

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Lineer Olmayan Sistemlerin  
Periyodik Çözümleri

G. Fıstık Akşverişçi  
Doktora Tezi

209  
75

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

mat.

1500076

LİNEER OLMAYAN SALINICILARIN PERİYODİK ZORLAMALAR ALTINDA  
PERİYODİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

G. Füsun ALIŞVERİŞÇİ

İSTANBUL 1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON  
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot R 209  
:.....75.....  
Alındığı Yer :Fen.Bilimleri.Ens.....  
Tarih :..17.03.1992.....  
Fatura :.....-.....  
Fiyatı :..15.000.-TL.....  
Ayniyat No :..1/1.....  
Kayıt No :..48191.....  
UDC :..510.....  
Ek :.....



209/75

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



LİNEER OLMAYAN SALINICILARIN PERİYODİK ZORLAMALAR ALTINDA  
PERİYODİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ



DOKTORA TEZİ

G. Füsun ALIŞVERİŞÇİ

İSTANBUL 1990



## İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ.....	1
2. İZMİR'DE YATIRIM.....	2
2.1. Yatırımların Yürütülmesi.....	2
2.2. Yatırımların Yürütülmesi.....	3
2.3. Yatırımların Yürütülmesi.....	11
2.4. Yatırımların Yürütülmesi.....	14
3. İZMİR'DE YATIRIM YÜRÜTÜLMESİNİN EKONOMİK ETKİLERİ.....	16
3.1. Yatırımların Yürütülmesi ile İlgili Ekonomik Etkiler.....	16
3.2. Yatırımların Yürütülmesi ile İlgili Sosyal Etkiler.....	22
3.3. Yatırımların Yürütülmesi ile İlgili Kültürel Etkiler.....	22
3.4. Yatırımların Yürütülmesi ile İlgili Çevresel Etkiler.....	27
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	41

Tez yöneticiliğimi üstlenen ve her türlü desteği esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Şerafettin OYDAŞIK'a,

Yaptığı seminerlerle bu konuya yönelmemi sağlayan, cesaret veren, çalışmalarım sırasında bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın Hocam Doç. Dr. Mehmet CAN'a,

Karşılaştığım zorluklarda yol gösteren Sayın Hocam Prof. Dr. Vural CİNEMRE'ye,

Çeşitli yazışmalarla tartışma imkânı bulduğum Dr. Gamal M. MAHMOUD'a,

Ayrıca tezimi titizlikle daktilo eden Sayın Kadriye GÜL'e teşekkürü zevkli bir görev sayarım.

G. Füsun ALIŞVERİŞÇİ



## İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

1. GİRİŞ.....	1
2. BAŞLANGIÇ BİLGİLERİ.....	3
2.1. Pertürbasyon Yöntemleri.....	3
2.2. Ortalama Yöntemi.....	5
2.3. Çoklu Ölçekler Yöntemi.....	11
2.4. İndikatriks Yöntemi.....	14
3. LİNEER OLMAYAN MATHIEU DENKLEMİNİN EŞZAMANLI PERİYODİK YÖRÜNGELERİ.....	16
3.1. Eşzamanlı Periyodik Yörüngelerin Analitik İncelenmesi.....	16
3.2. Analitik Yöntemle Eşzamanlı Periyodik Yörüngeler İçin Kararsızlık Bölgelerinin Bulunması.....	27
3.3. Eşzamanlı Periyodik Yörüngelerin Sayısal İncelenmesi.....	33
3.4. Sayısal Yöntemle Eşzamanlı Periyodik Yörüngelerin Kararlılık Analizi.....	37
4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	41
EK-1 : LİNEER VE LİNEER OLMAYAN MATHIEU DENKLEMLERİ.....	43
EK-2 : POINCARÉ-BIRKHOFF TEOREMİ.....	47
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	61



## ÖZET

Bu çalışmada,

$$\ddot{x} + ax + \lambda f(x, \dot{x})P(\Omega t) + kg(x, \dot{x}) = 0, \quad P(\Omega t + 2\pi) = P(\Omega t) \quad (1)$$

denklemleri ile tanımlanmış, parametrik olarak oluşturulan, lineer olmayan titreşimlerin bir sınıfı gözönüne alındı. (1) genel formuna uyan, katsayısında periyodik çarpan bulunduran, hareketi

$$\ddot{x} + ax + \lambda(x\cos 2t + bx^3) = 0, \quad b \geq 0 \quad (2)$$

denklemleri ile verilen; "LINEER OLMAYAN MATHIEU DENKLEMİ"nin  $2\pi$  ve  $\pi$  periyotlu periyodik yörüngeleri incelendi.

(2) denkleminin periyodik yörüngeleri, "GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTALAMA YÖNTEM"i ile analitik olarak incelendi,  $\lambda$  ya göre, 2. mertebeden periyodik yörüngelerin açık ifadeleri çıkarıldı, bu sonuçlar kullanılarak eşzamanlı periyodik yörüngelerin kararlılık özellikleri incelendi. (2) denklemleri lineerleştirilerek, çoklu zaman ölçeklerinin standart pertürbasyon tekniklerinin uygulandığı Hill tipi denklemler çıkarıldı. Böylece  $(\lambda, \omega^2)$  düzleminde  $\lambda$  ya göre 2. mertebeden kararlı olmayan bölgeler elde edildi.

(2) denkleminin periyodik yörüngeleri yeni bir yöntem olan "İNDİKATRİKS YÖNTEM"i ile sayısal olarak incelendi,  $(a, \lambda)$  parametreleri belirlendi. İndikatriks yöntemle ilgili Poincaré haritalaması ile sayısal stabilite analizi yapıldı. Sayısal ve analitik yöntemlerle bulunan sonuçlar karşılaştırıldı, aralarında iyi bir uyum olduğu gözlemlendi.

#### SUMMARY

In this work a kind of nonlinear oscillations have been considered which are determined and in conformance with

$$\ddot{x} + ax + \lambda f(x, \dot{x})P(\Omega t) + kg(x, \dot{x}) = 0, \quad P(\Omega t + 2\pi) = P(\Omega t) \quad (1)$$

equation (1) and obtained parametrically. Periodic trajectory of "nonlinear MATHIEU equation" which has  $2\pi$  and  $\pi$  period and has coefficients of periodic multiplier has been studied. The equation of this motion is given by

$$\ddot{x} + ax + \lambda(x\cos 2t + bx^3) = 0, \quad b \geq 0 \quad (2)$$

Periodic trajectories of equation (2) are studied analitically by means of "generalized average method" and obtained explicit expressions of second order periodic trajectory in respect to  $\lambda$ . By using these results synchronized periodic trajectories stability properties are studied. By linearized equation (2) Hill type equations have been found out by using standard perturbation techniques according to multiple time scale. So, in  $(\lambda, \omega^2)$  plane second order unstable regions have been obtained,

Periodic trajectories of equation (2) are studied numerically by using a new method called "INDICATRIX METHOD" and  $(a, \lambda)$  parameters are determined. Numerical stability analysis is made by using Poincaré mapping, related to indicatrix method.

The results which are obtained by using numerical and analitical methods are compared and it is observed that they all agree with each other.



## 1. GİRİŞ

Titreşimler; mekanikte, akustikte, elektrikte, optikte, biyoloji, jeoloji, sosyoloji vs... bilimin bütün alanlarında karşımıza çıkar. Titreşimlerin matematik teorisi harmonik harekette olduğu gibi çok basit, gecikme titreşimlerinde olduğu gibi çok zor olabilir. Titreşen sistemler tek veya daha fazla, ya da sonsuz serbestlik derecesine sahip olabilirler.

Lineer teoriler gerçek durumların ilk yaklaşıklıklarıdır. Hiçbir gerçek fiziksel olay lineer teoriyle tam olarak incelenemez. Meselâ sönüm kuvvetleri lineer değildir. Geri itici kuvvetler yaklaşık olarak lineerdir. Kendi kendine uyarılmış titreşimlerin oluşturduğu kuvvetler, lineerlikten ayrılmaları küçük olduğundan, lineer kabul edilebilirler. Bazı bilimlerde kronometri, sismoloji gibi, tamlık ve duyarlık çok önemlidir. Küçük kuvvetlerin etkisiyle oluşan pertürbasyonun büyüklüğünün hesaba katılması gerekir. Bunlar nonlinear mekaniğin konusudur.

Davranışları, lineer olmayan diferansiyel denklemlerle açıklanabilen fiziksel sistemler "lineer olmayan sistemler"dir. Lineer olmayan titreşimlerin teorisi lineer titreşim teorisinin kapsamadığı olayların incelenmesini sağlar. Ancak, lineer olmayan olayların araştırılması büyük güçlükler getirir. Şimdiye kadar, lineer titreşim teorilerinin tamlığında bir teori lineer olmayan olaylar için geliştirilememiştir. Özel problemlere uygulanabilen çok sayıda tam ve yaklaşık yöntem önerilmiştir [32]. Bu yöntemler, genel prensipleri özellikle basit sistemler için kurmayı mümkün kılar. Bu prensipler belirli bir yeterlikle tüm lineer olmayan problemler için geçerlidir.

Bir fiziksel sistem katsayıları zamana bağlı bir diferansiyel denkleme (lineer veya lineer olmayan) indirgenerek incelenebilir. Çok önemli ve ilginç olan hal mekanik ve elektronik alanlarda katsayıların periyodik değişmesi halidir. Uyarıcı kuvvet zamana periyodik bağlıdır.



Meselâ, lineer denklemler Hill [8] ve Mathieu [19], nonlinear denklemler Duffing [11, 25] ve Van Der Pol [11] denklemleridir.

Periyodik katsayılı diferansiyel denklemler teorisinde klasik ve temel problem, periyodik yörüngelerin araştırılmasıdır. Poincaré'nin zamanından beri periyodik çözümlerin, lineer olmayan dinamik sistemlerin incelenmesinde çok önemli rol oynadığı bilinmektedir [1]. Özellikle küçük pertürbasyon etkisinde dinamik sistemlerin kararlılık özellikleri, sadece bölgesel dallanma olayının analizinde değil, sistemin dinamiğindeki bazı global değişikliklerde de önemlidir. Bu probleme yaklaşım oldukça çeşitlidir. Farklı görüşler şöyle özetlenebilir:

- i) Analitik ve topolojik yöntemlerle kararlılık analizi [2,3,4].
- ii) Yarı lineer veya lineer olmayan denklemler için analitik yöntemlerle kantitatif periyodik yörüngelerin incelenmesi [2,3,4].
- iii) Periyodik yörüngelerin sayısal incelenmesi [2,3,4].

Bu çalışmada katsayısında periyodik çarpan bulunduran, hareketi

$$\ddot{x} + ax + \lambda(x\cos 2t + bx^3) = 0, \quad b \geq 0 \quad (1.1)$$

denklemleri ile verilen, "LINEER OLMAYAN MATHIEU DENKLEMİ"nin periyodik yörüngeleri incelendi | Ek 1 |.

Bölüm 3.1'de (1.1) denkleminin periyodik yörüngeleri "GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTALAMA YÖNTEM"i ile analitik olarak belirlendi,  $\lambda$  ya göre 2. mertebeden periyodik yörüngelerin açık ifadeleri çıkarıldı, bölüm 3.2'de eşzamanlı periyodik yörüngelerin kararlılık özelliklerinin incelenmesi için bölüm 3.1'in sonuçları kullanıldı. (1.1) denklemleri lineerleştirilerek, çoklu zaman ölçeklerinin standart pertürbasyon tekniklerinin uygulandığı Hill tipi denklemler ortaya çıkarıldı. Böylece  $(\lambda, \omega^2)$  düzleminde  $\lambda$  ya göre 2. mertebeden kararlı olmayan bölgeler belirlendi, bölüm 3.3'de (1.1) denkleminin periyodik yörüngeleri yeni bir yöntem olan "İNDİKATRİKS YÖNTEM"i [11, 15] ile sayısal olarak incelendi,  $(a, \lambda)$  parametreleri belirlendi, bölüm 3.4'de sayısal olarak kararlılık analizi yapıldı, bölüm 4'de sayısal ve analitik yöntemle bulunan sonuçlar karşılaştırıldı.



## 2. BAŞLANGIÇ BİLGİLERİ

### 2.1. Pertürbasyon Yöntemleri [6, 23, 24]

Mekanikte lineer olmayan problemlerin çözümü için en çok kullanılan yöntemlerden biri de pertürbasyon yöntemidir. Bu yöntemde, istenen bilinmeyenler küçük bir parametrenin kuvvetleri cinsinden yazılır ve bu açılımların katsayıları kademe kademe belirlenir. Bu yöntemde yapılan şey seri halinde lineer problemlerin çözülmesidir. Yöntemin üstünlüğü, çözümün, genel özellikleri önceden bilinmese dahi genel olarak güvenle uygulanması bakımından oldukça kolay ve yanlış anlaşılması ihtimalinin az oluşundadır. Pertürbasyon yöntemi ayrıca matematik yönünden bazı önemli teorik soruların cevaplandırılmasında da çok yararlı olmaktadır. Pertürbasyon yöntemi, hesapların çok yorucu ve bilhassa pertürbasyon serisinde bir veya ikiden fazla terim istendiğinde çok uzun olması bakımından zahmetlidir. Bu bakımdan yeni karşılaşılan bir probleme pertürbasyon yöntemi ile başlayıp çözümün özellikleri hakkında fikir sahibi olduktan sonra bu yöntemi terkedip başka yöntemlere geçmekte yarar vardır.

Matematik ayrıntıya girmeden yöntem kısaca şöyle özetlenebilir:  $\epsilon$  bozulma için ölçek faktörü olsun.

$$L_0 y + \epsilon L_1 y = 0 \quad (2.1.1)$$

$$v_i(y) = \gamma_i$$

Genellikle  $L_0$  temel sistemi gösterir ve kolay çözülebilir. Tersine,  $L_1$  küçük bozukluk etkisini gösterir ve zor bir operatördür. Küçük bozukluğun etkisinin küçük olması zorunlu değildir. Bir adi türevli diferansiyel denklem için  $y$  çözümü  $x$  fonksiyonuna ek olarak  $\epsilon$ 'a parametrik olarak bağlıdır,  $y = y(x; \epsilon)$ . Basit formda, klasik pertürbasyon teorisi, çözümün  $\epsilon$ 'a göre regüler olduğu kabulüne dayanır. Buna göre,

$$y(x; \epsilon) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \dots \quad (2.1.2)$$



açılımı yapılır. (2.1.2) ifadesini (2.1.1) de yerine koyarak ve  $\epsilon'$ la aynı üslü terimleri ayırarak

$$L_0 y_0 = 0 \quad v_i(y_0) = \gamma_i \quad (2.1.3)$$

$$L_0 y_k = -L_1 y_{k-1} \quad v_i(y_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

bulunur. Bu formdaki yöntem her zaman "kabul edilebilir" bir çözüm vermez. Bu  $\epsilon'$ na analitik olarak bağlı olmayan çözüme neden olur. Böylece (2.1.2) gibi bir açılım geçerli değildir. (2.1.2) deki açılım ve (2.1.3) e uygun çözüm "regüler pertürbasyon" problemleri, tersi problemler "tekil pertürbasyon" problemleri olarak bilinir. (2.1.2) denkleminde göre başarılı çözümler, eğer bütün  $k$ 'lar için  $|\epsilon y_{k+1}/y_k| = O(\epsilon)$  ise  $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k y_k(x)$  "asimtotik seriler" formundadır denir. Pertürbasyon şemasının tekilliği (2.1.2) deki gibi asimtotik olmayan açılımla kendini gösterir. Diğer hallerde pertürbasyon şeması başlangıç veya sınır şartlarının gerçekleşmesini imkânsız kılar.

Problemleri ve yöntemleri sıralamanın tek bir yolu yoktur. Uygun teorinin eksikliği pertürbasyon yöntemlerinin incelenmesine engel olmaktadır. Pertürbasyon yöntemleri ile incelenen problemler geniş olarak lineer ve lineer olmayan problemler olarak iki guruba ayrılır. Lineer problemler için bir değişken katsayılı tipik diferansiyel denklem,

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (2.1.4)$$

olarak verilir.  $a(x)$ ,  $O(1)$  olup  $\epsilon$  mertebeli terimler içerdiğinde ya da  $a(x)$  in kendisi  $O(\epsilon)$  olduğunda çeşitli haller ortaya çıkar. Lineer olmayan haller için tipik problem,

$$y'' + \lambda y + \epsilon y^3 = f(x) \quad (2.1.5)$$

şeklindedir.  $f(t) = 0$  ise çeşitli haller ortaya çıkar.  $f(t)$  bir başlangıç veya sınır şartlarına sahip olduğu zamanki kadar bir periyodik fonksiyondur.



Problemin yapısına uygun pertürbasyon yöntemi seçilmelidir.

Örnek olarak aşağıdaki yöntemler sayılabilir:

1. Sıkıştırılmış koordinatlar yöntemi
2. İç-dış açılımlar
3. Dispersif denklemler için WKB yöntemi
4. Çoklu ölçekler yöntemi
5. Lineer olmayan sistemler için Poincaré-Lighthill-Kuo yöntemi.
6. Otonom olmayan lineer olmayan denklemler için Duffing çözümü

mi

7. Lineer olmayan özdeğer problemleri için dallanma çözümleri.

Bu örnekler artırılabilir.

## 2.2. Ortalama Yöntemi [3, 4, 11, 13, 15]

Küçük bir parametre bulunduran lineer olmayan diferansiyel denklemlerin şekli ve bu parametrelerin görünüşü son derece farklılık gösterebilir. Bununla birlikte birçok durumda basit değişken dönüşümü ile osilasyonun diferansiyel denklemi, sağ tarafı küçük bir parametre ile orantılı genel bir forma indirgenebilir. Bu tip diferansiyel denklemlere standart form denir. Standart forma indirgenebilen diferansiyel denklemlere ortalama yöntemi uygulanabilir.

Artık klasik olan Haag-Krylov-Bogolioubov-Mitropolsky'nin ortalama yöntemi

$$\dot{x} = \lambda f(x, t) \quad (2.2.1)$$

formundaki diferansiyel sistemlere uygulanır. Burada  $x$  ve  $f$ ,  $n$  boyutlu vektörler,  $\lambda$  sonsuz küçük parametredir.  $f(x, t)$ ,  $t$  ye göre periyodik

$$f(x, t + T) = f(x, t)$$

bir fonksiyondur.  $f(x, t)$  sürekli ve  $x$  ve  $t$  ye göre istenen yaklaşıklıkla bağlı bir basamağa kadar türetilebilir bir fonksiyon kabul edilir. Ortalama yöntemi ilk sistem yerine otonom bir sistem yerleştirmekten ibarettir.

Böylece sistem,

$$\dot{y} = \lambda F(y) \quad (2.2.2)$$

$$x = G(y, t) \quad (2.2.3)$$

bağıntıları aracılığı ile çözülmesi ve incelenmesi daha kolay bir hale indirgenir. Burada G, t ye göre periyodik bir fonksiyondur. Bu indirgeme genel olarak tamamen mümkün değildir. (2.2.2) dönüşümünü yaparak

$$\dot{y} = \lambda F(y) + \lambda^{m+2} R(y, t) \quad m \geq 1$$

yazılır.

