

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Lazerle Işın, Sıcak, Dağılımı

Yüksek Lisans Tezi

Nuran Güzel

1991

09
94

YILDIZ UNIVERSITESI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTUSU

MAT
25.000

L A S E R L E İ Ş İ N L A M A D A S I C A K L I K
D A Ğ İ L İ M İ

DOKTORA TEZİ
Y. MUH. NURAN GÜZEL

İSTANBUL 1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

R 209

Kot : 94
Alındığı Yer : Fen Bilimleri Ens.
Tarih : 18.03.1992
Fatura : -
Fiyatı : 25.000,-TL
Ayniyat No : 1/1
Kayıt No : 48211
UDC : 510
Ek :



YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
D.E. No 46051

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTUSU

İÇİNDEKİLER

1	1
1-1	1-1
1-2	2-4
LASERLE İŞİNLAMADA SICAKLIK	
DAGILIMI	
8-10	8-10
10-12	10-12
12	12
13-14	13-14
14-15	14-15
16	16
16-22	16-22
22-25	22-25
27-27	27-27
28-35	28-35
36	36
36-38	36-38
38-39	38-39
39-40	39-40
DOKTORA TEZİ	
Y. MUH. NURAN GÜZEL	
40-44	40-44
44-46	44-46
46-51	46-51
52-54	52-54
55	55
55-58	55-58
58	58
58-59	58-59
TARTIŞMA	
60	60
60-64	60-64
64	64
65	65



İSTANBUL 1991

İÇİNDEKİLER

ÖZET SUMMARY

VI - KATILIMLAR

VII - TESEKKÜR

VIII - İZLENİMLER

IX - SONUÇLAR

X - EKLER

XI - KAYNAKLAR

XII - DİĞER BİLGİLER

XIII - İZLENİMLER

XIV - SONUÇLAR

XV - EKLER

XVI - KAYNAKLAR

XVII - DİĞER BİLGİLER

XVIII - İZLENİMLER

XIX - SONUÇLAR

XX - EKLER

XXI - KAYNAKLAR

XXII - DİĞER BİLGİLER

XXIII - İZLENİMLER

XXIV - SONUÇLAR

XXV - EKLER

XXVI - KAYNAKLAR

XXVII - DİĞER BİLGİLER

XXVIII - İZLENİMLER

XXIX - SONUÇLAR

XXX - EKLER

I - GİRİŞ	1
1-1 Problemin Fiziksel Açıklaması	1 - 1
1-2 Isı İletim Denklemi	2 - 4
1-3 Isı İletim Denklemine Çözüm Yolları	5
1-3-1 IA Hali ve Çözümü	6 - 8
1-3-2 IIA Hali ve Çözümü	8 - 10
1-3-3 IIIA Hali ve Çözümü	10-12
1-4 Uç Nokta Sonlu Fark Yöntemi Neden Yeterli Değil	12
1-4-1 Uç Nokta Sonlu Fark Yöntemi	12-14
1-4-2 Neden Yeterli Değil	14-15
II - METOD	16
2-1 Altı Nokta Yöntemi	16-22
2-2 IIA Hali için Altı Nokta Yöntemi	22-25
2-3 Altı Nokta Yöntemiyle Çözüm için Matematiksel Ve Fiziksel Varsayımlar	27-27
2-4 IIA Hali için Altı Nokta Sonlu Fark Denklemine Yakınsaklık Ve Stabilitesi	28-35
III - ÇÖZÜM	36
3-1 Çözüm Algoritması	36-38
3-1-1 IIA Hali Çözüm Algoritması	38-39
3-1-2 IIIA Hali Çözüm Algoritması	39-40
3-1-3 Çözüm Algoritmasının Probleme Uygulanışı	40-44
3-1-4 Algoritması	44-46
3-1-5 Akış Diyagramı	46-51
3-2 Çözümde Karşılaşılan Sorunlar ve Çözümleri	52-54
IV - ELDE EDİLEN SONUÇLAR	55
4-1 Çözümde Elde Edilen Sonuçlar	55-58
4-2 Sonuçların Uç Nokta ile Karşılaştırılması	58
4-3 Sonuçların Fiziksel Verilerle Karşılaştırılması	58-59
V - TARTIŞMA	60
5-1 Hatanın İrdelenmesi	60-64
5-2 Fiziksel Uygunluk	65
5-3 Yapılması Gerekenler	65



VI - KAYNAKLAR

VII - TEŞEKKUR

VIII - ÖZGEÇMİŞ

SUMMARY

In this study, an aluminum target material is irradiated by a laser beam to a point located at the center of its surface, assuming that this is a point of source of energy. Isothermal surfaces are supposed as spheroidal surfaces with center at point and dimension of the semi-infinite material. Temperature changes appearing along its axis is calculated by an appropriate numerical method described below.

Heat distributions have been calculated by using finite difference numerical method which consists of three mesh points. Here, it was used Crank - Nicolson Method, with six mesh points, applied to linear partial differential equations in implicit form, in such a way that to solve non-linear partial differential equations. In this solution it was preferred the explicit form of the method.

In this paper, the numeric results were compared with the others obtained by three point finite difference method and experimental results. An error analysis is also studied.



SUMMARY

In this study, an aluminum target material is irradiated by a laser beam to a point located at the center of its surface, assuming that this is a point of source of energy. Isothermal surfaces are supposed as spherical surfaces with center at point and dimension of the semi-infinite material. Temperature changes appering along its axis is calculated by an appropriate numerical method described below.

Heat distributions have been calculated by using finite difference numerical method which consists of three mesh points./1/. Here, it was used Crank - Nicolson Method with six mesh points, applicated to linear partial differantial equations in implicit form, in such a way that to solve non - linear partial differantial equations. In this solution it was prefered the explicit form of the method.

In this paper, the numeric results were compared with the others obtained by three point finite difference method and experimental resulsts. An error analysis is also studied.



İ N G İ R İ S

1.1. PROBLEMIN FİZİKSEL AÇIKLANMASI

Lazer izale sanayinde, malzemelerin kesme delme, kaynak ve sertleştirme gibi çeşitli işlemlerinde kullanılmaktadır.

Malzemenin çeşitli nedenlerle laserle ısınlanması ve soğuma sırasında, malzeme içinde yüksek sıcaklıklara ulaşıldığından /1,2/, **Ö Z E T** mede çeşitli değişiklikler meydana gelmektedir. /3/. Bu değişiklikler laserin malzemeye aktardığı enerji miktarına ve buna bağlı olarak malzeme

Bu çalışmada alüminyum bir cismin yüzeyinde, merkezindeki bir noktadan verilen laser ışınının, cismin eksenı boyunca meydana getireceği sıcaklık değişiklikleri, ışınlanan kısım bir nokta, ayrıca, eşsıcaklık yüzeylerinin bir nokta merkezli küre yüzeyleri olduğu sonucu ve bu cismin yarı sonsuz olduğu varsayımları altında, ve sıcaklık dağılımları nümerik yöntemle hesaplanmıştır.

Sıcaklık dağılımları, nümerik olarak daha önce üç noktayı içeren sonlu fark yöntemi kullanılarak yapılmıştır /1/. Burada, Lineer Kısmı Türevli Diferansiel denklemlere Implicit(kapalı) biçimde uygulanan ve altı kafes noktasını içeren Crank - Nicolson yöntemi, non-linear Kısmı Türevli Diferansiel denkleme, explicit (açık) biçimde uygulanmıştır.

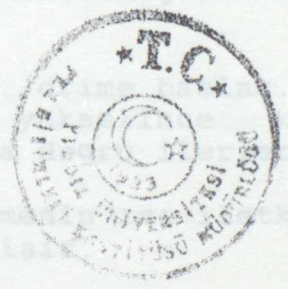
Bu çalışmada, elde edilen nümerik sonuçlar üç nokta sonlu fark yönteminden elde edilen sonuçlar ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılarak hata analizi yapılmıştır.

c-) Sıcaklık, ısı iletim katsayısı ve ısı kapasitesine bağlı olarak ve ısı iletim esaslarına göre malzemenin ısı taraflarına doğru ilerler.

d-) Sıcaklık yeterince yükselince, malzeme yüzeyinde kızılötesi ışınım başlar ve bu ışınımın bir kısmı ortamı ısıtır. Bu durumda sıcaklık daha da yükselir ve yüzey malzemenin ısı taraflarına doğru ilerler.

e-) Sıcaklığın yükselmesi ile malzemenin ısı kapasitesi ve yoğunluğu değişir ve bu da sıcaklığın yayılma hızını etkiler.

f-) Sıcaklığın daha da artması ile buharlaşma ve plazma oluşumu başlar. Absorpsiyon gücü artar, yansıtma azalır dolayısıyla, ortama kaçan ısı miktarı da azalır.



1-2 ISI İLETİMİ DENKLEMLERİ

Malzemeye laser ışınlanması sırasında, meydana gelen bu
1.1.1. PROBLEMİN FİZİKSEL AÇIKLAMASI $u=u(x,t)$ olmak üzere,

Laser imalat sanayinde, malzemelerin kesme delme, kaynak ve sertleştirme gibi çeşitli işlemlerinde kullanılmaktadır.

Malzemenin çeşitli nedenlerle laserle ışınlanması ve soğuma sırasında, malzeme içinde yüksek sıcaklıklara ulaşıldığından /1,2/, malzemede çeşitli değişiklikler meydana gelmektedir. /3/. Bu değişiklikler laserin malzemeye aktardığı enerji miktarına ve buna bağlı olarak malzeme içindeki sıcaklık dağılımına bağlıdır.

Laserle ışınlama sırasında malzeme içinde yüksek sıcaklıklara ulaşıldığından dolayı, malzemenin ışıl özellikleri sıcaklığa bağlı olarak değişmekte, erimis ve plazma haline gelmiş bölgeler bulunmakta ve erimis bölgelerde konveksiyon akımları görülmektedir /3,4/. sayılı ve non-linear olduğundan bu denklemin bilinen bir analitik

Bu yüzden, malzemenin laserle ışınlanması sırasında, malzemede meydana gelebilecek olaylar aşağıdaki gibi sıralanabilir; iletkenliği ve ısı kapasitesi sabit

a-) Laser ışınlarının malzeme tarafından absorblanan en fazla nüfuz derinliğine kadar ilerler. Bu arada enerji ısı enerjisine dönüşür. Ve sıcaklık yükselmeye başlar.

b-) Sıcaklığın ortam sıcaklığına göre yükselmesi ile, ortama ısı kaçırmaya başlar.

c-) Sıcaklık, ısı iletim katsayısı ve ısı kapasitesine bağlı olarak ve ısı iletim esaslarına göre malzemenin iç taraflarına doğru ilerler.

d-) Sıcaklık yeterince yükselince, erime başlar. Eriyen kısımlarda sıcaklık daha da yükselince katı-sıvı yüzeyi malzemenin iç taraflarına doğru ilerler.

e-) Sıcaklığın yükselmesi ile malzemenin ısı iletkenliği, ısı kapasitesi ve yoğunluğu değişir.

f-) Sıcaklığın daha da artması ile buharlaşma ve plazma oluşumu başlar. Absorbsiyon şiddetle artar, yansıma azalır dolayısıyla, ortama kaçan ısı miktarı da azalır.

7-) Işınlanan kısım bir nokta olarak kabul edilmektedir. Esas olarak yüzeylerinin bir nokta merkezli küre yüzeyleri olduğu sonucu /1,2/ varsayılabilir.

8-) Isı iletkenliği belli malzemeler sıcaklık aralıklarında, belli analitik ifadeler ile ifade edilebilirler.



1-2 ISI İLETİM DENKLEMİ

Malzemeye laser ışınlanması sırasında, meydana gelen bu olayları içeren ısı iletim denklemi $u=u(x,t)$ olmak üzere,

$$A(x,t,u,u_x,u_t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t,u,u_x,u_t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} +$$

(1-2-1)

$$C(x,t,u,u_x,u_t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

şeklinde değişken katsayılı bir kısmi türevli diferansiel denklemdir.

Malzemeye laserle ışınlama sırasında meydana gelen bu olayları içeren ısı iletim denklemi, değişken katsayılı ve non-linear olduğundan bu denklemin bilinen bir analitik çözümü yoktur/5/.

Ancak, ısı iletkenliği ve ısı kapasitesi sabit alındığından, denklem lineer hale gelir. Ve problemin analitik çözümü belli sınır şartları altında mevcuttur /8/. Bunun dışında bazı varsayımlar altında ve bazı nümerik yöntemlerle çözüme gidilebileceği sanılmaktadır.

Varsayımlar ve koşullar şunlardır ; /1/

- 1-) Laserin şiddeti zamanla değişmemektedir.
- 2-) Işın genişliği dar olup, cismin yüzeyine dik gelmektedir.
- 3-) Işınlama sırasında ışınlanan bölgede yüzey sıcaklığı monoton ve ışınlanan noktada sıcaklık lineer artmaktadır.
- 4-) Ergime sıcaklığındaki eşsıcaklık yüzeyi iletim esaslarına göre hareket etmektedir.
- 5-) Cisim homojen ve izotropdur.
- 6-) Yüzeylerden ısı kaybı olmamaktadır.
- 7-) Işınlanan kısım bir nokta olarak kabul edilmektedir. Eşsıcaklık yüzeylerinin bir nokta merkezli küre yüzeyleri olduğu bunun sonucu /1,6/ olarak varsayılmıştır.
- 8-) Isı iletkenliği belli malzemeler için, belli sıcaklık aralıklarında, belli analitik fonksiyonlarla ifade edilebilirler.



- 9-) Katı-sıvı arayüzeyinde bileşim değişikliği yoktur. bir malzemenin, burada, alüminyum için ısı iletkenliği,
 10-) Cismin özgül ısısı ile yoğunluğunun çarpımı sıcaklığa bağlı değildir. (ısı kapasitesi = sabit)

Yukarıdaki varsayımlar altında, ısı iletim denkleminin yazılabilmesi için değişkenler aşağıdaki gibi tanımlansın.

v_0 : ışınlama öncesi cismin ve ortamın sıcaklığı,

v : herhangi bir anda, cismin herhangi bir yerindeki sıcaklık, t : zaman,

t : zaman, (1-2-2) denkleminde yerine konursa,

$$v = v - v_0$$

K : cismin ısı iletkenliği, $K = K(v)$ dir.

ρ : cismin yoğunluğu,

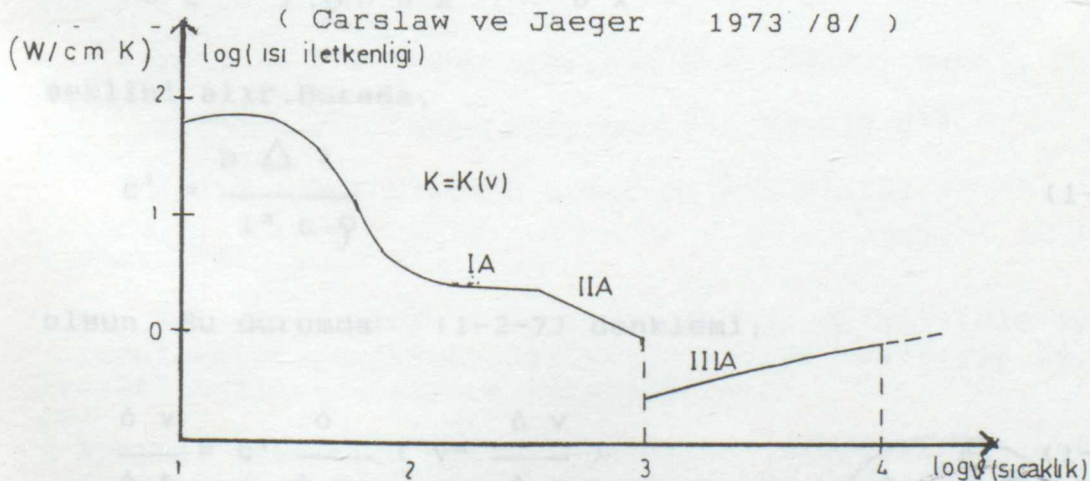
c_0 : cismin ısı kapasitesi, $c_0 = \rho \times c$ dir. Sabit olduğu kabul edilecektir.

Δt : Işınlama süresi, $\Delta t = 1,4 \times 10^{-3}$ sn dir.

l : Cismin ışınlama doğrultusu veya X eksenini boyunca uzunluğu, $l = 0,3$ cm dir.

Bu ışınlama sırasında yüzeyde ısı kaybı olmadığı varsayıldığından, durumu en iyi ifade eden ısı iletim denklemini /1/,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1-2-2)$$



Sekil(1-2-1) Alüminyum ısı iletkenliğinin sıcaklıkla değişimi /7/.

Cismin ısı iletkenliği $K = K(v)$ olduğu için belli bir malzemenin, burada, alüminyum için ısı iletkenliği,

$$\log K = a \log v + \log b \quad (1-2-3)$$

yazılabilir. $K = b v^a$ ısı iletkenlik denklemi en genel olarak (1-2-4) olarak

şeklinde ifade edilebilir. Şekil(1-2-1) de alüminyum için, ısı iletkenliğinin sıcaklıkla değişiminde değişim aralıkları gösterilmektedir /7/.

(1-2-4) denklemi, (1-2-2) denkleminde yerine konursa, olarak yazılabilir. /1/ Burada cözüm fonksiyonu $v=v(x,t)$ dir.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \frac{\partial}{\partial x} \left(b v^a \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1-2-5)$$

denklemini elde edilir.

(1-2-5) denkleminin çözümünde bazı basit haller dışında nümerik çözüm kullanılması ve değişkenlerin boyutsuz hale getirilmesi uygun olmaktadır.

$$x = \frac{1}{l} x, \quad t = \frac{1}{\Delta t} t \quad (1-2-6)$$

dönüşümleri ile (1-2-5) ifadesi;

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{b \cdot \Delta t}{l^2 \cdot \rho \cdot c} \frac{\partial}{\partial x} \left(v^a \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1-2-7)$$

şeklini alır. Burada,

$$c' = \frac{b \cdot \Delta t}{l^2 \cdot \rho \cdot c} \quad (1-2-8)$$

olsun. Bu durumda (1-2-7) denklemi;

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c' \frac{\partial}{\partial x} \left(v^a \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1-2-9)$$

denklemine dönüşür. Buradan ,



IA hali için:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c'}{a+1} \frac{\partial^2 v^{a+1}}{\partial x^2} \quad (1-2-10)$$

yazılabilir. Böylece, ısı iletim denklemi en genel haliyle;

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c'}{a+1} \frac{\partial^2 v^{a+1}}{\partial x^2} \quad (1-2-11)$$

olarak yazılabilir. // Burada çözüm fonksiyonu $v=v(x,t)$ dir.

1-3 ISI İLETİM DENKLEMİNİN ÇÖZÜM YOLLARI

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c'}{a+1} \frac{\partial^2 v^{a+1}}{\partial x^2} \quad (1-3-1)$$

ısı iletim denkleminin çözülebilmesi için problem daha özel hale getirilmelidir. Bunun için, homojen silindirik şekilde, yeterince büyük bir alüminyum cisime, sıcaklığın yalnızca ön yüzeyinden ve merkezindeki bir noktasından laser verildiği varsayalım.

Bu ısı iletim denkleminin bazı özel haller dışında bilinen bir analitik çözümü yoktur //.

Arı alüminyum ısı iletkenliğinin sıcaklığa ait şekil(1-2-1), Mondolfo // grafiğinden, alüminyum için K'nın sıcaklıkla değişimi $K = K(v)$;

$25^\circ\text{C} < v < 200^\circ\text{C}$ arasında $K=2.398833$, sabit,

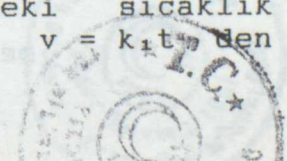
$200^\circ\text{C} < v < 660^\circ\text{C}$ arasında $K=7.943282 v^{-0.2}$,

$660^\circ\text{C} < v < 13000^\circ\text{C}$ arasında $K=0.074131 v^{0.37}$

olmaktadır.

Bu durumda, (1-3-1) denkleminin her üç hal için ayrı ayrı incelenmesi gerekmektedir. Ve bu haller sırasıyla IA, IIA ve IIIA halleri olarak adlandırılınsın.

Ayrıca, ışınlanan yüzey noktasında sıcaklık $v = k_1 t$ olarak artmaktadır. Işınlamanın $t=1$ anında yüzeydeki sıcaklık $v=13000^\circ\text{C}$ olarak kabul edilirse // $v = k_1 t$ den $k_1 = 13000$ olarak hesaplanır.



IA hali için; $v_{IA}(x, 1.35 \cdot 10^{-2}) = v_{IA}(x, 1.35 \cdot 10^{-2})$

$v = v - v_0 = 200 - 25 = 175 \text{ } ^\circ\text{C}$ olduğundan,

olur. Burada $v = 175 \text{ } ^\circ\text{C}$ için t_{IA} çözüm matrisinde $t = 1.35 \cdot 10^{-2}$ için sıcaklık $t_{IA} = \frac{v}{k_1} = \frac{175}{13000} = 1.355 \cdot 10^{-2} \text{ (sn)}$ olarak hesaplanır. $0 < x < 1$ için $0 < t < 1.35 \cdot 10^{-2}$ çözüm bölgesinde $t = 1.35 \cdot 10^{-2}$ için hesaplanmıştır. IA halinin bu olarak hesaplanır. k_1 sıcaklık değerleridir.

IIA hali için; $v_{IIA}(x, 4.89 \cdot 10^{-2}) = v_{IIA}(x, 4.89 \cdot 10^{-2})$ ise,

$v = 660 - 25 = 635 \text{ } ^\circ\text{C}$ olduğundan, 10^{-2} için,

$$t_{IIA} = \frac{635}{13000} = 4.89 \cdot 10^{-2} \text{ (sn)} \quad (1-3-5)$$

ve IIIA hali için $t_{IIIA} = 1$ olarak hesaplanmaktadır. in IIA halinden $v = 635 \text{ } ^\circ\text{C}$ olduğu x_1 değeri ve $v(x, 4.89 \cdot 10^{-2})$ değeri ise $0 < x < 1$ için $0 < t < 1.35 \cdot 10^{-2}$ çözüm bölgesinde $t = 4.89 \cdot 10^{-2}$ için hesaplanmıştır. IA halinde ilk adımda kullanılan sıcaklık değerleridir.

Bu durumda IA, IIA VE IIIA halleri ve çözümleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

1-3-1 IA hali ve çözümü

Sıcaklığın $0 < v < 175 \text{ } ^\circ\text{C}$ olduğu bölgede geçerli olup, $K = 2.399$ ve $a = 0$ olduğundan $c' = 1.645 \cdot 10^{-13}$ olarak hesaplanır. Bu değer (1-3-1) denkleminde yerine yazılıp, $c' = CI$ olduğu kabul edilirse, (1-3-1) denklemi,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1-3-2)$$

şeklini alır.

(1-3-2) denkleminin başlangıç ve sınır şartları yüzeydeki sıcaklığa göre değişmektedir.

