

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sayımsal Problemlerinin Sınır İntegrali Metodu

Abdullah Yıldız  
Doktora Tezi

209  
67

YILDIZ ONIVERSITESI  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTOSU

2000/11/17

SAÇILMA PROBLEMLERİNİN SINIR İNTEGRALİ METODU  
VE FFT YORDAMI KULLANARAK ÇÖZÜLENMESİ

DOKTORA TEZİ  
ABDULLAH YILDIZ

İSTANBUL, 1986

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : ..... R 209  
Alındığı Yer : ..... 67  
Fen Bil. Bn. ....  
Tarih : ..... 3.4.1989  
Fatura : .....  
Fiatı : ..... 3000 TL  
Ayniyat No : ..... 1/4  
Kayıt No : ..... 45995  
UDC : ..... 517  
Ek : ..... 378.242



YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



SAÇILMA PROBLEMLERİNİN SINIR İNTEGRALİ METODU  
VE FFT YORDAMI KULLANARAK ÇÖZÜLENMESİ

Teşekkür,

Bu konu üzerindeki beni geliştirmeye yönelttiği, ilgi ve desteklerini  
esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Atilla AKKAR'a, tezimi yönlüten  
Sayın Doç.Dr.İsmail ÇAĞAL'a ve çalışmalarında çok değerli katkı ve  
desteklerini daima gösteren Sayın Hocam Prof.İbrahim KÖR'e,  
Doç.Yazar ÖZKAYA'ya ve diğer değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi  
buradan sunarım.



DOKTORA TEZİ

ABDULLAH YILDIZ

İSTANBUL, 1986

## İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA NO</u>
Özet/İngilizce Özet	III
Giriş	IV
Semboller	VI
C. Lineer Elastisite Denklemleri	1
D. Analitik Çözümler	3
E. Ayırık Fourier Dönüşümü, FFT ve Uygulamaları	7
E.1. Sürekli Ortamdan Ayırık Formla Çözüm	7
E.2. Ayırık Fourier Dönüşümünde Teorik Temelleri	12
E.2.1. Fourier Dönüşümü (Sınır Değerleri Yokken)	19
E.2.2. Hızlı Fourier Dönüşümü (Praktik Değerleri Yokken)	25
E.2.3. Sayısal Hata	33
F. Sonuçlar	35
G. Kaynaklar	35

Bu konu üzerinde beni çalışmaya yönelten, ilgi ve uyarılarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Atilla AŞKAR'a, tezimi yöneten Sayın Doç.Dr.Behiç ÇAĞAL'a ve çalışmalarımda çok yakın teşvik ve ilgilerini daima gördüğüm Sayın Hocam Prof.İhsan KOZ'a, Sayın Doç.Yaşar ÖZDEMİR'e ve emeği geçen arkadaşlara teşekkürü bir borç bilirim.

Abdullah YILDIZ

## İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA NO</u>
Özet/İngilizce özet	III
Giriş	IV
Semboller	VI
1. Lineer Elastisite Denklemi	1
2. Analitik Çözüm	3
3. Ayırık Fourier Dönüşümü, FFT ve Uygulamaları	7
3.1. Sürekli Ortamdan Ayırık Forma Geçiş	7
3.2. Ayırık Fourier Dönüşümünün Teorik Temelleri	12
3.3. Hızlı Fourier Dönüşümü (zaman değerleri bölünmesi)	19
3.4. Hızlı Fourier Dönüşümü (Frekans değerleri bölünmesi)	25
3.5. Ters Fourier Dönüşümü	28
4. Sınır İntegral Metodu ve Nümerik Çözüm	29
4.1. Sınırdaki İntegral Denklemleri	29
4.2. İntegral Denklemlerinin Çözümü	35
4.3. Sayısal Örnek	43
5. Sonuçlar	48
Sonuçlar ve eklere ait "İçindekiler" listesi sahife 48'dedir.	
6. Kaynaklar.	

## SUMMARY

The scattering of Steady-state anti-plane shear waves (SH waves) from cylindrical surface inclusion in an infinite medium is described by means of integral equations expressed in terms of displacement field.

A fixed inclusion in space, like a cavity or a rigid body with material constants different from the surrounding medium is taken as a scatterer.

The problem is solved with a numerical method called Boundary integral equation (BIEM) and also introducing Fast Fourier Transform (FFT) routine, as a new method which ensures the results from BIEM method. Two methods are compared and average of them are discussed.

## ÖZET

Sonsuz bir ortamda ; silindirik yüzeylerden, zamandan bağımsız SH Dalgalarının saçılımı ; yerdeğişim alanının integral denklemler halinde ifadesiyle, tarif edilebilmektedir.

Malzeme Sabitleri içinde buldukları ortamdan farklı olan cisimler veya boşluklar, saçıcı olarak ele alınıp incelenmiştir.

Problem sınır integralleri metodu ile çözülmüş ; analitik çözümlü bilinen bazı haller için Hızlı Fourier dönüşümü kullanımı, ikinci bir metod olarak ilk metod ile kıyaslanmıştır.

## GİRİŞ

Bilindiği gibi günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde, sayısal yöntemlerin rolü giderek artmaktadır. "Sayısal çözümleme", bilgisayar kullanımı ile hızla gelişmiş; matematikçi, fizikçi ve mühendislerin önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Zamanımızda bu alanda yapılan araştırmalar ve uygulamalara esas teşkil eden teorik çalışmalar, bir taraftan yöntemin hızlı yakınsamasını, diğer taraftan bilgisayar zamanını minimize etmeyi amaçlamaktadır.

Bu açıdan bakıldığında, mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan "Sonlu Elemanlar" ve "Sonlu Farklar" gibi yöntemlere göre "Sınır İntegral Yöntemi"-Boundary Integral Equation Method (BIEM)-in önemli avantajlara sahip olduğu görülür.

Dalga yayılması, pozitif ilimlerin birçok dalında ortaya çıkan, son derece önemli bir konudur. Bu konunun problemleri, fiziksel yapı bakımından çeşitli farklılıklar göstermesine rağmen, matematik formülasyon bakımından büyük bir benzerliğe sahiptir.

Çalışmamızın konumunu belirlemek için, dalga yayılma problemlerinin, bazı ayırıcı karakterlerine göre bir sınıflamasını yapalım : Geçici (transient) ve harmonik olarak zamana bağlı (time harmonic) dalga problemleri, iç ve dış bölge problemleri, homojen ve homojen olmayan problemler, iki ve üç boyutlu olma hali, değişik sınır koşullu (Dirichlet, Neumann, Robin ve benzeri) problemler, yayılma ortamının fiziksel yapısındaki değişiklik problemleri, saçılma (scattering) problemleri sayılabilir.

Bu çalışmamızda ele alıp inceleyeceğimiz saçılma problemini, şöyle tanımlayabiliriz : Sınırsız homojen bir ortamdaki bir dalga, sabit hızla, belirli doğrultuda yayılsın. Ortamdaki bir engel, dalganın yayılma yönünü değiştirirse, bu engelin yüzeyi bir dalga kaynağı gibi davranır. Dalganın, yörüngesini değiştirmesi (diffractin) ve engelden dalganın yayılması da, saçılma problemi olarak, mekanik, fizik,



uygulamalı matematik ve mühendislikte çok önemli bir problem olarak karşımıza çıkar. Dalganın yansımaları, sismoloji ve petrol arama teknolojilerinde bilgi taşıyıcı olarak kullanılmaktadır. Bu yansıma, dalgayı saçan engelin boyutu ve şekli hakkında güvenilir bilgiler vermektedir.

Dalga yayılması problemlerinin çözümünde ; konunun teorisinin geliştirilmesi, analitik çözümlerin araştırılması ve sayısal yöntemlerin kullanılması gibi, üç değişik yoldaki gelişmeler birbirini izlemektedir.

Bilindiği gibi dalga denklemlerinin, sınır integrali cinsinden ifadesi, oldukça eskiye dayanmaktadır. (Kirchhoff-1883). Bundan sonra, Huygens prensibinin matematiksel yorumunu kullanarak çözümler yapılmış (Baker ve Copson-1939) ve nihayet bunu temel çözüm (Green fonksiyonu) kullanarak analitik çözümlerin bulunması takip etmiştir. (Morse ve Feshbach-1953).

Bilgisayar kullanarak Sınır İntegrali Yöntemi ile ilk çalışmalar Friedman ve Shaw-1962, Banaugh ve Goldsmith 1963, Jaswon, Symm-1963, Mitra-1973, Pao ve Mow-1973 Kleinman ve Roach-1974, Hutchinson-1978 tarafından yapılmış olup, kendi sahalarında, bu yöntemi başarıyla kullanmışlardır.

Teorik açıdan Sınır İntegral Yöntemi, Huygens prensibinin matematiksel yorumuna dayanan Normal Modlar Yöntemi'ne göre, daha avantajlıdır. Çok yaygın olarak kullanılan Değişkenlerine Ayırma Yöntemi'de, bilindiği gibi basit bir geometrik yapı istemektedir. Halbuki Sınır İntegrali Yöntemi'nde, böyle bir kısıtlama söz konusu değildir. Ayrıca, bu yöntemde ortaya çıkan tekil sınır integrallerin, bilgisayarlarla kolayca çözümlenebilmeleri, bu yöntemde daha çok ilgi göstermemesi sağlamaktadır.

Bu çalışmada, önce Sınır İntegrali Yöntemi kullanılarak, saçılma problemi incelenmiştir. Çalışmamızın sonraki bölümünde ise ; zamana bağlılığı Fourier dönüşümüne uygun olan ve Fourier dönüşümünün kullanıldığı her yerde kullanılabilen bir yöntem, şöyle uygulanmıştır :

Önce, hızlı Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transform-FFT) yardımıyla, verilen bir dalga fonksiyonunun Fourier katsayıları bulunmuş ve daha sonra ise, bu katsayılarla ağırlıklandırılmış birim harmonik dalgaların, analitik çözümleri toplanmıştır. Böylece, birim harmonik dalga için analitik çözümlerin bilinmesi halinde, genel bir dalga için saçılma problemi, sayısal olarak hesaplanmıştır.

## SEMBOLLER

- U : Yer değiştirme (displacement)
- $U^t$  : Toplam yerdeğişim
- $U^s$  : Saęılma yerdeğişimi
- $U^i$  : Gelen dalga yerdeğişimi
- $U_n$  : Normal türev
- D : Bölge (domen)
- S : Sınır (baunday)
- $\delta$  : Dirac Delta fonksiyonu
- x,y : Karteziyen koordinatlar
- G : Green fonksiyonu
- $H_{ij}$  : Element etkileşim matrisi elemanları
- $G_{ij}$  : Element etkileşim matrisi elemanları
- $\xi$  : Yerel koordinat
- $h_j$  : j.inci sınır eleman uzunluğu
- n : Toplam nokta sayısı
- $\phi_i(\xi)$  : Baz fonksiyonları
- $W_k$  : Gauss ağırlık sayıları
- r : Yer vektörü
- r' : Sınır yer vektörü
- k : Dalga sayısı
- q : Kütle yoęunluęu
- $\lambda, \mu$  : Lamé sabitleri
- $\sigma, t$  : Gerilme (stress)
- $\lambda$  : Dalga boyu
- c : Dalga yayılma hızı
- $H_0, H_1$  : Sıfırncı ve birinci mertebeden Henkel fonksiyonları
- T : Zaman örnekleri artımı (saniye cinsinden)
- $t_b$  : Zaman bölgesi
- $f_b$  : Frekans bölgesi
- $\Delta f$  : Frekans artım miktarı
- $f_h$  : Maksimum frekans
- N : Örnek sayısı
- $\omega$  : Aęısal frekans
- $X_n$  :  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$
- $x_k$  :  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Ayrık fonksiyon değerleri



## 1. BÖLÜM

Linear Elastisite Denklemi :

Düzlemsel olmayan (antiplane) halde Navier denkleminin skaler dalga denklemine indirgenmesi :

Burada Yerdeğiştirme cinsinden, lineerleştirilmiş, iç kuvvetlerin ihmal edildiği, hareket denklemi, homojen, izotropik, elastik bir ortam için,

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mu \nabla^2 \mathbf{U} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

dir.

Burada  $\lambda$ ,  $\mu$  Lamé sabitleri,  $\rho$  ortamın kütle yoğunluğudur.

Düzlemsel olmayan Şekil değiştirme (strain) altında  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$  dir. Bundan dolayı dalga sadece S-tipi "rotational" dalgadır.

İki boyutlu uzay için gerilme (stress) tensör bileşenleri  $x, y, z$  koordinatlarından birinden bağımsızdır.  $U$  yer değişim vektörünün  $u_x, u_y, u_z$  bileşenlerinden sadece  $u_z$  bileşeni sıfırdan farklıdır. Diğerleri sıfırdır. Bunu  $U$  ile gösterirsek (4.1) denklemi,

$$\nabla^2 U(x, y, t) = 1/c^2 \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

denklemine indirgenir. Burada  $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  dalga yayılma hızıdır.

Düzlemsel olmayan şekil değiştirme (Anti plane strain) halinde "stress tensör"ün  $\sigma_{xz}$  ve  $\sigma_{yz}$  sıfır olmayan iki bileşenidir.

Hooke kanununa göre bunlar,

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.3)$$

dir.

$\omega$  açısal frekansı ile, harmonik bir dalga (Time Harmonic) için,

$$U(x, y, t) = U(x, y, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\sigma(x, y, t) = \sigma(x, y, \omega) e^{-i\omega t} \quad (1.4)$$

zaman ve uzay koordinatlarının ayrılması ile (4.2) denklemi

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (1.5)$$

formuna indirgenir.

Burada  $k = \omega/c$  dalga sayısıdır.

(4.5) denklemi, Helmholtz skaler dalga denklemi olarak bilinir.

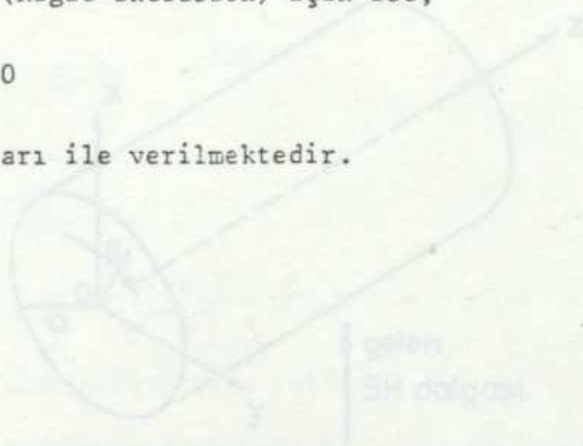
Sonsuz bir ortamda yayılan dalganın boşluktan (cavity) saçılması,

$$\partial U / \partial n = 0 \quad (1.6)$$

katı cisim (Rigit inclusion) için ise,

$$U = 0 \quad (1.7)$$

sınır şartları ile verilmektedir.



Şekil-1: SH dalgası saçılma problemi için geometrik yapı.

$r$  ve  $\theta$  koordinatları doğrultusunda yarıdağılımı yapılır.  $z$  doğrultusunda

$$U = A \exp i(kz - \omega t) \quad (2.1)$$

dir.

Burada  $\omega = kc$  ve  $k$  sabittir.

Dalganın  $c$  hızı ile  $\omega = kc$  frekansı ile yayıldığı kabul edilir. Silindirin yarıçapı  $a$  ise  $z$  yönünde olan dalganın (2.1) ifadesiyle yazılabilir. Silindirin boşluğunda yarıdağılımı yapılır ve  $r$  ve  $\theta$  yönünde yapılır.  $z$  doğrultusunda ise

$$U = U(r, \theta, z) \quad (2.2)$$

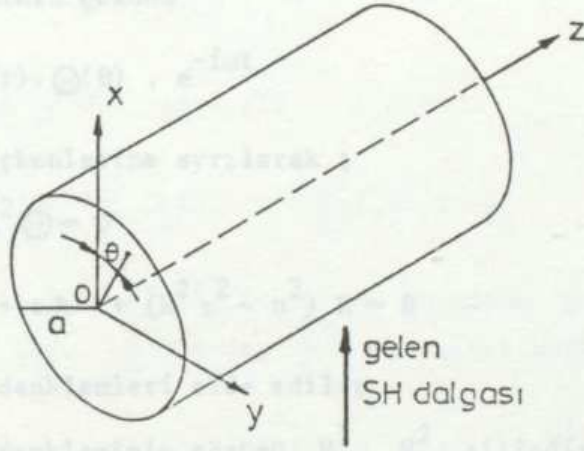
## 2. BÖLÜM

Analitik Çözüm :

Dairesel bir silindirden SH dalgalarının saçılması :

Bu bölümde, skaler bir SH dalgasının katı dairesel bir silindirden saçılma probleminin, özdeğer fonksiyonları vasıtasıyla, seri formunda analitik çözümünü vereceğiz.