Bunun büyük üstünlüğü (2.2.2) nin çözülmesiyle ortalamanın gelişimini ve (2.2.3) ile bu gelişim civarındaki salınımları vermesidir. Bu durumda, (2.2.1) e doğrudan uygulanan bir ardışık yaklaşımlar yöntemi ortalama ve titreşen iki yapıyı karıştırır ve çözümün yapısını bozabilir. Fizikte, pratikte bizi ilgilendiren genellikle ortalama değerlerdir (titreşen bir sistemin frekansları ve genlikleri). Özellikle (2.2.1) in periyodik çözümlerinin araştırılması, (2.2.2) nin sabit çözümlerinin araştırılmasına indirgenir.

Özet olarak, ortalama yöntemi ortalama gelişimi veren sabit terimleri periyodiklerden ayırarak elde edilen bir indirgeme yöntemidir.

Klasik ortalama yöntemi Liapounov anlamında bir indirgeme yöntemidir. Bu eşlik eden sistemin otonom bir sistem olması demektir ve duyarlılık bakımından bir ilk yaklaşım oluşturur. Bu da J.H.Balbi'yi bu yöntemi iyileştirmeye yöneltmiştir [13].

1. Daha yüksek yaklaşımlara gidilerek,
2. İndirgemenin anlamını genelleştirerek,

Genelleştirilmiş ortalama yöntemine geçmeden "çeşitlenebilir fonksiyonlar" tanımlanmalıdır.



## 1. Çeşitlenebilir Fonksiyonlar

$D$ ; çarpım, türev alma, integral almaya göre, kararlı türetiler fonksiyonların bir kümesi olsun.  $D$  nin  $\bar{D}$  ve  $\tilde{D}$  gibi boş olmayan öyle bir parçalanması olsun ki eğer  $f \in D$  ise bu durumda  $\int f dt \in \bar{D}$  dir, burada integrasyon sabiti sıfıra eşit alınmıştır.

$$f = \bar{f} + \tilde{f}$$

olacak biçimde  $\bar{f} \in \bar{D}$  ve  $\tilde{f} \in \tilde{D}$  varsa  $f \in D$  ye "çeşitlenebilirdir" denir.

$D$  nin önemli üç alt kümesi gözönüne alınsın.

### 1.A. Sanal üslere dayanarak kurulan fonksiyonlar

#### 1.A.1. Periyodik ve hemen hemen periyodik fonksiyonlar

1.A.1.a. Klasik ortalama: Bu durumda  $\bar{D}$  sabit fonksiyonların kümesi olacaktır.

Şu halde  $\bar{f} = f(t)$  nin ortalama değeri  $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = f_0$   
Dolayısıyla  $\tilde{f}, \sum_n f_n e^{j\alpha_n t}$  Fourier açılımının kalanıdır ve  $\tilde{D}$  periyodik fonksiyonların veya ortalaması sıfır olan hemen hemen periyodik fonksiyonların kümesidir.

$\bar{D}$  nin bu tanımına göre periyodik fonksiyonun çeşitlenebilir fonksiyon olduğu gösterilir. Gerçekten periyodik bir fonksiyonun türevi, periyodik bir fonksiyondur. Sıfır ortalamalı bir periyodik fonksiyonun integrali bir periyodik fonksiyondur ve iki periyodik fonksiyonun çarpımı periyodiktir.

Hemen hemen periyodik fonksiyonlar için de önemli bir kısıtlama ile aynı şeyler geçerlidir. Bu kısıtlama şudur: "Ortalaması sıfır olan hemen hemen periyodik fonksiyonların integralinin hemen hemen periyodik bir fonksiyon olması şart değildir. Hemen hemen periyodik bir fonksiyonun frekanslarının bazı paydalarında integralden dolayı gelen çok küçük elemanlar bulunabilir ve bu da hemen hemen periyodik yapıyı bozar. -Bu küçük paydalar problemidir.- Bu güçlüğü yenmek için başka bir  $\bar{D}$  kümesi almak gerekir."

1.A.1.b. Rezonant ortalama:  $\bar{D} = \{\text{sabit fonksiyonlar veya yavaş değişen fonksiyonlar kümesi}\}$ .

$$\bar{f} = f_0 + \sum_{|\alpha_n| \leq \lambda} f_n e^{j\alpha_n t}$$

koyarak yavaş değişken kavramı daha kesin hale getirilebilir (türevin  $\lambda$  mertebesinden olması hali).  $\int \bar{f}(t) dt$  yine bir hemen hemen periyodik fonksiyondur.  $\alpha_n'$  ler belirli bir frekans bazından elde edilmek üzere

$$\bar{f} = f_0 + \sum_{\alpha_n'} f_n' e^{j\alpha_n' t}$$

yazılabilir.

1.A.2.  $f(t) = \sum h(t)g(t)$  tipinden fonksiyonlar:  $g(t)$  ler periyodik (veya hemen hemen periyodik) ve  $h(t)$  başka yapıdan fonksiyonlardır. Bu durumda  $h(t)$  ler korunacak  $g(t)$  ler değiştirilecektir.

1.A.2.a. Klasik fonksiyonel ortalama: Bu  $\bar{f} = \sum h(t)\bar{g}$  ile tanımlanır. Burada  $\bar{g}$ ,  $g$  nin klasik ortalamasıdır.

1.A.2.b. Rezonant fonksiyonel ortalama: Bu,  $\bar{g}$ ,  $g$  nin rezonant ortalaması olmak üzere  $\bar{f} = \sum h(t)\bar{g}$  olarak tanımlanır.

1.B. Gerçel üslerden hareket ederek kurulan fonksiyonlar

1.B.1.  $f(t) = \sum_{\alpha_n} f_n e^{\alpha_n t}$ ,  $f_n = \text{sabit}$ , üstellerinin toplamı

$$\bar{f}(t) = \sum_{\alpha_n < 0} f_n e^{\alpha_n t}$$

alınacaktır.

1.B.2.  $f(t) = \sum h(t) e^{\alpha_n t}$  tipinden fonksiyonlar: Burada  $h(t)$  ler gerçel eksponansiyel olmamak üzere herhangi fonksiyonlardır.

$$\bar{f}(t) = \sum_{\alpha_n < 0} h(t) e^{\alpha_n t}$$

alınacaktır.



1.C. Değişkenin kuvvetleri yardımıyla teşkil edilen fonksiyonlar

1.C.1.  $f(t) = \sum A_s t^s$ , bu durumda  $\bar{f}(t) = \sum_{s \leq 0} A_s t^s$  alınacaktır.

1.C.2.  $f(t) = \sum h_s(t) t^s$

$\bar{f}(t) = \sum_{s \leq 0} h_s(t) t^s$  alınacaktır.  $D_c$  sınıfı, başlangıç noktasında tekilliği olan diferansiyel denklem sisteminin incelenmesine götürür.

2. Ayırarak İndirgeme

$$\dot{x} = \lambda f(x, t) \quad (2.2.1)$$

den

$$x = G(y, t) \quad (2.2.3)$$

yardımla

$$\dot{y} = \lambda F(y, t) \quad (2.2.4')$$

ye geçilir. Böylece

$$\dot{x} = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial t} = \lambda f(x, t)$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda (f(G, t) - \frac{\partial G}{\partial y} F) \quad (2.2.5)$$

olur.  $F(y, t) \in \bar{D}$  olmalıdır. Bu eleman olma t ye göredir (y bir parametre olarak gözönüne alınmaktadır).

$$F(y, t) = \bar{F}(y, t) \quad (2.2.6)$$

olmalı, ayrıca,

$$G(y, t) = \bar{G}(y, t) + \tilde{G}(y, t) \quad (2.2.7)$$

şartını sağlayan bir  $G(y, t) \in D$  aranmaktadır. Böylece (2.2.5) den  $\bar{D}$  terimlerini  $\bar{D}$  terimlerinden ayıran iki denklem çıkar.

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = \lambda (f(\bar{G} + \tilde{G}, t) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} \bar{F}) \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \lambda (f(\bar{G} + \tilde{G}, t) - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \bar{F}) \quad (2.2.9)$$



$\bar{G}$ ,  $\tilde{G}$ ,  $\bar{F}$  üç bilinmeyenli iki denklem olduğu için burada bir belirsizlik vardır.

Probleme göre şu veya bu şartı sağlamak için örneğin  $\bar{G}$  yi seçerek bu keyfilik üzerinde oynanacaktır. Ekseriya hesapların basitliği için

$$\bar{G}(y,t) = y$$

alınacaktır. Bundan sonra anlatımı basitleştirmek için  $D_A$  da bulunacağız. Yapılan herşey kolayca  $D_B$  ve  $D_C$  durumlarına uygulanabilir.

$\bar{F} \in D$  özelliği gözönünde tutularak (2.2.8) ve (2.2.9) denklemleri (2.2.8') ve (2.2.9') haline gelecektir.

$$\bar{F} = f(y + \tilde{G}, t) \quad (2.2.8')$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \lambda(f(y + \tilde{G}, t) - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \bar{F}) \quad (2.2.9')$$

m. mertebeden yaklaşım isteniyorsa,  $f(y + \tilde{G}, t)$  yi  $(y, t)$  noktası civarında m. mertebeye kadar Taylor serisine açalım ( $\tilde{G}$ ,  $\lambda$  mertebesindedir):

$$f(y + \tilde{G}, t) = f(y, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(y, t)\tilde{G} + \dots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(y, t)\tilde{G}^m + O(\lambda^{m+1}) \quad (2.2.10)$$

burada

$$\tilde{G}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad \tilde{G}_{(n^2,1)}^2 = \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \\ G_1 & G_2 \\ \vdots & \vdots \\ G_1 & G_n \\ \hline G_2 & G_1 \\ \vdots & \vdots \\ G_2 & G_n \\ \hline \vdots & \vdots \\ G_n & G_1 \\ \vdots & \vdots \\ G_n & G_n \end{bmatrix}, \dots$$



yazış kabulü ile, ( 2.2.10) denklemini gözönünde tutarak ve (2.2.9') denklemini ardışık yaklaşımlarla çözerek;

$$\tilde{G} = \lambda \tilde{G}_1 + \lambda^2 \tilde{G}_2 + \dots$$

$$\tilde{G}_1 = \int \tilde{f} dt$$

$$\tilde{G}_2 = \int \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f} dt \right] dt + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \left[ \int \tilde{f} dt \right] dt - \left[ \int \left( \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} dt \right) dt \right] \tilde{f}$$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \lambda \bar{F}_2 + \lambda^2 \bar{F}_3 + \dots \quad (2.2.11)$$

$$\bar{F}_1 = \bar{f}$$

$$\bar{F}_2 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f} dt$$

(2.2.11) elde edilir. Örneğin

$$\dot{x} = \lambda f(x)$$

gibi otonom sistemin periyodik çözümü aranıyorsa,  $\bar{D}$  olarak ortalaması sıfır olan periyodik fonksiyonlar kümesi,  $\bar{D}$  olarak da sabit fonksiyonlar kümesi seçilir. Böylece  $y$  nin gerçeklediği indirgenmiş sistemin sabit çözümü aranılarak periyodik çözüm elde edilir.

### 2.3. Çoklu Ölçekler Yöntemi [4, 27]

Birçok problemde iki olay farklı ölçekte oluşur. Dışarıdan uygulanan periyodik kuvvetle birlikte iç titreşimler olabilir. Eğer bu iki olayın frekansı farklı büyüklükte ise bunlar için farklı ölçek kullanmak uygun olur. Düşünülen fiziksel probleme uygun olarak "yavaş" ve "hızlı" zaman koordinatları olarak adlandırılabilir. Bu nedenle, orijinal problemdeki tek koordinat yerine, iki ya da daha fazla koordinat gelir ve bir adi türevli diferansiyel denklem bir kısmi türevli diferansiyel denklem halini alır. Yeni koordinat (genellikle yavaş zaman) sebebiyle kazanılan esneklik, singülaritenin neden olduğu seküler terimleri çıkarmakta yararlıdır. Bu yöntemin en önemli uygulamaları dinamik sistemin modları (örneğin öz durumlar) arasındaki geçişlerin incelenmesidir.

Bu tekniği kullanmada,

$$T_n = \epsilon^n t \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

re göre farklı zaman ölçekleri ortaya çıkarılır ve

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \quad (2.3.2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

zamana göre türevleri genişletilir. Çeşitli yeni ölçeklerin bir fonksiyonu olarak düşünülen u:

$$u = u_0(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots) + \epsilon u_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots) + \dots \quad (2.3.3)$$

şeklinde bir açılımla ifade edilebilir.

Yöntem,

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}) \quad (2.3.4)$$

denkleminin uygulanmasını. (2.3.1), (2.3.2) ve (2.3.3), (2.3.4) de yerine yazılarak ve  $\epsilon$  nun kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek:

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (2.3.5)$$

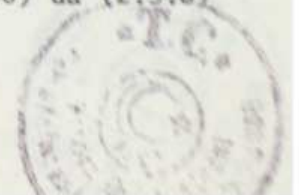
$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + f(u_0, D_0 u_0) \quad (2.3.6)$$

$$D_0^2 u_n + \omega_0^2 u_n = F(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \quad n \geq 2 \text{ için} \quad (2.3.7)$$

(2.3.5) in genel çözümünü kompleks formda yazmak uygundur.

$$u_0 = A(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (2.3.8)$$

A fonksiyonu, yaklaşımın bu seviyesinde hâlâ keyfidir. Seküler terimi yok ederek yaklaşımın daha ileri seviyelerinde tanımlanır. (2.3.6) da (2.3.8) i yazarak,



$$\begin{aligned}
 D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & - 2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0) + 2i\omega_0 D_1 \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0) \\
 & + f [A \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0), i\omega_0 A \exp(i\omega_0 T_0) \\
 & - i\omega_0 \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0)] \quad (2.3.9)
 \end{aligned}$$

(2.3.9) elde edilir. A fonksiyonuna bağlı olarak (2.3.9) un bütün özel çözümleri  $T_0 \exp(\pm i\omega_0 T_0)$  la orantılı terimleri içerir. Bunlar seküler terimlerdir. Böylece  $\epsilon u_1$ , üniform olmayan açılımın sonucundaki büyük t ler için  $u_0$ 'ra üstün gelir. A fonksiyonu  $u_0$  dan seküler terimleri yok edebilecek şekilde seçilir ve bunun için üniform olarak geçerli bir açılım elde edilir. Bu sonuca,  $f[u_0, D_0 u_0]$  rı Fourier serilerinde yazılarak varılır.

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(A, \bar{A}) \exp(in\omega_0 T_0) \quad (2.3.10)$$

$$f_n(A, \bar{A}) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f \exp(-i\omega_0 T_0) dT_0 \quad (2.3.11)$$

Böylece seküler terim yok edilerek,

$$2iD_1 A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f \exp(-i\omega_0 T_0) dT_0 \quad (2.3.12)$$

elde edilir. İlk yaklaşım için A,  $T_1$  in bir fonksiyonu olarak düşünülür. (2.3.12) nin çözümü için  $A(T_1)$  ri kutupsal formda ifade etmek uygun olur.

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[iB(T_1)] \quad (2.3.13)$$

(2.3.8) ifadesi

$$u_0 = a(T_1) \cos \Phi, \quad \Phi = \omega_0 T_0 + B(T_1) \quad (2.3.14)$$

(2.3.14) formunda yazılır. (2.3.13), (2.3.12) de yerine yazılarak

$$i(a' + iaB') = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Phi, -\omega_0 a \sin \Phi) \exp(-i\Phi) d\Phi$$



gerçel ve sanal kısımları ayırarak

$$a' = - \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, - \omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (2.3.15)$$

$$B' = - \frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, - \omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (2.3.16)$$

bulunur. Böylece (2.3.4) çözümü

$$u = a(T_1) \cos [\omega_0 T_0 + B(T_1)] + O(\epsilon) \quad (2.3.17)$$

dir. Buradaki a ve B (2.3.15), (2.3.16) daki gibidir.

#### 2.4. İndikatriks Yöntemi [11, 12, 15, 16]

Gerçek, iki boyutlu,  $\lambda$  parametresine bağlı bir diferansiyel sistem

$$\dot{x} = f_\lambda(t, x) \quad (2.4.1)$$

olsun.

i)  $f_\lambda(t, x)$  T periyotlu, t ye göre periyodik bir fonksiyondur.

$$f_\lambda(t + T, x) = f_\lambda(t, x)$$

ii)  $x_0$  noktasından  $t_0$  anında çıkan  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  çözümü tektir ve daima  $(t, t_0, x_0, \lambda)$  ya bağlıdır.

iii) Her çözüm  $t \in [0, T]$  ler için tanımlıdır. Bir  $(x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \Lambda$  noktası verildiğine göre, yöntemin esasını anlamak için aşağıdaki tanımlar gereklidir.

TANIM 1:  $t_0 \in [0, T]$  aralığını taradığından  $x(t_0 + T, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2$  noktalarının kümesine  $(x_0, \lambda)$  noktasına eşlik eden C indikatriksi denir. Bu eğriler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) Eğer sistem otonomsa yani katsayılar t den bağımsızsa eğri kapalıdır ve bir noktaya indirgenir.



ii)  $n \in \mathbb{N}^*$  ve  $T_0$  (sıfır olmadığı kabul edilsin) sistemin minimal periyodu olmak üzere  $T = nT_0$  ise indikatriks  $n$  defa dolanır.

TANIM 2:  $(x_0, \lambda)$  noktası kendi indikatriksi üzerinde bulunduğu zaman kendinden en az bir tane, periyodu  $T$  olan periyodik çözüm çıkıyorsa öyle bir noktaya "özel nokta" denir.

$T = T_0$  ise böyle bir periyodik çözüme "harmoniktir" denir.  
 $T = nT_0$  ise böyle bir periyodik çözüme " $\frac{1}{n}$  . mertebeden alt harmoniktir" denir.

Diferansiyel sistemlerin sayısal yöntemle çözümünden, örneğin 4. mertebeden Runge-Kutta yönteminden yararlanarak, verilen bir  $(x_0, \lambda)$  noktasına eşlik eden indikatriks iyi bir duyarlılıkla bilgisayarlar yardımıyla sayısal olarak belirlenebilir. İndikatriks yöntem, çift ve tek basamaklı harmonik ve alt harmonik çözümlerin varlığını göstermeyi ve  $(x_0, \dot{x}_0, t_0)$  noktalarından bir periyodik çözümün çıktığı  $(k_1, k_2)$  düzleminde ve  $k_1$  ve  $k_2$  nin ve  $t_0$  parametresinin değerlerini istenilen duyarlılıkla belirlemeyi sağlar, (örneğin:  $\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2(x \cos 2t + bx^3) = 0$ ,  $b \geq 0$  denkleminde uygulandığında). Yöntemin uygulanmasında lineer olmayan terimin katsayısı  $k_2$  parametresinin küçük olması gerekli değildir.

