eksenli elips ve bunun Oskülatör düzlem içindeki izdüşümü olan K_i merkezli $M_i' C_N'$ eksenli elipsi 2' ve 3' noktalarının

$\overline{K}_i$ den geçen teğet doğrultusu üzerine b' binormal doğrultusunda izdüşürülmesi ile elde edilir.

Eşlenik çapları bulunan bu elips Rytz çizimi ile eksenleri elde edilerek tamamlanır.

Aynı düşünce ile düşey izdüşümdeki K_i'' ve $\overline{K}_i''$ merkezli elipsleri de elde edilir.

Bu suretle M_i noktasındaki K_i eğrilik dairesi ve Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan tasvire ait M_i noktasındaki eğrilik dairesinin izdüşümü de elde edilmiş olur.

Bu iki elipsin aralarında perspektif afin olması nedeniyle aşağıdaki teorem saptanır.

Teorem 5

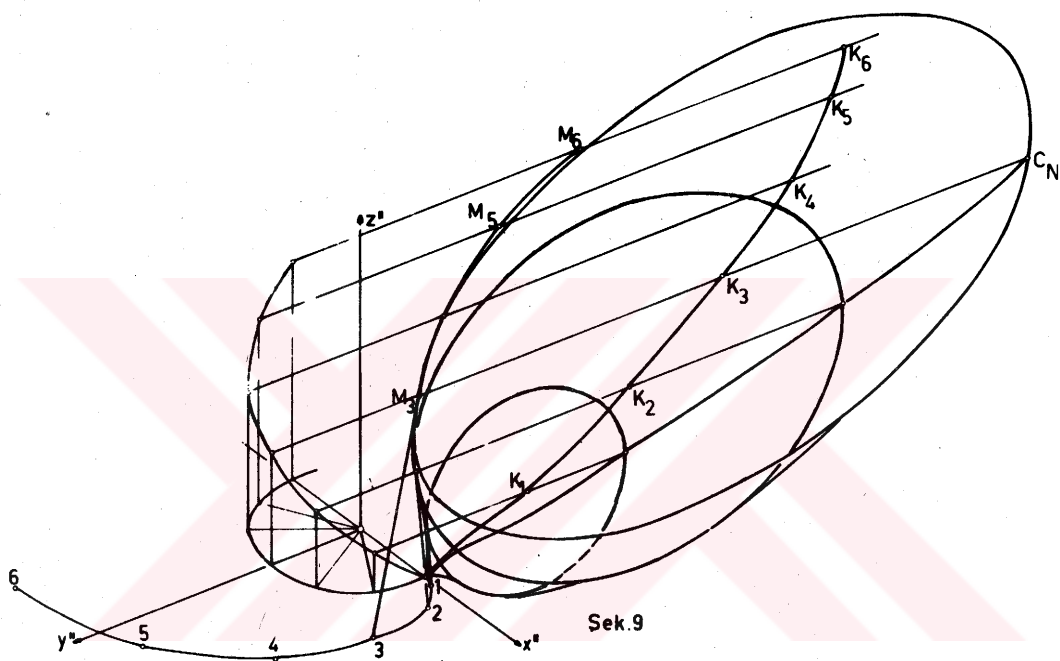
Herhangi bir yüzey üzerinde sabit eğrilikli olmayan bir eğri boyunca Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan yüzey tasvirinde yüzeyin eğrilik dairesi, Oskülatör düzlemi içinde eğriye aynı noktada değen perspektif afin bir elipsten ibarettir.

Bu perspektif afinitenin ekseni, e eğrisinin M noktasından geçen teğeti, ve afinite ışınları da yüzeyin binormal doğrultularıdır.

Bir (k) uzay eğrisini aksonometrik olarak göstereyim. Bu (k) eğrisi $\overline{k}$ Öklid helisine XY taban düzlemi alınmak suretiyle perspektif afin olan bir sikloid helisidir.

Bu afinitenin çakışma düzlemi XY düzlemi ve afinite ışınları Y ekseni doğrultusundadır.

(k) helisinin M_i noktasına ait bir eğrilik daire-sini çizelim.



Bu daire eğrilik yarıçapı değişen bir elips olarak görülür.

