

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İç-İçe 2- Fak. Var: Ana. Mod. Mat.
Çözüm, ve bir Uyg.

Doktora Tezi

Gülten Kari

1994

Ref
MTM
102
1994

Mat-

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇ - İÇE 2 - FAKTÖRLÜ VARYANS
ANALİZİ MODELLERİNDE MATRİSLERLE
ÇÖZÜMLEME ve BİR UYGULAMA

Gülten KARI

F.B.E. Matematik Anabilim
Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Y.Doç.Dr. Adnan MAZMANOĞLU

İstanbul , 1994

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : 209
: 106
Alındığı Yer : F.B. Enstitüsü
Tarih : 23.9.1996
Fatura :
Fiyatı : 35 Bin
Ayniyat No : 1/7
Kayıt No : 52513
UDC :
Ek :

Y. T. Ü.

KÜTÜPHANE DOK. DAİRE BAŞKANLIĞI



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

III, 67

İÇ - İÇE 2 - FAKTÖRLÜ VARYANS
ANALİZİ MODELLERİNDE MATRİSLERLE
ÇÖZÜMLEME ve BİR UYGULAMA

Y. T. O.

İSTANBUL DOK. DAL. BAŞKANLIĞI

Gülten KARI

F.B.E. Matematik Anabilim
Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Y.Doç.Dr. Adnan MAZMANOĞLU

İstanbul , 1994



İÇİNDEKİLER

| | |
|--|----|
| ÖZET..... | I |
| İNGİLİZCE ÖZET | II |
| 0. GİRİŞ | |
| 0.1. Varyans Analizinin Tanımı ve Mahiyeti | 1 |
| 0.2. Rankı Tam ya da Olmayan Modeller | 2 |
| 0.3. İç-içe Düzenin V.A. İçindeki Yeri ve Anlamı..... | 3 |
| 1. BÖLÜM | |
| 1.1. 1- Faktörlü Sınıflandırma | 6 |
| 1.1.1. σ^2 Kestirimleri | 8 |
| 1.1.2. V.A. Tablosu | 12 |
| 1.1.3. Örnek..... | 13 |
| 1.2. Genelleştirilmiş Ters Kavramı | 16 |
| 1.2.1. G'nin Özellikleri | 17 |
| 1.2.2. Genelleştirilmiş Tersin Hesabı..... | 18 |
| 1.2.2.1. Genel Yöntem | 18 |
| 1.2.3. Bazı Teoremler | 20 |
| 1.2.4. Genelleştirilmiş Ters Buluşuna Dair Bir Örnek..... | 21 |
| 1.3. Normal Denklemler | 22 |
| 1.3.1- Normal Denklemlerin Tutarlılığı | 23 |
| 1.3.2 Genelleştirilmiş Tersle Normal Denklemlerin Çözümü | 24 |
| 1.4. Simetrik $X'X$ Matrisinin Genelleştirilmiş Tersinin Özellikleri | 26 |
| 1.5. İndirgeme | 28 |
| 1.6. Tahmin Edilebilir (Kestirilebilir) Fonksiyonlar | 34 |
| 1.6.1. Kestirilebilirlik İçin Test | 36 |
| 1.6.2. Örnek | 37 |
| 2. BÖLÜM | |
| 2.1. 2-Faktörlü İç-içe Sınıflandırma | 39 |
| 2.1.1. Tahminlere Göre Model | 40 |
| 2.1.2. Analiz İçin Sapmaların Parçalanışı | 40 |
| 2.1.3. Örnek | 43 |
| 2.1.4. F - testi ve t - testi | 50 |
| 2.1.5. χ^2 testi | 53 |
| 2.1.6. Örneğin Kestirilebilir Fonksiyonları | 54 |
| 3. BÖLÜM | |
| 3.1. Model | 58 |
| 3.2. Normal Denklemler | 61 |
| 3.3. Modelin Varyans Analizi | 63 |
| 3.4. Tahmin Edilebilir Fonksiyonlar | 66 |

SONUÇ
KAYNAKÇA



TEŞEKKÜR

Çalışmamın ilk günlerinden beri beni destekleyen ve özellikle kaynak araştırmamda yardımını esirgemeyen sayın danışman hocam Dr. Adnan Mazmanoğlu'na ve gerek seminerlerine katılmama olanak sağlayan gerekse kitap ve tez çalışmalarından faydalandığım sayın Prof. Dr. Merih Teziç 'e teşekkür ederim.



ÖZET

Nitel ve nicel değişkenlerin sözkonusu olduğu lineer modeller uzun yıllar çeşitli çalışmalarla ele alınmış olup , günümüzde de bu çalışmalar yoğun bir biçimde devam etmekte ve çeşitli yorumlar,sonuçlar elde edilmektedir.Özellikle nitel değişkenlerin sözkonusu olduğu lineer modeller doğada karşımıza çok fazla çıkmaktadır .Nitel değişkenli lineer modellerin incelenmesinde (analizinde) kullanılan yöntem kısaca " Varyans Analizi " denir . V.A. notasyonu ile gösterilir . Bu yöntem kendi içinde çok farklı durumların içerildiği bir yöntemdir .Klasik anlamda 1-faktörlü sınıflandırmadan n-faktörlü (4 faktörden sonra pek üzerinde çalışılmamış) sınıflandırmaya genişletebileceğimiz durumlar olduğu gibi , faktörlerin çapraz , iç-içe , çapraz+iç- içe olduğu durumlar ve verinin dengeli veri olup olmaması durumları ve nihayet faktörlerin etkileşimli (çapraz modellerde) olup olmamaları durumlarında varyans analizi tekniğini başarı ile uygulayabilmekteyiz. Daha sonraları varyans analizi yönteminde matris cebirinin de kullanılması çağdaş bir yaklaşım olarak değerlendirildi . Ayrıca matris cebirinin kullanılması V.A. çözümlerinde büyük kolaylıklar getirmesi bakımından da önemlidir .

Önemli sorun nitel değişkenli modellerde bir tek çözümün olmayışıdır . Çünkü

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde gösterilen lineer modelden elde edilen

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y$$

normal denklemlerinde $X'X$ matrisinin rankı tam olmayıp klasik anlamda tersi yoktur.Önceleri çeşitli kısıtlamalarla ya da uygun koşullar koymak sureti ile çözüm getirilebilmiş olmakla birlikte son zamanlarda rankı tam olmayan matrislerin tersini bulmak için geliştirilmiş ters matris kavramı ortaya atılmış ve " geliştirilmiş ters matrislerle çözüm yöntemi " kullanılarak çözüm elde edilebilmiştir . Bu yöntemle biraz önce sözü edilen kısıtlamalardan ve benzeri koşullardan kurtulmak mümkün olmuştur . Bu çalışmadan amaç şu ana kadar söylediklerimizi baz alarak iç-içe varyans analizi modelini daha önceki çalışmaları da kullanarak incelemek ve daha genişleterek buna çok uygun olan verimize uygulamaktır.

Girişte varyans analizinin tanımı ve mahiyetinden kısaca bahsedildikten sonra , rankı tam ya da tam olmayan modeller ele alındı.Basit bir sınıflama yapıлып bu sınıflamanın bir parçası olan iç-içe düzenin V.A. içindeki yeri ve anlamından sözedildi .

I . Bölümde 1-faktörlü sınıflandırmadan kısaca bahsedilip,bazı tanım ve teoremler ile genelleştirilmiş ters kavramı,kestirebilirlik kavramı üzerinde durulmuştur. Bütün bu kavramlar ve varyans analizi tabloları bir örnek üzerinde uygulanmıştır.

II. Bölümde iç-içe modeller 1-faktörlüye benzer şekilde incelenmiş ve yine varyans analizi tabloları yapılmıştır.

III. Bölümde ise iç-içe varyans modeli çarpıcı bir örnek ile uygulanmıştır. Beklenen sonuçlar ile sayısal değerler arasında sıkı bir bağ olduğu açıkça görülmüştür.



III

SUMMARY

Linear models dealing with qualitative and quantitative variables have long been analyzed and nowadays some work is still being done.

In nature, we encounter linear models with quantitative variables quite frequently. This is why we call this method used in analyzing quantitative models "Variance Analysis" in short. We say "in short" because variance analysis method deals with many different situations. We apply variance analysis technique with success in situations where 1-factorial classification is expanded into n-factorial (not much work done beyond 4-factorial) as well as situations where factors are crossed, nested, crossed-nested and data are in balance and finally factors are in interaction. It is also very important that it brings in simplicity as we can also use matrix algebra in variance analysis method.

An important problem in quantitative variable methods is that there is no single solution as in normal equations $(X'X)\hat{\beta} = X'Y$ derived by $Y = X\beta + \varepsilon$.

$X'X$ matrix has not full rank and inverse. It was only possible to find the inverse of a matrix without a full rank by some restrictions or by imposing appropriate conditions by means of generalized inverse matrix method. This method doesn't involve such restrictions and conditions.

The purpose of my study is to analyze the variance analysis method with the help of earlier studies and to apply it to my data. I define the variance analysis technique in the first part and the later part models with full and not full ranks. A simple classification is made and the position and meaning of this classification in variance analysis are done.

In the first section, 1-factorial classification, some definitions and theories are described. An example is given.

In the second section, nested models are analyzed and variance analysis tables are given.

In the third section, nested model is shown with an example and the relation between expected results and numerical values is shown.



GİRİŞ

0.1. Varyans Analizinin Tanımı ve Mahiyeti

t-testi A ve B gibi iki örnek ortalamasının birbirinden yeterince farklı olup olmadığını belirleyen bir testtir . Ancak bu test yalnızca iki örnekle ilgilendiği durumlarda sınırlı olup örnek sayısı arttığında yapılacak test sayısı da artacağından bu gibi durumlar için etkinliğini yitiren bir test olur . Pek çok grup arasındaki farkları aynı anda test etmek için ihtiyaç duyulan test varyans analizinde bulunur .

Varyans analizi kısaca ifade edilecek olursa , iki örnek karşılaştırmasının ikiden daha çok örneğe genişletilmesidir diyebiliriz . Varyans analizi bize tek faktörün etkisini aramaktan başka birden çok faktörün etkisini de anlama olanağı verir . O halde varyans analizini yeniden şöyle ifade edebiliriz Varyans analizi bir olayın nedenlerini ya da daha doğru bir deyişle kontrol edilebilen etkenleri (*) , olayın genel çizgisinden sapmaları bileşenlerine ayırmak suretiyle inceleyen bir yöntemdir . Varyans analizi kontrol edilebilen faktörlerin etkilerini birlikte inceleme olanağı sağladığı gibi , karşılıklı etkilerini de (interaction) inceleme olanağı sağlar . Özellikle tarım sektöründeki uygulamaları ile ortaya çıkan bu teknik daha sonraları 1923'lerde Fisher tarafından genişletilmiştir . Günümüzde tıp , biyoloji , psikoloji gibi bilim dallarının yanı sıra sanayi çalışmalarında ve endüstride çok fazla kullanılmaktadır .

V.A.'nde " faktör " ve " düzey " sözcükleri çok sık geçer . Biz de bu kavramları sık sık kullacağımızdan örnek vererek açıklamayı uygun gördük .

Faktör : Bir deney veya bir araştırmada yer alan bağımsız değişken olarak ifade edilir . Örneğin ailelerin gelir düzeylerinin beyaz eşya satışları üzerindeki etkisi araştırılırsa , burada faktör gelir düzeyidir . Eğer üç farklı eğitim yönteminin bir grup öğrencinin başarısı üzerindeki etkisi ölçülecekse burada faktör eğitim yöntemleridir .

Faktörlerin kendi içindeki alt sınıfları ise faktörün düzeylerini oluşturur . Örneğin üniversitelerimizde çeşitli sınıflara bölünerek okutulan bir dersin kendisi faktör , kısımları ise bu faktörün düzeyleridir . Cebir dersini düşünelim . Bu dersin çeşitli sınıflara dağılımı Cebir1 Cebir2 , Cebir3 olmak üzere üç düzeyi vardır . Ya da yeni bulunan bir ilacın hastalar üzerindeki etkisi araştırılıyor olsun .

(*) Bir olay incelendiğinde , olaya tek başına yön verecek güçte olmayan birbirinden bağımsız pek çok yan etkenin yanı sıra , olayı doğuran bazı etkenler de vardır ki bunlara " kontrol edilebilen etkenler " denir .



Uygulanan dozlar - 1mg , 5mg , 10mg gibi - ilaç faktörünün düzeylerini oluşturur . Faktörler nitel ve nicel olmak üzere ikiye ayrılır . Nicel faktöre fiyat , yaş , ağırlık , boy uzunluğu gibi örnekler verilebilir Nitel faktöre ise gübre türleri , farklı eğitim yöntemleri vb. örnek olarak verilebilir .

Yapılan araştırmalarda faktör sayısı önemlidir . Tek faktör söz konusu ise yapılan çalışma tek faktörlü çalışma , birden çok faktör söz konusu ise çok faktörlü çalışmadır . Faktör sayısı ne olursa olsun hepsinin etkisi eşanlı (simultane) olarak araştırılır.

0.2. Rankı Tam ve Tam Olmayan Modeller

Genellikle bağımsız değişkenlerin nitel olduğu modellere " Rankı Tam Olmayan Modeller " denir . Bu modellerde X matrisi (0,1) gösterge değerlerinden oluşur . Bağımsız değişkenlerin nicel olduğu modellere ise " Rankı Tam Olan Modeller " denir . Fiyat ile arz-talep , ağırlıkla yaş vb. gibi değişkenler arasında bir ilişkinin var olup olmadığı araştırılmak istenildiğinde kurulacak model bir regresyon modelidir . Model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_{i1}X_i + \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, n)$$

olarak yazılır . Bunun matrissel formda gösterilişi

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklindedir .

Normal denklemlerin $(X'X)\hat{\beta} = X'Y$ biçiminde yazıldığını ve bu tür modellerde $X'X$ matrisinin determinanı sıfırdan farklı olduğundan (tekil olduğundan) $\hat{\beta}$ için tek bir çözümünün var olduğunu biliyoruz . Bu da

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

şeklinde ifade edilir . Ancak gübre türlerinin verime , ilaçların iyileşme sürelerine , eğitim yöntemlerinin öğrencilerin başarısına vb. etkileri araştırıldığında kurulacak olan model bir varyans analizi modelidir . Buradaki değişkenlerimiz nitel olup gübre , ilaç , eğitim yöntemleri birer faktördür . Model yine $Y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelidir . Ancak burada X matrisinin rankı tam değildir . Dolayısıyla $X'X$ matrisinin tersi alınamaz (klasik anlamda) ve β ' yı tahmin etme sorunu ile karşı karşıya kalınır . Bu sorun iki ayrı yaklaşımla aşılmaya çalışılmıştır



a) Yeniden parametreleme
b) Genelleştirilmiş ters matrislerle çözüm
(1.2.)'de " genelleştirilmiş ters kavramı " başlığı altında genelleştirilmiş ters matrislerle çözüm geniş olarak ele alınmıştır .

Faktör sayısına göre basit bir sınıflama yapılırsa :

I. Tek faktörlü analiz

II. Birden çok faktörlü analiz

A) 2-faktör

a) Çapraz düzen

b) İç-içe (hiyerarşik) düzen

B) 2-faktörden daha çok

a) Çapraz düzen

b) İç-içe (hiyerarşik) düzen

c) Çapraz + iç-içe

Faktörün tesadüfi olup olmayışına göre bir sınıflama yapılırsa :

I. Değişmez etkili model

II. Değişir etkili model

Değişmez etkili modelde değişkenler (faktörler) tesadüfi değildirler . Değişir etkili modelde ise değişkenler tesadüfidir (rastlantısaldır) . Ayrıca iki durumun birlikte olduğu halde modele " karma model " adı verilir .