Başlangıç şartı;

Yüzeydeki sıcaklık $0 < v < 175 \text{ } ^\circ\text{C}$ ise, ve $t = 1.35 \cdot 10^{-2}$ için $0 < x < 1$, $t = 0$ için $v(x, 0) = 0$

Yüzeydeki sıcaklık $175 \text{ } ^\circ\text{C} < v < 635 \text{ } ^\circ\text{C}$ ise,

$x_1 < x < 1$, $t = 1.35 \cdot 10^{-2}$ için,



$$v(x, 1.35 \cdot 10^{-2}) = v_{IIA}(x, 1.35 \cdot 10^{-2})$$

IA halinin çözüm bölgesi, sınır ve başlangıç koşulları yüzey noktaları dışında önceden bilinmediğinden elde edilen sonuçlara göre kabaca şekli (1-3-4)

olur. Buradaki x_1 , IIA çözüm matrisinde $t=1.35 \cdot 10^{-2}$ için sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x_1 değeridir. $v_{IIA}(x, 1.35 \cdot 10^{-2})$ sıcaklık değeri $[0 < x < 1 \text{ X } 0 < t < 1.35 \cdot 10^{-2}]$ çözüm bölgesinde $t=1.35 \cdot 10^{-2}$ için hesaplanmış, IA halinin bu zaman için kullandığı sıcaklık değerleridir.

Yüzeydeki sıcaklık $635 \text{ }^\circ\text{C} < v < 13000 \text{ }^\circ\text{C}$ ise,

$$x_2 < x < 1, t = 4.89 \cdot 10^{-2} \text{ için,}$$

$$v_{IIA}(x, 4.89 \cdot 10^{-2}) = v(x, 4.89 \cdot 10^{-2})$$

(1-3-5)

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $x_2, t=4.89 \cdot 10^{-2}$ için IIA halinden sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x_1 değeri ve $v(x, 4.89 \cdot 10^{-2})$ değeri ise, $[0 < x < 1 \text{ X } 0 < t < 1.35 \cdot 10^{-2}]$ çözüm bölgesinde $t=4.89 \cdot 10^{-2}$ için hesaplanmış IA halinde ilk adımda kullanılan sıcaklık değerleridir.

IA halinin sınır koşulları,

Yüzeydeki sıcaklık $v < 175$ ise,

$$x=0, 0 < t < 1.35 \cdot 10^{-2} \text{ için } v(0,t) = k_1 t$$

(1-3-6)

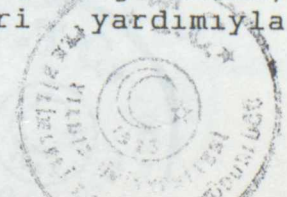
Yüzeydeki sıcaklık $v > 175$ ise,

$$x=x_1, t > 1.35 \cdot 10^{-2} \text{ için } v(x,t) = v_{IIA}(x, t)$$

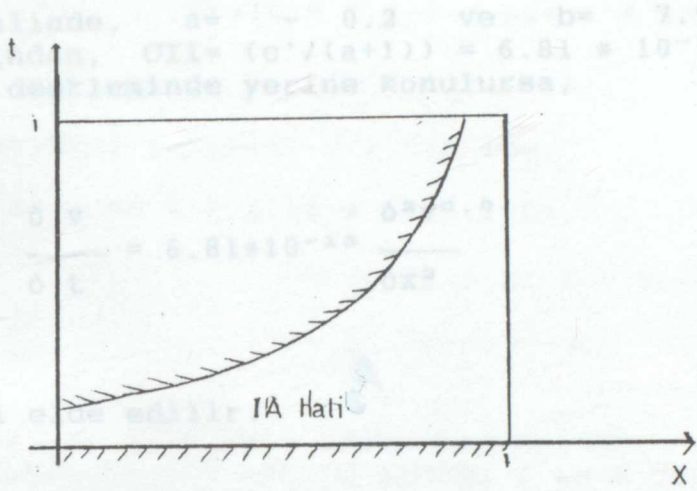
(1-3-7)

dır. Burada, $x_1, t > 1.35 \cdot 10^{-2}$ için IIA çözüm matrisinde sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x değerleri ve $v_{IIA}(x, t)$ ise $t > 1.35 \cdot 10^{-2}$ için IIA çözüm matrisinde sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x_1 ve t , değerleri kullanılarak hesaplanan IA hali sınır değerleridir. Bu değerler IA halinin $v \geq 175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu bölgelerdeki sınır koşulunu oluşturmaktadır.

Yukarıda anlatıldığı gibi, IA halinin sınır ve başlangıç değerleri, yüzey noktaları dışındaki noktalarda daha önceden bilinmemektedir. Bilinmeyen bu IA sınır değerleri, IIA çözüm matrisinde sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x_1 ve t , ler yardımıyla ve $t=0$ anının dışındaki IA hali başlangıç değerleri ise, $t=1.35 \cdot 10^{-2}$ ve $t=4.89 \cdot 10^{-2}$ için çözüm matrisinde sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x_1 değerinden, $x=1$ değerine kadar olan tüm x değerleri yardımıyla belirlenmektedir.



IA halinin çözüm bölgesi, sınır ve başlangıç koşulları yüzey noktaları dışında önceden bilinmediğinden, elde edilen sonuçlara göre kabaca şekil(1-3-1) probleği gösterilebilir.



Sekil (1-3-1)

IA haline ait (1-3-2) denklemleri ile ifade edilen başlangıç şartları ve (1-3-6) (1-3-7) denklemleri ile ifade edilen IA hali problemi, lineer kısmi türevli parabolik bir diferansiel denklemdir. Bu sistemin analitik çözümü Carslaw - Jaeger /8/ den uygun bir şekilde yazılarak,

$$v = k_1 t \left[\left(1 + \frac{x^2}{2 \cdot CI \cdot t} \right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{CI \cdot t}}} e^{-z^2} dz \right) - \frac{x}{\sqrt{\pi \cdot CI \cdot t}} e^{-\frac{x^2}{4 \cdot CI \cdot t}} \right]$$

$$\left[\frac{x}{\sqrt{\pi \cdot CI \cdot t}} e^{-\frac{x^2}{4 \cdot CI \cdot t}} \right] \tag{1-3-8}$$

şeklindedir.



1-3-2 IIA hali ve çözümü

[$0 \leq x \leq 1 \times 1.355 \times 10^{-2} < t \leq 1$] bölgesinde sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C} < v \leq 635 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu bölgeler için IIA hali problemi geçerlidir.

IIA halinde, $a = 0.2$ ve $b = 7.943$ olarak alındığından, $CII = (c'/(a+1)) = 6.81 \times 10^{-13}$ hesaplanır. (1-3-1) denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 6.81 \times 10^{-13} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1-3-9)$$

denklemini elde edilir.

IIA hali başlangıç şartları,

1-Yüzeydeki sıcaklık $175 \text{ }^\circ\text{C} < v \leq 635 \text{ }^\circ\text{C}$ ise,

$0 \leq x \leq x_1$ ve $t = 1.355 \times 10^{-2}$ için,

$$v_{IIA}(x, 1.355 \times 10^{-2}) = v_{IA}(x, 1.355 \times 10^{-2}) \quad (1-3-10)$$

dır. Burada, $x_1, t = 1.355 \times 10^{-2} + \Delta t$ için IIA çözüm matrisinde sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x ve $v_{IA}(x, 1.355 \times 10^{-2})$ ise $t = 1.355 \times 10^{-2} + \Delta t$ ve $0 \leq x \leq x_1$ değerleri için IIA halinin $t = 1.355 \times 10^{-2}$ için IA halinden kullanılan sıcaklık değerleridir.

2- Yüzeydeki sıcaklık $v > 635$ ise,

IIA hali başlangıç şartı,

$x_2 \leq x \leq x_3$ ve $t = 4.89 \times 10^{-2}$ için,

$$v_{IIA}(x, 4.89 \times 10^{-2}) = v_*(x, 4.89 \times 10^{-2}) \quad (1-3-11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $x_2, t = 4.89 \times 10^{-2}$ için, IIIA haliyle hesaplanan $v = 635 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x değeri ve x_3 ise, aynı t anında, IIA haliyle sıcaklığın $v = 175 \text{ }^\circ\text{C}$ olarak hesaplandığı x değeridir. $v_*(x, 4.89 \times 10^{-2})$ $t = 4.89 \times 10^{-2} + \Delta t$ anında sıcaklığın $175 \text{ }^\circ\text{C} < v \leq 635 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu aralıkta, IIA halinin $t = 4.89 \times 10^{-2}$ anından kullandığı sıcaklık değerleridir.



IIA halinin sınır koşulları ise, yine IA halindeki gibi yüzey noktaları dışında daha önceden bilinmemekte olup, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

1-Yüzeydeki sıcaklık $175 \text{ }^\circ\text{C} < v < 635 \text{ }^\circ\text{C}$ ise ,

$$x=0 \quad 1.355 \cdot 10^{-2} < t < 4.89 \cdot 10^{-2} \text{ için,}$$

$$v(0,t) = k_1 t \quad (1-3-12)$$

2-Yüzeydeki sıcaklık $v > 635$ ise,

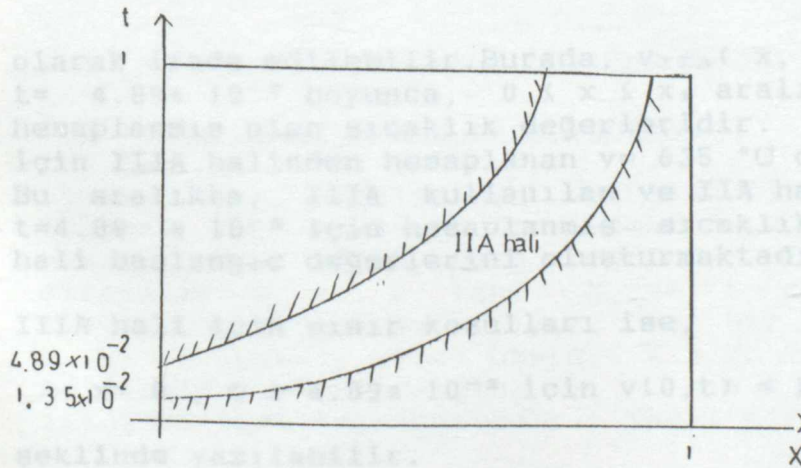
$$x=x_1 \text{ ve } t \geq 4.89 \cdot 10^{-2} \text{ için,}$$

$$v(x_1, t_3) = v_{IIIA}(x_1, t_3)$$

$$(1-3-13)$$

dır. Burada, x_1 IIIA hali çözüm matrisinde $t \geq 4.89 \cdot 10^{-2}$ için, sıcaklığın $v = 635 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x ve t değerleri yardımı ile IIA hali sınır değerleri $v > 635 \text{ }^\circ\text{C}$ için belirlenmektedir. $v_{IIIA}(x_1, t_3)$ ise $x = x_1$ ve $t \geq 4.89 \cdot 10^{-2}$ için IIIA halinden hesaplanan sıcaklık değerleridir. Bu IIA halinin $v > 635$ için sınır değerlerini oluşturmaktadır.

IIA halinin de başlangıç ve sınır koşulları iç noktalarda önceden bilinmediğinden elde edilen sonuçlar da gözönüne alınarak kabaca şekil (1-3-2) deki gibi gösterilebilir.



Şekil (1-3-2)

IIA haline ait (1-3-9) denklemi, (1-3-10), (1-3-11) denklemleri ile ifade edilen başlangıç şartları ve (1-3-12) (1-3-13) denklemleri ile ifade edilen sınır şartları non-linear kısmı türevli diferansiyel denklemi oluşturmaktadır.

IIA hali probleminin bilinen bir analitik çözümü olmadığı için nümerik çözümüne gidilecektir.

Bu çalışmada, bu denklemin sonlu fark yöntemi ile altı kafes noktası kullanılarak (Crank - Nicolson) çözümü incelenektir.

1-3-3 IIIA hali ve çözümü

[$0 \leq x \leq 1 \times 4.890 \times 10^{-2} < t \leq 1$] bölgesinde sıcaklığın $635 \text{ }^\circ\text{C} < v \leq 13000 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu bölgeler için IIIA hali problemi geçerlidir.

IIIA halinde, $a = 0.37$ ve $b = 0.07413$ olarak alındığından, (1-3-1) denkleminde yerine konulursa,

Her $\frac{\partial v}{\partial t}$ ile ilgili denklem $\frac{\partial^2 v^{1.37}}{\partial x^2}$ buradaki denklemlerin birbirleriyle $= 1.039 \times 10^{-15}$ bu, ayrıca sınır ve (1-3-14) koşulları birbirlerinin $\frac{\partial v}{\partial x}$ olduğu görülmektedir.

şeklinde non-linear kısmi türevli diferansiel denklem elde edilir. Buradaki hallerinde bilinen analitik çözümü olmadığından IIA ve IIIA halinin çözümlerinde nümerik IIIA hali için başlangıç şartları,

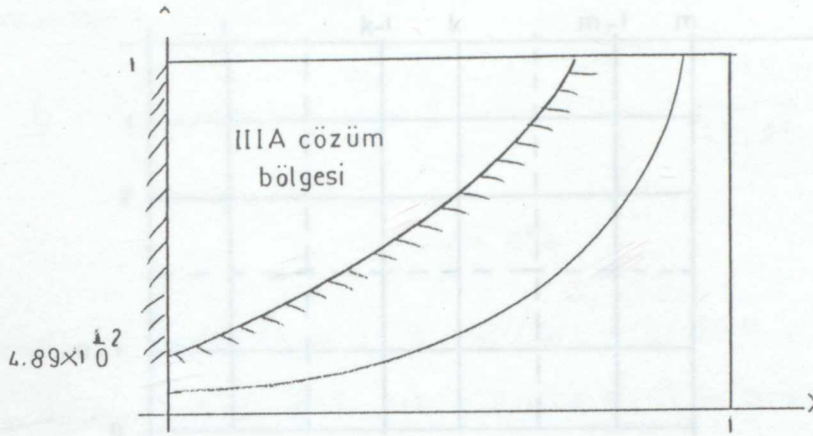
Bu $0 \leq x \leq x_1$, $t = 4.89 \times 10^{-2}$ için, altı noktayı içeren sonlu fark nümerik yöntemi açık (1-3-14) biçiminde kullanılarak $v(x, 4.89 \times 10^{-2}) = v_{IIIA}(x, 4.89 \times 10^{-2})$

olarak ifade edilebilir. Burada, $v_{IIIA}(x, 4.89 \times 10^{-2})$ değeri, $t = 4.89 \times 10^{-2}$ boyunca, $0 \leq x \leq x_1$ aralığında IIA hali ile hesaplanmış olan sıcaklık değerleridir. x_1 ise $t = 4.89 \times 10^{-2}$ için IIIA halinden hesaplanan $v = 635 \text{ }^\circ\text{C}$ olduğu x değeridir. Bu aralıkta, IIIA kullanılan ve IIA hali ile daha önce $t = 4.89 \times 10^{-2}$ için hesaplanmış sıcaklık değerleri, IIIA hali başlangıç değerlerini oluşturmaktadır.

IIIA hali için sınır koşulları ise, bir kafes noktası (X, T) , $x = 0$ ve $x = x_1$ için $T = nk$ ile ifade edilir. $x = 0$, $t \geq 4.89 \times 10^{-2}$ için $v(0, t) = k_1 t$ orijin noktası ifadesi kullanılmaktadır. (Şekil (1-4-1)).

IIIA halinin çözüm bölgesinde de sınır koşulu baştan bilindiği halde başlangıç koşulu baştan bilinmemektedir, çözüm esnasında belirlenmektedir. Şekil(1-3-3) de kabaca IIIA hali çözüm bölgesi gösterilmektedir.





Şekil (1-3-3)

Her üç hale dikkat edilirse, buradaki denklemlerin birbirleri ile bağlantılı olduğu, ayrıca sınır ve başlangıç koşullarının birbirlerinin devamı olduğu görülmektedir.

Arı- alüminyum için oluşturulan ısı iletim denkleminin, IA hali dışındaki hallerinde bilinen analitik çözümü olmadığından IIA ve IIIA halinin çözümlerinde nümerik yöntemle başvurulacaktır.

Bu çalışmada, IIA ve IIIA halleri için altı noktayı içeren sonlu fark nümerik yöntemi açık (explicit) biçimde kullanılacaktır.

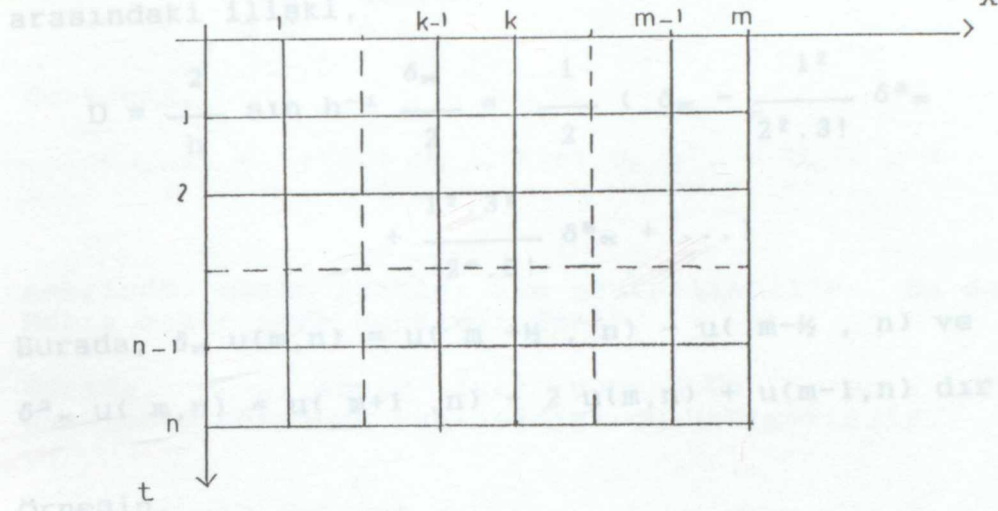
1-4 UÇ NOKTA SONLU FARK YÖNTEMİ NEDEN YETERLİ DEĞİL.

1-4-1 üç nokta sonlu fark yöntemi

Sonlu fark yönteminin uygulanabilmesi için uygulama bölgesi, h , X eksenindeki adım uzunluğu, k ise, t eksenindeki adım uzunluğu olmak üzere, bölge sırasıyla m ve n tane X ve t eksenlerine paralel çizgilerle kafeslere ayrılır. Her bir kafes noktası (X, T) , m ve n integer olmak üzere, $X = mh$ ve $T = nk$ ile ifade edilebilmektedir. Örneğin, $n = m = 0$ ise orijin noktası ifade edilmek istenmektedir. (Şekil (1-4-1)).



D türev operatörü ile X yönündeki merkezi fark operatörü arasındaki ilişki.



Şekil (1-4-1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(x, t, D, D^2) u \quad (1-4-1)$$

diferansiel denklemi gözönüne alınsın. Burada, $D = \frac{\partial}{\partial x}$ ve L lineer operatörü göstereyim. $X = mh$ ve $T = nk$ kafes noktasında fark ve diferansiel denklemi sağlayan fonksiyonlar sırasıyla, $U(m,n)$ ve $u(m,n)$ ile gösterilsin. Taylor açılımıyla,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left(1 + k \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) u(x,t) \\ &= \exp \left(k \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x,t) \end{aligned}$$

yazılabilir. Şayet, $X = mh$ ve $T = nk$ için $u(mh, nk) = u(m, n)$ alınır,

$$\begin{aligned} u(m, n+1) &= \exp \left(k \frac{\partial}{\partial t} \right) u(m, n) \\ &= \exp(kL) u(m, n) \end{aligned}$$

yazılabilir.



D türev operatörü ile X yönündeki merkezi fark operatörü arasındaki ilişki,

$$D = \frac{2}{h} \sin h^{-1} \frac{\delta_x}{2} = \frac{1}{2} \left(\delta_x - \frac{1^2}{2^2 \cdot 3!} \delta_x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 5!} \delta_x^5 + \dots \right) \quad (1-4-3)$$

Burada, $\delta_x u(m,n) = u(m + \frac{1}{2}, n) - u(m - \frac{1}{2}, n)$ ve

$\delta_x^2 u(m,n) = u(m+1, n) - 2u(m,n) + u(m-1,n)$ dir. diferansiyel

Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

şeklinde kısmi türevli diferansiyel denklem gözönüne alınsın. Bu problem için $L \equiv D^2$ olacağından, $u(m, n)$ terimi,

$$u(m,n) = \exp(k D^2) u(m,n) \quad (1-4-1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \left(\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 + \dots \right)$$

olduğundan (1-4-1) denklemine yerine konursa,

$$u(m,n+1) = \left[1 + r \delta_x^2 + \frac{1}{2} r \left(r - \frac{1}{6} \right) \delta_x^4 + \frac{1}{6} r \left(r^2 - \frac{1}{2} r + \frac{1}{18} \right) \delta_x^6 + \dots \right] u(m,n) \quad (1-4-2)$$

elde edilir. Burada, $r = (k / h^2)$ oranıdır. (1-4-2) denklemine yalnız ikinci derece farkları alıp diğerleri ihmal edilirse, fark denklemi,

$$u_{m,n+1} = (1 + r \delta_x^2) u_{m,n}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, δ_x^2 yerine konup düzenlenirse,



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

denklemini,

$$U_{m,n+1} = (1-2r) U_{m,n} + r(U_{m+1,n} + U_{m-1,n})$$

(1-4-3)

şeklinde sonlu farklar ile gösterilebilir. Bu denkleme Üç Nokta Sonlu Fark denklemi denir.

Burada, $U_{m,n}$ sonlu fark çözümünün, $U_{m,n}$ diferansiyel denklemin çözümüne yakınsadığı düşünülmektedir.

1-4-2 Neden yeterli değil.

(1-4-3) denkleminde görüldüğü gibi, en basit sonlu fark denklemi yalnızca üç noktayı içeren sonlu fark yöntemidir.

Bu yöntemde, $U_{m,n+1}$ değerinin hesaplanabilmesi için, $U_{m,n}$, $U_{m+1,n}$ ve $U_{m-1,n}$ değerlerinin bilinmesi gerekmektedir.

Üç nokta hesaplamaları yapılırken, $(n+1)t$ zaman seviyesindeki bir noktanın sıcaklık değeri yalnızca nt zaman seviyesine ait üç nokta kullanılarak hesaplanır. Buna karşılık, $(n+1)t$ zaman seviyesinden hiç bir nokta kullanılmamaktadır. Oysa, sıcaklık hesaplamasında $(n+1)t$ zaman seviyesindeki herhangi bir noktaya ait sıcaklık değeri, bu zaman seviyesine ait komşu kafesteki sıcaklık değerinden fiziksel olarak çok fazla etkilenmektedir. Bu yöntemde, $(n+1)t$ zaman seviyesindeki tüm noktaların hesabı yalnızca nt zaman seviyesindeki ilgili noktalarla hesaplandığından üç nokta yeterli değildir.

Burada esas olan k zaman aralığı içinde özellikle, yüzey civarında sıcaklığın çok hızlı artması ve $(n+1)t$ seviyesindeki noktanın nt seviyesindeki noktadan çok, $(n+1)t$ seviyesindeki $(m-1)h$ noktadan etkilenmesi sözkonusudur. Eğer, sıcaklığın yavaş yavaş artması sözkonusu olsaydı, bu durumda olay bu kadar önemli olmayabilecektir. Bu durumun ne kadar etkili olduğu karşılaştırma bölümündeki sonuçlardan anlaşılacaktır (4-2).



II - M E T O D

2-1 ALTI NOKTA YÖNTEMİ

Her mertebeden türevler, ileri, geri ve merkezi farkların sonsuz terimli serileri ile ifade edilebilmektedir. Bu ise, sonlu fark yöntemini oluşturmaktadır.