Bir harmonik SH dalgası sonsuz uzaktan x eksenini boyunca dairesel bir silindire gelsin (Şekil-5.1)



Şekil-5-1 SH dalgası saçılma problemi için geometrik yapı.

x ve y koordinatları doğrultusunda yerdeğişim sıfır olup, z doğrultusunda

$$U = A \cdot \exp i(kx - \omega t) \quad (2.1)$$

dir.

Burada  $\omega = kc$  ve A sabittir.

Dalganın c sabit hızı ile ve  $\omega/2\pi$  frekansı ile yayıldığını varsayalım. Silindirden saçılan dalga, yine SH tipinden olup düzlemsel olmayan (antiplane) formdadır. Silindirik koordinatlarda yerdeğişim ve gerilme ifadeleri; r ve  $\theta$  boyunca sıfır, z doğrultusunda ise

$$U_z = U(r, \theta, t) \quad (2.2)$$

$$t_{rz} = \mu \frac{\partial U}{\partial r}, \quad t_{\theta z} = \left( \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (2.3)$$

olup, diğer gerilme bileşenleri sıfırdır.

Yerdeğişim (displacement), bölgede Helmholtz skaler dalga denklemini, katı hareketsiz silindir için  $r = a$  sınırında  $U(r, \theta, t) = 0$  sınır şartını, boşluk için ise  $\partial U / \partial r = 0$  sınır şartını sağlayacaktır.

Burada  $U$  toplam yerdeğişim olup gelen ve saçılan dalgaların toplamıdır.

$$U^t = U^i + U^s$$

(5.1) denkleminin çözümü

$$U = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.4)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılarak ;

$$\Theta'' + n^2 \Theta = 0 \quad (2.5)$$

$$r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (2.6)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir.

(5.6) Bessel denkleminin çözümü  $H_n^1$ ,  $H_n^2$  silindirik fonksiyonlarıdır. Fakat  $r \rightarrow \infty$  için dalganın ıraksıyacağını gözönünde tutarak,  $H_n^1$  Henkel fonksiyonunu çözüm olarak kabul edeceğiz.  $\Theta$  periyodik olup ( $2\pi$  periyotlu),  $n$  tam sayıdır.

Buna göre temel çözüm, seri formuyla

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^1(kr) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (2.7)$$

dır.

Burada  $A_n$  ler keyfi sabitlerdir. (5.6) denkleminde sınır şartlarının sağlanması kaydıyla,  $A_n$  keyfi sabitlerini belirleyelim.

Gelen harmonik dalganın  $e^{ikx}$  formunda olduğunu kabul edersek; bunun seri açılımı ;

$$\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta \quad (2.8)$$

dir. Burada  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_n = 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  dir. Buna göre, toplam yerdeğiştirme ve gerilme şöyle olur :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \epsilon_n i^n J_n(kr) + A_n H_n^1(kr) \right] \text{Cos}n\theta e^{i\omega t} \quad (2,9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \mu \left( \frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \epsilon_n i^n \left[ n J_n(kr) - kr J_{n-1}(kr) \right] - A_n \left[ n H_n^1(kr) - kr H_{n-1}^1(kr) \right] \right\} \cdot \text{Cos}n\theta \cdot e^{-i\omega t} \quad (2,10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\mu \left( \frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left[ \epsilon_n i^n J_n(kr) + A_n H_n^1(kr) \right] \text{Sinn}\theta e^{-i\omega t} \quad (2,11)$$

$r = a$  sınırında  $U = 0$  şartıyla

$$A_n = -\epsilon_n i^n J_n(ka) / H_n^1(ka) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2,12)$$

bulunur. Bunu (5.10), (5.11) de yerine koyarsak genel çözümü buluruz. Boşluk halinde ise,  $r = a$  da,  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$  sınır şartıyla

$$A_n = -\epsilon_n i^n \left[ n J_n(ka) - ka J_{n+1}(ka) \right] / \left[ n H_n^1(ka) - ka H_{n+1}^1(ka) \right] \quad (2,13)$$

ifadesi elde edilir. Bunu (5.10 ve 5.11) denklemlerinde yerine koyarak genel çözümü buluruz. (1)

Böylece,  $e^{i(kx - \omega t)}$  formunda gelen harmonik dalgalar için analitik çözümler bulunmuş olur.

Acaba genel bir dalga fonksiyonu için problemin çözümünü bulabilir miyiz ? Dalga denkleminin lineerliği, süperpozisyon ilkesini uygulamamıza müsaade eder. Gelen dalganın, herhangi bir sürekli  $f(x, t)$  formunda genel bir fonksiyon olması halinde, harmonik bileşenlerinin (sinüzoidal bileşenlerinin)-her bir bileşenin Fourier katsayılı genliklerde harmonikleri olacağına göre-herbiri yukarıdaki analitik





### 3. BÖLÜM

#### AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde sürekli fourier dönüşümünün ayrıklaştırılması ve bu işin ustaca yapıldığı FFT (Fast Fourier Transform) algoritması anlatılacaktır.

#### 3.1. Sürekli Bir Fonksiyonun Ayrık Fourier Dönüşümü :

$y = x(t)$  sürekli fonksiyonunun fourier dönüşümü,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.1.1)$$

olarak tarif edilir. Yukarıdaki integralin yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu dönüşüm,  $t$  zamanı göstermek üzere, zaman bölgesindeki fonksiyonu, frekans bölgesindeki  $\omega$  frekansının sürekli bir fonksiyonuna dönüştürür. Nümerik metod kullanmak için  $x(t)$  sürekli fonksiyonunu, sonlu sayıda değerle temsil etmeliyiz. Bu değerler dizisine,  $x(t)$  nin örneklenmesi denir. Sürekli integrali dikdörtgen kuralına göre nümerik hale sokalım. Buna göre,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T \cdot x(kT) e^{-i\omega kT} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.1.2)$$

dir. Burada  $x(t)$ ,  $t \in [kT, (k+1)T]$  için sabit olarak yorumlanmaktadır. Toplama, genelde sonsuz bir zaman aralığındadır. Fakat sayısal hesap için bunu, büyük bir hataya meydan vermeden sonlu almak zorundayız. Pratikte  $t$  zamanı sıfırdan başladığı için,  $x(t)$  fonksiyonunun yaklaşık dönüşüm değeri,

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} T \cdot x(t_k) e^{-i\omega t_k} \quad (3.1.3)$$

şeklinde hesaplanır. Burada  $t_k = kT$  dir. ( $k \in \mathbb{Z}$ ) Bunun gerçek değerlerden fazla uzaklaşmaması,  $T$  zamanındaki artım adımı küçültülerek ve  $N$  örnekleme dizisinin eleman sayısı çoğaltılarak temin edilir.

(3.1.3) ayrık Fourier dönüşümü bu haliyle  $\omega$  frekans argümanının sürekli bir fonksiyonudur.

Örnekleme sayısını  $N = 60$  alarak,  $T = 0.1$  olmak üzere,  $e^{-t}$  fonksiyonunda sürekli Fourier dönüşümüyle ayrık Fourier dönüşümünü kıyaslayalım.

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{59} T \cdot e^{-kT} e^{-i\omega T \cdot k} = \frac{T(1 - e^{-60T} e^{-i60\omega T})}{1 - e^{-T} e^{-i\omega T}} \quad (3.1.4)$$

$\omega = 1$  için bu değer  $X(1) = 0.7 < -44$  'dir. Sürekli değeri ise

$$X(1) = \frac{1}{1 + i\omega} \Big|_{\omega = 1} = 0.707 < -45^\circ \text{ 'dir.} \quad (3.1.5)$$

Ayrık dönüşümün sürekli dönüşüme bu derece yakın olması, yapılan iş için bir güvencedir.

(3.1.3) denklemi frekans bölgesinde periyodik ( $\omega = 2\pi/T$  periyotlu) ve sürekli dir. Benzer şekilde sürekli ters Fourier Dönüşümü :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.1.5)$$

olup,

$$x(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-m}^{m-1} X(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.1.6)$$

ifadesi ile ayrık hale getirilir.  $\Delta\omega$  frekans için artım adımı ve  $\omega_n = n \cdot \Delta\omega$  dır.

$X(\omega)$  fonksiyonu sonlu destekli (Band-limited) olması halinde, sürekli dönüşümün ayrıklaştırılması büyük bir hata oluşturmaz.

(3.1.6) denkleminde dönüşüm fonksiyonunun periyodik (periyot ;  $2\pi/\Delta\omega$  dır.) ve sürekli olduğunu da belirtelim.

(3.1.3 ve 3.1.6) denklemlerinde N ayrı nokta, zaman ve frekans fonksiyonlarının dönüşümleri arasında iyi-tanımlılığı (well-defined) görmek için aşağıdaki değişiklikleri yapalım :

$m = N/2$  alalım.  $X(\omega_n)$  nin N periyotlu oluşundan dolayı,

$$x(t_k) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} X(\omega_n) e^{i\omega_n t_k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1.7)$$

dir. Böylece,

$$X(\omega_n) = T \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-i\omega_n t_k} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1.8)$$

$$x(t_k) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} X(\omega_n) e^{i\omega_n t_k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

ifadeleri, ayrı Fourier dönüşüm çifti olarak elde edilecektir. Zaman artım adımı T ile frekans artım adımı  $\Delta \omega$  arasındaki ilişki :  $x(t)$  sürekli fonksiyonundan  $x(kT)$  ayrı değerleri ile elde edilen örnekleme dizisi, T saniye aralıklarla N değerden oluşmaktadır. Halbuki Fourier dönüşümü ile  $2\pi/T$  periyotlu bir frekans fonksiyonu oluşmaktadır. Öyle ise N tane frekans değeri bir periyodu tarar. O halde,

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{N \cdot T} \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\Delta \omega}{2\pi} = \frac{1}{NT} \quad \text{ve} \quad \omega_n t_k = nk \cdot \frac{2\pi}{N} \quad (3.1.9')$$

olur.

Notasyonları sadeleştirmek için,

$$x_k = x(t_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1.10)$$

$$X_n = X(\omega_n) \quad n = 0, \dots, N-1$$

olmak üzere

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{i2\pi}{N} n.k} ; x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{i2\pi}{N} nk} \quad (3.1.11)$$

ifadelerini elde ederiz.

Bu dönüşüm çiftini, matris-vektör notasyonu ile şöyle ifade ederiz.

$$W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}} \quad (3.1.12)$$

denirse (3.1.11) denklemleri

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{nk} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1.13)$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n W_N^{-nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

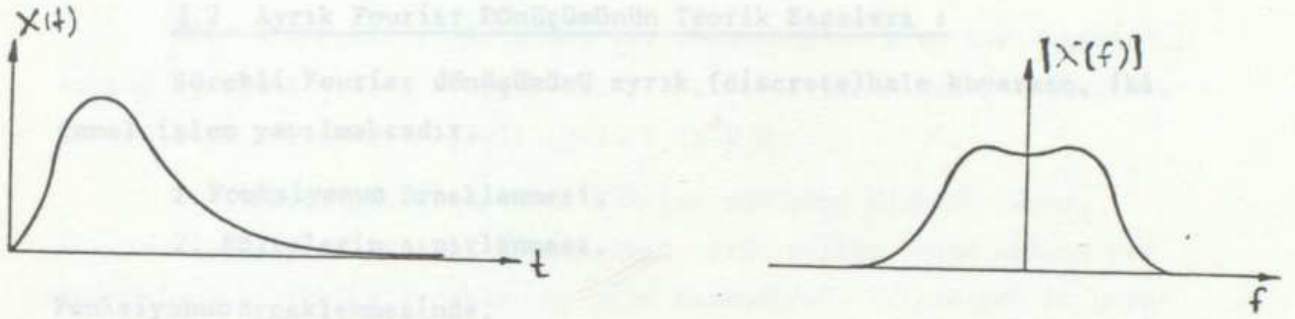
haline gelir ki bunu matris notasyonu ile  $\underline{X} = W \underline{x}$  şeklinde gösteririz. Burada

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} W_N^{00}, W_N^{0,1}, \dots, W_N^{0(N-1)} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)0}, \dots, W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

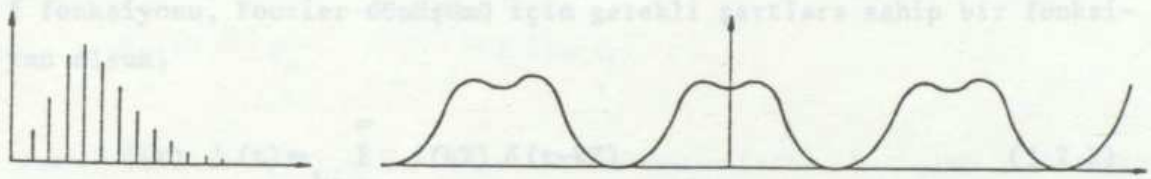
$$W_N^m = W_N^{nN+m}$$

olduğundan ; W matrisinde N tane farklı değer vardır.

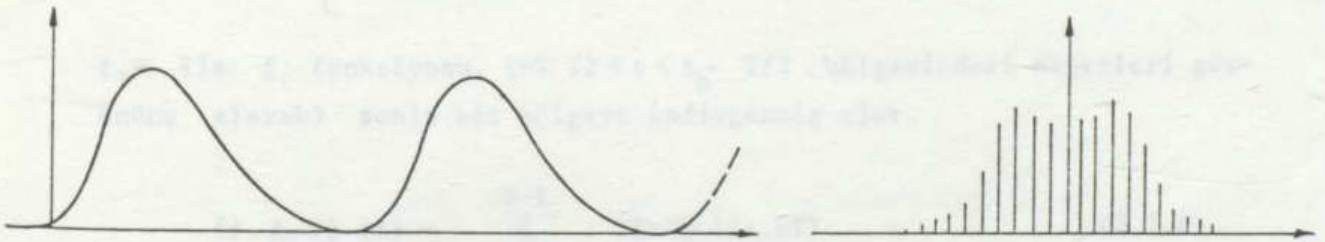
Sürekli ve ayrık Fourier dönüşümleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekillerle gösterebiliriz.



Şekil-3.1.1 Sürekli dönüşüm.



Şekil-3.1.2 Sonlu destekli  $x(t)$  fonksiyonunun eşit aralıklı  $N$  tane noktadaki örnek değerlerinin ayırık Fourier dönüşümü ile sürekli ve periyodik hale gelmesi.



Şekil-3.1.3 Ters dönüşüm : frekans fonksiyonunun örneklenmesiyle sürekli ve periyodik hale dönüşen zaman fonksiyonunu sergilemektedir.

Sayısal hesaplamalara uygun hale getirmek için yaptığımız bu işlemlerde, hem Fourier hem de ters Fourier dönüşümünün iyi tanımlı (well defined) olmasını garantileyecek teorik esasları aşağıda vereceğiz.

### 3.2 Ayırık Fourier Dönüşümünün Teorik Esasları :

Sürekli Fourier dönüşümünü ayırık (discrete) hale koyarken, iki temel işlem yapılmaktadır.

1. Fonksiyonun örnekleme,
2. Bölgelerin sınırlandırılması.

Fonksiyonun örnekleme,

$$\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \quad (3.2.1)$$

serisini T aralıklarla örnekleme fonksiyonu olarak kullanabiliriz. f fonksiyonu, Fourier dönüşümü için gerekli şartlara sahip bir fonksiyon olsun.

$$f(t) \cdot \Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t-kT) \quad (3.2.2)$$

Çarpımı ile Delta Dirac genelleştirilmiş fonksiyonunun özelliğinden dolayı, f fonksiyonunun ayırık değerleri oluşturulur.

$$K(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < t_b - \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Aksi halde} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

f.K ile f fonksiyonu,  $(-T/2 < t < t_b - T/2)$  bölgesindeki değerleri göz önüne alarak) sonlu bir bölgeye indirgenmiş olur.

$$(f \cdot \Delta \cdot K)(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t-kT) \quad (3.2.4)$$

çarpımı ile zaman bölgesindeki ayırıklaştırma işlemi tamamlanırken, bu çarpımın frekans bölgesindeki etkilerini araştıralım.

Bir çarpımın Fourier dönüşümü, bunların ayrı ayrı Fourier dönüşümlerinin "convolution"una eşittir. Bu ise frekans bölgesinde periyodikliğe sebep olacaktır.