İlk hızın  $\dot{x}_0 = 0$  olduğu kabul edilebilir, gerçekten her periyodik çözüm  $\dot{x} = 0$  eksenini en az iki kez keser, her periyodik yörünge  $\dot{x} = 0$  olduğu  $x$  değerinde bir maksimum ve bir minimum kabul eder,  $\dot{x} = 0$  olarak incelemenin genelliği bozulmamalıdır.

Başlangıç koşulunun  $x_0 = a$  olduğu kabul edilir. Yöntem, kısaca şu şekilde özetlenebilir,  $\lambda = 0$  için bütün  $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$  noktaları  $\sqrt{a}$  frekanslı periyodik yörüngelere başlangıç koşullarını oluşturabilir,  $\lambda \neq 0$  için  $T = 2\pi/\sqrt{a}$  periyotlu  $(x(t_0 + T), \dot{x}(t_0 + T))$  noktalar kümesi özel başlangıç koşulunun yakınından geçebilen veya geçemeyen  $t_0 \in [0, \pi]$  ile parametrikleştirilmiş kapalı bir eğri oluşturur. Bu kapalı eğriye indikatriks denir.



### 3. LİNEER OLMAYAN MATHIEU DENKLEMİNİN EŞZAMANLI PERİYODİK YÖRÜNGELERİ

#### 3.1. Eşzamanlı Periyodik Yörüngelerin Analitik İncelenmesi

Küçük bir parametre bulunduran lineer olmayan diferansiyel denklemler, birçok durumda değişken dönüşümü yapılarak genel bir forma sokulabilir [5]. Sağ taraf küçük bir parametre ile orantılıdır. Bu forma girebilen lineer olmayan diferansiyel denklemler genelleştirilmiş ortalama yöntemi [3] ile analitik olarak çözülebilir. Bu yöntem ilk sistem yerine otonom bir sistem yerleştirmekten ibarettir.

$$\ddot{x} + ax + \lambda(x\cos 2t + bx^3) = 0 \quad (3.1.1)$$

lineer olmayan Mathieu denklemine

$$\omega^2 \equiv a, \quad X = x \sqrt{b}, \quad \dot{x} \sqrt{b} = \dot{X}, \quad \ddot{x} \sqrt{b} = \ddot{X}, \quad \ddot{x} = \frac{\ddot{X}}{\sqrt{b}}$$

dönüşümleri uygulanarak

$$\ddot{X} + \omega^2 X + \lambda(X\cos 2t + X^3) = 0 \quad (3.1.2)$$

denklemini bulunur.  $\lambda = 0$  için (3.1.2) nin genel çözümü

$$X = a\cos(\omega t + \Phi), \quad \dot{X} = a\omega\sin(\omega t + \Phi) \quad (3.1.3)$$

dür. Burada  $a$  ve  $\Phi$  sabittir, yeterince küçük ve sıfırdan farklı  $\lambda$  lar için  $a$  ve  $\Phi$ ,  $t$  nin fonksiyonudur. (3.1.3) ün ilk denkleminin diferansiyelini alıp ikinciye eşitleyerek, (3.1.3) ün ikinci denkleminin diferansiyelini alıp (3.1.2) de yerine koyarak

$$\psi_1 = (\omega + 1)t + \Phi, \quad \psi_2 = (\omega - 1)t + \Phi \quad (3.1.4a)$$

(3.1.4a) kabulleri ile,



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{2\omega} \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \{ \sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2 + \frac{a^2}{2} [ 2\sin 2(\omega t + \phi) + \sin 4(\omega t + \phi) ] \} \\ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2\psi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\psi_2 + a^2 \left( \frac{3}{4} + \cos 2(\omega t + \phi) + \frac{1}{4} \cos 4(\omega t + \phi) \right) \end{bmatrix} \quad (3.1.4b)$$

(3.1.4b) bulunur. Genelleştirilmiş ortalama yöntemi (3.1.4b) sistemine (3.1.4a) bağıntısını da gözönüne alarak uygulanabilir.

(3.1.4b) sistemini (3.1.5) formuna sokarak

$$\frac{dZ}{dt} = \lambda f(Z, t), \quad Z = \begin{bmatrix} a(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.5a)$$

ve

$$f(Z, t) = \bar{f}(y) + \tilde{f}(y, t), \quad y = \begin{bmatrix} a(t_0) \\ \phi(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix} \quad (3.1.5b)$$

yazarak (buradaki  $\bar{f}(y)$  sabit terimleri ve en küçük frekanslı terimleri,  $\tilde{f}(y, t)$  ise en yüksek frekanslı terimleri gösterir) (3.1.5) ile aşağıdaki indirgenmiş sistem arasında ilişki kurulur.

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \bar{F}(y) \quad (3.1.6a)$$

$$Z = y + \lambda \tilde{G}(y, t) \quad (3.1.6b)$$

$\bar{F}(y)$  ve  $\tilde{G}(y, t)$  yi  $\lambda$  ya göre seriye açarak

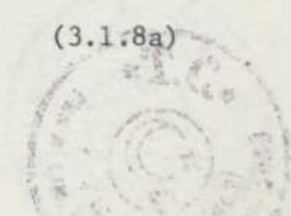
$$\bar{F}(y) = \bar{F}_1(y) + \lambda \bar{F}_2(y) + \dots + \lambda^{m-1} \bar{F}_m(y) + \dots \quad (3.1.7a)$$

$$\tilde{G}(y, t) = \lambda \tilde{G}_1(y, t) + \lambda \tilde{G}_2(y, t) + \dots + \lambda^{m-1} \tilde{G}_m(y, t) + \dots \quad (3.1.7b)$$

ve (3.1.6b) yi (3.1.5) de yerine koyup, (3.1.6a) ve (3.1.7) yi kullanarak  $\lambda$  nın kuvvetlerine göre terimler eşitlenirse

$$\bar{F}_1(y) = \overline{\bar{f}(y, t)}, \quad \bar{F}_2(y) = \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f}(y, t) dt} \quad (3.1.8a)$$

ve



$$\begin{aligned}\tilde{G}_1(y,t) &= \int \tilde{f}(y,t) dt \\ \tilde{G}_2(y,t) &= \int \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f}(y,t) dt \right] dt + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \left[ \int \tilde{f}(y,t) dt \right] dt \\ &\quad - \left[ \int \left( \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} (y,t) dt \right) dt \right] \tilde{f}\end{aligned}\quad (3.1.8b)$$

elde edilir. (3.1.4) sisteminin küçük frekans bileşenleri  $\omega \approx 1$  de oluşacak şekilde olduğuna dikkat edilmelidir. Bu demektir ki  $2\pi$  periyotlu periyodik yörüngeler ilk yaklaşımla elde edilebilir,  $\omega \approx 2$  için  $\pi$  periyotlu periyodik yörüngeleri bulmak için iki ve daha yüksek mertebeli yaklaşımlara gitmek gerekir. Genlik ve faz için formüller aşağıdaki gibi yazılır [16]:

$$a(t) = A + \lambda \tilde{G}_{1a}(y,t) + \lambda^2 \tilde{G}_{2a}(y,t) + O(\lambda^3) \quad (3.1.9a)$$

$$\phi(t) = \phi + \lambda \tilde{G}_{1\phi}(y,t) + \lambda^2 \tilde{G}_{2\phi}(y,t) + O(\lambda^3) \quad (3.1.9b)$$

Burada,

$$\tilde{G}_1(y,t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1a}(y,t) \\ \tilde{G}_{1\phi}(y,t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_2(y,t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{2a}(y,t) \\ \tilde{G}_{2\phi}(y,t) \end{bmatrix}$$

dir. (3.1.5) deki  $\tilde{G}_1(y,t)$ ,  $\tilde{G}_2(y,t)$ ;  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ , ... mertebeli (3.1.2) denkleminin periyodik çözümlerini elde etmek için (3.1.9b) den çözülür.

Bu çalışmada  $\lambda$  ya göre 2. mertebeye kadar,  $2\pi$  periyotlu periyodik yörüngeler için analitik ifadeler verilecektir.  $\omega \approx 1$  için küçük frekanslı terimler:

$$\overline{F}_1(y) = \overline{f}(y,t) = \begin{bmatrix} \overline{f}_1(y,t) \\ \overline{f}_2(y,t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\omega} \begin{bmatrix} A \sin 2\psi_2 \\ \cos 2\psi_2 + A^2 \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (3.1.10a)$$

daha yüksek frekanslı terimler:



$$\tilde{f}(y,t) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(y,t) \\ \tilde{f}_2(y,t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} \frac{A}{2} \{ \sin 2\psi_1 + \frac{A^2}{2} [2\sin 2(\omega t + \Phi) + \sin 4(\omega t + \Phi)] \} \\ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2\psi_1 + A^2 [\cos 2(\omega t + \Phi) + \frac{1}{4} \cos 4(\omega t + \Phi)] \end{bmatrix} \quad (3.1.10b)$$

(3.1.6a) indirgenmiş sistemini 2. yaklaşıma götürmek için (3.1.10b) yi kullanarak (3.1.8a) dan  $\overline{F_2(y)}$  fonksiyonunu hesaplamak gerekir.

$$\overline{F_2(y)} = \frac{\partial f}{\partial y} \int \tilde{f}(y,t) dt = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1,1} \int \tilde{f}_1 dt + \tilde{f}_{1,2} \int \tilde{f}_2 dt \\ \tilde{f}_{2,1} \int \tilde{f}_1 dt + \tilde{f}_{2,2} \int \tilde{f}_2 dt \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{A}{2} \{ \sin 2\psi_1 + \frac{A^2}{2} [2\sin 2(\omega t + \Phi) + \sin 4(\omega t + \Phi)] \} \right]$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{1}{2\omega} \left[ \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 2\psi_1 + A^2 [\cos 2(\omega t + \Phi) + \frac{1}{4} \cos 4(\omega t + \Phi)] \right]$$

ve

$$\tilde{f}_{1,1} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial A}, \quad \tilde{f}_{1,2} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \Phi}$$

dir. Buradan

$$\tilde{f}_{1,1} = \frac{1}{2\omega} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 + \frac{3A^2}{4} [2\sin 2(\omega t + \Phi) + \sin 4(\omega t + \Phi)] \right\}$$

$$\tilde{f}_{1,2} = \frac{1}{2\omega} \{ A \cos 2\psi_1 + A^3 [\cos 2(\omega t + \Phi) + \cos 4(\omega t + \Phi)] \}$$

bulunur.  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_{1,1}, \tilde{f}_{1,2}$  den yararlanarak

$$\int \tilde{f}_1 dt = \frac{-A}{4\omega} \left\{ \frac{\cos 2\psi_1}{2(\omega + 1)} + \frac{A^2}{2} \left( \frac{\cos 2(\omega t + \Phi)}{\omega} + \frac{\cos 4(\omega t + \Phi)}{4\omega} \right) \right\}$$



$$\int \tilde{f}_2 dt = \frac{1}{4\omega} \left[ \sin 2t + \frac{\sin 2\psi_1}{2(\omega + 1)} + A^2 \frac{\sin 2(\omega t + \phi)}{\omega} + A^2 \frac{\sin 4(\omega t + \phi)}{8\omega} \right]$$

$$\tilde{f}_{1,1} \int \tilde{f}_1 dt = - \frac{A^3}{128\omega^2} \left[ \frac{-1}{2\omega} + \frac{3}{\omega + 1} \right] \sin 2\psi_2$$

ve

$$\tilde{f}_{1,2} \int \tilde{f}_2 dt = \frac{A^3}{8\omega^2} \left[ \frac{1}{16\omega} - \frac{1}{4(\omega + 1)} - \frac{1}{2} \right] \sin 2\psi_2$$

hesaplanır. Böylece:

$$\tilde{f}_{1,1} \int \tilde{f}_1 dt + \tilde{f}_{1,2} \int \tilde{f}_2 dt = \left\{ \frac{A^3}{256\omega^3} + \frac{A^3}{128\omega^3} - \frac{A^3}{32\omega^2(\omega + 1)} - \frac{A^3}{16\omega^2} - \frac{3A^3}{128\omega^2(\omega + 1)} \right\} \times \sin 2\psi_2$$

bulunur.  $\tilde{f}_{2,1}$ ,  $\tilde{f}_{2,2}$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{f}_{2,1} = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial A}, \quad \tilde{f}_{2,2} = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \phi}$$

Bu tanımlamadan yararlanarak

$$\tilde{f}_{2,1} = \frac{1}{\omega} \left\{ A \cos 2(\omega t + \phi) + \frac{A}{4} \cos 4(\omega t + \phi) \right\}$$

$$\tilde{f}_{2,2} = \frac{1}{2\omega} \left\{ -\sin 2\psi_1 - 2A^2 \sin 2(\omega t + \phi) - A^2 \sin 4(\omega t + \phi) \right\}$$

$$\tilde{f}_{2,1} \int \tilde{f}_1 dt = - \frac{A}{8\omega^2} \left\{ \frac{A^3}{2\omega} + \frac{A}{8(\omega + 1)} \cos 2\psi_2 + \frac{A^3}{32\omega} \right\}$$

ve

$$\tilde{f}_{2,2} \int \tilde{f}_2 dt = - \frac{A^2}{8\omega^2} \left\{ \frac{1}{16\omega} \cos(-2\psi_2) + \cos 2\psi_2 + \frac{A^2}{\omega} + \frac{1}{4(\omega + 1)} \cos 2\psi_2 + \frac{A^2}{16\omega} \right\}$$

hesaplanır. Böylece :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2,1} \int \tilde{f}_1 dt + \tilde{f}_{2,2} \int \tilde{f}_2 dt = & - \frac{A^2}{8\omega^2} \left\{ \frac{A^2}{2\omega} + \frac{3}{8(\omega + 1)} \cos 2\psi_2 + \frac{A^2}{32\omega} \right. \\ & \left. + \frac{1}{16\omega} \cos(-2\psi_2) + \cos 2\psi_2 + \frac{17A^2}{16\omega} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu bulunan değerden  $\bar{F}_2(y)$  de yerine yazılarak :



$$\overline{F_2(y)} = - \frac{A^2}{32\omega^2} \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{-3A}{8\omega} + \frac{7A}{4(\omega+1)} + 2A \right] \sin 2\psi_2 \\ & \left[ \frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3}{2(\omega+1)} \cos 2\psi_2 + \frac{1}{4\omega} \cos(-2\psi_2) + 4\cos(2\psi_2) \right] \end{aligned} \right] \quad (3.1.11)$$

belirlenir. (3.1.10a), (3.1.11) ve (3.1.7a) yı kullanarak (3.1.6a) indirgenmiş sistemi

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix} = \lambda \overline{F_1(y)} + \lambda^2 \overline{F_2(y)} + O(\lambda^3) \quad (3.1.12)$$

şeklinde yazılabilir.  $\frac{dA}{dt} = 0$  koşulunu sağlamak için

$$2(\omega - 1)t + 2\phi = k\pi \quad (k = 0, 1 \quad 2\pi \text{ periyotlu} \\ \text{yörüngeler için}) \quad (3.1.13)$$

seçerek  $\overline{F_1}(y)$  ve  $\overline{F_2}(y)$  nin katkıları yok edilir. (3.1.13) ün türevini

$$\omega = 1 - \frac{d\phi}{dt}$$

(3.1.12) nin ikinci denklemini kullanarak

$$\omega = 1 - \frac{\lambda}{4\omega} \left[ \cos 2\psi_2 + A^2 \frac{3}{2} \right] + \frac{\lambda^2 A^2}{32\omega^2} \left[ \frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3}{2(\omega+1)} \cos 2\psi_2 + \frac{1}{4\omega} \cos(-2\psi_2) + 4\cos 2\psi_2 \right]$$

$$\omega = 1 + \frac{\lambda}{4\omega} \left[ (-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2} \right] + \frac{\lambda^2 A^2}{32\omega^2} \left[ \frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3(-1)^k}{2(\omega+1)} + \frac{1}{4\omega} (-1)^k + 4(-1)^k \right] \quad (3.1.14)$$

(3.1.14) bulunur. Bu sayısal olarak elde edilmiş  $(a, \lambda)$  düzlemindeki eğriler için yaklaşık ifadeleri verir.

$$k = 1 \quad (t_0 = \frac{\pi}{2}) \text{ için eğri:}$$

1. yaklaşım:

$$\omega = 1 + O(\lambda^2)$$

$$\omega = 1 + \frac{\lambda}{4\omega} (-1)^{k+1} - \frac{3\lambda A^2}{8\omega} + O(\lambda^2)$$



$$\omega = 1 + \frac{\lambda}{4\omega} - \frac{3\lambda A^2}{8\omega} + O(\lambda^2)$$

$$\omega - 1 - \frac{\lambda}{4\omega} + \frac{3\lambda A^2}{8\omega} = 0$$

$$\omega^2 - \omega - \frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda A^2}{8} = 0$$

$\omega$  ya göre 2. dereceden olan bu denklemin köklerini bularak,

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\left(-\frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda A^2}{8}\right)}$$

bu köklerden (+) lısını alarak

$$\omega = 1 + \frac{\lambda}{4} \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right) + O(\lambda^2) \quad (3.1.15)$$

bulunur. Buradan

$$\omega^2 = 1 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right) + O(\lambda^2) \quad (3.1.16)$$

dır.