Dairenin M_i noktası k sikloid helisi boyunca daireyi hareket ettirsin.

Bu eğrilik dairesinin çizmiş olduğu yüzey, belirli düzlemlerle olan kesitleri yarıçapları değişen dairelerdir. Buna karşıt olarak değişen yarıçaplı dairelerin bir noktası bir sikloid helisi üzerinde hareket ettiği takdirde, *dairelerin zarf yüzeyi özel bir cins serpantin yüzeyi çizmektedir* (Şekil: 9)

Bu yüzeyin her noktasındaki değişen yarıçaplı daire kesiti, adı geçen noktaya ait sabit olan eğrilik yarıçapını verir.

Bu eğrilik yarıçapları dairenin her noktasında, dolayısıyla yüzeyin düzlemsel kesitlerine ait noktalarında yani M_i karşıtı olan iC_N noktalarında, sabit olacağından bu serpantin yüzeyi, yüzeyler arasında özel bir yer alır.

Yüzeyi teşkil eden dairelerin birbirini karşılayan noktalarının *yörüngeleri sikloid helisleridir*.

Bütün bu sikloid helisleri eğrilik dairesinin yarıçapı sıfır uzunlukta olan daireyle başlar ve eğrilik yarıçapları büyüyen dairelerin müteakıl noktalarını birleştirmek suretiyle bir sikloid helisleri demetinin meydana getirdiği yüzeyi teşkil ederler (Şekil:9). Örneğin M_i noktasının üzerinde hareket ettiği m sikloid helisi ile K_i merkez noktalarının ve iC_N karşıt noktalarının çizdiği sikloid helisleri gibi.

Yine bu yüzeyin tasviri hakkında Teorem 5 kullanılabileceği gibi herhangi bir M_1 noktasından geçen eğrinin t_1 teğetinden geçen iki düzlemsel kesit (bu düzlemsel kesitlerden biri M_1 noktasından geçen düzlem içindeki eğrinin eğrilik dairesi ve diğeri bu daireye noktadan geçen binormal doğrultusundaki afinite ışınları altında perspektif afin olan elips olmak üzere) aralarında perspektif afinite vardır.

Bu durum her noktadaki teğetten geçen yüzeyin iki düzlemsel kesiti olarak düşünüldüğünde, yüzeyin her noktasında Şekil: 5 b de belirtilen küçük silindir yüzeylerinin varlığı düşünülebilir.

Böylece her yüzey, bu küçük silindir parçalarından yapılmış yüzeylerin birleşimi gibi düşünülebilir.

Bu özelliği hareket geometrisindeki ani vidalanma özelliğine benzetebiliriz. (*)

Şöyleki, her noktadaki ani vidalanma eksenini yerine 0 noktaya ait teğet doğru, ani vidalanmanın ötelenme doğrultusu olarak da alınan noktadaki binormal doğrultusu karşılaştırılmak suretiyle, ani vidalanma ile ani perspektif afinite, yüzeyin Meusnier Teoremi yardımıyla tasvirinde birbirine karşıt olan iki geometrik bağ olurlar.

Böylece Meusnier Teoremi ile yapılan tasvirde, esas yüzey ile tasvir yüzeyi arasındaki tekabülün, ani vidalanmadaki yüzey parçalarının sonsuz yakın iki konumu arasındaki tekabüle karşıt olması düşünülebilir.

(*) [9] da verilen eserin, ani vidalanma ekseninin bulunması özelliği ile karşıt.

SONUÇLAR

- 1- Yüzey kesitlerinden elde edilen eğrilerden eğrilikleri arasındaki, Meusnier bağıntısının bir dik izdüşüm ile ifade edilebildiği,
- 2- Meusnier Teoreminin kullanılmasıyla yapılan bir tasvirde yüzey üzerindeki aynı Oskulatör düzleme sahip eğrilerin herhangi bir noktasındaki eğrilik merkezlerinin, esas yüzey ile tasvir yüzeyi arasındaki bir dik izdüşüm ile ifade edilebileceği,
- 3- Aynı noktadaki eğrilerin asal normal ve binormal tekâbülünün esas yüzey ile tasvir yüzeyi arasında tersinir olduğu,
- 4- Herhangi bir yüzey üzerinde sabit eğrilikli bir eğri boyunca Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan yüzey tasvirinde veya yüzeyler kendi kendisi üzerine tasvir edildiğinde, tasvir yüzeyi ile esas yüzey arasındaki geometrik bağ saptanmıştır.
- 5- Silindir yüzeyi üzerinde bulunan özel bir eğri olmak üzere seçilen Öklid helisinin Meusnier Teoremi yardımıyla yapılan tasviri, yüzeyi kendi kendisine dönüştürdüğü,