$\Delta(t)$  nin Fourier dönüşümü,  $1/T$  aralıklarla yine bir "impuls" serisi olduğuna göre ;  $f$  nin ayrık ve fakat periyodik Fourier dönüşümünü elde etmiş olacağız. Şekil (3.2.2).(3.2.3,

$K(x)$  kesme fonksiyonunun Fourier dönüşümü (Şekil- .2.4),  $\text{Sinx}/x$  fonksiyonudur. Bu ise yukarıda elde edilen forma ikinci bir "convolution" ile kabarcıklı bir yapı kazandırır. İstenmeyen bu durumun etkisini azaltmak için başka kesme fonksiyonları, problemin yapısına göre seçilmektedir.

Frekans bölgesinde periyodik hale konulan fonksiyonumuz, sürekli formunu koruduğundan, bölgeyi ayrıklaştırmak için

$$\Delta_1(t) = t_b \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t-rt_b)$$

fonksiyonu ile (3.2.4) ün "convolution"unu alalım. Bu işlem, daha önce elde ettiğimiz  $[0,NT]$  aralığındaki ayrık değerleri periyodik hale koyacaktır. Böylece bu son işlemle, her iki bölgede de  $N$  tane değerden oluşmuş periyodik ve ayrık değerler elde edilmiş olacaktır. Yani,

$$(f \cdot \Delta \cdot k)(t) * \Delta_1(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(kT) \delta(t-kT) * t_b \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t-rt_b) \quad (3.2.5)$$

veya açık olarak

$$= \dots t_b \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t-t_b-kT) - t_b \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t-Tk) -$$

$$t_b \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t+t_b-kT) - \dots$$

$t_b$  periyotlu bir ifade elde ederiz. Bunu  $\tilde{f}(t)$  ile gösterelim.

$$\tilde{f}(t) = t_b \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t-kT-rt_b) \quad (3.2.6)$$

Halbuki, periyodik bir fonksiyonun Fourier dönüşümü, eşit aralıklı "impuls"lardır. Yani,

$$F(n/t_b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - nf_b) \quad (3.2.7)$$

dir.

Burada  $f_b = 1/t_b$  dir.  $\alpha_n$  ise

$$\alpha_n = \frac{1}{t_b} \int_{-T/2}^{t_b - T/2} f(t) e^{-i2\pi n t / t_b} dt \quad n = 0 \pm 1 \pm 2.. \quad (3.2.8)$$

dir.

Ve bu bir periyot üzerinde integre edilirse,

$$\alpha_n = \frac{1}{t_b} \int_{-T/2}^{t_b - T/2} f(t) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t - kT - r t_b) e^{-i2\pi n t / t_b} dt \quad (3.2.9)$$

( $r=0$  için)

$$\alpha_n = \int_{-T/2}^{t_b - T/2} f(t) \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t - kT) e^{-i2\pi n t / t_b} dt \quad (3.2.10)$$

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \int_{-T/2}^{t_b - T/2} e^{-i2\pi n t / t_b} \delta(t - kT) dt$$

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2\pi k n T / t_b} ; t_b = N.T \quad (3.2.11)$$

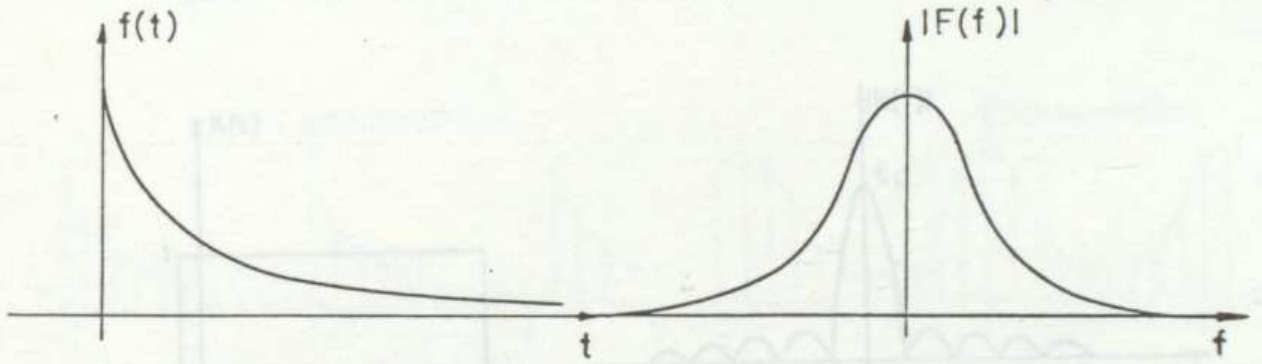
dir.



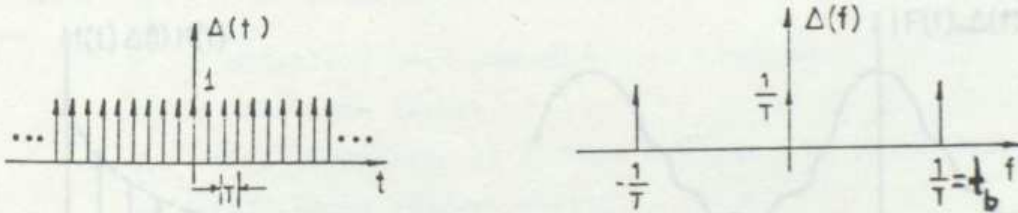
$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \quad (3.2.12)$$

$$F\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}$$

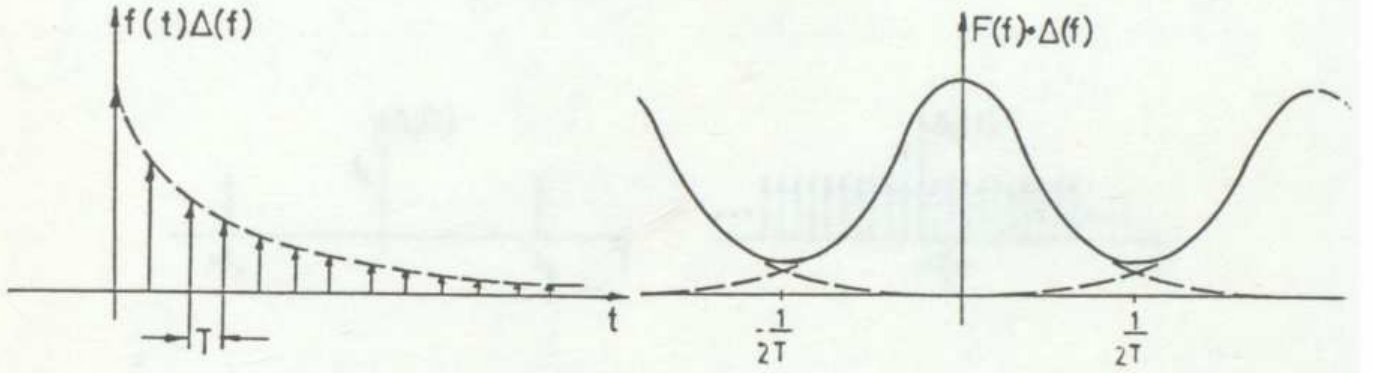
olur. Bu ifade, N farklı değeri periyodik olarak tekrarlamaktadır. (n ve n+N aynı değerlerdir).



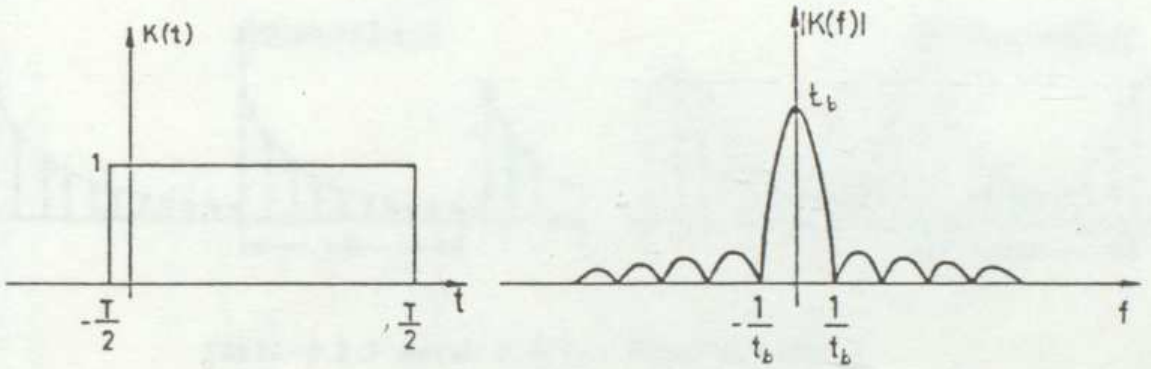
Şekil-3.2.1 Sürekli Fourier dönüşümü



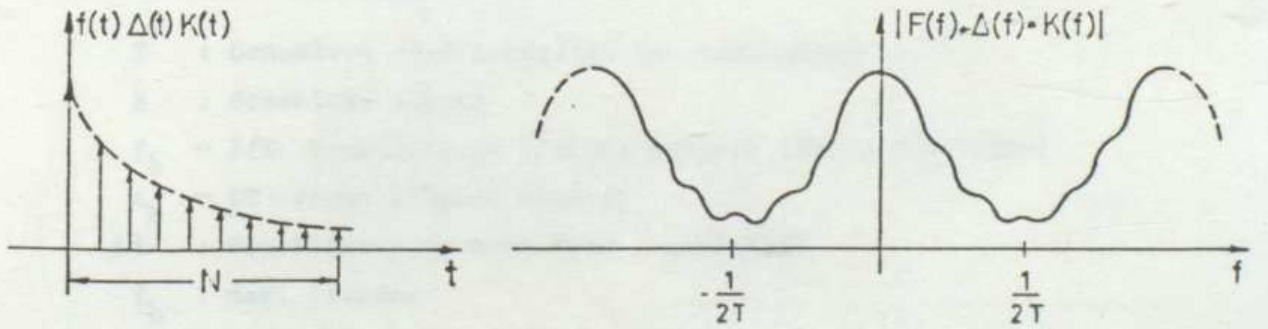
Şekil-3.2.2 Örnekleme fonksiyonunun dönüşümü



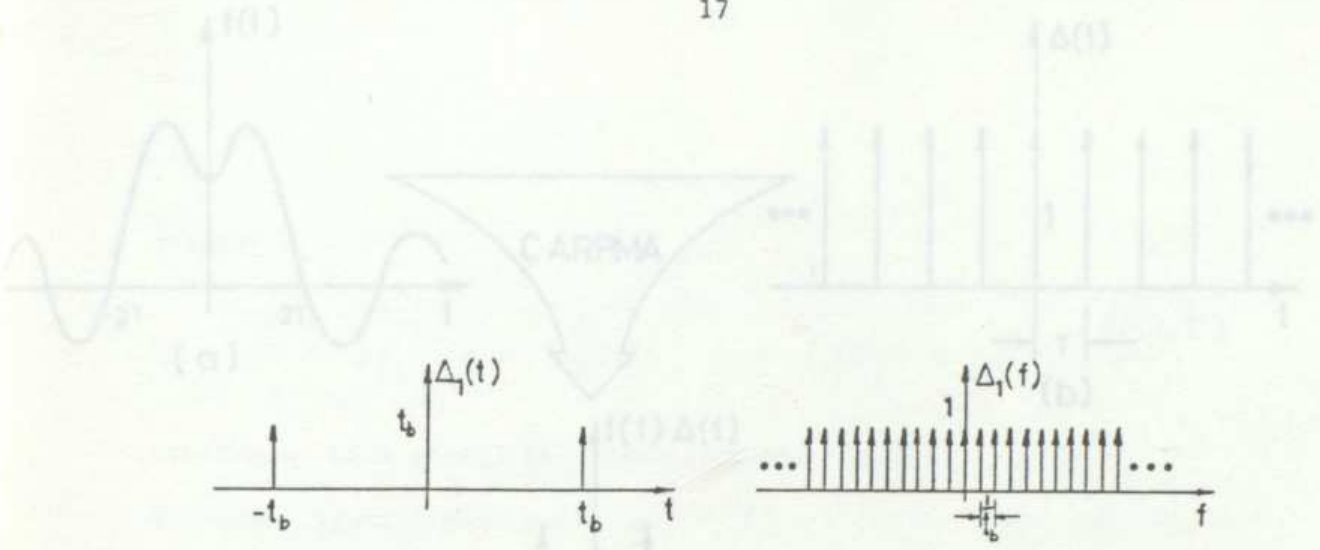
Şekil-3.2.3 Ayırık değerlerin sürekli ve periyodik dönüşümü.



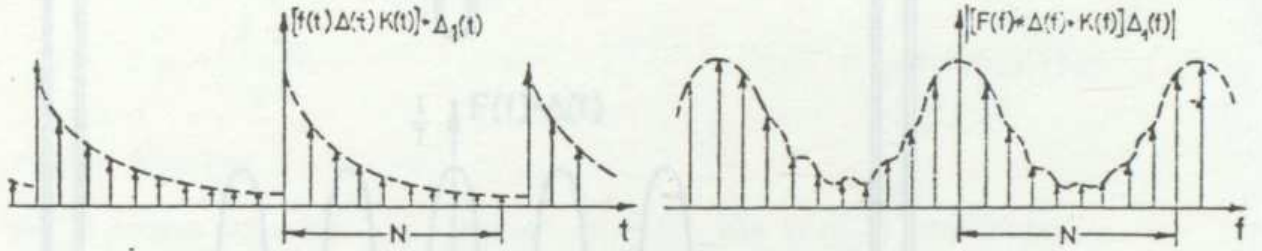
Şekil-3.2.4 Kesme fonksiyonu ve dönüşümü.



Şekil-3.2.5 Ayırık değerlerin Fourier dönüşümü.



Şekil-3.2.6 Ayrık frekans örnekleme fonksiyonu dönüşümü



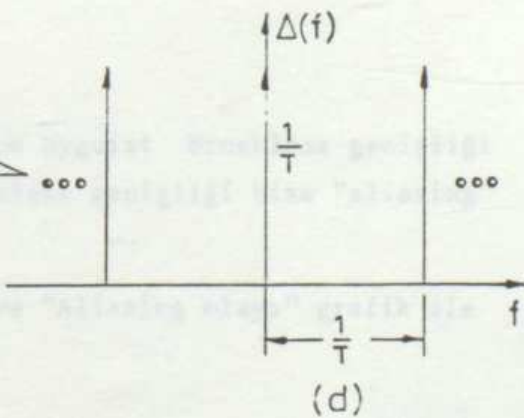
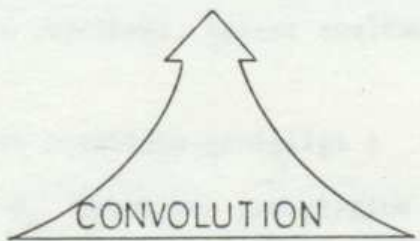
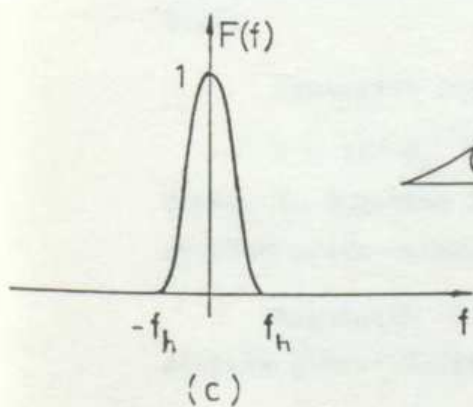
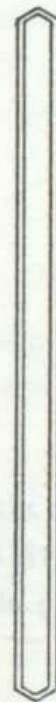
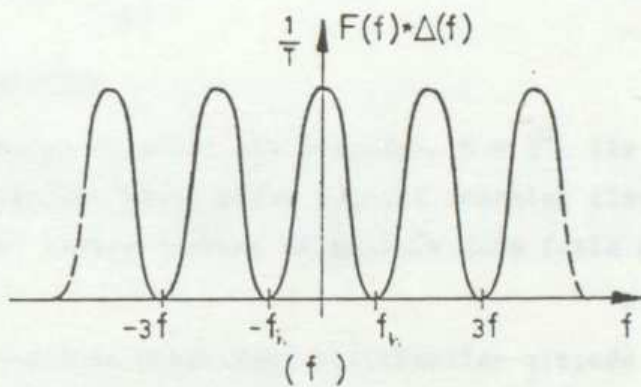
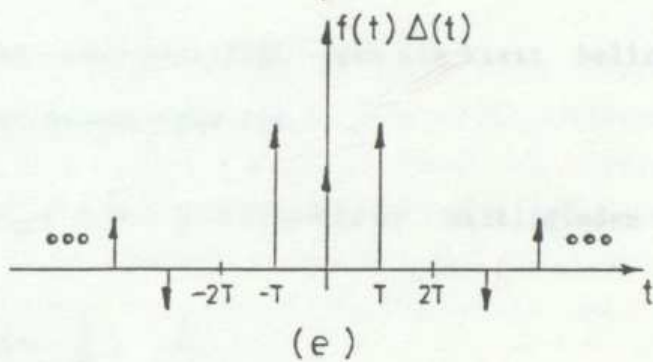
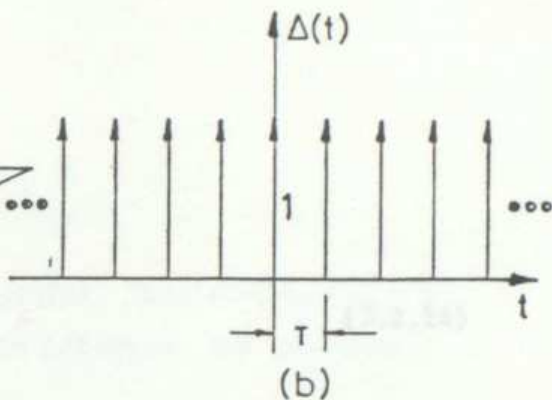
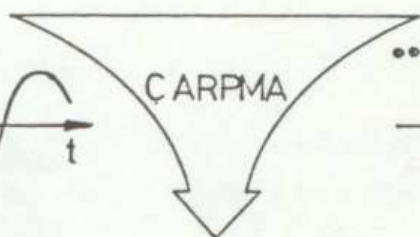
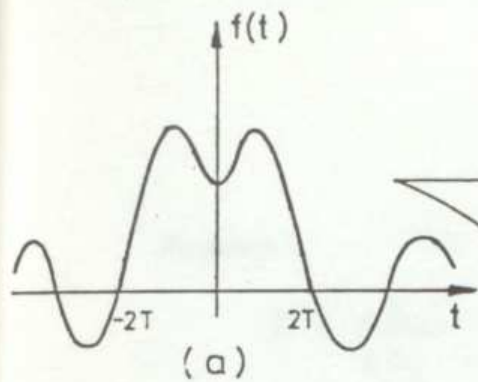
Şekil-3.2.7 Ayrık Fourier dönüşüm çifti.