2. yaklaşım:

$$\omega = 1 + \frac{\lambda}{4\omega} \left[(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}\right] + \frac{\lambda^2 A^2}{32\omega^2} \left[\frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3(-1)^k}{2(\omega + 1)} + \frac{1}{4\omega} (-1)^k + 4(-1)^k\right]$$

her iki taraf  $\omega$  ile çarpılırsa

$$\omega^2 = \omega + \frac{\lambda}{4} \left[(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}\right] + \lambda^2 \frac{A^2}{32\omega} \left[\frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3(-1)^k}{2(\omega + 1)} + \frac{1}{4\omega} (-1)^k + 4(-1)^k\right]$$

$\omega$  yerine 1. yaklaşımda bulunan (3.1.15) ifadesini yazarak

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega + \frac{\lambda}{4} \left[(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}\right] + \lambda^2 \frac{A^2}{32 \left[1 + \frac{\lambda}{4} \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right)\right]} \\ &+ \left[ \frac{51A^2}{8 \left[1 + \frac{\lambda}{4} \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right)\right]} + \frac{3(-1)^k}{2 \left\{ \left[1 + \frac{\lambda}{4} \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right)\right] + 1 \right\}} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4 \left[1 + \frac{\lambda}{4} \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right)\right]} (-1)^k + 4(-1)^k \right] \end{aligned}$$



$[1 + \frac{\lambda}{4} (1 - \frac{3A^2}{2})]^{-1} \approx 1$  alabiliriz.

$$\omega^2 = \omega + \frac{\lambda}{4} [(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}] + \frac{\lambda^2 A^2}{32} [\frac{51A^2}{8} + \frac{3(-1)^k}{4} + \frac{1}{4} (-1)^k + 4(-1)^k]$$

k = 1 için

$$\omega^2 - \omega - \frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda A^2}{8} - \frac{\lambda^2 A^2}{32} (51A^2 - 5) = 0$$

buradan

$$\omega = 1 + (1 - \frac{3A^2}{2})0,25\lambda - (1 - \frac{3A^2}{2})^2 0,0625\lambda^2 + A^2(51A^2 - 40)0,00390625\lambda^2$$

$$\omega^2 = [1 + (1 - \frac{3A^2}{2})0,25\lambda - (1 - \frac{3A^2}{2})^2 0,0625\lambda^2 + A^2(51A^2 - 40)0,00390625\lambda^2]^2$$

A = 0,5 başlangıç koşulu ile, k = 1 için  $\omega \approx 1$  civarında eğri:

$$\omega^2 = 1 + 0,3125\lambda - 0,07763671\lambda^2 + o(\lambda^3) \quad (3.1.17)$$

dir. k = 0 ( $t_0 = 0$ ) için eğri:

$$\omega = 1 - \frac{\lambda}{4\omega} - \frac{3\lambda A^2}{8\omega} + o(\lambda^2)$$

$$\omega - 1 + \frac{\lambda}{4\omega} + \frac{3\lambda A^2}{8\omega} = 0$$

buradan

$$\omega^2 - \omega + \frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda A^2}{8} = 0$$

bulunur.  $\omega$  ya göre 2. dereceden olan bu denklemin köklerini bularak ve bu köklerden (+) lısını alarak:

$$\omega = 1 - \frac{\lambda}{4} (1 + \frac{3A^2}{2}) + o(\lambda^2) \quad (3.1.18)$$

bulunur. (3.1.18) den



$$\omega^2 = 1 - \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) + O(\lambda^2) \quad (3.1.19)$$

geçilir. 2. yaklaşım:

$$\omega = 1 + \frac{\lambda}{4\omega} [(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}] + \lambda^2 \frac{A^2}{32\omega^2} \left[ \frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3(-1)^k}{2(\omega + 1)} + \frac{1}{4\omega} (-1)^k + 4(-1)^k \right]$$

Her iki taraf  $\omega$  ile çarpılırsa:

$$\omega^2 = \omega + \frac{\lambda}{4} [(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}] + \lambda^2 \frac{A^2}{32\omega} \left[ \frac{51A^2}{8\omega} + \frac{3(-1)^k}{2(\omega + 1)} + \frac{1}{4\omega} (-1)^k + 4(-1)^k \right]$$

$\omega$  yerine 1. yaklaşımda elde edilen (3.1.18) ifadesini yazarak:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega + \frac{\lambda}{4} [(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}] + \lambda^2 \frac{A^2}{32 \left[1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) \frac{\lambda}{4}\right]} \\ &\times \left[ \frac{51A^2}{8 \left[1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) \frac{\lambda}{4}\right]} + \frac{3(-1)^k}{2 \left[1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) \frac{\lambda}{4} + 1\right]} + \frac{1}{4 \left[1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) \frac{\lambda}{4}\right]} (-1)^k \right. \\ &\left. + 4(-1)^k \right] \end{aligned}$$

$\left[1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) \frac{\lambda}{4}\right]^{-1} \approx 1$  alınabilir.

$$\omega^2 = \omega + \frac{\lambda}{4} [(-1)^{k+1} - A^2 \frac{3}{2}] + \lambda^2 \frac{A^2}{32} \left[ \frac{51A^2}{8} + \frac{3(-1)^k}{4} + \frac{1}{4} (-1)^k + 4(-1)^k \right]$$

$k = 0$  için:

$$\omega^2 - \omega + \frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda A^2}{8} - \frac{\lambda^2 A^2}{256} [51A^2 + 40] = 0$$

dir. Bu denklemin köklerini bulup, bu köklerden (+) lısını alarak

$$\omega = 1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) 0,25\lambda - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right)^2 0,0625\lambda^2 + A^2(51A^2 + 40)0,00390625\lambda^2$$

bulunur. Buradan her iki tarafın karesini alarak

$$\omega^2 = \left[1 - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right) 0,25\lambda - \left(1 + \frac{3A^2}{2}\right)^2 0,0625\lambda^2 + A^2(51A^2 + 40)0,00390625\lambda^2\right]^2$$

$\omega^2$  belirlenir.

$A = 0,5$  başlangıç koşulu ile,  $k = 0$  için  $\omega \approx 1$  civarında eğri:

$$\omega^2 = 1 - 0,6875\lambda - 0,01513671\lambda^2 + 0(\lambda^3) \quad (3.1.20)$$

$2\pi$  periyotlu ve  $\omega \approx 1$  için hesaplanmış (3.1.17) ve (3.1.20) analitik çözümlerle bulunmuş  $(a, \lambda)$  düzlemindeki eğriler Şekil-1.a'da gösterildi.

$\pi$  periyotlu  $\omega \approx 2$  civarındaki yörüngeler aynı yol izlenerek hesaplandı.  $A = 0,5$  başlangıç koşulu ile,  $k = 1$  için  $\omega \approx 2$  civarında eğri:

$$\omega^2 = 4 - 0,1875\lambda + 0,098795\lambda^2 + 0(\lambda^3) \quad (3.1.21)$$

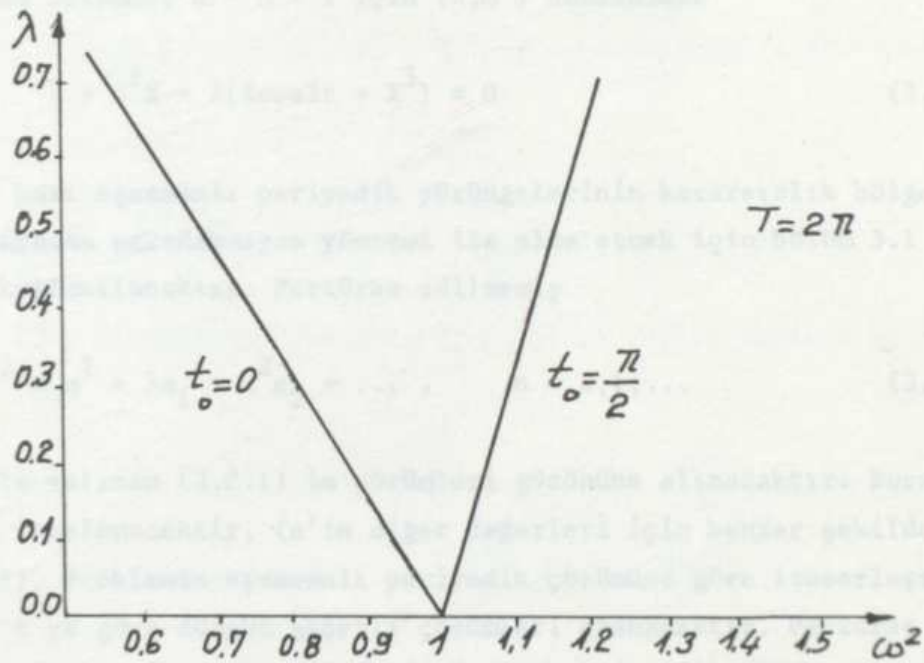
$A = 0,5$  başlangıç koşulu ile,  $k = 0$  için  $\omega \approx 2$  civarında eğri:

$$\omega^2 = 4 - 0,1875\lambda + 0,045694985\lambda^2 + 0(\lambda^3) \quad (3.1.22)$$

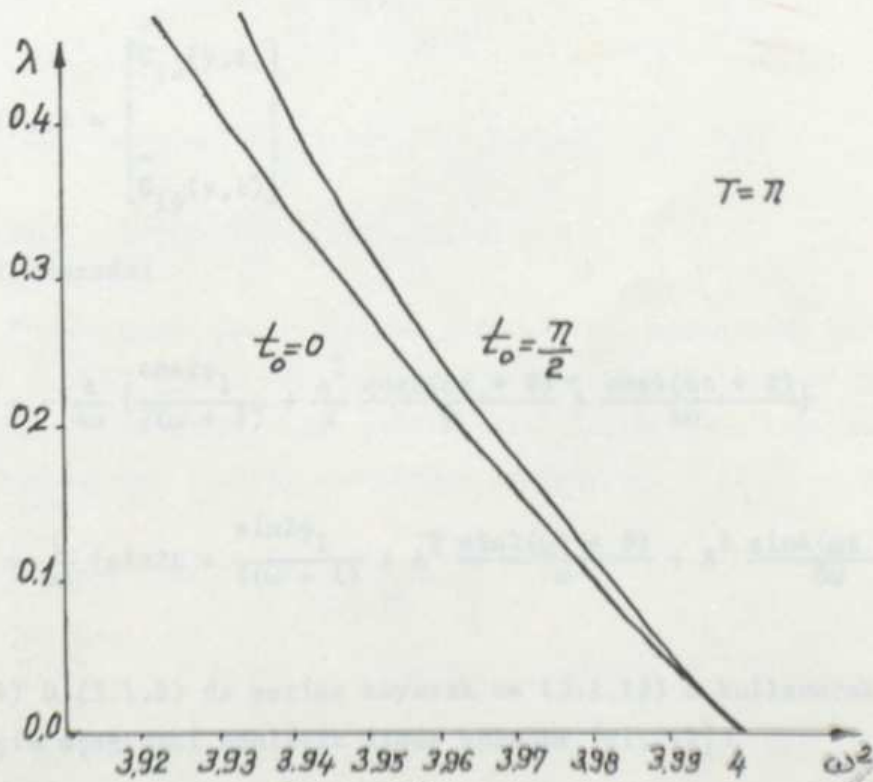
(3.1.21) ve (3.1.22) eğrileri ise Şekil-1.b'de verildi.

Analitik yöntemle bulunan  $(a, \lambda)$  düzlemindeki eğriler, doğrudan doğruya indikatriks yöntemle hesaplanmış eğrilerle çok iyi uyum sağlamaktadır. Bulunan bu eğrilerin indikatriks yöntemle bulunan eğrilerle tam uyum sağlaması için daha ileri yaklaşımlara gitmek gerekmektedir. Ancak, daha yüksek basamaktan yaklaşımların hesaplanmasından elde edilecek yarar, gereken hesap zahmetine göre az kaldığından daha ileri yaklaşımlara gidilmedi.





Şekil-1a



Şekil-1b



### 3.2. Analitik Yöntemle Eşzamanlı Periyodik Yörüngeler İçin Kararsızlık Bölgelerinin Bulunması:

Bu bölümde,  $0 < \lambda < 1$  için  $(\lambda, \omega^2)$  düzleminde

$$\ddot{x} + \omega^2 X + \lambda(X \cos 2t + X^3) = 0 \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) in bazı eşzamanlı periyodik yörüngelerinin kararsızlık bölgelerini 2. mertebeden pertürbasyon yöntemi ile elde etmek için bölüm 3.1 in sonuçları kullanılacaktır. Pertürbe edilmemiş

$$\omega^2 = n^2 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \dots, \quad n = 2, 1, \dots \quad (3.2.2)$$

frekansı ile salınan (3.2.1) in çözümleri gözönüne alınacaktır. Burada  $n = 1$  hali incelenecektir, ( $n$ 'in diğer değerleri için benzer şekilde incelenebilir). Problemin eşzamanlı periyodik çözümüne göre lineerleşmiş (3.2.1) in  $t$  ye göre düzgün geçerli çözümleri aranacaktır. Pertürbe edilecek  $\hat{x}(t)$  çözümleri, kesim 3.1 deki yöntemle elde edilebilir. Hesaplar çabuk karmaşıklaştığı için  $\hat{x}(t)$ ,  $O(\lambda^2)$  mertebesine kadar ilerletildi. (3.1.10b) yi (3.1.8b) de yerine koyarak

$$\tilde{G}_1(y, t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1a}(y, t) \\ \tilde{G}_{1\phi}(y, t) \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

elde edildi. Burada:

$$\tilde{G}_{1a}(y, t) = -\frac{A}{4\omega} \left\{ \frac{\cos 2\psi_1}{2(\omega + 1)} + \frac{A^2}{2} \frac{\cos 2(\omega t + \phi)}{\omega} + \frac{\cos 4(\omega t + \phi)}{4\omega} \right\} \quad (3.2.4a)$$

ve

$$\tilde{G}_{1\phi}(y, t) = \frac{1}{4\omega} \left\{ \sin 2t + \frac{\sin 2\psi_1}{2(\omega + 1)} + A^2 \frac{\sin 2(\omega t + \phi)}{\omega} + A^2 \frac{\sin 4(\omega t + \phi)}{8\omega} \right\} \quad (3.2.4b)$$

dir. (3.2.4) ü (3.1.9) da yerine koyarak ve (3.1.13) ü kullanarak (3.1.3) den  $\hat{x}(t)$  için aşağıdaki analitik ifade bulunur [11, 12]:



$$\hat{x}(t) = [A + \lambda \tilde{G}_{1a}(y, t) + O(\lambda^2)] \cos\{\omega t + [\Phi + \lambda \tilde{G}_{1\phi}(y, t) + O(\lambda^2)]\}$$

burada

$$\cos[\omega t + \Phi + \lambda \tilde{G}_{1\phi}(y, t)] = \cos(\omega t + \Phi) - \lambda \tilde{G}_{1\phi}(y, t) \sin(\omega t + \Phi) + O(\lambda^2)$$

alınabilir. Böylece

$$\hat{x}(t) = \{A + \lambda \tilde{G}_{1a}(y, t)\} \{\cos(\omega t + \Phi) - \lambda \tilde{G}_{1\phi}(y, t) \sin(\omega t + \Phi)\}$$

bulunur.  $\hat{x}(t)$  ifadesinde (3.2.4a), (3.2.4b) yi yerine koyarak ve (3.1.13) ü kullanarak

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & A \cos\left(t + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{\lambda A}{32} \left\{ 4 \cos\left(t - \frac{k\pi}{2}\right) - 2 \cos\left(3t + \frac{k\pi}{2}\right) + 6A^2 \cos\left(t + \frac{k\pi}{2}\right) \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{3A^2}{2}\right) \cos\left(3t + \frac{3k\pi}{2}\right) + \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \cos\left(5t + \frac{5k\pi}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

(3.2.5) bulunur. (3.1.2) nin eşzamanlı periyodik çözümü  $x(t)$  ye göre lineerleştirilmiştir. Böylece

$$x(t) = \hat{x}(t) + Z(t), \quad Z(t) \text{ "küçük"} \quad (3.2.6)$$

alınır ve  $Z(t)$  ye göre lineer bir Hill denklemi [8] olan

$$\ddot{Z}(t) + \omega^2 Z(t) + \lambda Z(t) \cos 2t + 3\lambda \hat{x}^2(t) Z(t) = 0 \quad (3.2.7)$$

(3.2.7) yi elde etmek için,  $Z(t)$  ye göre birinci mertebeden terimleri koruyarak (3.2.5) e göre (3.1.2) i lineerleştirilir. Pertürbasyon teorisinin standart çoklu ölçekleme tekniklerini kullanarak,  $\lambda$  ya göre bir seri açılımı olarak (3.2.7) nin çözümü yazılır [4, 17].

$$Z(t, \lambda) = F_0(t, t) + \lambda F_1(t, t) + \lambda^2 F_2(t, t) + \dots \quad (3.2.8)$$

burada

$$\tilde{t} \equiv \lambda t$$

(3.2.7) de (3.2.2), (3.2.8) i yerine yazıp (3.2.5) i kullanarak ve  $\lambda$  nin



aynı kuvvetlerini eşitleyerek ( $k = 0$ ,  $A = 0,5$ ,  $n = 1$  için):

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial t^2} + F_0 = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} + F_1 = - 2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial t \partial \tilde{t}} - F_0 (a_1 + \cos 2t) \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} + F_2 = - \frac{\partial^2 F_0}{\partial \tilde{t}^2} - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t \partial \tilde{t}} - a_2 F_0 - a_1 F_1 - F_1 \cos 2t + \frac{9}{4} \cos^2 t F_0 \quad (3.2.11)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.2.9) un çözümü

$$F_0(t, \tilde{t}) = A_0(\tilde{t}) \cos t + B_0(\tilde{t}) \sin t \quad (3.2.12)$$

dir. Burada  $A_0(\tilde{t})$ ,  $B_0(\tilde{t})$  henüz belirlenmemiş fonksiyonlardır. (3.2.10) da (3.2.12) yi yerine yazarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} + F_1 &= 2 \frac{dA_0}{d\tilde{t}} \sin t - 2 \frac{dB_0}{d\tilde{t}} \cos t - a_1 A_0 \cos t - a_1 B_0 \sin t - \frac{1}{2} A_0 (\cos t + \cos 3t) \\ &\quad - \frac{1}{2} B_0 (3 \sin 3t - \sin t) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

(3.2.13) elde edilir. Düzgün geçerli çözümler arandığı için (yani bütün  $t$  ler için geçerli) (3.2.13) ün sağ tarafındaki  $\cos t$  ve  $\sin t$  ile orantılı terimlere müsaade edilemez. Bu  $A_0$ ,  $B_0$ 'ın

$$2 \frac{dA_0}{d\tilde{t}} + \left(\frac{1}{2} - a_1\right) B_0 = 0 \quad (3.2.14)$$

$$2 \frac{dB_0}{d\tilde{t}} + \left(a_1 + \frac{1}{2}\right) A_0 = 0$$

(3.2.14) ü sağlamasını gerektirir.

