YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CİRCULANT MATRİSLER KULLANILARAK (v,k,λ)–PARAMETRELİ BİR SİMETRİK DİZAYN SINIFININ KURULUŞU

Mat. Müh. Hülya BURHANZADE

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan
DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erol BALKANAY

İSTANBUL - 1996

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen ve daima yol gösterici olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Erol BALKANAY 'a teşekkür ederim.

Hülya BURHANZADE

ÖZET

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin orijinal kısmı için gerekli olan Dizayn, simetrik dizayn, circulant matris, çakışım matrisi, fark kümesi, fark kümesinin gelişmişi v.b. temel tanımlar, teoremler ve kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, $N \equiv 2 \pmod 4$ ve $v = \frac{N}{2}$ olmak üzere elemanları ∓ 1 ler olan $v \times v$ - circulant matrisler kullanılarak, (v, k, λ)- parametreli simetrik dizaynların kurulması amaçlanmıştır. Bundan başka $N \equiv 2 \pmod 4$ koşulunu sağlayan bir X circulant matrisinin kurulmasının, buna karşılık olan D fark kümesinin kuruluşuna denk olduğu gösterilmiştir. X circulant matrisine bağlı olarak $A(z)$ polinomu tanımlanmış ve $A(z)$ polinomu ile $N_x(t) = \sum_{i=0}^{v-t-1} a_i a_{i+t}$ $(t = 0, 1, \ldots, v-1)$ fonksiyonu arasında bazı bağıntılar elde edilmiştir ve sonunda da Teorem 2.4'e dayanarak v'nin asal olması halinde (v, k, λ) −dizaynının kurulması için bir algoritma verilmiştir.

SUMMARY

This study consists of two chapters. Chapter I contains the basic definitions, which are circulant matrix, incidence matrix, difference set, development of a (v,k,λ) - difference set, symmetric design, etc., and the theorems about the subject.

Chapter II is the original part of the thesis. In this chapter, we have aimed to construct a symmetric design with parameters (v,k,λ) by means of some certain $v \times v$ circulant matrices with entries ∓ 1 such that $N \equiv 2 \pmod 4$ and $v = \frac{N}{2}$. Moreover we have shown that the construction of the circulant matrix X satisfying the relation $N \equiv 2 \pmod 4$ is equivalent to the construction of the corresponding difference set D. We consider the polynomial $A(z)$ associated with circulant matrix X, then we have found out some relation between the polynomial $A(z)$ and the function $N_x(t) = \sum_{i=0}^{v-t-1} a_i a_{i+t}$ $(t = 0,1,\ldots,v-1)$. At the end of this chapter we've given an algorithm to construct a (v,k,λ) design for prime v by using the Theorem 2.4.

BÖLÜM 1

DİZAYN TEORİ

Bu bölümde tezimizin orjinal kısmı için gerekli, Dizayn teoriyle ilgili, temel bilgi, tanım ve teoremler incelenmiştir.

1.1. Çakışım Yapısı :

Bir Çakışım Yapısı, P ile göstereceğimiz noktalar kümesi, B ile göstereceğimiz bloklar kümesi ve noktalar ile bloklar arasında R ile gösterdiğimiz bir çakışım bağıntısından oluşur. Bir çakışım yapısı (P,B,R) ile gösterilir. Ayrıca bir p noktası bir y bloğu ile çakışım durumundaysa $p\,R\,y$ veya $p \in y$ şeklinde gösterilir. $p\,R\,y$ ifadesi "p, y üzerindedir", "y, p yi içerir" veya "p, y ile çakışım durumundadır" şeklinde okunur. p'nin çakışım durumunda olduğu bloklar kümesi $\langle p\rangle$ ile, y'nin çakışım durumunda olduğu noktalar kümesi $\langle y\rangle$ ile, p noktasının kaç tane blokla çakışım durumunda olduğu $|\langle p\rangle| = |p|$ ile ve y bloğunun kaç tane nokta ile çakışım durumunda olduğu da $|\langle y\rangle| = |y|$ sembolleriyle gösterilir.

Bundan böyle yapı denince çakışım yapısı anlaşılacaktır. Bir S yapısında noktaların sayısı v ile blokların sayısı da b ile gösterilir. p noktası x bloğu üzerinde ise p noktası x denklik sınıfındadır denir [HUGHES et all, 1985].

1.1.1. Tekrarlı Blok

S'nin blokları arasında

$$\langle x\rangle = \langle y\rangle \quad \text{ise} \quad x\,R\,y$$

dir, şeklinde bir R denklik bağıntısı tanımlanabilir. Bu durumda bir x bloğunun katlılığı x bloğunun temsil ettiği R-denklik sınıfının eleman sayısı olur.

S dizaynında herhangi bir x bloğunun katlılığı 1'den büyük ise bu x bloğuna tekrarlı bir blok adı verilir [HUGHES et all, 1985].

1.1.2. İndirgenmiş Yapı

$S/_R$ yapısı, verilen bir S yapısı ve yukarıdaki gibi tanımlanan R denklik bağıntısı vasıtasıyla tanımlanır.

$S/_R$ nin noktalar kümesi, S'nin noktalar kümesidir. Bloklar kümesi ise, R ye göre oluşan denklik sınıflarıdır. Tekrarlı bloğu olmayan bir S yapısı, S'nin indirgenmiş yapısıdır [HUGHES et all, 1985].

1.1.3. Yalıtık Eleman

S'teki bir eleman 0 veya 1 tane elemanla çakışım durumundaysa bu elemana yalıtık eleman denir.

1.1.4. Dolu Eleman

S'nin bir elemanı, tüm elemanlarla çakışım durumundaysa bu elemana dolu eleman denir.

1.1.5. S'nin Standartlaştırılmışı

Bir S yapısı verildiğinde, ardışık olarak tüm dolu elemanlar sonra da yalıtık elemanlar, sonra tekrar dolu elemanlar v.b. atılarak yeni bir yapı elde edilebilir. Bu yapı $\bar{S}$ ile gösterilir ve S'nin standartlaştırılmışı denir [HUGHES et all, 1985].

1.1.6. Tam İndirgenmiş Yapı

Bir S yapısı hem standartlaşmış hem de indirgenmiş ise bu yapıya tam indirgenmiştir denir.

1.1.7. Çakışım Matrisi

Bir S yapısında v noktalar, b bloklar $(v>0, b>0)$ olmak üzere, S'nin noktaları $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_v$ ve blokları $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_b$ şeklinde etiketlenmek üzere S için bir $A=(a_{ij})$ çakışım matrisi $v \times b$ boyutlu bir matris olup,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} = 1; & p_i \text{ noktası } x_j \text{ bloğu üzerinde ise} \\ a_{ij} = 0; & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi A bir $(0,1)-$matristir.

S yapısı hakkındaki tüm bilgiler A çakışım matrisinden elde edilebilir. S nin blokları ve noktaları farklı bir şekilde etiketlendiğinde, A çakışım matrisi doğal olarak değişecektir. Fakat verilen bir S yapısının farklı çakışım matrisleri arasında çok yakın bir ilişki vardır. S'nin noktaları $p_1, p_2, \ldots, p_v$ blokları ise $x_1, x_2, \ldots, x_b$ şeklinde etiketlendiğinde çakışım matrisi A, noktalar $q_1, q_2, \ldots, q_v$ şeklinde bloklar ise $x_1, x_2, \ldots, x_b$ şeklinde etiketlendiğinde de çakışım matrisi B olsun. Görüldüğü gibi, noktalar farklı, bloklar aynı şekilde etiketlenmiştir. Her q_i bir p_j noktası olduğuna göre $\{1,2,\ldots,v\}$'nin bir θ permütasyonu elde edilir. Bu permütasyon

$$\theta(i) = j \Leftrightarrow q_i = p_j$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ise herhangi bir i için, B'nin i. satırının A'nın $\theta(i)$ inci satırı olması demektir. Diğer bir deyişle B matrisi, A'nın satırlarının bir permütasyonu ile elde edilir. Sonuç olarak, bloklar da farklı şekilde etiketlenebileceğinden bir S yapısının iki çakışım matrisi A ve B ise $PAQ = B$ şeklinde P ve Q permütasyon matrisleri vardır. Böylece de bir yapının iki çakışım matrisi birbirine denktir [HUGHES et all, 1985].

1.1.8. Birbiçimli Yapı

S yapısı verildiğinde, S yapısının bloklar kümesi boş kümeden farklı ve her blok tam $k > 0$ tane nokta içeriyorsa S yapısına birbiçimli denir.

$$J_{m\times v} A_{v\times b} = kJ_{m\times b}$$

ise S yapısı birbiçimlidir.

Buradaki J, elemanlarının hepsi +1 olan bir matristir.

1.1.9. Düzgün Yapı

Bir S yapısında tüm p noktaları için $|p| = r > 0$ ise bu yapıya düzgün bir yapı denir. Buna göre S yapısının düzgünlük koşulu

$$A_{v\times b} J_{b\times m} = rJ_{v\times m}$$

olmasıdır.

1.1.10. *t*-yapı

v noktalı bir S yapısı verilsin $0 \le t \le v$ olmak üzere S'nin t-noktalı her alt kümesi tam λ tane blok ile çakışım durumundaysa bu yapıya bir t-yapı denir. Blok genişliği k olan düzgün bir t-yapı, $t-(v,k,\lambda)$ yapı adını alır.

Birbiçimli t-yapılar, $0 \leq s \leq t$ koşulunu sağlayan her s için, birbiçimli s-yapıdır [HUGHES et all, 1985].

1.1.11. Teorem

Bir $t-(v,k,\lambda)$ yapı S olsun. Bu durumda $0 \leq s < t$ koşulunu sağlayan her s tamsayısı için S'nin noktalarından oluşan bir s-küme ile çakışım halinde olan

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)}$$

tane blok vardır [HUGHES et all, 1985].

İSPAT :

S'nin s tane noktasından oluşan belli bir alt küme B olsun. S'nin B'yi içeren bloklarının sayısını m ile gösterelim. Bu durumda amaç m'yi teoremdeki gibi belirtmektir. (Yani $m = \lambda_s$ olduğunu göstermektir.) Burada m'nin B kümesinin seçimine bağlı olmayıp sadece s sayısına bağlı olduğu gösterilmelidir. Bunun için olası $(\mathscr{T}, y)$ ikilileri tanımlansın. Burada $\mathscr{T}$ ile B kümesini içeren t noktalı bir küme gösterilir. y ise $\mathscr{T}$ 'yi içeren bir bloktur. Bu şekilde oluşan $(\mathscr{T}, y)$ ikililerini aşağıdaki biçimde iki ayrı yolla sayalım:

B'yi kapsayan m bloktan herbiri, B'yi kapsayan $\binom{k-s}{t-s}$ tane t-küme içerir. O zaman olası ikililerin sayısı $m\binom{k-s}{t-s}$ olur. Diğer yandan B'yi kapsayan t-noktalı bir $\mathscr{T}$ kümesinin seçimi $\binom{v-s}{t-s}$ yolla yapılabilir. Ve bu kümelerin herbiri tam λ tane blok üzerindedir. Yani bu kümelerin herbiri ortaklaşa tam λ tane blokta birlikte bulunurlar. Dolayısıyla olası $(\mathscr{T}, y)$ ikililerinin sayısı $\lambda\binom{v-s}{t-s}$ olur. Yukarıdaki gibi elde edilen olası çiftlerin sayısı eşitlenirse,

$$m\binom{k-s}{t-s} = \lambda\binom{v-s}{t-s}$$

$$m=\lambda\frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}$$

$$m=\lambda\frac{(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)}=\lambda_s$$

bulunur.

Bu teoremin sonucu olarak $t>0$ için bir $t-(v,k,\lambda)$ yapı S olsun. Eğer s, $0<s<t$ koşulunu sağlayan bir tamsayı ise bu durumda S'nin bir $s-(v,k,\lambda_s)$ yapı olduğu hemen söylenebilir.

Eğer S bir $t-(v,k,\lambda)$ yapı ise bu yapıdaki blokların sayısı b ile gösterilir. Eğer $t\geq 1$ ise Teorem 1.1.11'den dolayı bir noktadan geçen blokların sayısı sabittir. Yani bir noktanın çakışım durumunda olduğu blok sayısı sabittir. Bu sabit sayı r ile gösterilecektir. $t\geq 2$ olması halinde $n=r-\lambda_2$ sayısı S yapısının mertebesi adını alır ($b=\lambda_0$, $r=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_t$ dir.) t,v,b,k,λ,r,n tamsayıları S'nin parametreleri adını alır.

1.1.12. Kare Yapı

Bir S yapısının blok sayısı nokta sayısına eşit ise ($b=v$ ise) bunun çakışım matrisi kare matris olur. Bu nedenle bir yapıda $b=v$ ise bu yapıya kare yapı denir.

1.1.13. Dizayn

Birbiçimli indirgenmiş bir yapıya dizayn denir. S, (v,k,λ) parametreli bir dizayn ise S'nin bir t-dizaynı, $t-(v,k,\lambda)$-dizayn adını alır [HUGHES et all, 1985].