Şimdi zaman ve frekans bölgesindeki argumanlar arasındaki ilişkiyi, hatayı azaltacak tarzda belirleyebilmek için bazı kısıtlamalar yapalım. Kullandığımız argumanlar :

- $T$  : örnekleme adım genişliği (sn cinsinden)
- $N$  : örnekleme sayısı
- $f_b = 1/T$  : örneklenecek frekans bölgesi (Hertz cinsinden)
- $t_b = NT$  : zaman bölgesi aralığı
- $\Delta f$  : örneklemede frekans adım genişliği
- $f_h$  : max. frekans

sembollerinden ibarettir.

$$f_b = 1/T = 2 f_h \quad \text{olmalıdır. (14)}$$



Buradan

$$T \leq \frac{1}{2 f_h} \quad (3.2.14)$$

örnekleme adım genişliği için ilk kısıt belirtilir.

Örnekleme sayısı için ise,

$$t_b = N.T = 2.\pi / \Delta\omega = 1 / \Delta f \quad \text{eşitliğinden}$$

$$N = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\Delta f}$$

$$N \geq \frac{2 f_h}{\Delta f} \quad (3.2.15)$$

olduğu görülür.

Bu, N sayısı için bir alt sınırdır.  $N = 2^m$  ile kısıtlı problemler için istenilen kadar sıfır değerli noktalar ilave edilir. Bu ise dönüşüme sadece frekans bölgesinde daha fazla noktada çözüm kazandırır.

Pratikte yukarıdaki kısıtlamalar altında ; T zaman örnekleme adım genişliği çok daha küçük ve N örnekleme sayısının da, alt limitin çok üstünde tutulması, hatayı azaltmak bakımından tercih edilmelidir.

Nyquistik örnekleme genişliği :

$T = 1/2 f_h$  Örnekleme genişliğine Nyquist örnekleme genişliği denir. Bu değerden büyük seçilmiş örnekleme genişliği bize "aliasing" denilen olayı verecektir.

Nyquistik örnekleme genişliği ve "Aliasing olayı" grafik ile aşağıda gösterilmiştir.

### 3.3 FFT ALGORİTMASI :

Ayrık hale konulmuş Fourier dönüşümünü, "Cooley-Tukey metodu" (FFT), çok daha az sayıda işlemle, hem hatayı ve hem de zamanı kısaltarak hesaplar.

Ayrık Fourier dönüşümü (DFT)  $n \cdot (n-1)$  kompleks toplama ve  $n^2$  kompleks çarpma gerektirirken, FFT metodu ortalama  $n \log_2 n$  işlem yaparak ve daha az hata ile aynı işi yapar. FFT Yöntemi uygulanan birçok değişik metodlara rağmen, temelde veri (data) değerlerini parçalayarak daha az sayıda elemanla ayrık dönüşüme indirgeyip, sonra da bunların birleştirilmesi esasına dayanır. Bu parçalanma,

- 1- Zaman değerlerinin bölünmesi
- 2- Frekans değerlerinin bölünmesi

şeklinde iki esas üzerine kurulur. Kolay anlaşılması bakımından  $N$  nokta sayısını ;  $N = 2^k$  olarak sınırlayalım. ( $k$  pozitif tam sayı)

#### 3.3.1. Zaman Değerlerinin Bölünmesi

$N$  tane  $x$ -zaman değerini,  $N/2$  lik çift  $a_k = x_{2k}$  ve  $N/2$  lik tek indisli  $x_{2k+1} = b_k$  değerlerine bölelim.  $k = 0, 1, \dots, N/2-1$  dir.

Buna göre ( .2.12) ifadesi,

$$X_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k} W_N^{2nk} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k+1} W_N^{n(2k+1)} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.1)$$

halini alır.

$$W_N = e^{\frac{-i2\pi}{N}} \text{ olduğuna göre } W_N^2 = W_{N/2} \text{ olur.}$$

Böylece,

$$X_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_k W_{N/2}^{nk} + W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} b_k W_{N/2}^{nk} \quad (3.3.2)$$

$$X_n = A_n + B_n W_N^n \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

haline girer. Buradaki  $A_n$  ve  $B_n$  ler  $\frac{N}{2}$  periyotlu olup sıra ile

$$A_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_k W_{N/2}^{nk}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} b_k W_{N/2}^{nk}$$

bağıntıları ile  $a_k$  ve  $b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ) değerleri için ayrık Fourier dönüşümüdür.

$$\left(\frac{N}{2} + n\right) \quad W_N^n = -W_N^n \quad \text{olduğu göz önünde tutulursa,}$$

$$x_n = A_n + W_N^n B_n \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.3.3)$$

$$x_{\left(\frac{N}{2} + n\right)} = A_n - W_N^n B_n \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.3.4)$$

değerleriyle  $N$  nokta dönüşümü elde edilmiş olur. Kısaca söylemek gerekirse; verilen  $N$  nokta tek ve çift indislerine göre ikiye bölünüyor. Biz  $N$  nokta yerine, iki tane  $N/2$  nokta D.F.T. yapıyoruz ve sonra da  $N$  nokta dönüşümünü (3.3.3) bağıntıları yardımıyla hesaplayabiliyoruz.

Acaba yarılanmış daha az sayıda elemanlı dizilerin dönüşümü, işlem sayısı bakımından bize ne kazandırır?  $N$  nokta dönüşümü yerine  $N/2$  nokta dönüşümü, bizi sırf kompleks çarpma işleminde

$$N^2 - \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{3N^2}{4} \quad \text{işlemden kurtarmış oluyor.}$$

Yarılanmış noktaların dönüşümlerinin, (3.3.3) denklemleri vasıtasıyla birleştirilmesi fikrini bundan sonra da devam ettirelim.

$$\begin{aligned}
 c_k &= a_{2k} = X_{4k} \\
 d_k &= a_{2k+1} = X_{4k+2} \\
 e_k &= b_{2k+1} = X_{4k+1} \\
 f_k &= b_{2k+2} = X_{4k+3}
 \end{aligned}
 \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1
 \quad (3.3.4)$$

(3.3.4) dizileri için,

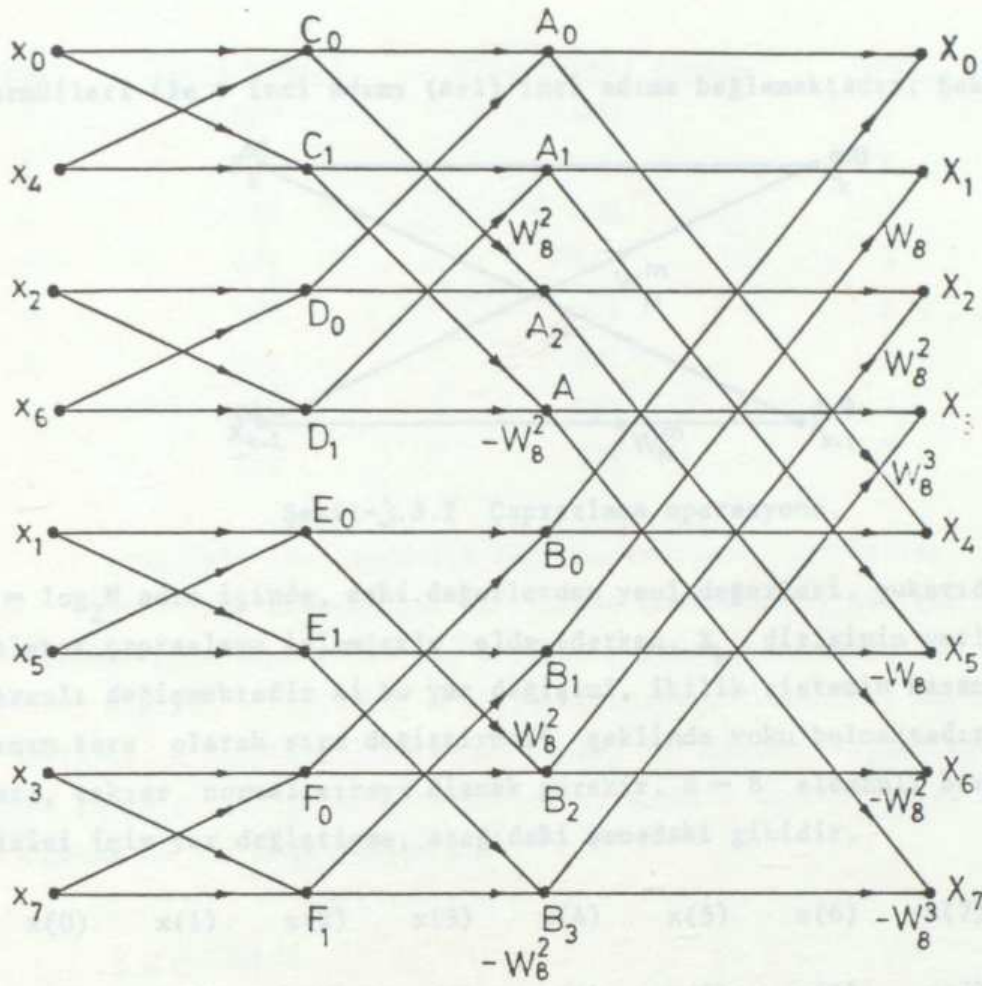
$$\begin{aligned}
 A_n &= C_n + W_N^{2n} D_n \\
 A_{n+\frac{N}{4}} &= C_n - W_N^{2n} D_n \quad n = 0, 1, \dots, N/4-1 \\
 B_n &= E_n + W_N^{2n} F_n
 \end{aligned}
 \quad (3.3.5)$$

$$B_{N/4+n} = E_n - W_N^{2n} F_n$$

değerleri ile  $N/2$  nokta dönüşümleri  $A_n$  ve  $B_n$  ler hesaplanır.

Bu işleme, iki noktanın ayrık dönüşümüne ulaşıncaya kadar devam edilir. Bu son dönüşüm ise, sadece toplama işleminden ibarettir.





Şekil-6.3.1 Ayrık dönüşümün şematik gösterilişi.

#### FFT'de Temel İşlemler :

FFT hesabında üç esas işlem vardır :

- 1- Kelebek çaprazlama operasyonu diyebileceğimiz bir işlem dizisi,
- 2- Dizinin normal sırasının bozulması ve bunun yeniden düzenlenmesi işlemi,
- 3-  $W_N^k$  Kompleks ifadesinin hesaplanması işlemi

Birinci işlem, FFT metodunun temel işlemidir.

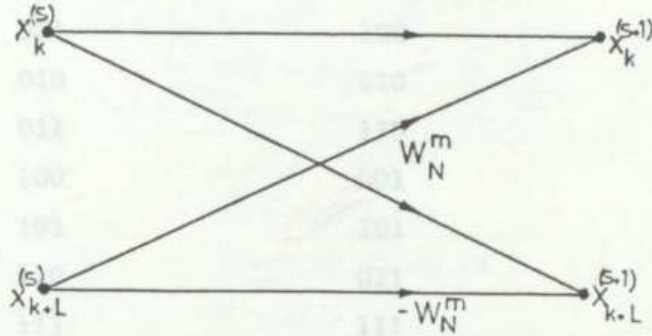
Bu işlem,

$$X_k^{(s+1)} = X_k^{(s)} + W_N^m X_{k+1}^{(s)}$$

(3.3.6)

$$X_{k+1}^{s+1} = X_k^{(s)} - W_N^m X_{k+1}^{(s)}$$

formülleri ile  $s$  inci adımı  $(s+1)$  inci adıma bağlamaktadır. Şekil-3.3.2.



Şekil-3.3.2 Çaprazlama operasyonu.

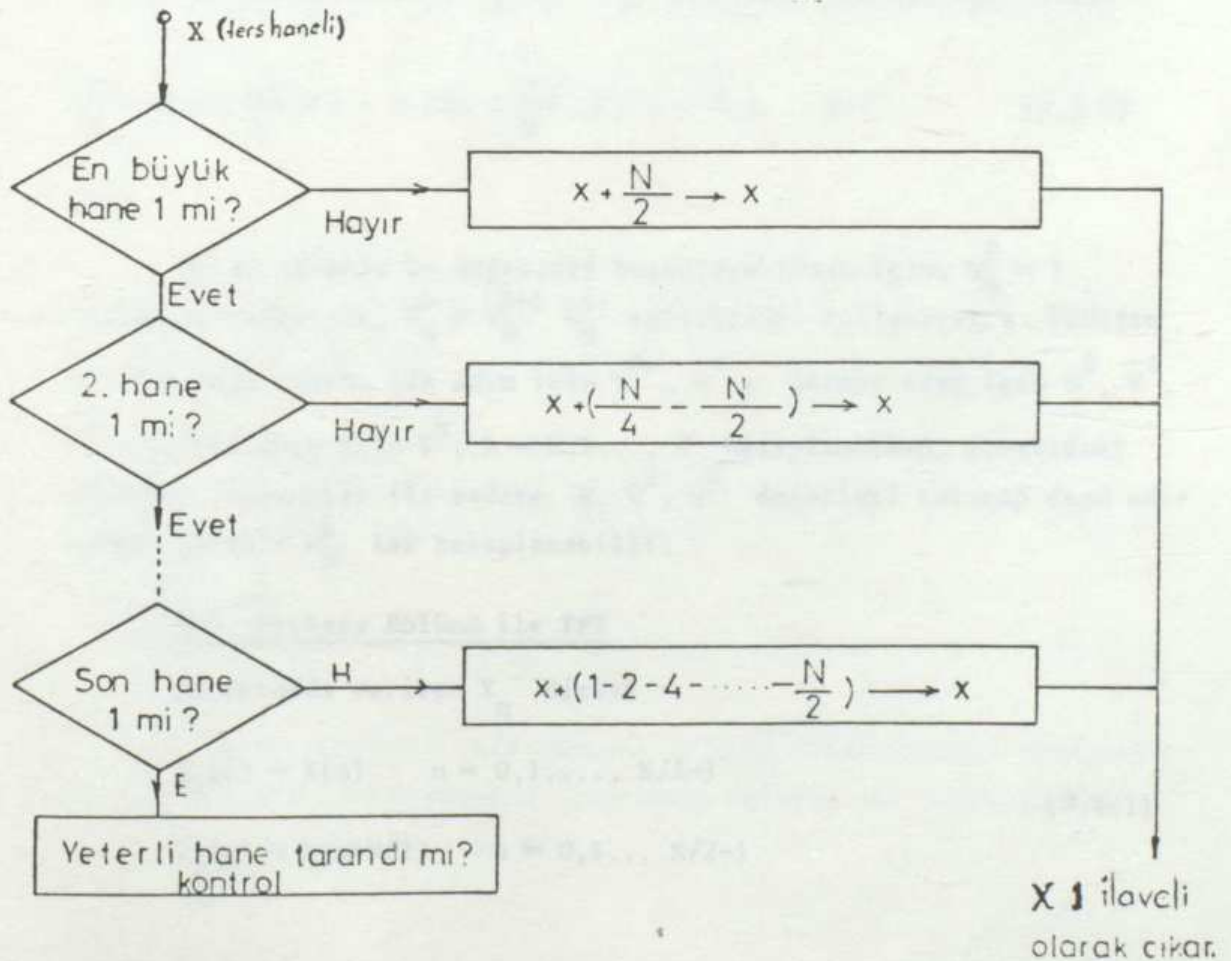
$r = \log_2 N$  adım içinde, eski değerlerden yeni değerleri, yukarıdaki kelebek çaprazlama işlemlerle elde ederken,  $X_k$  dizisinin yerleri devamlı değişmektedir ki bu yer değişimi, ikilik sistemin basamaklarının ters olarak sıra değiştirmesi şeklinde vuku bulmaktadır. Bunları, tekrar normal sıraya dizmek gerekir.  $N = 8$  elemanlı bir  $X_n$  dizisi için yer değiştirme, aşağıdaki şemadaki gibidir.