0.3. Varyans Analizi Modellerinden İç-içe Düzenin Anlamı ve V.A. İçindeki Yeri

Çalışmamızın orijini oluşturacak olan iç-içe düzenin (veya hiyerarşik düzen) , varyans analizi tekniğini anlatan kaynaklarda , üzerinde pek de fazla durulmamış olması bizi bu konuya yöneltti . Bu tekniğin uygulanacağı örneğin hazırlanışı , klasik yöntemlerle ele alınan örneklerden farklı olacaktır . Uygulamamız için önce tekniği tüm ayrıntıları ile açıklama gereksinimi duyduk . İç-içe veya hiyerarşik düzen bir faktöryel düzen olup , içerikleri nedeniyle faktörler bileşimler meydana getirmek yerine iç-içe dizilmişlerdir . Ayrıca burada çapraz faktöryel düzende (*) gibi faktörlerin birbirini etkilemesi söz konusu değildir .

(*) Çapraz Faktöryel Düzen : En az iki faktörlü bir deneyde her faktörün denenecek şıklarından herbiri ile diğer faktörün denenecek şıklarından herbiri bileşimler yapacak şekilde bir araya geliyorsa çapraz faktöryel düzenden söz edilir . Varsa faktörler arası etkileşim (interaction) de araştırılır . Ve böylece daha kapsamlı sonuçlar elde edilir .

Örneğin iki faktör halinde çapraz düzendeki A ve B etkisinden başka AB etkisi , hiyerarşik faktöryel düzende A etkisi ve A içi B etkisidir . Buradaki B etkisi çapraz düzendeki B + AB etkisinin karşılığıdır

Farklı eğitim yöntemlerinin farklı okullarda uygulanması sonucunda öğrencinin başarısını ölçmek istersek , - faktörlerin nitelikleri dolayısıyla - çapraz faktöryel düzen söz konusu olduğu halde bölge , il , lise gibi faktörlerin öğrencinin başarısını etkileyen faktörler olduğu göz önüne alınıp , başarı ölçülmek istenirse - faktörlerin dizilişi nedeniyle - iç-içe düzen söz konusu olur . Bu örnekler çoğaltulabilir . Doğalgaz kullanımının yaygınlığı araştırılacak olsa burada mahalle , blok , apartman faktörlerinin yine iç-içe düzene uyduğu görülür .

Çapraz faktöryel düzen ile iç-içe düzenin şema ile gösterilişi :

| | | β | | | |
|----------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| α | 1 | ab_{11} | ab_{12} | ab_{13} | ab_{14} |
| | 2 | ab_{21} | | | |
| | 3 | | | | ab_{34} |

çapraz faktöryel düzen

α - faktörünün 3 , β - faktörünün 4 düzeyi olup , hücre sayısı 3×4 yani 12' dir . $(ab)_{ij}$, α - faktörünün i. düzeyi ile β - faktörünün j. düzeyinin birleşimini (kombinasyonunu) gösterir .

| α | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|----------|---|---|---|---|--------------|
| β | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | iç-içe düzen |

β - faktörü , α - faktörünün içinde yuvalanmış yani faktörler iç-içe yer almışlardır . α ' ya üst faktör α içindeki β ' ya da alt faktör denilebilir .

Literatürdeki durum : Aslında iç-içe düzen üzerinde çok da fazla çalışma yapılmış bir konu olmamakla birlikte , aşağıda adları geçen yazarlar bu konu üzerinde durmuş ve çalışmalarını yayınlamışlardır . Çalışmamıza da kaynaklık eden bu yayınlardan , yazarların düşüncelerini birer cümle ile vermeye çalıştık .

A.Goldstein ; " nested düzen " ya da " iç-içe düzen " aslında biri diğerini kapsayan bir paralel tekli sınıflama dizisidir der .



C.C.Li ; Söz konusu sınıflamayı " majör grup içinde minör grup olmak üzere " bir sınıflama biçiminde gösterir .

J.C.R.Li ; " Çeşitli faktörler söz konusu olduğunda bunların mutlaka çapraz bileşim meydana getirmeleri gerekmediği " ne ve " biri diğeri içinde yuvalandığında deneyin hiyerarşik diye adlandırıldığı " na işaret ediyor .

R.G.D.Steel ve J.H.Torrie , O.Düzgüneş , Searle , M.İpek , R.Lowell-Wine , H.Scheffe , F.Graybill gibi yazarlar bu konu üzerinde durmuş ve eserler vermişlerdir .



I.BÖLÜM

1.1. 1-Faktörlü Sınıflandırma

Kütlenin , α -faktörüne göre gruplara ayrılmış k tane kütleden oluştuğunu ve bir tek kütle yerine rastgele k tane kütle çektiğimizi düşünelim . Amacımız α faktörünün etkisini ölçmektir. Her alt kütle için ,

$$y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, k)$$

yazarız . Her sınıf için ,

$$\mu_j = \mu + \alpha_j$$

Her kütle ortalaması , genel ortalama ile α_j etkisinin toplamı şeklinde yazılır . Model

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

olur . Örnek tahminlerine göre model ise

$$y_{ij} = \bar{y} + a_j + e_{ij} \quad (2)$$

şeklinde dir . Burada μ ana kütle ortalaması , α_j bir A faktörünün j. düzeyinin etkisi , ε_{ij} hata ya da sapma adı verilen terimdir . (2) eşitliğinden $y_{ij} - \bar{y}$ farkını aşağıdaki gibi basit cebirsel özdeşlik olarak yazalım .

$$y_{ij} - \bar{y} = (\bar{y}_j - \bar{y}) + (y_{ij} - \bar{y}_j) \quad (\text{temel özdeşlik})$$

Ki bu basit bir özdeşliktir . Örnek tahminlerine göre yazdığımız modelle karşılaştırsak ,

$$y_{ij} - \bar{y} = a_j + e_{ij}$$

denklemini elde edilir ki bu bize bir elemanın ortalamadan sapmasını , iki sapma bileşeninin toplamı şeklinde ifade etme olanağını verir .



$$a_j = \bar{y}_j - \bar{y}$$

sınıflar arası sapma

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j$$

sınıf içi sapma

Temel özdeşliğin her iki yanının karesi alınıp , sonra k grup için toplam yapılırsa ,

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_j) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

$$\left\langle 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_j) = 2 \sum_{j=1}^k \left[(\bar{y}_j - \bar{y}) \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j) \right] = 0 \right\rangle$$

sonuç olarak

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

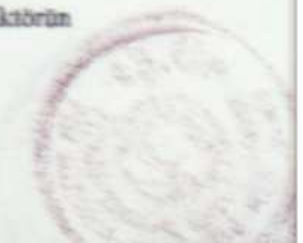
ya da

$$= \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

elde edilir . Bu son denkleme V.A.'nin genel denklemi veya daha önce sözü edildiği gibi V.A.'nin temel özdeşliği denir . Burada KT_g (genel kareler toplamı) elemanların genel ortalamadan sapmalarının karelerinin toplamı , KT_{ara} (kareler toplamı ara) grup ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarının karelerinin toplamı , $KT_{iç}$ (kareler toplamı iç) elemanların grup ortalamalarından sapmalarının karelerinin toplamı demektir .

Verilerden hareketle sapmaların kareleri parçalanarak sapmaların nedeni araştırılır . Bazen varyans analizine bu nedenle sapmalar analizi de denir . Rastgele örneklemeyle dayanan bir istatistiki araştırmada $KT_g, KT_{ara}, KT_{iç}$ 'den hiçbirinin sıfır olması beklenemez .

$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ bile olsa \bar{y}_j 'lerin farklı olmaları normaldir . Örnekleme hatasından ileri gelen sapmalar olacaktır . Farklar sondajla bağdaştırılmayacak kadar büyükse , o zaman μ_j 'lerin farklılığı düşünülür . Yani α etkeni sonucu etkileyecek kadar önemlidir . V.A.'de α etkeninin etkisinin var olup olmadığı test edilirken öne sürülen temel varsayım faktörün etkisinin bulunmadığıdır .



Bunun dışında V.A. bakımından gerekli ancak test edilmesi gerekmeyen varsayımlar da vardır .

Bunlar

- 1) Rassal örnekleme
- 2) Alt kütle dağılımı normal
- 3) σ^2 ' lerin eşitliği
- 4) Modelde toplanabilirlik

Bunların içinde normallik ve σ^2 ' lerin eşitliği gibi varsayımlardan sapma , n_j ' lerin eşit olmaları ve anlamlılık eşiğinin yüksek tutulması ile giderilir . Yani analiz sonucunu çok fazla etkilemez .

Test :

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$$

H_1 : En az iki ortalama farklı

1.1.1. σ^2 Kestirimleri

σ^2 ' nin bütün kütlelerde aynı olduğunu ileri sürdüğümüze göre kütle varyansının nasıl tahmin edileceği sorusu akla gelir . Bunu bir kaç türlü tahmin etmek mümkündür . Adım adım irdeleyelim .

I. H_0 doğru ise $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$

$$a) \quad s^2 = \frac{\sum \sum (y_{ij} - \bar{y})^2}{N-1} = \frac{KT_g}{N-1} = KO_g \quad (\text{genel kareler ortalaması})$$

$E(s^2) = \sigma^2 \Rightarrow s^2$ ' nin ana kütle varyansının yansız bir tahmini olduğu anlamına gelir .

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{n_j - 1}$$



Yine burada $E(s_j^2) = \sigma^2$ dir . s_j^2 ' lerin tartılı ortalaması s.d. daha büyük ve dolayısıyla daha isabetli bir σ^2 tahmini olacaktır .

$$s_{iq}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)} = \frac{\sum \sum (y_{ij} - \bar{y})^2}{N - k} = \frac{KT_{iq}}{N - k} = KO_{iq}$$

$$E(s_{iq}^2) = \sigma^2$$

$$c) \quad s_{ara}^2 = \frac{\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{k - 1} = \frac{KT_{ara}}{k - 1} = KO_{ara}$$

$$E(s_{ara}^2) = \sigma^2$$

II. H_1 doğru ise: En az iki ortalama farklı ve α_j ' lerin sabit olduğu model (genelleme özel α_j ' lerle ilgili olur) için :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

dir.

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (\mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij})}{n_j} = \frac{n_j \mu + n_j \alpha_j + \sum_{i=1}^{n_j} \varepsilon_{ij}}{n_j}$$

$$\bar{y}_j = \mu + \alpha_j + \bar{\varepsilon}_j$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{y}_j}{k} = \frac{\sum_{j=1}^k (\mu + \alpha_j + \bar{\varepsilon}_j)}{k} = \frac{k\mu + \sum_{j=1}^k \alpha_j + \sum_{j=1}^k \bar{\varepsilon}_j}{k}$$

$$\bar{y} = \mu + \bar{\varepsilon}$$



$$s_{i\check{c}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{N-k} = \frac{\sum \sum (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_j)^2}{N-k}$$

Faktörün etkisi olsa dahi $E(s_{i\check{c}}^2) = \sigma^2$ olmaya devam eder .

$$s_{ara}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{k-1}$$

Kolaylık olsun diye hücrelerdeki gözlem sayılarını eşit alırsak yani

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = n \text{ ise}$$

$$s_{ara}^2 = \frac{n \sum (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{k-1} = \frac{n \sum (\alpha_j + \bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon})^2}{k-1}$$

$$s_{ara}^2 = \frac{n \sum \alpha_j^2}{k-1} + \frac{n \sum (\bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon})^2}{k-1}$$

$$E(s_{ara}^2) = \frac{n \sum \alpha_j^2}{k-1} + \sigma^2$$

μ_j ' lerin en az ikisinin farklı olması durumunda görüldüğü gibi $E(s_{ara}^2) = \sigma^2$ olmaya devam etmiyor . σ^2 ' ye ek olarak bir kalıntı söz konusu olmaktadır .

α_j ' lerin bir α etken cümlesinden çekilen tesadüfi etken grupları olduğu model (genelleme etken kütlesi hakkında yapılır) için :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\bar{y}_j = \mu + \alpha_j + \bar{\varepsilon}_j$$

$$\bar{y} = \mu + \bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}$$

dir . $s_{i\check{c}}^2$ değişmeyeceğinden $E(s_{i\check{c}}^2) = \sigma^2$ olur .



$$s_{ara}^2 = \frac{n \sum_{j=1}^k (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{k-1} = \frac{n \sum [(\alpha_j - \bar{\alpha}) + (\bar{\epsilon}_j - \bar{\epsilon})]^2}{k-1}$$
$$= \frac{n \sum (\alpha_j - \bar{\alpha})^2}{k-1} + \frac{n \sum (\bar{\epsilon}_j - \bar{\epsilon})^2}{k-1}$$

$$E(s_{ara}^2) = n\sigma_a^2 + \sigma^2$$

sonuç olarak

$$H_0 \text{ yanlışsa, } E(s_{ara}^2) > E(s_{iç}^2) \quad (1.1.1.1.)$$

$$H_0 \text{ doğruysa, } E(s_{ara}^2) = E(s_{iç}^2) \quad (1.1.1.2.)$$

Test :

s_{ara}^2 'nın $s_{iç}^2$ 'den anlamlı olarak farkedip etmediğini F anlamlılık testini kullanarak anlayabiliriz . Böylece farkın gerçekten örnek çekiminden mi yoksa faktörün mü sonucu etkilediğini araştırabiliriz Bu durumda bize bir anlamlılık testi gerekir. Sonuç olarak gerekli koşullar yerine geldiğinde ,

$$E\left(\frac{KT_g}{N-1}\right) = E\left(\frac{KT_{ara}}{k-1}\right) = E\left(\frac{KT_{iç}}{N-k}\right) = \sigma^2$$

yazılır .

$$E(\chi^2) = s.d. \text{ özelliğinden .}$$

$$E\left(\frac{KT_g}{\sigma^2}\right) = N-1 \quad , \quad E\left(\frac{KT_{ara}}{\sigma^2}\right) = k-1 \quad , \quad E\left(\frac{KT_{iç}}{\sigma^2}\right) = N-k$$

$$F = \frac{\chi_{(v_1)/v_1}^2}{\chi_{(v_2)/v_2}^2} = \frac{\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 / \sigma^2 (k-1)}{\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 / \sigma^2 (N-k)}$$

Not : χ^2 dağılımından (2.1.5.) de söz edilecek



$$F = \frac{s_{ara}^2}{s_{ic}^2}, \quad E(F) = \frac{E(s_{ara}^2)}{E(s_{ic}^2)}$$

olduğuna göre

$$H_0 \text{ doğruysa} \Rightarrow E(F) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$$H_0 \text{ doğru değilse} \Rightarrow E(F) = \frac{\sigma^2 + \text{pozitif bir sayı}}{\sigma^2} > 1 \quad \text{hükümü verilir.}$$

Yorum : v_1, v_2 s.d. leri olmak üzere

$$i) F_{v_1, v_2} > F_{v_1, v_2; \alpha} \Rightarrow H_0 \text{ red, } H_1 \text{ kabul}$$

$$ii) F_{v_1, v_2} \leq F_{v_1, v_2; \alpha} \Rightarrow H_0 \text{ kabul}$$

(i) ' nin yorumu , α eşliğine göre fark anlamlı , faktör sonucu etkiliyor şeklindedir . (ii) ' nin yorumu ise örnekler ortalamaları eşit kütlelerden ya da aynı ana kütlelerden çekilmişlerdir , fark sondajdan ileri geliyor veya kontrol ettiğimiz faktör sonucu anlamlı derecede etkilemiyor biçiminde olacaktır .

1.1.2. V.A. tablosu

| Değişim Kaynağı | Kareler Toplamı | s.d. | Kareler Ortalaması (s^2) | F değeri |
|-----------------|------------------------------------|------|---|---|
| Sınıflar Arası | $\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$ | k-1 | $s_{ara}^2 = KO_{ara} = \frac{\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{k-1}$ | |
| Sınıflar İçi | $\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ | N-k | $s_{ic}^2 = KO_{ic} = \frac{\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{N-k}$ | $F_{k-1, N-k} = \frac{s_{ara}^2}{s_{ic}^2} = \frac{KO_{ara}}{KO_{ic}}$ |
| Toplam | $\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ | N-1 | | $= \frac{\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 / k-1}{\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 / N-k}$ |

KT_g, KT_{ig}, KT_{ara} , hesaplarda kolaylıklardan yararlanarak ve matris de kullanılarak

ifade edilecek olursa :

$$\sum \sum (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum \sum y_{ij}^2 - N\bar{y}^2 = \sum \sum y_{ij}^2 - \frac{Y^2}{N} = KT_g$$

$$\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 = \sum \sum y_{ij}^2 - \sum \sum \bar{y}_j^2 = \sum \sum y_{ij}^2 - \sum n_j \bar{y}_j^2$$

$$= \sum \sum y_{ij}^2 - \sum n_j \left(\frac{Y_j}{n_j}\right)^2 = \sum \sum y_{ij}^2 - \sum \frac{Y_j^2}{n_j} = KT_{ig}$$

$$\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = \sum n_j \bar{y}_j^2 - N\bar{y}^2 = \sum \frac{Y_j^2}{n_j} - \frac{Y^2}{N} = KT_{ara}$$

Özellikle mertebesi büyük olan matrislerle hesaplama yapmanın zorluğu bilgisayar kullanılarak aşılabilir .