1.1.14. Bir Yapının Duali

S'nin duali S^T ile gösterilir. S^T yapısında S'nin blokları noktalar, noktaları da bloklarıdır. S'nin her p noktası için S^T nin bir p' bloğu vardır ve S'nin her bir x bloğu için S^T nin bir x' noktası vardır.

S^T deki çakışım bağıntısı ise; "Ancak ve ancak S deki p noktası x bloğu üzerinde ise x' noktası p' bloğu üzerindedir," şeklinde tanımlanır [HUGHES et all, 1985].

Ayrıca $(S^T)^T=S$ dir.

A, bir S yapısının çakışım matrisi ise A'nın transpozesi olan A^t matrisi de S^T yapısının bir çakışım matrisidir.

1.1.15. *S* Yapısının Tümleyeni

S'nin tümleyeni $C(s)$ ile gösterilir. $C(s)$'in noktaları tamamıyla S'nin noktalarından oluşur. S'nin bir x bloğu için, $C(s)$'in bir x^* bloğu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Bir p noktası ancak ve ancak bir x bloğu üzerinde değilse, bir x^* bloğu üzerindedir.

Bunlardan başka

1) S 'in birbiçimli olması için gerek ve yeter koşul $C(s)$ 'in birbiçimli olmasıdır,

2) S 'in düzgün olması için gerek ve yeter koşul $C(s)$ 'in düzgün olmasıdır,

3) S 'in dizayn olması için gerek ve yeter koşul $C(s)$ 'in dizayn olmasıdır,

özellikleri de hemen söylenebilir [HUGHES et all, 1985].

1.1.16. İzomorfizm

S_1 ve S_2 gibi iki çakışım yapısı verilmiş olsun.

$$\alpha : S_1 \rightarrow S_2$$

fonksiyonu için

1° - α, S_1'in noktalarından S_2'nin noktalarına bire-bir ve örten,

2° - α, S_1'in bloklarından S_2'nin bloklarına bire-bir ve örten,

3° - $p \in x \Leftrightarrow \alpha(p) \in \alpha(x)$

koşulları sağlanıyorsa α 'ya bir izomorfizm, S_1 ve S_2 yapılarına da izomorfiktirler denir. Bu $S_1 \simeq S_2$ şeklinde gösterilir.

1.1.17. Ön Teorem

Herhangi bir $(0,1)-$matris, bir yapının çakışım matrisidir. Eğer A ve B iki $(0,1)-$matris ise bunlar ancak ve ancak $PAQ = B$ olacak şekilde P ve Q permütasyon matrisleri varsa, izomorfik iki yapının çakışım matrisi olurlar [HUGHES et all, 1985].

İSPAT :

A, $v \times b$ boyutlu herhangi bir (0,1)-matris olsun. Bu durumda öyle $p_1, p_2, \ldots, p_v$ noktaları ve $x_1, x_2, \ldots, x_b$ blokları tanımlanabilir ki, ancak ve ancak A'nın a_{ij} elemanı 1 ise p_i noktası x_j bloğu üzerindedir. Böylece istenen yapıyı elde etmiş oluruz.

S yapısının çakışım matrisi A, noktaları $p_1, p_2, \ldots, p_v$, blokları ise $x_1, x_2, \ldots, x_b$ şeklinde verilmiş olsun. Ancak ve ancak p_i noktası x_j bloğu üzerinde ise $a_{ij} = 1$ dir diyebiliriz. S yapısına izomorfik olan bir $\mathscr{T}$ yapısı ele alınsın. $\mathscr{T}$'nin çakışım matrisi B ile gösterilsin. $\mathscr{T}$'nin noktaları $q_1, q_2, \ldots, q_v$, blokları $y_1, y_2, \ldots, y_b$ şeklinde verilmiş olsun. Eğer q_i noktası y_j bloğu üzerinde ise $b_{ij} = 1$ dir. Eğer $\mathscr{T}$'nin elemanları $r_1, r_2, \ldots, r_v$ ve $z_1, z_2, \ldots, z_b$ şeklinde gösterilirse;

$$r_i = \alpha(p_i)$$
$$z_j = \alpha(x_j), \quad (1 \le i \le v), \quad (1 \le j \le b)$$

dir.

α bir izomorfi olduğundan, ancak ve ancak r_i noktası z_j bloğu üzerinde ise $a_{ij} = 1$ dir. O zaman $\mathscr{T}$'nin çakışım matrisi A olmuş olur. Böylece aynı $\mathscr{T}$ yapısının B ve A gibi iki çakışım matrisi elde edilir.

$$PAQ = B$$

olacak şekilde P ve Q permütasyon matrisleri mevcuttur.

Bu kez A ve B her ikisi de $v \times b$ boyutlu öyle (0,1)-matrisler olsunlar ki,

$$PAQ = B$$

olacak şekilde P ve Q permütasyon matrisleri var olsun. Bu durumda A ve B'nin iki izomorfik yapının çakışım matrisleri olduğunu göstereceğiz.

$\{1,2,\ldots,v\}$ kümesinin bir permütasyonu θ, $\{1,2,\ldots,b\}$ kümesinin bir permütasyonu da ϕ ile gösterilsin. θ permütasyonu P ile, ϕ permütasyonu da Q ile belirtilsin. Bu permütasyon $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ için

$$a_{\theta(i)\phi(j)} = b_{ij}$$

şeklinde verilsin. bu durumda aşağıdaki gibi bir S yapısı tanımlanabilir:

S'nin elemanları, $p_1, p_2, \ldots, p_v$; $x_1, x_2, \ldots x_b$; çakışım matrisi ise A olsun. Bu elemanları $q_1, q_2, \ldots, q_v$; $y_1, y_2, \ldots y_b$ şeklinde etiketlediğimizde elde edilen yeni yapı $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{T}$'nin çakışım matrisi B olsun.

$$\alpha : S \to \mathscr{T}$$

tasviri

$$\theta(j) = i \text{ olmak üzere } \alpha(p_i) = q_j$$

ve

$$\phi(m) = l \text{ olmak üzere } \alpha(x_l) = y_m$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

O zaman

$$\alpha : p_{\theta(j)} \to q_j$$

$$\alpha : x_{\phi(m)} \to y_m$$

olur. Bu tasvir S'nin noktalarından $\mathscr{T}$'nin noktalarına ve S'nin bloklarından $\mathscr{T}$'nin bloklarına giden bire-bir ve örten bir tasvirdir. Şu halde ispatı tamamlamak için ancak ve ancak "p_i noktası x_l üzerinde ise $\alpha(p_i)$ noktasının $\alpha(x_l)$ üzerinde" olduğu gösterilmelidir. Yani ancak ve ancak "q_j ,y_m üzerinde ise $p_{\theta(j)}$'nin, $x_{\phi(m)}$ üzerinde" olduğu gösterilmelidir.

Biliyoruz ki $a_{\theta(j)\phi(m)} = 1$ ise $p_{\theta(j)}$,$x_{\phi(m)}$ üzerindedir. Ayrıca $b_{jm} = 1$ ise q_j ,y_m üzerindedir. θ ve ϕ tanımından

$$a_{\theta(j)\phi(m)} = b_{jm}$$

dir. İspatlanması gereken de budur.

1.2. Simetrik Dizayn

1.2.1 $(v,k,\lambda)-$ konfigürasyon :

v, k,λ pozitif tamsayılar ve $\lambda < k < v-1$ olmak üzere herbirine blok denilen ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen v tane $B_1, B_2, \ldots, B_v$ kümelerinin topluluğuna $(v,k,\lambda)-$ konfigürasyon denir:

1. Her B_i kümesinin k elemanı vardır,
2. $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_v$ kümesinin v elemanı vardır,
3. Her $i \neq j$ için $B_i \cap B_j$ kümesinin λ elemanı vardır [Kaya, 1978].

1.2.2. $(v,k,\lambda)-$**Parametreli Simetrik Dizayn**

$v>k$ olmak üzere $(v,k,\lambda)-$parametreli bir kare 2-dizayna simetrik dizayn denir.

Bu tanım daha açık olarak aşağıdaki gibi de yapılabilir :

$(v,k,\lambda)-$parametreli Simetrik Dizayn, aşağıdaki altı aksiyomu sağlayan bir çakışım yapısıdır.

1- Nokta sayısı v dir.

2- Blok sayısı v dir.

3- Her bir nokta tam k tane blok ile çakışım durumundadır.

4- Her bir blok tam k tane nokta ile çakışım durumundadır.

5- Herhangi iki bloğun ortaklaşa çakışım durumunda oldukları nokta sayısı λ dır.

6- Herhangi iki noktanın ortaklaşa çakışım durumunda oldukları blok sayısı λ dır.

[LANDER, 1985].

Her $(v,k,\lambda)-$simetrik dizaynın bir $(v,k,\lambda)-$konfigürasyon olduğu bellidir.

1.2.2. Özelik

$(v,k,\lambda)-$parametreli simetrik blok dizaynın parametreleri arasında

i-) $(v-1)\lambda=k(k-1)$

ii-) $k^2-v\lambda=k-\lambda$

iii-) $(v-k)\lambda=(k-1)(k-\lambda)$

bağıntıları vardır.

İSPAT :

i-) Bir q noktası seçilsin. $p\neq q$ olmak üzere p ve q ile çakışım durumunda olan B blokları ile p noktalarından oluşturulan (p,B) ikilileri iki farklı yolla sayılsın. Sonra bunlar eşitlensin. p ,q ikilisi $(p\neq q)$ ortaklaşa λ tane blok ile çakışım durumundadır. q'yu sabit tutarak p'yi $v-1$ şekilde seçebileceğimizden, istenen koşula uygun (p,B) ikililerinin sayısı $(v-1)\lambda$ olur.

Diğer taraftan B bloklarının tam k tanesinde q vardır. Bu k bloktan q'lar atılırsa, her birinde $k-1$ eleman kalır. Yani q'yu içeren B bloğu ile $k-1$ tane (p,B)

ikilisi oluşturulur. q 'yu içeren k tane blok olduğundan, istenen (p,B) ikililerinin sayısı $k(k-1)$ dir. Sonuç olarak

$$(v-1)\lambda = k(k-1)$$

bulunur.

ii-) ve iii-) şıklarının ispatı da i-)'den kolaylıkla görülür.

1.2.3. Simetrik Dizaynın Mertebesi

$n = k-\lambda$ tamsayısına, $(v,k,\lambda)-$parametreli simetrik dizaynın mertebesi denir.

1.2.4. $(v,k,\lambda)-$Simetrik Dizaynın Çakışım Matrisi

Bir $(v,k,\lambda)-$parametreli simetrik dizaynda

$$P=\{p_1,p_2,\ldots,p_v\}, \qquad B=\{B_1,B_2,\ldots,B_v\}$$

olmak üzere, elemanları

$$a_{ij}=\begin{cases}1\ ; & p_i \text{ noktası } \mathrm{B_j} \text{ bloğu ile çakışım durumunda ise,}\\ 0\ ; & p_i \text{ noktası } \mathrm{B_j} \text{ bloğu ile çakışım durumunda değilse,}\end{cases}$$

olan $A=\left[a_{ij}\right]_{v\times v}$ matrisine, Simetrik Dizaynın Çakışım Matrisi denir.

1.2.5. Özelik

Elemanlarının hepsi +1 olan $v\times v$ boyutlu kare matris J, I ise uygun boyutlu birim matris olmak üzere;

i-) $AJ = JA = kJ$
ii-) $AA^t = A^tA = (k-\lambda)I+\lambda J = nI+\lambda J$
iii-) $|\det A| = kn^{\frac{1}{2}(v-1)}$

bağıntıları vardır.

1.2.6. Simetrik Dizaynın Otomorfisi

Simetrik dizaynın kendi üzerine bir izomorfisi, bir otomorfi adını alır. Bu tanıma göre bir otomorfi için, noktalar ve blokların çakışım yapısını koruyan birer permütasyonu verilmelidir. Simetrik dizaynın tüm otomorfilerinin grubuna Full otomorfi grubu denir. Full otomorfi grubunun herhangi bir alt grubuna da bir otomorfi grubu adı verilir.

1.2.7. Teorem

Bir simetrik dizaynın bir σ otomorfisinin sabit tuttuğu nokta ve blok sayısı eşittir.

İSPAT :

Verilen simetrik dizaynın çakışım matrisi A olsun. Noktaların permütasyonunu bir P matrisi, blokların permütasyonunu da bir Q matrisi belirlesin. Noktalar çakışım matrisinin satırlarına, bloklar ise sütunlarına karşılık geldiğinden

$$PAQ = A$$

yazılır. Bir permütasyonla sabit tutulan elemanların sayısı (nokta veya blok), permütasyon matrisinin *İz*'ine eşittir.

$$\begin{aligned} PAQ &= A \\ P^{-1}PAQ &= P^{-1}A \\ AQ &= P^{-1}A \\ AQA^{-1} &= P^{-1}AA^{-1} \\ AQA^{-1} &= P^{-1} \\ AQA^{-1} &= P^{t} \end{aligned}$$

bulunur. ($|A| \neq 0$ ve permütasyon matrisinin inversi transpozesine eşittir.) Şu halde Q ve P^{t} matrisleri benzer matrislerdir. Dolayısıyla

$$\text{İz } Q = \text{İz } P$$

olur.