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$
$x(0)$	$x(4)$	$x(2)$	$x(6)$	$x(1)$	$x(5)$	$x(3)$	$x(7)$

Bu değiştirme işlemi, pratik olarak şöyle yapılır : Önce indis, ikilik sayı sistemiyle temsil edilir. Sonra bu temsilin en büyük basamak değerleri ile en küçük basamak değerleri sırayla Ters haneli formda yer değiştirilir. Böylece elde edilen yeni ikili sistemin gösterdiği sayı, aranan indistir.

Index	İkili temsil	Ters haneli temsil	Index
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Aşağıdaki akış şeması, X (ters haneli sistemde) sayılarını sırayla elde etme operasyonunu, en az işlemle mükemmel bir şekilde yapmaktadır. Bu şemaya göre yapılanlar bir Fortran program parçası içinde verilmiştir. Burada yapılan işlemleri, N nokta sayısının, ikinin bir kuvveti olmasına borçluyuz. N nin keyfi bir sayı olması halinde, bu yapılan işlemler, daha karmaşık bir durum arz etmektedir. Bununla ilgili olarak bir Fortran programı, ek 3.2 a da verilmiştir.



```

M = 3
N = 2M
NV2 = N/2
NMI = N-1
J = 1
DO 7 I = 1, NMI
  IF (I.GE.J) GO TO 5
  T = A(J)
  A(J) = A(I)
  A(I) = T
5 K = NV2
6 IF (K.GE.J) GO TO 7
  J = J-K
  K = K/2
  GO TO 6
7 J = J+K

```

FFT metodunun son önemli işlemi ( $W_N^k$ ) kompleks değerlerinin hesabı :

$$W_N^k = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.7)$$

dır.

En az işlemle bu değerleri hesaplayabilmek için,  $W_N^0 = 1$  başlangıç değeriyle,  $W_N^k = W_N^{k-L} W_N^L$  eşitliğini kullanacağız. Örneğin  $N = 8$  olduğu zaman, ilk adım için  $W^0, W^4$ ; ikinci adım için  $W^0, W^4, W^6$ ; üçüncü adım için  $W^k$ ;  $k = 0, 1, \dots, 7$  hesaplanırken, yukarıdaki rekürans bağıntısı ile sadece  $W, W^2, W^4$  değerleri bulunup depo edilerek gerekli  $W_N^k$  lar hesaplanabilir.

#### 3.4 ~~6.4~~ Frekans Bölümü ile FFT

Bu metotta verilen  $X_n$  dizisi

$$X_1(n) = X(n) \quad n = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (3.4.1)$$

$$X_2(n) = X(n+N/2) \quad n = 0, 1, \dots, N/2-1$$

olacak şekilde ortadan ikiye bölünür. Bu bölünme ile dönüşüm formülü :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.2)$$

ve

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_N^{(n - \frac{N}{2})k}$$

ve

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + e^{-ik\pi} x_2(n)] W_N^{nk} \quad (3.4.3)$$

şekline girer. Bundan sonra frekans değerlerini tek ve çift olarak ayırarak,

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_{N/2}^{nk} \quad (3.4.4)$$

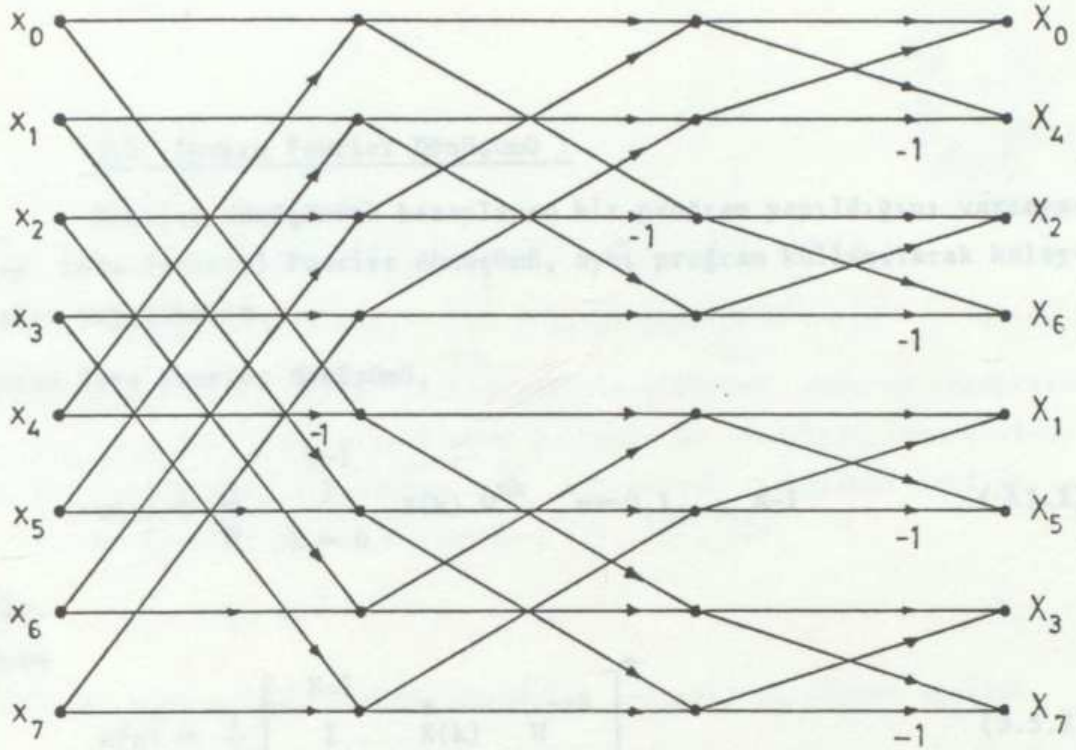
$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) - x_2(n)] W_{N/2}^{nk} \quad (3.4.5)$$

bulunur.

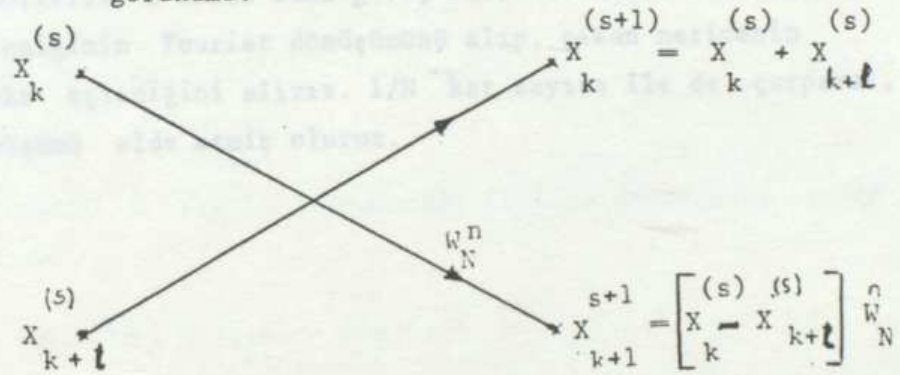
$$f(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.4.6)$$

$$h(n) = [x_1(n) - x_2(n)] W_N^k \quad n = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (3.4.7)$$

dersek,  $N$  nokta dönüşümü  $N/2$  noktalı  $f_n$ ,  $h_n$  değerlerinin dönüşümüne indirgenmiş olur. Bu frekansın yarılama işlemi, iki noktanın dönüşümüne ulaşıncaya kadar devam eder.



Şekil-6.4.1 8 nokta için frekans bölümü dönüşümünün şematik görünümü.



Şekil-3.4.2 Frekans bölümü dönüşümü için kelebek çaprazlama işlemi.

Zaman ve frekans yarıma metodları, işlem sayısı bakımından aynı olmasına rağmen, kelebek çaprazlama operasyonu bakımından tamamen farklıdır. Önemli bir fark da, data dizisinin sıralanmasında ortaya çıkmaktadır. Zaman bölünmesi metodunda başlangıç dizisinin sırası değişirken, frekans bölünmesi metodunda sonuç dizisi sıra değiştirmektedir. Bu değişimler, yukarıda verilen program ile kolayca yapılır.

### 3.5. İvers Fourier Dönüşümü :

Fourier dönüşümünü hesaplayan bir program yapıldığını varsayalım. Ters (invers) Fourier dönüşümü, aynı program kullanılarak kolaylıkla yapılabilir.

Ayrık Ters Fourier dönüşümü,

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{nk} \quad n=0,1,\dots, N-1 \quad (3.5.1)$$

dir.

Bunu

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} \right]^* \quad (3.5.2)$$

şeklinde yazabiliriz. O halde buna göre,  $X(k)$  frekans dizisinin kompleks eşleniğinin Fourier dönüşümünü alıp, çıkan neticenin tekrar kompleks eşleniğini alırız.  $1/N$  kat sayısı ile de çarparak, istenilen dönüşümü elde etmiş oluruz.



#### 4. BÖLÜM

##### 4.1. Sınır İntegrali Denklemlerinin Çıkartılması :

Sınırdaki  $U^t = 0$  veya  $\frac{\partial U^t}{\partial n} = 0$ , bölgede  $\nabla^2 U^T + kU^T = 0$  ifadelerini sağlayan sınır değer problemlerinin çözümünü, sınırda integrallere indirgeyeceğiz. Genel olarak  $LU = \phi$  operatör denklemi ile verilen bu tip problemler, ekoperatör  $L^*$  kullanılarak aşağıdaki şekilde sınır integrallerine dönüştürülür. (2), (6), (9).

$$L^*G = \delta(r-r') \quad (4.1.1)$$

Singular denkleminin çözümü, ağırlıklı integral metodunun ağırlık fonksiyonu olarak seçilirse ;

$$(LU - \phi, G) = 0 \quad (4.1.3)$$

den

$$(LU, G) = (\phi, G) \quad (4.1.4)$$

elde edilir.

(4.1.1) denkleminin  $U$  ile iç çarpımından (4.1.3) denklemini taraf tarafa çıkarırsak,

$$(LU, G) - (U, L^*G) = (\phi, G) - \delta(r-r') U \quad (4.1.5)$$

elde ederiz.

$U \cdot \delta(r-r') = U(r)$  olduğuna göre ;

$$(LU, G) - (U, L^*G) = U(r) \quad (4.1.6)$$

elde edilir.

Bizim problemimizde  $\phi = 0$  olduğundan ; (4.1.6) ifadesinin sınırda integral terimlerini, Green ikinci özdeşliğini kullanarak kolayca elde edebiliriz. Operatörümüz "Self adjoint" olduğundan, (4.1.4) 'ün sol yanı ;

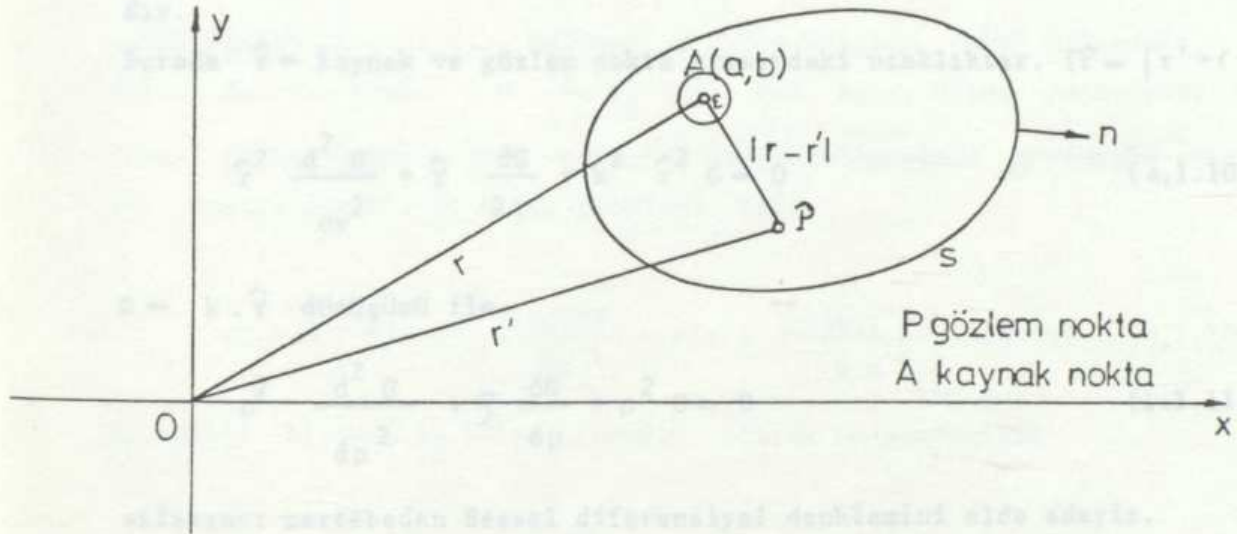


$$\iint_D (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dD \quad (4.1.7)$$

şekindedir. Buna göre,

$$\iint_D (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dD = \int_S (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}) ds \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Burada  $\frac{\partial}{\partial n}$  operatörü bölgenin S sınırında dik doğrultuda normal türevi operatörüdür.



Şekil-7.1.1 Sınır integral formülasyonu için geometrik yapı.

(4.1.1) operatör denkleminde, Delta Dirac Genelleştirilmiş fonksiyonunun etki özelliğini kullanarak, bölgenin sınırı üzerinde tekil integ-ralleri (Cauchy temel değeri anlamında) hesaplayarak, U(P) (P gözlem noktasındaki çözüm) elde edilir. Yani,

$$U(P) = P.V. \iint_D (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}) ds \quad (4.1.9)$$

olur.

Şimdi sınırda integral formuyla, çözüme imkan veren ek operatörün tekil çözümünü (temel çözümü) bulalım.

$L^* = -\nabla^2 - k^2$  ek operatörü için  $L^*U = \delta(r-r')$  denklemini silindirik koordinatlara dönüştürerek çözelim.  $r \neq r'$  için homojen denklemi hemen çözebiliriz. Bundan sonra bulunan çözümün,  $r = r'$  için tekil hali sağlamasını isteriz.

Buna göre  $r \neq r'$  için

$$-\frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{dr} \left( \hat{r} \cdot \frac{dG}{dr} \right) - k^2 G = 0 \quad (4.1.10)$$

dır.

Burada  $\hat{r}$  = kaynak ve gözlem nokta arasındaki uzaklıktır. ( $\hat{r} = |r' - r|$ )

$$\hat{r}^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + \hat{r} \frac{dG}{dr} + k^2 \hat{r}^2 G = 0 \quad (4.1.10)$$

$\rho = k \cdot \hat{r}$  dönüşümü ile

$$\rho^2 \frac{d^2 G}{d\rho^2} + \rho \frac{dG}{d\rho} + \rho^2 G = 0 \quad (4.1.11)$$

sıfırıncı mertebeden Bessel diferensiyel denklemini elde ederiz.

Bu ise bize  $J_0(k\hat{r})$ ,  $Y_0(k\hat{r})$  lineer bağımsız iki çözüm verecektir. veya

$$H_0^1(k\hat{r}) = J_0(k\hat{r}) + iY_0(k\hat{r}); H_0^2(k\hat{r}) = J_0(k\hat{r}) - iY_0(k\hat{r}) \quad (4.1.12)$$

Henkel fonksiyonları çözümdür.

Asimtotik davranışının uygunluğu nedeniyle

$G = A H_0^1(k\hat{r})$  seçerek, A keyfi sabitini belirlemek üzere,  $r \rightarrow 0$  tekil durumunu kullanacağız. G ifadesinde,  $Y_0(k\hat{r})$  fonksiyonu logaritmik bir tekilliğe sahip olup,

$$r \rightarrow 0 \text{ için } H_0^1(k\hat{r}) \approx \frac{2i}{\pi} \ln(k\hat{r}) \quad (4.1.13)$$

dır.