1.1.3. Örnek

1 - faktörlü sınıflandırmayı daha iyi anlamak için bir örnek verelim . Üç çeşit kauçuk için görüldüğü gibi ağırlıklar gözlem değeri olarak verilmiştir . 27 ' si normal , 15 'i normale yakın , 12 'si normalden uzak olmak üzere toplam 54 tanesi gözlemlenmiştir . Tabloda yalnızca 3'ü normal , 2'si normale yakın , 1'i normalden uzak olanlar olmak üzere toplam 6 bitki için değerler alınmıştır . Bitkinin ağırlığı üzerinde bitki türünün etkisinin olup olmadığının tahmini ile ilgileneceğiz . Bunun için modelimiz

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

y_{ij} , j. tipin i. bitkisinin ağırlığını göstermektedir . j = 1,2,3 , i = 1,2,....., n_j olmak üzere n_j , j. tipin gözlem sayısı α_j , j. tipin etkisidir .



Veri Tablosu

Kauçuk bitkisinin düzeyleri Ağırlıklar(gözlem değerleri)

| | | | | | |
|--------------------------------|-----|-----|----|-------------|-------------------|
| Normal (1. düzey) | 101 | 105 | 94 | $Y_1 = 300$ | $\bar{y}_1 = 100$ |
| Normale yakın (2. düzey) | 84 | 88 | -- | $Y_2 = 172$ | $\bar{y}_2 = 86$ |
| Normalden uzak (3. düzey) | 32 | -- | -- | $Y_3 = 32$ | $\bar{y}_3 = 16$ |

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 (\sigma^2_a = 0)$$

H_1 : En az ikisi farklı

$$\bar{y} = \frac{Y}{N} = \frac{n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_2 + n_3\bar{y}_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{100 \cdot 3 + 2 \cdot 86 + 1 \cdot 16}{3 + 2 + 1} = \frac{504}{6} = 84$$

$$KT_{ara} = \sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = 3(100 - 84)^2 + 2(86 - 84)^2 + 1(16 - 84)^2 \\ = 768 + 8 + 4624 = 5400$$

$$KT_{ig} = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 = (101 - 100)^2 + (105 - 100)^2 + (94 - 100)^2 + (84 - 86)^2 + \\ + (88 - 86)^2 + (32 - 16)^2 = 1 + 25 + 36 + 4 + 4 + 256 = 326$$

$$KT_g = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y})^2 = (101 - 84)^2 + (105 - 84)^2 + (94 - 84)^2 + (84 - 84)^2 + \\ + (88 - 84)^2 + (32 - 84)^2 = 5726$$

veya

$$KT_g = KT_{ara} + KT_{ig} = 5400 + 326 = 5726$$



V.A. Tablosu (Tablo 1 'in hesaplanmış değerleri ile verilí))

| Değişim Kaynağı | Kareler Toplamı | s.d. | Kareler Ortalaması (s^2) | F değeri |
|-----------------|-------------------|---------|------------------------------|--|
| Sınıflar arası | $KT_{ara} = 5400$ | $k-1=2$ | $KO_{ara} = \frac{5400}{2}$ | |
| Sınıf içi | $KT_{i} = 326$ | $N-k=3$ | $KO_{i} = \frac{326}{3}$ | $F_{k-1,N-k} = \frac{S_{ara}^2}{S_{i}^2}$ |
| Toplam | $KT_g = 5726$ | $N-1=5$ | | $F_{2,3} = \frac{5400/2}{326/3} = 24,85$ |

$\alpha = 0,05$ alalım



$F_{2,3} = 24,85$, $F_{2,3;0,05} = 9,55$ ve $24,85 > 9,55$ olduğundan H_0 red edilir .

Dolayısıyla H_1 kabul edilir . Sayfa 12 ' de yapılan yoruma dayanarak faktörün etkisinin var olduğunu söyleyebiliriz . Yani bitki türünün , bitkinin ağırlığı üzerinde etkisi önemsenecek derecededir . Tek faktörlü bu model için verdiğimiz örneğin çözümüne geçmeden önce kısaca "genelleştirilmiş ters" kavramı üzerinde durulacaktır .Çünkü çözüm için yani β ' nın tahmini için genelleştirilmiş ters matrislerden yararlanacağız .

Bilindiği gibi faktörlerin nitel olması durumunda tek çözüm yoktur . $Y = X\beta + \varepsilon$ şeklindeki bir lineer denklem sisteminden elde edilen $(X'X)\hat{\beta} = X'Y$ normal denkleminde özel yapısı olan $X'X$ matrisinin rankı tam olmayıp klasik anlamda tersi yoktur . İşte aradığımız bilinmeyen parametreler vektörü β için tek bir çözüm olmadığından , bazı yazarlar pek çok kısıtlamalar koyarak çözüm aramaya gitmişlerdir . Bu ise bazı sakıncalar doğurmuştur .

Yakın zamanlarda rankı tam olmayan modeller için uygulanmakta olan "genelleştirilmiş ters matrislerle çözüm" yöntemi bize kısıtlamalara gerek kalmadan çözümü elde etme olanağı vermektedir . İşte bu nedenle konu üzerinde durmak gerektiğini duyduk .

1.2. Genelleştirilmiş Ters Kavramı

Bu konuda yapılan ilk ciddi çalışmalar 1920' lerdedir . 1955' de yayınlanan Penrose' un yapıtı ile genelleştirilmiş ters matris tanımı yapılabilmıştır . Yapıtında bir A matrisi ne biçimde olursa olsun (kare ya da dikdörtgen) aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa (Pratikte bu dört koşulun sağlanması çok zor olduğundan daha sonraları ilk koşulun sağlanması yeterli sayılmıştır) A^{-1} ile göstereceğimiz tek bir genelleştirilmiş ters matrise haizdir .

- 1) $AA^{-1}A = A$
- 2) $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$
- 3) $(AA^{-1})' = AA^{-1}$
- 4) $(A^{-1}A)' = A^{-1}A$

Not : Genelleştirilmiş ters matrislerle çözüm için daha fazla bilgiyi M.İpek'in " Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olmayan Modellere Uygulama " adlı çalışmasından almak mümkündür .



A^{-1} , genelleştirilmiş ters matrisi bilindiği gibi lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmaktadır . Ancak yukarıdaki dört koşulu aynı anda sağlayan bir matrisin hesabı , boyut büyüdükçe daha da zordur . Dolayısıyla Penrose ' un bu dört koşulundan yalnızca 1. sini sağlayan herhangi bir matris $AX = Y$ lineer denklem sistemine çözüm getireceğinden biz bundan sonra böyle bir matrisi arayacağız . Bu matrisi G ile gösterip bu G matrisine " A^{-1} ' nün bir genelleştirilmiş ters matrisi " (*) diyeceğiz . Anlaşılacağı üzere tek bir genelleştirilmiş ters yoktur. Hangi genelleştirilmiş ters bulunursa bulunsun bazı sonuçlar değişmez (invariant) kalır

1.2.1. G^{-1} nin Özellikleri

$H = GA$ olsun , $G = A^{-1}$ için $H = I$ olacağı açıktır .

1) $r(H) = r(A) = r$

2) $r(G) \geq r(A)$

3) $H^2 = H$

4) G, A^{-1} ' nün herhangi bir g-terisi ise , $G', A' ' nün herhangi bir genelleştirilmiş$

tersidir .

Bu özelliklerin oldukça kısa olan ispatlarını verelim :

1) $r(H) = r(GA) \leq r(A)$ ve $r(A) = r(AGA) = r(AH) \leq r(H)$

Buradan

$$r(H) = r(A) = r$$

olur .

2) $r(A) = r(AGA) \leq r(G)$

3) $H^2 = HH = GAGA = GA = H$, (H , kuvveti kendine eşit bir matristir)

(*) Bir A matrisinin genelleştirilmiş tersi için çeşitli yazarlar değişik notasyonlar kullanılmıştır. Örneğin "g-ters" , " A^{-1} " , " \bar{A} " gibi simgelerle göstermişlerdir . Biz ise Searle ' ün ve M.İpek ' in çalışmalarından esinlenerek ve daha anlamlı geldiği için " G " harfini kullanacağız



4) $AGA = A$ eşitliğinin her iki yanının transpozesi alınırsa ,

$$(AGA)' = A' \text{ den } A'G'A' = A'$$

elde edilirki bu Penrose ' un 1. koşulunun sağlandığını gösterir . G', A' ' nün genelleştirilmiş ters matrisidir .

1.2.2. Genelleştirilmiş Tersin Hesabı

1.2.2.1. Genel Yöntem

Herhangi bir matrisin köşegen (diagonal) formuna indirgenebileceğini biliyoruz . Bu formu Δ ile gösterirsek ,

$$PAQ = \Delta = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , A_{m \times n}$$

yazarız . P ve Q satır ve sütunlara ilişkin elemanter işlemcilerin çarpımlarıdır . PAQ ' nun mertebesi A ' nın mertebesi ile aynıdır . D_r , r elemanı sıfırdan farklı olan bir köşegen matris , sıfırlar ise uygun mertebeden sıfır matrislerdir .

$$n = q = r \text{ ise } \Delta = D_r$$

$$r = q < n \text{ ise } \Delta = \begin{bmatrix} D_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = n < q \text{ ise } \Delta = \begin{bmatrix} D_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$r < q \text{ ve } r < n \text{ ise } \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir .



Δ^{-1} ile göstereceğimiz bir matrisi aşağıdaki gibi tanımlayalım :

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = Q\Delta^{-1}P$$

şeklinde tanımlanan bir matris A matrisinin bir genelleştirilmiş tersi olacaktır .

$$\Delta\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta \quad (1.2.2.1.1.)$$

olup

$$\Delta\Delta^{-1}\Delta = \Delta, \Delta^{-1}\Delta\Delta^{-1} = \Delta^{-1} \quad (1.2.2.1.2.)$$

dir . Yani Δ^{-1}, Δ 'nın Δ , Δ^{-1} 'in genelleştirilmiş ters matrisleridir . $PAQ = \Delta$ eşitliğine dayanarak (P ile Q elemanter işlemlerin çarpımları olduklarından tekil değerlerdir)

$$A = P^{-1}\Delta Q^{-1} \quad (1.2.2.1.3.)$$

yazabiliriz .

$$AGA = (P^{-1}\Delta Q^{-1})(Q\Delta^{-1}P)(P^{-1}\Delta Q^{-1}) = (P^{-1}\Delta\Delta^{-1}\Delta Q^{-1}) = P^{-1}\Delta Q^{-1} = A$$

(1.2.2.1.2. ve 1.2.2.1.3. den)

özelliği gerçekleşir . Bu şekilde bulunan genelleştirilmiş tersin (G ' nin) iki özelliğinden bahsedelim .

$$i) GAG = G$$

Gerçekten

$$GAG = (Q\Delta^{-1}P)(P^{-1}\Delta Q^{-1})(Q\Delta^{-1}P) = Q\Delta^{-1}\Delta\Delta^{-1}P = Q\Delta^{-1}P = G$$

(1.2.2.1.2. den)

yani bu sonuç bize Penrose ' un 2. koşulunun da gerek olmadığı halde gerçekleştiğini gösterir.

$$ii) A , (n, q) \text{ boyutlu bir matris , } H = GA \text{ olduğuna göre } (H - I_q) ' \text{ nin rankı } (q-r)$$

dir Yani

$$r(H - I_q) = q - r$$

dir . Gerçekten



$H = GA$ eşitliğinde $G = Q\Delta^{-1}P$ ve $A = P^{-1}\Delta Q^{-1}$ değerlerini yerine koyarsak ,

$$H = (Q\Delta^{-1}P)(P^{-1}\Delta Q^{-1}) = Q\Delta^{-1}\Delta Q^{-1}$$

elde edilir .

$$\Delta^{-1}\Delta = \Delta\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

göz önüne alınırsa ,

$$H = Q \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

yazılır .

$$H - I_q = Q \left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I_q \right\} Q^{-1}$$

ifadesinde Q elemanter işlemcilerin çarpımı olduğundan sağdan ve soldan Q ve Q^{-1} ile çarpımlar $(H - I_q)$ ' nun rankını değiştirmez . Dolayısıyla

$$r(H - I_q) = q - r$$

elde edilir .

1.2.3. Bazı Teoremler

Teorem 1.2.3.1. : $AX = Y$ denklem sisteminin bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul , herhangi bir G için $AGY = Y$ olmasıdır .

Teorem 1.2.3.2. : Ancak ve ancak $AGA = A$ ise , tutarlı $AX = Y$ fonksiyonunun çözümü $X^* = GY$ dir .

Teorem 1.2.3.3. : $AGA = A$, $H = GA$ ise $AX = Y$ denklem sisteminin bir çözümü $X_0 = GY + (H - I)Z$ dir . (Z , q . mertebeden herhangi bir vektördür)



1.2.4. Genelleştirilmiş Tersin Bulunuşuna Dair Bir Örnek

Genelleştirilmiş tersin nasıl bulunduğuna dair sayısal bir örnek için aşağıdaki gibi bir A matrisini göz önüne alalım :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = Q\Delta^{-1}P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Penrose ' un birinci koşulu sağlandığından G 'yi A 'nın bir genelleştirilmiş tersi olarak alırız .

1.3. Normal Denklemler

Rankı tam olmayan modelimiz yan koşulları ile birlikte aşağıdaki şekilde verilir .

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Burada

Y : $(n, 1)$ boyutlu gözlemler vektörü

X : (n, q) boyutlu katsayılar matrisi

β : $(q, 1)$ boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü

ε : $(n, 1)$ boyutlu gözlenemeyen hatalar vektörü

dür .

Yan koşullar :

i) $E(\varepsilon) = 0, \text{var}(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon')$

ii) ε_{ij} ' ler bağımsız ve $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$

iii) $D(\varepsilon) = N(0, \sigma^2 I_n)$, (normal dağılır)

Tüm model tam ranklı regresyon modeli gibidir . Fark X matrisinin yapısından ileri gelir . (iii) koşulu varsa β parametre vektörünün tahmini için " en çok olabilirlik " yöntemine , bu koşul yoksa " en küçük kareler " yöntemine başvurulur . Her iki yöntem bizi

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y$$

normal denklemlerine götürür . Tam ranklı regresyon modellerinde normal denklemlerin tek bir çözümü vardır :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

β , kestirilebilen bir parametredir . Yani $E(\hat{\beta}) = \beta$ dir .



Tam ranklı olmayan modeller için X matrisinin incelenmesi halinde elemanların $(0,1)$ gösterge değerlerinden oluştuğu gözlenir . Bu nedenle X matrisine " gösterge matrisi " adı verilir . $(0,1)$ ' lerin dağılışı gözlemlerin ne biçimde sınıflandığını ortaya koyar . α_j ' nin bir denklemde bulunup bulunmadığı kolaylıkla görülür. Faktörün etkisi söz konusu değilse μ (genel ortalama) her denklemde yer alır ve X matrisinin 1. sütunu 1' lerden oluşur . Rankın tam olmaması nedeniyle 1. sütun , her faktöre ilişkin sütunların toplamına eşittir .Yine X matrisi tam ranklı olmayınca

$$r(X) = r(X'X)$$

dir . Buradan $X'X$ simetrik matrisi de tam ranklı değildir . Dolayısıyla klasik anlamda tersi alınamaz .