1.2.8. Teorem

Bir simetrik dizaynın bir σ otomorfisinin noktalar üzerindeki permütasyonu ile bloklar üzerindeki permütasyonu aynı devresel yapıya sahiptir.

İSPAT :

σ otomorfisine karşılık gelen nokta permütasyonu Π_1, blok permütasyonu Π_2 olsun. Π_1'in devrelere ayrılışında d uzunluğundaki devreler sayısı $f_1(d)$, Π_2'nin d uzunluğundaki devrelerinin sayısı $f_2(d)$ olsun. Her m tamsayısı için Π_1^m ile sabit tutulan noktalar sayısı

$$\sum_{d|m} d\, f_1(d)$$

Π_2^m ile sabit tutulan blok sayısı

$$\sum_{d|m} d\, f_2(d)$$

dir. Moebius İnversiyon formülü yardımıyla her d için

$$f_1(d) = f_2(d)$$

elde edilir.

İspatlanması gereken de budur.

Sonlu bir X kümesinin tüm permütasyonlarının grubu $Sym(X)$ ile gösterilsin. Buna X üzerinde simetrik grup da denir. $Sym(X)$'in bir alt grubu G ise, her $x \in X$ için

$$Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$$

kümesi x'in G altındaki yörüngesi adını alır. X'in x elemanını sabit tutan G'nin tüm elemanlarının alt grubu x'in stabilizeri adını alır. Bu G_x ile gösterilsin. Buna göre aşağıdaki Yardımcı Teorem söylenebilir.

1.2.9. Yardımcı Teorem

$$|Gx| = [G:G_x]$$

dir [LANDER, 1983].

İSPAT :

Her bir $g \in G$'den $g(x) \in Gx$'e olacak şekilde G'den Gx'e eşleme düşünelim. Bu örten bir tasvirdir. Bundan başka G'nin üzerindeki elemanların aynı görüntüye sahip olması için gerek ve yeter koşul onların G_x'de aynı sol kosete sahip olmalarıdır. G_x'in G'deki kosetlerinin sayısı Gx'in kardinalitesine eşittir.

1.2.10. Yardımcı Teorem

X üzerinde G'nin yörüngeleri sayısı

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

dir. Burada $Fix(g)$ ile, g permütasyonu ile sabit tutulan noktaların kümesi gösterilmiştir [LANDER, 1983].

İSPAT :

$g \in G$, $x \in X$ ve $g(x) = x$ olan (g,x) ikililerinin sayısını düşünelim. Önce G üzerindeki elemanları sonra X üzerindeki elemanları sayalım.

$$\sum_{g\in G}|Fix(g) = \sum_{x\in X}|G_x$$

eşitliği bulunur.

t yörüngelerinin temsilcileri $x_1, x_2, \ldots, x_t$ olsun. Eğer $x \in G_{x_i}$ ve g de $g(x) = x_i$ olacak şekilde herhangi bir eleman ise, o zaman $G_x = g^{-1}G_{x_i}g$ olur. $|G_x| = |G_{x_i}|$ dir. Buradan

$$\sum_{g\in G}|Fix(g)| = \sum_{i=1}^{t}\sum_{x\in Gx_i}|G_{x_i}|$$
$$= \sum_{i=1}^{t}|Gx_i||G_{x_i}|$$
$$= \sum_{i=1}^{t}|G|$$
$$= t|G|$$

olur. Bu yardımcı Teorem Cauchy-Frobenius Lemması olarak bilinir.

1.2.11. Teorem

Bir simetrik dizaynın bir G otomorfi grubu noktalar üzerinde, bloklar üzerindeki yörünge sayısı kadar yörüngeye sahiptir [LANDER, 1983].

İSPAT :

Cauchy-Frobenius Lemma'sına göre, G'nin yörüngelerinin sayısı

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

idi. Bir σ otomorfisi de aynı sayıda nokta ve bloğu sabit tutuğuna göre, teorem ispatlanmış olur.

Herhangi $x, y \in X$ ler için $g(x) = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa G permütasyon grubuna X üzerinde geçişlidir (transitiftir) denir. G grubu X üzerinde geçişli ise

$$|X| = [G{:}G_x] \qquad \text{ve} \qquad |G| = \sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

dir.

X üzerinde bir permütasyon grubu G olsun. Eğer $k > 1$ tamsayısı için farklı elemanlardan oluşan her $(x_1,\ldots,x_k)$, $(y_1,\ldots,y_k)$ sıralı k-lıları için

$$g(x_i) = y_i \qquad (i = 1,\ldots,k)$$

olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa G'ye k-geçişli (k-transitif) dir denir.

Herhangi $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k-lılarını farklı elemanlardan oluşan diğer bir $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ k-lısına taşıyan bir ve ancak bir eleman varsa, bu gruba keskin k-geçişli (sharply k-transitif) denir.

Bir keskin 1-geçişli gruba regular denir [LANDER, 1983].

1.3. Fark Kümeleri

Fark kümesini tanımlamadan önce, sık sık karşılaşacağımız Circulant Matris tanımını vermek yararlı olacaktır.

1.3.1. Circulant Matris

$i+1$. satırı i . satırının devresel bir değişimi ile elde edilen $n \times n$- türünde bir kare matrise, circulanttır denir [BLAKE et all, 1975].

Örneğin,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

matrisi circulant bir matristir Bu kısaca $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şeklinde de gösterilebilir.

Circulant matrislerde aşağıdaki özellikler vardır:

1) Eğer $R_1 = (D_0, \ldots, D_{s-1})$, $R_2 = (G_0, \ldots, G_{s-1})$ olup D_i, G_j ler (t mertebeli) circulant matrisler ise o zaman

$$R_1 R_2 = R_2 R_1$$

dir.

2) Bir D_i circulant matrisinin transpozesi de circulanttır.

$$R_1^T = \left(D_0^T, D_{s-1}^T, \ldots, D_1^T\right)$$

circulant bloklardan oluşan blok circulant matristir.

3) Eğer R_1, R_2 blok circulant matris ise o zaman

$$R_1 R_1^T = R_1^T R_1 \,, \qquad R_1 R_2^T = R_2^T R_1$$

dir [CHAPJIPANTELIS et all, 1985].

1.3.2. (v,k,λ) **−Fark Kümesi**

Mertebesi v olan bir grup G ve G'nin k elemanlı bir D alt kümesi gözönüne alınsın. $x,y \in D$ olmak üzere, xy^{-1} elemanlarından oluşan liste G'nin e etkisiz elemanından farklı her elemanını tam λ kez içeriyorsa D'ye G'nin bir (v,k,λ)−fark kümesi adı verilir. Grup toplam grubu ise xy^{-1} ifadesi $x-y$ halini alır [LANDER, 1983].

Z_v'de fark kümesini şu şekilde tanımlarız : Herhangi bir sıfırdan farklı a tamsayısı için,

$$a_i - a_j = a \qquad \bmod v$$

olduğunda, tam λ tane (a_i, a_j) ikilisi var olacak şekilde, $\bmod v$'ye göre k tane tamsayıdan oluşan küme $D = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ise, o zaman D'ye bir (v,k,λ) veya perfect fark kümesi denir. Böyle bir fark kümesinde

$$\lambda(v-1) = k(k-1)$$

dir. Fark kümeleri ile çakışım matrisleri circulant olan (v,k,λ) konfigürasyonları arasında (1-1)-eşleme olduğunu gösterelim.

$\bmod v$ tamsayıları üzerinde tanımlanmış bir (v,k,λ) konfigürasyonu D olsun. D'nin her bir elemanına herhangi bir $i \in Z_v$ tamsayısını eklemekle yine bir (v,k,λ) fark kümesi elde edilir. Buradan da D'den $v-1$ formda diğer fark kümeleri bulunur.

$$D_i = \{a_1 + i, a_2 + i, \ldots, a_k + i\} \qquad i = 1, \ldots, v-1$$

Herbir $a \in Z_v$ tamsayısı $D, D_1, D_2 \ldots, D_{v-1}$ kümelerinin tam k tanesinde görülür. Ayrıca her (a,b) mod v tamsayı çifti de bu kümelerin λ tanesinde bulunur.

$$a - b \equiv c \mod v$$

olsun. Burada $c \not\equiv 0 \mod v$ dir. $a_i, a_j \in D$ olmak üzere tam λ tane (a_i, a_j) çifti için

$$a - b \equiv a_i - a_j \mod v$$

dir. Eğer

$$d \equiv a - a_i \equiv b - a_j \mod v$$

ise, o zaman

$$a \equiv a_i + d \quad \text{ve} \quad b \equiv a_j + d$$

dir ve buradan a ve b'nin ikisi de D_d'ye aittir.

(a,b) çifti $D, D_1, D_2 \ldots, D_{v-1}$ kümelerinin λ tanesine aittir. Bunun için bu kümeler bir (v,k,λ) konfigürasyonu formundadır ve onun çakışım matrisi circulanttır.

Çakışım matrisi circulant olan bir (v,k,λ) konfigürasyonu verildiğini kabul edelim. Elemanlarının da $0,1,\ldots,v-1$ tamsayıları olduğu kabul edilsin ve blokları da $B_0, B_1, \ldots, B_{v-1}$ ile ifade edilsin. Eğer B_0 bloğu $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ elemanlarını içeriyorsa o zaman çakışım matrisinin circulant olma özeliğinden B_i bloğu $a_1 + i, a_2 + i, \ldots, a_k + i \in Z_v$ elemanlarını içerir.$(0,d)$ $d \not\equiv 0 \mod v$, eleman çiftini içeren λ blok vardır. Bu da

$$a_k + j \equiv d \mod v \quad \text{ve} \quad a_l + j \equiv 0 \mod v$$

v.b, olacak şekilde (j, a_k, a_l) üçlüsünün tam λ tane olacağı anlamını taşır.

$$a_k - a_l \equiv d \mod v$$

olacak şekilde (a_k, a_l) çifti λ tanedir. Şüphesiz bu B_0'ın bir (v,k,λ) fark kümesi olduğunu gösterir. Bir (v,k,λ) fark kümesinin çakışım matrisi circulant olan bir (v,k,λ) konfigürasyonuna denk olduğunu göstermiş olduk [BLAKE et all, 1975].

1.3.3. Bir Fark Kümesinin Gelişmişi (Fark Kümeleri ile Simetrik Dizaynlar Arasındaki İlişki)

Bir G grubundaki (v,k,λ)-fark kümesi D olsun. G'nin elemanları "noktalar kümesi" olarak,

$$\forall g \in G \quad \text{için} \quad gD = \{gx \mid x \in D\}$$

den oluşan küme de "bloklar kümesi" olarak alınsın. Bu yapının v tane nokta ve v tane bloğu vardır. D fark kümesinin eleman sayısı k olduğundan her bir gD bloğu, k nokta içerir ve her bir nokta k blokta bulunur.

Herhangi iki gD, hD bloğu ile çakışım durumunda olan nokta sayısı λ (herhangi iki bloğun ortak eleman sayısı) dır.

Bu şekilde tanımlanan yapı bir simetrik dizayndır. Bu simetrik dizayna D fark kümesinin gelişmişi denir ve $dev(D)$ veya $\mathbb{D}$ ile gösterilir [LANDER, 1983].

Simetrik dizaynın (v,k,λ)-parametreleri arasında $(v-1)\lambda = k(k-1)$ bağıntısı olduğuna göre, fark kümesinin parametreleri arasında da

$$(v-1)\lambda = k(k-1)$$

bağıntısı vardır.

Bir G grubundaki herhangi bir (v,k,λ)-fark kümesi D ise $g,h \in G$ için gD ve hD kümeleri de birer (v,k,λ)-fark kümesidir.

BÖLÜM 2

$N \equiv 2 \pmod 4$ olmak üzere elemanları ∓ 1 lerden oluşan bir $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ - kare matris X olsun. Eğer, $v = \frac{N}{2}$ olmak üzere

$$XX^t = X^t X = (v-1)I + J$$

ise

$$R = \begin{pmatrix} X & X \\ -X^t & X^t \end{pmatrix}$$

matrisi, elemanları ∓ 1 olan $2v \times 2v$- matrisler arasında maksimum determinanta sahip bir matristir. Böyle matrislere $2v$ mertebeli D-optimal dizayn denmektedir [KOUNIAS S., 1994]. Çalışmamızda yukarıdaki gibi verilen bir X matrisi circulant matris seçilerek $N \equiv 2 \pmod 4$ koşulunu sağlayan (v,k,λ)- parametreli simetrik dizaynların kurulması amaçlanmıştır. Bunun için önce gerekli bazı yardımcı teoremler ve tanımlar verilecektir.

2.1. Yardımcı Teorem

Bir G grubundaki bir $(v,k,\lambda)-$fark kümesi D olsun. Aşağıdaki gibi, D'nin gelişmişi denen bir $\mathbb{D}-$ çakışım yapısı tanımlansın :

G grubunun elemanları noktalar kümesi ve D'nin

$$gD = \{gx \mid x \in D\} \qquad (\text{her } g \in G \text{ için})$$

sol ötelemesi de bloklar kümesi olsun. O zaman $\mathbb{D}$ bir $(v,k,\lambda)-$simetrik dizayndır. Ayrıca noktalar üzerinde G ile soldan çarpım D'nin bir regüler otomorfi grubunu oluşturur [LANDER, 1983].