Tekil nokta civarında  $\epsilon$  yarı çaplı bir bölge üzerinde  $H_0^1(k\hat{r})$  yerine

$\frac{2i}{\pi} \ln(k\hat{r})$  olarak (7.1.1) denklemini integre edelim.

$$-\int_D \nabla^2 G \, dD - k^2 \int_{D^\epsilon} G \, dD = \int_{D^\epsilon} \delta(r-r') \, dD \quad (4.1.14)$$

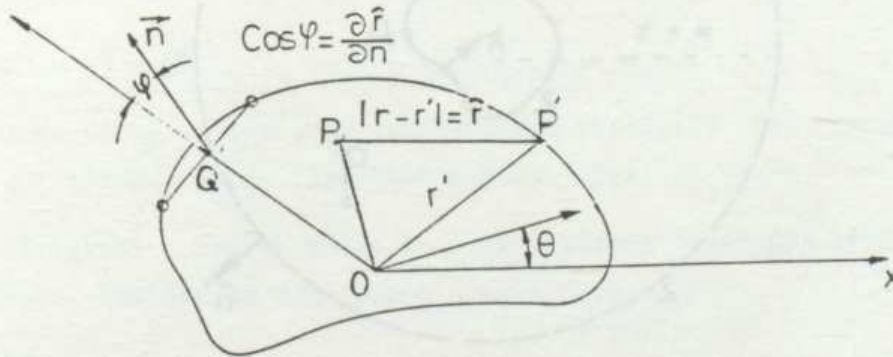
Bu ifadelerden, sağ tarafın 1'e eşit olduğunu, birinci tarafın Green özdeşliğinden  $-\int_S \frac{\partial U}{\partial n} \, dS$  sınır integraline eşit olduğunu ve son olarak  $o(\epsilon^2 \ln \epsilon)$  mertebesindeki ikinci integralin  $\epsilon \rightarrow 0$  için sıfır olduğunu gözönüne alarak,

$$\int_{S^\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n} \, dS = \int_{S^\epsilon} A \left( \frac{-2i}{\pi} \right) \frac{k}{kr} \, dS = 1 \quad (4.1.15)$$

eşitliğinden  $A = -1/4i$  bulunur. O halde bölgede, tekil noktadaki duruma da uyan çözüm  $G = \frac{-1}{4i} H_0^1(k\hat{r})$  dır. Buna, Green fonksiyonu (temel çözüm) denir. Buna göre,  $D$  düzgün bölgesinde  $S$  düzgün sınırı ile sınırlanmış bir iç bölge problemi için

$$U(r) = \int_S G(r,r') \left( \frac{\partial U(r')}{\partial n} - U(r') \frac{\partial G(r,r')}{\partial n} \right) dS \quad r \in D \quad (4.1.16)$$

Helmholtz birinci iç bölge formülü olarak bulunur. (18)



Şekil-4.1.2 İç bölge problemi için geometrik yapı.

Dış bölge problemi,  $S$  sınırı ile sınırlı bir bölgenin dışında, sonsuz yarıçaplı bir bölgenin içinde Helmholtz denklemini sağlayan Somerfeld radyasyon şartıyla, Neumann veya Dirichlet problemidir. Bunu

aşağıdaki gibi formüle edebiliriz.

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad R^2 \setminus \Omega$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=a} = 0 \quad \text{veya} \quad U \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.1.16)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ için } U = 0 \left( \frac{1}{r} \right)$$

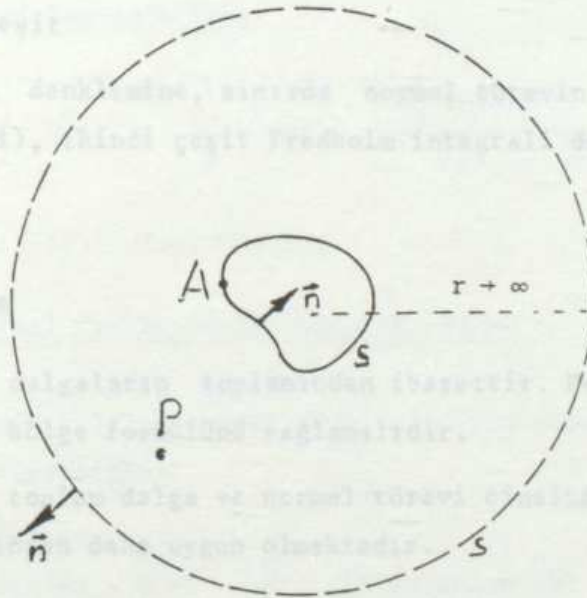
$$\frac{\partial U}{\partial r} - ikU = 0 \left( \frac{1}{r} \right)$$

Çözüm ise,

$$U(r) = \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left( -\frac{i}{4} H_0^1(k|r-r'|) \right) U(r') dS = \int_S -\frac{i}{4} H_0^1(k|r-r'|) \frac{\partial U}{\partial n} ds$$

Burada  $r$  sınırın dışında,  $r'$  ise sınırdadır.

(4.1.17)



Şekil 4.1.3. Dış bölge problemi geometrisi.

$S$  dairesel bir kesitin sınırı olması halinde,  $U(r')$  ve  $\frac{\partial U(r')}{\partial n}$   $z$  den bağımsız ise,  $U(r)$  de  $z$  den bağımsız olacaktır. ve problem üç boyutlu iken 2 boyuta indirgenecektir. Yukarıda verildiği tarzda iki boyutta Green temel fonksiyonu  $H_0^1(kr)$  sıfırdan birinci mertebeden 1. çeşit Henkel

fonksiyonudur. Dış bölge için 4.1.17 formülü de sınır eğrisi boyunca eğrisel integrallerdeki  $r + r'$  için oluşacak singulariteler-Couchy Principle value-anlamında halledilecektir.

(4.1.17) (4.1.16) denklemleriyle elde edilen çözümler sınır üzerinde aranan fonksiyonun ve normal türevinin bilinmesi halinde, bölgedeki bir noktadaki çözümün hesabını vermektedir.

Bir iyi konumlu (well posed) problemde, sınırda fonksiyon yahut normal türevi ya da bunların lineer bileşimi ile verilir. Buna göre (4.1.16) (4.1.17) denklemleri vasıtasıyla iki kademeli olarak, aranan çözümü elde edebiliriz. 1. kademede sınırda verilmemiş oranı bulma problemi, ikinci olarak da bölgede sınırdaki bilinenler vasıtasıyla aranan çözümü bulmaktır. Sınırdaki fonksiyonun bilinmesi halinde (Dirichlet problemi)

$$U(r) = \int_{\partial S} \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

denklemini birinci çeşit

Fredholm integral denklemine, sınırda normal türevin bilinmesi halinde (Neuman problemi), ikinci çeşit Fredholm integrali denklemine dönüşür.

Toplam dalga alanı

$$U^t = U^i + U^s \quad (4.1.18)$$

gelen ve saçılmış dalgaların toplamından ibarettir. Her bir dalga Weber (4.1.17) dış bölge formülünü sağlamalıdır.

Sınır şartlarını toplam dalga ve normal türevi cinsinden ifade etmek, formülasyon bakımından daha uygun olmaktadır.

Buna göre,

$$U^t(r) = U^i(r) + \frac{i}{4} \int_S \left( U^t(r') \frac{\partial H_0^1(kr)}{\partial n} - H_0^1(kr) \frac{\partial U^t}{\partial n} \right) dS \quad (4.1.19)$$

( $r \in S$ )  $r + r'$  olması halinde,

$H_0^1(kr)$ ,  $\frac{\partial H_0^1(kr)}{\partial n}$  S üzerinde süreksizlik arzeder. Limit işlemi

ile bu süreksizlik kaldırıldığında ;

$$\frac{1}{2} U^t(r') = U^i(r') + \int_S (U^t(r') \frac{\partial G(r,r')}{\partial n} - G(r,r') \frac{\partial U^t(r')}{\partial n}) dS \quad (4.1.20)$$

elde edilir. Sınırdaki bu denklem, bize  $U^t$  veya  $\frac{\partial U^t}{\partial n}$  ifadelerinden bilinmeyi verecektir. Sabit katı bir cisim için  $U^T = 0$  ( $U^S = -U^I$ ) sınır şartını veya  $\frac{\partial U^t}{\partial n} = 0$  ( $\frac{\partial U^S}{\partial n} = -\frac{\partial U^I}{\partial n}$ ) boşluk için serbest gerilmeli sınır şartlarını da denklemlere katarak birinci hal için ;

$$U^i(r') = \frac{1}{4} \int_S H_0^1(kr) \frac{\partial U^t(r')}{\partial n} ds \quad (4.1.21)$$

denklemini, ikinci hal için ise;

$$U^i(r') = \frac{1}{2} U^t(r') - \int_S U^t(r') \frac{\partial H_0^1(kr)}{\partial n} ds \quad (4.1.22)$$

integral denklemlerini bulmuş oluruz.

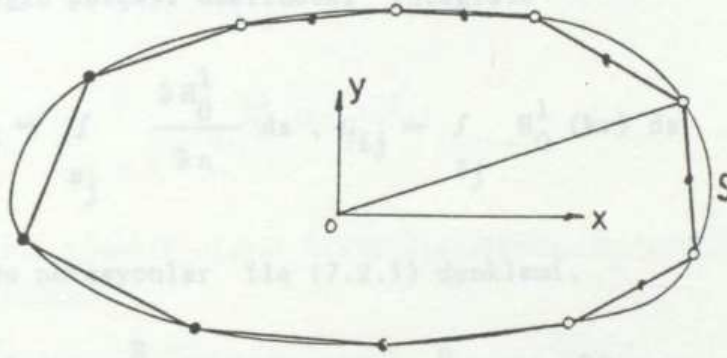
#### 4.2. İntegral denklemlerin nümerik çözümü :

(7.1.21 ve 7.1.22) integral denklemlerinin nümerik çözümü için aşağıdaki yolu izleyeceğiz.

- 1- Sınırın ayrıklaştırılması
- 2- Sınır elemanlarında  $U$  ve  $\frac{\partial U}{\partial n}$  nin yorumlanması
- 3- Etkileşim matrisinin elde edilmesi
- 4- Sınır şartlarının kullanılması
- 5- Matris denklemi ve sınırdaki bilinmeyenlerin çözümü
- 6- Bölgede çözüm

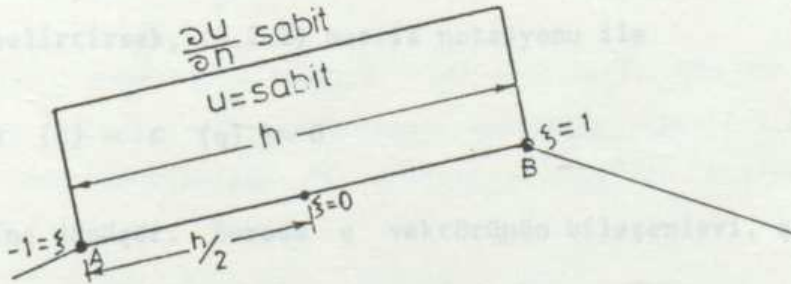
### Sınırın Ayırıklaştırılması :

(4.1.21) (4.1.22) Sınır integrali formüllerinde eğrisel integral-ler,  $n$  tane doğru parçası üzerinden integrallerle yaklaşık temsil edilirler. O halde sınır  $n$  sınır elemanına şekilde gösterildiği gibi bölünür. Bilinmeyen değerlerin bulunduğu yerlere düğüm,  $U$  ve  $\frac{\partial U}{\partial n}$  nin sabit olarak yorumlandığı doğru parçalarına sabit eleman denir. Bu halde düğümler doğru parçasının orta noktalarıdır.



Şekil-4.2.1 Sınırın yaklaşık olarak doğru parçaları ile temsili sabit ve lineer elemanlar.

$U$  ve  $\frac{\partial U}{\partial n}$  nin lineer olarak yorumlandığı elemanlara lineer eleman denir. Bu halde de düğümler elemanların bitiştigi noktalardadır.



Şekil-4.2.2 Sabit eleman-koordinat ilişkisi

Buna göre, sınır integrali denklemi, sabit eleman için :

$$\frac{1}{2} U_i = \sum_{j=1}^{\bar{n}} \left( \int_{s_j} \frac{\partial H_0^1(kr)}{\partial n} dS \right) U_j - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \left( \int_{s_j} H_0^1(kr) dS \right) \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \quad (4.2.1)$$

şekline dönüşür. Yukarıdaki formülde  $s_j$  üzerindeki integraller düğümler arası etkileşim ifadelerini meydana getirecektir. İ. düğüm için J. doğru parçası üzerindeki integrale

$$H_{ij} = \int_{s_j} \frac{\partial H_0^1}{\partial n} ds, \quad G_{ij} = \int_{s_j} H_0^1(kr) ds \quad (4.2.2)$$

diyelim. Bu notasyonlar ile (4.2.1) denklemi,

$$\frac{1}{2} U^i = \sum_{j=1}^{\bar{n}} H_{ij} U_j - \sum_{j=1}^{\bar{n}} G_{ij} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \quad (4.2.3)$$

şekline gelir.

$$H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & i \neq j \\ H_{ij} - \frac{1}{2} & i = j \end{cases} \quad (4.2.4)$$

olarak belirtirsek, (4.2.3) matris notasyonu ile

$$H \{u\} - G \{q\} = 0 \quad (4.2.5)$$

denklemine dönüşür. Burada  $q$  vektörünün bileşenleri,  $q_j = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_j$  dir.

$H_{ij}$ ,  $G_{ij}$  integrallerini nümerik olarak hesaplayacağız.  $ds = h/2 \cdot d\xi$  dönüşümü ile yeni bir koordinat sistemine geçelim. Yeni sistemde (4.2.2) ifadeleri

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 H_0^1(kr_{ij}) \frac{h^j}{2} d\xi \quad (4.2.6)$$



$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial H(kr_{ij})}{\partial n} \right) \frac{h^j}{2} d\xi \quad (4.2.7)$$

şeklinde normalize ederek dört nokta için Gauss integral denklemleri uygulanır hale getirilir. Buna göre,

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^4 W_k H_0^1(kr_{ij}) h^j / 2 \quad (4.2.8)$$

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^4 W_k H_0^1(kr_{ij}) h^j / 2 \quad (4.2.9)$$

ifadelerini nümerik olarak hesaplayabiliriz.  $W_k$ , Gauss ağırlık katsayılarıdır.

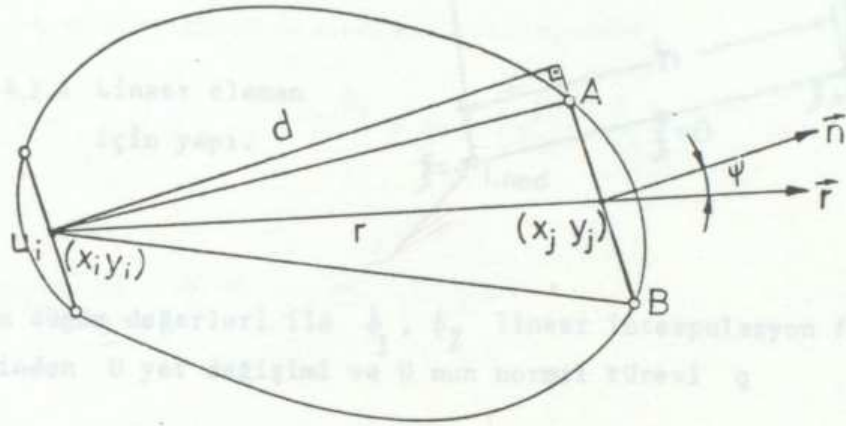
(4.2.7) ifadesinde bulunan normal türevin hesabını

$$\frac{\partial H_0(kr)}{\partial n} = \frac{\partial H_0(kr)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(n.r) \quad (4.2.11)$$

$$\cos(nr) = \frac{d}{r} \quad (4.2.12)$$

formülleri yardımıyla kolayca elde edebiliriz. Burada  $d, i.$  noktanın  $j.$  doğru parçasına olan uzaklığıdır. (Şekil-7.23). Bir noktanın bir doğruya uzaklığı formülünden,  $d$  mesafesi analitik olarak bulunur.



Şekil-7.2. (n,r) arası açı.

$i = j$  ise  $\cos(n,r) = 0$  olduğundan,  $H_{ij}$  sıfırdır.

$G_{ii} = i/4 \int_{s_j} [j_0(kr) + iY_0(kr)] ds$  integralinin,  $r \rightarrow 0$  halinde sanal kısmı  $s_j$  tekildir. Halbuki  $J_0(kr) = 1$  dir.