Örneğin, ikinci mertebeden türev, merkezi farkların sonsuz terimli serisi olarak;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left(\delta^2_x u - \frac{1}{12} \delta^4_x u + \frac{1}{90} \delta^6_x u + \dots \right) \quad (2-1-1)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

(4-2) de geçen bazı tanımlar, (2-1-1) denklemi ve ortalama operatörü μ kullanılarak, altı noktayı içeren sonlu fark yöntemi oluşturulmak istensin.

$P(i, j+\frac{1}{2})$ noktasındaki μ operatörü;

$$\mu f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) \quad (2-1-2)$$

olarak tanımlanır. Aşağıdaki sonuçlar;

$$k \frac{\partial}{\partial t} = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{2} \delta_t \right) \text{ ve } \mu_t = \left(1 + \frac{1}{4} \delta_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-1-3)$$

kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{1,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{1,j+1} \right\} &= k \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{1,j+\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{4} \delta_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} 2 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{2} \delta_t \right) u_{1,j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2-1-4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin sağ tarafı δ_t 'nin pozitif kuvvetleri olarak seriye açılırsa;



denklemini elde edilir. Bu denklemde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ifadesi yerine

$$\frac{1}{2} k \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{1,j} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{1,j+1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} k \left(\delta_t + \frac{1}{12} \delta^3_t - \frac{1}{120} \delta^5_t + \dots \right) U_{1,j+\frac{1}{2}}$$

(2-1-5)

yazılabilir. Buradan, (2-1-5) denklemi,

$$\delta_t U_{1,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} k \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{1,j} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{1,j+1} \right\} + C_t U_{1,j+\frac{1}{2}}$$

(2-1-6)

olarak düzenlenebilir. Bu denklemde $\delta_t U_{1,j+\frac{1}{2}}$ yerine yazılırsa;

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} k \frac{\partial}{\partial t} (U_{1,j} + U_{1,j+1}) + C_t U_{1,j+\frac{1}{2}}$$

(2-1-7)

denklemini elde edilir. Bu denklemdeki,

$$C_t = - \frac{1}{12} \delta^3_t + \frac{1}{120} \delta^5_t + \dots$$

(2-1-8)

dır. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklindeki bir kısmi türevli diferansiyel denklemden,

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(2-1-9)

şeklinde özdeşlik yazılabileceğinden (2-1-9) denklemi, (2-1-7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U_{1,j} + U_{1,j+1}) + C_t U_{1,j+\frac{1}{2}}$$

(2-1-10)



denklemini elde edilir. Bu denklemde $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ifadesi yerine (2-1-1) ifadesi konursa, denklem;

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} \frac{k}{h^2} \left\{ \delta^2_x - \frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots \right\} (U_{1,j} - U_{1,j+1}) + C_t U_{1,j+\frac{1}{2}}$$

haline gelir. Düzenlendiğinde,

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} r \left\{ \delta^2_x (U_{1,j} + U_{1,j+1}) \right\} + C \quad (2-1-11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$C = \frac{1}{12} \left\{ \left(-\frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots \right) U_{1,j} + \left(-\frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots \right) U_{1,j+1} \right\} + \left(-\frac{1}{12} \delta^3_t U_{1,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{120} \delta^5_t U_{1,j+\frac{1}{2}} \right)$$

dır. (2-1-11) denkleminde $C = 0$ almak suretiyle elde edilen,

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} r \left(\delta^2_x U_{1,j+1} + \delta^2_x U_{1,j} \right) \quad (2-1-12)$$

denklemine Crank - Nicolson denklemi denir./5/.

$$\delta^2_x U_{1,j} = U_{1-1,j} - 2 U_{1,j} + U_{1+1,j} \quad (2-1-14)$$

$$\delta^2_x U_{1,j+1} = U_{1-1,j+1} - 2 U_{1,j+1} + U_{1+1,j+1}$$

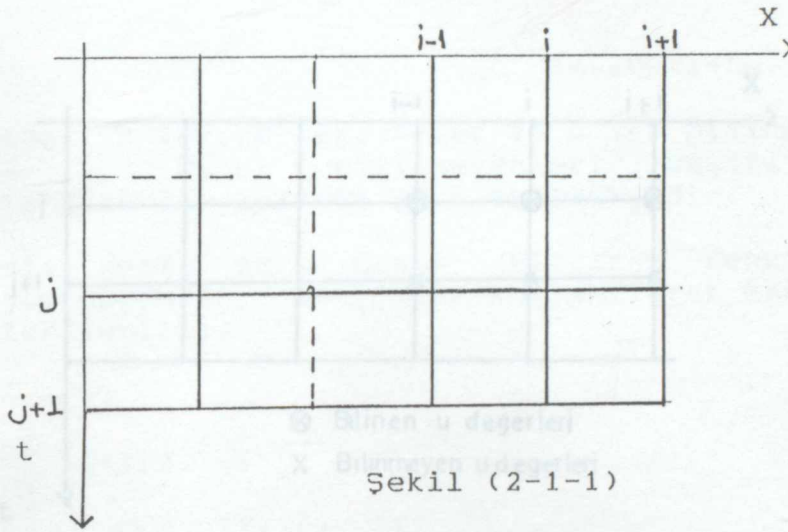
olarak tanımlandığına göre (2-1-12) denklemi daha açık olarak;

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} r \left(U_{1-1,j+1} - 2 U_{1,j+1} + U_{1+1,j+1} + U_{1-1,j} - 2 U_{1,j} + U_{1+1,j} \right) \quad (2-1-13)$$

yazılabilir. Buna Altı Nokta Denklemi de denir.



Burada, $r = (k/h^2)$ dir. k , t zaman eksenindeki adım uzunluğu, h ise X eksenindeki adım uzunluğudur. (2-1-13) denklemi $t = jk$ zamanı boyunca, $U_{i-1,j}$, $U_{i,j}$, $U_{i+1,j}$ ve $t=(j+1)k$ zamanı boyunca $U_{i-1,j+1}$, $U_{i,j+1}$, $U_{i+1,j+1}$ kafes noktalarının değerlerini içermektedir. Şekil (2-1-1).



Şekil (2-1-1)

(2-1-13) sonlu fark denklemi kapalı (implicit) biçimde kullanılmaktadır. Bu çalışmada fark denklemi açık (explicit) olarak kullanılacaktır.

Kapalı (implicit) formülü

Kapalı fark formülünde, sonlu fark yönteminde $t = (n+1)k$ zaman seviyesine ait birden fazla kafes noktasının değeri $t = nk$ zaman seviyesine ait değerleri kullanılarak hesaplanmaktadır. (2-1-13) formülü,

$$-r U_{i-1,j+1} + (2+2r) U_{i,j+1} - r U_{i+1,j+1} \quad (2-1-13)$$

$$= r U_{i-1,j} + (2-2r) U_{i,j} + r U_{i+1,j}$$

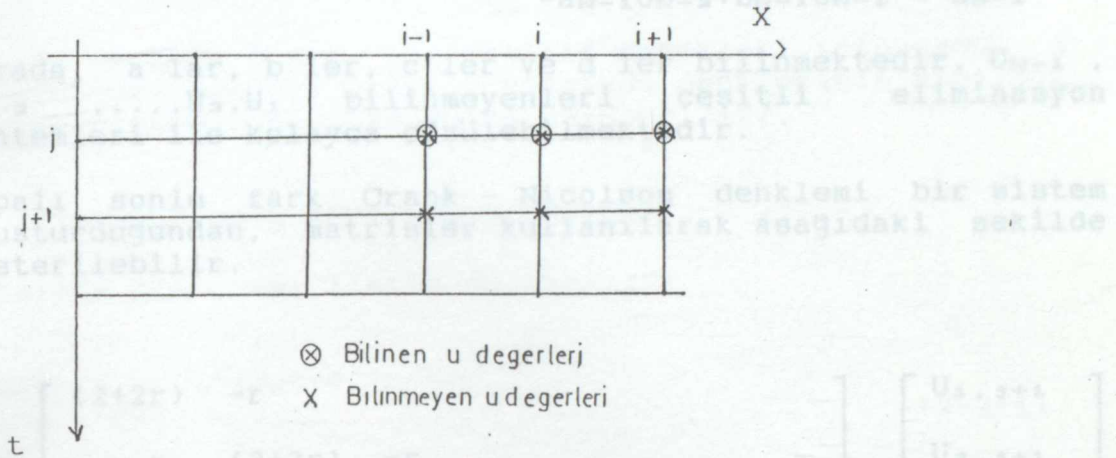
şeklinde ifade edilerek açık (explicit) formü (2-1-14)

şeklinde ifade edilirse, kapalı sonlu fark formülü elde edilir.

Genel olarak, (2-1-14) denkleminin sol yanı üç bilinmeyen değişkeni ve sağ yanı ise üç bilinen değişkeni içerir. Burada, her bir zaman satırına ait N tane aralık söz konusu olursa, örneğin, $j = 0$ için $i = 1, (1)(N-1)$ olmak üzere $(N-1)$ tane denklem yazılır. Bu denklemler sistemi başlangıç ve sınır değerleri içeren terimleri yazdıktan sonra $(N-1)$ tane bilinmeyen içerir. Örneğin, $j = 1$ için, ikinci zaman satırındaki $(N-1)$ tane U bilinmeyeni, birinci zaman satırındaki bir önceki sistem çözümünden elde edilen

bilinen U ' lar kullanılarak oluşturulan yeni sistem çözümlenerek hesaplanır.

Genel olarak, şu söylenebilir: Kapalı metotla herhangi bir t adımı boyunca bilinmeyen U değerleri, bir önceki t adımı boyunca bilinen U değerleri ve başlangıç , sınır değerleri kullanılarak hesaplanır. Şekil(2-1-2).



Şekil (2-1-2)

Açık (explicit) formül

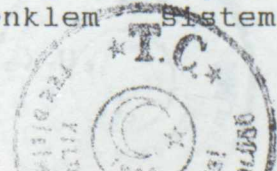
(2-1-13) denklemi,

$$U_{i+1, j+1} = -U_{i-1, j+1} + \frac{2}{r} U_{i, j+1} + 2U_{i, j+1} - U_{i-1, j} - \frac{2}{r} U_{i, j} + 2U_{i, j} - U_{i+1, j} \quad (2-1-16)$$

şeklinde ifade edilerek açık (explicit) formülü elde edilir.

Burada, $U_{i+1, j+1}$ değeri, $U_{i-1, j}$, $U_{i, j}$, $U_{i+1, j}$ ve $U_{i, j+1}$ değerleri kullanılarak hesaplanır. Daha sonraki adımda hesaplanan bu değer $U_{i, j+1}$ olarak kullanılarak hesaplamalara devam edilir.

(2-1-14) deki Crank - Nicolson denklemi, herhangi bir zaman eksenini boyunca $(N-1)$ tane aralığa ayrıldığında, genel olarak, aşağıdaki gibi triodiagonal denklem sistemi yazılır.



$$\begin{array}{rcl}
 b_1 U_1 - c_1 U_2 & = & d_1 \\
 -a_2 U_1 + b_2 U_2 - c_2 U_3 & = & d_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 -a_1 U_{i-1} + b_1 U_i - c_1 U_{i+1} & = & d_i \\
 \vdots & & \vdots \\
 -a_{N-1} U_{N-2} + b_{N-1} U_{N-1} & = & d_{N-1}
 \end{array}$$

Burada, a lar, b ler, c ler ve d ler bilinmektedir. U_{N-1} , U_{N-2} , ..., U_2, U_1 bilinmeyenleri çeşitli eliminasyon yöntemleri ile kolayca çözülebilmektedir.

Kapalı sonlu fark Crank - Nicolson denklemi bir sistem oluşturduğundan, matrisler kullanılarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} (2+2r) & -r & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & -r & (2+2r) & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,s+1} \\ U_{2,s+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N-1,s+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2-2r) & r & & & \\ r & (2-2r) & r & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & r & (2-2r) & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,s} \\ U_{2,s} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N-1,s} \end{bmatrix}$$

(2-1-17)

Buradan,

$$(2I - r T_{N-1}) U_{s+1} = (2I + r T_{N-1}) U_s$$

veya

$$U_{s+1} = (2I - r T_{N-1})^{-1} (2I + r T_{N-1}) U_s$$

yazılabilir. Buradan,



olarak yazılabilir. IIA hali kısmi türevli diferansiel denkleminde,

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{1,j} = CII \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^{0 \cdot B_{1,j}} \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{1,j+1} = CII \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^{0 \cdot B_{1,j+1}}$$

yazılabilir. Bu ifadeler (2-2-2) denkleminde yerine konursa,

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} k CII \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} U^{0 \cdot B_{1,j}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^{0 \cdot B_{1,j+1}} \right) + C_t U_{1,j+1/2}$$

veya

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} k CII \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U^{0 \cdot B_{1,j}} + U^{0 \cdot B_{1,j+1}}) + C_t U_{1,j+1/2}$$

(2-2-3)

denklemini elde edilir.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left(\delta^2_x - \frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots \right)$$

olarak açıldığına göre, (2-2-3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} CII \frac{k}{h^2} \left(\delta^2_x U^{0 \cdot B_{1,j}} + U^{0 \cdot B_{1,j+1}} \right) + C_t U_{1,j+1/2}$$

(2-2-4)

olur. Burada,



2-3 ALTI NOKTA YÖNEMİ İLE ÇÖZÜM İÇİN FİZİKSEL, MATEMATİKSEL VARSAYIMLAR.

Bu çalışmada, IIA için denklemler oluşturulurken YSP: $C = \frac{k}{2h^2} \left(\left(-\frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots \right) U^{0 \cdot a_{1,j+1}} \right)$

IIA hali için oluşturulan sonlu fark denklemi, kapalı fark denklemleri şeklinde $\frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots$ açık sonlu fark denklemleri şeklinde $\left(-\frac{1}{12} \delta^4_x + \frac{1}{90} \delta^6_x + \dots \right) U^{0 \cdot a_{1,j}}$

(2-2-6) sonlu fark denklemleri kapalı fark denklemleri olarak,

$$-r U^{0 \cdot a_{1,j-1}} + 2(U + \frac{1}{12} \delta^2_x U_{1,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{90} \delta^4_x U_{1,j+\frac{1}{2}})$$

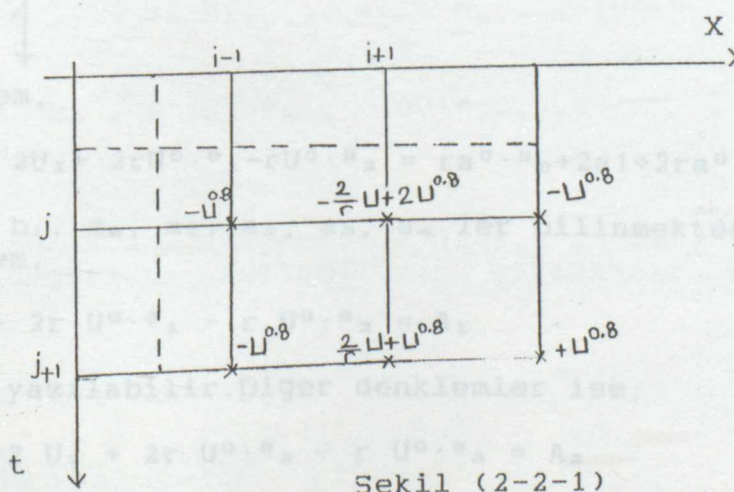
dır. Burada da, $C = 0$ alınarak ihmal edilirse, (2-2-4) denklemi;

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} CII \frac{k}{h^2} (\delta^2_x U^{0 \cdot a_{1,j}} + \delta^2_x U^{0 \cdot a_{1,j+1}}) \quad (2-2-5)$$

olur. Bu denklem, IIA için geliştirilen sonlu fark denklemdir. Bu denklemde, δ^2_x açılımı yerine konur ve $r = (CII k / h^2)$ olarak alınır, daha açık olarak,

$$U_{1,j+1} - U_{1,j} = \frac{1}{2} r (U^{0 \cdot a_{1+1,j}} - 2U^{0 \cdot a_{1,j}} + U^{0 \cdot a_{1-1,j}} + U^{0 \cdot a_{1+1,j+1}} - 2U^{0 \cdot a_{1,j+1}} + U^{0 \cdot a_{1-1,j+1}}) \quad (2-2-6)$$

şeklinde yazılır. Bu ise, IIA için geliştirilen altı tane kafes noktasını içeren ve non-linear sonlu fark denklemdir. Şekil(2-2-1).



Şekil (2-2-1)



2-3 ALTI NOKTA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜM İÇİN FİZİKSEL,
MATEMATİKSEL VARSAYIMLAR.

Bu çalışma esnasında, ısı iletim denklemini oluştururken yapılan fiziksel varsayımlar, çözüm için de geçerlidir.

IIA hali için oluşturulan sonlu fark denklemi, kapalı fark denklemi şeklinde kullanılmayıp, açık sonlu fark denklemi şeklinde kullanılmıştır.

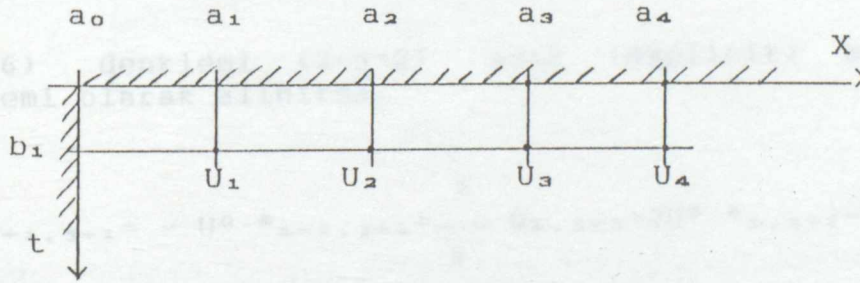
(2-2-6) sonlu fark denklemi kapalı fark denklemi olarak,

$$\begin{aligned} -r U^{0 \cdot \theta_{1-1, j+1}} + 2(U_{1, j+1} + r U^{0 \cdot \theta_{1, j+1}}) - r U^{0 \cdot \theta_{1+1, j+1}} \\ = r U^{0 \cdot \theta_{1-1, j}} + 2(U_{1, j} - r U^{0 \cdot \theta_{1, j}}) - r U^{0 \cdot \theta_{1+1, j}} \end{aligned}$$

(2-3-1)

şeklinde gözönüne alınırsa, IIA halinin çözümünde kullanılmak istendiğinde, $t = (n+1)k$ için hesaplamalar yapılırken $t = nk$ zaman seviyesindeki bilinen U_1 ler yardımıyla, $t = (n+1)k$ zaman seviyesindeki bilinmeyen U_{1+1} ler non-linear denklem sistemi oluşturmaktadır.

Bu sistem oluşturulurken, çözüm bölgesinin sağ sınır değerleri, başlangıçta bilinmemektedir. Bu yüzden, bu değerler önceden IA halinden hesaplanması gerekmektedir. aksi halde denklem sayısı, değişken sayısından az ve çözümü yoktur. Örneğin, aşağıdaki şekil için sistem yazılsın.



1. denklem,

$$-r b_1 + 2U_1 + 2r U^{0 \cdot \theta_1} - r U^{0 \cdot \theta_2} = r a^{0 \cdot \theta_0} + 2a_1 + 2r a^{0 \cdot \theta_1} + r a^{0 \cdot \theta_2}$$

burada, $b_1, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ ler bilinmektedir. Bu yüzden 1. denklem,

$$2U_1 + 2r U^{0 \cdot \theta_1} - r U^{0 \cdot \theta_2} = A_1$$

şeklinde yazılabilir. Diğer denklemler ise;

$$-r U_1 + 2 U_2 + 2r U^{0 \cdot \theta_2} - r U^{0 \cdot \theta_3} = A_2$$



$$-r U_2 + 2 U_3 + 2r U^{0 \cdot a_3} - r U^{0 \cdot a_4} = A_3$$

olur. Burada, A_1 , A_2 , A_3 bilinmektedir. Bu denklem sisteminde 4 tane bilinmeyen üç tane denklem söz konusudur. Ancak, U_4 değeri çözüm bölgesinin sağ sınır değerinden hesaplanabilir. Bunun içinse, IA halinden sıcaklığın $v = 0$ olduğu $x = ss$ değeri belirlenmelidir. Ardından ss mesafesi h adım olmak üzere N aralığa bölündükten sonra sistem yazılmalıdır.

IIA hali için oluşturulan denklem kapalı fark denklemi olarak kullanılırsa, değişken ve denklem sayısı oldukça fazla olacağından ve zor çözülebileceği sanıldığı bir non-linear denklem sistemi ile karşılaşılacağına (2-2-6) denklemi bu çalışmada;

$$U^{0 \cdot a_{i+1, j+1}} = - U^{0 \cdot a_{i-1, j+1}} + \frac{2}{r} U_{i, j+1} + 2U^{0 \cdot a_{i, j+1}} - U^{0 \cdot a_{i-1, j}} - \frac{2}{r} U_{i, j} + 2U^{0 \cdot a_{i, j}} - U^{0 \cdot a_{i+1, j}} \quad (2-3-2)$$

şeklinde açık fark förmülü olarak kullanılacaktır.

(2-2-6) denklemi kapalı fark denklemi olarak kullanılırken, $t = (n+1)k$. adımdaki $i = 1(1)s$ için $U_{i, j}$ ler birden fazla non-linear sistem oluşturacak şekilde düşünülürse, yine $t=(n+1)k$. adım için oluşturulan sistemlerin $U_{i+1, j+1}$ değeri bilinmediğinden, sistemlerin sağ yan vektörleri oluşturulamadığından çözülemezler.

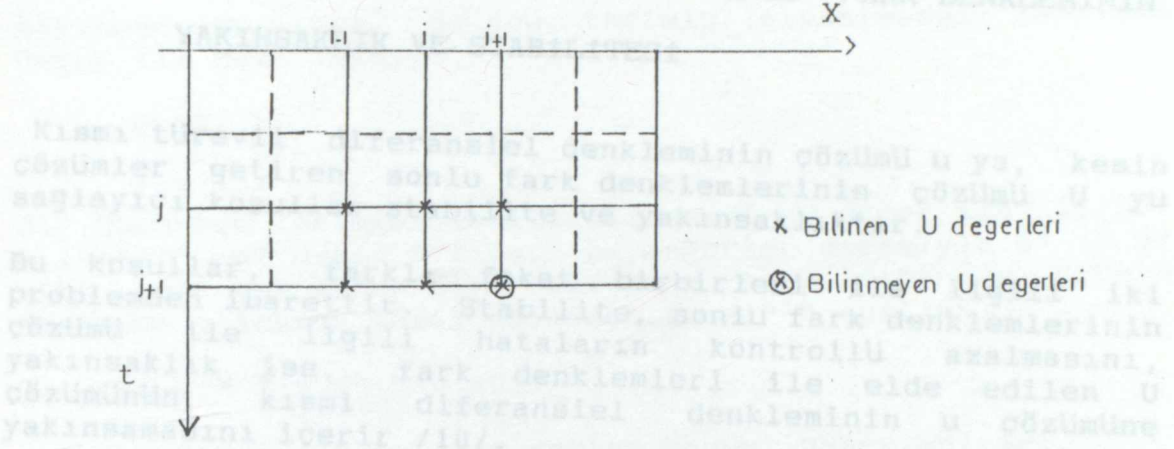
(2-2-6) denklemi (2-3-2) açık (explicit) sonlu fark denklemi olarak alınırsa,

$$U^{0 \cdot a_{i+1, j+1}} = - U^{0 \cdot a_{i-1, j+1}} + \frac{2}{r} U_{i, j+1} + 2U^{0 \cdot a_{i, j+1}} - U^{0 \cdot a_{i-1, j}} - \frac{2}{r} U_{i, j} + 2U^{0 \cdot a_{i, j}} - U^{0 \cdot a_{i+1, j}}$$

Buradan, $U_{i+1, j+1}$ değeri, $U_{i-1, j}$, $U_{i, j}$, $U_{i+1, j}$ ve $U_{i, j+1}$ değerleri kullanılarak hesaplanır. Şekil(2-3-1).