İSPAT :

$\mathbb{D}$'nin v noktalı ve v bloklu olduğu aşikardır. Ayrıca bir blokta k tane nokta, her nokta da k tane blokta bulunur. gD ve hD ile çakışım durumundaki nokta sayısı, $x, y \in D$ olmak üzere,

$$gx = hy$$

denkleminin çözüm sayısına eşittir. D bir $(v,k,\lambda)-$fark kümesi olduğundan, $gx = hy$ denkleminin çözüm sayısı $(g \neq h)$ için λ dır. O zaman $\mathbb{D}$ yapısı bir $(v,k,\lambda)-$simetrik dizayn olur. G'nin noktalar üzerindeki sol etkisi blokları bloklara taşır, dolayısıyla da noktalar ve bloklar üzerinde bir regüler otomorfi grubu oluşturur.

Karşıt olarak $\mathbb{D}$, bir regüler otomorfi grubu G olan bir $(v,k,\lambda)-$simetrik dizayn olsun. Bu durumda $\mathbb{D}$'yi G içindeki bir $(v,k,\lambda)-$fark kümesinin gelişmişi olarak yorumlayabiliriz. $\mathbb{D}$'nin noktalarını, aşağıdaki gibi, G'nin elemanlarıyla belirtebiliriz : Bir x_0 noktası seçelim. $g \in G$ için gx_0 noktasını g elemanıyla belirtelim. Bu belirtim altında G'nin herhangi bir blokla çakışım durumundaki elemanları G'de bir fark kümesi oluşturur.

2.2. Yardımcı Teorem

Bir G regüler otomorfi gruplu $(v,k,\lambda)-$simetrik dizayn $\mathbb{D}$ olsun. $\mathbb{D}$'nin bir noktası x_0 olmak üzere herhangi bir B bloğu için

$$D_B = \{g \in G \mid gx_0 \in B\}$$

kümesi, G içinde bir $(v,k,\lambda)-$fark kümesidir. Ayrıca D_B'nin gelişmişi $\mathbb{D}$ dizaynına izomorfiktir [LANDER, 1983].

İSPAT :

Hemen yukarıdaki teoremden görülür.

2.3. Teorem

v mertebeli bir G grubunda (v,k,λ) parametreli bir fark kümesi D olsun. Eğer v nin bir $w > 1$ böleni ve bir p asal sayısı için

$$p^j \equiv -1 \pmod{w}$$

olacak şekilde bir j tamsayısı varsa $p \nmid n^*$ dır. Burada n 'in square-free parçası n^* ile gösterilmiştir [LANDER, 1983].

İSPAT :

$p|n$ olsun. w 'nın asal olduğu ve $w \neq p$ kabul edilebilir. Eğer w asal değilse, w yerine onun bir asal bölenini almak mümkündür. $\mathbb{D} = dev(D)$ simetrik dizaynı ele alınsın. H ise G 'nin w mertebeli bir alt grubu olsun. O zaman H, D'nin çift sayıda noktasını sabit tutan standard bir otomorfi grubu olarak etki eder. Uygun bir j tamsayısı için $p^j \equiv -1 \pmod{w}$ olduğunu düşünelim. $\mathbb{D} = dev(D)$ simetrik dizaynının w asal mertebeli (tek asal) otomorfizm grubu H olduğuna göre, H 'nin sabit tutulmuş noktalarının sayısı f (çift sayı) ve H 'nin noktalar üzerindeki yörüngelerinin sayısı $u+f$ olsun. Eğer bir j tamsayısı için $p^j \equiv -1 \pmod{w}$ ise o zaman $p \nmid n^*$ dır. Çünkü H 'nin sabit tutulmuş noktalarının sayısı f ve noktalar üzerindeki yörünge sayısı $u+f$ olup, o zaman

1) ya n bir tam karedir ya da $u+f$ bir tek sayıdır.

2) n^* 'ı bölen bir p asalı için, $p^j \equiv -1 \pmod{w}$ şeklinde bir j tamsayısı varsa u çift ve f bir tek sayı olmak zorundadır. f çift olduğuna göre $p \nmid n^*$ olmak zorundadır.

2.4. Teorem

$N \equiv 2 \pmod{4}$ ve $v = \frac{N}{2}$ olmak üzere herbir satırında k tane -1, $v-k$ tane de $+1$ olan bir $v \times v$- circulant matris X olsun. Elemanları $+1$ lerden oluşan $v \times v$ kare matris J olmak koşuluyla

$$XX^t = (v-1)I + J$$

olması için gerek ve yeter koşul X 'in birinci satırında (veya i. satırında) -1 bulunan konumlar $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ise $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_k\}$ kümesinin Z_v toplam grubunda, $\lambda = k - \dfrac{v-1}{4}$ olma koşuluyla, bir (v,k,λ)- fark kümesi olmasıdır.

İSPAT :

$N \equiv 2 \pmod{4}$ ve $v = \frac{N}{2}$ olmak üzere herbir satırında k tane -1, $v-k$ tane $+1$ olan $v \times v$-biçimli bir X circulant matrisinin

$$XX' = (v-1)I + J \tag{1}$$

eşitliğini sağladığını kabul edelim. $XX' = (b_{ij})$ diyelim. $i = 1,2,\ldots,v$ için $b_{ii} = v$ dir. Bu (1)'den hemen görülür. $i \neq j$ için b_{ij} elemanlarını hesaplayalım. X 'in bir satırında k tane -1, $v-k$ tane $+1$ bulunduğundan, X 'in i. satırı ile X''nin j. sütununun (X 'in j. satırının) çarpılmasında ortaya çıkan

$+1$ ile -1 'in çarpıldığı konumlar sayısı x,

-1 ile $+1$ 'in çarpıldığı konumlar sayısı y

olsun.

Buna göre X 'in i. satırında bulunan $v-k$ tane $+1$ lerden x tanesi $(+1)$ (-1) çarpım konumunda kullanıldığından $v-k-x$ tane $+1$ kalmış olup, $(+1)$ $(+1)$ in çarpıldığı konum sayısı $v-k-x$ olur.

X 'in i. satırında bulunan k tane -1 den y tanesi (-1) $(+1)$ çarpım konumunda kullanılmış olup geriye $k-y$ tane -1 kalmıştır. O zaman (-1) (-1) in çarpıldığı konum sayısı $k-y$ olur.

b_{ij} deki terimler

$(+1)\,(-1) = -1$; x tane,

$(-1)\,(+1) = -1$; y tane,

$(+1)\,(+1) = +1$; $v-k-x$ tane,

$(-1)\,(-1) = +1$; $k-y$ tane

olup

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (v-k-x)+(k-y)-(x+y) \\ &= v-k-x+k-y-x-y \\ &= v-2x-2y \end{aligned}$$

dir. (1) eşitliğinden dolayı $i \neq j$ için $b_{ij} = 1$ dir. Şu halde

$$v-2x-2y = 1 \tag{2}$$

bulunur.

X matrisinde

-1 ler yerine $+1$,

$+1$ ler yerine 0

yazarak elde edilen matris A olsun. Amacımız böylece elde edilen A matrisinin, teoremde sözü edilen (v,k,λ)-parametreli fark kümesinin gelişmişi olan simetrik dizaynın çakışım matrisi olduğunu ispatlamaktır.

$A=(a_{ij})$ olsun. X matrisindeki -1 ler yerine $+1$ yazıldığından, XX^t matrisinde, X'in i. satırı ile X^t 'nin j. sütununun (X 'in j. satırının) çarpımındaki (-1) (-1) konumlarının sayısı AA^t çarpımında $(+1)$ $(+1)$ konumlarının sayısı olup, kurulması düşünülen simetrik dizaynın i. satır ile j. satırının ortaklaşa çakışım durumundaki konumlarının sayısı olacaktır. Bu nedenle $k-y=\lambda$ denebilir. Çünkü XX^t çarpımında b_{ij} elemanı oluşturulurken (-1) (-1) lerin sayısı $k-y$ idi. Diğer konumların çarpımında (AA^t hesaplanırken), $(+1)$ ler yerine (0) yazıldığından, $(+1)$ $(+1)$ yerine $(0)(0)=0$, $(+1)$ (-1) yerine $(0)(+1)=0$, (-1) $(+1)$ yerine $(+1)(0)=0$ elde edilir. Bu durumda $AA^t=(c_{ij})$ denirse $i\neq j$ için

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (v-k-x)+(k-y)-x-y \\ &= \quad 0 \quad + \quad \lambda \quad -0-0 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

bulunur. $c_{ii}=k$ olur. Çünkü A matrisinin herbir satırında k tane $+1$, $v-k$ tane 0 bulunmaktadır. Sonuçta

$$AA^t=\begin{bmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k-\lambda \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$=(k-\lambda)I+\lambda J$$

bulunur. Ayrıca

$$AJ=JA=kJ$$

olduğu aşikardır.

Sonuç olarak X matrisinde -1 lerin konumları $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ise $\{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_k\}$ kümesi Z_v toplam grubunda (v,k,λ)- parametreli bir fark kümesi olur. Bu fark kümesinin v,k,λ parametreleri arasında,

$$\begin{aligned}
&v-2x-2y=1\\
&v=1+2(x+y)\\
&2v=2+4(x+y)\\
&2v\equiv 2 \pmod 4\\
&N\equiv 2 \pmod 4
\end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&v-2x-2y=1\\
&v-2x-2(k-\lambda)=1
\end{aligned}$$

dir. i. satır ile j. sütunu çarparken $(+1)(-1)$ ve $(-1)(-1)$ konumlarının sayısında sütunları temel alalım. $(-1)(-1)$ konum sayısı λ idi. j. sütunda geri kalan -1 lerin sayısı $k-\lambda$ dır. O zaman $(+1)(-1)$ konumlarının sayısı $x=k-\lambda$ olur.

O zaman

$$\begin{aligned}
&v-2x-2(k-\lambda)=1\\
&v-2(k-\lambda)-2(k-\lambda)=1\\
&v=1+4(k-\lambda)
\end{aligned}$$

olup

$$\lambda = k-\frac{v-1}{4}$$

bulunur.

Bu kez Z_v toplam grubunda (v,k,λ) parametreli bir fark kümesi $P=\{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_k\}$ olsun. Ayrıca bu fark kümesinin parametreleri arasında $\lambda = k-\dfrac{v-1}{4}$ eşitliği bulunsun. P 'nin gelişmişinin A çakışım matrisi için

$$AA' = (k-\lambda)I+\lambda J$$

ve

$$AJ = JA = kJ$$

bağıntıları vardır. A matrisinde

$$\begin{array}{l} 0 \text{ lar yerine } +1 \\ +1 \text{ ler yerine } -1 \end{array}$$

yazılarak elde edilen matrise X diyelim. $XX^t = (b_{ij})$ olsun. $i \neq j$ için b_{ij} elemanı bulunurken, X 'in i. satır ile X^t 'nin j. sütununun (X 'in j. satırının) çarpımında ortaya çıkan,

$(-1)(-1)$ konumlarının sayısı λ dır. Çünkü $+1$ yerine -1 yazıldığından dolayı (-1) konumu ile (-1) konumunun çarpılması demek, iki noktanın ortaklaşa çakışım halinde olması demektir. Bunların sayısı da λ dır.

$(-1)(+1)$ konumlarının sayısı $k-\lambda$ olur. Çünkü bir satırda k tane -1 olup, λ tanesi kullanılmıştır. Geriye $k-\lambda$ tane -1 kalır.

$(+1)(+1)$ konumlarının sayısı $v-2k+\lambda=\lambda'$ dür. Çünkü bir D simetrik dizaynının tümleyeni, çakışan elemanları çakışmayan elemanlar almak suretiyle elde edilmektedir. $(v,k,\lambda)-$ parametreli D simetrik dizaynın D' tümleyeni $(v,v-k,v-2k+\lambda)$ parametreli bir simetrik dizayndır. $\lambda'=v-2k+\lambda$ dan, D 'nin iki noktasının çakışmadığı konumların sayısı $v-2k+\lambda$ olur. Bu ise AA^t çarpımında (0)(0), XX^t çarpımında ise (+1)(+1) konumlarının sayısına eşittir.

$(+1)(-1)$ konumlarının sayısı $k-\lambda$ olur. Çünkü $v-k$ tane $+1$ vardı ve $+1$ lerin $+1$ ile çarpılma sayısı $v-2k+\lambda$ idi. $+1$ lerin -1 ile çarpılma sayısı ise $v-k-(v-2k+\lambda)=k-\lambda$ olur.