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \gamma \ln \frac{z}{2} \right] J_0(z) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) \quad (4.2.13)$$

Seri açılımında baskın olan ilk terim alınarak,

$$G_{ij} = \frac{i}{4} \int_{s_j} \left\{ 1 + \frac{2i}{\pi} \left[ \gamma + \ln \frac{kr}{2} \right] \right\} ds \quad (4.2.14)$$

bulunur.

$ds = \frac{h^j}{2} d\xi$  koordinat dönüşümü ile

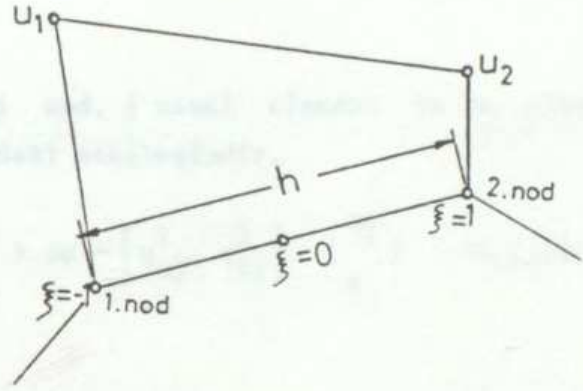
$$G_{ii} = \frac{i}{4} \int_{(1)} \left\{ 1 + \frac{i2}{\pi} \left[ \gamma + \ln \left( \frac{kr}{2} \right) \right] \right\} \frac{h^j}{2} ds = \frac{i}{2} \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{2i\gamma}{\pi} + \frac{i2}{\pi} \left[ \ln \frac{k \left(\frac{h^j}{2}\right) \xi}{2} \right] \right\} \frac{h^j}{2} d\xi$$

$$G_{ii} = \frac{i}{2} \frac{h^j}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ \ln \frac{k \left(\frac{h^j}{2}\right)}{2} - 0,4228 \right] \frac{h^j}{2} \quad (4.2.15)$$

yaklaşık olarak hesaplanır.

Lineer eleman :

Şekil-4.2.4 Lineer eleman için yapı.



$U$  ve  $q$  nun düğüm değerleri ile  $\phi_1, \phi_2$  lineer interpolasyon fonksiyonları cinsinden  $U$  yer değişimi ve  $U$  nun normal türevi  $q$

$$U(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 \quad (4.2.16)$$

veya

$$U(\xi) = [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.17)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.18)$$

ile ifade edilirler. Burada,

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.2.19)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.2.20)$$

dır. Bunlar cinsinden  $j$  ninci elemana ait integral :

$$\int_{s_j} U q_j ds = \int_{s_j} [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} ds = [h_{ij}^1, h_{ij}^2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.21)$$

ifadesi ile hesaplanır. Burada,

$$h_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad h_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (4.2.22)$$

olup, genel olarak  $h_{ij}^m$ ; i ninci nod, j ninci element ve m ninci interpolasyon fonksiyonu arasındaki etkileşimdir.

$$\int_{s_j} q G d\xi = \int_{s_j} [\phi_1, \phi_2] \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} ds = [q_{ij}^1, q_{ij}^2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.23)$$

$$q_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 G ds \quad (4.2.24)$$

$$(4.2.24)$$

$$q_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 G ds$$

$q_{ij}^m$  i. düğüm ile j. elemanın m ninci interpolasyon fonksiyonu arasındaki etkileşim değeridir.

i. düğüme ait bilinmeyenleri yazmak için iki bitişik elemanı göz önüne almak gerekir. Buna göre (4.2.1) sınır integralleri,

$$U_i^i - \frac{1}{2} U_i + [H_{i1}, H_{i2}, \dots, H_{in}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = [G_{ij}, \dots, G_{in}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (4.2.25)$$

formuna girer.

$$H_{ij} = h_{ij}^1 + h_i^2(j+1) \quad (4.2.26)$$

$$G_{ij} = g_{ij}^1 + g_i^2(j+1)$$

$$U_i^i - \frac{1}{2} U_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} u_j - \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (4.2.27)$$

$$H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & i \neq j \\ H_{ij} - 1/2, & i = j \end{cases} \quad (4.2.28)$$

4.3. Örnek problem :

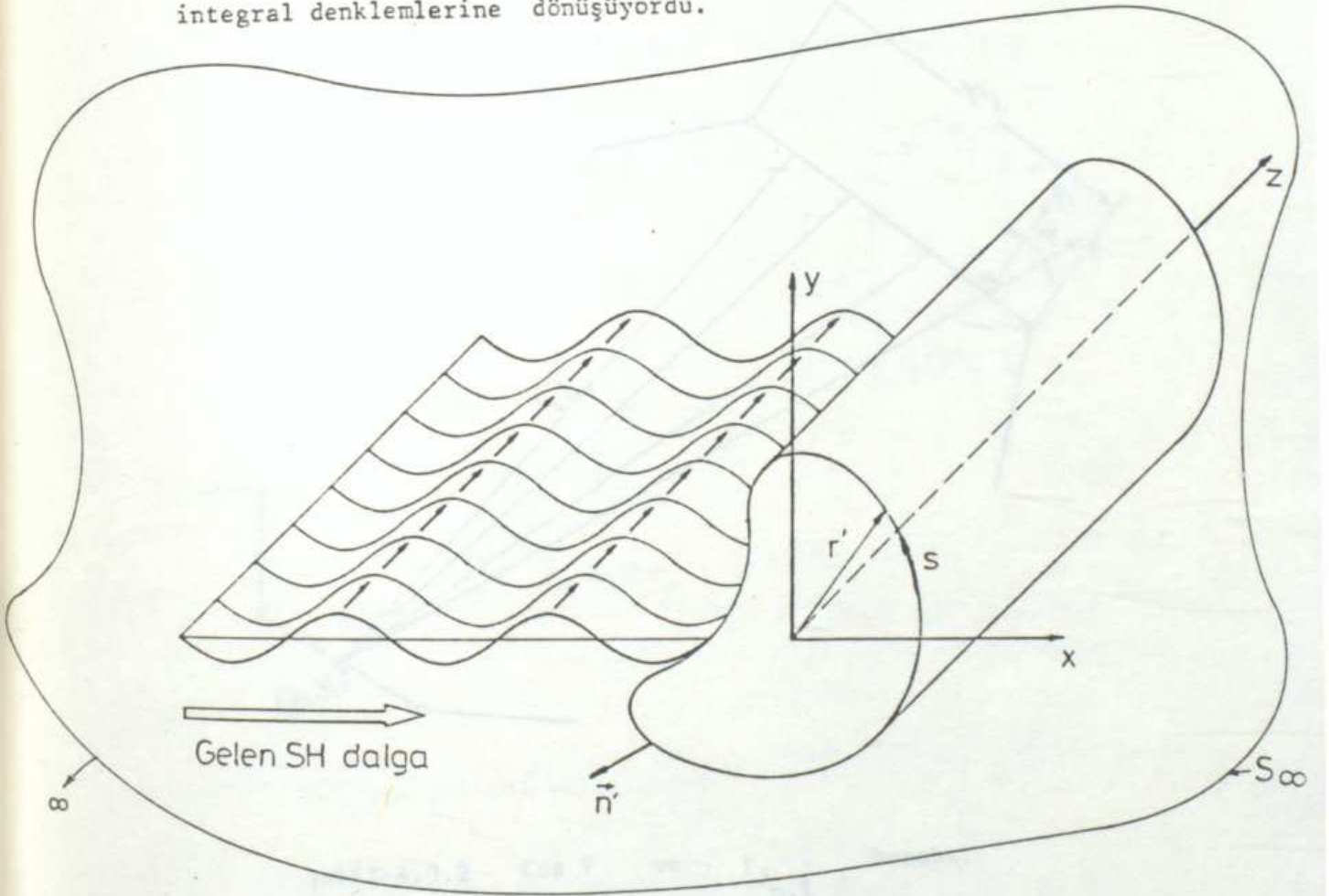
$U^i$  nin,  $U^i = e^{ikx}$  formunda olduğunu kabul edelim.  $U^t = 0$  sınır şartlı denklem,

$$U^T(r') = \frac{i}{4} \int_s H_0^1(kr) q ds \quad (4.3.1)$$

$\partial U^t / \partial n = 0$  sınır şartlı problem de

$$U^i(r') = \frac{1}{2} U^t(r) - \frac{i}{4} \int_s U^t(r') \frac{\partial H_0^1(kr)}{\partial n} ds \quad (4.3.2)$$

integral denklemlerine dönüşüyordu.



Şekil-4.3.1 Sonsuz uzak bir kaynaktan  $U^i = e^{ikx}$  formunda dalganın silindirden saçılması geometrisi.

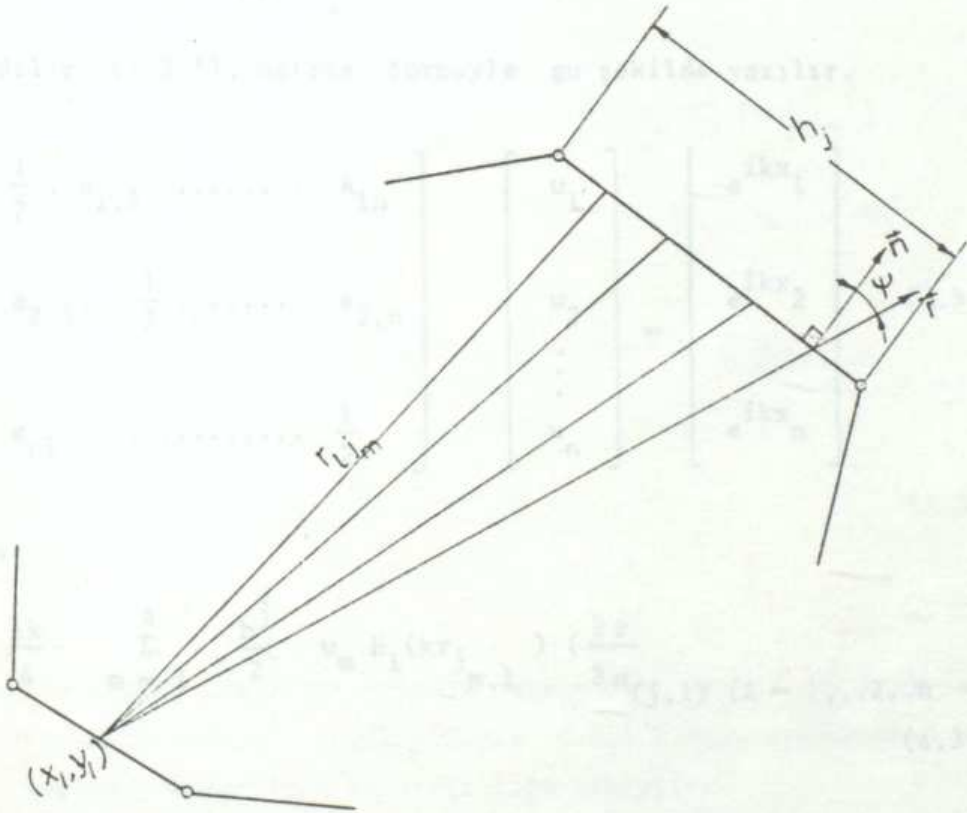
Buna göre (7.3.2) denklemi :

$$e^{ikx} = \frac{1}{2} U^t(r') - \frac{ik}{4} \int_s U^t(r') H_1^1(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \cdot ds \quad (4.3.3)$$

ve sınırdaki düğüm değerleriyle

$$e^{ikx}_\ell = \frac{1}{2} U_\ell^{(t)} - \frac{ik}{4} \sum_{j=1}^n U_j^t \cdot \int_{s_j} H_1^1(kr) \frac{\partial r}{\partial n} ds \quad (4.3.4)$$

halini alır. ( $\ell = 1, \dots, n$ )



Şekil-4.3.2  $\cos \psi$  ve  $r_{j,m,\ell}$  hesabı.

$$e^{ikx_\ell} = \frac{1}{2} U_\ell^t - \frac{ik}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^4 w_m H_m^1(kr_{j,m,\ell}) \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{j,m,\ell}^i \quad \ell = 1, 2, \dots, n \quad (4.3.5)$$

Buradaki  $\frac{\partial r}{\partial n}$  değerlerini hesaplamak için Şekil-7.3.2 'deki geometriden,

$$j \neq \ell \text{ için } \cos \psi = \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$j = \ell \text{ için, } \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

elde edilir. (7.3.5), matris formuyla şu şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a_{1,2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,1} & \frac{1}{2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ikx_1} \\ e^{ikx_2} \\ \vdots \\ e^{ikx_n} \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

Burada,

$$a_{j\ell} = \frac{ik}{4} \sum_{m=1}^4 \frac{h_m^j}{2} w_m H_m^1(kr_{j,m,1}) \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{(j,1)}^i \quad (\ell = 1, \dots, 2..n) \quad (4.3.7)$$

dir.

Eğer  $U^t = 0$  sınır şartını kullanırsak

$$U^i(r) = \frac{i}{4} \int_{s_j} (H_0^1(kr) \frac{\partial u^t}{\partial n}) ds$$

integral denklemini elde ederiz ve  $U^i = e^{ikx}$  birim dalga alınırsa,

$$e^{ikx} = \frac{i}{4} \int_{s_j} H_0^1(kr) \frac{\partial U^t}{\partial n} ds$$

denklemini buluruz.

Dört nokta Gauss integrasyon formülüne göre,

$$e^{ikx}_\ell = \frac{i}{4} \left\{ \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial U^t}{\partial r} \right\}_j \int_{s_j} H_0^1(kr) ds \right\} \quad (\ell = 1, \dots, n) \quad (4.3.8)$$

değeri,

$$e^{ikx}_\ell = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^4 \frac{\partial U^t}{\partial n} \frac{h_j}{2} w_m H_0^1(kr_{jm,\ell}) \quad (\ell = 1, \dots, n) \quad (4.3.9)$$

formuna girer.

$$\frac{\partial U^t}{\partial n} = \frac{\partial U^i}{\partial n} - \frac{\partial U^s}{\partial n} \quad \text{ve} \quad U^i = e^{ikx} = e^{ikr \cos \theta} \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{\partial U^i}{\partial n} = ike^{ikr \cos \theta} \cos \theta \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.3.10)$$

olur.

Burada  $\theta$ ,  $x$  eksenini ile  $r$  yer vektörü arasındaki açıdır.  $H_0^1(kr)$ , sıfırıncı mertebeden Hankel fonksiyonunun sanal kısmı, argümanının sıfır olduğu noktada, logaritmik bir tekilliğe sahiptir.

Buna göre (4.3.9) denkleminin tekilliğinin oluştuğu indisi ayırarak,

$$e^{ikx}_\ell = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^4 \left( \frac{\partial U^t}{\partial n} \right) \frac{h_j}{2} w_m H_0^1(kr_{j,\ell}) \quad j \neq \ell \quad \text{için}$$



$$j = l \text{ için } -\frac{1}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{k(h^j/2)}{2} \right) - 0,4228 \right] \frac{h^j}{2} - \frac{i}{2} \frac{h^j}{2} \quad (4.3.11)$$

normal gerilimi veren ifadeyi elde etmiş oluruz. Bunu matris formunda aşağıdaki gibi gösteririz :

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ikx_1 \\ e \\ \vdots \\ ikx_n \\ e \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

$$l \neq j \text{ için } \beta_j = \frac{i}{4} \sum_{m=1}^4 \frac{h^j}{2} w_m H_0^1(kr_{j,1}) \quad (4.3.13)$$

$$l = j \text{ için } \beta_{jj} = -\frac{1}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{k \frac{h^j}{2}}{2} \right) - 0,4228 \right] \frac{h^j}{2} - \frac{i}{2} \frac{h^j}{2}$$

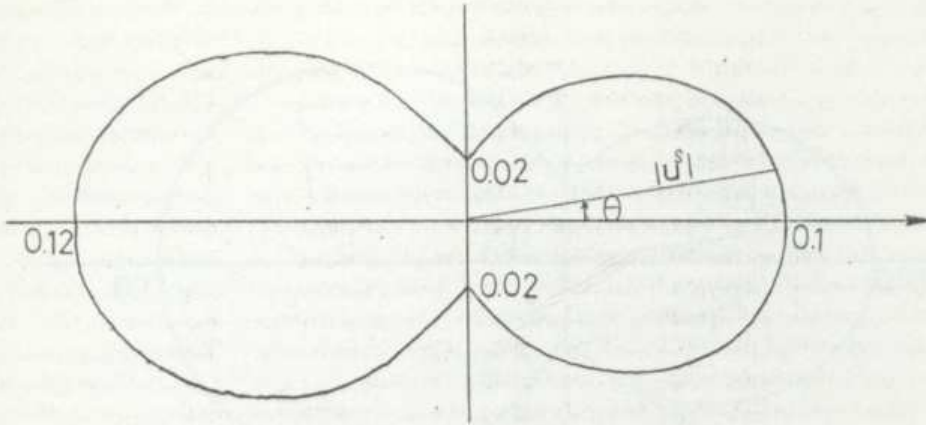
Böylece elde edilen kompleks sistemi, bir önceki problemde olduğu gibi reel denklem sistemine indirgenerek çözülür.