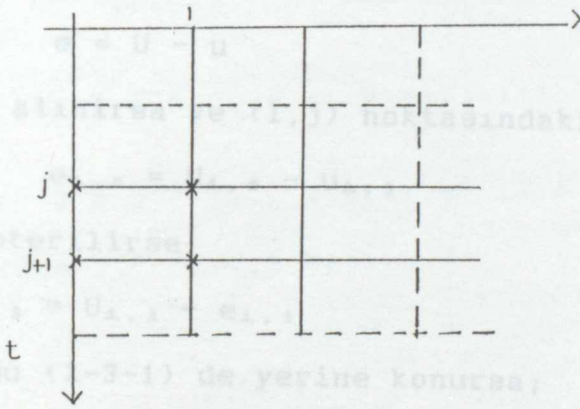
2 - 3 İTİ HALLİ İÇİN ALTI NOKTA SONLU FARK DENKLEMİNİN



Şekil(2-3-1)

$i = 1$ ve $j = 1(1)n$ olmak üzere tüm $U_{i,j}$ leri hesaplariken açık biçimde Altı Nokta Sonlu Fark denklemini kullanılmaktadır. Şekil(2-3-2).

$U_{i,j}$ sonlu fark denkleminin çözümü, u ise diferansiyel denklemin çözümü olmak üzere, hat X



Şekil(2-3-2)

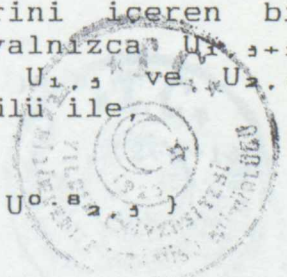
Çünkü, burada $U_{i,j+1}$ değerinin hesaplanabilmesi için $U_{i-1,j}$ ve $U_{i+1,j}$ değeride gerekmektedir.

Bu çalışmada, $j = 1(1)n$ için $U_{i,j+1}$ değerleri hesaplanırken, altı nokta kullanılmadığı ve $U_{0,j+1}$ değerini içeren bir başka sonlu fark yazılmadığı için, yalnızca $U_{i,j+1}$ değerleri, $t = nj$ adıma ait, $U_{0,j}$, $U_{1,j}$ ve $U_{2,j}$ değerlerini içeren Üç Nokta Sonlu fark formülü ile,

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + r(U_{0,j} \cdot a_{0,j} - 2U_{1,j} \cdot a_{1,j} + U_{2,j} \cdot a_{2,j})$$

($i = 1, j=1(1)n$ için)

şeklinde hesaplanır.



2 - 3 IIA HALİ İÇİN ALTI NOKTA SONLU FARK DENKLEMİNİN
YAKINSAKLIK VE STABİLİTESİ

Kısmi türevli diferansiel denkleminin çözümü u ya, kesin çözümler getiren sonlu fark denklemlerinin çözümü U yu sağlayıcı koşullar stabilite ve yakınsaklıktır.

Bu koşullar, farklı fakat birbirleri ile ilgili iki problemden ibarettir. Stabilite, sonlu fark denklemlerinin çözümü ile ilgili hataların kontrollü azalmasını, yakınsaklık ise, fark denklemleri ile elde edilen U çözümünün, kısmi diferansiel denkleminin u çözümüne yakınsamasını içerir /10/.

Aşağıda, (2-3-1) denkleminin yakınsaklık koşulu elde edilsin.

(2-3-1) denklemini gözönüne alınsın. Bu denklemde, $r = k/h^2$ dir.

U, sonlu fark denkleminin çözümü, u ise diferansiel denklemin çözümü olmak üzere, hata ;

$$e = U - u$$

olarak alınır ve (i,j) noktasındaki hata,

$$e_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j}$$

ile gösterilirse;

$$u_{i,j} = U_{i,j} - e_{i,j}$$

olur. Bu (2-3-1) de yerine konursa;

$$\begin{aligned} (U_{i+1,j+1} - e_{i+1,j+1})^{0.8} &= - (U_{i-1,j+1} - e_{i-1,j+1})^{0.8} \\ &+ \frac{2}{r} (U_{i,j+1} - e_{i,j+1}) + 2 (U_{i,j+1} - e_{i,j+1})^{0.8} \end{aligned}$$

$$- (U_{i-1,j} - e_{i-1,j})^{0.8} - \frac{2}{r} (U_{i,j} - e_{i,j})$$

$$+ 2 (U_{i,j} - e_{i,j})^{0.8} - (U_{i+1,j} - e_{i+1,j})^{0.8}$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$(U-e)^{0.8} = U^{0.8} - 0.8U^{-0.2}e - 0.08U^{-1.2}e^2 - 0.032U^{-2.2}e^3 + \dots$$



şeklinde açılırsa, üçüncü terimin alabileceği maksimum değer IIA hali için,

$$\frac{0.08}{175^{-1.2}} e^2$$

dir. Dördüncü terimin alabileceği maksimum değer IIA için, $1.16 \cdot 10^{-5} \cdot e^3$ dür. Ayrıca, bu değerler sırasıyla e^2 ve e^3 gibi çok çok küçük bir değerle çarpıldığından üçüncü terimden itibaren ihmal edilirse $(U-e)^{0.8}$ açılımı;

$(U-e)^{0.8} = U^{0.8} - 0.8U^{-0.2}e$ eşitler (2-4-2) de yerine konularak, (2-4-1) de yerine konup, düzenlenirse;

$$\begin{aligned} & \left(1.6U^{-0.2}U_{1,j+1} + \frac{2}{r} \right) e_{1,j+1} = \left(-U^{0.8}e_{1-1,j+1} \right. \\ & \left. + 2U^{0.8}e_{1,j+1} - U^{0.8}e_{1+1,j+1} \right) + \left(U^{0.8}e_{1-1,j} + 2U^{0.8}e_{1,j} \right. \\ & \left. - U^{0.8}e_{1+1,j} \right) + \left(-\frac{2}{r}U_{1,j} + \frac{2}{r}U_{1,j+1} \right) \\ & + \left(0.8U^{-0.2}e_{1-1,j+1} + 0.8U^{-0.2}e_{1+1,j+1} \right) \\ & + \left[0.8U^{-0.2}e_{1-1,j} - \left(1.6U^{-0.2}e_{1,j} - \frac{2}{r} \right) e_{1,j} \right. \\ & \left. + 0.8U^{-0.2}e_{1+1,j} \right] \end{aligned} \quad (2-4-2)$$

olur.

$$\begin{aligned} U^{0.8}e_{1+1,j+1} &= U^{0.8}e_{1,j+1} + hU^{0.8}e_x(i,j+1) \\ &+ \frac{h^2}{2!} U^{0.8}e_{xx}(x_1 + \theta_1 h, t_{j+1}) + \dots \\ U^{0.8}e_{1-1,j+1} &= U^{0.8}e_{1,j+1} - hU^{0.8}e_x(i,j+1) \\ &+ \frac{h^2}{2!} U^{0.8}e_{xx}(x_1 - \theta_2 h, t_{j+1}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^{0.8}e_{1-1,j} &= U^{0.8}e_{1,j} - hU^{0.8}e_x(i,j) \\ &+ \frac{h^2}{2!} U^{0.8}e_{xx}(x_1 - \theta_3 h, t_j) + \dots \end{aligned}$$



koşulu elde edilir. Çünkü h ve k pozitif olduğundan r de pozitif $U_{1,j+1} = U_{1,j} + k U_t(x_1 + t_j + \theta_5 k)$

Bu açılımlardan;

$$U^{0.8} e_{1-1,j+1} - 2 U^{0.8} e_{1,j+1} + U^{0.8} e_{1+1,j+1} = h^2 U^{0.8} \Delta^2 e_{1,j+1}$$

koşulu $U^{0.8} e_{1+1,j} + U^{0.8} e_{1-1,j} - 2 U^{0.8} e_{1,j} = h^2 U^{0.8} \Delta^2 e_{1,j}$ ileri pozitif olur

$$\text{Böyle } U_{1,j+1} - U_{1,j} = k U_t(x_1, j)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitler (2-4-2) de yerine konursa;

$$\begin{aligned} & (1.6 U^{0.2} e_{1,j+1} + \frac{2}{r}) e_{1,j+1} = (0.8 U^{0.2} e_{1-1,j+1} e_{1-1,j+1} \\ & + 0.8 U^{0.2} e_{1+1,j+1} e_{1+1,j+1}) + [0.8 U^{0.2} e_{1-1,j} e_{1-1,j} \\ & - (1.6 U^{0.2} e_{1,j} - \frac{2}{r}) e_{1,j} + 0.8 U^{0.2} e_{1+1,j} e_{1+1,j} \\ & + [-2 h^2 \frac{\partial^2 U^{0.8}}{\partial x^2} (x_1 + \theta_7 h, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{r} k \frac{\partial U}{\partial t} (x_1, t_j + \theta_5 k)] \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta_1 \leq 1 \quad i=1(1)7 \quad (2-4-3)$$

olur. $U \geq 0$ dir. $E_j = \max_j |e_{1,j}|$ olsun. (2-4-3) deki son köşeli parentezli terimin maksimum değeri M olsun. Tüm terimlerin sıfırdan büyük yada eşit olabilmesi için;

$$- (1.6 U^{0.2} e_{1,j} - \frac{2}{r}) \leq 0$$

olmalıdır. $e_{1,j+1}$ in katsayısı $U^{0.2} \geq 0$ ve h ve k adımlarında pozitif olduğundan r de pozitif olduğu için pozitiftir. Öyleyse terimlerin pozitif olabilmesi için yalnızca $e_{1,j}$ nin katsayısının pozitif olması yeterlidir.

$$\text{Buradan } - (1.6 U^{0.2} e_{1,j} - \frac{2}{r}) \leq 0$$

Buradan r için,

$$0 \leq r \leq \frac{2}{1.6 U^{0.2} e_{1,j}}$$



(2-4-4)

koşulu elde edilir. Çünkü h ve k pozitif olduğundan r de pozitif olmak zorundadır. Elde edilen,

$$0 \leq r \leq \frac{2}{1.6 U^{-0.2} e_{1,3}}$$

koşulu ile (2-4-3) denkleminin tüm terimlerinin katsayıları pozitif olur.

Böylece,

$$\begin{aligned} & \left(1.6 U^{-0.2} e_{1,3+1} + \frac{2}{r} \right) |e_{1,3+1}| \leq 0.8 U^{-0.2} e_{1-1,3+1} |e_{1-1,3+1}| \\ & + 0.8 U^{-0.2} e_{1+1,3+1} |e_{1+1,3+1}| + 0.8 U^{-0.2} e_{1-1,3} |e_{1-1,3}| \\ & - \left(1.6 U^{-0.2} e_{1,3} - \frac{2}{r} \right) |e_{1,3}| + 0.8 U^{-0.2} e_{1+1,3} |e_{1+1,3}| \\ & + 2h^2 M \end{aligned} \quad (2-4-5)$$

elde edilir.

$$0.8 U^{-0.2} e_{1,3+1} \approx 0.8 U^{-0.2} e_{1,3} \geq A$$

$$0.8 U^{-0.2} e_{1-1,3+1} \approx 0.8 U^{-0.2} e_{1,3} \geq A$$

$$U^{-0.2} e_{1+1,3+1} \approx U^{-0.2} e_{1,3+1} \approx U^{-0.2} e_{1,3}$$

$$0.8 U^{-0.2} e_{1+1,3+1} \geq A, \quad 0.8 U^{-0.2} e_{1-1,3+1} \geq A$$

$$0.8 U^{-0.2} e_{1+1,3} \geq A, \quad 0.8 U^{-0.2} e_{1-1,3} \geq A$$

olduğu kabul edilirse, (2-4-5) denklemi,

$$\begin{aligned} 2 A E_{3+1} + \frac{2}{r} E_{3+1} & \leq A E_{3+1} + A E_{3+1} + A E_3 \\ -2 A E_3 + \frac{2}{r} E_3 + A E_3 + 2h^2 M & \end{aligned}$$

Buradan,

$$\frac{2}{r} E_{3+1} \leq \frac{2}{r} E_3 + 2h^2 M$$

$$E_{3+1} \leq E_3 + k M$$



(2-4-6)

IA problemindeki başlangıç koşulundan dolayı E_0 ve $j k = t$ dir. Bu durumda başlangıç değeri hatalı olduğunda $h \rightarrow 0$ iken $k = r h^2 \rightarrow 0$ a gideceğinden ,

$$M \rightarrow (U_t - U^0 \cdot e_{xx})$$

gider. $U_t = U^0 \cdot e_{xx}$ denklemin gerçek çözümü olduğundan $M \rightarrow 0$ gider. Sonuç olarak,

$$0 \leq r \leq \frac{2}{1.6 U^{-0.2}_{1,j}}$$

koşulu altında, $E_j \geq |u_{1,j} - U_{1,j}|$ ve $u \rightarrow U$ dir. O halde, IIA hali Altı Nokta Denkleminin yakınsaklık koşulu;

$$0 \leq r \leq \frac{2}{1.6 U^{-0.2}_{1,j}}$$

dir.

IIA hali için oluşturulan Altı Nokta Sonlu Fark Yönteminin stabil olduğu matris metot yöntemi ile gösterilsin.

Altı nokta için hata fonksiyonu;

$$\begin{aligned} &+ 0.8 r U^{-0.2}_{1-1,j+1} e_{1-1,j+1} + (1.6 r U^{-0.2}_{1,j+1} - 2) e_{1,j+1} \\ &+ 0.8 r U^{-0.2}_{1+1,j+1} e_{1+1,j+1} = - 0.8 r U^{-0.2}_{1-1,j} e_{1-1,j} \\ &+ (1.6 r U^{-0.2}_{1,j} - 2) e_{1,j} - 0.8 r U^{-0.2}_{1+1,j} e_{1+1,j} \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Burada,

$$E_j = \max_j |e_{1,j}| \quad \text{ve} \quad E_{j+1} = \max_j |e_{1,j+1}| \quad i=1(1)(n-1)$$

olsun . Bu ifadeler Altı Nokta Hata fonksiyonunda yerine yazılıp, aşağıdaki gibi düzenlenirse,

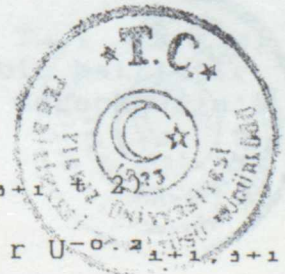
$$\begin{aligned} &[0.8 r U^{-0.2}_{1-1,j+1} - (1.6 r U^{-0.2}_{1,j+1} + 2) \\ &+ 0.8 r U^{-0.2}_{1+1,j+1}] E_{j+1} = [- 0.8 r U^{-0.2}_{1-1,j} \\ &+ (1.6 r U^{-0.2}_{1,j} - 2) - 0.8 r U^{-0.2}_{1+1,j}] E_j \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Daha kısa olarak,

$$A E_{j+1} = B E_j$$

şeklinde de gösterilebilir. Burada,

$$\begin{aligned} A = & 0.8 r U^{-0.2}_{1-1,j+1} - (1.6 r U^{-0.2}_{1,j+1} + 2) \\ & + 0.8 r U^{-0.2}_{1+1,j+1} \end{aligned}$$



$$B = -0.8 r U^{-0.2}{}_{i-1, j} + (1.6 r U^{-0.2}{}_{i, j} - 2)$$

$$-0.8 r U^{-0.2}{}_{i+1, j}$$

dir.

$$A = \begin{bmatrix} -(1.6rU_{i, j+1}^{-0.2} + 2) & .8rU_{i+1, j+1}^{-0.2} & 0 & \dots & 0 \\ .8rU_{i-1, j+1}^{-0.2} & -(1.6rU_{i, j+1}^{-0.2} + 2) & .8rU_{i+1, j+1}^{-0.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & .8rU_{i-1, j+1}^{-0.2} & -(1.6rU_{i, j+1}^{-0.2} + 2) & .8rU_{i+1, j+1}^{-0.2} \\ 0 & \dots & 0 & .8rU_{i-1, j+1}^{-0.2} & -(1.6rU_{i, j+1}^{-0.2} + 2) \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- .8r \begin{bmatrix} -2U_{i, j+1}^{-0.2} & U_{i+1, j+1}^{-0.2} & 0 & \dots & 0 \\ U_{i-1, j+1}^{-0.2} & -2U_{i, j+1}^{-0.2} & U_{i+1, j+1}^{-0.2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{i-1, j+1}^{-0.2} & -2U_{i, j+1}^{-0.2} & U_{i+1, j+1}^{-0.2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & U_{i-1, j+1}^{-0.2} & -2U_{i, j+1}^{-0.2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, A matrisi,

$$A = -2I + 0.8 r T_{N-1}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada, T_{N-1} matrisi $(N-1 \times N-1)$ boyutunda özdeğerleri λ_n olan bir matristir. T_{N-1} matrisinin öz değerleri hesaplınsın. Gerschgorin's first teoremine göre,



$$\lambda_s = -2U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} + 2(\sqrt{U^{-0.2} \cdot 2_{1-1, s+1} U^{-0.2} \cdot 2_{1+1, s+1}}) \cos \frac{s\pi}{N}$$

$$s = 1(1)(N-1)$$

olur. Burada,

$$U^{-0.2} \cdot 2_{1-1, s+1} \approx U^{-0.2} \cdot 2_{1+1, s+1} \approx U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1}$$

olarak alınır, bu durumda T_{N-1} matrisinin özdeğerleri,

$$\begin{aligned} \lambda_s &= -2U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} + 2 U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} \cos \frac{s\pi}{N} \\ &= -2U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} \left(\cos \frac{s\pi}{N} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$= -4U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} \sin^2 \frac{s\pi}{2N}$$

elde edilir. O halde, T_{N-1} matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_n = -4U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} \cdot \sin^2 \frac{s\pi}{2N}$$

olduğuna göre A matrisinin özdeğerleri,

$$-2 - 4 \cdot 0.8r U^{-0.2} \cdot 2_{1, s+1} \cdot \sin^2 \frac{s\pi}{2N}$$

olacaktır. Benzer şekilde B nin özdeğerleri hesaplınsın. B matrisi,

$$B = -2I - 0.8 r T_{N-1}$$

olarak yazılabilir. B matrisinin özdeğerleri Gerschgorin's first teoremine göre,

$$-2 + 0.8 r \left(4 U^{-0.2} \cdot 2_{1, s} \sin^2 \frac{s\pi}{2N} \right)$$

yazılır. Hata fonksiyonu ise matris olarak,

$$E_{s+1} = A^{-1} B E_s$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, $C = A^{-1} B$ olsun. Bu durumda C nin özdeğerleri,



III. ÇÖZÜM

1-1 ÇÖZÜM ALGORİTHMASI

$$\lambda_c = \frac{-2 + 3.2r U^{-\sigma \cdot 2_{1,j}} \sin^2 \frac{s\pi}{2N}}{-2 - 3.2r U^{-\sigma \cdot 2_{1,j+1}} \sin^2 \frac{s\pi}{2N}}$$

(s = 1, 2, ..., N-1)

dır. $|\lambda_c| < 1$ için stabildir. Çünkü, $|E_{j+1}| \leq |E_j|$ olabilmesi için $\|C\| < 1$ olmalıdır.

$$\left| \frac{-2 + 3.2r U^{-\sigma \cdot 2_{1,j}} \sin^2 \frac{s\pi}{2N}}{-2 - 3.2r U^{-\sigma \cdot 2_{1,j+1}} \sin^2 \frac{s\pi}{2N}} \right| < 1$$

Buradan tüm $r > 0$ için IIA hali altı noktayı içeren non-linear sonlu fark denklemi stabilite koşulu ortaya çıkar.

Fakat, - ininleme esnasında zaman da söz konusu olduğundan sıklıkla değişiklikleri X o t koordinatlarında hesaplanacaktır. Çözüm bölgesinin X ve t ile ilgili denkleminin kurulmasında normalite edilebilir. X ve t için normalizasyon yaparak ξ değeri kullanılmaktadır.

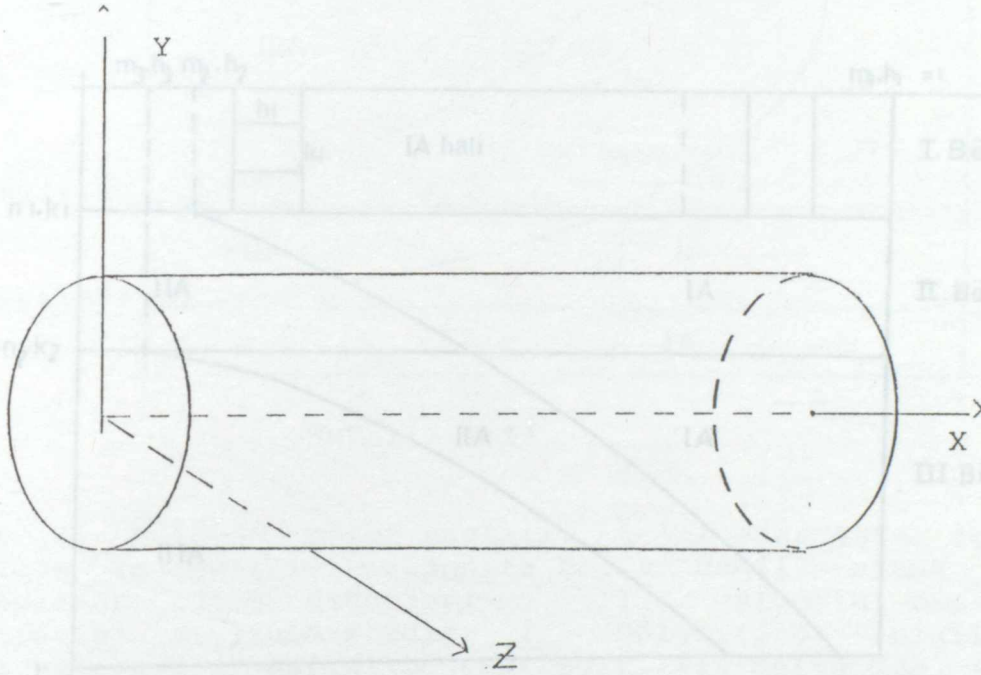


Çözüm Bölgesi

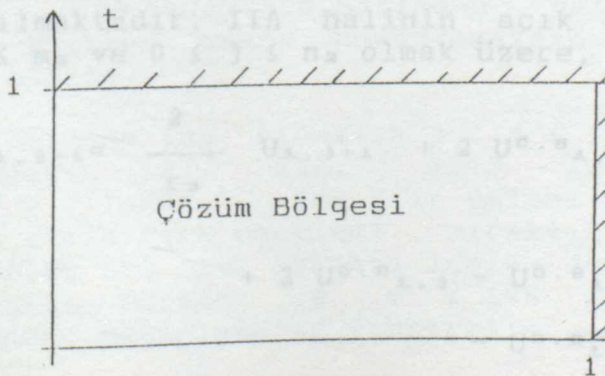
III. Ç Ö Z Ü M

1-1 ÇÖZÜM ALGORİTMASI

Işınlanan kısım bir nokta olarak kabul edildiği ve eşsıcaklık yüzeylerinin bir nokta merkezli küre yüzeyleri olduğu sonucu /11,1/ varsayıldığına göre, cismin yüzeyinde, merkezindeki bir noktadan verilen ısı'nın, cismin eksenî boyunca meydana getireceği sıcaklık değişiklikleri, cisim Z ve Y eksenlerinde yeterince büyük (yarı sonsuz) varsayıldığından yalnızca tek boyutta inceleme yapılacaktır.