Eğer  $a_1^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$  ise (3.2.14) ün çözümünün üstel olarak büyüdüğü ve eğer  $a_1^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$  ise titreştiği kolayca sağlanabilir. Böylece kararsızlık bölgesinin sınırı üzerinde

$$a_1 = \pm \frac{1}{2} \quad (3.2.15)$$

dir.  $(\lambda, \omega^2)$  düzleminde kararsızlık bölgesinin sınır eğrileri  $\lambda$  ya göre 1. mertebeden

$$\omega_{1-}^2 \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda \quad \text{sol kol} \quad (3.2.16a)$$

$$\omega_{1+}^2 \approx 1 + \frac{1}{2} \lambda \quad \text{sağ kol} \quad (3.2.16b)$$

ile verilir. Bu işlemleri 2. mertebeye götürmek için önce (3.2.13) ü çözerek, (3.2.14) ten yararlanarak

$$F_1(t, \tilde{t}) = A_1(\tilde{t}) \cos t + B_1(\tilde{t}) \sin t + \frac{1}{16} A_0 \cos 3t + \frac{1}{16} B_0 \sin 3t \quad (3.2.17)$$

$F_1(t, \tilde{t})$  bulunur.  $F_1(t, \tilde{t})$  yı (3.2.11) de yerine koyarak

$$2 \frac{dA_1}{d\tilde{t}} + \left(\frac{1}{2} - a_1\right) B_1 = + \frac{d^2 B_0}{d\tilde{t}^2} + a_2 B_0 - \frac{17}{32} B_0 \quad (3.2.18)$$

$$2 \frac{dB_1}{d\tilde{t}} + \left(\frac{1}{2} + a_1\right) A_1 = - \frac{d^2 A_0}{d\tilde{t}^2} - a_2 A_0 + \frac{53}{32} A_0$$

$A_0(\tilde{t})$ ,  $B_0(\tilde{t})$  fonksiyonları (3.2.14) den elde edilir.

$$A_0(\tilde{t}) = a_0 e^{\mu \tilde{t}} + a_0^* e^{-\mu \tilde{t}} \quad (3.2.19)$$

$$B_0(\tilde{t}) = b_0 e^{\mu \tilde{t}} + b_0^* e^{-\mu \tilde{t}}$$

Burada

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - a_1\right)\left(\frac{1}{2} + a_1\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (a_1)^2}$$

ve  $a_0$ ,  $b_0$  ve bunların karmaşık eşlenikleri başlangıç koşulları ile özelleştirilir, [(3.2.18) homojen denkleminin çözümleri (3.2.19) ile aynı tiptendir].



$$\vec{X}_p(t) = \sum_{i=1}^2 C_i(t) \vec{X}_i(t), \quad [\vec{X} \equiv (A_1, B_1)^T]$$

formlu (3.2.18) in özel çözümlerini arayarak  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  için aşağıdaki bağıntılar bulunur. Burada  $\vec{X}_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) (3.2.18) homojen denkleminin çözümlerinin bir temel kümesidir.

$$- \sqrt{\frac{1}{2} - a_1} e^{\mu t} \frac{dC_1}{dt} + \sqrt{\frac{1}{2} - a_1} e^{-\mu t} \frac{dC_2}{dt} = (\mu^2 + a_2 - \frac{17}{32}) B_0 \quad (3.2.20a)$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2} + a_1} e^{\mu t} \frac{dC_1}{dt} - \sqrt{\frac{1}{2} + a_1} e^{-\mu t} \frac{dC_2}{dt} = - (\mu^2 + a_2 - \frac{53}{32}) A_0 \quad (3.2.20b)$$

kararsızlık bölgesinin sol sınırında (3.2.20b) den:

$$a_2 = \frac{53}{32}$$

bulunur. Burada  $a_1 = -\frac{1}{2}$  dir ve böylece (3.2.16a)  $\lambda$  ya göre 2. mertebeden olur.

$$\omega_-^2 \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda - \frac{53}{32} \lambda^2 \quad \text{sol kol} \quad (3.2.21a)$$

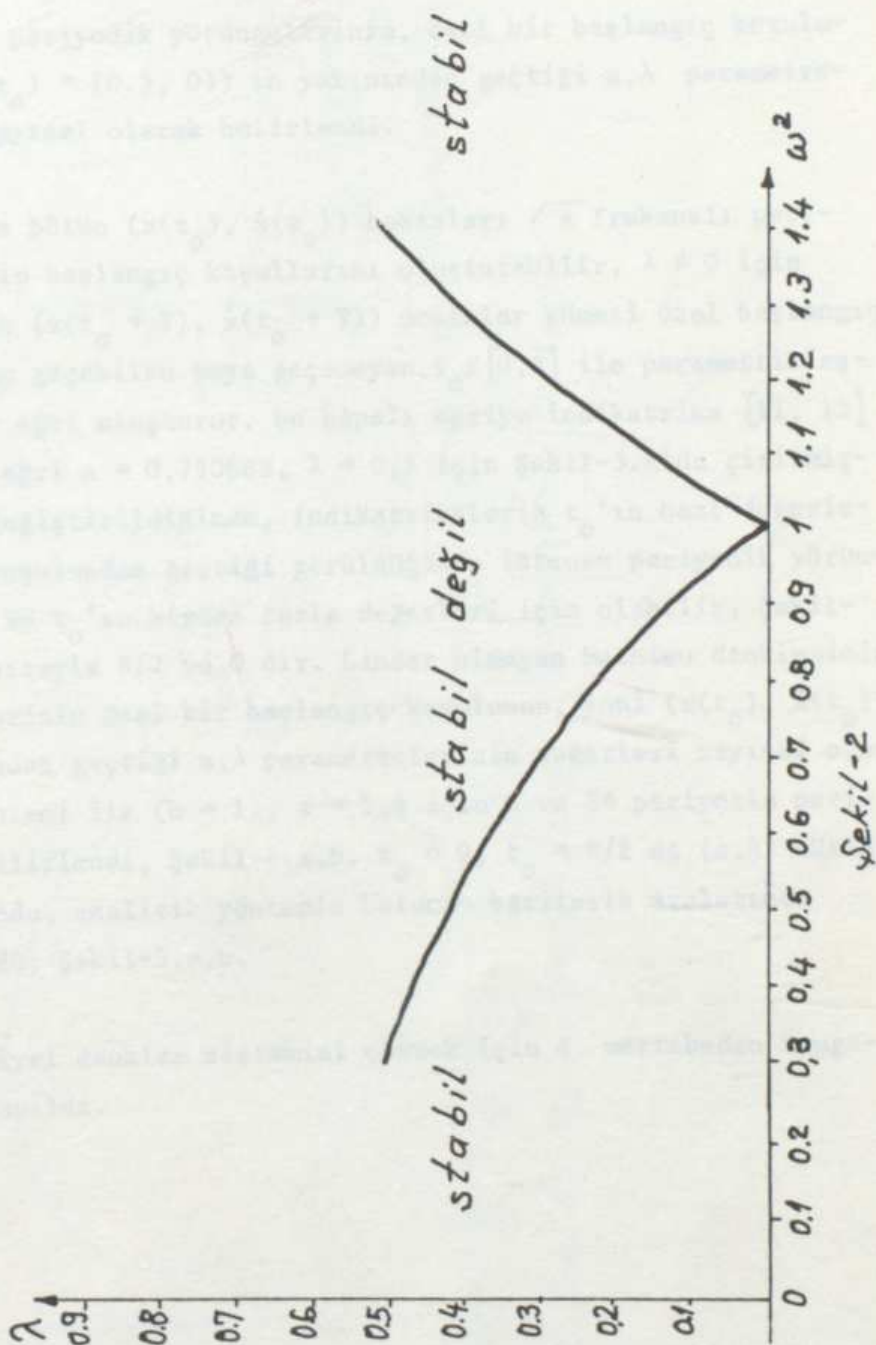
Diğer sınırda  $a_1 = \frac{1}{2}$  ve (3.2.20a) dan

$$a_2 = \frac{17}{32}$$

bulunur. (3.2.16b)

$$\omega_+^2 \approx 1 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{17}{32} \lambda^2 \quad \text{sağ kol} \quad (3.2.21b)$$

olur. (3.2.21a) ve (3.2.21b) ifadeleri Şekil-2'de çizildi,  $2\pi$  periyotlu periyodik yörüngelerin kararsızlık bölgeleri gösterildi. Aynı işlemler  $\pi$  periyotlu yörüngeler için de yapılabilir.



Şekil-2



### 3.3. Eşzamanlı Periyodik Yörüngelerin Sayısal İncelenmesi

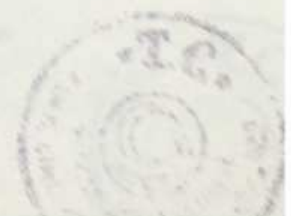
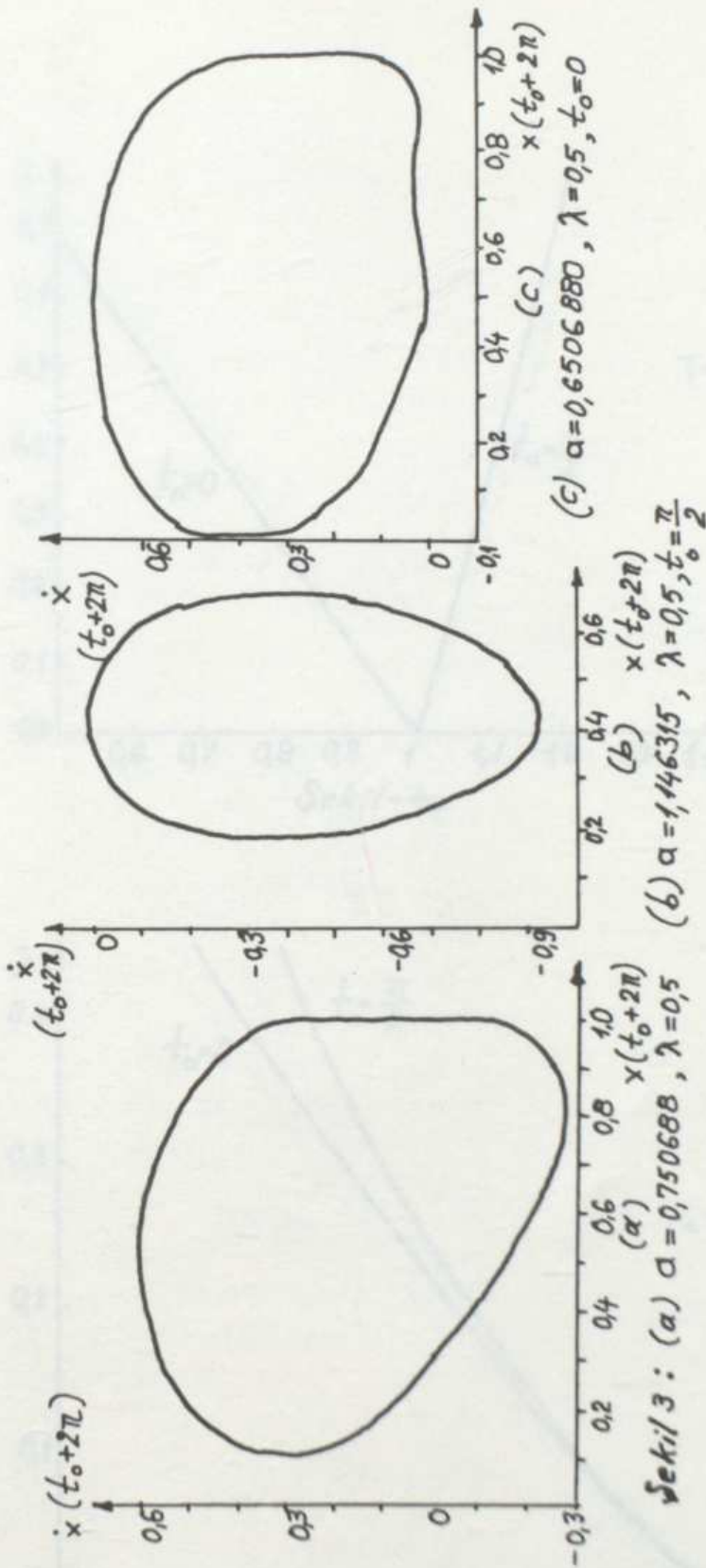
İndikatriks yöntemini kullanarak [15,16],  $\sqrt{a}$  frekanslı

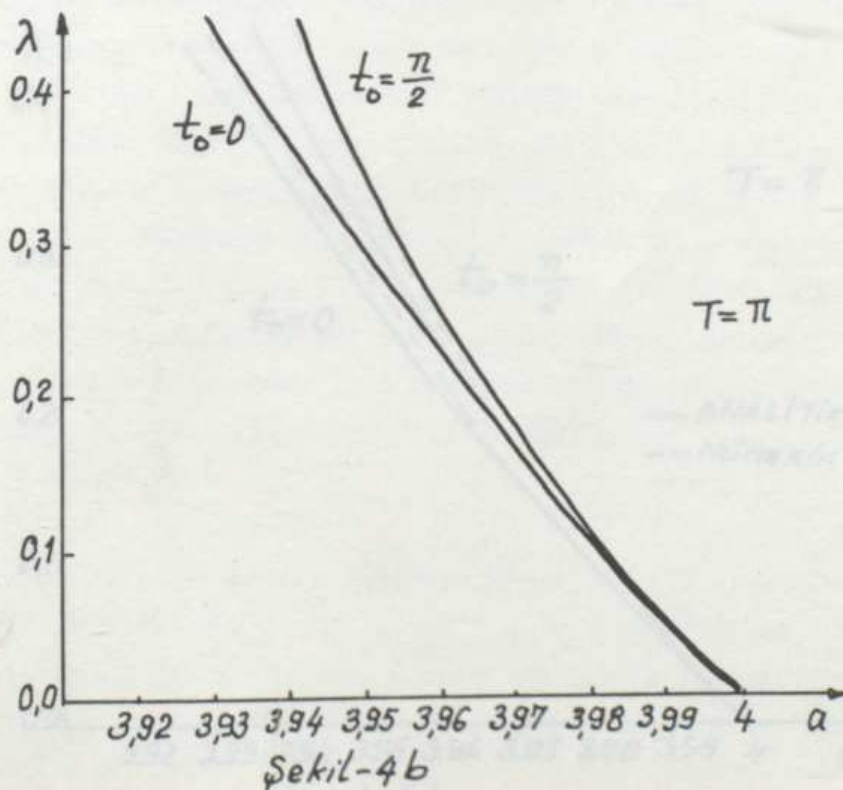
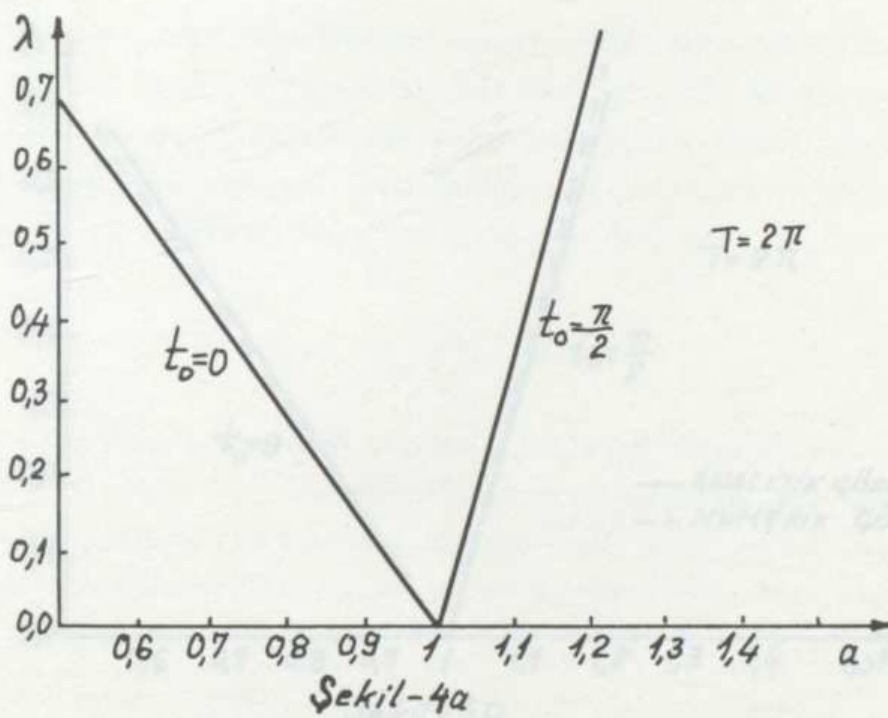
$$\ddot{x} + ax + \lambda(x\cos 2t + bx^3) = 0, \quad b \geq 0 \quad (3.3.1)$$

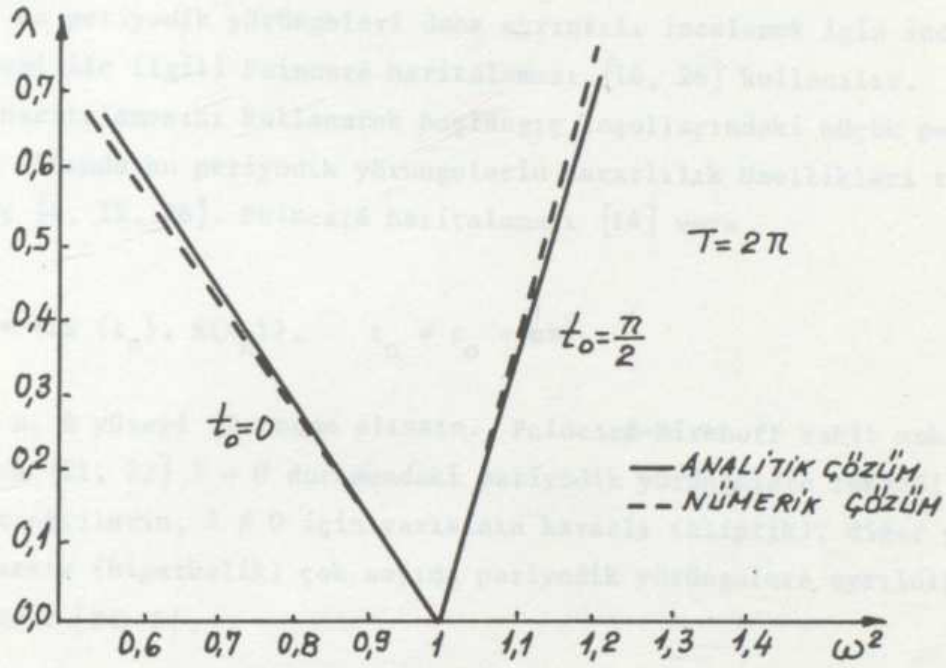
(3.3.1) denkleminin periyodik yörüngelerinin, özel bir başlangıç koşulunun yani  $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (0.5, 0)$  ın yakınından geçtiği  $a, \lambda$  parametrelerinin değerleri sayısal olarak belirlendi.

$\lambda = 0$  için bütün  $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$  noktaları  $\sqrt{a}$  frekanslı periyodik yörüngeler için başlangıç koşullarını oluşturabilir,  $\lambda \neq 0$  için  $T = 2\pi/\sqrt{a}$  periyotlu  $(x(t_0 + T), \dot{x}(t_0 + T))$  noktalar kümesi özel başlangıç koşulunun yakınından geçebilen veya geçemeyen  $t_0 \in [0, \pi]$  ile parametrikleştirilmiş kapalı bir eğri oluşturur. Bu kapalı eğriye indikatriks [11, 15] denir ve bu kapalı eğri  $a = 0,750688$ ,  $\lambda = 0,5$  için Şekil-3.a'da çizilmiştir.  $a$  ve  $\lambda$  biraz değiştirildiğinde, indikatrikslerin  $t_0$ 'ın bazı değerlerindeki başlangıç koşulundan geçtiği görüldüğünde istenen periyodik yörüngeler elde edilir. Bu  $t_0$ 'ın birden fazla değerleri için olabilir, Şekil-3.b,c. Burada  $t_0$  sırayla  $\pi/2$  ve 0 dır. Lineer olmayan Mathieu denkleminin periyodik yörüngelerinin özel bir başlangıç koşulunun, yani  $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (0.5, 0)$  ın yakınından geçtiği  $a, \lambda$  parametrelerinin değerleri sayısal olarak indikatriks yöntemi ile ( $b = 1$ ),  $a = 1,4$  için  $\pi$  ve  $2\pi$  periyotlu periyodik yörüngeler belirlendi, Şekil-4.a,b.  $t_0 = 0$ ,  $t_0 = \pi/2$  de  $(a, \lambda)$  düzleminde iki kol bulundu, analitik yöntemle bulunan eğrilerle aralarında iyi bir uyum görüldü, Şekil-5.a,b.