Buradan b_{ij} 'nin hesabında

$(-1)(-1)=+1$ konumların sayısı λ

$(-1)(+1)=-1$ konumların sayısı $k-\lambda$

$(+1)(+1)=+1$ konumların sayısı $v-2k+\lambda$

$(+1)(-1)=-1$ konumların sayısı $k-\lambda$

olup

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (v-2k+\lambda)+\lambda-2(k-\lambda) \\ &= v-2k+2\lambda-2k+2\lambda \\ &= v-4(k-\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\lambda = k - \frac{v-1}{4}$$

idi. Bu, son eşitlikte yerleştirilirse

$$b_{ij} = v - 4\left(k - k + \frac{v-1}{4}\right)$$

$$b_{ij} = 1 \qquad (i \neq j)$$

bulunur. $i = j$ için $b_{ii} = v$ olduğu aşikardır. O zaman

$$XX^t = \begin{bmatrix} v & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & v & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & v & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & v \end{bmatrix}$$

$$= (v-1)I + J$$

bulunur. Ayrıca Z_v deki bir fark kümesinin, gelişmişi olan simetrik dizaynın tanımından X'in circulant olması doğal bir sonuçtur.

Dahası,

$$v - 1 = 4(k - \lambda)$$
$$v = 4(k - \lambda) + 1$$
$$2v = 8(k - \lambda) + 2$$
$$2v \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{yani} \quad N \equiv 2 \pmod 4$$

bulunur. İspatlanması gereken de budur.

2.4.1. Teorem 2.4 'ün Sonuçları

i-) Yukarıdaki teoremin sonucu olarak

$$2v - 1 = (v - 2k)^2$$

elde edilir.

ii-) $N \equiv 2 \pmod 4$ ve $v = \frac{N}{2}$ koşulunu sağlayan $v \times v$ boyutlu bir X circulant matrisinin kurulması, buna karşılık olan D fark kümesinin kuruluşuna denktir.

iii-) $(v-1)\lambda = k(k-1)$ ve $(v-1) = 4(k-\lambda)$ eşitliklerinden

$$(k - 2\lambda)^2 = k$$

elde edilir. Şu halde k bir tam kare olmak zorundadır.

$$v-1=4(k-\lambda)$$

eşitliğinden,

$$v=4k-4\lambda+1$$
$$v\equiv 1 \pmod 4$$

olur. Her iki taraftan $2k$ çıkartılırsa,

$$v-2k=4k-4\lambda+1-2k$$
$$v-2k=2k-4\lambda+1$$
$$v-2k=k-2\lambda+k-2\lambda+1$$

dir. Burada $(k-2\lambda)^2=k$ olduğundan iki hal söz konusudur.

1°-) $k-2\lambda\geq 0$ 2°-) $k-2\lambda<0$

1°-) $k-2\lambda\geq 0$ olması halinde, $k-2\lambda=\sqrt{k}$ yazarsak

$$v-2k=\sqrt{k}+\sqrt{k}+1$$
$$=2\sqrt{k}+1$$
$$v=2k+2\sqrt{k}+1$$

bulunur. Buradan,

$$2v=4\left(k+\sqrt{k}\right)+2$$

olup

$$2v\equiv 2 \pmod 4 \quad \text{yani} \quad N\equiv 2 \pmod 4$$

koşulu da sağlanır.

Şu halde $k-2\lambda\geq 0$ olması halinde v,k,λ parametreleri

1°- $v = 2k + 2\sqrt{k} + 1$
2°-$(k - 2\lambda)^2 = k$ olup k bir karedir,
3°- $(v-1)\lambda = k(k-1)$

koşulları altında belirtilebilir.

2°-) $k - 2\lambda < 0$ olması halinde,

1°- $(k - 2\lambda)^2 = k$ olduğu biliniyor,

k'ya tam kare değerler vererek λ değerleri bulunur. Buradan iki tane λ_1, λ_2 değerlerinin bulunacağı açıktır. Bunlardan biri $k - 2\lambda \geq 0$, diğeri de $k - 2\lambda < 0$ haline karşılık gelir. $k - 2\lambda \geq 0$ hali için v belirtilmişti. $k - 2\lambda < 0$ hali için de

$$(v-1)\lambda = k(k-1)$$

temel eşitliğinden v belirtilir. Bu yolla belirtilen v, k, λ parametreleri için, bu parametreli simetrik dizaynların bulunması gerekmez. Var olması durumunda ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

2.5. $(v,k,\lambda)-$ **Fark Kümelerinin Oluşturulması**

Amacımız $P = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_k\}$ kümesini oluşturmaktır.

X bir circulant matris olmak üzere ilk satır elemanları $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{v-1}$ olsun.

$$N_x(t) = \sum_{i=0}^{v-t-1} a_i a_{i+t} \qquad (t = 0,1,\ldots,v-1 \text{ için}) \tag{9}$$

fonksiyonu tanımlansın. $t = 0$ için,

$$N_x(0) = \sum_{i=0}^{v-1} a_i a_i = a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + \cdots + a_{v-1}^{\,2} \tag{10}$$

dir. $XX^t = (c_{ij})$ matrisinde,

$$c_{11} = a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + \cdots + a_{v-1}^{\,2}$$

olur. Ayrıca X circulant bir matris olduğuna göre

$$c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{vv}$$

dir. Buradan

$$N_x(0) = a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + \cdots + a_{v-1}^{\ \ 2} = c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{vv}$$

bulunur.

$$XX^t = (v-1)I + J$$

eşitliğinden

$$N_x(0) = a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + \cdots + a_{v-1}^{\ \ 2} = v \tag{11}$$

dir. Kısaca

$$N_x(0) = v \tag{12}$$

dir. Ayrıca $1 \le t \le v-1$ için,

$$N_x(t) + N_x(v-t) = 1 \tag{13}$$

dir. Örneğin $t = 1$ için,

$$N_x(1) = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_{v-2} a_{v-1}$$
$$N_x(v-1) = a_0 a_{v-1}$$

olup ve ayrıca $XX^t = (v-1)I + J$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{v-1} \\ a_{v-1} & a_0 & \cdots & a_{v-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_{v-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{v-2} & a_{v-3} & \cdots & a_0 & a_{v-1} \\ a_{v-1} & a_{v-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{v-1}^2 & a_0 a_{v-1} + a_1 a_0 + \cdots + a_{v-1} a_{v-2} & \cdots & a_0 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{v-1} a_1 & a_0 a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_{v-1} a_0 \\ a_{v-1} a_0 + a_0 a_1 + \cdots + a_{v-2} a_{v-1} & a_{v-1}^2 + a_0^2 + \cdots + a_{v-2}^2 & \cdots & a_{v-1} a_2 + a_0 a_3 + \cdots + a_{v-2} a_1 & a_{v-1} a_1 + a_0 a_2 + \cdots + a_{v-2} a_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_2 a_0 + a_3 a_1 + \cdots + a_1 a_{v-1} & a_2 a_{v-1} + a_3 a_0 + \cdots + a_1 a_{v-2} & \cdots & a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_1^2 & a_2 a_1 + a_3 a_2 + \cdots + a_1 a_0 \\ a_1 a_0 + a_2 a_1 + \cdots + a_0 a_{v-1} & a_1 a_{v-1} + a_2 a_0 + \cdots + a_0 a_{v-2} & \cdots & a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_0 a_1 & a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_0^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & v & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & v \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$N_x(1) + N_x(v-1) = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_{v-2} a_{v-1} + a_{v-1} a_0$$
$$N_x(1) + N_x(v-1) = 1 \tag{14}$$

olur. (X circulant olduğundan dolayı)

Benzer şekilde, $1 \le t \le v-1$ için

$$N_x(t) + N_x(v-t) = 1$$

dir.

$GF(q)$ üzerinde tüm $n \times n$ circulant matrisler kümesi ele alınsın.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

circulant matrisi ile

$$a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

polinomunu belirleyebiliriz.

$GF(q)[x]/(x^n - 1)$ polinom cebiri P_n ile gösterilirse ve $GF(q)$ üzerinde $n \times n$ circulant matrisler cebiri C_n olmak üzere

$$f : P_n \to C_n$$

$$a(x) \xrightarrow{f} A$$

fonksiyonu bir izomorfizmdir.

Bunu $f : P_3 \to C_3$ için gösterelim.

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

olmak üzere

$$a(x)b(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2$$
$$+(a_1 b_2 + a_2 b_1)x^3 + a_2 b_2 x^4$$

dir.

Bu polinom $GF(q)[x]/(x^3 - 1)$ cebrine indirgenirse,

$$(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_1 + b_0 a_1 + a_2 b_2)x + (a_0 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

elde edilir. Yani

$$f\left(a(x)b(x)\right)=\begin{bmatrix} a_0b_0+a_1b_2+a_2b_1 & a_0b_1+a_1b_0+a_2b_2 & a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 & a_0b_0+a_1b_2+a_2b_1 & a_0b_1+a_1b_0+a_2b_2 \\ a_0b_1+a_1b_0+a_2b_2 & a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 & a_0b_0+a_1b_2+a_2b_1 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$AB=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_0b_0+a_1b_2+a_2b_1 & a_0b_1+a_1b_0+a_2b_2 & a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \\ a_2b_0+a_0b_2+a_1b_1 & a_2b_1+a_0b_0+a_1b_2 & a_2b_2+a_0b_1+a_1b_0 \\ a_1b_0+a_2b_2+a_0b_1 & a_1b_1+a_2b_0+a_0b_2 & a_1b_2+a_2b_1+a_0b_0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$f\left(a(x)\right)=A \qquad f\left(b(x)\right)=B \text{ iken}$$

$$f\left(a(x)b(x)\right)=AB$$

bulunur.

$$f\left(a+b\right)=A+B$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. 1-1 ve örten olduğu da aşikardır. Şu halde circulant matrisler yerine yukarıdakine benzer polinomlardan yararlanılabilir.

X matrisine bağlı olarak

$$A(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{v-2}z^{v-2}+a_{v-1}z^{v-1} \tag{15}$$

polinomunu tanımlayabiliriz. O zaman N_x'ler ve $A(z)$ arasında

$$A(z)A(z^{-1})=N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}N_x(t)\left(z^t+z^{-t}\right) \quad , \quad (z\neq 0) \tag{16}$$

bağıntısı vardır. Gerçekten

$$A(z^{-1}) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{v-2}}{z^{v-2}} + \frac{a_{v-1}}{z^{v-1}}$$

olup

$$\begin{aligned}
A(z)A(z^{-1}) &= \left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{v-2} z^{v-2} + a_{v-1} z^{v-1}\right)\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{v-1}}{z^{v-1}}\right) \\
&= a_0^{\,2} + a_0 a_1 z^{-1} + a_0 a_2 z^{-2} + \cdots + a_0 a_{v-1} z^{-v+1} \\
&\quad + a_1 a_0 z + a_1^{\,2} + a_1 a_2 z^{-1} + \cdots + a_1 a_{v-1} z^{-v+2} \\
&\quad + a_2 a_0 z^2 + a_2 a_1 z + a_2^{\,2} + a_2 a_3 z^{-1} + \cdots + a_2 a_{v-1} z^{-v+3} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + a_{v-2} a_0 z^{v-2} + a_{v-2} a_1 z^{v-3} + \cdots + a_{v-2} a_{v-1} z^{-1} \\
&\quad + a_{v-1} a_0 z^{v-1} + a_{v-1} a_1 z^{v-2} + \cdots + a_{v-1}^{\,2} \\
&= a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + \cdots + a_{v-1}^{\,2} + \left(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{v-2} a_{v-1}\right) \cdot \left(z + z^{-1}\right) \\
&\quad + \left(a_0 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_4 + \cdots + a_{v-3} a_{v-1}\right) \cdot \left(z^2 + z^{-2}\right) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \left(a_0 a_{v-1}\right)\left(z^{v-1} + z^{-v+1}\right) \\
&= N_x(0) + N_x(1)\left(z + z^{-1}\right) + N_x(2)\left(z^2 + z^{-2}\right) + \cdots \\
&\quad + N_x(v-1)\left(z^{v-1} + z^{-v+1}\right) \\
&= N_x(0) + \sum_{t=1}^{v-1} N_x(t)\left(z^t + z^{-t}\right) , \qquad (z \neq 0)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
A(z)A(z^{-1}) &= N_x(0)+N_x(1)\left(z^1+z^{-1}\right)+N_x(2)\left(z^2+z^{-2}\right) \\
&\quad +N_x(3)\left(z^3+z^{-3}\right)+\cdots+N_x(v-1)\left(z^{v-1}+z^{-v+1}\right) \\
&= N_x(0)+\left[N_x(1)+z^{-v}N_x(v-1)\right]z^1 \\
&\quad +\left[N_x(2)+z^{-v}N_x(v-2)\right]z^2+\left[N_x(3)+z^{-v}N_x(v-3)\right]z^3 \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +\left[N_x(v-2)+z^{-v}N_x(2)\right]z^{v-2}+\left[N_x(v-1)+z^{-v}N_x(1)\right]z^{v-1} \\
&= N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}\left[N_x(t)+z^{-v}N_x(v-t)\right]z^t \qquad (17)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$XX^t=(v-1)I+J$ olduğunda $N_x(0)=v$ idi. Ayrıca $z\neq 1$ iken $z^v=1$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
A(z)A(z^{-1}) &= N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}\left[N_x(t)+z^{-v}N_x(v-t)\right]z^t \\
&= N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}\left[N_x(t)+(z^v)^{-1}N_x(v-t)\right]z^t \\
&= N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}\left[N_x(t)+N_x(v-t)\right]z^t \\
&= N_x(0)+\left[N_x(1)+N_x(v-1)\right]z+\left[N_x(2)+N_x(v-2)\right]z^2 \\
&\quad +\cdots+\left[N_x(v-1)+N_x(1)\right]z^{v-1} \\
&= N_x(0)+\left[z+z^2+\cdots+z^{v-1}\right] \\
&= v+\frac{z\cdot\left(1-z^{v-1}\right)}{1-z} \\
&= v+\frac{z-z^v}{1-z} \\
&= v+\frac{z-1}{1-z} \\
&= v-1
\end{aligned}
$$