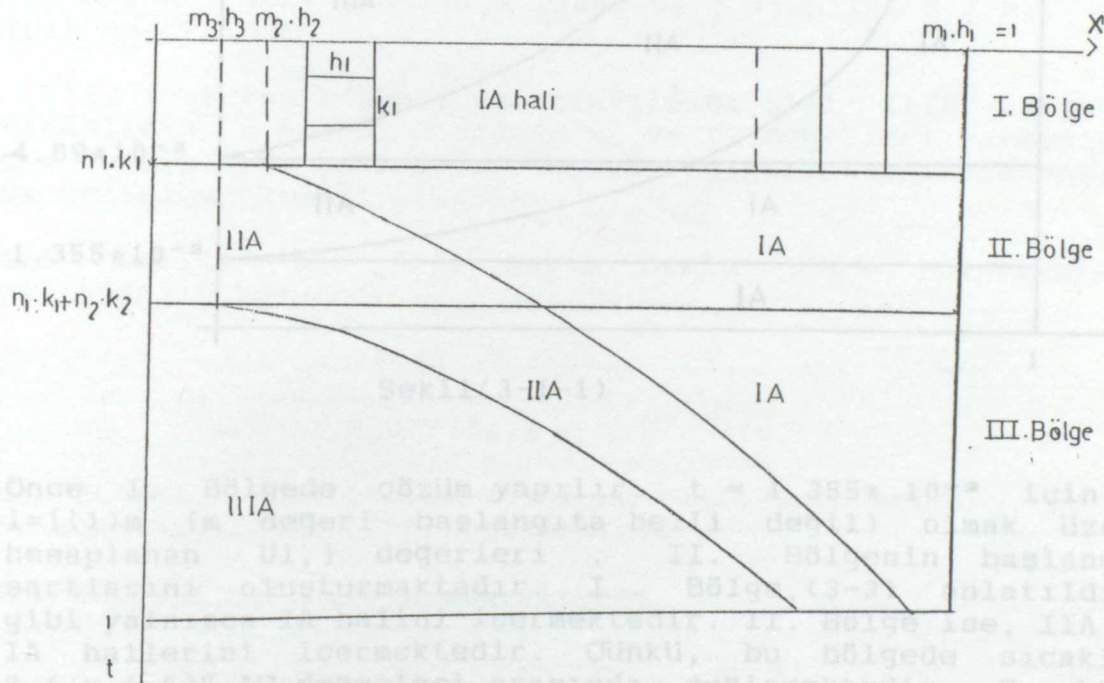
Fakat, ısınlama esnasında zaman da söz konusu olduğundan sıcaklık değişiklikleri X o t koordinat düzleminde hesaplanacaktır. Çözüm bölgesinin X ve t değerleri, ısı iletim denkleminin kurulmasında anlatıldığı gibi normalize edilmiştir. X ve t nin normalize uzunluğu olarak 1 değeri kullanılmıştır.



I. Bölgenin $0 \leq t \leq 1.355 \cdot 10^{-2}$ olan ışınlama süresi n_1 aralığına ve $j = 0$ için, X mesafesi m_1 aralığına bölünsün. I. Bölgenin zaman adım uzunluğu k_1 , X eksenindeki adım uzunluğu h_1 olsun.

II. Bölgenin $1.355 \cdot 10^{-2} \leq t_2 \leq 4.89 \cdot 10^{-2}$ olan ışınlama süresi n_2 aralığına X eksenini, $j = 0$ için m_2 aralığına bölünsün. Zaman adım uzunluğu k_2 , X eksenindeki adım uzunluğu h_2 olsun.

III. Bölgenin $4.89 \cdot 10^{-2} \leq t \leq 1$ olan ışınlama süresi ise, n_3 aralığına, X eksenini, $j = 0$ için, m_3 aralığına bölünsün. h ve k adım uzunları ise sırasıyla h_3 ve k_3 olsun. Şekil(3-1-2).

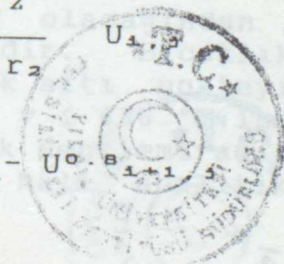


Şekil (3-1-2)

3-1-1 IIA hali çözüm algoritması

Bu durumda, IIA hali II. ve III. Bölgelerde de kullanılmaktadır. IIA halinin açık sonlu fark denklemi, $0 \leq i \leq m_2$ ve $0 \leq j \leq n_2$ olmak üzere,

$$U^{0 \cdot s_{1+1, j+1}} = \frac{2}{r_2} U_{1, j+1} + 2 U^{0 \cdot s_{1, j+1}} - \frac{2}{r_2} U_{1, j} + 2 U^{0 \cdot s_{1, j}} - U^{0 \cdot s_{1-1, j+1}} - U^{0 \cdot s_{1-1, j}}$$



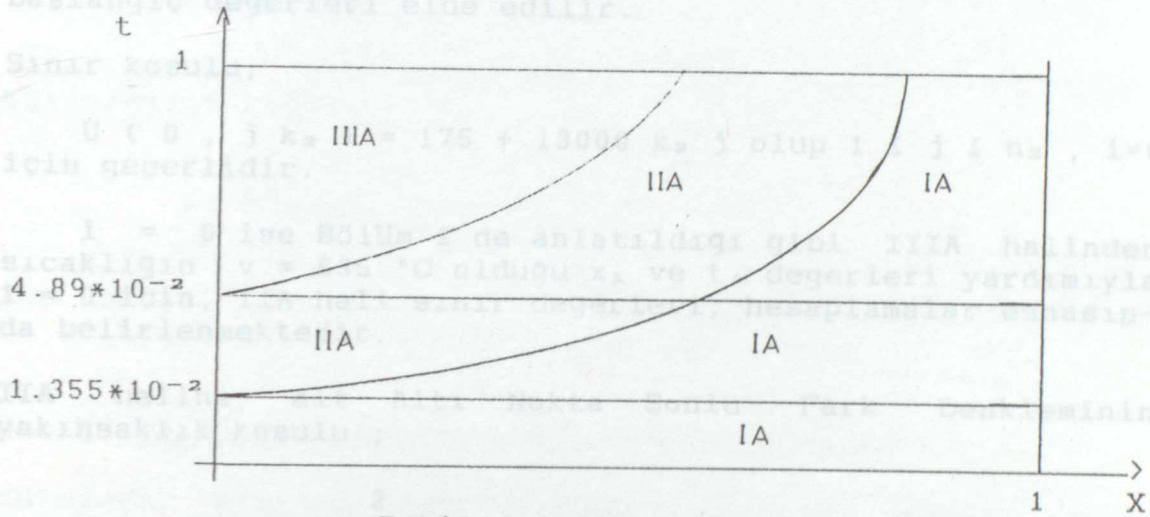
Problemin $[0 \leq X \leq 1 \times 0 \leq t \leq 1]$ Çözüm bölgesi,

$[0 \leq X \leq 1 \times 0 \leq t \leq 1.355 * 10^{-2}]$ I. Bölge,

$[0 \leq X \leq 1 \times 1.355 * 10^{-2} \leq t \leq 4.89 * 10^{-2}]$ II. Bölge,

$[0 \leq X \leq 1 \times 4.89 * 10^{-2} \leq t \leq 1]$ III. Bölge

olmak üzere birbirlerinin devamı şeklinde olan ve birbirleri ile ilgili üç ayrı bölge olarak düşünülerek çözüm yapılmıştır.



Şekil(3-1-1)

Önce I. Bölgede çözüm yapılır. $t = 1.355 * 10^{-2}$ için, $i=1(1)m$ (m değeri başlangıta belli değil) olmak üzere hesaplanan $U_{i,j}$ değerleri, II. Bölgenin başlangıç şartlarını oluşturmaktadır. I. Bölge, (3-3) anlatıldığı gibi yalnızca IA halini içermektedir. II. Bölge ise, IIA ve IA hallerini içermektedir. Çünkü, bu bölgede sıcaklık $0 \leq v \leq 635$ °C değerleri arasında değişmektedir. Sıcaklık $v > 175$ °C ise, IIA hali için oluşturulan açık (explicit) Altı Nokta Fark Denklemi, $v \leq 175$ °C ise, IA hali analitik çözümü kullanılarak istenen noktadaki sıcaklık değeri hesaplanmaktadır.

IIA halinden IA haline geçerken, sıcaklığın $v = 175$ °C olduğu x değeri IIA halinden belirlenir, bu nokta belirlendikten sonra hesaplamalara IA haline geçilerek devam edilir.

III. Bölgede ise, sıcaklık $0 \leq v \leq 13000$ °C olacağından, bu bölge IA, IIA, IIIA içermektedir. Sıcaklık $635 < v \leq 13000$ °C ise IIIA haline ait açık altı noktayı içeren sonlu fark denklemi, sıcaklık $175 < v \leq 635$ °C ise IIA haline ait altı noktayı içeren sonlu fark denklemi açık (explicit) biçimde ve $v \leq 175$ ise IA hali analitik çözümünden hesaplamalar yaptırılır.

Başlangıç koşulu $i = 1$ için $r_2 = \frac{c_2 k_2}{h^2_2}$ olup, burada $r_2 = \frac{c_2 k_2}{h^2_2}$ dir.

Başlangıç koşulu $i = 1(1)m_2$ ve $j = 0$ için ;

$$U(ih_2, jk_2) = U_{1h_1, n_1k_1}$$

Sınır koşulu; Burada, $n_1.k_1 = 1.355 \times 10^{-2}$ olup, IA halinin $t=1.355 \times 10^{-2}$ için hesaplanan $U_{1,3}$ değerlerinden IIA halinin başlangıç değerleri elde edilir.

Sınır koşulu;

$U(0, jk_2) = 175 + 13000 k_2 j$ olup $1 \leq j \leq n_2$, $i=0$ için geçerlidir.

$i = 0$ ise Bölüm 2 de anlatıldığı gibi IIIA halinden sıcaklığın $v = 635$ °C olduğu x_1 ve t_3 değerleri yardımıyla $i = 0$ için, IIA hali sınır değerleri, hesaplamalar esnasında belirlenmektedir.

IIA haline ait Altı Nokta Sonlu Fark Denkleminin yakınsaklık koşulu ;

$$r_2 \leq \frac{2}{1.6 U^{-0.2}_{1,3}}$$

den dolayı, yakınsaklık koşulunu sağlayacak şekilde, k_2 ve h_2 adım uzunlukları belirlenmektedir.

3-2-1 IIIA hali çözüm algoritması

IIIA hali yalnızca III. Bölgede kullanıldığından Açık Sonlu Fark Denklemi, $0 \leq i \leq m_3$ ve $0 \leq j \leq n_3$ olmak üzere,

$$U^{1.37}_{i+1, j+1} = \frac{2}{r_3} U_{i, j+1} + 2 U^{1.37}_{i, j+1} - \frac{2}{r_3} U_{i, j} + 2 U^{1.37}_{i, j} - U^{1.37}_{i-1, j+1} - U^{1.37}_{i+1, j} - U^{1.37}_{i-1, j}$$

olup, burada $r_3 = \frac{c_3 k_3}{h^2_3}$ dir.



Başlangıç koşulu $i = 1(1)m_2$ ve $j = 0$ için ;

$$U(ih_2, jk_2) = U(ih_2, n_2 k_2 + 1.355 \cdot 10^{-2})$$

dır. Burada, $n_2 \cdot k_2 + 1.355 \cdot 10^{-2} = 4.89 \cdot 10^{-2}$ olup, IIA halinden $t = 4.89 \cdot 10^{-2}$ için hesaplanan $U_{1,2}$ değerleri IIIA halinin başlangıç değerlerini oluşturmaktadır.

Sınır koşulu;

$$U(0, jk_2) = 635 + 13000 k_2 j \text{ olup } 1 \leq j \leq n_2, i=0 \text{ için geçerlidir.}$$

IIIA haline ait Altı Nokta Sonlu Fark Denkleminin yakınsaklık koşulu ;

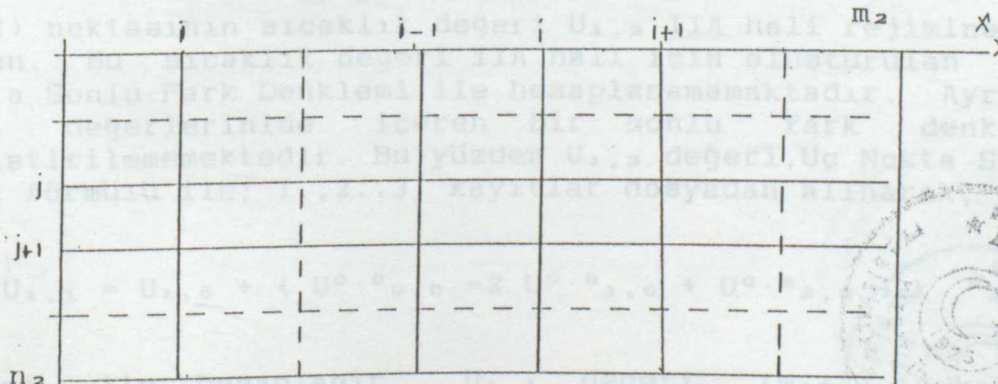
$$r_2 \leq \frac{2}{2.74 U^{0.371,2}}$$

den dolayı, yakınsaklık koşulunu sağlayacak şekilde, k_2 ve h_2 adım uzunlukları belirlenmektedir.

3-1-3 Çözüm algoritmasının probleme uygulanışı

Yüzeydeki bir noktadan verilen sıcaklık cismin eksenleri boyunca, sıcaklık $v = 0$ oluncaya kadar yayılmaktadır. Bu yüzden t zamanı ilerledikçe $x = 0$ ile $v = 0$ olduğu x değeri arasındaki mesafe artmaktadır.

Bu problemi çözerken, birbirlerinin devamı olarak düşünülen üç ayrı bölgenin her bir (X,T) kafes noktası, başlangıçta, hesaplamaların yapılacağı satırındaki kolon sayısı bilinmeyen bir matrisin elemanı gibi düşünülerek, hesaplamalar yaptırıldı. Hesaplanan bu sıcaklık değerleri her bir bölge için yaratılan dosyalara ayrı ayrı kaydedildi. Örneğin, II. Bölgede hesaplamalar yapılırken, bu bölge $0 \leq i \leq m_2$ ve $0 \leq j \leq n_2$ olmak üzere, X ve t eksenlerine paralel çizgilerle kafeslere ayrıldığı düşünüldü. Şekil(3-1-3).



Şekil(3-1-3)

Kafesin herhangi bir (i,j) noktası , matrisin (i,j) numaralı elemanı gibi düşünülerek hesaplamalar yaptırıldı.

Burada, $i = 0(1)m_2$ ve $t = 1.355 \times 10^{-2}$ için IA halinden hesaplanan $U_{1,2}$ değerleri , II.Bölgenin başlangıç değerlerini oluşturmaktadır.Aynı zamanda bu $U_{1,2}$ değerleri II. Bölgenin hesaplamaları için kullanılan matrisin birinci satırını ve bu bölgenin sıcaklık değerlerini içeren dosyanın ilk m_2 kayıtlını oluşturmaktadır.

Hesaplanan sıcaklık değerleri hangi rejime ait olursa olsun matrisin birinci satırından itibaren artan satır numarasında dosyaya kayıt edilmektedir. kayıt edilen sıcaklık değerleri , hesaplamalar içinde saklı olduğu kayıttan çağrılarak kullanılmaktadır.

Örneğin, $U_{0,0}$ değeri dosyanın 1. kayıtlını , $U_{1,0}$ değeri dosyanın 2. kayıtlını $U_{0,1}$ değeri II. Bölgeye ait dosyanın $(m_2 + 1)$. kayıtlını , $U_{2,1}$ değeri bu dosyanın (m_2+3) kayıtlını oluşturmaktadır.

$U_{2,1}$ değeri IIA hali rejimine aitse, hesaplanması için ;

$$U^{0 \cdot a}_{2,1} = \frac{2}{r_2} U^{0 \cdot a}_{1,1} + 2 U^{0 \cdot a}_{1,1} - \frac{2}{r_2} U_{1,0} + 2 U^{0 \cdot a}_{1,0} - U^{0 \cdot a}_{0,1} - U^{0 \cdot a}_{2,0} - U^{0 \cdot a}_{0,0}$$

işlemi, dolayısıyla, $U_{0,0}$, $U_{1,0}$, $U_{2,0}$, $U_{1,1}$ değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bunun için daha önce kayıt edilen bu değerler dosyadan sırasıyla 1.,2.,3., (m_2+1) . ve (m_2+2) . kayıt olarak çağrılarak işlem yaptırılır. Yeni hesaplanan $U_{2,1}$ değeri de dosyaya (m_2+3) . kayıt olarak kaydedilir.Bu satırda $v > 175$ °C oluncaya kadar IIA hali $v \leq 175$ ise, IA hali ile sıcaklık $v = 0$ °C oluncaya kadar işlemlere devam edilir. Daha sonra $U_{0,2}$ değeri sınır koşulundan hesaplanır.

3-1-3-1 $U_{1,2}$ değerlerinin hesaplanması

(1,2) noktasının sıcaklık değeri $U_{1,2}$ IIA hali rejimine ait olsun. Bu sıcaklık değeri IIA hali için oluşturulan Altı Nokta Sonlu Fark Denklemi ile hesaplanamamaktadır. Ayrıca, $U_{0,2}$ değerlerindeki içeren bir sonlu fark denklemi geliştirilememektedir. Bu yüzden $U_{1,2}$ değeri,Uç Nokta Sonlu Fark förmülü ile; 1.,2.,3. kayıtlar dosyadan alınarak,

$$U_{1,1} = U_{1,0} + (U^{0 \cdot a}_{0,0} - 2 U^{0 \cdot a}_{1,0} + U^{0 \cdot a}_{2,0})$$

işlemi ile hesaplanır. $U_{1,1}$ değeri (m_2+2) . kayıtlı oluşturur.



$1 \leq j \leq n_2$ ve $i = 1$ olmak üzere tüm $U_{1,j}$ değerleri IIA ve IIIA hallerine aitse, bu haller için oluşturulan Açık Altı Nokta Sonlu Fark metodu ile hesaplanamazlar. Örneğin, II. Bölgede $i=0$ ve $j=0$ için Altı Noktayı içeren sonlu fark yöntemi kullanılırsa;

$$U^{0 \cdot a}_{1,1} = \frac{2}{r_2} U^{0 \cdot a}_{0,1} + 2 U^{0 \cdot a}_{0,1} - \frac{2}{r_2} U_{0,0} + 2 U^{0 \cdot a}_{0,0} - U^{0 \cdot a}_{-1,1} - U^{0 \cdot a}_{1,0} - U^{0 \cdot a}_{-1,0}$$

işlemi gerekmektedir. Burada, $U_{-1,1}$ ve $U_{-1,0}$ değerleri bilinmemektedir. Bu yüzden $U_{1,1}$ değeri Altı Noktayı içeren sonlu farklar ile hesaplanamamaktadır.

Daha genel olarak şu söylenebilir. IIA hali için oluşturulan Altı Nokta Sonlu Fark Yöntemi; $i = 0$ ve $j = j$ için $U_{1,j+1}$ değerlerini hesaplarken,

$$U^{0 \cdot a}_{1,j+1} = \frac{2}{r_2} U_{0,j+1} + 2 U^{0 \cdot a}_{0,j+1} - \frac{2}{r_2} U_{0,j}$$

$$+ 2 U^{0 \cdot a}_{0,j} - U^{0 \cdot a}_{-1,j+1} - U^{0 \cdot a}_{1,j} - U^{0 \cdot a}_{-1,j}$$

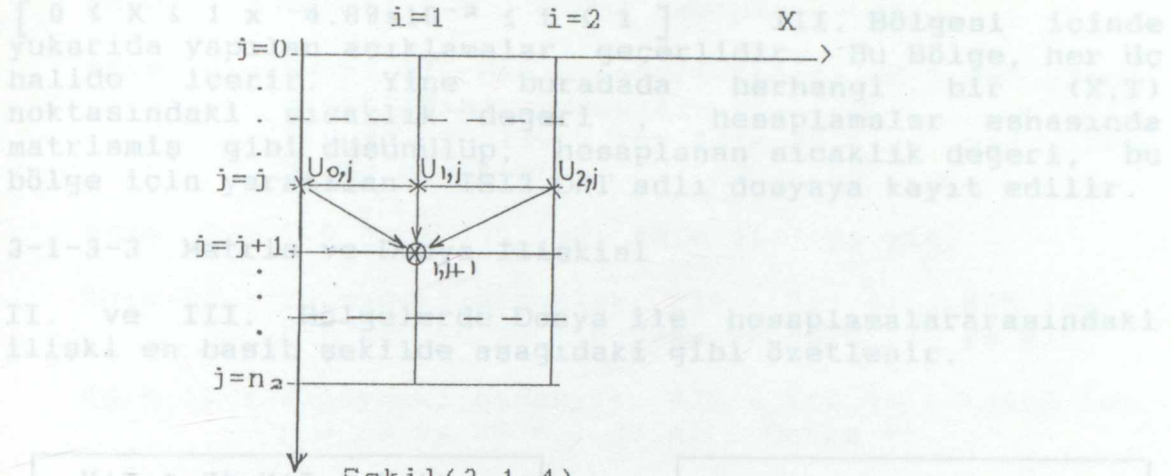
işlemi gerekmektedir. Fakat $U_{1,j}$ ve $U_{1,j+1}$ değerleri bilinmediğinden, $U_{1,j+1}$ değeri bu yöntem ile hesaplanamamaktadır.

$U_{1,j+1}$ değerini, $U_{0,j+1}$ de dahil ederek hesaplayabilecek herhangi bir Sonlu Fark Metodu yazılmadığı için, $U_{1,j+1}$ değeri, $U_{0,j}$, $U_{1,j}$ ve $U_{2,j}$ değerleri ile Üç Nokta Açık Sonlu Fark formülü kullanılarak,

$$U_{1,j+1} = U_{1,j} + (U^{0 \cdot a}_{0,j} - 2 U^{0 \cdot a}_{1,j} + U^{0 \cdot a}_{2,j})$$

şeklinde hesaplanacaktır. Burada $0 \leq j \leq n_2$ dir. Şekil(3-1-4).