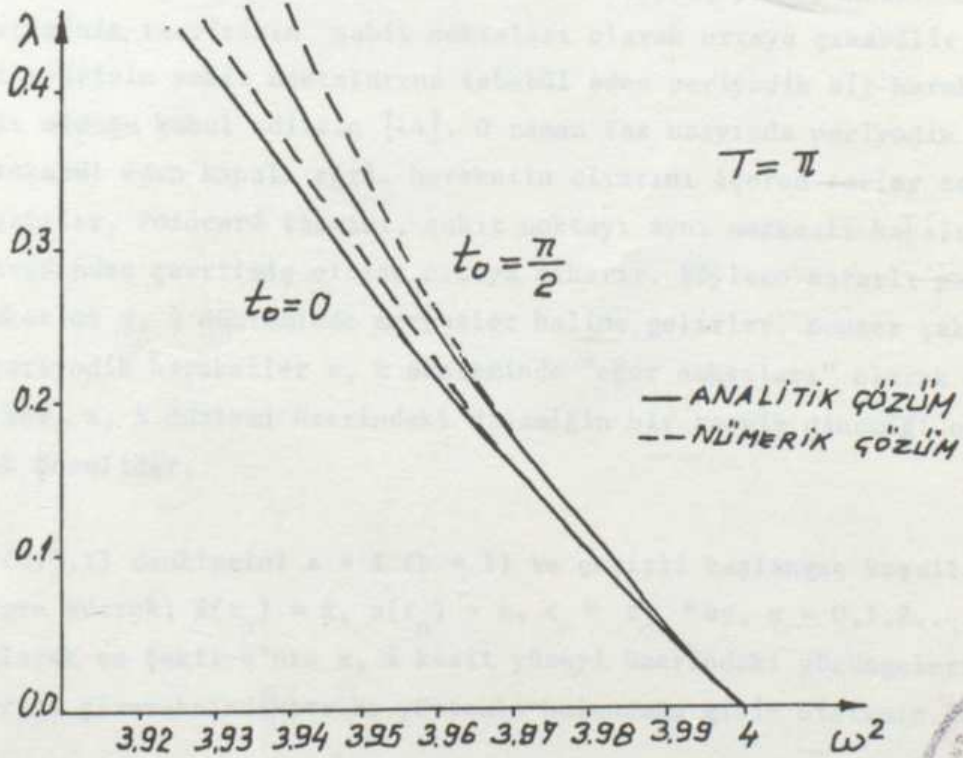
Diferansiyel denklem sistemini çözmek için 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanıldı.







Şekil-5a



Şekil-5b



### 3.4. Sayısal Yöntemle Eşzamanlı Periyodik Yörüngelerin Kararlılık Analizi

Bu periyodik yörüngeleri daha ayrıntılı incelemek için indikat-riks yöntemi ile ilgili Poincaré haritalaması [16, 26] kullanılır. Poincaré haritalamasını kullanarak başlangıç koşullarındaki küçük pertür-basyonlar altında bu periyodik yörüngelerin kararlılık özellikleri tayin edilebilir [4, 15, 26]. Poincaré haritalaması [14] veya

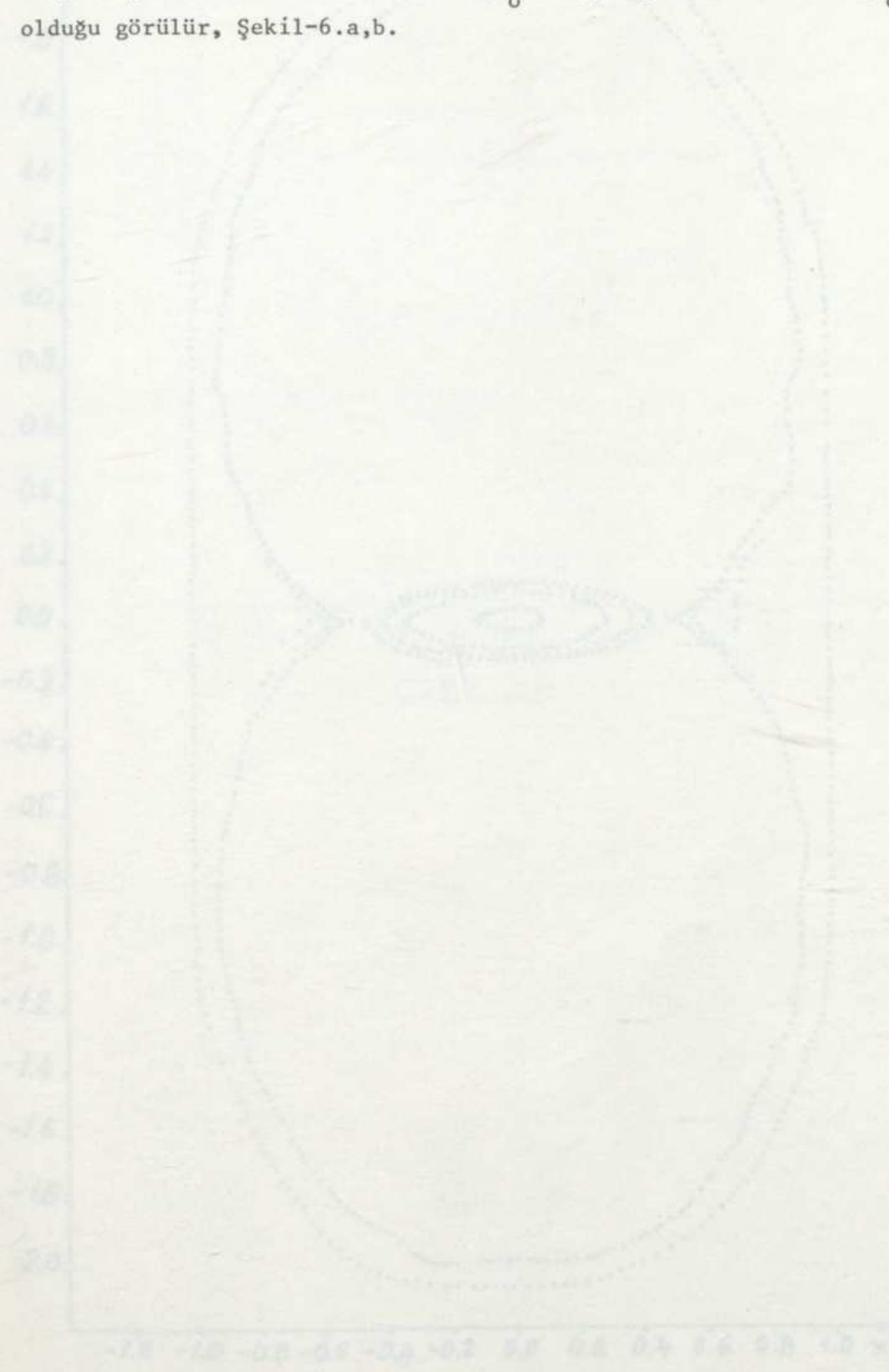
$$\Sigma^t = \{(x(t_n), \dot{x}(t_n)), \quad t_n = t_0 + n\pi\}$$

kesitinin  $x, \dot{x}$  yüzeyi gözönüne alınsın. Poincaré-Birkhoff sabit nokta teoreminden [21, 22]  $\lambda = 0$  durumundaki periyodik yörüngelere tekabül eden invaryant eğrilerin,  $\lambda \neq 0$  için yarısının kararlı (eliptik), diğer yarısının kararsız (hiperbolik) çok sayıda periyodik yörüngelere ayrıldığı bilinmektedir [Ek 2],

Her bir devirde  $\Sigma$  kesit yüzeyini bir kez delen periyodik hare- ketler Poincaré tasvirinin sabit noktaları olarak ortaya çıkarlar. Daha karmaşık periyodik yörüngeler tasvirin  $n$  devri olarak, yani kendisinin  $n$  kez bileşiminin tasvirinin sabit noktaları olarak ortaya çıkabilir. Poincaré tasvirinin sabit noktalarına tekabül eden periyodik bir hareke- tin kararlı olduğu kabul edilsin [14]. O zaman faz uzayında periyodik harekete tekabül eden kapalı eğri, hareketin civarını içeren torlar tara- fından kuşatılır. Poincaré tasviri, sabit noktayı aynı merkezli kapalı eğriler tarafından çevrilmiş olarak ortaya çıkarır. Böylece kararlı peri- yodik hareketler  $x, \dot{x}$  düzleminde merkezler haline gelirler. Benzer şekilde kararsız periyodik hareketler  $x, \dot{x}$  düzleminde "eğer noktaları" olarak or- taya çıkarlar.  $x, \dot{x}$  düzlemi üzerindeki dinamiğin bir tasvir dinamiği oldu- ğunu bilmek önemlidir.

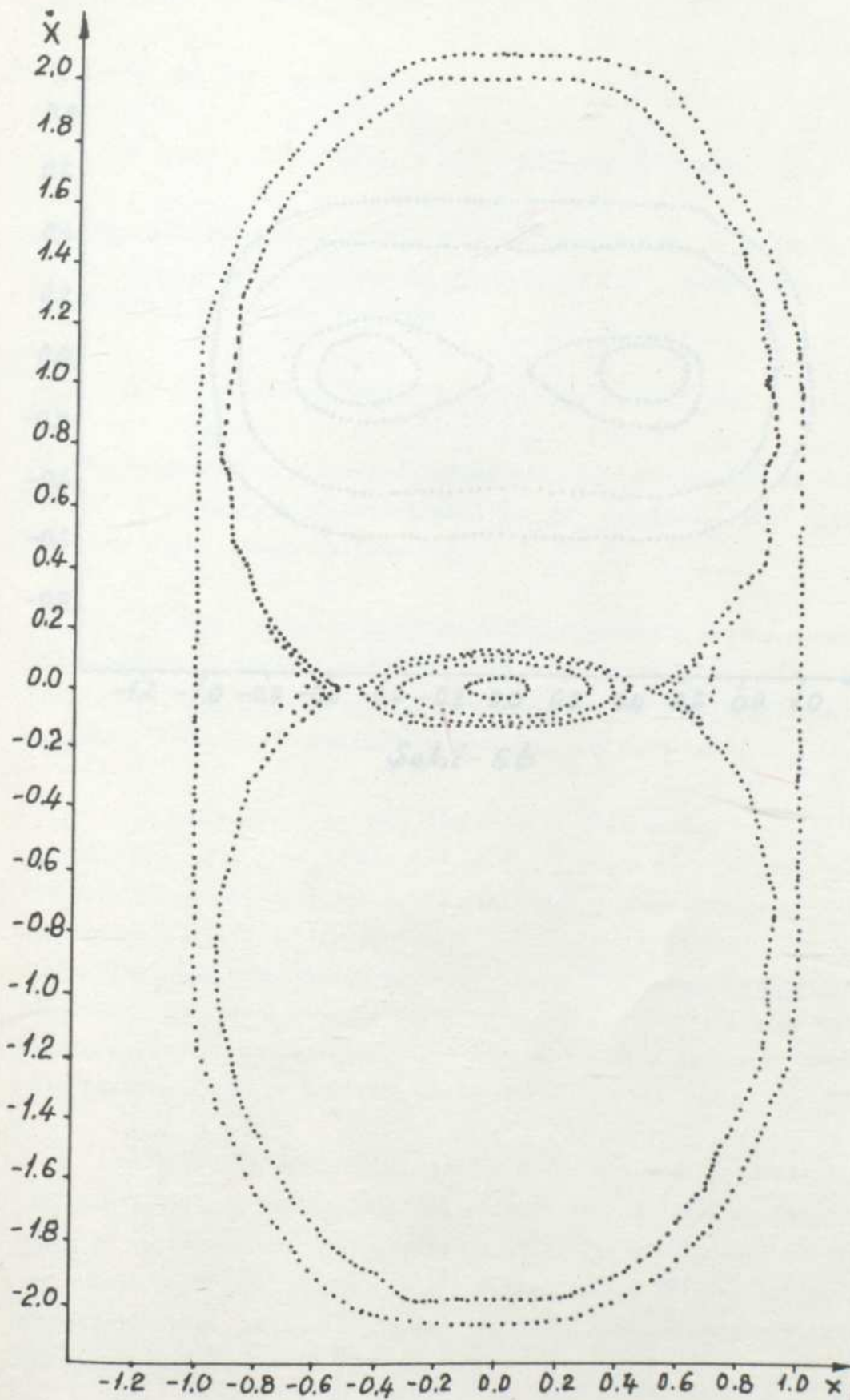
(3.3.1) denklemini  $a \approx 1$  ( $b = 1$ ) ve çeşitli başlangıç koşulla- rında integre ederek;  $\dot{x}(t_n) = \dot{x}, x(t_n) = x, t_n = t_0 + n\pi, n = 0, 1, 2, \dots, 2000, \dots$  alarak ve Şekil-6'nın  $x, \dot{x}$  kesit yüzeyi üzerindeki yörüngelerin arakesitlerini çizerek-indikatriks yöntemle bulunduğu gibi- sistemin  $2\pi$

periyotlu iki farklı periyodik yörüngeye sahip olduğu bulunur. Poincaré haritalamasını yaptığımızda Birkhoff'un teoremi ile tanımlandığı gibi bu yörüngelerden birinin kararsız ( $\tau_0 = 0$ ), diğerinin kararlı ( $\tau_0 = \pi/2$ ) olduğu görülür, Şekil-6.a,b.



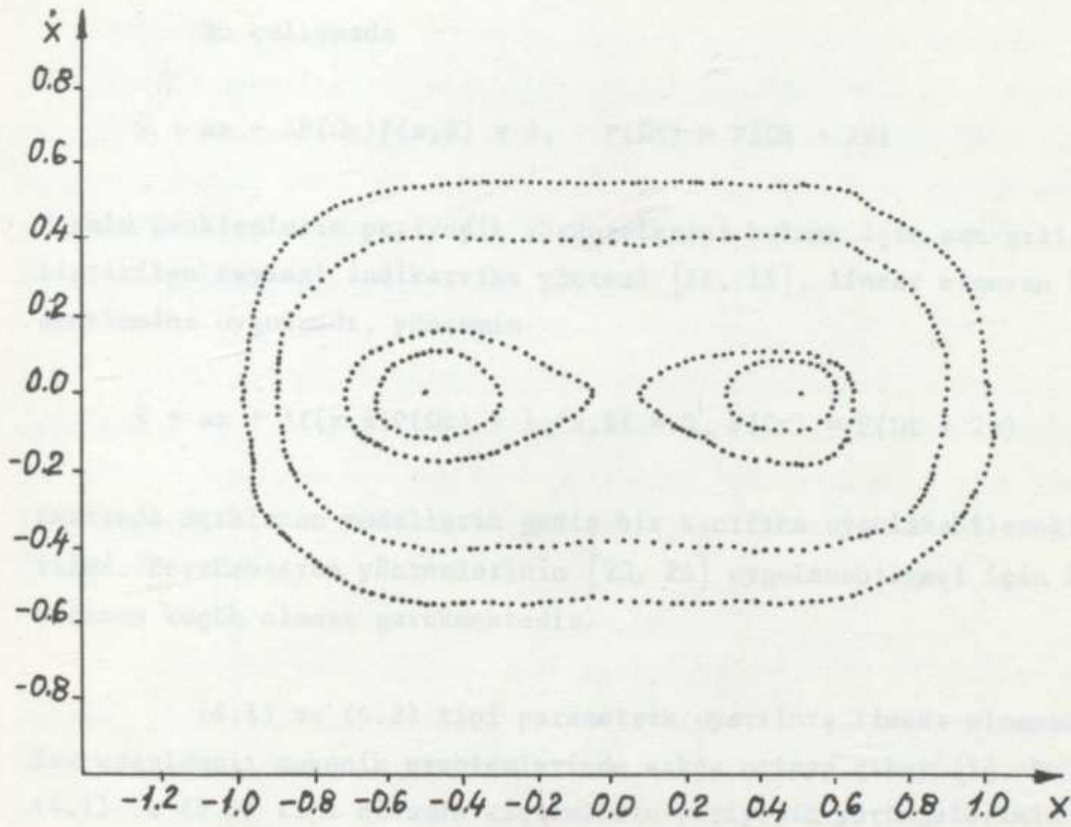
Şekil-6a





Şekil-6a





Şekil-6b



#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada

$$\ddot{x} + ax + \lambda P(\Omega t)f(x, \dot{x}) = 0, \quad P(\Omega t) = P(\Omega t + 2\pi) \quad (4.1)$$

formlu denklemlerin periyodik yörüngelerini bulmak için son yıllarda geliştirilen sayısal indikatriks yöntemi [11, 15], lineer olmayan Mathieu denklemine uygulandı, yöntemin

$$\ddot{x} + ax + \lambda f(x, \dot{x})P(\Omega t) + \lambda g(x, \dot{x}) = 0, \quad P(\Omega t) = P(\Omega t + 2\pi) \quad (4.2)$$

tarzında açıklanan modellerin geniş bir sınıfına uygulanabileceği gösterildi. Pertürbasyon yöntemlerinin [23, 24] uygulanabilmesi için  $\lambda$  nın yeterince küçük olması gerekmektedir.

(4.1) ve (4.2) tipi parametrik uyarılmış lineer olmayan sistemler uygulamalı mekanik problemlerinde sıkça ortaya çıkar [1]. Bu nedenle (4.1) ve (4.2) tipi dinamik sistemlerin periyodik yörüngelerinin araştırılması, kararlılık analizinin yapılması çok önemlidir.

İndikatriks yöntemi ile (3.2.1) denkleminin özel bir başlangıç koşulundan, yani  $[x(t_0), \dot{x}(t_0)] = (0.5, 0)$  geçen  $2\pi$  ve  $\pi$  periyotlu periyodik yörüngeleri belirlendi. Bu periyodik yörüngeleri veren  $(a, \lambda)$  parametreleri Şekil-4.a,b'de gösterildi. İndikatriks yöntemin  $\lambda \leq 1$  değerleri için rahat uygulanabildiği gözlemlendi.  $\lambda$  nın büyük değerlerinde  $(x, \dot{x})$  düzlemindeki  $(0.5, 0)$  başlangıç koşulundan geçen indikatriksleri belirlemek zorlaşmaktadır. Bu çalışmada,  $a \approx 1$  ve  $a \approx 4$  için  $\lambda$ , 1'e kadar ilerletildi. Seçilen aralıkta dallanma gözlemlenmedi.

Analitik bir yöntem olan ve J. H. Balbi [13] tarafından geliştirilen genelleştirilmiş ortalama yöntemi ile (3.1.1) denkleminin  $\lambda$  ya göre 2. mertebeden  $2\pi$  ve  $\pi$  periyotlu periyodik yörüngeleri belirlendi. Bu periyodik yörüngeleri veren  $(\lambda, \omega^2)$  parametreleri Şekil-1.a,b'de gösterildi. Genelleştirilmiş ortalama yöntemi, işlemler hemen karmaşıklaştığı için  $\lambda^3$  mertebesine kadar ilerletilebildi.