bulunur. Eğer $z=1$ ise

$$A(z)A(z^{-1})=N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}N_x(t)\left(z^t+z^{-t}\right)$$

den

$$\begin{aligned}
A(1)A(1^{-1}) &= N_x(0)+\sum_{t=1}^{v-1}N_x(t)\left(1^t+1^{-t}\right)\\
&= N_x(0)+2\left[N_x(1)+N_x(2)+\cdots+N_x(v-1)+N_x(v-1)\right]\\
&= N_x(0)+2\left[\left(N_x(1)+N_x(v-1)\right)+\left(N_x(2)+N_x(v-2)\right)+\cdots\right]\\
&= N_x(0)+2\left[1+1+\cdots+1\right]\\
&= v+2\left[\frac{v-1}{2}\right]\\
&= v+v-1\\
&= 2v-1
\end{aligned}$$

bulunur. Şu halde

$$A(z)A(z^{-1})=\begin{cases}2v-1 & \text{,eğer } \; z=1 \text{ ise}\\ v\text{-}1 & \text{,eğer } \; z^v=1 \text{ ve } z\neq 1 \text{ iken,}\end{cases} \tag{18}$$

bulunur. Buradan $XX^t=(v-1)I+J$, $N_x(0)=v$ ve (18) birbirine denktir.

2.5.1. Dizayn'ın Oluşturulması

Teorem 2.4'e dayanarak $N\equiv 2 \pmod 4$ ve $v=\frac{N}{2}$ koşulunu sağlayan (v,k,λ) dizayn sınıfı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$x=A(1)=\sum_{i=0}^{v-1}a_i \tag{19}$$

diyelim. (18)'den dolayı, $z=1$ alınırsa,

$$A(1)A(1)=\left(A(1)\right)^2=2v-1$$

olup $A(1)$ tek sayıdır. Yani x tek sayı olur.

$$x^2=2v-1$$

elde edildi. $x>0$ kabul edilebilir.

$$x_{ic} = \sum_{j \equiv i \bmod c}^{\nu-1} a_j \tag{20}$$

denirse,

$$\sum_{i=0}^{c-1} x_{ic} = x \quad , \quad \text{yani} \quad x_{0c} + x_{1c} + x_{2c} + \cdots + x_{c-1,c} = x \tag{21}$$

bulunur. Gerçekten

$$\begin{aligned} x_{0c} &= \sum_{j \equiv 0 \bmod c}^{\nu-1} a_j = a_0 + a_c + a_{2c} + \cdots \\ x_{1c} &= \sum_{j \equiv 1 \bmod c}^{\nu-1} a_j = a_1 + a_{c+1} + a_{2c+1} + \cdots \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

dir. Bunlar taraf tarafa toplanırsa,

$$x_{0c} + x_{1c} + \cdots = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} = x$$

bulunur.

$$\begin{aligned} |x_{ic}| &\le [\![(\nu-1-i)/c]\!] + 1 \\ x_{ic} &\equiv \left([\![\tfrac{\nu-1-i}{c}]\!] + 1\right) \quad \bmod\ 2 \end{aligned} \tag{22}$$

dir. Çünkü $0 \le i \le \nu - 1$ ve $c \le \nu - 1$ olmak üzere $j \equiv i \bmod c$ koşuluna uyan j'lerin sayısı $[\![\frac{\nu-1-i}{c}]\!] + 1$ dir. Şu halde bu koşula uyan a_j'lerin sayısı da aynı olup

$$[\![\tfrac{\nu-1-i}{c}]\!] + 1$$

dir. a_j'lerden bazıları +1, bazıları -1 olduğuna göre

$$|x_{ic}| \le [\![\tfrac{\nu-1-i}{c}]\!] + 1$$

olmak zorundadır. Ayrıca $-1 \equiv +1 \quad \bmod 2$ olduğundan

$x_{ic} = a_i + a_{c+i} + \cdots + a_{\left[\!\left[\frac{v-1-i}{c}\right]\!\right] \cdot c+i}$ deki a 'lar ± 1 olup, sonuçta

$$x_{ic} \equiv \left(\left[\!\left[\tfrac{v-1-i}{c}\right]\!\right] + 1\right) \mod 2$$

bulunur.

Örnek olarak v yi bir asal sayı olarak alalım.

1. Adım :

$c = 2$ alınarak x_{02}, x_{12} bulunsun. (22) eşitliğinden dolayı

$$x_{02} + x_{12} = x \qquad\qquad |x_{02} - x_{12}| = 1$$

dir. Bunu şu şekilde açıklayabiliriz :

$$x_{02} = \sum_{j \equiv 0 \bmod 2}^{v-1} a_j = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{v-1}$$

$$x_{12} = \sum_{j \equiv 1 \bmod 2}^{v-1} a_j = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{v-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{02} + x_{12} = x$$

Ayrıca $x^2 = 2v - 1$ olduğunu da biliyoruz.

2.Adım :

$c = 4$ alınarak x_{i4}, $i = 0,1,2,3$ için $x_{04}, x_{14}, x_{24}, x_{34}$ ler bulunsun.

$$x_{04} + x_{24} = x_{02} \qquad\qquad x_{14} + x_{34} = x_{12}$$

dir. Bu adımda, (22) den dolayı,

$$v \equiv 1 \mod 4 \qquad \text{iken} \qquad x_{34} \le x_{14}$$

$$v \equiv 3 \mod 4 \qquad \text{iken} \qquad x_{04} \le x_{24}$$

şartını sağlayanlar seçilir. Çalışmamızda daima $v \equiv 1 \mod 4$ olduğundan x_{04}, x_{24} değerleri için $x_{04} \leq x_{24}$ koşulu aranmaz.

3. Adım :

$c = 8$ alınarak x_{i8}, $i = 0,1,\ldots 7$ için $x_{08}, x_{18}, \ldots, x_{78}$ bulunsun. Bu işleme $c \geq v$ oluncaya kadar devam edilir.

4.Adım :

$i = 0,1,,\ldots, v-1$ için x_{ic} değerlerinden

$$N_x(t) = \sum_{i=0}^{v-t-1} a_i \, a_{i+t} \qquad t = 0,1,\ldots,v-1$$

olmak üzere

$$t = 0 \quad \text{için} \quad N_x(0) = v$$
$$1 \leq t \leq v-1 \quad \text{için} \quad N_x(t) + N_x(v-t) = 1$$

koşullarını sağlayanlar seçilir. x_{ic} değerlerine göre a_i'ler belirlenir.

2.6. Sonuç

$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{v-1})$ dizisi belirlendiğine göre, $(a_i = \mp 1)$ -1'lerin bulunduğu konumlar Z_v toplam grubundaki (v,k,λ) parametreli D fark kümesinin elemanlarının konumlarını gösterir. Örneğin Z_{13} için $a_3 = -1$ ise $\overline{3} \in D$ dir. Bu fark kümesinin gelişmişi olan simetrik dizayn sol öteleme ile kolaylıkla elde edilir. Yukarıdaki işlemlerin özellikle büyük v'ler için elle yapılması olanaksızdır. $v = 13$ için (13,4,1)-parametreli simetrik dizaynları veren bir bilgisayar programı yapılmış ve EK'de verilmiştir. Sonuçlar ve çakışım matrisleri aşağıda gösterilmiştir.

1) $(Z_{13};+)$ toplam grubunda $D_1=\{\bar{0},\bar{7},\bar{9},\overline{12}\}$ bir (13,4,1) fark kümesi olur. Bunun gelişmişi olan $I\!D_1$ simetrik dizaynının blokları

$$\begin{array}{lll}
d_1=\{\bar{0},\bar{7},\bar{9},\overline{12}\} & d_6=\{\bar{5},\overline{12},\bar{1},\bar{4}\} & d_{11}=\{\overline{10},\bar{4},\bar{6},\bar{9}\} \\
d_2=\{\bar{1},\bar{8},\overline{10},\bar{0}\} & d_7=\{\bar{6},\bar{0},\bar{2},\bar{5}\} & d_{12}=\{\overline{11},\bar{5},\bar{7},\overline{10}\} \\
d_3=\{\bar{2},\bar{9},\overline{11},\bar{1}\} & d_8=\{\bar{7},\bar{1},\bar{3},\bar{6}\} & d_{13}=\{\overline{12},\bar{6},\bar{8},\overline{11}\} \\
d_4=\{\bar{3},\overline{10},\overline{12},\bar{2}\} & d_9=\{\bar{8},\bar{2},\bar{4},\bar{7}\} & \\
d_5=\{\bar{4},\overline{11},\bar{0},\bar{3}\} & d_{10}=\{\bar{9},\bar{3},\bar{5},\bar{8}\} &
\end{array}$$

dır.

$I\!D_1$ simetrik dizaynının çakışım matrisi ise

$$I\!D_1=\begin{bmatrix}
1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

dır.

2) $(Z_{13};+)$ toplam grubundaki diğer (13,4,1) fark kümeleri ve bunların gelişmişi olan simetrik dizaynlar aşağıda gösterilmiştir.

$D_2 = \{\bar{3},\bar{5},\bar{6},\overline{10}\}$ un gelişmişi olan $I\!D_2$ simetrik dizaynının blokları

$$
\begin{array}{lll}
d_1 = \{\bar{3},\bar{5},\bar{6},\overline{10}\} & d_6 = \{\bar{8},\overline{10},\overline{11},\bar{2}\} & d_{11} = \{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{7}\} \\
d_2 = \{\bar{4},\bar{6},\bar{7},\overline{11}\} & d_7 = \{\bar{9},\overline{11},\overline{12},\bar{3}\} & d_{12} = \{\bar{1},\bar{3},\bar{4},\bar{8}\} \\
d_3 = \{\bar{5},\bar{7},\bar{8},\overline{12}\} & d_8 = \{\overline{10},\overline{12},\bar{0},\bar{4}\} & d_{13} = \{\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{9}\} \\
d_4 = \{\bar{6},\bar{8},\bar{9},\bar{0}\} & d_9 = \{\overline{11},\bar{0},\bar{1},\bar{5}\} & \\
d_5 = \{\bar{7},\bar{9},\overline{10},\bar{1}\} & d_{10} = \{\overline{12},\bar{1},\bar{2},\bar{6}\} &
\end{array}
$$

dır.

$I\!D_2$ simetrik dizaynının çakışım matrisi ise

$$
I\!D_2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

dır.

3) $D_3 = \{\overline{4},\overline{8},\overline{9},\overline{11}\}$ ün gelişmişi olan $\mathbb{D}_3$ simetrik dizaynının blokları

$d_1 = \{\overline{4},\overline{8},\overline{9},\overline{11}\}$

$d_2 = \{\overline{5},\overline{9},\overline{10},\overline{12}\}$

$d_3 = \{\overline{6},\overline{10},\overline{11},\overline{0}\}$

$d_4 = \{\overline{7},\overline{11},\overline{12},\overline{1}\}$

$d_5 = \{\overline{8},\overline{12},\overline{0},\overline{2}\}$

$d_6 = \{\overline{9},\overline{0},\overline{1},\overline{3}\}$

$d_7 = \{\overline{10},\overline{1},\overline{2},\overline{4}\}$

$d_8 = \{\overline{11},\overline{2},\overline{3},\overline{5}\}$

$d_9 = \{\overline{12},\overline{3},\overline{4},\overline{6}\}$

$d_{10} = \{\overline{0},\overline{4},\overline{5},\overline{7}\}$

$d_{11} = \{\overline{1},\overline{5},\overline{6},\overline{8}\}$

$d_{12} = \{\overline{2},\overline{6},\overline{7},\overline{9}\}$

$d_{13} = \{\overline{3},\overline{7},\overline{8},\overline{10}\}$

dır.

$\mathbb{D}_3$ simetrik dizaynının çakışım matrisi ise

$$I\mathbb{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

4) $D_4=\{\bar{2},\bar{6},\bar{7},\bar{9}\}$ ün gelişmişi olan $\mathbb{D}_4$ simetrik dizaynının blokları

$$d_1=\{\bar{2},\bar{6},\bar{7},\bar{9}\} \qquad d_6=\{\bar{7},\overline{11},\overline{12},\bar{1}\} \qquad d_{11}=\{\overline{12},\bar{3},\bar{4},\bar{6}\}$$
$$d_2=\{\bar{3},\bar{7},\bar{8},\overline{10}\} \qquad d_7=\{\bar{8},\overline{12},\bar{0},\bar{2}\} \qquad d_{12}=\{\bar{0},\bar{4},\bar{5},\bar{7}\}$$
$$d_3=\{\bar{4},\bar{8},\bar{9},\overline{11}\} \qquad d_8=\{\bar{9},\bar{0},\bar{1},\bar{3}\} \qquad d_{13}=\{\bar{1},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}$$
$$d_4=\{\bar{5},\bar{9},\overline{10},\overline{12}\} \qquad d_9=\{\overline{10},\bar{1},\bar{2},\bar{4}\}$$
$$d_5=\{\bar{6},\overline{10},\overline{11},\bar{0}\} \qquad d_{10}=\{\overline{11},\bar{2},\bar{3},\bar{5}\}$$

dır.