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y$$

normal denklemlerini gerçekleyen $\hat{\beta}$ vektörü için iki durum söz konusudur :

- 1) Yukarıdaki denklemleri sağlayan $\hat{\beta}$ vektörleri yoktur ,
- 2) Yukarıdaki denklemleri sağlayan sonsuz $\hat{\beta}$ vektörleri vardır .

Bu ayrım bizi denklemlerin tutarlılığına götürür .

1.3.1. Normal Denklemlerin Tutarlılığı

$(X'X)\hat{\beta} = X'Y$ sisteminin tutarlı olması demek , $X'X$ matrisinin satırları arasındaki lineer bağlantının $X'Y$ vektörünün satırları arasında da bulunması demektir . Ancak $X'X$ matrisinin satırları arasında var olduğu söylenen bu ilişki ile $X'Y$ ' nin satırları arasındaki ilişkinin aynı olması gerekir .

Tek faktörlü model olan örneğimizde , 1.satır her faktöre ilişkin satırların (sütunların) toplamına eşittir . Ayrıca $X'Y$ vektörü için de aynı kural geçerlidir. Yani $X'Y$ 'de y_{ij} değerlerinin toplamını veren ilk eleman , her faktöre ilişkin diğer elemanların toplamına eşittir O halde $X'X$ ' in satırları arasında var olan lineer bağlantı $X'Y$ ' nin satırları arasında da vardır . Normal denklemlerin tutarlı olduğu böylece anlaşılır . Sonuç olarak $AX = Y$ lineer denklem sisteminin birden çok çözümü ancak tutarlılık varsa mümkündür .

1.3.2. Genelleştirilmiş Tersle Normal Denklemlerin Çözümü

Şimdi örneğimize kaldığımız yerden devam edelim . Tek bir faktör olduğundan , 1-faktörlü modele uydurmamız en doğru seçim olur . Veri tablosundan görüleceği üzere , kauçuk bitkisi faktör , bu bitkinin türleri olan normal , normale yakın , normalden uzak faktör düzeyleridir .

Model

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

dir . Modeli yeniden gözlem değerlerine dayanarak aşağıdaki biçimde yazabiliriz .

$$y_{11} = 101 = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{11}$$

$$y_{21} = 105 = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{21}$$

$$y_{31} = 94 = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{31}$$

$$y_{12} = 84 = \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{12}$$

$$y_{22} = 88 = \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{22}$$

$$y_{13} = 32 = \mu + \alpha_3 + \varepsilon_{13}$$

Bu defa modeli (1,0) gösterge değerlerini kullanarak yazalım :

$$y_{11} = 101 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) + \varepsilon_{11}$$

$$y_{21} = 105 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) + \varepsilon_{21}$$

$$y_{31} = 94 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) + \varepsilon_{31}$$

$$y_{12} = 84 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(0) + \varepsilon_{12}$$

$$y_{22} = 88 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(0) + \varepsilon_{22}$$

$$y_{13} = 32 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \alpha_3(1) + \varepsilon_{13}$$

Modelin matrisel formu

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ y_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 \\ 105 \\ 94 \\ 84 \\ 88 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (1.3.2.1.)$$



$$X'X = \begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & n_3 \\ n_1 & n_1 & 0 & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & 0 \\ n_3 & 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıda görüldüğü gibi $X'X$ matrisinin 1. satırı diğer üç satırın toplamına eşittir .

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101 \\ 105 \\ 94 \\ 84 \\ 88 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$X'Y$ vektörüne bakıldığında , $X'X$ matrisinin satırları arasındaki ilişkinin aynıının $X'Y$ 'nin satırları arasında var olduğu anlaşılır . Yani $X'Y$ vektöründe de birinci eleman diğer üç elemanın toplamına eşittir . Sistem tutarlıdır . $X'X$ matrisinin genişletilmiş tersi G olmak üzere $\hat{\beta} = GX'Y$ dir . Örnek için G 'yi hesaplayalım :

G 'yi hesaplariken genel bir yöntem verilmişti . Ancak katsayılar matrisinin simetrik olması gibi bazı özel durumlarda bazı özel yöntemler uygulanabilir . A matrisi (örnekte $X'X$ matrisi) simetrik olsun . A matrisinin r . mertebeden tekil olmayan bir işaretli minörü bulunur . Bu minörün tersi (klasik anlamda) ve sonra devriği oluşturulur . A matrisi içinde yerine konular Diğer terimler sıfır yapılır .

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

idi . Tam ranklı bir işaretli minör ,

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun . N 'nin klasik anlamda tersi :

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir . N^{-1} simetrik olduğundan $(N^{-1})' = N^{-1}$ dir . Dolayısıyla

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.2.)$$

olarak elde edilir . Penrose' un 1. koşulu yani $X'XGX'X = X'X$ koşulu gerçekleşir .
Bilinmeyen parametreler vektörümüz ,

$$\hat{\beta} = GX'Y = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 516 \\ 192 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.3.)$$

olarak elde edilmiş oldu . Diğer çözümler için $H = GX'X$ ifadesi hesaplanarak
 $\hat{\beta} = GX'Y + (H - I)Z$ tahmincileri (kestirimcileri) elde edilir .

1.4. Simetrik $X'X$ Matrisinin Genelleştirilmiş Tersinin Özellikleri

1. Özellik : G , $X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi ise G' de $X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersidir . Gerçekten

$$X'XGX'X = X'X$$



eşitliğinin her iki yanının transpozmesini alırsak ,

$$(X'XGX'X)' = (X'X)'$$

buradan

$$X'XG'X'X = X'X$$

elde edilir ki bu bize G' matrisinin $X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi olduğunu gösterir

2. Özellik : GX' , X matrisinin bir genelleştirilmiş tersi ise XG' de X' matrisinin bir genelleştirilmiş tersidir . Gerçekten

Hipotezden $XGX'X = X$ olduğunu biliyoruz . Bu eşitliğin her iki yanının transpozmesini alırsak ,

$$(XGX'X)' = X' \Rightarrow X'XG'X' = X'$$

yazılır . Bu bize XG' matrisinin , X' ' nün bir genelleştirilmiş tersi olduğunu gösterir .

3. Özellik : XGX' , G ne olursa olsun değişmezdir .

Gerçekten K başka bir genelleştirilmiş ters olsun .

$$XGX'X = X \quad (2. \text{ özellikten })$$

$$XKX'X = X \quad (2. \text{ özellikten })$$

yazılır . Buradan

$$XGX' = XKX'$$

dir .

4. Özellik : G , simetrik olsun olmasın XGX' simetriktir .

Gerçekten

$$(XGX')' = XG'X' = XGX' \quad (3. \text{ özellikten })$$

XGX' transpozese kendine eşit bir matris olduğundan simetriktir .

5. Özellik : $(XGX')^2 = XGX'$

Gerçekten

$$XGX'XGX' = XGX' \quad (2. \text{ özellikten })$$



XGX' kuvveti kendisine eşit olan bir matris olduğundan idempotent matristir .

6. Özellik : $(I - XGX')^2 = (I - XGX')$

Gerçekten

$$\begin{aligned}(I - XGX')^2 &= (I - XGX')(I - XGX') = I - XGX' - XGX' + XGX'XGX' \\ &= I - XGX' - XGX' + XGX' \quad (5. özellikten) \\ &= I - XGX'\end{aligned}$$

1.5. İndirgeme

Bu başlık altında önce $E(Y)$ ' nin tahminine bakalım :

$$E(y) = \hat{y} = X\hat{\beta} = XGX'Y$$

Y gözlemler vektörü olup , hangi genelleştirilmiş ters seçilirse seçilsin bağımsızdır .

Kareler toplamının kalıntılardan (rezidüel) doğan hatası (SSE) :

$$\begin{aligned}SSE &= (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) \\ &= \{Y - X[GX'Y + (H - I)Z]\}' \{Y - X[GX'Y + (H - I)Z]\} \\ &= [Y - XGX'Y]' [Y - XGX'Y] \\ &= [(I - XGX')Y]' [(I - XGX')Y] \\ &= Y'(I - XGX')(I - XGX')Y = Y'(I - XGX')Y \\ &= (Y' - Y'XGX')(Y - XGX'Y) \\ &= Y'Y - Y'XGX'Y - Y'XGX'Y + Y'XGX'XGX'Y \\ &= Y'Y - Y'XGX'Y = Y'Y - Y'X\hat{\beta} = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y\end{aligned}$$

olarak elde edilir .Burada

$$SST = Y'Y \quad \text{ve} \quad SSR = Y'XGX'Y = Y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'Y$$

dir .

$SST = SSR + SSE$ eşitliğinde SST gözlem değerlerinin karelerinin toplamını , SSE kalıntıların kareleri toplamını ve SSR modelden dolayı karelerin toplamını gösterir . SSR 'yi kullanacağımız modele göre ifade ederiz . Böylece aynı veri grubuna göre farklı modelleri karşılaştırabiliriz ve değişimlerin de kaynağına inmiş oluruz . Bu bizi SST ile SSR ' de



indirgeme kavramına götürür . Bu yeni kavramları matris notasyonunu da kullanarak aşağıdaki tabloda gösterdik .

Kareler Toplamının Parçalanışı

$$SSM = N\bar{y}^2$$
$$SSR = Y'XGX'Y \quad SSR_m = \hat{\beta}'X'Y - N\bar{y}^2$$
$$SSE = Y'(I - XGX')Y \quad SSE = Y'(I - XGX')Y$$

$$SST = Y'Y \quad SST_m = Y'Y - N\bar{y}^2$$

Burada SSM , N gözlem sayısını göstermek üzere ortalamaların karelerinin toplamını gösterir .
R () sembolü :

1-faktörlü modelden daha karmaşık modellerin düşünülmesi bize aynı örnek data üzerinde farklı modellerden hangisinin daha elverişli olduğunu karşılaştırmak bakımından yol gösterir .
 $SSE = SST - SSR$ özdeşliğindeki SSR terimi için , seçilen herhangi bir modele uygunluk sağlamak amacıyla kareler toplamında yapılan indirgemedir denir . SSR modele göre değişir . Aynı zamanda SSR ' ye söz konusu model için hesaplanmış y değerlerinin sapmalarının bir ölçüsüdür de denir . Farklı modellerin birbirine uygunluğu için tanımlanmış olan SSR farklı değerlerdedir . SSR için ilk söylediğimiz gibi indirgeme tanımının daha uygun olduğunu düşünerek ve İngilizcedeki " reduction " sözcüğünün ilk harfi ile göstermek üzere , R () notasyonu kullanılacaktır . Örneğin , verimize $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$ modeli uydurulmuş olsun Burada kareler toplamındaki indirgeme $R(\mu, \alpha)$ ' dir . Ayrıca μ ve α modelin parametreleridir . Benzer şekilde $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$ modeline uygunluk için kareler toplamındaki indirgeme $R(\mu, \alpha, \beta)$ ve bu iç-içe (nested) modele uygunluk için olan SSR yani kareler toplamındaki indirgeme $R(\mu, \alpha, \beta : \alpha)$ dir . $\beta : \alpha$ sembolü , β -faktörünün α -faktörü içinde yuvalandığını gösterir . Model daha karmaşıklaştığında yine R () notasyonu kareler toplamında indirgeme anlamında kullanılır .

$y_i = \mu + e_i$ modelinin normal denklemleri $N\mu = y$ 'dir . Bunun için kareler toplamında indirgeme kısa notasyonla $R(\mu)$, $N\bar{y}^2$ ' dir . Aynı zamanda $N\bar{y}^2$ bütün modellerde SSM olarak ifade edildiğinden

$$R(\mu) = N\bar{y}^2 = SSM$$

yazılır .



$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$ 1-faktörlü sınıflandırma modeli için kareler toplamından indirgeme yani $R(\mu, \alpha)$,

$$SSR = \hat{\beta}' X' Y = \sum \bar{y}_i y_i$$

göz önüne alınarak,

$$SSR = R(\mu, \alpha) = \sum \frac{y_i^2}{n_i}$$

olarak elde edilir.

$$SSR_m = SSR - SSM = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$$

şeklinde ifade edilen bu farkın terimlerinin biri yalnızca μ 'yü, diğeri μ 'yü ve α - faktörünü içerir. $R(\mu, \alpha) - R(\mu)$ farkı modele α 'nın eklenmesi sonucu uygunluk için kareler toplamındaki indirgemeyi gösterir. Farkı göstermek üzere $R(\alpha / \mu)$ sembolü kullanılacaktır. Yani,

$$R(\alpha / \mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$$

dür. Bu notasyon kolayca genişletilebilir. Örneğin,

$$R(\alpha / \mu, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta)$$

modele μ ve β 'dan sonra α 'nın katılması sonucu modelde uygunluk sağlamak amacıyla kareler toplamında yapılan indirgemeyi gösterir.

Tablo 1a) $Y = X\beta + \varepsilon$ Denkleminin Düzeltilmiş Modeli İçin Varyans Analizi Tablosu

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|-------------------|------|--|-----------------------------|------------------------------|
| Genel Ortalama | 1 | $SSM = N\bar{y}^2$ | $MSM = \frac{SSM}{1}$ | $F(M) = \frac{MSM}{MSE}$ |
| Düzeltilmiş Model | r-1 | $SSR_m = \hat{\beta}' X' Y - N\bar{y}^2$ | $MSR_m = \frac{SSR_m}{r-1}$ | $F(R_m) = \frac{MSR_m}{MSE}$ |
| Kalıntı Hataları | N-r | $SSE = Y'Y - \hat{\beta}' X' Y$ | $MSE = \frac{SSE}{N-r}$ | |
| Toplam | N | $SST = Y'Y$ | | |

Örneğimiz için normal denklemler (1.3.2.) 'de verilmiştir . $X'X$ için bir genelleştirilmiş ters (G) ve H aşağıdaki gibi idi .

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}' = GX'Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.3. ' den)$$

$$SSR = \hat{\beta}' X'Y = [0 \ 100 \ 86 \ 32] \begin{bmatrix} 504 \\ 300 \\ 172 \\ 32 \end{bmatrix} = 45816$$

$$(\hat{Y})' = (X\hat{\beta})' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} \right\}' = [100 \ 100 \ 100 \ 86 \ 86 \ 32]$$

$$SST = \sum y^2 = Y'Y = [101 \ 105 \ 94 \ 84 \ 88 \ 32] \begin{bmatrix} 101 \\ 105 \\ 94 \\ 84 \\ 88 \\ 32 \end{bmatrix} = 45886$$

$$SSM = Ny^2 = 6(84)^2 = 42336$$

$$SSR_m = SSR - SSM = 45816 - 42336 = 3480$$

$$SST_m = SST - SSM = 45886 - 42336 = 3550$$

$$SSE = SST - SSR = 45886 - 45816 = 70$$



Tablo 1b)

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|-----------------|------------|-------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| Model | $r = r(X)$ | $SSR = \hat{\beta} X'Y$ | $MSR = \frac{SSR}{r}$ | $F(R) = \frac{MSR}{MSE}$ |
| Kalıntı Hatası | $N-r$ | $SSE = Y'Y - \hat{\beta} X'Y$ | $MSE = \frac{SSE}{N-r}$ | |
| Toplam | N | $SST = Y'Y$ | | |

Tablo 1c)

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|-----------------|---------|--|-----------------------------|------------------------------|
| Model | $r - 1$ | $SSR_m = \hat{\beta} X'Y - N\bar{y}^2$ | $MSR_m = \frac{SSR_m}{r-1}$ | $F(R_m) = \frac{MSR_m}{MSE}$ |
| Kalıntı Hatası | $N-r$ | $SSE = Y'Y - \hat{\beta} X'Y$ | $MSE = \frac{SSE}{N-r}$ | |
| Toplam | N | $SST_m = Y'Y - N\bar{y}^2$ | | |



Hesaplar yapıldıktan sonra tabloların bir arada gösterilişi :

1a)

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|-----------------|------|-----------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| Ortalama | 1 | $SSM = 42336$ | $MSM = \frac{42336}{1}$ | $F(M) = \frac{42336}{23,3} = 1814,4$ |
| Model | 2 | $SSR_m = 3480$ | $MSR_m = \frac{3480}{2} = 1740$ | $F(R_m) = \frac{1740}{23,3} = 74,3$ |
| Kalıntı Hatası | 3 | $SSE = 70$ | $MSE = 70/3 = 23,3$ | |
| Toplam | 6 | $SST = 45886$ | | |

1b)

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|-----------------|------|-----------------|---------------------------------|----------------------------------|
| Model | 3 | $SSR = 45816$ | $MSR = \frac{45816}{3} = 15272$ | |
| Kalıntı Hatası | 3 | $SSE = 70$ | $MSE = \frac{70}{3} = 23,3$ | $F(R) = \frac{MSR}{MSE} = 654,5$ |
| Toplam | 6 | $SST = 45886$ | | |

1c)

| | | | | |
|----------------|---|----------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| Model | 2 | $SSR_m = 3480$ | $MSR_m = \frac{3480}{2} = 1740$ | |
| Kalıntı Hatası | 3 | $SSE = 70$ | $MSE = 70/3 = 23\frac{1}{3}$ | $F(R_m) = \frac{MSR_m}{MSE} = 74,3$ |
| Toplam | 5 | $SST_m = 3550$ | | |

Tablo 1b) ' de $F(R)$ anlamlı çıkarsa $E(Y) = X\beta$ modeli veriler ile çelişmez sonucuna varılır . Hipotez $H_0: X\beta = 0$ şeklindedir . Bu sonuç modelin en uygun bir model olduğunu göstermez . Başka faktörler tek başlarına ya da birlikte ele alındıklarında Y 'deki değişimi daha iyi açıklayabilirler . Ayrıca lineer olmayan modeller de söz konusu olabilir . Ancak bu gibi durumlar ,



varacağımız sonucu yani Y 'deki değişimin büyük bölümünü modelimizin açıkladığı sonucunu bozamaz .