- 6- Lâlettayin bir yüzeyin herhangi bir noktasında Meusnier Teoremi ile yapılan tasvirde, yüzey üzerindeki noktadan geçen keyfi bir eğrinin teğeti afinite eksenini, o noktadaki binormal doğrultusu, afinite ışını doğrultusu olmak üzere esas yüzey ile tasvir yüzeyi arasında bir perspektif afinitenin varlığı,
- 7- Perspektif afinitenin yüzey üzerindeki eğrilerin, sabit eğrilikli olması ve olmamasına göre ayrı ayrı incelenmesi,
- 8- Sabit yarıçaplı eğrilikli dairelerinin helis hareketine tâbi tutulmasıyla meydana gelen sabit eğrilikli serpantin yüzeylerinin oluşturulması.
- 9- Yukarıdaki eğrilik dairelerinin değişen eğrilik yarıçapları ile teşkil ettiği serpantin yüzeylerinin oluşturulması,
- 10- Helisel sıklık yüzeylerinin bir eğri boyunca birbiri üzerine tasvirinde ani perspektif afinitenin tanımlanması,
- 11- Ani perspektif afinitenin yüzey üzerinde alınan sabit eğrilikli olmayan eğrilerde, bu eğri boyunca yapılan tasvirin ani vidalanma ile karşılaştırılması, yapılmak suretiyle yukarıda yazılı sonuçlar elde edilmiş, bunların orijinal olanları teoremler olarak metin içinde ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Martin - Lipschutz ; Differential Geometry
Schaum's outline Series
chap.11, p.227
- [2] F.Akbulut; Bir yüzey üzerindeki eğrilerin Dar-
boux vektörleri Ege Üniversitesi 1983
- [3] Blaschke - Erim ; Diferensiyel Geometri Dersleri
İstanbul 1949 33, 86
- [4] Asaf V. Günhan; Tasarı Geometri Dersleri (Para-
lel izdüşümler I) İ.T.U. Yayın-
ları 1962
- [5] Schüssler - Günhan; Ortogonal (Dik) Aksonometri
İ.T.U. Yayınları 1962
- [6] Asaf V. Günhan; Tasarı Geometri Dersleri (Para-
lel izdüşümler II) İ.T.U Yayın-
ları 1975
- [7] Asaf V. Günhan; Tasarı Geometri Dersleri Kutul-
muş matbaası, İstanbul 1967
- [8] Asaf V. Günhan; Sikloid Vidalanmasının Teorisi
hakkında İ.T.U. Dergisi Cild 16
N:3 1958 - Cild 19 N:1 1961
- [9] J.Kromes ; Darstellend und kinematische Geometrie
Wien 1947, Madde 42 Genel bağlı uzay
hareketleri S.212
- [10] Mustafa Şenatalar; Diferansiyel Geometri (Eğriler
ve yüzeyler teoreisi) Kutulmuş
Matbaası - İstanbul/1978
- [11] Dırk J.Struik; Differential Geometry - 1950 Ad-
dison - Wesley Press, Inc.Cambridge 42

ÖZGEÇMİŞ

Nedret Karaşin, 1945 yılında Balıkesir'in Ayvalık ilçesinde doğmuş, ilköğrenimini Altınova ilkokulunda tamamlayarak, Soma Ortaokulu'nda başladığı Orta öğrenimini İzmir Kız Lisesinde tamamlamıştır.

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümünden 1977 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl Kocaeli Devlet Mühendislik Mimarlık Akademisinde Matematik asistanı olarak çalışmaya başlamıştır.

Halen Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesinde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.