$\mathbb{D}_4$ simetrik dizaynının çakışım matrisi ise

$$\mathbb{D}_4=\begin{bmatrix}
0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

dır.

5) $D_5 = \{\overline{0},\overline{7},\overline{8},\overline{11}\}$ in gelişmişi olan $I\!D_5$ simetrik dizaynının blokları

$d_1 = \{\overline{0},\overline{7},\overline{8},\overline{11}\}$ $\quad$ $d_6 = \{\overline{5},\overline{12},\overline{0},\overline{3}\}$ $\quad$ $d_{11} = \{\overline{10},\overline{4},\overline{5},\overline{8}\}$

$d_2 = \{\overline{1},\overline{8},\overline{9},\overline{12}\}$ $\quad$ $d_7 = \{\overline{6},\overline{0},\overline{1},\overline{4}\}$ $\quad$ $d_{12} = \{\overline{11},\overline{5},\overline{6},\overline{9}\}$

$d_3 = \{\overline{2},\overline{9},\overline{10},\overline{0}\}$ $\quad$ $d_8 = \{\overline{7},\overline{1},\overline{2},\overline{5}\}$ $\quad$ $d_{13} = \{\overline{12},\overline{6},\overline{7},\overline{10}\}$

$d_4 = \{\overline{3},\overline{10},\overline{11},\overline{1}\}$ $\quad$ $d_9 = \{\overline{8},\overline{2},\overline{3},\overline{6}\}$

$d_5 = \{\overline{4},\overline{11},\overline{12},\overline{2}\}$ $\quad$ $d_{10} = \{\overline{9},\overline{3},\overline{4},\overline{7}\}$

dır.

$I\!D_5$ simetrik dizaynının çakışım matrisi ise

$$
ID_5 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

dır.

Teorem 2.3 uygun parametreli bazı fark kümeleri için, bir yokluk kriteri olarak kullanılabilir.

Örneğin

$(25,9,3)$, $\quad (41,16,6)$, $\quad (61,25,10)$, $\quad (85,36,15)$, $\quad (113,49,21)$

parametreleri

$$N \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{ve} \quad v = \frac{N}{2}$$

$$(v-2k)^2 = 2v-1$$

$$(v-1) = 4(k-\lambda)$$

koşullarını sağlamasına rağmen, bu parametreli fark kümelerinin var olması gerekmemektedir. Örneğin Teorem 2.3 'den dolayı,

$$\begin{array}{lll}
(25,9,3) & \text{için} & 2^2 \equiv -1 \pmod 5, \\
(41,16,6) & \text{için} & 2^{10} \equiv -1 \pmod{41} \\
(61,25,10) & \text{için} & 3^5 \equiv -1 \pmod{61} \\
(85,36,15) & \text{için} & 7^2 \equiv -1 \pmod 5 \\
(113,49,21) & \text{için} & 7^7 \equiv -1 \pmod{113}
\end{array}$$

olup yukarıdaki parametreler için fark kümeleri yoktur.

Yukarıdaki yöntemle bulunan $(v,k,\lambda)-$ parametreli simetrik dizaynların önemini aşağıdaki örnekle belirtebiliriz.

İlk olarak istatistikte deneylerin düzenlenmesinde kullanılan dizaynlar, matematikçilerin özellikle cebirin elemanlarını kullanmaları sonucunda gelişmiş ve başlı başına dizaynlar kuramı olarak matematikçilerin çalışma alanı durumuna gelmiştir. $(v,k,\lambda)-$ parametreli bir dizayn sınıfının oluşturulması, istatistikte kullanım alanı olarak oldukça önem taşır.

Örneğin 13 çeşit ürün üzerinde 13 farklı kimyasal gübrenin etkileri araştırılmak istensin. Özellikle gübre çiftlerinin aynı ürün üzerindeki etkilerini kıyaslamak ve bir sonuca varmak istenir. Bunun için (13,4,1)- dizaynını kullanabiliriz. İstatistikçilerin amacına uygun olarak (13,4,1)- dizaynı yerine bunun tümleyeni olan (13,9,6) dizaynıda kullanılabilir. 13 çeşit ürün 9 lu 13 tane bloğa ayrılır. Her bloğa ayrı olmak üzere 13 çeşit kimyasal gübre uygulanır. Bir ürün 9 tane blokta bulunduğundan, 9 çeşit gübreyle denenmiş olur. Her blokta 9 çeşit ürün bulunduğundan, bir gübre çeşidi 9 çeşit ürünle test edilmiştir. Her ürün ikilisi tam 6 tane blokta ortaklaşa bulunduğundan, 6 çeşit gübrenin bu ikililer üzerindeki etkisi kıyaslanıp belli sonuçlara varılabilir. Her blok ikilisi ortaklaşa 6 tane ürün içerdiğinden 6 tane ürünün aynı çeşit gübreden nasıl etkilendikleri saptanabilir.

Bu işlemler sonucunda kısa zamanda sağlıklı sonuç alınmış olur. Buna benzer yöntem, ilaçların denenmesinde de kullanulabilir.

Matematiksel açıdan da bir $(v,k,\lambda)-$ dizayn varsa, belirtilmesi, yok olanlarının da yokluğunun saptanması önemli bir problem olarak yorumlanabilir.

KAYNAKLAR

1. ARORA, J.S., 1989., Introduction to Optimum Design, McGraw - Hill, Inc.
2. BALKANAY, E., Simetrik Dizaynlar, Ders Notları
3. BLAKE, I.F. and MULLIN R.C., The Mathematical Theory of Coding, Academic Press, New York, 1975.
4. BUSSEMAKER F.C., 1989, On (v,k,λ) Graphs and Designs with Trivial Automorphism Group, Journal of Combinatorial Theory, Series A 50, 33-46.
5. COEN D.DE and GREGORY D.A., 1988, Factorizations of Symmetric Designs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 49, 323-337.
6. COLDERBARK A.R., 1988, Inequalities for Quasi - Symmetric Designs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 48, 53-64.
7. CAMERON, P.J. and VANLINT, J.H., 1975., Graph Theory, Coding Theory and Block Designs, Cambridge University Press, Cambridge.
8. CAMINA ALAN and JOHANNES SIEMONS, 1989, Block Transitive Automorphism Groups of 2- $(v,k,1)$ Block Designs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 51, 268-276.
9. COHN, J.H.E., 1994, On the Number of D - oprimal Designs, Journal of Combinatiorial Theory, Series A 66, 214-225.
10. GALIL, Z. and KIEFER, J., 1982, Construction Methods for D - optimum Weighing Designs when $n \equiv 3 \pmod 4$, The Annals of Statistics, Vol 10, 502-510.
11. HAEMERS W.H., 1991, Divisible Designs with $r-\lambda_1=1$, Journal of Combinatorial Theory, Series A 57, 316-319.
12. HEDAYAT A. and STUFKEN J. and LANDGEV I.N., 1989, The Possible Support Sizes for BIB Design with $v=8$ and $k=4$, Journal of Combinatorial Theory, Series A 51, 258-267.
13. HORADAM, K.J. and LAUNEY W.DE, 1993, Cocyclic Development of Designs, Journal of Algebraic Combinatorics, 2., 267-290.
14. HUGHES, D.R. and PIPER, F.C., Design Theory, Cambridge University Press, 1985.
15. HUNDER FORD, T.W., 1974., Algebra, Springer - Verlag, New - York.
16. KAYA, R., Projektif Geometri, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1978.
17. KOUNIAS S., KOUKOUVINOS C., NIKOLAOU N. and KAKOS A., 1994, The non-equivalent Circulant D - optimal Designs for $n \equiv 2 \mod 4$, $n \leq 54$, $n=66$., Journal of Combinatorial Theory, Series A 65, 26-38.

18. LANDER, E.S., Symmetric Designs: An Algebraic Approach, Cambridge University Press, 1983.
19. PALL, G., 1946., A Maximal Determinant, Monthly vol. 53, 220-223.
20. PARKER, C., 1994, Designs with the Symmetric Difference Property on 64 Points and Their Groups, Journal of Combinatorial Theory, Series A 67, 23-43.
21. PAWALE R.M, 1992, Inequalities and Bounds for Quasi - Symmetric 3 - Designs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 60, 159-167.
22. SINHA, K., 1988, On the 2 - Adjugate mod 2 Class of Designs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 49, 392-394.
23. SPENCE, E., Hadamard Matrices from Relative Difference Sets, Journal of Combinatorial Theory, A 19, 1975, 287-300.
24. T.H. CHADJIPANTELIS, STR. KOUNIAS, AND CHR. MOYSSIANDIS, Construction of D - optimal Designs for $N \equiv 2 \mod 4$ Using Block - Circulant Matrices, Journal of Combinatorial Theory, Series A 40, 1985, 125 - 135.
25. WHITEMAN A.L., 1988, A Family of Symmetric Block Designs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 47, 153-156.
26. WILLIAMSON, J., 1944, Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares, Duke Mathematical Journal vol. 11, 65-81.
27. WILLIAMSON, J., 1946, Determinants Whose Elements are 0 and 1, Monthly Vol. 53, 427-434.
28. WONG, C.S. and MASARO, J.C., A - optimal Design Matrices, Discrete Mathematics 50, 1984, 295-318.
29. XIA, M.Y., 1991, An Infinite Class of Supplementary Difference Sets and Williamson Matrices, Journal of Combinatorial Theory, Series A 58, 310-317.