Tablo 1a) ' da $F(M)$ testinin anlamı ortalamanın Y 'deki değişime etkisi olup olmadığını araştırmaktadır . Buna $\mu = 0$ testi gözüyle bakılabilir . $F(R_m)$ yine $E(Y) = X\beta$ modelinin testidir . Ama ortalamanın üzerinde bir testtir . Yani $y_i = \mu + \varepsilon_i$ modeline faktörü katmakla Y 'deki değişim daha fazla açıklanabilir . $F(R_m)$ anlamlıysa , faktör Y 'deki değişimi açıklıyor ya da tümü olmasa da en az bir α sıfırdan farklı yorumu yapılabilir . Önce $F(M)$ sonra da $F(R_m)$ anlamlı bulunmuşsa ortalamadan başka faktöründe Y 'deki değişime katkısı var sonucuna varılır ve $y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$ modeli söz konusu olur . $F(M)$ anlamsız çıkmışsa $F(R_m)$ anlamlıysa ortalamanın sıfır olduğu ama modelin gerisinin Y 'deki değişimi açıkladığı sonucuna varılır . $F(R_m)$ anlamsız $F(M)$ anlamlı ise $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ geçerlidir .

Tablo 1c) ' de sadece faktörün etkisine bakılır .

Yorum : Tablo 1a) ' da

$$F_{1,3,0.05}(M) = 10,13 < 1814,4 \quad \text{ve} \quad F_{2,3,0.05}(R_m) = 9,55 < 74,3$$

olduğundan H_0 red edilir . Bunun anlamı ortalamadan başka faktörün de Y 'deki değişime katkısı var şeklinde olacaktır . Tablo 1b) 'de

$$F_{3,3,0.05}(R) = 9,28 < 654,51$$

olduğundan H_0 red edilir . Yani $E(Y) = X\beta$ modeli veriler ile çelişmez sonucuna varılır .

Tablo 1c) 'de

$$F_{2,3,0.05}(R_m) = 9,55 < 74,3$$

olduğundan faktörün etkisine bakılır .

1.6. Tahmin Edilebilir (Kestirilebilir) Fonksiyonlar

Varyans analizinde çok önemli bir yeri olan konulardan biri de kestirilebilir fonksiyonlardır . Rankı tam olmayan modellerden elde edilen normal denklemlerden β 'nın bilinmeyen parametreleri istenilen şekilde tahmin edilemez . Yani $\hat{\beta}$, β 'nın sapmasız (yansız) tahmin edicisi değildir . Bununla birlikte β 'nın kendisi olmasa da bazı lineer fonksiyonları sapmasız olarak tahmin edilebilir .



Tanım 1 : Parametrelerin bir lineer fonksiyonu ($l'\beta$), gözlem değerleri vektörü Y ' nin beklenen değerinin bazı lineer fonksiyonlarına $[k'E(Y)]$ özdeş olarak eşit yapılabiliyorsa bu lineer fonksiyona kestirilebilir fonksiyon denir . Yani ,

$$l'\beta = k'E(Y) \Rightarrow l'\beta$$

tahmin edilebilirdir .

Teorem 1 : $l'\beta$, β ' nin bir fonksiyonu olsun . Ancak ve ancak $l' = k'X$ eşitliğini sağlayan bir k' vektörü varsa $l'\beta$ tahmin edilebilir bir fonksiyondur .

$$l'\beta = k'X\beta = k'E(Y) \quad (\text{tanımdan})$$

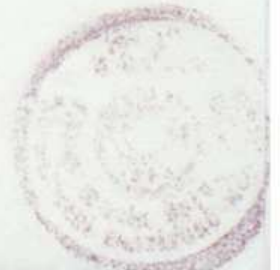
Teorem 2 : l' , $(1,q)$ boyutlu bir sabit vektör olmak üzere β ' nin $l'\beta$ ile göstereceğimiz lineer kombinasyonu ancak ve ancak aşağıdaki koşullardan herhangi biri gerçekleşirse , tahmin edilebilir bir fonksiyondur .

- 1) $l' = k'X$ olacak şekilde bir k' varsa ,
- 2) $r(X'XI) = r(X'X) = r$ ise ,
- 3) $X'Xp = l'$ eşitliğini sağlayan bir p çözüm vektörü varsa
- 4) $r(X'I) = r(X') = r$ ise ,
- 5) $l'G'X'X = l'GX'X = l'H = l'$ ise ya da $X'XG'l = X'XGI = l$

ise

Bazı kestirilebilir fonksiyonlar :

- a) $E(y_{ij})$ kestirilebilirdir .
- b) $E(y_{ij}) = \mu + \alpha_j$ kestirilebilirdir .
- c) $E(Y) = X\beta \Rightarrow q'X\beta$ lineer birleşimi kestirilebilirdir .
- d) $X'X\beta$ kestirilebildiği gibi bunun herhangi bir lineer kombinasyonu $s'X'X\beta$ da kestirilebilirdir .
- e) Lineer birleşimlerin lineer birleşimleri de kestirilebilirdir .



1.6.1 Kestirilebilirlik İçin Test

Önce hangi koşul altında test yapılabileceğinin yanıtı aranacaktır . Çünkü kestirilebilir fonksiyonlar anlatılırken her fonksiyonun test edilemeyeceği söylenmişti .Kısaca anımsanacak olursa $l'\beta = k'E(Y)$ özdeşliğinin sağlanması halinde $l'\beta$ tahmin edilebiliyordu . İşte bu şekilde kestirilebilir olan fonksiyonları test etmek mümkün olabilmektedir .

Varsayım :

$$H: l'\beta = m , \quad l'H = l'$$

ya da

$$H: L'\beta = M , \quad L'H = L' , \quad (r(L') = s \text{ ise } s \leq r \text{ olmalı})$$

Yukarıdaki varsayımda yer alan l' , vektörü L' , matrisi göstermektedir . Vektör ya da matris olması durumu test edilmesi istenen denklem sayısına göre değişir . Sonuç olarak yukarıda verilen varsayımın sağlanması halinde test yapmak mümkün olur .

Lemma :

- $E(l'\hat{\beta}) = l'\beta$
- $v(l'\hat{\beta}) = l'Gl\sigma^2$
- $E(L'\hat{\beta} - M) = L'\beta - M$
- $v(L'\hat{\beta} - M) = L'GL\sigma^2$

$E(l'\hat{\beta})$, bilinmeyen parametreler vektörü β ' nin tahminleyicisinin , lineer birleşiminin beklenen değerini ; $v(l'\hat{\beta})$ ise varyansını göstermektedir .

b) ' nin ispatı :

$$\begin{aligned} v(l'\hat{\beta}) &= l'v(\hat{\beta})l , \quad [v(aY) = a^2v(Y)] \\ v(\hat{\beta}) &= v(GX'Y) = GX'v(Y)XG' \\ &= GX'\sigma^2IXG' \\ &= GX'XG'\sigma^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} v(l'\hat{\beta}) &= l'GX'XG'\sigma^2l \quad (\text{Teo.2' de } l' \text{ den}) \\ &= l'GX'XG'X'k\sigma^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= I'GX'XG'kX'\sigma^2 \quad (\text{Teo.2' de } 5' \text{ den}) \\ &= I'GkX'\sigma^2 = I'GI\sigma^2 \end{aligned}$$

Kestirilebilir fonksiyonlar için temel varsayımlar :

- 1) $D(Y) \approx N(X\beta; \sigma^2 I)$
- 2) $D(\hat{\beta}) \approx N(H\beta; G'X'XG\sigma^2)$
- 3) $D(L'\hat{\beta} - M) \approx N(L'\beta; L'GL\sigma^2)$

Burada N, normal dağılımı göstermektedir.

F istatistiği:

$$F(H) = \frac{Q/s}{SSE/(N-r)}$$

Q kuadratik form olmak üzere,

$$Q = SS_H = (L'\hat{\beta} - M)(L'GL)^{-1}(L'\hat{\beta} - M)$$

olarak yazılır. L matrisinin satır sayısı, rankına eşit olduğundan $(L'GL)^{-1}$ normal terdir.

Özel olarak $L'\beta = 0$ ise,

$$Q = \hat{\beta}'L(L'GL)^{-1}L'\hat{\beta}$$

şekindedir. Ayrıca $r(L') = r(L) = r(X) = r \Rightarrow s = r$ olup,

$$Q = \hat{\beta}'X'Y$$

dir.

1.6.2. Örnek

$H: \alpha_2 = \alpha_3 + 2$ veya $H: \alpha_3 - \alpha_2 = 2$ varsayımını test edelim :

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad l'\beta = [0 \ 0 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 2$$

dir. $l'H = l'$ olup olmadığını görelim. Buna göre,

$$(0 \ 0 \ -1 \ 1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \ 0 \ -1 \ 1)$$

olduğundan

$$l'\hat{\beta} - 2 = [0 \ 0 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 86 \\ 32 \end{bmatrix} - 2 = -54 - 2 = -56$$

elde edilir.

$$l'GI = [0 \ 0 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3/2$$

$$Q = -56.(3/2)^{-1}.(-56) = 56^2.2/3 = 2090,66$$

$$F(H) = \frac{2090,66}{70/3} = 89,6, \quad F_{1,3,0,05} = 10,13 < 89,6$$

Yorum : Test ettiğimiz H_0 sıfır hipotezi ise anlamsız çıktığından red edilecektir. Yani α_3 etkisi α_2 etkisinin iki fazlasıdır diyemeyiz.



2.BÖLÜM

2.1. 2-Faktörlü İç-İçe Sınıflandırma

2-faktörlü iç-içe sınıflandırma veya hiyerarşik düzen ya da nested düzen adları verilen bu varyans analizi modelinde yapılacak olan esas olarak , β, α içinde yuvalanmış olduğu halde her iki faktörün olaya etkisinin araştırılmasıdır .

Ana kütleyle ilişkin model :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (i = 1, \dots, P; j = 1, \dots, Q; k = 1, \dots, N_{ij})$$

şeklindedir .

y_{ijk} , dört bileşenden oluşmuştur . Burada α - faktörü ve α içinde β - faktörü model tipine göre sabit veya değişken olabilir . μ , bilindiği üzere genel ortalamayı ; α_i , α - faktörünün i düzeyinin etkisini ; β_{ij} , üst faktörün (α) i düzeyinin içindeki alt faktörün (β) j düzeyinin etkisini ; ε_{ijk} , rastlantısal kısmı gösterir ve β kademesindeki hatayı ifade eder .

$$\alpha_i = \mu_i - \mu \Rightarrow \mu_i = \mu + \alpha_i$$

$$\beta_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i \Rightarrow \mu_{ij} = \mu_i + \beta_{ij}$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij}$$

eşitlikleri göz önüne alındığında model ,

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

olarak da yazılabilir . Çapraz faktöryel düzendekinden farklı olarak burada faktör düzeylerinin birleşimi söz konusu olmadığından faktörler arası etkileşim yoktur . Ancak β ve $\alpha\beta$ etkileri bir arada α içinde β etkisi oluştururlar .



2.1.1. Tahminlere Göre Model

y_{ijk} , i. üst düzeyin j. alt düzeyindeki k. birimini göstermek üzere tahminlere göre model ,

$$y_{ijk} = \bar{y} + a_i + b_j + e_{ijk} \quad (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q; k = 1, \dots, n_j)$$

şeklinde olur .

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n_j} y_{ijk} \quad , \quad Y_i = \sum_{j=1}^{q_i} Y_j = \sum \sum y_{ijk}$$

$$Y = \sum Y_i = \sum \sum Y_j = \sum \sum \sum y_{ijk}$$

Burada

$$n_i = \sum_{j=1}^{q_i} n_j \quad , \quad N = \sum n_i = \sum \sum n_j$$

dir . Şimdi sapmaların parçalanışını benzer durumlardaki gibi inceleyeceğiz .

2.1.2. Analiz İçin Sapmaların Parçalanışı

Tek faktörlüde yapılanlara benzer olarak ,

$$y_{ijk} - \bar{y} = \bar{y}_i - \bar{y} + \bar{y}_j - \bar{y}_i + y_{ijk} - \bar{y}_j$$

farkını yazalım . Bu farkın önce her iki yanının karesi alınıp , sonra i , j , k üzerinden toplama yapılırsa aşağıdaki özdeşlik elde edilir .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{n_j} (y_{ijk} - \bar{y})^2 &= \sum \sum \sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum \sum \sum (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + \\ &+ \sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_j)^2 \end{aligned}$$



Burada

$(\bar{y}_i - \bar{y})$: α etkisi

$(\bar{y}_j - \bar{y}_i)$: α içinde β etkisi

$(y_{ijk} - \bar{y}_{ij})$: tesadüfi etki

dir .Ayrıca daha önceki modellerde de olduğu gibi binom açılımından gelen farklı terimlerin çarpımlarının karelerinin toplamının iki katlarının i, j, k üzerinden üçlü toplamları sıfırdır . (*)

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y})^2 = \sum n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum \sum n_{ij} (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + \sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$$

$$KT_g = KT_\alpha + KT_{\beta/\alpha} + KT_k$$

KT_g, KT_α, KT_k çapraz faktöryel sınıflandırmadakinin aynı olup , yalnızca $KT_{\beta/\alpha}$ farklıdır

KT_g : Genel kareler toplamı

KT_α : α faktöründen dolayı kareler toplamı

$KT_{\beta/\alpha}$: α içinde β ' dan dolayı kareler toplamı

KT_k : Kalıntılardan dolayı kareler toplamı

Sapmaları matris notasyonu ile ifade edersek ,

$$\sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y})^2 = \sum \sum \sum y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{N} = KT_g$$

$$\sum n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \sum \frac{Y_i^2}{n_i} - \frac{Y^2}{N} = KT_\alpha$$

$$\sum \sum n_{ij} (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 = \sum \sum \frac{Y_{ij}^2}{n_{ij}} - \sum \frac{Y_i^2}{n_i} = KT_{\beta/\alpha}$$

$$\sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 = \sum \sum \sum y_{ijk}^2 - \sum \sum \frac{Y_{ij}^2}{n_{ij}} = KT_k$$

(*) Tek faktör için sıfır olduğu daha önce gösterilmiştir .



ifadeleri elde edilir .