Her iki yöntemle bulunan sonuçlar karşılaştırıldığında, aralarında iyi bir uyum olduğu görüldü. Her iki yöntemde de  $\lambda$  nın bir değerine karşılık  $t_0 = 0$ ,  $t_0 = \pi/2$  de iki periyodik yörünge bulundu. İki yöntemle bulunan eğriler karşılaştırıldığında Şekil-5.a,b,  $\lambda$  arttıkça iki eğri arasındaki sapmanın arttığı,  $\lambda$  nın küçük değerlerinde uyumun daha iyi olduğu görüldü. Analitik yöntem  $\lambda$  ya göre daha yüksek mertebelere kadar ilerletilseydi, analitik yöntemle bulunan sonuçlar, sayısal yöntemle bulunan sonuçlara daha çok yaklaşacaktı.

Bu periyodik yörüngelerin kararlı olup olmadığı sayısal ve analitik yöntemlerle belirlendi, bazı değerlerdeki sapmalara rağmen bu iki yöntem arasında iyi bir uyum gözlemlendi. Eşzamanlı periyodik yörüngelerin kararlılık analizi için çoklu ölçekler yönteminin özellikle faydalı olduğu bulundu.

Bu çalışmada kullanılan sayısal ve analitik yöntemler, yüksek boyutlu dinamik sistemlerde eşzamanlı periyodik yörüngelerin incelenmesinde güvenle kullanılabilir. İki boyutlu lineer olmayan Mathieu denkleminin periyodik yörüngeleri aynı yöntemlerle araştırılabilir.



LİNEER VE LİNEER OLMAYAN MATHIEU DENKLEMLERİ [6, 18, 19, 20]

Parametreleri zamana bağlı, tek serbestlik dereceli lineer bir titreşim sistemine ait diferansiyel denklem,

$$\ddot{x} + P_1(t)\dot{x} + P_2(t)x = 0 \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir.

$$x = ye^{-\frac{1}{2} \int P_1(t) dt}$$

dönüşümü ile (1) denklemi

$$\ddot{y} + P(t)y = 0 \quad (2)$$

şekline dönüşür. Burada

$$P(t) = P_2(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [P_1(t)] - \frac{1}{4} P_1^2(t)$$

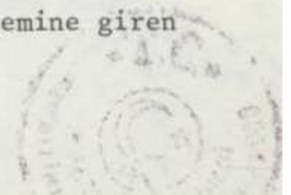
dir.  $P_1$  ve  $P_2$  parametreleri zamanın  $T_p$  periyotlu fonksiyonları ise,  $P(t)$  de:

$$P(t + T_p) \equiv P(t)$$

zamana periyodik bağlıdır. (2) denklemi "Hill diferansiyel denklemi" tipinden olup, pratikte rastlanan durumlarda

$$y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} y_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} y_2(t) \quad (3)$$

şeklinde çözümlere sahiptir.  $\mu_1$  ve  $\mu_2$ , (2) denkleminin karakteristik üsleridir. Başlangıç şartlarına bağlı olmayıp, yalnız (2) denklemine giren



büyükliklere bağlı olan bu üsler, (3) çözümünün kararlılık durumunu belirlerler. İki karakteristik üsten birinin pozitif gerçel kısma sahip olması halinde çözümü,  $t \rightarrow \infty$  için sınırsız olarak büyür, kararsız olur. Buna karşılık her iki üssün gerçel kısımlarının negatif olması halinde  $t \rightarrow \infty$  için  $y$ , asimtotik olarak sifıra gider. Bu durumda çözüm (asimtotik) kararlıdır. Sınır durumunda üslerden birinin (veya ikisinin) gerçel kısmı sıfır olabilir. Böyle olunca  $y$  sıfır konumuna asimtotik olarak yaklaşmaksızın sınırlı kalır. Bu halde  $y$  periyodik olabilir.

Titreşim teorisinde özellikle gerçel  $\mu$  üsleri önemlidir. Kararlı çözüm bölgeleri, kararsızlardan üzerlerinde tamamiyle periyodik çözümlerin mevcut olduğu sınır eğrileri ile ayrılırlar.

$P(t)$  periyodik fonksiyonu

$$P(t) = P_0 + \Delta P \cos \Omega t \quad (4)$$

(4) özel hali için, Hill diferansiyel denklemi "Mathieu denklemi"ne dönüşür.

$$\tau = \Omega t \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{P_0}{\Omega^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2} \quad (6)$$

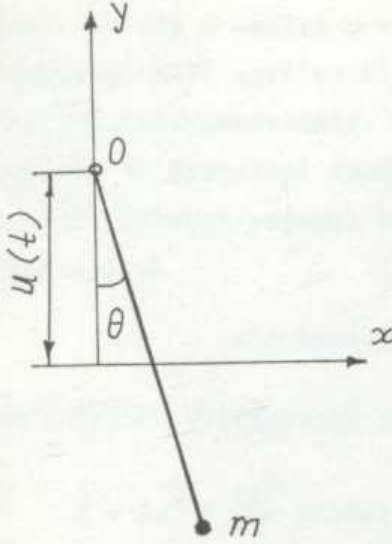
kısaltmaları yardımıyla Mathieu diferansiyel denkleminin

$$y'' + (\lambda + \gamma \cos \tau)y = 0 \quad (7)$$

normal şekline gelinir. Çizgiler boyutsuz zaman  $\tau$  ya göre türevleri göstermektedir.

Mathieu denklemi, fizikte çok karşılaşılan ilginç bir denklemdir. Birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve üzerinde çok çalışılmıştır.

Mathieu denkleminin çıkışı basit bir örnek üzerinde görülebilir:  $\ell$  uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna bir  $m$  kütlesi asılmış olup



çubuk 0 noktası etrafında serbestçe dönebilmektedir. 0 noktası düşey doğrultuda verilen bir  $u(t)$  hareketini yapmaktadır. Hareketin denklemi bulunabilir.

Genelleştirilmiş koordinat olarak çubuğun düşeyle yaptığı  $\theta$  açısı alın-sın. Buna göre kütlesi  $m$  olan parçacığın koordinatları

$$x = l \sin \theta \quad , \quad y = - l \cos \theta + u$$

yazılabilir. Parçacığın hız bileşenleri

ise

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \quad , \quad \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u}$$

olur. Dolayısıyla kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + (l \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u})^2 \right] = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \dot{u} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u}^2)$$

bulunur. Öte yandan parçacığa etkiyen ağırlık kuvvetinin potansiyeli

$$V = mgy = mg(- l \cos \theta + u)$$

olduğundan Lagrange fonksiyonu

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \dot{u} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u}^2) + mg(l \cos \theta - u)$$

olur. Buna göre hareket denklemi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \frac{d}{dt} (l^2 \dot{\theta} + l \dot{u} \sin \theta) - m l \dot{u} \dot{\theta} \cos \theta + m g l \sin \theta = 0$$

veya

$$\ddot{\theta} + \left( \omega^2 + \frac{\ddot{u}}{l} \right) \sin \theta = 0$$



çıkar. Burada  $\omega$  sabiti  $\omega = (g/l)^{1/2}$  olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklem mesnedi verilen bir düşey hareket yapan bir basit sarkacın hareketini belirlemektedir. Görülüyor ki hareket sabit ivmeli olmadığı takdirde diferansiyel denklemin katsayıları değişkendir. Mesnedin basit harmonik hareket yapması halinde  $a$  bu hareketin genliği,  $\Omega$  açısal frekansı olarak

$$u = a \cos \Omega t$$

yazılabilir. Dolayısıyla hareket denklemi

$$\ddot{\theta} + (\omega^2 - \frac{a\Omega^2}{l} \cos \Omega t) \sin \theta = 0$$

şekline girer.  $\theta = 0$  civarında küçük salınımlar için bu denklem

$$\ddot{\theta} + (\omega^2 - \frac{a\Omega^2}{l} \cos \Omega t) \theta = 0$$

olur. Bir boyutsuz  $\tau$  değişkeni  $\Omega t = 2\tau$  ve  $\alpha, \beta$  sabitleri

$$\alpha = \frac{4\omega^2}{\Omega^2}, \quad \beta = \frac{2a}{l}$$

ile tanımlanırsa yukarıdaki denklem

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (\alpha - 2\beta \cos 2\tau) \theta = 0$$

şekline girer. Bu denklem lineer Mathieu diferansiyel denklemidir. Bu denklemin periyodik çözümü ancak  $\alpha$  parametresinin  $\beta$  nin belli bazı fonksiyonları olarak belirlenmesi halinde mümkündür. Aksi halde sarkacın periyodik salınımları söz konusu olmaz. Üstelik parametrelerin bazı değerleri için çözüm sınırsız olarak büyür. Bir tür rezonans niteliği taşıyan ancak bir zorlayıcı dış etken olmadan ortaya çıkan bu duruma sistem parametreleriyle ilgisi nedeniyle "parametrik rezonans" denir.

$\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerini ayarlayarak sarkacı üst konumda kararlı tutmak mümkün olur. Salınımlar büyük olduğunda lineer Mathieu denklemi lineer olmayan Mathieu denklemine döndüğü,

POINCARÉ - BIRKHOFF TEOREMİ [22,23,24,36]

Poincaré, gök mekaniğindeki problemlerin periyodik çözümlerini incelemiş, temel zorlukları kapsayan basit bir model yapmıştır. Bu model düzlem dairesel halkanın alan-korunumlu tasviridir. Bu formda tasvir, iki serbestlik dereceli sistemlerin incelenmesinden doğmaktadır. İki boyutlu yüzeyin kesitinin tasviri şöyle tanımlanabilir: Yüzeyin kesitinin her P noktası, P de meydana gelen faz eğrisinin yüzeye kesiştiği yeni nokta olarak alınabilir. Böylece, kapalı faz eğrisi, tasvirin sabit noktasına ya da üssüne uygundur. Tersine; tasvirin her sabit noktası ya da üssü kapalı faz eğrisini tanımlar.

Bu yolla, dinamik problemlerin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili soru halkanın alan korunumlu sabit noktaları ile ilgili soruya indirgenir. Tasviri incelenirken Poincaré aşağıdaki teoreme ulaştı:

A. Halkanın kendisine tasvirinin sabit noktaları

TEOREM: Düzlem dairesel halkanın kendisine alan korunumlu hemeomorfik tasvirinin verildiği ve halkanın çevresinin tasvirde farklı doğrultularda döndüğü farzedilsin. Bu tasvir en az iki sabit nokta içerecektir.

Halkanın sınır çemberinin farklı doğrultularda dönme şartının anlamı, halkanın koordinatları  $(x, y \text{ mod } 2\pi)$  seçilirse sınır çemberinin  $x = a$  ve  $x = b$  olmasıdır. Buna göre tasvir

$$(x,y) \rightarrow (f(x,y), y + g(x,y))$$

formülüyle tanımlanır.  $f$  ve  $g$  fonksiyonları süreklidirler ve  $y$  de bütün  $y$  ler için  $f(a,y) \equiv a$ ,  $f(b,y) \equiv b$  ve  $g(a,y) < 0$ ,  $g(b,y) > 0$  olmak üzere  $2\pi$  periyodiktirler.

Bu teoremin ispatı, ölümünden çok az önce Poincaré, sonra da G. D. Birkhoff tarafından verildi (Dynamical Systems, Amer. Math. Soc. 1927).

Bu yayınlarda teoremlerle ilgili çok sayıda açık soru vardı, özellikle çok serbestlik dereceli problemlerin periyodik çözümlerinin incelenmesi için yüksek boyutlara genelleştirme fikri önemli idi. Kendi teoremine ulaşmak için Poincaré'nin kullandığı kanıt, diğer problemlerin tüm serisine uygulanır. Ancak, Birkhoff'un verdiği zor ispat tek başına genellenemez. Buna göre, Poincaré kanıtının iki boyutlu halka ile ilgili teoremin sınırları dışında doğruluğu bilinmemektedir. Bahsedilen kanıt aşağıdadır:

B. Tasvirdeki sabit noktalar ve elde edilen fonksiyonun kritik noktaları arasındaki ilişki

Halkanın bir simplektik difeomorfizmi:

$$(x,y) \rightarrow (X,Y)$$

şeklinde tanımlanır.  $Xy + S(X,y)$  fonksiyonunun genelleştirilmesi yardımıyla  $S$  fonksiyonu  $y$  de  $2\pi$  periyodiktir. Difeomorfizm olması için  $\partial X/\partial x \neq 0$  olması gerekir. Buradan

$$dS = (x - X)dy + (Y - y)dX$$

yazılabilir ve böylece, difeomorfizmin sabit noktaları  $F(x,y) = S(X(x,y),y)$  fonksiyonunun kritik noktalarıdır. Bu  $F$  fonksiyonu  $(x - X)dy + (Y - y)dX$  integral formunda tanımlanarak çıkarılır. Bu fonksiyonun gradyenti her iki sınır çemberinde bir defasında halkanın içine ya da dışına yönelmiştir (dönmenin farklı doğrultularda olması şartıyla).

Halkanın her düzgün fonksiyonunun gradyenti her iki sınır çemberinde halkanın içine (veya dışına) yönelmiştir ve halkanın içinde (max veya min) bir kritik nokta vardır. Halkadaki böyle bir fonksiyonun kritik noktaları sayısının en az iki olduğu gösterilebilir. Eğer,  $F$  in her kritik noktası tasvirin sabit noktası ise, difeomorfizmin en az iki kritik noktası vardır.

Bu sadece  $\partial X/\partial x \neq 0$  şartında doğrudur. Böylece, F, X ve y terimleri ile ifade edilebilir. Bu durumda kanıt, özdeşlikten çok fazla farklı olmayan tasvirler için geçerlidir. Örneğin, elde edilen fonksiyon S in türevlerinin 1'den küçük olması yeterlidir.

Bu kanıtın incelenmesi (elde edilen fonksiyonun farklı seçimi ile) Jakobi matrisinin  $D(X, Y)/D(x, y)$  özdeğerlerinin herhangi bir noktada asla -1'e eşit olamayacağını gösterir. Böyle şartların hepsi özdeşlikten uzak tasvirler için bozulurlar. Poincaré teoreminin ispatı, genel halde tamamıyla farklı kanıtlar kullanmayı gerektirir.

Tasvirdeki sabit noktalar ve elde edilen fonksiyonun kritik noktaları arasındaki ilişki, halkanın iki boyutta içine tasvirinde daha derin bir etkinin olduğunu göstermektedir. Aşağıda bu ilişkinin anlamlı sonuçlar verdiği bazı örnekler incelenecektir. Bunlar, gerekliliği açık olmayan bazı sınırlandırmalar altında doğrudur.

$$d\phi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X - x & Y - y \\ dX + dx & dY + dy \end{vmatrix}$$

C. Torun simplektik difeomorfizmi

Ağırlık merkezinde sabitleşen, torun simplektik difeomorfizmini gözönüne alalım.

$$(x, y) \rightarrow (x + f(x, y), y + g(x, y)) = (X, Y)$$

Burada torun x ve y modu açısal koordinatlarda  $2\pi$  dir. "Simplektik" anlamı, Jakobiyen  $D(X, Y)/D(x, y)$  nin 1'e eşit olması; ağırlık merkezinin korunması şartının anlamı f ve g fonksiyonlarının ortalama değerinin sıfıra eşit olmasıdır.

TEOREM: Çokkatlılığı dikkate alarak, en azından 3 farklı geometri alıp, Jakobi matrisinin özdeğerlerinin herhangi bir noktada -1'e eşit olmayacağını kabul ederek böyle bir difeomorfizmin en az 4 sabit noktası vardır.



İspat, torun aşağıdaki formülle verilen fonksiyonuna dayanarak yapılır:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2} \int (X - x)(dY + dy) - (Y - y)(dX + dx)$$

torun düz fonksiyonunun, çokkatlılık gözönüne alınarak en azından 3'ü geometrik olarak farklı, en az 4 kritik noktası vardır.

Bu teoremin ispatı, özdeğerlerde sınırlamalar getirmeksizin halka ile ilgili Poincaré teoremindekine benzer zorluklar getirir.

(Halka ile ilgili teorem, özdeğerlere ait şart atılmakla torla ilgili teoremden çıkarılabilir. İki sınır çemberi arasında dar bir bağlantı halkası bırakarak halkanın iki kopyasından bir tor yapılabilir.

Daha sonra, halkanın tasviri torun simplektik difeomorfizmine uygulanabilir. Öyle ki:

- (1) İki geniş halkanın her birinin difeomorfizmi orijinali ile uymalıdır.
- (2) Bağlantı halkası difeomorfizmi sabit noktalar içermelidir.
- (3) Ağırlık merkezi sabit kalmalıdır.

Torun bu difeomorfizmi sınır çemberinin farklı doğrultulardan dönme özelliğini kullanır. Her bir bağlantı halkasındaki tüm noktalar, bağlantı halkasını sınırlayan her iki sınır ile aynı yönde hareket ederler. Bağlantı halkasındaki hareketler zıt doğrultuda olduğundan, hareketin boyutu ağırlık merkezinin korunacağı şekilde seçilebilir.

Şimdi tordaki 4 sabit noktayı bulmak için ikisi orijinal halkada olmak üzere, halka ile ilgili teorem torunkinden çıkarılabilir.)

Yukarıda ifade edilen tor hakkındaki teorem, diğer iki ve çok boyutlu simplektik manifoldlara genellenebilir. Bu genellemeyi formülleştirme için ağırlık merkezinin korunumu şartının yeniden ele alınması gerekir.



$g: M \rightarrow M$  bir simplektik difeomorfizm olsun. Eğer  $g_t$  simplektik difeomorfizmin düz  $g_t$  eğrisinden elde edilen difeomorfizm özdeşliğine bağlanabilirse, böylece her  $t$  anında  $g_t$  hızlarının alanı tek değerli Hamiltoniyen fonksiyona bağlanabilir, bu durumda  $g_t$  özdeşliğe benzerdir. Özdeşliğe benzer simplektik difeomorfizmin, özdeşliğin ilişkili bileşenin alt gurubunun komütatörü, katlı uzayın bütün simplektik difeomorfizm gurubunu oluşturduğu gösterilebilir.

Katlı uzayın iki boyutlu tor olduğu durumda, özdeşliğe benzer simplektik difeomorfizm, ağırlık merkezinin korunması için olanlar aynıdır.

Buradan, Poincaré teoreminin aşağıdaki genellemesine geçilebilir.

**TEOREM:** Bir kompakt simplektik katlının her simplektik difeomorfizmi özdeşliğe benzerdir, bir düzgün fonksiyonun kritik noktaları olarak bu katlı uzayda çok sayıda sabit noktalar vardır, (en azından bu difeomorfizm özdeşlikten çok uzak değilse).

Tasvir şartının özdeşlik esas olduğunda benzer hale geldiği not edilmelidir. Torda hareket örneğinden görüldüğü gibi, sabit noktalar yoktur.

Son sınırlamada olduğu gibi, neyin esas olduğu açık değildir, (Difeomorfizm özdeşlikten çok uzak değilse). Katlı uzayın iki-boyutlu tor olması halinde, difeomorfizmin Jakobi matrisinin özdeğerlerinin hiçbiri  $-1$ 'e eşit değildir ( $\mathbb{R}^{2n}$  herhangi bir simplektik koordinat sisteminde).

(Bu tarz bir sınırlama yüksek boyutlu problemlerde gerekli olabilir. A.I.Snirel'man ve N.A.Nikishin teoreminde olduğu gibi, Poincaré teoriminin de aslında iki-boyutlu bir etkiye dayanması imkânsız değildir: İki-boyutlu kürenin difeomorfizminin her korunmuş alanı, geometrik olarak farklı en azından iki sabit noktaya sahiptir.