EK

$v = 13$ için (13,4,1)- parametreli simetrik dizaynları veren bilgisayar programı.

```
10 C = 2: DIM A(100, 10), B(100, 10), A1(50, 10), A2(10), A9(10), A3(10), A4(50, 2), D$(50, 50), P(50), Q1(50, 50), Q2(50, 50), Q3(50, 50), Q4(100), Q5(100), Q8(100), Q6(100), X1(100), N$(20, 2), Q(20, 2), Q7(100)
20 CLS
30 INPUT "V DEGERINI GIRINIZ :", V
40 FOR I3 = 1 TO 20
50 FOR I4 = 1 TO 24
60 D$(I3, I4) = "*"
70 NEXT I4: NEXT I3
80 X1 = (SQR(2 * V - 1) + 1) / 2
90 Y1 = (SQR(2 * V - 1) - 1) / 2
100 X2 = Y1: Y2 = X1: A(1, 0) = X1: A(2, 0) = X2: M4 = 1: M5 = 1: I5 = 1: P2 = 1: CS = 1: M7 = 1: I7 = 1: C6 = 0: G4 = 0: M44 = 0: S4 = 0: S5 = 0
110 C = 2 * C
120 K = K + 1
130 FOR I = 1 TO C
140 A(I, K) = INT((V - I) / C) + 1
150 NEXT I
160 C = 2 * C
170 IF C <= V - 1 THEN 120
180 C = 2: L = 0: Z1 = 0: Z2 = 0
190 FOR I = 1 TO K
200 C = 2 * C: L = 0
210 FOR J = 1 TO C / 2
220 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 1 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 1 THEN U1 = (-A(J, K - 1) - 1) / 2: U2 = (A(J, K - 1) - 1) / 2: U3 = (-A(C / 2 + J, K - 1) + A(J, K - 2) - 1) / 2: U4 = (A(C / 2 + J, K - 1) + A(J, K - 2) - 1) / 2: GOSUB 2050
230 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 0 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 0 THEN U1 = -A(J, K - 1) / 2: U2 = A(J, K - 1) / 2: U3 = (-A(C / 2 + J,
```

```
K - 1) + A(J, K - 2)) / 2: U4 = (A(C / 2 + J, K - 1) + A(J, K - 2)) /
2: GOSUB 2050
240 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 1 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 0
THEN U1 = (-A(J, K - 1) - 1) / 2: U2 = (A(J, K - 1) - 1) / 2: U3 = (-
A(C / 2 + J, K - 1) + A(J, K - 2) - 1) / 2: U4 = (A(C / 2 + J, K - 1)
+ A(J, K - 2) - 1) / 2: GOSUB 2050
250 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 0 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 1
THEN U1 = -A(J, K - 1) / 2: U2 = A(J, K - 1) / 2: U3 = (-A(C / 2 + J,
K - 1) + A(J, K - 2)) / 2: U4 = (A(C / 2 + J, K - 1) + A(J, K - 2)) /
2: GOSUB 2050
260 NEXT J
270 FOR K1 = 1 TO L
280 P(K1) = B(K1, I)
290 NEXT K1
300 X = 0: S1 = 0: S2 = 0: S3 = 1
310 IF CS = 0 THEN S4 = S4 + 1
320 FOR K1 = 1 TO L STEP 2
330 S1 = 0
340 FOR Y = P(K1) TO P(K1 + 1)
350 X = X + 1: S1 = S1 + 1
360 B(X, I) = Y
370 NEXT Y: S2 = S2 + 1: A2(S2) = S1
380 IF CS = 1 THEN 410
390 S5 = S5 + 1
400 Q1(S4, S5) = S1
410 NEXT K1
420 S5 = 0
430 Z1 = 0: Z2 = 0: ZZ = A2(1)
440 FOR J = 1 TO C / 2
450 IF J = 1 THEN G = 1 ELSE G = Z + 1
460 FOR Z = G TO X
470 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 1 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 1
THEN Q = A(J, K - 2) / 2 - B(Z, I) - 1: T = 2 * Q + 1: P = 2 * B(Z, I)
+ 1: GOSUB 2090
```

```
480 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 0 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 0
THEN Q = A(J, K - 2) / 2 - B(Z, I): T = 2 * Q: P = 2 * B(Z, I): GOSUB
2090
490 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 1 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 0
THEN Q = (A(J, K - 2) - 1) / 2 - B(Z, I): T = 2 * B(Z, I) + 1: P = 2 *
Q: GOSUB 2090
500 IF (A(J, K - 1) MOD 2) = 0 AND (A(C / 2 + J, K - 1) MOD 2) = 1
THEN Q = (A(J, K - 2) - 1) / 2 - B(Z, I): T = 2 * Q + 1: P = 2 * B(Z,
I): GOSUB 2090
510 IF Z = ZZ THEN 530
520 NEXT Z
530 S3 = S3 + 1
540 ZZ = ZZ + A2(S3)
550 NEXT J
560 E1 = Z1: E2 = Z2
570 IF CS = 1 THEN 580 ELSE 730
580 N2 = 0: N5 = 0
590 IF V MOD 4 = 1 THEN G = A2(1) + 1: N3 = Z: M1 = 1 ELSE G = 1: N3 =
A2(1): M1 = 2
600 FOR N1 = G TO N3
610 IF A1(N1, 1) >= A1(N1, 2) THEN 630
620 N2 = N2 + 1: A3(N2) = N1
630 NEXT N1
640 FOR N1 = 1 TO Z
650 FOR N3 = 1 TO N2
660 IF A3(N3) = N1 THEN 680
670 N5 = N5 + 1: A4(N5, 1) = A1(N1, 1): A4(N5, 2) = A1(N1, 2)
680 NEXT N3: NEXT N1
690 FOR N6 = 1 TO S2
700 A9(N6) = A2(N6)
710 NEXT N6
720 GOTO 820
730 I6 = 1
740 FOR I1 = 1 TO E1
750 FOR I2 = 1 TO E2
```

```
760 D$(I6, I7) = STR$(A1(I1, I2))
770 I7 = I7 + 1
780 NEXT I2
790 I6 = I6 + 1: I7 = I7 - 2
800 NEXT I1
810 I7 = I7 + 2
820 I5 = I5 + 2
830 IF CS = 1 THEN 840 ELSE 870
840 IF M1 = 1 THEN 860
850 A9(1) = A9(1) - N2: GOTO 870
860 A9(2) = A9(2) - N2
870 IF M7 = 1 THEN 890
880 C = C / 2
890 K = 2
900 FOR J = 1 TO C / 2
910 A(J, K - 1) = A4(M4, 1)
920 A(C / 2 + J, K - 1) = A4(M4, 2)
930 IF M5 <= A9(1) THEN M4 = A9(1) + 1 ELSE M4 = A9(1) + 2
940 NEXT J
950 C6 = C6 + 1
960 M5 = M5 + 1: M4 = M4 - A9(1) + C6
970 IF M5 = A9(1) + 1 THEN M4 = 0: C6 = 0
980 IF M5 > A9(1) THEN M4 = M44 + 1: M44 = M4
990 CS = 0: C = C * 2: M7 = 0: L = 0: K = 3
1000 IF M5 <= A9(1) * A9(2) + 1 THEN 210
1010 REM Q1 MATRISININ TRANSPOZESI Q2 MATRISI
1020 FOR E6 = 1 TO S4
1030 FOR E7 = 1 TO C / 2
1040 Q2(E7, E6) = Q1(E6, E7)
1050 NEXT E7: NEXT E6
1060 FOR E6 = 1 TO C / 2
1070 FOR E7 = 1 TO S4
1080 IF E7 = 1 THEN Q3(E6, E7) = 1
1090 Q3(E6, E7 + 1) = Q2(E6, E7)
1100 NEXT E7: NEXT E6
```

```
1110 FOR E6 = 1 TO C / 2
1120 FOR E7 = 1 TO S4 + 1
1130 Q1(E6, E7) = Q3(E6, E7)
1140 NEXT E7: NEXT E6
1150 REM Q4 DIZISININ ELDE EDILMESI
1160 P = 1
1170 FOR E6 = 1 TO S4 + 1
1180 E7 = C / 2: F = 1
1190 X = 0: P1 = 0
1200 I1 = Q1(1, 1)
1210 FOR J1 = P TO P + 1
1220 IF D$(1, J1) = "*" THEN END
1230 IF D$(I1, J1) = "*" THEN 1300
1240 X = X + 1
1250 Q4(X) = VAL(D$(I1, J1))
1260 NEXT J1
1270 P1 = P1 + 1
1280 I1 = I1 + Q1(P1, E6 + 1) - Q1(P1, 1) + Q1(P1 + 1, 1)
1290 IF I1 <= 20 THEN 1210
1300 XX = 0
1310 FOR XX1 = 1 TO X STEP 2
1320 XX = XX + 1
1330 Q5(XX) = Q4(XX1)
1340 NEXT XX1
1350 FOR XX1 = 2 TO X STEP 2
1360 XX = XX + 1
1370 Q5(XX) = Q4(XX1)
1380 NEXT XX1
1390 K = 0: K1 = 0
1400 FOR XX1 = 1 TO C
1410 IF Q5(XX1) = -2 THEN K1 = K1 + 1: Q(K1, 1) = 1: Q(K1, 2) = 1: K =
K + 1: N$(K, 1) = "-1": N$(K, 2) = "-1"
1420 IF Q5(XX1) = 2 THEN K1 = K1 + 1: Q(K1, 1) = 1: Q(K1, 2) = 1: K =
K + 1: N$(K, 1) = "+1": N$(K, 2) = "+1"
```

```
1430 IF Q5(XX1) = 0 THEN K1 = K1 + 1: Q(K1, 1) = 1: Q(K1, 2) = 2: K =
K + 1: N$(K, 1) = "+1": N$(K, 2) = "-1": K = K + 1: N$(K, 1) = "-1":
N$(K, 2) = "+1"
1440 IF Q5(XX1) = 1 THEN K1 = K1 + 1: Q(K1, 1) = 1: Q(K1, 2) = 1: K =
K + 1: N$(K, 1) = "+1": N$(K, 2) = "*"
1450 IF Q5(XX1) = -1 THEN K1 = K1 + 1: Q(K1, 1) = 1: Q(K1, 2) = 1: K =
K + 1: N$(K, 1) = "-1": N$(K, 2) = "*"
1460 NEXT XX1
1470 E9 = C: FF = 1
1480 X2 = 0: P2 = 0: FL = 1
1490 I2 = Q(1, 1)
1500 FOR J2 = 1 TO 2
1510 X2 = X2 + 1
1520 Q7(X2) = VAL(N$(I2, J2))
1530  NEXT J2
1540 P2 = P2 + 1
1550 IF FL = 0 THEN 1590
1560 I2 = I2 + Q(P2, 2) - Q(P2, 1) + Q(P2 + 1, 1)
1570 IF I2 < K THEN 1500
1580 IF I2 = K THEN FL = 0: GOTO 1500
1590 XL = 0
1600 FOR XXL = 1 TO X2 STEP 2
1610 IF Q7(XXL) = 0 THEN 1640
1620 XL = XL + 1
1630 Q8(XL) = Q7(XXL)
1640 NEXT XXL
1650 FOR XXL = 2 TO X2 STEP 2
1660 IF Q7(XXL) = 0 THEN 1690
1670 XL = XL + 1
1680 Q8(XL) = Q7(XXL)
1690 NEXT XXL
1700 FOR T1 = 1 TO V
1710 T2 = 0
1720 FOR XX1 = 1 TO V - T1 + 1
1730 T2 = T2 + Q8(XX1) * Q8(XX1 + T1 - 1)
```

```
1740 NEXT XX1
1750 X1(T1) = T2
1760 NEXT T1
1770 T1 = 1
1780 IF T1 = 1 AND X1(T1) = V THEN 1790 ELSE 1890
1790 FOR XX1 = 2 TO V
1800 IF (X1(XX1) + X1(V - XX1 + 2)) = 1 THEN 1810 ELSE 1890
1810 NEXT XX1
1820 LPRINT : LPRINT
1830 LPRINT "           GECERLI   a(i)   DEGERLERI "
1840 LPRINT "           --------------------------"
1845 LPRINT
1850 FOR XX1 = 1 TO V
1860 LPRINT "  a("; XX1 - 1; ")="; Q8(XX1);
1864 V1 = INT(V / 2) - 1
1865 IF XX1 = V1 OR XX1 = V - 3 THEN LPRINT : LPRINT
1870 NEXT XX1
1880 INPUT " ", FF$
1890 IF E9 = 1 THEN 1900 ELSE 1910
1900 IF Q(1, 1) = Q(1, 2) THEN 1950
1910 IF Q(E9, 1) = Q(E9, 2) THEN Q(E9, 1) = 1: E9 = E9 - 1: FF = 0:
GOTO 1890
1920 IF F = 0 THEN Q(E9, 1) = Q(E9, 1) + 1: E9 = C: FF = 1: GOTO 1480
1930 Q(E9, 1) = Q(E9, 1) + 1
1940 GOTO 1480
1950 IF E7 = 1 THEN 1960 ELSE 1970
1960 IF Q1(1, 1) = Q1(1, E6 + 1) THEN Q1(1, 1) = 1: GOTO 2010
1970 IF Q1(E7, 1) = Q1(E7, E6 + 1) THEN Q1(E7, 1) = 1: E7 = E7 - 1: F
= 0: GOTO 1950
1980 IF F = 0 THEN Q1(E7, 1) = Q1(E7, 1) + 1: E7 = C / 2: F = 1: GOTO
1190
1990 Q1(E7, 1) = Q1(E7, 1) + 1
2000 GOTO 1190
2010 P = P + 2
2020 NEXT E6
```

```
2030 NEXT I
2040 END
2050 REM ORTAK SINIR BULMA
2060 IF U3 >= U1 THEN L = L + 1: B(L, I) = U3 ELSE L = L + 1: B(L, I)
= U1
2070 IF U4 >= U2 THEN L = L + 1: B(L, I) = U2 ELSE L = L + 1: B(L, I)
= U4
2080 RETURN
2090 Z1 = Z1 + 1: Z2 = Z2 + 1: A1(Z1, Z2) = P
2100 Z2 = Z2 + 1: A1(Z1, Z2) = T
2110 IF Z1 = X THEN 2130
2120 Z2 = 0
2130 RETURN
```

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=1	a(4)=-1
a(5)=1	a(6)=1	a(7)=1	a(8)=-1	a(9)=-1
a(10)=1	a(11)=-1	a(12)=1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=-1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=1	a(4)=1
a(5)=1	a(6)=1	a(7)=-1	a(8)=1	a(9)=-1
a(10)=1	a(11)=1	a(12)=-1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=1	a(4)=1
a(5)=-1	a(6)=1	a(7)=-1	a(8)=-1	a(9)=1
a(10)=1	a(11)=1	a(12)=-1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=1	a(1)=1	a(2)=-1	a(3)=1	a(4)=1
a(5)=1	a(6)=-1	a(7)=-1	a(8)=1	a(9)=-1
a(10)=1	a(11)=1	a(12)=1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=-1	a(4)=1
a(5)=-1	a(6)=-1	a(7)=1	a(8)=1	a(9)=1
a(10)=-1	a(11)=1	a(12)=1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=-1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=1	a(4)=1
a(5)=1	a(6)=1	a(7)=-1	a(8)=-1	a(9)=1
a(10)=1	a(11)=-1	a(12)=1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=-1	a(4)=1
a(5)=1	a(6)=1	a(7)=-1	a(8)=-1	a(9)=1
a(10)=-1	a(11)=1	a(12)=1		

GECERLI a(i) DEGERLERI

----

a(0)=1	a(1)=1	a(2)=1	a(3)=1	a(4)=-1
a(5)=1	a(6)=-1	a(7)=-1	a(8)=1	a(9)=1
a(10)=1	a(11)=-1	a(12)=1		

ÖZGEÇMİŞ

Doğduğu yer ve yıl : İstanbul, 10.08.1964

İlk Öğrenim : Kültür Koleji

Orta Öğrenim : Kültür Koleji
Çavuşoğlu Koleji

Lisans Öğrenimi : Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans Öğr. : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü

Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim
Dalı Araştırma Görevlisi