V.A. Tablosu (Genel)

| Değişim Kaynağı | Kareler Toplamı | s.d. | Kareler Ortalaması (s^2 'ler) | F |
|--|---|------|--|--|
| α faktöründen dolayı | $KT_{\alpha} = \sum_{i=1}^p \frac{Y_i^2}{n_i} - \frac{Y^2}{N}$ | p-1 | $\frac{KT_{\alpha}}{p-1} = s_{\alpha}^2$ | |
| α içindeki β faktöründen dolayı | $KT_{\beta/\alpha} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \frac{Y_{ij}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^p \frac{Y_i^2}{n_i}$ | q-p | $\frac{KT_{\beta/\alpha}}{q-p} = s_{\beta/\alpha}^2$ | $F = \frac{s_{\alpha}^2}{s_k^2}$ |
| Kalıntı | $KT_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{n_{ijk}} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \frac{Y_{ij}^2}{n_{ij}}$ | N-q | $\frac{KT_k}{N-q} = s_k^2$ | $F = \frac{s_{\beta/\alpha}^2}{s_k^2}$ |
| Genel Toplam | $KT_z = \sum \sum \sum y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{N}$ | N-1 | | |

Test : Sapmaların kareleri toplamının σ^2 'ye bölümleri birer χ^2 dağılımı gösterir . Gerekli testler , tek faktör durumuna benzer olarak ,

$$F = \frac{s_{\alpha}^2}{s_k^2} \quad \text{ve} \quad F = \frac{s_{\beta/\alpha}^2}{s_k^2}$$

oranlarından yararlanılarak yapılır . Sınıfların birim sayıları eşit olursa analiz kolay olur . Düzey etkileri ayrı ayrı test edilebilir . Dolayısıyla karar vermek kolaydır . Deney düzenlenerek veri elde edilmişse sınıfların birim sayılarının farklı olması doğaldır . Bu durumda analiz , tek faktör halinde farklı birimlere uygulanan usule uygun olarak yapılır .



ÖN HESAP TABLOSU

| Toplam Türü | Karelenen Maddeler | Karelenen Madde sayısı | Birim Sayısı | Birim Başına Karelenen Maddelerin Toplamı |
|------------------------------|--------------------|------------------------|--------------|---|
| Eleman | y_{ijk}^2 | N | 1 | $\sum \sum \sum y_{ijk}^2$ |
| α içi β faktörü | Y_{ij}^2 | q | n_{ij} | $\sum \sum \frac{Y_{ij}^2}{n_{ij}}$ |
| α - faktörü | Y_i^2 | p | n_i | $\sum \frac{Y_i^2}{n_i}$ |
| Genel | Y^2 | 1 | N | $\frac{Y^2}{N}$ |

2.1.3. Örnek

Bir üniversitede öğretim üyeleri dersleri bilgisayarın etkinliklerinden yararlanarak veriyor olsun . Bu dersler veri tablosunda görüldüğü gibi İngilizce ve Jeoloji ve bunların çeşitli sınıflarda okutulan bölümleri olsun . Söz konusu dersleri alan öğrencilerden derslerin bilgisayar kullanımı ile veriliyor olmasının faydası konusunda değerlendirme yapmaları istenmiştir . Ölçü olarak da 1' den 10' a kadar not verilmesi kararlaştırılmış ve buna göre elde edilen veriler Tablo2' de gösterilmiştir . Burada dikkat edilirse derslerin bölümleri derslerin içinde yuvalanmış durumdadır . Tablodaki y_{ijk} , (gözlem değeri) i . dersin j. düzeyindeki k. öğrencinin değerlendirmesidir .



Tablo 2 İç-içe Sınıflandırmanın Veri Tablosu

| Dersler (α_i) | Derslerin Düzeyleri (β_{ij}) | Dersi Alan Kişi Sayısı | Toplam | Sayı | Ortalama |
|---------------------------|---|---------------------------|--------|------|----------|
| İngilizce | 1 | 5 | 5 | (1) | 5 |
| | 2 | 8,10,9 | 27 | (3) | 9 |
| | Top. | | 32 | (4) | 8 |
| Jeoloji | 1 | 8,10 | 18 | (2) | 9 |
| | 2 | 6,2,1,3 | 12 | (4) | 3 |
| | 3 | 3,7 | 10 | (2) | 5 |
| | Top. | | 40 | (8) | 5 |
| TOPLAM | | | 72 | (12) | 6 |

Model

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.1.3.1.)$$

şeklinde dir . Burada üst faktör olarak α_i ' ler dersleri , alt faktör olarak β_{ij} ' ler derslerin bölümlerini (düzeylerini) gösteriyor . $i = 1,2,\dots,a$ (Tablo2' de $a = 2$) $j = 1,2,\dots,b_i$ (Tablo2' de $b_1 = 2$, $b_2 = 3$) $k = 1,2,\dots,n_{ij}$ (n_{ij} , i. dersin j. düzeyindeki gözlem sayısını gösterir) Modeli gözlem değerlerine dayanarak yazalım :

$$y_{111} = 5 = \mu + \alpha_1 + \beta_{11} + \varepsilon_{111}$$

$$y_{121} = 8 = \mu + \alpha_1 + \beta_{12} + \varepsilon_{121}$$

$$y_{122} = 10 = \mu + \alpha_1 + \beta_{12} + \varepsilon_{122}$$

$$y_{123} = 9 = \mu + \alpha_1 + \beta_{12} + \varepsilon_{123}$$

$$y_{211} = 8 = \mu + \alpha_2 + \beta_{21} + \varepsilon_{211}$$

$$y_{212} = 10 = \mu + \alpha_2 + \beta_{21} + \varepsilon_{212}$$

$$y_{221} = 6 = \mu + \alpha_2 + \beta_{22} + \varepsilon_{221}$$

$$y_{222} = 2 = \mu + \alpha_2 + \beta_{22} + \varepsilon_{222}$$

$$y_{223} = 1 = \mu + \alpha_2 + \beta_{22} + \varepsilon_{223}$$

$$y_{224} = 3 = \mu + \alpha_2 + \beta_{22} + \varepsilon_{224}$$

$$y_{231} = 3 = \mu + \alpha_2 + \beta_{23} + \varepsilon_{231}$$

$$y_{232} = 7 = \mu + \alpha_2 + \beta_{23} + \varepsilon_{232}$$

(1,0) gösterge değerleri ile modeli yeniden yazarsak ,

$$\begin{aligned}y_{111} &= 5 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \beta_{11}(1) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(0) \\y_{121} &= 8 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(1) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(0) \\y_{122} &= 10 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(1) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(0) \\y_{123} &= 9 = \mu + \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(1) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(0) \\y_{211} &= 8 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(1) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(0) \\y_{212} &= 10 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(1) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(0) \\y_{221} &= 6 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(1) + \beta_{23}(0) \\y_{222} &= 2 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(1) + \beta_{23}(0) \\y_{223} &= 1 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(1) + \beta_{23}(0) \\y_{224} &= 3 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(1) + \beta_{23}(0) \\y_{231} &= 3 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(1) \\y_{232} &= 7 = \mu + \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \beta_{11}(0) + \beta_{12}(0) + \beta_{21}(0) + \beta_{22}(0) + \beta_{23}(1)\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz .

Matrisel form

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{123} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{224} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{111} \\ \epsilon_{121} \\ \epsilon_{122} \\ \epsilon_{123} \\ \epsilon_{211} \\ \epsilon_{212} \\ \epsilon_{221} \\ \epsilon_{222} \\ \epsilon_{223} \\ \epsilon_{224} \\ \epsilon_{231} \\ \epsilon_{232} \end{bmatrix}$$



Buna karşılık gelen normal denklemler , $(X'X)\beta^0 = X'Y$ şeklinde olup aşağıdaki gibi yazılır . (β^0 , bir çözümü gösterir)

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 8 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \beta_{11}^0 \\ \beta_{12}^0 \\ \beta_{21}^0 \\ \beta_{22}^0 \\ \beta_{23}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 32 \\ 40 \\ 5 \\ 27 \\ 18 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_- \\ y_{1-} \\ y_{2-} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix}$$

Normal denklemlerin parçalanışının genel yapısı :

$$\begin{bmatrix} n_- & n_1 & n_2 & n_{11} & n_{12} & n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_1 & n_1 & 0 & n_{11} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & 0 & 0 & n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{11} & n_{11} & 0 & n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{12} & n_{12} & 0 & 0 & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ n_{21} & 0 & n_{21} & 0 & 0 & n_{21} & 0 & 0 \\ n_{22} & 0 & n_{22} & 0 & 0 & 0 & n_{22} & 0 \\ n_{23} & 0 & n_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \beta_{11}^0 \\ \beta_{12}^0 \\ \beta_{21}^0 \\ \beta_{22}^0 \\ \beta_{23}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_- \\ y_{1-} \\ y_{2-} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup , faktör düzeyleri net bir biçimde görülmektedir . Burada $X'X$ matrisinin mertebesi 8 olup , rankı 5'tir . Lineer bağlı satır sayısı 3 olduğundan ,

$$\text{rank}(X'X) = 8 - 3 = 5$$

olarak hesaplanır . Bir genelleme olarak 2-faktörlü iç-içe sınıflandırma modeli için $X'X$ matrisinin rankının alt sınıfların sayısına eşit olduğunu söyleyebiliriz . Bu örnekte q ile gösterilen toplam düzey sayısı 5' tir . α denklemlerinin karşı geldiği sayı p , α içinde β denklemlerinin karşı geldiği sayı q ,



μ denkleminin karşı geldiği sayı da 1 olduğuna göre $X'X$ matrisinin mertebesi $m = 1 + p + q$ formülü ile hesaplanabilir. $X'X$ matrisinin rankı ,

$$r = r(X'X) = 1 + p + q - (1 + p) = q$$

olarak elde edilir. Ayrıca normal denklemler β^0 çözüm vektörünün $(1 + a)$ elemanı sıfır alınarak çözülür. Çözüm vektörü ,

$$\beta^0 = \begin{bmatrix} 0'_{1 \times (1+a)} & \bar{Y}' \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, \bar{Y}' hücre ortalamalarının oluşturduğu satır vektörüdür. $X'X$ matrisine karşı gelen genelleştirilmiş ters matris ,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(1/n_{ij}) \end{bmatrix}$$

şeklinde idi. Örneğimiz için genelleştirilmiş ters ,

| | | |
|-----------------------|--|--|
| Tablo 2) YA T | $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ | |
| Dünya Kavay | | |
| Orhan | | |
| Yenişehir-Sarı Mescit | | |
| Kulu | | |

olarak hesaplanmıştır. Tablo2 gözönüne alınarak, iç-içe varyans analizi modeli için gerekli hesaplar aşağıdaki gibi elde edilir.



$$R(\mu) = SSM = n \cdot \bar{y}_-^2 = 12(6)^2 = 432 \quad (2.1.3.2)$$

$$\bar{y}_- = \frac{Y}{n_-} = \frac{Y}{N} = \frac{\sum \sum \sum y_{ijk}}{N}$$

$$\begin{aligned} R(\mu, \alpha, \beta : \alpha) &= SSR = \beta' X' Y = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \frac{y_{ij}^2}{n_{ij}} \quad (2.1.3.3) \\ &= \frac{5^2}{1} + \frac{27^2}{3} + \frac{18^2}{2} + \frac{12^2}{4} + \frac{10^2}{2} \\ &= 516 \end{aligned}$$

$$R(\alpha, \beta : \alpha / \mu) = R(\mu, \alpha, \beta : \alpha) - R(\mu) = 516 - 432 = 84 \quad (2.1.3.4)$$

$$SST = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 = 5^2 + 8^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 10^2 + 6^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 = 542$$

$$SSE = SST - R(\mu, \alpha, \beta : \alpha) = 542 - 516 = 26$$

Tablo2 için yapılan hesaplamaları Tablo2a) ' da gösterirsek ,

Tablo 2a) V.A. Tablosu

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|-------------------------|-----------|--|--------------------|----------------|
| Ortalama | 1 | $R(\mu) = SSM = 432$ | 432 | |
| Ortalamadan Sonra Model | $q-1=4$ | $R(\alpha, \beta : \alpha / \mu) = 84$ | 21 | $F(M) = 116,3$ |
| Kalıntı | $N-q = 7$ | $SSE = 26$ | $26/7$ | $F(R_m) = 5,7$ |
| Toplam | $N = 12$ | $SST = 542$ | | |



varyans analizi tablosu elde edilir . $F(M)$ için tablo değeri ,

$$F_{1,7,0.05} = 5,59$$

olup

$$F(M) = 116,3)5,59 = F_{1,7,0.05}$$

dir . $H_0: E(\bar{y}) = 0$ Hipotezini % 5 anlamlılık eşiğinde F değerinin tablo değerinden büyük olması nedeniyle red ederiz . Ve $F(R_m)$ için tablo değeri ,

$$F_{4,7,0.05} = 4,12$$

olup

$$F(R_m) = 5,7)4,12$$

Hipotez yine % 5 anlamlılık eşiğinde red edilir . Yani (2.1.3.1.)' deki $E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$ modelinin y' deki değişimleri $E(y_{ijk}) = \mu$ modelinden daha fazla açıkladığı söylenemez . Tablo2' nin 1-faktörlü sınıflandırma modeline uyduğunu farzedelim Yani model ,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + e_{ijk}$$

olsun . Modele uygunluk için daha önce yapıldığı gibi (bak. sf. 29) indirgemeye gidilir .

$$R(\mu, \alpha) = \sum_{i=1}^p y_{i.}^2 / n_i = 32^2 / 4 + 40^2 / 8 = 456$$

$$R(\beta: \alpha / \mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu, \alpha) = 516 - 456 = 60$$

$$R(\alpha / \mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = 456 - 432 = 24$$

$$R(\alpha, \beta: \alpha / \mu) = R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu)$$

$$= R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu, \alpha) + R(\mu, \alpha) - R(\mu)$$

$$= R(\beta: \alpha / \mu, \alpha) + R(\alpha / \mu) = 60 + 24 = 84$$



$$F(\alpha / \mu) = \frac{R(\alpha / \mu)}{(p-1)MSE} = \frac{24}{(2-1)26/7} = 6,5$$

$$F(\beta : \alpha / \mu, \alpha) = \frac{R(\beta : \alpha / \mu, \alpha)}{(q-p)MSE} = \frac{60}{(5-2)26/7} = 5,4$$

İndirgmeden sonraki F istatistikleri yukarıdaki gibi elde edilir .

Tablo 2b)

| Değişim Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F |
|---------------------------------------|---------|--|--------------------|------------------------|
| Ortalama , μ | 1 | $R(\mu) = 432$ | $432 / 1 = 432$ | $432 / (26/7) = 116,3$ |
| μ ' den sonra α | $p-1=1$ | $R(\alpha / \mu) = 24$ | $24 / 1 = 24$ | $24 / (26 / 7) = 6,5$ |
| μ ve α ' dan sonra β | $q-p=3$ | $R(\beta : \alpha / \mu, \alpha) = 60$ | $60 / 3 = 20$ | $20 / (26 / 7) = 5,4$ |
| Kalıntı | $N-q=7$ | $SSE = 26$ | $26 / 7$ | |
| Toplam | $N=12$ | $SST = 542$ | | |

$$F_{1,7,0.05} = 5,59(6,5 \text{ ve } F_{3,7,0.05} = 4,35(5,4$$

Yorum : Sıfır hipotezi red edilir . Yani y' deki değişim μ ' den sonra α ' yı kattığımız model tarafından μ ve α ' dan sonra β ' yı kattığımız model kadar iyi açıklanabiliyor .

2.1.4. F testi ve t testi

Hipotez testi (anlamlılık testi) metodları çok çeşitlidir . Örnek sayısına göre farklılıklar gösterirler . Uygulamada karşılaştığımız önemli sorun , sayıları ikiden çok bir grup ortalama arasındaki farkların anlamlı olup olmadığına karar vermektir . Bu da genellikle " varyans analizi " adı verilen ve İngiliz istatistikçisi Sir Ronald A. Fisher' in 1924' de geliştirdiği istatistik tekniği ile mümkün olur . Örneğimizde ikiden çok ortalama arasındaki farkların anlamlılık testinde bu testin uygulanışını gördük



Bilindiği gibi varyans bir değişkenlik ölçüsüdür ve standart sapmanın karesi olarak tanımlanır . (σ^2) sembolü ile gösterilir . Varyans analizi esas olarak , serilerin toplam varyansını her biri ayrı bir değişkenlik kaynağına bağlı unsurlara bölerek bunlar arasında anlamlı bir fark bulunup bulunmadığını araştırmak , dolayısıyla çeşitli değişim kaynaklarının etkisini anlamak amacıyla kullanılır .