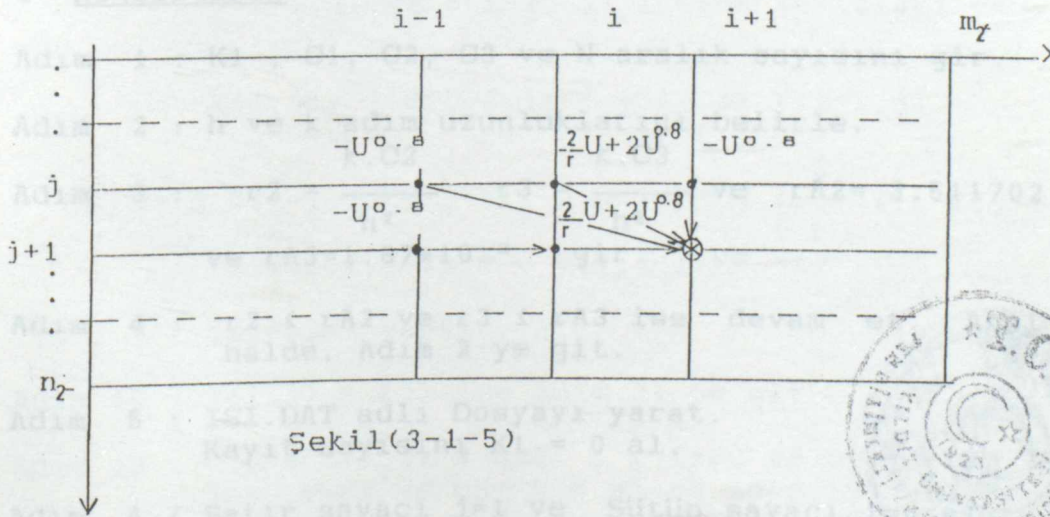
Şekil(3-1-4)

3-1-3-2 $(0, j)$, $(1, j)$ ve $(i, 0)$ noktaları dışındaki noktaların sıcaklıklarının hesaplanması

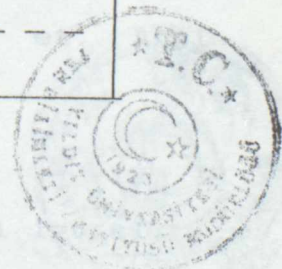
$| 0 \leq X \leq 1 \times 1.355 \cdot 10^{-2} \leq t \leq 4.89 \cdot 10^{-2} |$ II. Bölge-
sindeki IIA hali rejimine ait, başlangıç, sınır ve $(1, j+1)$
noktaları dışındaki diğer noktaların sıcaklık değerleri;

$$U^{0.8}_{1+1, j+1} = \frac{2}{r_2} U_{1, j+1} + 2 U^{0.8}_{1, j+1} - \frac{2}{r_2} U_{1, j} + 2 U^{0.8}_{1, j} - U^{0.8}_{1-1, j+1} - U^{0.8}_{1+1, j} - U^{0.8}_{1-1, j}$$

Bu sıcaklıklardan sonra, $y = U^{0.8}_{1-1, j}$ sayıları Açık algoritma ve aynı şekilde aşağıdaki gibi yazılır.
açık förmülünden hesaplanır. Şekil (3-1-5).



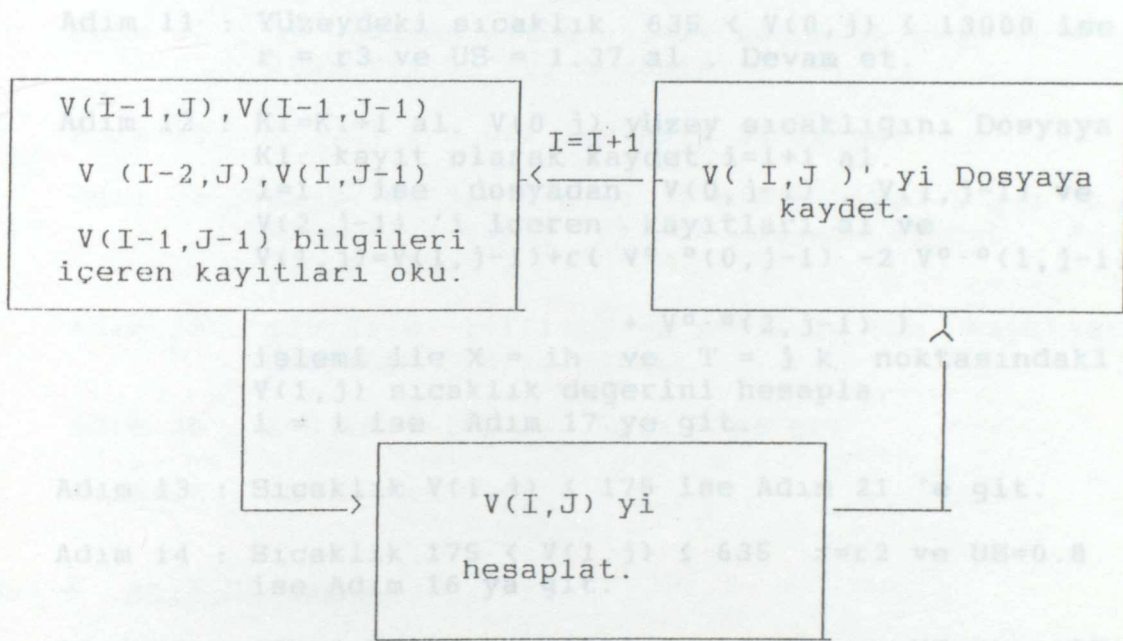
Şekil(3-1-5)



[$0 \leq X \leq 1$ x $4.89 \cdot 10^{-2} \leq t \leq 1$] III. Bölgesi içinde yukarıda yapılan açıklamalar geçerlidir. Bu Bölge, her üç halide içerir. Yine buradada herhangi bir (X,T) noktasındaki sıcaklık değeri, hesaplamalar esnasında matrismiş gibi düşünülüp, hesaplanan sıcaklık değeri, bu bölge için yaratılan ISI3.DAT adlı dosyaya kayıt edilir.

3-1-3-3 Matris ve Dosya ilişkisi

II. ve III. Bölgelerde Dosya ile hesaplamalararasındaki ilişki en basit şekilde aşağıdaki gibi özetlenir.



Bu açıklamalardan sonra, yukarıdaki olayları içeren algoritma ve akış şeması aşağıdaki gibi yazılır.

3-1-4 Algoritması

Adım 1 : $K1$, $C1$, $C2$, $C3$ ve N aralık sayısını gir.

Adım 2 : h ve k adım uzunluklarını belirle.

Adım 3 : $r2 = \frac{k.C2}{h^2}$, $r3 = \frac{k.C3}{h^2}$ ve $rA2= 3.511702$ ve $rA3=1.87 \cdot 10^{-2}$ gir.

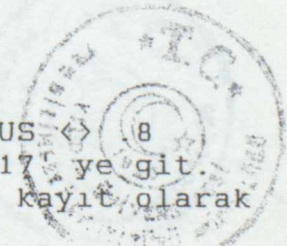
Adım 4 : $r2 \leq rA2$ ve $r3 \leq rA3$ ise devam et. Aksi halde, Adım 2 ye git.

Adım 5 : ISI.DAT adlı Dosyayı yarat. Kayıt sayısını $K1 = 0$ al.

Adım 6 : Satır sayacı $j=1$ ve Sütün sayacı $i=0$ al.



- Adım 7 : Zamani $t = j k$ dan hesapla. *ye git.*
- Adım 8 : $S = K1$ al. Sınır değeri $V(0, j) = K t$ den yüzey sıcaklığını hesapla. *ye US = 1.37 al Adım 17 ye*
 $V(0, j) > 13000$ ise Adım 27 'ye git. Aksi halde devam et. *ise $(K1=K1+1)$ kayıt olarak*
- Adım 9 : $V(0, j) \leq 175$ ise, Adım 21. 'ya git.
- Adım 10 : Yüzeydeki sıcaklık $175 < V(0, j) \leq 635$ ise $r = r2$ ve $US = 0.8$ al ve Adım 12. ye git.
- Adım 11 : Yüzeydeki sıcaklık $635 < V(0, j) \leq 13000$ ise $r = r3$ ve $US = 1.37$ al . Devam et.
- Adım 12 : $K1=K1+1$ al. $V(0, j)$ yüzey sıcaklığını Dosyaya $K1$. kayıt olarak kaydet. $i=i+1$ al.
Adım 24 $i=1$ ise dosyadan $V(0, j-1)$, $V(1, j-1)$ ve $V(2, j-1)$ 'i içeren kayıtları al ve *Adım*
 $V(1, j) = V(1, j-1) + r(V^{0.8}(0, j-1) - 2 V^{0.8}(1, j-1)$
Adım 25 $+ V^{0.8}(2, j-1))$ kayıtları
işlemi ile $X = ih$ ve $T = j k$ noktasındaki $V(1, j)$ sıcaklık değerini hesapla.
Adım 26 $i = 1$ ise Adım 17 ye git. *git.*
- Adım 13 : Sıcaklık $V(1, j) \leq 175$ ise Adım 21 'e git.
- Adım 14 : Sıcaklık $175 < V(1, j) \leq 635$ $r=r2$ ve $US=0.8$ ise Adım 16 ya git.
- Adım 15 : $635 < V(1, j) \leq 13000$, $r \langle \rangle r3$ ve $US \langle \rangle 1.37$ ise $r=r3$ ve $US= 1.37$ al. $i=i-1$ al. Devam et.
- Adım 16 : $V(1, j)$ yi dosyaya ($K1=K1+1$). kayıt olarak kaydet.
- Adım 17 : $V(i-2, j-1)$, $V(i-1, j-1)$, $V(i, j-1)$, $V(i-1, j)$ ve $V(i-2, j)$ içeren kayıtları oku.
21 : k adım uzunluğu
$$V(i, j) = \frac{1}{r} \left[-V(i-2, j)^{US} + \left(\frac{2}{r} \right) V(i-1, j)^2 + 2 V(i-1, j)^{US} - V(i-2, j-1)^{US} - \left(\frac{2}{r} \right) V(i-1, j-1)^2 + 2 V(i-1, j-1)^{US} - V(i, j-1)^{US} \right]$$
T işlemini yaptır.
- Adım 18 : $V(i, j) \leq 175$ ise Adım 21 'e git.
- Adım 19 : $175 < V(i, j) \leq 635$, $r \langle \rangle r2$ ve $US \langle \rangle 0.8$ ise, $r=r2$ ve $US= 0.8$ al ve Adım 17 ye git. *8*
 $r=r2$ ve $US = 0.8$ ise, ($K1=K1+1$). kayıt olarak



CT : 1.645 V(i,j) yi kaydet. Adım 17. ye git.

Adım 20 : 635 < V(i,j) < 13000 ayrıca, US < 1.37 ve r < r3 ise, r=r3 ve US=1.37 al. Adım 17 ye git.
C3 : 0.039 r=r3 ve US=1.37 ise (K1=K1+1). kayıt olarak dosyaya kaydet. Adım 17 ye git.

Uygulamada, her zaman bilgisayar programları için her üç hali için de

Adım 21 : K1 ve K1-1 inci kayıtlardan V(i,j) = 175 olduğu X=ss değerini enterpolasyon kullanarak belirle.

Adım 22 : IA haline ait analitik çözümden X=ih ve t=jk için V(x,t)' yi hesapla.

Adım 23 : V(x,t) < 0.001 ise Adım 25' e git.

Adım 24 : Aksi halde V(x,t) > 0.001 ise i=i+1 al. K1=K1+1. kayıt olarak dosyaya kaydet. Adım 21' e git.

Adım 25 : m2= K1-s i=1(1)m2 ve j=j için tüm kayıtları dosyadan oku ve yazdır.

Adım 26 : i=0 ve j=j+1 al. Adım 7'ye git.

Adım 27 : Dur.

3-1-5 Akış Diyagramı

Akış diyagramı için değişkenler ve sabitler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

K : Sınır koşulu V = K t den gelen K dir. Sabit olup, değeri K = 13000 dir.

H : h adım uzunluğu

Z1 : k adım uzunluğu

ST1: 175 °C

ST2: 635 °C

ST3: 13000 °C

T : Zaman

AS : Zaman eksenindeki aralık sayısı

R2 : IIA hali için C2 k / h² dir.

R3 : IIIA hali için C3 k / h² dir.



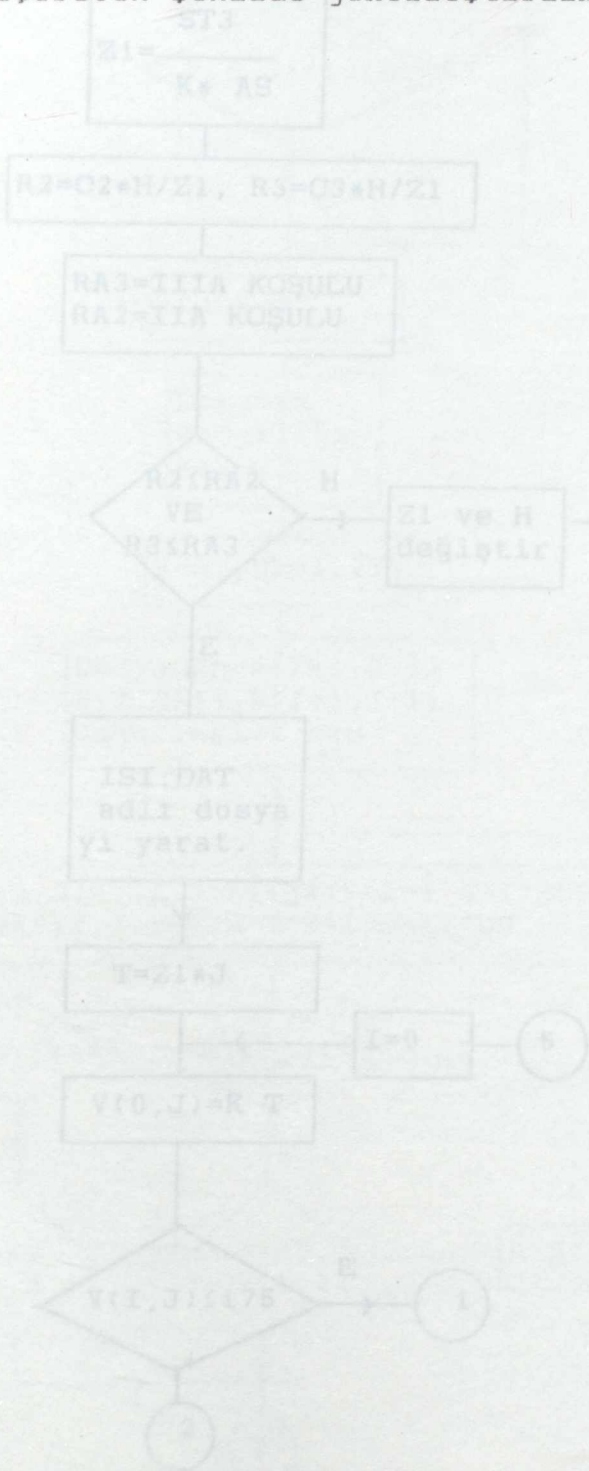
BAŞLA

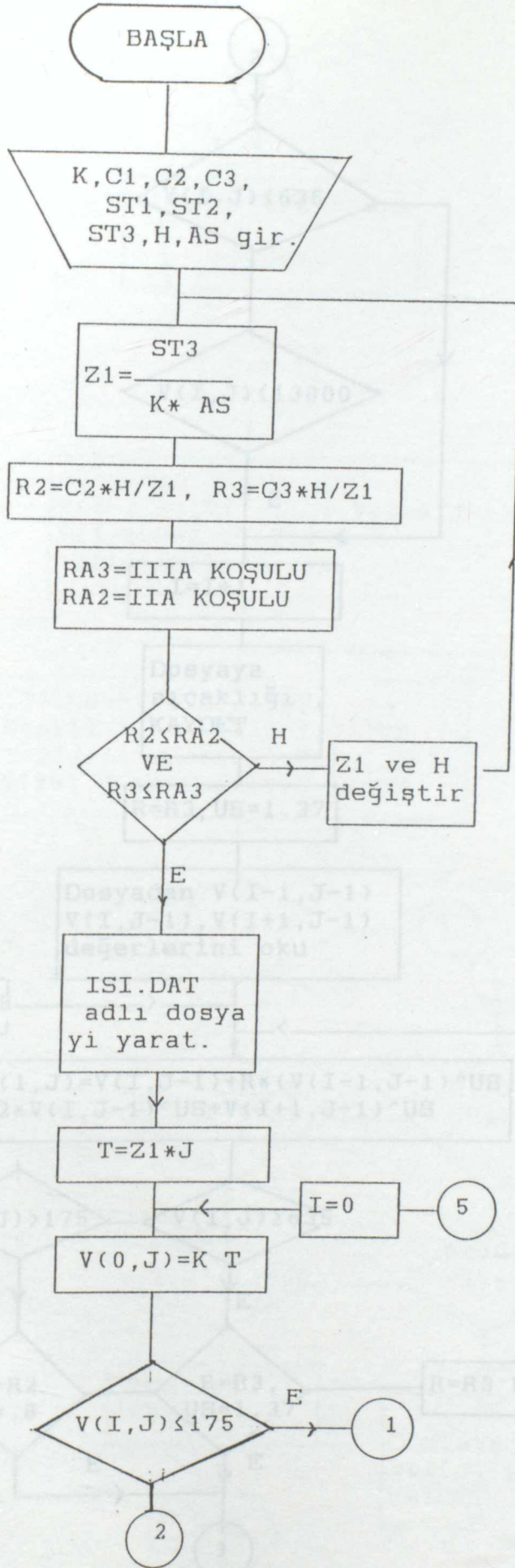
C1 : 1.645 * 10⁻¹³

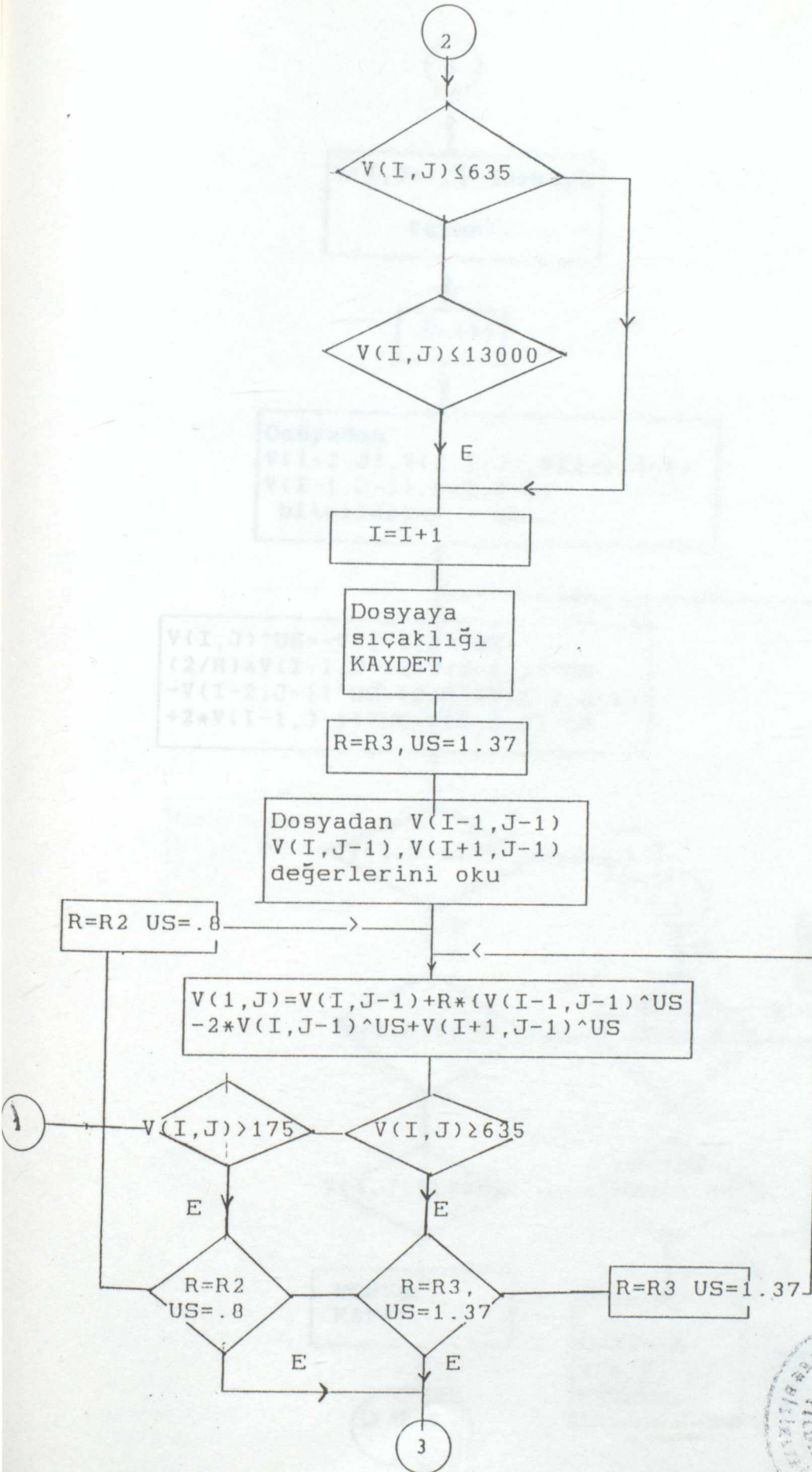
C2 : 6.81 * 10⁻¹³

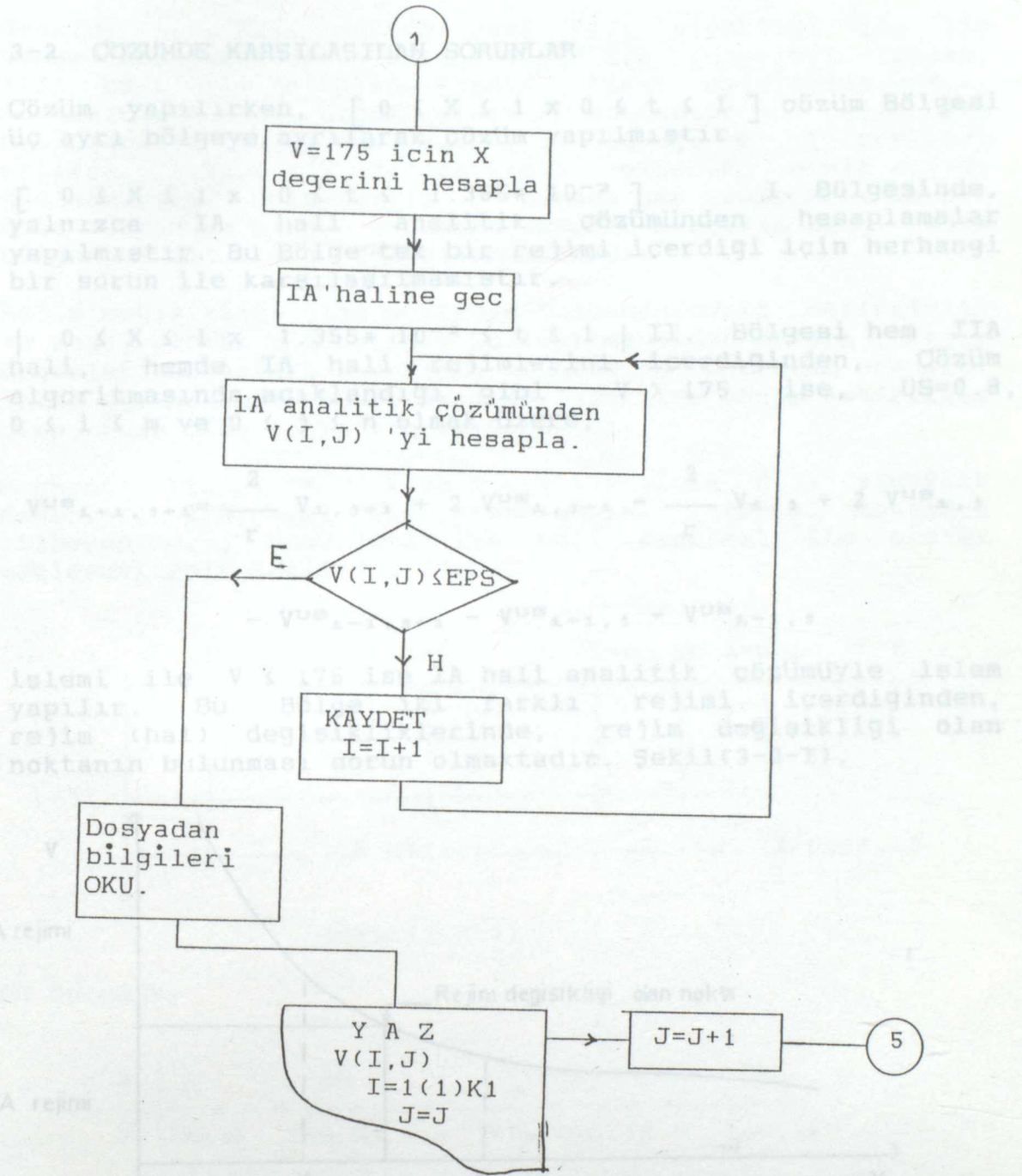
C3 : 0.039 * 10⁻¹⁵

Uygulamada, her üç Bölge için ayrı ayrı bilgisayar programı hazırlanmıştır. Fakat, aşağıdaki akış diyagramı her üç hali içerecek şekilde genelleştirilmiştir.