Bu teoremin ispatı, kritik noktada izole edilmiş  $1$ 'den büyük olmayan iki değişkenli bir düzgün fonksiyonun vektör alanının gradyent indisine dayanır (1.0.-1.-2.-3.... olabilir) ve tüm sabit noktaların indisleri toplamı iki boyutlu difeomorfizm yönelmesi) korunmuş iki boyutlu

kürede ikiye eşittir. Diğer taraftan, kritik noktada çok sayıda değişkenin düzgün fonksiyonun gradyent indisi herhangi bir tam değeri alır.)

#### D. Lagranjiyen katlı uzayın arakesitleri

Halkanın yarıçapında radyal bir kayma olduğunda Poincaré kanıtı biraz farklı verilmelidir. Halka çevresinin sınırları farklı doğrultularda döndüğünden her yarıçapta böyle noktalar vardır. Radyal olarak kayan noktalarda halkanın iç ve dış çevrelerini ayırarak bir düz eğri elde edilmiş olsun. Bu eğrinin görüntüsü, tasvirde eğriyi kesmelidir (eğri halkayı eşit alanlı bölgelere böldüğünden).

Eğer bu eğri ve görüntüsünün her biri her bir yarıçapı bir defasında kesiyorsa, eğrinin görüntüsüyle kesişme noktaları tasvirin sabit noktaları olacaktır.

Bu kanıtın bir kısmı yüksek boyutlara götürülebilir, bu ise dinamik problemlerinin çözümleri ile ilgili faydalı sonuçlar verir. Çok boyutlu halde halkanın rolü faz uzayı gibidir: Aynı boyuttaki tor ile Öklid uzayındaki bölgenin doğrudan çarpımı (halka, çevre ile bir ara için çarpımıdır). Faz uzayının simplektik yapısı alışılmış yolla tanımlanır: Örneğin,  $\Omega = \sum dx_k \wedge dy_k$  formunda. Burada,  $x_k$  iş değişkeni,  $y_k$  açı değişkenidir.

Faz uzayında simplektik difeomorfizmin özdeşliğe benzer olduğunu açıklamak zor değildir. Simplektik difeomorfizm A, sürekli bir şekil değişikliğinden oluşan özdeşlikten elde edilebiliyorsa ve eğer herhangi bir kapalı çevre  $\gamma$  için

$$\oint_{\gamma} x dy = \oint_{A\gamma} x dy$$

ise özdeşlikle benzerdir (sıfır olması gerekli değildir). x doğrultusu boyunca sistematik kaymanın yasaklanması için transformasyonun özdeşliğe benzer olması gerekir; fakat tor boyunca kaymaya izin verilir ("iş değişkenlerinin değerlendirilmesi").

Bir n boyutlu tor gözönüne alınsın.  $x = c =$  sabit özdeşliğe benzer simplektik difeomorfizmi uygulansın. Orijinal tor kendi görüntüsünü en

azından  $2^n$  noktada keser. En az  $n + 1$  nokta geometrik olarak farklıdır ve torun görüntüsü  $x = f(y)$  formundaki denkleme uyar. Burada  $f$  düzgündür.

$n = 1$  için bu iddianın anlamı, aynı merkezli çemberlerin herbirinin kendi görüntüsüyle kesişmesinden oluşan en az iki nokta oluşmasıdır. Bu, aynı zamanda alanın korunmasını gerektirir, böylece, görüntünün denkleminin  $x = f(y)$  olduğunun farzedilmesi gerekli değildir.

Öyle ya da böyle, bu kabulün yüksek boyutlarda gerekli olmadığı bilinmemektedir. Bu kabul yapılırsa, ispat aşağıdaki yolla yapılır.

Orijinal tor, faz uzayında alt katlı uzayı bir Lagranjiyendir. Difeomorfizm simplektiktir. Böylece, görüntü toru da Lagranjiyendir.  $(x - c)dy$  formu kapalıdır. Bu form, torda tek değerli düzgün fonksiyon  $f$  in tam diferansiyelidir. Difeomorfizm özdeşliğe benzer olduğundan ve herhangi bir kapalı çevre  $\gamma$  için:

$$\oint_{A\gamma} (x - c)dy = \oint_{A\gamma} xdy - \oint_{A\gamma} cdy = \oint_{\gamma} xdy - \oint_{A\gamma} cdy = c \oint_{\gamma} dy - c \oint_{A\gamma} dy = 0$$

Torun görüntüsüyle kesim noktaları,  $F$  fonksiyonunun kritik noktalarıdır (bunlarda  $dF = (x - c)dy = 0$  olur). Torun görüntüsünün tek-değerli izdüşümü şartından, tersine,  $F$  fonksiyonunun tüm kritik noktalarının, torla kesim noktaları olduğudur. Bu şartlarda, torda  $y$  lokal koordinatlar için alınabilir. Torun görüntüsüne  $x = c$  konduğunda bütün vektör teğetleri için  $dF$  sıfırdır.

$n$  boyutlu torda bir düzgün fonksiyonun en azından  $2^n$  kritik noktası vardır. Çokkatlılık gözönüne alınırca, bu en azından  $n + 1$  geometrik olarak farklılık gerektirir (örneğin, Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1967).

Tor en az  $2^n$  noktada kesişir ve en az  $n + 1$  geometrik olarak farklı nokta vardır.



Aynı kanıt, herhangi bir Lagranjiyen torun kendi görüntüsünü en az  $2^n$  noktada kestiğini tam olarak gösterir, (en azından  $n + 1$  geometrik olarak farklı nokta vardır). Bu kabule göre, orijinal tor ve görüntüsü  $y$  uzayında sırasıyla  $y = f(x)$  ve  $x = g(y)$  denklemleri ile verilen tek değerli izdüşümdür. Bu durumda bir önceki  $(x,y) \rightarrow (x - f(y), y)$  kanonik transformasyona indirgenir.

E. Tanımlanan sabit noktalara uygulamalar ve periyodik çözümler  
Şimdi, özdeşliğe benzer bir simplektik transformasyon gözönüne alınsın. Ayrıca, bu dinamikteki integrale edilebilir problemlerde ortaya çıkan özel bir form olsun. Örneğin,

$$A_0(x,y) = (x, y + \omega(x)), \quad \text{burada } \omega = \frac{\partial S}{\partial x} \text{ tir,}$$

$x \in \mathbb{R}^n$  iş değişkeni, mod  $y \in 2\pi\mathbb{T}^n$  açılmal koordinattır, Torda  $x = x_0$  da bütün frekansların aynı standartla ölçülebilir olduğu kabul edilsin,

$$\omega_i(x_0) = \frac{k_i}{N} 2\pi \quad k_i, N \text{ tamsayılar, } \omega(x_0) \neq 0$$

ve dejenere olmama şartı da

$$\det \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x_0} \neq 0$$

gerçekleşir.

TEOREM: Özdeşliğe benzer ve  $A_0$ 'a yeteri kadar yakın tor civarında  $x = x_0$  da  $N$  periyotlu en azından  $2^n$ ,  $\zeta$  ya sahiptir (böyle ki  $A^N = \zeta$  çokkatlılığı gözönüne alınarak).

İspat,  $4n$  boyutlu uzayın  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n)$  iki Lagranjiyen alt katlı uzayının  $(X = x, Y = y)$  diagonalı olan  $\Omega = dx \wedge dy - dX \wedge dY$ , ile kesişiminin incelenmesine ve  $A^N$  tasvirinin grafiğine indirgenebilir.

Mamafih tora doğrudan uygun bir fonksiyon oluşturmak kolaydır.

$A_0^N$ 'in tasviri

$(x,y) \rightarrow (x,y + \alpha(x))$ . Burada  $\alpha(x_0) = 0$ ,  $\det \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{x_0} \neq 0$

formundadır.

Tam fonksiyon teoremiyle  $A^N$  tasviri  $x = x_0$  tor civarında, tor yalnızca radyal doğrultuda  $((x,y) \rightarrow (X,Y))$  yer değiştirir ve  $x = f(y)$  formunda bir denkleme verilir: Görüntüsü  $x = g(y)$  aynı formda denkleme verilir. Bu notasyonla  $X(f(y),y) = g(y)$ ,  $Y(f(y),y) = y$ .

A özdeşliğe benzer olduğundan,  $A^N$ ,  $Xy + S(X,y)$  formunda elde edilen tek değerli global fonksiyondur. Burada  $S$ ,  $y$  değişkeninde  $2\pi$  periyotludur.

$F(y) = S(X(f(y),y))$  fonksiyonu torda  $y_k$  noktasında en azından  $2^n$  kritik noktaya sahiptir. Bütün  $\zeta_k = (f(y_k), y_k)$  noktaları  $A^N$  için sabittir.

$$dF = (x - X)dy + (Y - y)dX = (x - X)dy = (f(y) - g(y))dy$$

$dF|_{y_k} = 0$  olduğundan,  $f(y_k) = g(y_k)$  dir. Gösterildiği gibi,  $A^N \zeta_k = \zeta_k$  dir. Korunumlu sistemin kapalı yörüngeleri incelenirse :

**SONUÇ:**  $n$ - boyutlu torun parçalanmasında, tamamen aynı enerjili dejenere olmayan bir sistemin kapalı yörüngeleriyle dolu, pertürbe edilmiş sistemin en azından  $2^{n-1}$  kapalı yörüngesi (çokkatlılık gözönüne alınarak), pertürbasyon yeteri kadar küçükse, geometrik olarak farklı en azından  $n$  taneden oluşmuştur.

İspat, önceki teoreme  $(2n-2)$  boyutlu yüzey kesiti yardımıyla indirgenir. Önce  $y$  açısız koordinatları seçilmelidir. Öyle ki, tordaki pertürbe edilmemiş problemin kapalı yörüngeleri  $\dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n = 0$  denklemleri ile verilirler ve yüzey kesiti  $y_1 = 0$  ile tanımlanır.

İki serbestlik dereceli halde halkaya, Poincaré teoremi uygulanabilir (halka, iki boyutlu yüzey ile invaryant torun kesişmesinden oluşmuştur). Aşağıdaki sonucu elde edilir.



İki serbestlik dereceli, iki boyutlu invariyan tor sisteminin aralarındaki boşlukta eğer, torlardaki şartlı-periyodik hareketlerin frekansları oranı farklı ise, daima en azından iki kapalı faz yörüngesi vardır.

Bu yolla invariyan torların bulunduğu iki serbestlik dereceli bütün problemlerde birçok periyodik çözüm elde edilir (çevresi sınırlanmış 3 cisim problemi, kapalı jeodezik probleminde v.s...).

Tahmin edilir ki, kompakt faz uzayları ile "genel formun" Hamiltoniyen sistemlerinde, kapalı faz eğrileri yoğun küme oluşturur. Eğer bu doğru ise bu eğrilerin pek çoğunun kapalılığı periyotları son derece büyük olduğundan pek önemli değildir.

İkiden daha fazla serbestlik dereceli problemlere Poincaré yöntemlerinin uygulanmasına bir örnek olarak Birkhoff teoremi vardır. Birkhoff teorimine göre verilmiş genel formdaki lineer kararlı periyodik çözümlerine yakın sonsuz sayıda periyodik çözümler vardır.

İspatta, tasvir önce kendi normal formuna yaklaştırılır ve tasvirin sabit noktaları ile elde edilen fonksiyonun kritik noktaları arasındaki bağlantı kullanılır.

Diğer şeyler yanında periyodik çözümlerin bilinmesi, dinamikteki klasik olmayan birçok problemde ilk integrallerin olmamasını gösterir. İlk integrallerin varlığını engelleyen faz eğrilerinin komplike davranışı, kompütürle, yüzeyin kesiti faz eğrileri ile kesiştirilerek periyodik çözümlerin yardımı olmaksızın genellikle belirlenebilir.

Tek serbestlik dereceli halde tor daire ile temsil edilebilir. Gerçekte, yüksek mertebeden pertürbasyonlara bağlı olarak böyle daireler, yarısı eliptik, yarısı hiperbolik olmak üzere çift sayıda sabit noktalara



bölünürler. (Birkhoff, 1927) Poincaré (1912) tarafından beklendiği ve Danby (1970) tarafından elde edildiği gibi, hiperbolik noktadan çıkan yörüngeler düzensiz hareketler olarak bilinir.

KAYNAKLAR

- [1] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris (1892-1918).
- [2] J. Haag, *Oscillatory Motions*, Butterworth, Publ. (1962).
- [3] B. Bogolubov and V. A. Mitropol'sky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon and Breach (1961).
- [4] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York (1979).
- [5] S. Kuzovskiy, *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand (1963).
- [6] J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience, New York (1950).
- [7] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Chapter 20, Gordan, New York (1968).
- [8] V. Boguz and E. Mindler, *Hill's Equations Introduction*, New York, (1966).
- [9] J. P. Collet and J. P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser (1980).
- [10] P. L. Burdick and J. D. Faloutsos, *Numerical Analysis*, Third Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1985).
- [11] A. Mitrinović, *Mathematical Inequalities*, Department of Mathematics, Strasbourg, France (1970).
- [12] A. Mindler and Z. Gliboff, *Proc. Math. Phys. Soc., Egypt 31* (1961) 11.
- [13] A. V. Balits, *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 8 (1973) 313.
- [14] L. A. Moush, R. H. Rand, *Journal of Applied Mechanics* (1980), Vol. 47/645.
- [15] S. Kuzovskiy, Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Clarkson University (1980).
- [16] S. H. Nayfeh and E. Benabib, To appear in *J. Appl. Mech.* (1987).
- [17] J. Fenwick and J. J. Cole, *Chaotic and Bifurcation Phenomena and Nonlinear Dynamics*, Academic Press, New York (1985).

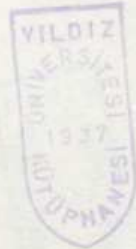


KAYNAKLAR

- [1] . H. Poincaré, Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Gauthier-Villars, Paris (1892-1918).
- [2] . J. Haag, Oscillatory Motions, Wadsworth. Publ. (1962).
- [3] . N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations, Gordon and Breach (1961).
- [4] . A. H. Nayfeh and D. T. Mook, Nonlinear Oscillations, Wiley, New York (1979).
- [5] . N. Minorsky, Nonlinear Oscillations, Van Nostrand (1962).
- [6] . J. J. Stoker, Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience, New York (1950).
- [7] . M. Abramowitz and I. Stegun; Handbook of Mathematical Functions, Chapter 20, Dover, New York (1985).
- [8] . W. Magnus and S. Winkler, Hill's Equations Interscience, New York, (1966).
- [9] . J. P. Collet and J. P. Eckmann, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhauser (1980).
- [10] . P. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis, Third Edition, PWS Publishers, Boston, Massachusetts (1985).
- [11] . A. Elnaggar These, Universite Luis Pasteur, Department de Mathematique, Strasbourg, France (1976).
- [12] . A. Elnaggar and T. Elbouhy, Proc. Math. Phys. Soc., Egypt 52 (1981) 11.
- [13] . J. H. Balbi, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 8 (1973) 313.
- [14] . L. A. Month, R. H. Rand, Journal of Applied Mechanics (1980), Vol. 47/645.
- [15] . G. Mahmoud, Thèse, Department of Mathematics and Computer Science, Clarkson University (1986).
- [16] . G. M. Mahmoud and T. Bountis, To appear in J. Appl. Mech. (1987)
- [17] . J. Kevorkian and J. d. Cole, "Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics", Academic Press, New York (1965).

- [18] . Kurt Magnus, Çevirenler : Fuat Pasin, Metin Gürgöze, "Titreşimler" İstanbul, (1978).
- [19] . N. W. McLachlan, "Theory and Application of Mathieu Functions", Dover Publications, Inc. New York (1964).
- [20] . E. S. Şuhubi, "Rijid Cisimler Dinamiği", İstanbul (1981).
- [21] . Morris W. Hirsh and Stephen Smale, "Differential Equation, Dinamical Systems and Linear Algebra", Academic Press, Inc., New York (1974).
- [22] . V. Arnold, Classical Mechanics, Berkeley, 1978.
- [23] . G. E. D. Giacaglia, "Perturbation Methods in Nonlinear Systems", Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1972).
- [24] . Julian D. Cole, "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Blaisdell Publishing Company, A. Division of Ginn and Company Waltham, Massachusetts, Toronto, London (1968).
- [25] . Bruno V. Schmitt, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 7, pp.199-205, Pergamon Press (1972), Printed in Great Britain.
- [26] . K. L. Liu and K. Young, J. Math. Phys. 27(2), February 1986, pp. 502-507.
- [27] . A. Aşkar, Methods in Applied Algebra and Analysis, Part III,(1980).
- [28] . Nayfeh, A. M. D. T. Mook, and D. W. Lobitz, Numerical-perturbation method for the nonlinear analysis of structural vibrations. AIAA3, 12, 1222-1228, 446, 447, 469 (1974).
- [29] . J. H. BALBI, Les Approximations Supérieures de La Théorie de La Synchronisation de Jules Maag. Thèse de 3e cycle, Besançon (Juin 1971).
- [30] . T. V. Davies and Eleanor M. James, "Nonlinear Differential Equations", University College of Wales, Aberystwyth Addison-Wesley series in Mathematics Publishing Company (1966).
- [31] . Gerard Looss, Daniel D. Joseph, "Elementary Stability and Bifurcation Theory", Springer-Verlag, New York, Heidelberg-Berlin (1980).
- [32] . Rudolph E. Langer, Nonlinear Problems, Proceedings of a Symposium Conducted by the Mathematics Research Center, United States Army. at the University of Wisconsin, Modison (1962).
- [33] . W. F. Ames, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, New York, Academic Press (1965).

- [34] . P. Hagedorn, Non-Linear Oscillations, Oxford V.p, Oxford (1982).
- [35] . L. CESARI, Functional analysis and periodic solutions of non Linear differential equations, Contributions to Differential Equations, Vol. 1, p.149, Wiley, New York (1963).
- [36] . S. SANSONE et R. CORTI, Non-Linear Differential Equations, Pergamon Press, New York (1964).
- [37] . J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields (Springer, Berlin, 1983).



### ÖZGEÇMİŞ

G. Füsun ALIŞVERİŞÇİ 1951 yılında Yozgat Çekerek'te doğdu. Orta öğrenimini Fatih Kız Lisesi'nde, yüksek öğrenimini İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik-Matematik Bölümü'nde yaptı. Fakülteden 1976 yılında mezun oldu. Aynı yıl Devlet Mühendislik Mimarlık Akademisi Vatan Mühendislik Yüksek Okulu'nda fizik laboratuvarında göreve başladı. 1979 yılında İstanbul Devlet Mühendislik Mimarlık Akademisi Makina Fakültesi Mekanik Anabilim Dalı uzman kadrosuna naklen tayin oldu. 1980 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimini bitirdi. 1987 yılında Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Bölümü Mekanik Anabilim Dalında Öğretim Görevlisi oldu. Hâlen aynı göreve devam etmektedir.