F istatistiği gruplar arasındaki varyansın (σ^2_{ara}) , grup içindeki varyansa ($\sigma^2_{iç}$) bölünmesiyle hesaplanır .

$$F = \frac{\sigma_{ara}^2}{\sigma_{iç}^2}$$

Kısaca F testi için iki ayrı varyans arasındaki orandır denir . F dağılımı yardımıyla hem iki varyans karşılaştırmasını hem de ikiden çok ortalamamın karşılaştırmasını yapabiliriz .

Pay ve paydanın serbestlik derecelerine ve (0.05) , (0.01) gibi (α) anlamlılık eşiğine göre tesadüflerden ileri gelebilecek F değerlerinin üst sınırlarını gösteren F dağılımı tablosuna bakılarak , bu büyüklükteki bir F değerinin sondajdan ileri gelip gelemeyeceği araştırılır . Bulunan F değeri tablo değerini aşıyorsa bu kadar büyük fark tesadüfidir denilemeyeceğinden sıfır hipotezini red etmek ve ortalamalar arasındaki farkın anlamlı olduğuna karar vermek gerekir .

t testi :

Kütle varyansı (ya da varyansları) bilinmiyorsa ve $n < 30$ (ya da $n_1 , n_2 < 30$) ise bu test kullanılır . Bilinmeyen varyans yerine yansız tahmininden yararlanır .

Bir örnek durumunda :

$$s^2 = \frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{n-1} , \quad E(s^2) = \sigma^2$$

kullanılır . n birimlik herbir örnek için ,

$$t_v = \frac{\bar{Y} - \mu}{S_{\bar{Y}}} = \frac{\bar{Y} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$



standart değeri hesaplanır . Burada t ' ler $V = n-1$ s.d.' li student dağılımı gösterir . Varyansı bilinmeyen bir kütleden çekilen örneğin ortalamasını test etmek için ,

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

hipotezleri yazılır . $n < 30$ için student t dağılımına , $n \geq 30$ için standart normal dağılıma başvurulur .

İki örnek durumunda :

a) $\sigma_1 = \sigma_2$ ve σ ' lar bilinmiyorsa

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (Y - \bar{Y}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y - \bar{Y}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ve

$$t_v = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - 0}{s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}} = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{s \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

olarak hesaplanır . Ve $v = n_1 + n_2 - 2$ s.d.' li Student-Fisher t dağılımı gösterir . Test için,

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad , \quad (\mu_1 = \mu_2)$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad , \quad (\mu_1 \neq \mu_2)$$

hipotezleri gözönüne alınır . $n < 30$ için student , $n \geq 30$ için normal bölünmeye başvurulur

b) $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ve σ ' lar bilinmiyorsa

$n_1 , n_2 > 30$ olduğunda normal bölünmeye başvurulur .



$$s_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

dir .

c) $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ve σ ' lar bilinmiyorsa

$n_1, n_2 < 30$ olduğunda $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$ için kesin karara varmak güçtür . Fark ortalamaların eşit olmamasından ya da standart sapmaların eşit olmamasından ileri gelebilir . Bu durumda V s.d.'li t dağılımı uygulanır . Ancak V farklı hesaplanır .

2.1.5. χ^2 testi

t ' nin standart ortalama olarak düşünülmesine benzer şekilde , χ^2 standart varyans olarak düşünülür Nasıl ki t ortalama testinde kullanılıyor ise χ^2 de varyans testinde kullanılır . Pratikte ise χ^2 daha farklı durumları test etmek için (kontenjans tablosu testi gibi) kullanılır

$$E(s^2) = \sigma^2 \Rightarrow E\left(\frac{s^2}{\sigma^2}\right) = 1$$

idi . Bundan yararlanarak

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \text{veya} \quad \frac{s^2}{\sigma^2}$$

varyans testinde kullanılabilir .

Teorem 2.1.5.1. (Cochran teoremi)

V_1, V_2, \dots, V_k s.d.' li χ^2 dağılımı gösteren k tane bağımsız χ^2 değişkeninin toplamı $\chi^2_{(v_1+v_2+\dots+v_k)}$ dağılımı gösterir . Veya V_1, V_2, \dots, V_k s.d.' li k tane χ^2 değişkeninin toplamı $\chi^2_{(v_1+v_2+\dots+v_k)}$ dağılımı gösteriyorsa , değişkenler birbirlerinden bağımsızdırlar .



2.1.6. Örneğin Kestirilebilir Fonksiyonları

Biliyoruz ki herhangi bir gözlemin değeri kestirilebilirdir . Dolayısıyla $\mu + \alpha_i + \beta_{ij}$ tahmin edilebilir bir fonksiyondur diyebiliriz . Bu fonksiyonun sapmasız , lineer , tek ve en iyi tahmincisi

$$\mu^0 + \alpha_i^0 + \beta_{ij}^0 = \bar{y}_{ij}$$

dir .

$$\bar{Y}' = [5 \ 9 \ 9 \ 3 \ 5] \quad , \quad \beta^0' = [0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 9 \ 9 \ 3 \ 5]$$

vektörleri ve $\beta_{ij} - \beta_{i'j'}$ ' nün ($j \neq j'$) tahmincisi olarak $\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i'j'}$, varyansı olarak da $\sigma^2 (\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j'}})$ formülleri göz önüne alınırsa ,

$$\beta_{11} - \beta_{12} = \bar{y}_{11} - \bar{y}_{12} = 5 - 9 = -4$$

$$v(\beta_{11} - \beta_{12}) = \sigma^2 (\frac{1}{1} + \frac{1}{3}) = 4\sigma^2 / 3$$

değerleri elde edilir . Tablo2a) ' dan bu varyansın yansız tahmin edicisi ,

$$4\hat{\sigma}^2 / 3 = 4(MSE) / 3 = 104 / 21$$

dir . Tahmin edilebilir fonksiyonu nasıl test ederiz ? Örneğimiz için bunun yanıtını arayacağız . F istatistiği , fonksiyonun yansız tahmincisinin karesinin , bu tahmincinin yine yansız varyansına oranıdır . Yani F istatistiği ,

$$F = \frac{(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i'j'})^2}{\hat{\sigma}^2 (\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j'}})}$$

olarak hesaplanır . Test edilecek hipotez $\beta_{ij} = \beta_{i'j'}$ ya da açık olarak ,

$$H: \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{iq}$$

dir . Yani test edilecek olan α' nin her bir düzeyi içindeki β' ların eşitliğidir . Hipotezi $H: K'\beta = 0$ olarak gösterebiliriz .

F istatistiği olarak $F(\beta: \alpha / \mu, \alpha)$ alınır . Çünkü bu istatistik μ ve α' dan sonra β' nin modele katılmasının önemini testi için tanımlanmış olmasının yanısıra , her bir α düzeyi içindeki β' ların eşitliğinin testi için de kullanılır .

$$F(H) = \frac{Q}{s\hat{\sigma}^2} , \quad Q = (K'\beta^0 - m)'(K'GK)^{-1}(K'\beta^0 - m)$$

olarak yazılır . Örneğin hipotezi ,

$$H: \beta_{11} = \beta_{12}$$

$$\beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23}$$

şeklindedir . Denklemler ,

$$\beta_{11} - \beta_{12} = 0$$

$$\beta_{21} - \beta_{22} = 0$$

$$\beta_{21} - \beta_{23} = 0$$

$$H: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Burada K' matrisi

$$K' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir .



$$K'\beta^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$K'GK = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (K'GK)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$Q = [-4 \ 6 \ 4] \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 60$$

olarak bulunur . F istatistiği

$$F(\beta:\alpha / \mu, \alpha) = \frac{R(\beta:\alpha / \mu, \alpha)}{(q-p)MSE} = \frac{60}{(5-2)26/7} = 5,4$$

olarak hesaplanır .

Yorum :

$$F_{3,7,0.05} = 4,35 < 5,4$$

olduğundan sıfır hipotezi red edilir . Bunun anlamı , β ' nin düzeyleri arasında fark vardır ve önemlidir .



3. BÖLÜM

Uygulama

Tablo 3 Veri tablosu

| | | Gözlemler | | | |
|------------------|---------------------|-----------|-----------|------|----------|
| Dersler | Derslerin Bölümleri | Puanlama | Toplam | Sayı | Ortalama |
| Cebir | 1 | 10,8,9 | 27 | 3 | 9 |
| | 2 | 2,2 | 4 | 2 | 2 |
| | 3 | 3,2,4 | 9 | 3 | 3 |
| | | | Toplam 40 | 8 | 5 |
| Analiz | 1 | 8,8,8 | 24 | 3 | 8 |
| | 2 | 2,3,4,3 | 12 | 4 | 3 |
| | 3 | 2,4 | 6 | 2 | 3 |
| | 4 | 5,4,3 | 12 | 3 | 4 |
| Toplam = 54 | | | 12 | 4,5 | |
| Genel Top . = 94 | | | 20 | 4,7 | |

Açıklama :

Yukarıdaki veri tablosu M.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğrencilerinden bazılarına yöneltilen aşağıdaki soruya verilen yanıtlarla elde edildi . Sorumuz , Cebir ve Analiz adı altında verilen iki dersin Cebir1 , Cebir2 , Cebir3 , Analiz1 , Analiz2 , Analiz3 , Analiz4 adları altında bölümlere ayrılarak anlatılması - farklı ya da aynı hocaların bu dersleri vermelerini de göz önüne alarak - öğrencinin başarı ya da başarısızlığında nasıl etki yapmaktadır şeklinde idi Öğrencilerden bu soruya 1'den 10' a kadar puanlama yapması istendi . y gözlem değerleri bu şekilde 1' den 10' a kadar yapılan değerlendirmelerle elde edildi . Değerlendirmeye bakıldığında , özellikle bu iki dersin 2 , 3 ve 2 , 3 , 4 bölümlerinin ayrı hocalar tarafından verilmesi de göz önüne alındığında öğrencilerin başarılı olmaları konusunda negatif bir etki yaptığı gözlenebilmektedir . Analize geçmeden önce söz konusu olan derslerin sömestrelere bölünmesi ve bu şekilde anlatılması , bizde kopukluğun var olduğu kanısını uyandırmaktadır . Analiz sonunda daha kesin sözler söyleyebileceğiz .



Bilindiği gibi bu dersler ve diğer bazı dersler daha önceleri bütün olarak üniversitemizde öğretim üyeleri tarafından verilmekteydi . Biz bu yeni durumun öğrencinin başarısı üzerindeki etkisini analiz etmek istedik ve tahmin ettiğimiz sonuçları analizle elde etmiş olduk . Şüphesiz kullanacağımız 2-faktörlü iç-içe varyans analizi , iç-içe dizilmiş olan iki faktörün etkisi test edileceğinden en uygundur .

3.1. Model

Veri tablomuz en uygun olan model

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + e_{ijk} \quad (3.1.1.)$$

dır . Burada y_{ijk} , i. dersin j. bölümündeki k. gözlem değeridir . Bilindiği üzere μ genel ortalamadır . α_i i. dersin etkisi , β_{ij} ise i. dersin j. bölümünün etkisidir . Anlaşıldığı gibi bu modelde iki faktör olup biri α diğeri bunun içinde yer alan β 'dır . Modelin adından da anlaşıldığı üzere çapraz modelden farklı olarak faktörler iç-içe girmişlerdir . Yani diziliş olarak biri diğerinin alt sınıfı durumundadır .

α ve β faktörlerinin düzeyleri vardır . Düzey kavramından önceki çalışmalarda ve tezde söz edilmişti . Bu çalışmada α faktörünün Cebir ve Analiz olmak üzere 2 düzeyi , β faktörünün ise α 'nın ilk faktöründe 3 , ikinci faktöründe 4 olmak üzere 7 düzeyi vardır . O nedenle $p=2$ olmak üzere $i = 1, \dots, p$ dir . $q_1 = 3$, $q_2 = 4$ olmak üzere $j = 1, \dots, q_i$ dir . i. dersin j. bölümünde n_{ij} tane gözlem değeri olduğu kabul edilirse , $k = 1, \dots, n_{ij}$ dir . e_{ijk} , bildiğimiz hata (kalıntı) terimidir .

$$n_i = \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij} \quad \text{ve} \quad n_{.} = \sum_{i=1}^p n_i$$

ifadelerini daha sonra sık sık kullanacağız . Veri tablosundan yararlanarak bunları hesaplırsak ,

$$n_1 = \sum_{j=1}^{q_1} n_{1j} = \sum_{j=1}^3 n_{1j} = n_{11} + n_{12} + n_{13} = 3 + 2 + 3 = 8$$



$$n_{2j} = \sum_{j=1}^{q_2} n_{2j} = \sum_{j=1}^4 n_{2j} = n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} = 3 + 4 + 2 + 3 = 12$$

$$n_{.} = \sum_{i=1}^p n_{i.} + n_{2.} = 8 + 12 = 20$$

değerleri elde edilir. (3.1.1.) modelinin 20 gözlem değerinin Tablo3 için olan denklemleri aşağıdaki gibidir. Daha önceki örneklerdeki gibi gösterge değerleri ile yazılması çok uzun olacağından yalnızca matrisel form olarak gösterilişi verilmiştir.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} 10 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{113} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{133} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{213} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{224} \\ y_{231} \\ y_{232} \\ y_{241} \\ y_{242} \\ y_{243} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{113} \\ e_{121} \\ e_{122} \\ e_{131} \\ e_{132} \\ e_{133} \\ e_{211} \\ e_{212} \\ e_{213} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{224} \\ e_{231} \\ e_{232} \\ e_{241} \\ e_{242} \\ e_{243} \end{array} \right]
 \end{array}$$



Esasen $Y = X\beta + \varepsilon$ şeklinde bir lineer denklem sisteminin çözümünün aranması ile karşı karşıyayız . Ancak burada 10×20 biçimindeki X matrisinin rankı tam olmayıp (nitel değişkenler söz konusu) tersi klasik anlamda hesaplanamaz . Daha önceki bölümlerde anlatılmaya çalışıldığı gibi böyle özel yapısı olan bir matris için biz genelleştirilmiş ters matris metodunu kullanarak , X matrisinin biçimi ne olursa olsun tersinin bulunamaması sorununu ortadan kaldırebiliyorduk . Nitekim önce X' in genelleştirilmiş ters matrisini bulup daha sonra β , bilinmeyen parametreler vektörü için bir çözüm getireceğiz .

$X'X$ matrisinin hesabı yapırsa ,

$$X'X = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 12 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

bulunur . Burada X matrisi 20×10 biçiminde olup elemanları $(0,1)$ ' lerden oluşmuş bir gösterge matrisidir .



$X'X$ matrisinin genel yapısı ,

$$\begin{bmatrix} n_{\cdot} & n_1 & n_2 & n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_1 & n_1 & 0 & n_{11} & n_{12} & n_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{11} & n_{11} & 0 & n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{12} & n_{12} & 0 & 0 & n_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{13} & n_{13} & 0 & 0 & 0 & n_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{21} & 0 & n_{21} & 0 & 0 & 0 & n_{21} & 0 & 0 & 0 \\ n_{22} & 0 & n_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{22} & 0 & 0 \\ n_{23} & 0 & n_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{23} & 0 \\ n_{24} & 0 & n_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{24} \end{bmatrix}$$

şeklindedir . Hesaplamayla bulduğumuz $X'X$ matrisini , genel yapısı ile karşılaştırdığımızda matrisin elemanlarının bu yapıya aynen oturduğu görülür .

3.2. Normal Denklemler

$$\begin{bmatrix} 20 & 8 & 12 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \beta_{11}^0 \\ \beta_{12}^0 \\ \beta_{13}^0 \\ \beta_{21}^0 \\ \beta_{22}^0 \\ \beta_{23}^0 \\ \beta_{24}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{\cdot} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki parçalanış bize faktör düzeylerini açıkça gösterir . $X'X$ matrisinin 10 satırı ,10 sütunu olup , hemen görülebileceği gibi lineer bağlı satırlarının varlığından söz edilir .