Şekil(3-2-1)

Burada X_n noktasındaki sıcaklık değeri V_n için bir dizi denklemle hesaplanmaktadır. Fakat, X_{n-1} noktasındaki sıcaklık ise, herhalde aynı denklemlerle hesaplanmalıdır. Bu nedenle, her bir nokta için ayrı bir soru sormaktadır. Çünkü, her bir nokta için sıcaklık değeri V_{n-1} IIA veya IA halli değeri olarak hesaplanırsa, farklı bir sonuç ortaya çıkar.



3-2 CÖZÜMDE KARŞILAŞILAN SORUNLAR

Cözüm yapılırken, $[0 \leq X \leq 1 \times 0 \leq t \leq 1]$ çözüm Bölgesi üç ayrı bölgeye ayrılarak çözüm yapılmıştır.

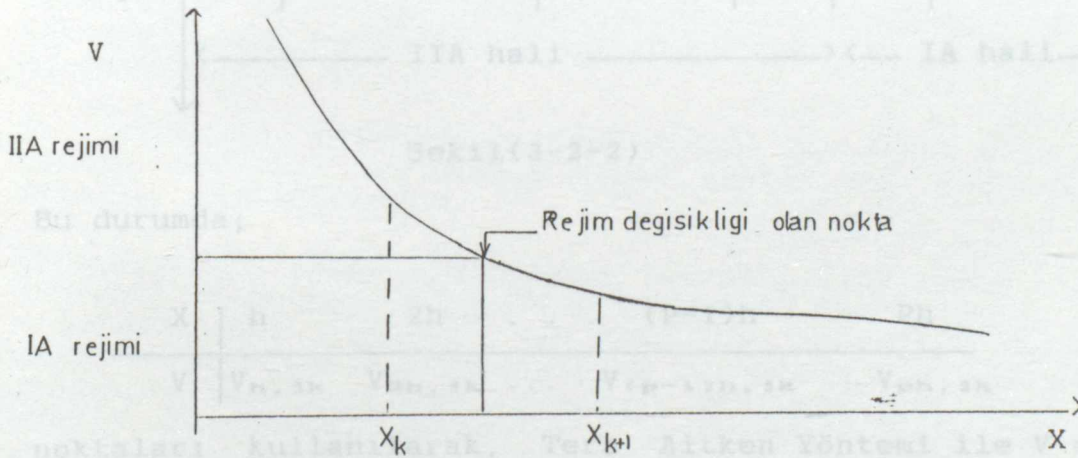
$[0 \leq X \leq 1 \times 0 \leq t \leq 1.355 \times 10^{-2}]$ I. Bölgesinde, yalnızca IA hali analitik çözümünden hesaplamalar yapılmıştır. Bu Bölge tek bir rejimi içerdiği için herhangi bir sorun ile karşılaşılmamıştır.

$| 0 \leq X \leq 1 \times 1.355 \times 10^{-2} \leq t \leq 1 |$ II. Bölgesi hem IIA hali, hemde IA hali rejimlerini içerdiğinden, Çözüm algoritmasında açıklandığı gibi $V > 175$ ise, $US=0.8$, $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olmak üzere,

$$V_{1+1, j+1}^{US} = \frac{2}{r} V_{1, j+1} + 2 V_{1, j+1}^{US} - \frac{2}{r} V_{1, j} + 2 V_{1, j}^{US}$$

$$- V_{1-1, j+1}^{US} - V_{1+1, j}^{US} - V_{1-1, j}^{US}$$

işlemi ile $V < 175$ ise IA hali analitik çözümüyle işlem yapılır. Bu Bölge iki farklı rejimi içerdiğinden, rejim (hal) değişikliklerinde, rejim değişikliği olan noktanın bulunması sorun olmaktadır. Şekil(3-2-1).



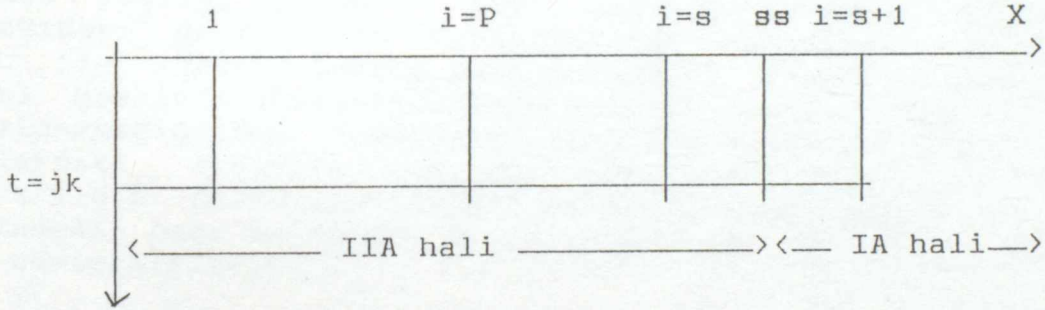
Şekil(3-2-1)

Burada, X_k noktasındaki sıcaklık değeri V_k , IIA hali denkleminde hesaplanmaktadır. Fakat, X_{k+1} noktasındaki sıcaklık ise, hangi hale ait denklemlerle hesaplanabileceği, ayrı bir sorun olmaktadır. Çünkü, hangi X_{k+1} noktasındaki sıcaklık değeri V_{k+1} , IIA veya IA hali denklemlerine göre hesaplanırsa, farklı bir enterpolasyon noktası bulunmaktadır.

Genelde , X_{k+1} noktasındaki V_{k+1} sıcaklığı IIA ile hesaplanabilmektedir. IIIA ve IIA ara yüzeyleri içinse, IIIA hali ile hesaplanmaktadır. Fakat uygulamada, X_{k+1} noktasındaki V_{k+1} sıcaklığının X_k noktasına ait rejim ile hesaplanması durumunda $V_{k+1} > V_k$ olacağı ve t seviyesi artıkcça, $V_{k+1} - V_k$ farkının giderek hızla artığı gözlenmiştir. Dolayısıyla , burada her zaman mutlaka bir hata sözkonusu olup, gerçekte bulunan noktanın hangi rejim bölgesine ait olduğu anlaşılamamaktadır.

Rejim değışikliği olan noktanın bulunmasındaki belirsizlik ve doğal olarak IIA halinin kullanılmasından dolayı , rejim değışimi noktasının civarında ve ötesinde maksimum prensibi ihlal edilmektedir. Buna, aşağıdaki şekilde çözüm getirilmiş olup, konu daha sonra ele alınacaktır.

Herhangi bir $t = jk$ ve $i = 0(1)P$ için $U_{i,j}$ sıcaklık değeri IIA hali ile hesaplınsın. $i=(P+1)$. noktadan itibaren $U_{i,j}$ değeri IIA hali denklemi ile artığı gözlenmektedir.Şekil(3-2-2).



Şekil(3-2-2)

Bu durumda;

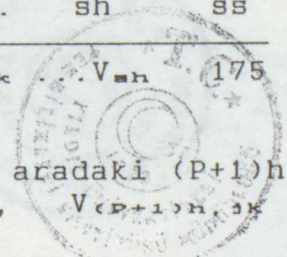
X	h	2h	...	(P-1)h	Ph
V	$V_{h, jk}$	$V_{2h, jk}$...	$V_{(P-1)h, jk}$	$V_{Ph, jk}$

noktaları kullanılarak, Ters Aitken Yöntemi ile $V = 175$ olduğu $X=ss$ değeri hesaplanır. Şayet, bu $X=ss$ değeri,

$Ph < ss, sh < ss$ ve $(s+1)h > ss$ ise;

X	h	2h	...	(P-1)h	Ph	...	sh	ss
V	$V_{h, jk}$	$V_{2h, jk}$...	$V_{(P-1)h, jk}$	$V_{Ph, jk}$...	$V_{sh, jk}$	175

noktaları ile Aitken Yöntemi kullanılarak, aradaki $(P+1)h, (P+2)h \dots (s-1)h, sh$ noktaları için , $V_{(P+1)h, jk}$,



IV. ELDE EDİLEN SONUÇLAR

$V_{(P+2)h,3k} \dots V_{(P-1)h,3k}$, $V_{Ph,3k}$ değerleri hesaplanır. Ardından $V_{(s+1)h}$ noktalarındaki $V_{1,3}$ sıcaklık değerleri, takip eden rejim (hal) ile hesaplanır.

III. Bölümdeki çözüm algoritmasında $[4.89 \cdot 10^{-2} \leq t \leq 1 \times 0 \leq x \leq 1]$ Çözüm Bölgesi içinde karşılaşılan rejim değişikliklerinde aynı çözüm yolu uygulanmaktadır.

$$R_2 = \frac{h_2}{h_1} \cdot 3.5065$$

ve

$$R_2 = \frac{K_2 \cdot 0.111}{h_2} \cdot 5.36078 \cdot 10^{-2}$$

olması gerekmektedir. Bu koşulları sağlayacak şekilde $h_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ ve $K_2 = 1.8525 \cdot 10^{-4}$, $h_2 = 1.2 \cdot 10^{-2}$ ve $K_2 = 7.42155 \cdot 10^{-4}$ alınarak, IIA + IA ve IIIA + IIA + IA hallerini içeren bölgelerde nümerik çözüm, ancak yüzeyde erimenin başlamasına kadar yapılmıştır.

Yapılan çözümde ısınmanın ana eksenine kadar olan zaman aralığı içinde, bazı anlarda sıcaklık dağılımı grafikleri gösterilmiştir. Yüzeysel sıcaklık artışları grafiklerde gösterilmiştir. Başlangıç sıcaklığı 0°C ile 13000°C arasında bulunan sıcaklık dağılımı aynı grafikte gösterilmiştir. Aradaki farklar tam olarak gözlenemediğinden yüzeydeki sıcaklık $0-660^\circ\text{C}$ arasında bazı anlarda, sıcaklık dağılımı 4-1-1'de, yüzeydeki sıcaklığın $0-660^\circ\text{C}$ arasında olduğu zaman aralığı içindeki bazı anlarda sıcaklık dağılımı ise şekil 4-1-2'de gösterilmiştir.

Bu çalışmada ısınmanın ana eksenine kadar olan süre içinde sıcaklık artışı miktarı ve bu süre içindeki ısı değişimi gösterilmiştir.

Katı-sıvı ara yüzünün malzeme içindeki ilerleyiş hızı doğru olarak, yüzeydeki sıcaklık 175°C daha düşük olduğunda katı-sıvı ara yüzünün ilerleyiş hızı daha yavaş olacaktır. Yüzeysel sıcaklık artışı katı-sıvı ara yüzü ilerleyiş hızını etkiler. Katı-sıvı ara yüzü ilerleyiş hızı $V = 13000^\circ\text{C}$ için $X = 1.104 \cdot 10^{-2}$ m ve $V = 13000^\circ\text{C}$ için $X = 2.35 \cdot 10^{-2}$ m olarak bulunmuştur.

IA halinde ise IIA ve IIIA hallerine göre de aynı şekilde IIIA hallerine göre de aynı şekilde ilerleyiş hızları hesaplanmıştır.

Sıcaklık artışı bir bölgede kalmaya devam ederken diğer bölgelerde de sıcaklık artışı gözlemlenmektedir.



IV . ELDE EDİLEN SONUÇLAR

4-1 ÇÖZÜMDEN ELDE EDİLEN SONUÇLAR

III.Bölümdeki çözüm algoritmasında anlatıldığı gibi IIA ve IIA halleri için oluşturulan sonlu fark denklemlerinin

$$R_2 = \frac{k_2.CII}{h_2^2} \leq 3.5065$$

ve

$$R_3 = \frac{k_3.CIII}{h_2^2} \leq 5.35078*10^{-3}$$

olması gerekmektedir. Bu koşulları sağlayacak şekilde, $h_2=6*10^{-3}$ ve $k_2=1.8525*10^{-4}$, $h_3=1.2*10^{-3}$ ve $k_3=7.42166*10^{-4}$ alınarak, IIA + IA ve IIIA + IIA + IA hallerini içeren bölgelerde nümerik çözüm, ancak yüzeyde erimenin başlaması anına kadar yapılmıştır.

Yapılan çözümde ışınlamanın sona erdiği ana kadar olan zaman aralığı içinde, bazı anlarda sıcaklık dağılımı aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir. Yüzeydeki sıcaklık 0°C ile 13000°C içeren bazı anlardaki sıcaklık dağılımı aynı grafikte gösterildiğinde aradaki farklar tam olarak gözlenemediğinden yüzeydeki sıcaklık 0-660°C içeren bazı anlardaki sıcaklık dağılımı şekil 4-1-1'de, yüzeydeki sıcaklığın 660°C ile 13000°C arasında olduğu zaman aralığı içindeki bazı anlardaki sıcaklık dağılımı ise şekil 4-1-2' de gösterilmiştir.

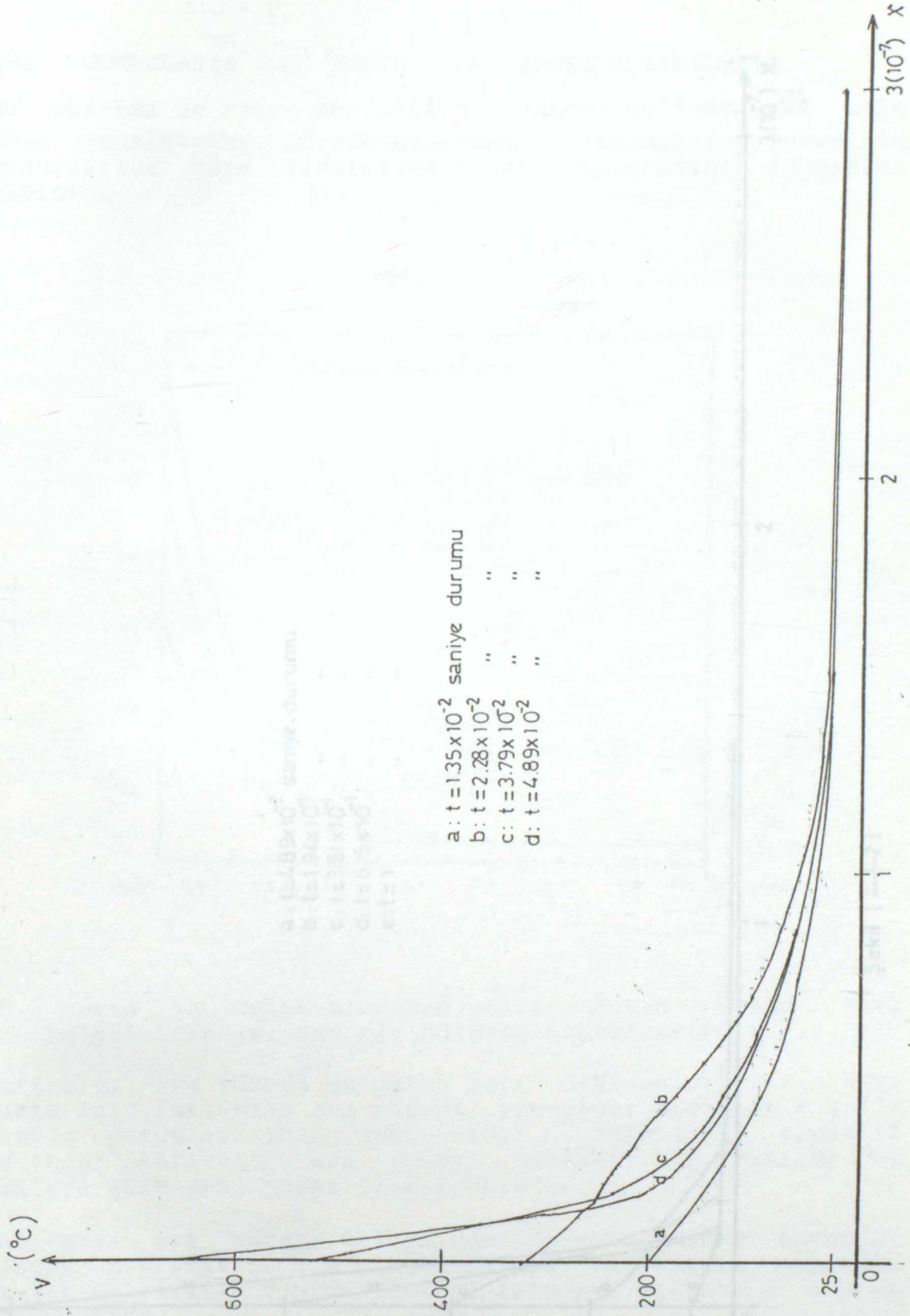
Bu çalışmada ışınlamanın sona erdiği ana kadar olan süre içinde sıcaklık artmasına rağmen ışının dar bir bölgede kaldığı görülmektedir.

Katı-sıvı ara yüzeyinin malzeme içindeki ilerleyişi IA için doğrusal olmakta, yüzeydeki sıcaklık 175°C daha büyük olduğunda ise katı-sıvı ara yüzeyinin doğrusal olmadığı, bazı anlarda, bir önceki zamana göre daha çok ilerlediği gözlenmiştir. Yüzeydeki sıcaklık arttıkça katı-sıvı ara yüzeyi dalgalanma göstererek ilerlemiştir. Katı-sıvı ara yüzeyi yüzeydeki sıcaklık $V=660^\circ\text{C}$ için boyutsuz olarak $X=1,104.10^{-6}$ m ve $V=13000^\circ\text{C}$ için $X=2.35*10^{-6}$ m olarak bulunmuştur.

IA halinde ısı IIA ve IIIA hallerine göre daha hızlı, IIA halide IIIA haline göre daha hızlı ilerlemektedir.

Sıcaklık arttıkça ısı dar bir bölgede kalmaktadır.





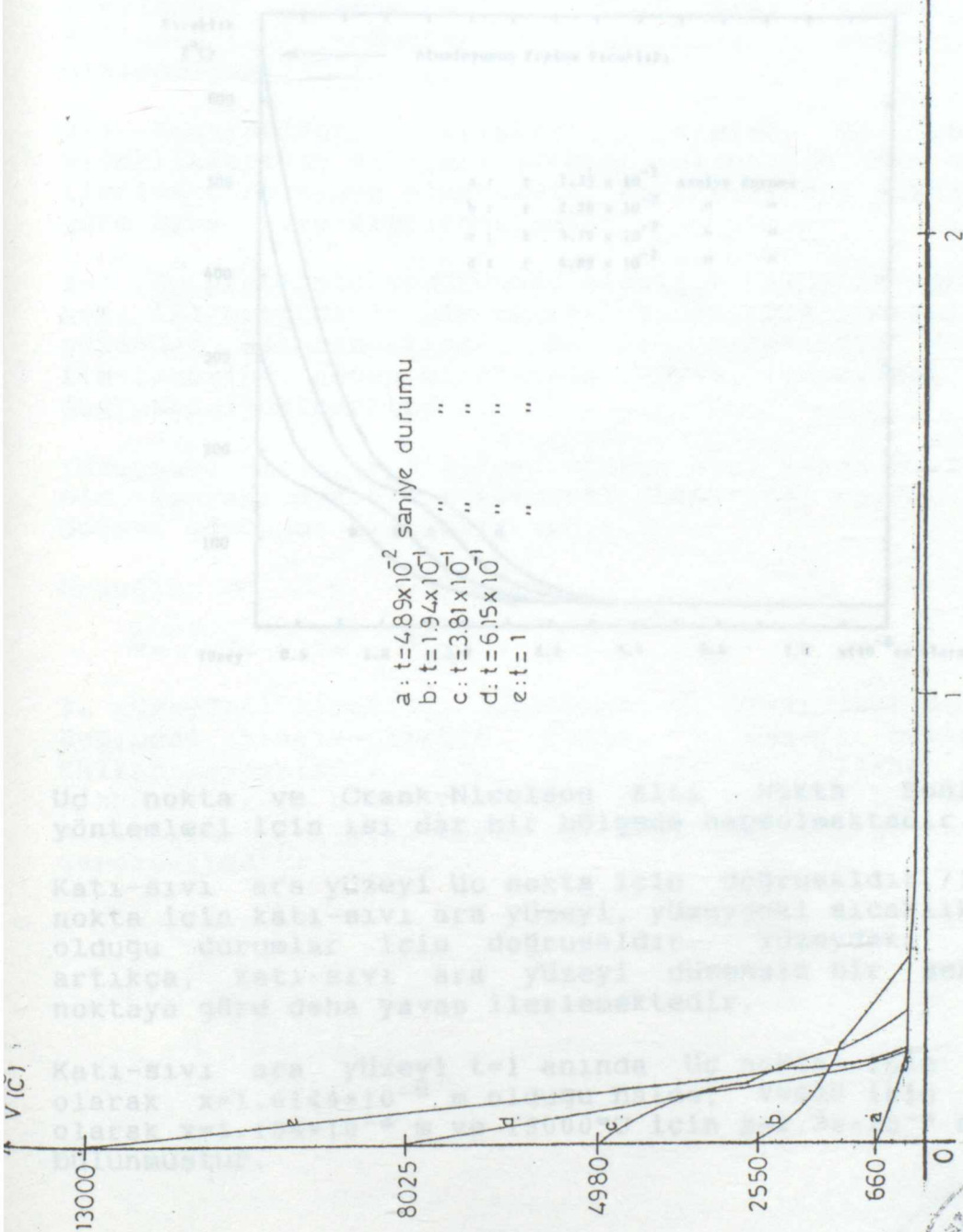
- a: $t = 1.35 \times 10^{-2}$ saniye durumu
- b: $t = 2.28 \times 10^{-2}$ " " "
- c: $t = 3.79 \times 10^{-2}$ " " "
- d: $t = 4.89 \times 10^{-2}$ " " "

Şekil (4-1-1)



4-2 SONUÇLARIN ÜÇ NOKTA İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bu çalışma üç nokta sonlu fark yöntemi kullanılarak daha önce yapılmıştır. Crank-Nicolson altı nokta yönteminin sonuçlarına göre çizdirilen anlar ile grafiği aşağıdaki gibidir.