Bu satırlar 1, 2, 3 olup 2. ve 3. satırların toplamı 1. satırı, 4., 5. ve 6. satırların toplamı 2. satırı, 7., 8., 9., ve 10. satırların toplamı 3. satırı verir. $X'X$ matrisinin rankı 7' dir. (*) Çünkü iç-içe (nested) sınıflandırmada $\text{rank } X'X = b$ formülü ile verilir. $b = 7$ olduğuna göre

$$\text{rank } X'X = 7$$

yazılır. Ya da satır sayısından lineer bağıli satırları çıkarırsak,

$$\text{rank} = 10 - 3 = 7$$

olarak yine aynı sonuç bulunur. Hatta p satır sayısını göstermek üzere

$$p = 1 + a + b = 1 + 2 + 7 = 10$$

bulunur.

$$\beta_{ij}^0 = \bar{y}_{ij} \quad \text{bütün } i \text{ ve } j \text{ ' ler için} \quad (3.2.1.)$$

$$\beta^0 = \begin{bmatrix} 0'_{1 \times (1+a)} & \bar{Y}' \end{bmatrix} \quad (3.2.2.)$$

β^0 ' in $p-r = 1 + a$ elemanı sıfır olarak alınıp normal denklemler çözülebilir. Burada \bar{Y}' hücre ortalamalarının satır vektörünü gösteriyor.

$$\bar{Y}' = [9 \ 2 \ 3 \ 8 \ 3 \ 3 \ 4] \quad (3.2.3.)$$

$$\beta^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 9 \ 2 \ 3 \ 8 \ 3 \ 3 \ 4] \quad (3.2.4.)$$

(*) Rankın tanımı çeşitli kitaplarda farklı olarak yapılmıştır. Aşağıda bu tanımlardan ikisi verilmiştir.

Tanım 1 : A , (p,q) boyutlu bir dikdörtgen matris olsun. A' 'nin tekil olmayan alt kare kare matrislerinden en büyüğünün boyutu (r,r) ise A matrisinin rankı r ' dir denir.

Tanım 2 : Bir matriste lineer bağımsız sütun (ya da satır) sayısı o matrisin rankını verir.



$X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi ,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(1/n_{ij}) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, b_i$$

idi . $D(1/n_{ij})$, köşegen elemanları $1/3, 1/2, 1/3, 1/3, 1/4, 1/2, 1/3$ olan bir köşegen matris olmak üzere G matrisi ,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir .

3.3 Modelin Varyans Analizi

Önce verilerin yer aldığı tablo3' den yararlanarak modelin kareler toplamları hesaplanırsa ,

$$R(\mu) = SSM = n \cdot \bar{y}_{..}^2 = 20(4,7)^2 = 441,8$$

$$R(\mu, \alpha, \beta : \alpha) = SSR = \beta^0 X'Y = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 / n_{ij}$$



$$= \frac{27^2}{3} + \frac{4^2}{2} + \frac{9^2}{3} + \frac{24^2}{3} + \frac{12^2}{4} + \frac{6^2}{2} + \frac{12^2}{3} = 572$$

$$R(\alpha, \beta: \alpha / \mu) = R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu) = 572 - 441,8 = 130,2$$

$$SST = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 = 10^2 + 8^2 + 9^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 + \\ + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 = 582$$

$$SSE = SST - R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) = 582 - 572 = 10$$

elde edilir .

Tablo 3a) Tablo 3 İçin Varyans Analizi Tablosu

| Değişimin Kaynağı | s.d. | Kareler Toplamı | Kareler Ortalaması | F İstatistiği |
|-------------------------|-----------------|--|--------------------|------------------|
| Ortalama | 1 | $R(\mu) = 441,8$ | $441,8/1=441,80$ | $F(M)=574,34$ |
| Ortalamadan Sonra Model | b. -1= 7-1 | $R(\alpha, \beta: \alpha / \mu) = 130,2$ | $130,2/6=21,70$ | $F(R_m) = 28,21$ |
| Kalıntı | N- b. =20-7 =13 | $SSE = 10$ | $10 / 13 = 0,76$ | |
| Toplam | N = 20 | $SST = 582$ | | |

0,05 anlamlılık düzeyinde F istatistikleri ,

$$F_{1,13,0,05} = 4,67 \quad \text{ve} \quad F_{6,13,0,05} = 2,92$$

dir .



Yorum : % 5 anlamlılık düzeyinde $F_{1,13}^*$ tablo değeri 4,67 olarak bulunur ki bu değer $F(M)^*$ in 574,34 olarak hesaplanan değerinden küçük kalmaktadır . Yani hesaplanan değer , limit değeri aşmış olur . Dolayısıyla sıfır hipotezi red edilir . Bu durumda $H_0: E(\bar{y}) = 0$ hipotezinden vazgeçilir . $F(R_m)^*$ in hesaplanan değeri tablodan elde edilen limit değer ile karşılaştırılacak olursa $F_{6,13}^*$ ün 2,92 olan tablo değerinin $F(R_m)^*$ in 28,21 olarak hesaplanan değerinden küçük kaldığı görülür . Yani $F(R_m)^*$ in hesaplanmış değeri yine limit değerini aşmıştır .

$E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$ modeli y' deki değişimleri , $E(y_{ijk}) = \mu$ modelinin açıklamasından daha fazla açıklayabilir denemez .

Tablo3 ile verilen veri tablosu için 1-faktörlü sınıflandırmanın uygun olduğunu düşünelim :

Model

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + e_{ijk}$$

idi . Bu model göz önüne alınarak , analiz için gereken hesaplamalar aşağıda yapılmıştır .

$$SSR = \beta^0' X'Y = \sum_{i=1}^a y_i^2 / n_i = R(\mu, \alpha)$$

$$R(\mu, \alpha) = 40^2 / 8 + 54^2 / 12 = 443$$

$$R(\beta: \alpha / \mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu, \alpha) = 572 - 443 = 129$$

$$R(\alpha / \mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = 443 - 441,8 = 1,20$$

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta: \alpha / \mu) &= R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu) = R(\mu, \alpha, \beta: \alpha) - R(\mu, \alpha) \\ &\quad + R(\mu, \alpha) - R(\mu) = R(\beta: \alpha / \mu, \alpha) + R(\alpha / \mu) \\ &= 129 + 1,20 = 130,2 \end{aligned}$$

$$F(\alpha / \mu) = \frac{R(\alpha / \mu)}{(a-1)MSE} = \frac{1,20}{(2-1)10/13} = 1,20(13/10) = 1,56$$



$$F(\beta:\alpha / \mu, \alpha) = \frac{R(\beta:\alpha / \mu, \alpha)}{(b-a)MSE} = \frac{129}{5(10/13)} = 33,54$$

Hesaplanan değerler bir varyans analizi tablosunda gösterilirse aşağıdaki Tablo3b ortaya çıkar .

Tablo 3b) Verilen Data İçin Varyans Analizi Tablosu

| Değişim Kaynağı | s.d | Karaler Toplamı | Kareler Ortalama | F - İstatistiği |
|---|------------|---------------------------------------|------------------|-----------------|
| Ortalama , μ | 1 | $R(\mu) = 441,8$ | 441,8 | 574,34 |
| μ ' den sonra α | $a-1=1$ | $R(\alpha / \mu) = 1,20$ | 1,20 | 1,56 |
| μ ve α ' dan Sonra $\beta:\alpha$ | $b-a=5$ | $R(\beta:\alpha / \mu, \alpha) = 129$ | 25,80 | 33,54 |
| Kalıntı | $N-b = 13$ | $SSE = 10$ | 0,76 | |
| Toplam | $N = 20$ | $SST = 582$ | | |

μ ' den sonra α ' nın modele katılması ile α ve μ ' den sonra $\beta:\alpha$ ' nın modele katılmasının anlamlılığının testi :

% 5 anlamlılık düzeyinde tablo değerleri aşağıdaki gibidir .

$$F_{1,13,0.05} = 4,67 \quad \text{ve} \quad F_{5,13,0.05} = 3,02$$

olup

$$F(\alpha / \mu) < F_{1,13} \quad \text{ve} \quad F(\beta:\alpha / \mu, \alpha) > F_{5,13}$$

sonucu elde edilir .

Yorum : y' deki sapmalar daha çok μ ' den sonra α ' nın katılması ile elde edilen model tarafından açıklanabilmektedir

3.4. İç-içe Modelin Tahmin Edilebilir (Kestirilebilir) Fonksiyonları

1-faktörlü sınıflandırma anlatılırken kestirilebilir fonksiyonlardan söz edilmişti.Burada önemli nokta β ' nın bileşenleri -bilinmeyen parametreler- istenilen yaklaşıklıkla estirilemediği halde β ' nın bazı lineer fonksiyonları , üstelik sapmasız olarak kestirilebilmektedir .



Tahmin edilebilir fonksiyonların bizim için en önemli yanı budur . Herhangi bir gözlemin beklenen değeri kestirilebilir olduğundan $\mu + \alpha_i + \beta_{ij}$ için kestirilebilir deriz . Bu ifadenin en iyi , linear , tek (eşsiz) tahmicisi (3.2.1.) ve (3.2.4.) göz önüne alınarak ,

$$\mu^0 + \alpha_i^0 + \beta_{ij}^0 = \bar{y}_{ij}$$

olarak yazılır .

Tablo 4

| Kestirilebilir Fonksiyon | E.i.d.te (B.l.u.e) | E.i.d.te (B.l.u.e.)'ün varyansı |
|--|--|---|
| $\mu + \alpha_i + \beta_{ij}$ | \bar{y}_{ij} | σ^2/n_{ij} |
| $\beta_{ij} - \beta_{i'j}$, $j \neq j'$ | $\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i'j}$ | $\sigma^2 (\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j}})$ |
| $\mu + \alpha_i + \sum_{j=1}^{b_j} \omega_{ij} \beta_{ij}$, $\sum_{j=1}^{b_j} \omega_{ij} = 1$ | $\sum_{j=1}^{b_j} \omega_{ij} \bar{y}_{ij}$ | $\sigma^2 (\sum_{j=1}^{b_j} \frac{\omega_{ij}^2}{n_{ij}})$ |
| $\alpha_i - \alpha_{i'} + \sum_{j=1}^{b_j} \omega_{ij} \beta_{ij} - \sum_{j=1}^{b_{j'}} \omega_{i'j} \beta_{i'j}$, $\sum_{j=1}^{b_j} \omega_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^{b_{j'}} \omega_{i'j}$ | $\sum_{j=1}^{b_j} \omega_{ij} \bar{y}_{ij} - \sum_{j=1}^{b_{j'}} \omega_{i'j} \bar{y}_{i'j}$ | $\sigma^2 (\sum_{j=1}^{b_j} \frac{\omega_{ij}^2}{n_{ij}} + \sum_{j=1}^{b_{j'}} \frac{\omega_{i'j}^2}{n_{i'j}})$ |

Veri tablosu ve Tablo 4 ' ü göz önüne alarak bir örnek verelim :

(3.2.3.) ve (3.2.4.) ' den

$$\beta_{11} - \beta_{12} = 9 - 2 = 7$$

$$v(\beta_{11} - \beta_{12}) = \sigma^2 (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 5\sigma^2/6$$

olarak hesaplanır . Tablo 3a 'dan

$$5\hat{\sigma}^2/6 = 5MSE/6 = 5^{(10/13)}/6 = 25/39 = 0,64$$

bulunur .

Not : İngilizcede B.l.u.e. (Best , linear , unbiased estimator) yerine E.i.d.te. (En iyi , doğrusal tahmin edici) yi kullandık .



SONUÇ

Amacımız başta da söylediğimiz gibi nitel değişkenli verilerin kaynağı olan toplumsal olaylara istatistiksel bir çözüm tekniği önermektir . Bu çalışmanın özünü oluşturur . Varyansların karşılaştırılması ile gerek 1-faktörlü sınıflandırmada olsun gerekse iç-içe sınıflandırmada olsun modele her kattığımız faktörün modeli nasıl etkilediğini gösterdik . Hangi modelin olayı daha fazla açıkladığını yorumlarla açıkladık .

İlk bölümde 1-faktörlü sınıflandırma ayrıntılı olarak ele alınmış olup ikinci bölümde 2-faktörlü iç-içe (hiyerarşik) düzen örneklerle anlatılarak , V.A. tabloları düzenlenip , bu tablolar yorumlanmıştır Bu tablolarda , önce ortalamanın modele katılması ile oluşturulan model için y gözlem değerlerindeki değişimin nedeni araştırıldı . μ ' den sonra α - faktörünün modele katılması sağlanarak , böylece kurulan yeni model için y 'deki değişimin nedeni araştırıldı . Bunun sonunda y 'deki değişime α - faktörünün etkisi oluyormu sorusuna yanıt verilmiştir . Daha sonra modele β - faktörünün katılması sağlanarak , μ ve α ' dan sonra β ' nin katılımı ile elde edilen bu yeni modelde y 'deki değişimin nedeni araştırılmıştır . Böylece sıfır hipotezi irdelenmiştir . Uygulamada Cebir ve Analiz derslerinin (faktörlerinin) alt düzeylerine ayrılarak farklı öğretim üyeleri tarafından anlatılmasının öğrencinin başarısı üzerinde olumsuz bir etki bıraktığı sonucuna işaret ettik . Varyans analizi tekniği ile özellikle β - faktörünün yani α - faktörü içinde yuvalanmış faktörlerin y gözlem değerlerinin değişimindeki etkiye neden olduğunu gösterdik . Ayrıca veri tablosundaki yapıya en uygun olan modelin iç-içe varyans analizi modeli olduğunu gösterdik .

Nitel değişkenli her türlü sosyal olayların istatistiksel olarak incelenmesinde bilhassa bilgisayar teknolojisinin çok hızlı ve çok büyük boyutta bilgileri işlemedeki gücünü de katarsak iç-içe 2 veya daha çok faktörlü varyans modellerinin kullanılmasında yarar görüyoruz .



KAYNAKÇA

- GRAYBILL F.A. "Theory and Application of the Linear Model", Duxbury Press
, Nort Scituate , 1976
- İPEK M. "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olmayan
Modellere Uygulama " , İst. Ün. İktisat Fak , (Tez Çalışması
1980) , İST.
- MAZMANOĞLU A. "Etkileşimsiz Çapraz 2 - Faktörlü Varyans Analizi Modellerinde
Matrislerle Çözümleme" , (Doktora Tezi) , İ.Ü. İktisat Fak.
1984 İST.
- RAO C.R. "Linear Statistical Inference and its Applications" , (2 nd.
edition , 1973)
- SEARLE S.R. "Linear Models" , John Wiley and Sons , 1971
- SEARLE S.R. "Matrix Algebra Useful For Statistics" , John Wiley and Sons ,
New York , 1982
- SECHEFFE H. "The Analysis of Variance" , 1959
- TEZİÇ M. "Bölge , İl ve Liselerarası Denge Açısından Üniversite Giriş
Sınavlarının Varyans Analizi Metoduyla İncelenmesi" ,
Doçentlik Tezi , 1972



ÖZGEÇMİŞ

- Doğum Tarihi** : 20 Şubat 1960
- Doğum Yeri** : İstanbul
- Mezun Olduğu İlk Okul** : Zafer İlk Okulu, İstanbul 1971
- Mezun Olduğu Lise** ; Etiler (Levent) Lisesi, İstanbul, 1977
- Mezun Olduğu Üniversite ve Tarihi** : İstanbul Teknik Üniversitesi
Matematik Mühendisliği, İstanbul, 1982
- Yüksek Lisans Yaptığı Üniversite ve Tarih** : İstanbul Teknik Üniversitesi, 1995
- Yüksek Lisans Konusu** : Ana Bileşenli Faktör Analizinin
Regresyon Analizi ile Birlikte
Kullanılması ve Bir Uygulama
- Doktora Başlama Tarihi** : Yıldız Teknik Üniversitesi, 1987
- Halen Görev Yaptığı Üniversite** : Marmara Üniversitesi, Fen-Edebiyat
Fakültesi, Matematik Bölümü
- Göreve Başlama Tarihi** : 1985, Kasım