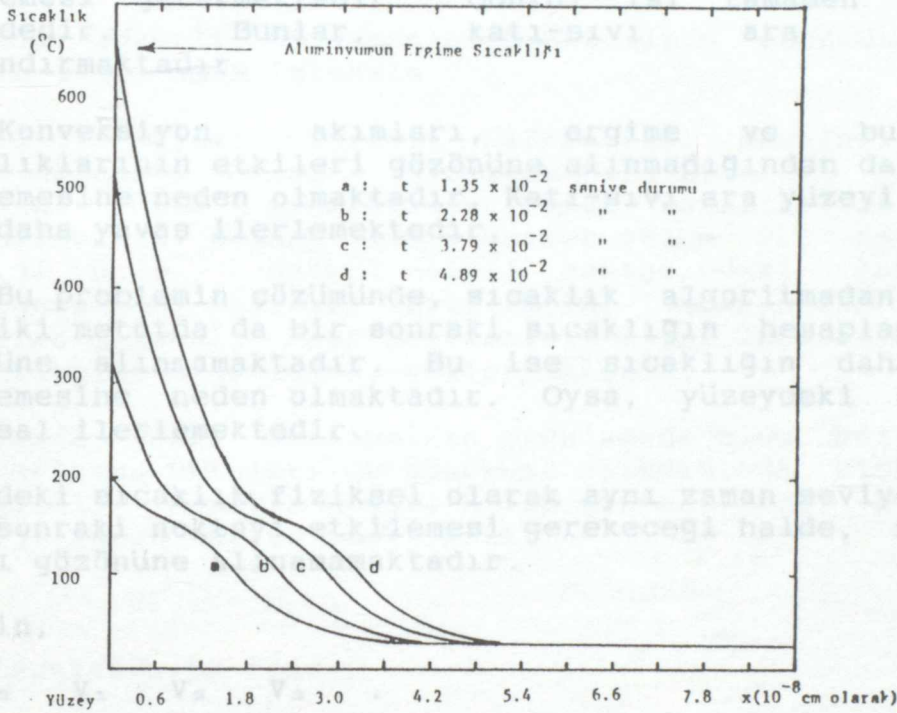


Şekil (4-2-2)



4-2 SONUÇLARIN ÜÇ NOKTA İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bu çalışma üç nokta sonlu fark yöntemi kullanılarak daha önce yapılmıştır. Crank-Nicolson altı nokta yönteminin sonuçlarına göre çizdirilen anlar için grafiği aşağıdaki gibidir.



Üç nokta ve Crank-Nicolson Altı Nokta Sonlu Fark yöntemleri için ısı dar bir bölgede hapsolmaktadır./1/.

Katı-sıvı ara yüzeyi üç nokta için doğrusaldır./1/. Altı nokta için katı-sıvı ara yüzeyi, yüzeydeki sıcaklık $V \leq 175$ olduğu durumlar için doğrusaldır. Yüzeydeki sıcaklık artıkça, katı-sıvı ara yüzeyi düzensiz bir şekilde üç noktaya göre daha yavaş ilerlemektedir.

Katı-sıvı ara yüzeyi $t=1$ anında üç nokta için boyutsuz olarak $x=1.6144 \times 10^{-6}$ m olduğu halde, $V=635$ için boyutsuz olarak $x=1.104 \times 10^{-6}$ m ve 13000°C için $x=2.35 \times 10^{-6}$ m olarak bulunmuştur.



I V . T A R T I Ş M A

4-3 SONUÇLARIN FİZİKSEL VERİLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

Sonuçların fiziksel yorumunu aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

1-) Yüzeylerden ısı kaybı ve hal değiştirme olmadığı var sayıldığından, katı-sıvı ara yüzeyinin daha hızlı ilerlemesi gerekmektedir. Çünkü; ısı tamamen sıcaklık halindedir. Bunlar, katı-sıvı ara yüzeyini hızlandırmaktadır.

2-) Konveksiyon akımları, ergime ve buharlaşma sıcaklıklarının etkileri gözönüne alınmadığından daha yavaş ilerlemesine neden olmaktadır. Katı-sıvı ara yüzeyi gerçeğe göre daha yavaş ilerlemektedir.

3-) Bu problemin çözümünde, sıcaklık algoritmadan dolayı her iki metotda da bir sonraki sıcaklığın hesaplanmasında gözönüne alınmamaktadır. Bu ise sıcaklığın daha yavaş ilerlemesine neden olmaktadır. Oysa, yüzeydeki sıcaklık doğrusal ilerlemektedir.

Yüzeydeki sıcaklık fiziksel olarak aynı zaman seviyesindeki bir sonraki noktayı etkilemesi gerekeceği halde, metotdan dolayı gözönüne alınmamaktadır.

Örneğin,

$$V_0 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad \dots$$

V_0 yüzeydeki sıcaklığı gösterebilir. V_0 sınır şartından dolayı doğrusal ilerlemektedir. Fakat, V_1 değeri hesaplanırken kullanılmamaktadır. Bu ise fiziksel olarak ters bir olaydır. V_1 'in hesabında, V_0 'ı katan bilinen bir sonlu fark algoritması yoktur. Böyle bir algoritmanın geliştirilmesi gerekmektedir.

Ayrıklaştırma hatası, lokal kesme hatası ile ilişkilendirilir. Bu hata h ve adım uzunluklarına, ayrıca Taylor Formülündeki atılan terim sayısına bağlıdır.

$T_{i,j}$ Lokal Kesme hatasını gösterir. Bu durumda $T_{i,j} = (5-1)$ denkleminin (i,j,k) noktalarındaki $T_{i,j}(U) = 0$ Par. Hata miktarı sağlanıyorsa miktardır. Bu durumda;

$$T_{i,j} = F_{i,j}(U_{i,j}) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h} - (U_{i,j} - U_{i,j-1})$$

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} - (U_{i,j} - U_{i,j-1}) = 2U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1}$$

şeklinde tanımlanacaktır. Bu ifade,



I V . T A R T I Ş M A

5 - 1 HATANIN İRDELENMESİ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^{0.8}}{\partial x^2}$$

Kısmi Türevli Diferansiel Denkleminin çözümünde yapılan hata irdelenmek istensin.

(5-1-1) Kısmi Türevli Diferansiel denkleminin (i,j) noktasındaki Crank - Nicolson Fark Denklemi $F_{1,j}(u) = 0$ olsun. Fark Denkleminin kafes noktalarında u fark denkleminin çözümü ile U gerçek çözüm yer değiştirirse, $F_{i,j}(U)$ değeri (i,j) noktasındaki lokal kesme (truncation) hatasını verir. Kesme (truncation) hatasının sifıra gitmesi, Fark Denkleminin Kısmi Türevli Diferansiel denklemine uygunluğunu göstermektedir.

Aslında, Fark Denkleminin uygulamada elde edilen çözümü yuvarlatma hataları da gözönüne alındığında, hiçbir zaman U değildir. Nümerik değeri N ile gösterilirse, herhangi bir (i,j) kafes noktasındaki hata;

$$U_{1,j} - N_{1,j}$$

olacaktır. Bu ifade,

$$U_{1,j} - N_{1,j} = (U_{1,j} - u_{1,j}) + (u_{1,j} - N_{1,j})$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $(U_{1,j} - u_{1,j})$ terimi ayırıklaştırma (discretization) hatasını ve $(u_{1,j} - N_{1,j})$ terimi de global yuvarlatma hatasını gösterir. Toplam Hata, Ayırıklaştırma ve Global Yuvarlatma hatalarının toplamından oluşur.

Ayırıklaştırma hatası, local kesme hatası ile analiz edilirler. Bu hata h ve adım uzunluklarına, ayrıca Taylor Förmülündeki atılan terim sayısına bağlıdır.

$T_{i,j}$ Local Kesme hatasını gösterebilir. Bu durumda $T_{i,j}$ (5-1) denkleminin (ih,jk) noktasındaki $F_{i,j}(U)=0$ Fark denklemini sağlamayan miktardır. Bu durumda;

$$T_{1,j} = F_{1,j}(U_{1,j}) = \frac{U_{1,j+1} - U_{1,j}}{k} - (U^{0.8}_{1-1,j} - 2U^{0.8}_{1,j} + U^{0.8}_{1,j+1})$$

$$U^{0.8}_{1+1,j} + U^{0.8}_{1+1,j+1} - 2U^{0.8}_{1,j+1} + U^{0.8}_{1-1,j+1}$$

şeklinde tanımlanacaktır. Bu ifade,



$$U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j+1} = k T_{i, j} + \left(U^{0 \cdot \theta}_{i-1, j+1} + \frac{2}{r} U_{i, j+1} + 2 U^{0 \cdot \theta}_{i, j+1} - U^{0 \cdot \theta}_{i-1, j} - \frac{2}{r} U_{i, j} + 2 U^{0 \cdot \theta}_{i, j} - U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j} \right)$$

şeklinde de yazılabilir.

$$U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j+1} = \left(U^{0 \cdot \theta}_{i-1, j+1} + \frac{2}{r} U_{i, j+1} + 2 U^{0 \cdot \theta}_{i, j+1} - U^{0 \cdot \theta}_{i-1, j} - \frac{2}{r} U_{i, j} + 2 U^{0 \cdot \theta}_{i, j} - U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j} \right)$$

dır. O halde,

$$U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j+1} - U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j+1} = k T_{i, j}$$

olur. Buradan, (i, j) noktasındaki lokal kesme hatasının $(i, j+1)$ noktasındaki ayrıklaştırma (discretization) hatasını verdiği söylenir. Bu yüzden Ayrıklaştırma hatası, Kesme hatasıyla analiz edilmektedir.

(5-1) denkleminin Kesme hatası için, $U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j+\frac{1}{2}}$ değeri $U_{i, j+\frac{1}{2}}$ civarında, $U^{0 \cdot \theta}_{i-1, j+\frac{1}{2}}$ değeri $U_{i-1, j+\frac{1}{2}}$ civarında, ayrıca, $U_{i, j+1}$ de $U_{i, j+\frac{1}{2}}$ civarında seriye açılınsın.

$$\begin{aligned} U^{0 \cdot \theta}_{i+1, j+\frac{1}{2}} &= U^{0 \cdot \theta} [(i+1)h, (j+\frac{1}{2})k] \\ &= U^{0 \cdot \theta} (x_1+h, t_{j+\frac{1}{2}} k) \\ &= U^{0 \cdot \theta}_{i, j+\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\partial U^{0 \cdot \theta}}{\partial x} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U^{0 \cdot \theta}}{\partial x^2} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} + \dots \end{aligned}$$



$$U^{0.8}{}_{i-1, j+\frac{1}{2}} = U^{0.8} [(i-1)h, (j+\frac{1}{2})k]$$

$$= U^{0.8}(x_{i-1}, t_{j+\frac{1}{2}})$$

yazılabilir.

$$= U^{0.8}{}_{i, j+\frac{1}{2}} - h \left(\frac{\partial U^{0.8}}{\partial x} \right)_{i, j+\frac{1}{2}}$$

Yüzeydeki sıcaklık 175 °C için, çözümüde $h = 5 \cdot 10^{-2}$ ve $k = 1.85 \cdot 10^{-2}$ alınmıştır. $U^{0.8}$ değerleri bilinmediğinden, $T_{i, j}$ Lokal Kesme Hatası $+ \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U^{0.8}}{\partial x^2} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} - \dots$ konusundadır. (5.1) denkleminin 2. kal $\frac{\partial^2 U^{0.8}}{\partial x^2}$ hatasının mertebeni $O(k) = O(h^2)$ dir. O halde,

veya $U_{i, j+1} = U_{i, j+\frac{1}{2}} + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i, j+\frac{1}{2}}$

yazılabilir. +.....

Ayrıca algoritmada anlatıldığı gibi, $(i, j) = (1, 1)$ noktasındaki sıcaklık, U_0 Nokta Sonlu Fark yöntemi ile hesaplanır. $U_{i, j+1} - U_{i, j}$ ifadeleri içinde yukarıdaki işlemler $T_{i, j} = \frac{U_{i, j+1} - U_{i, j}}{k}$ Lokal Kesme Hatasının ilk terimi;

$$= \frac{U^{0.8}{}_{i-1, j+\frac{1}{2}} - 2 U^{0.8}{}_{i, j+\frac{1}{2}} + U^{0.8}{}_{i+1, j+\frac{1}{2}}}{h^2}$$

olarak bulunur. $T_{i, j}$ Lokal Kesme Hatasının mertebesi Crank-Nicolson için $O(k^2)$ dir. $U^{0.8}$ için $O(h^2)$ dir. O halde, $= \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U^{0.8}}{\partial x^2} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i, j+\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 U^{0.8}}{\partial x^4} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} + \dots$$

Bu problemin çözümünde yapılan yuvarlama hatası $R_{i, j}$, U , (5.1) denkleminin gerçek çözümü olduğundan, $R_{i, j}$ kullanılmadığından,

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U^{0.8}}{\partial x^2} = 0$$

dir. Bu yüzden, $T_{i, j+\frac{1}{2}}$ ifadesinin ilk terimi,

$$\left(\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U^{0.8}}{\partial x^4} \right)_{i, j+\frac{1}{2}}$$

olur.
olur.



$$|e_{1,j}| = |T_{1,j}| + |R_{1,j}|$$

den

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U^{0.8}}{\partial x^2} = 0$$

olur, bu durumda her zaman bir (1,j) kafes noktasındaki hatanın mertebesi $O(10^{-4})$ ten daha küçük olacaktır.

yazılabilir.

Yüzeydeki sıcaklık $175 < U \leq 635$ için, çözümde $h = 6 \times 10^{-9}$ ve $k = 1.85 \times 10^{-4}$ alınmıştır. $U_{1,j}$ gerçek değerleri bilinmediğinden, $T_{1,j}$ Lokal Kesme Hatasının mertebesi söz konusudur. (5-1) denkleminin lokal kesme hatasının mertebesi $O(k) - O(h^2)$ dir. O halde,

$$|T_{1,j}| \leq O(k)$$

veya

$$|T_{1,j}| \leq O(10^{-4})$$

yazılabilir.

Ayrıca algoritmada anlatıldığı gibi, $(1,j)$ $j=1(1)N$ kafes noktalarındaki sıcaklık, Üç Nokta Sonlu Fark yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu noktalar içinde yukarıdaki işlemler tekrarlandığında $T_{1,j}$ Lokal Kesme Hatasının ilk terimi;

$$\left(\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U^{0.8}}{\partial x^4} \right)_{1,j}$$

olarak bulunur. $T_{1,j}$ Lokal Kesme Hatasının mertebesi Crank-Nicolson Altı Nokta için bulunan değere eşittir. O halde, $T_{1,j}$ Lokal Kesme Hatasının mertebesinin,

$$|T_{1,j}| \leq O(10^{-4})$$

olduğu söylenebilir.

Bu problemin çözümünde yapılan yuvarlatma hatası $R_{1,j}$ olsun. Çözümde, onluk taban ve noktadan sonra 16 basamak kullanıldığından,

$$|R_{1,j}| \leq \frac{1}{2} 10^{-16}$$

dir./12/.

Toplam hata $e_{1,j}$ olsun. Bu durumda,

$$e_{1,j} = T_{1,j} + R_{1,j}$$

olur.



$$| e_{1,j} | = | T_{1,j} | + | R_{1,j} |$$

den

$$| e_{1,j} | \leq O(10^{-4}) + O(10^{-15})$$

olur. Buradan , herhangi bir (i,j) kafes noktasındaki hatanın mertebesinin $O(10^{-3})$ ten daha küçük olabileceği söylenebilir.

Ayrıca, $\Delta x = h = 6 \cdot 10^{-9}$ seçildiğinden, X in hesaplanmasında yapılan hatanın mertebesi $O(10^{-9})$ ve t değerlerinin hesaplanmasında yapılan hatanın mertebesi ise, $\Delta t = k = 1.85 \cdot 10^{-4}$ olduğundan, $O(10^{-4})$ tür.

U > 635 için , $h = 1.2 \cdot 10^{-8}$, $k = 7.42 \cdot 10^{-4}$ olarak seçildiğinden, yukarıdaki işlemler tekrarlandığında bu bölge için de sıcaklığın hesabında yapılan Toplam hatanın mertebesi,

$$| e_{1,j} | \leq O(10^{-3})$$

tür. Ayrıca bu bölgede X in hesaplanmasında yapılan hatanın mertebesi $O(10^{-8})$ ve t nin hesaplanmasında yapılan hatanın mertebesi $O(10^{-4})$ tür.

Ayrıca , yukarıda hesaplanan hata toplam diferansiel ile de aşağıdaki gibi hesaplanabilir. $V=V(x,t)$ olduğuna göre, toplam diferansiyeli,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} h + \frac{\partial V}{\partial t} k$$

dır.

$$| dV | \leq \left| \frac{\partial V}{\partial x} h \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial t} k \right|$$

$$| dV | \leq O(10^{-9}) + O(10^{-4})$$

olur.

$$| dV | \leq O(10^{-3})$$

yazılabilir.



VI. KAYNAKLAR

5-2 FİZİKSEL UYGUNLUK

175 $< V < 635$ durumunda X in ve t değerlerinin hesaplanmasında yapılan hatanın mertebesi sırasıyla $O(10^{-9})$ ve $O(10^{-4})$ tür. $V = 635$ için Katı-Sıvı arayüzeyinin yüzeye uzaklığı ise boyutsuz olarak $X=1.104*10^{-06}$ m. t nin değeri ise $4.89*10^{-2}$ sn. olarak hesaplanmıştır.

$V > 635$ durumunda ise X 'in ve t değerlerinin hesaplanmasında yapılan hatanın mertebesi sırasıyla $O(10^{-8})$ ve $O(10^{-4})$ tür. $V = 13000$ °C için katı-sıvı arayüzeyinin yüzeye uzaklığı $X = 2.35*10^{-6}$ m. $t=1$ sn olarak bulunmaktadır. Burada, V 'nin hesabında yapılan hata ise $O(10^{-9})$ ve $2.35*10^{-6} < O(10^{-8})$ olduğundan fiziksel açıdan uygundur.

5-3 YAPILMASI GEREKENLER

Bu çalışmanın ardından yapılması gerekenler aşağıda sıralanmıştır.

1)- Herhangi bir t seviyesinde yüzeydeki sıcaklık V_0 olsun. Sonlu fark yöntemiyle, bir sonraki komşu kafes noktasında hesaplanacak sıcaklık ise V_1 olsun. V_1 'in hesabında V_0 'ı içeren bir algoritma geliştirilmelidir.

2)- Bu çalışmada, cisme yüzeyde laser ışınlandığında, cismin sıcaklık dağılımı incelenmiştir. Ayrıca, cismin içindeki soğumanın dağılımı yapılacak ergime derinliği belirlenecektir.

3)- Yapılan varsayımlara uyan ısı denkleminde

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot C} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

halinde algoritmayı uygulayarak ayrı bir çalışma yapılacaktır. Sonuçlar karşılaştırılacaktır.

4)- Sınır ve başlangıç koşulları değiştirilerek problemin çözümü tekrar yapılacaktır.

5)- Isı kaybı ve hal değiştirme gözönüne alınarak problemin çözümü yapılacak, katı-sıvı ara yüzeyi ile ilişkisi araştırılacaktır.



VI. K A Y N A K L A R

- (1) MARŞOĞLU, M., MARŞOĞLU, A., ÇAĞAL, B., Laserle sıcaklık Dağılımı , Yıldız Üniversitesi Dergisi, 1, 33, 1984.
- (2) RICHARD, F.A., WALSH, D., Time Resolved Temperature Measurment of a Laser-Heated Surface, British Journal of Applied Physics, ser.2, 2663 ,1969.
- (3) MARŞOĞLU, M., MARŞOĞLU, A., ÇAĞAL, B., Laserle Işınlamada Sıcaklık Dağılımı , Yıldız Üniversitesi Dergisi, 4, 69, 1985.
- (4) C.KLUZİNSKI, LEMAIRE, A.M., MACHAND, D., PIEDNOIR, P., Les Lasers en Soudage , Sommaire, 10, 4, 1986.
- (5) MITCHELL, A.R., Department of Mathematics, John Sons ltd., 198, Newyork, 1977.
- (6) READY, J.F., Effect Due to Absorbtion of Laser Radition Journal of Applied Physics, 36, 142, 1965.
- (7) MONDOLFO, L.F., Alüminyum Alloys , Butterworths, 1976.
- (8) CARSLAW, H. S., JAEGER, J.C., Conductivity of Heat in Solids, Oxford University Press, Cambridge, 1973.
- (9) GEORGE, E., FORSYTHE, W.R.W , Finite-Difference Methods for Partial Differential Equation, Jonh Wiley Sons, 444, 1959.
- (10) WILLAM, F.A., Nümerical Methods for P.D.E., Nelson , 291, London , 1969.
- (11) READY, J.F., Industrial Application of Lasers, Acedemic Press, 290, Newyork, 1978.
- (12) JORDAN, C., Calculus of Finite Differences, Chelsea Publishishing Company, 654, Newyork , 1965.
- (13) GEORGE, B., Chelsea Publishing Company , 336, Newyork, 1970.
- (14) GREENSPAN, D., Numerical Solution of Non-linear Differential Equations, John Wiley * Sons, Inc, 348, October, 1967.

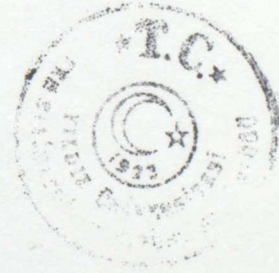


VII. TEŞEKKÜR

" Laserle Işınlamada Sıcaklık Dağılımı " konusunda Doktora tezine çok değerli hocalarım Prof. Dr. İbrahim Sezginman ile Prof. Dr. Behiç Çağal ' ın teşvikleri ile başladım. Ülkemizde konunun yeni olması ve bu konuda yayınlanmış eserlerin bulunmaması nedeniyle zorluklarla karşılaştım. Bu konuda çalışmalar yapan çok değerli hocalarım Prof. Dr. Müzeyyen Marşoğlu ve eşi Trakya Üniversitesi öğretim üyelerinden Prof. Dr. A.Samet Marşoğlu'nun çok büyük desteğini gördüm.

Bu tez esnasında, kaynak sıkıntısı en büyük problemdi. Bunun yanında , hocalarımla teşvik ve desteği en büyük moral kaynağım oldu.

Beni Doktora ya teşvik eden ve bıkmadan usanmadan yakın desteklerini esirgemeyen çok değerli hocalarıma teşekkür ediyor, saygılarımı sunuyorum.



VIII. ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Yıldız Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünden mezun oldum. 1984 yılında aynı Fakültenin Uygulamalı Matematik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladım. 1986 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü " Sistem Analizi " programında Yüksek Lisans yaptım. Aynı yıl Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde Doktoraya başladım. Halen Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktayım.