## SONUÇLAR

SONUÇ 1. BIEM ile Saçılan dalga için Yerdeğişim hesabı	49-52
SONUÇ 2. BIEM ile Saçılan dalga için gerilme hesabı	53-55
SONUÇ 3. FFT Yordamı kullanarak toplam gerilme hesabı	56-58
SONUÇ 4. FFT Yordamı kullanarak toplam Yerdeğişim hesabı	59-61
SONUÇ 5. BIEM ile Toplam Yerdeğişim hesabı (sonuç 4 ile aynı problem)	62-64
SONUÇ 6. BIEM ile Toplam gerilme hesabı (sonuç 3 ile aynı problem)	65-67
SONUÇ 7. FFT ile $e^{-\frac{(kx-\omega t)^2}{2\sigma^2}}$ formunda dalganın yerdeğişimi hesabı	68-72

## EKLER

- EK 1.  $e^{-x}$  fonksiyonunun AY isimli Alt yordamı ile Ayrık Fourier ve ters Fourier dönüşümü
- EK 2. Hankel fonksiyonlarının grafikleri

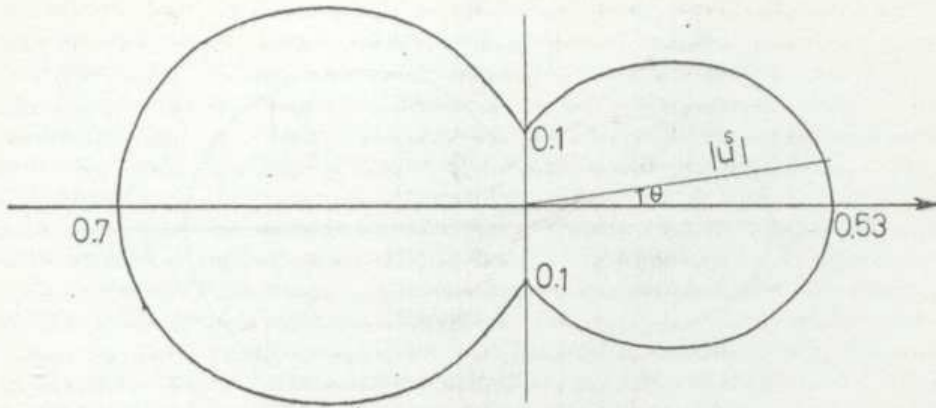


R= 1.00000000 K= 0.100000024

CUND= 1.97629533

SONUCLAR

NODE	IR (AIDERECE)	YERDEGISIMI
1	6.	0.1085810660
2	18.	0.1040851470
3	30.	0.0949523449
4	42.	0.0816809535
5	54.	0.0650964975
6	66.	0.0466209948
7	78.	0.0296557806
8	90.	0.0250930078
9	102.	0.0350106104
10	114.	0.0587384477
11	126.	0.0783066154
12	138.	0.0956417918
13	150.	0.1096282010
14	162.	0.1194838290
15	174.	0.1247345810
16	186.	0.1251339910
17	198.	0.1206387880
18	210.	0.1114744540
19	222.	0.0981044173
20	234.	0.0812475681
21	246.	0.0619895346
22	258.	0.0421226956
23	270.	0.0266695172
24	282.	0.0280315913
25	294.	0.0439026169
26	306.	0.0624118298
27	318.	0.0793660283
28	330.	0.0931947827
29	342.	0.1029675600
30	354.	0.1082071680

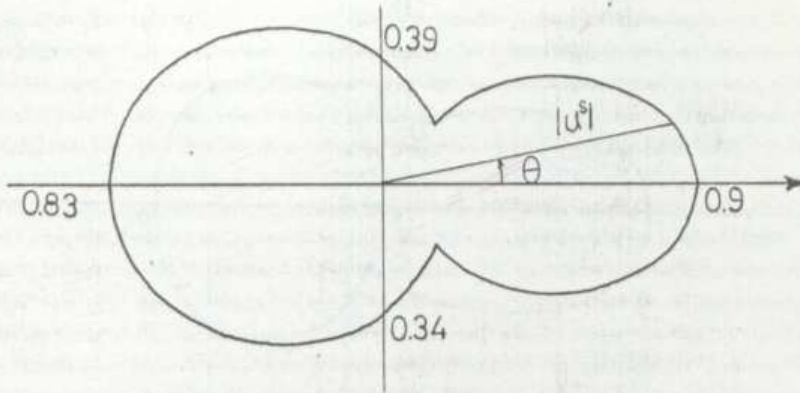


R= 1.00000000      κ = 0.500000000

COND= 2.51500511

SONUCLAR

NOUE	TEJA (DERECE)	YERDEGISIMI
1	6.	0.5352609240
2	18.	0.5132786420
3	30.	0.4580050110
4	42.	0.3767203090
5	54.	0.2747401000
6	66.	0.1612411740
7	78.	0.0744730830
8	90.	0.1420528290
9	102.	0.2625156640
10	114.	0.3800846070
11	126.	0.4849560260
12	138.	0.5725454690
13	150.	0.6401503680
14	162.	0.6862111090
15	174.	0.7100609540
16	186.	0.7115228100
17	198.	0.6905915740
18	210.	0.6476191260
19	222.	0.5833228830
20	234.	0.4990077020
21	246.	0.3968788960
22	258.	0.2801772950
23	270.	0.1540181040
24	282.	0.0359054208
25	294.	0.1171190140
26	306.	0.2384180430
27	318.	0.3468963500
28	330.	0.4355230930
29	342.	0.4992321730
30	354.	0.5344839890

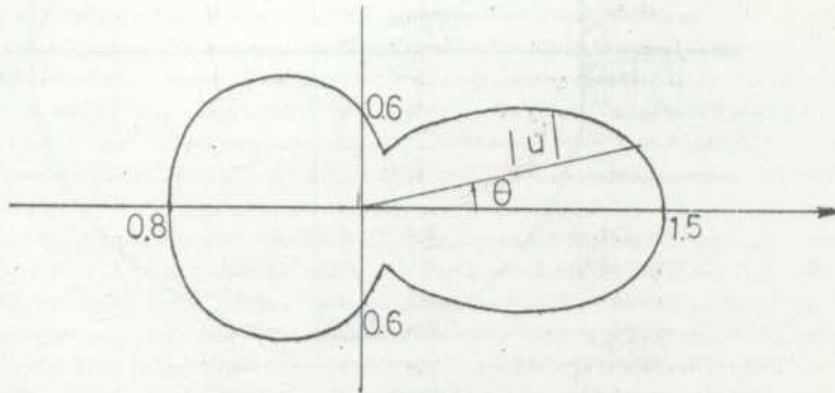


R= 1.00000000 K= 1.00000000

COND= 2.90940189

SONUCLAR

NODE	TELA (VERECE)	YERDEGISIMI
1	6.	0.9647222160
2	18.	0.9062173960
3	30.	0.7822027800
4	42.	0.6073217030
5	54.	0.4097521900
6	66.	0.2468485240
7	78.	0.2546904090
8	90.	0.3980322480
9	102.	0.5462976100
10	114.	0.6640868780
11	126.	0.7463588120
12	138.	0.7975893620
13	150.	0.8255971670
14	162.	0.8376608490
15	174.	0.8350690090
16	186.	0.8324379920
17	198.	0.8178286550
18	210.	0.7933721640
19	222.	0.7551481130
20	234.	0.6972870830
21	246.	0.6128514410
22	258.	0.4956142310
23	270.	0.3437496420
24	282.	0.1675826310
25	294.	0.1173509960
26	306.	0.3165279060
27	318.	0.5318282250
28	330.	0.7225626110
29	342.	0.8675284980
30	354.	0.9512768980

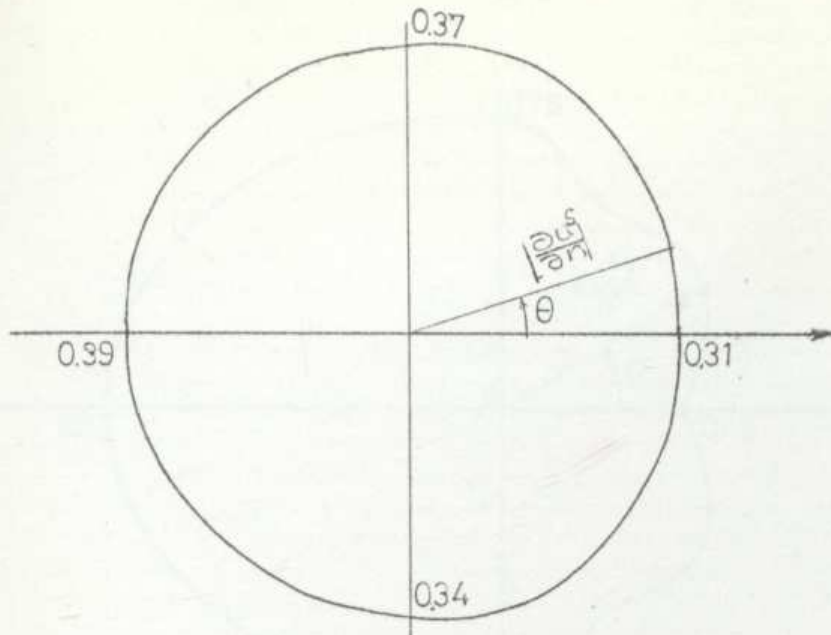


R= 1.00000000 K= 3.00000000

COND= 3.43156910

SONUCLAR

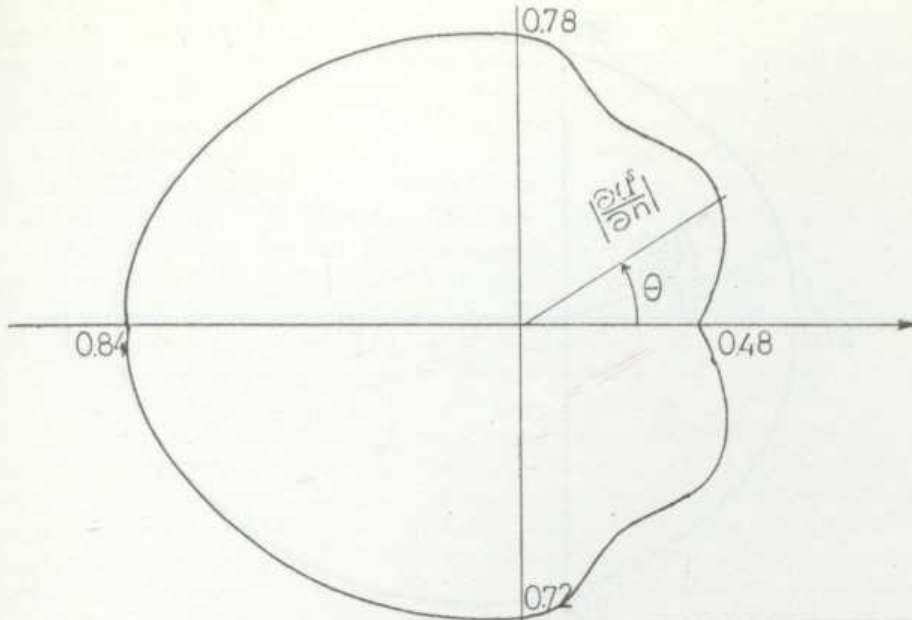
NOQE	İTİA(DERECE)	YERDEĞİSHİ
1	6.	1.5253801300
2	18.	1.2512397800
3	30.	0.8080322740
4	42.	0.5077705380
5	54.	0.4279221300
6	66.	0.2706003190
7	78.	0.3309597970
8	90.	0.6372206210
9	102.	0.7885401840
10	114.	0.7788538340
11	126.	0.7034438680
12	138.	0.6716119260
13	150.	0.9397103790
14	162.	0.9317495290
15	174.	0.8704335850
16	186.	0.8293995860
17	198.	0.8095120790
18	210.	0.8115034700
19	222.	0.8074986930
20	234.	0.7819011210
21	246.	0.7593423720
22	258.	0.7459956410
23	270.	0.6566446420
24	282.	0.4125723840
25	294.	0.1585682030
26	306.	0.4180019500
27	318.	0.6830025320
28	330.	0.9179769160
29	342.	1.2219915400
30	354.	1.4910087600



\*\*\*\*\* R= 1.00000000 K= 0.100000024  
 \*\*\*\*\* COND= 131.774689 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

## SONUCLAR

NODE	TETA(DERECE)	STRESS(SINIRDA)
1	6	0.3111320730
2	18	0.3243238930
3	30	0.3371866940
4	42	0.3484512570
5	54	0.3574976920
6	66	0.3643084760
7	78	0.3693381550
8	90	0.3731672760
9	102	0.3763588670
10	114	0.3792113070
11	126	0.3819180730
12	138	0.3846302030
13	150	0.3875808720
14	162	0.3909959790
15	174	0.3948248620
16	186	0.3986065390
17	198	0.4012962580
18	210	0.4015789030
19	222	0.3981844190
20	234	0.3903471230
21	246	0.3780435320
22	258	0.3620789050
23	270	0.3439480070
24	282	0.3256030080
25	294	0.3091011050
26	306	0.2963340280
27	318	0.2886738780
28	330	0.2868427040
29	342	0.2906926870
30	354	0.2993046050

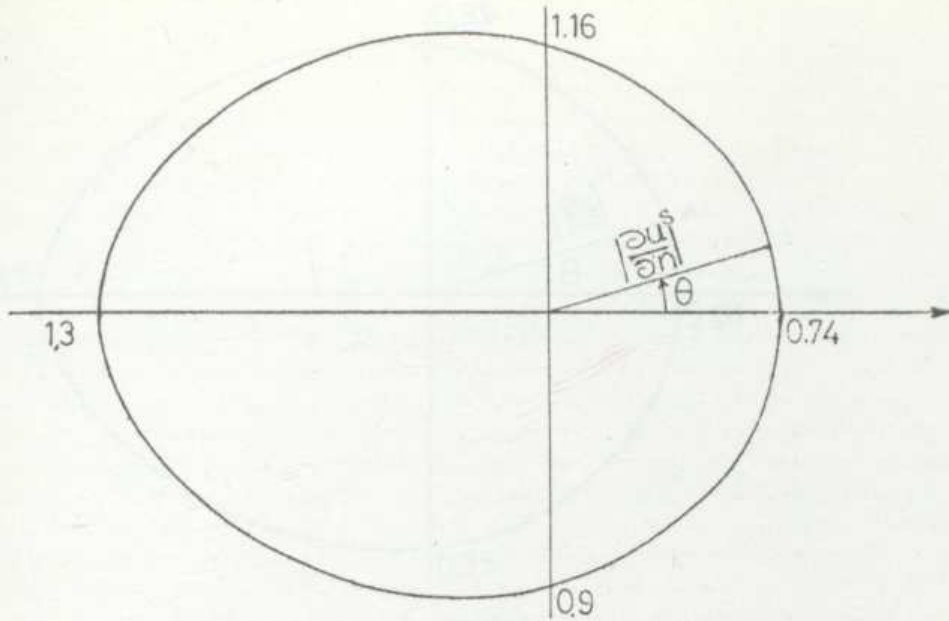


\*\*\*\*\* R= 1.00000000 K= 0.50000000  
 \*\*\*\*\* COND= 76.3748779 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

## SONUCLAR

NODE	TETA(DERECE)	STRESS(SINIRDA)
1	6	0.4848538640
2	18	0.6482331750
3	30	0.7521655560
4	42	0.7748780250
5	54	0.7339544300
6	66	0.6843876840
7	78	0.6935297250
8	90	0.7859345670
9	102	0.9269499780
10	114	1.0659341800
11	126	1.1600647000
12	138	1.1759319300
13	150	1.0982971200
14	162	0.9544365410
15	174	0.8450458050
16	186	0.8972864150
17	198	1.0818567300
18	210	1.2573146800
19	222	1.3337478600
20	234	1.2903318400
21	246	1.1497354500
22	258	0.9503607750
23	270	0.7281912570
24	282	0.5087130070
25	294	0.3094054460
26	306	0.1474751230
27	318	0.0628870726
28	330	0.0997776985
29	342	0.1778626440
30	354	0.3110798600

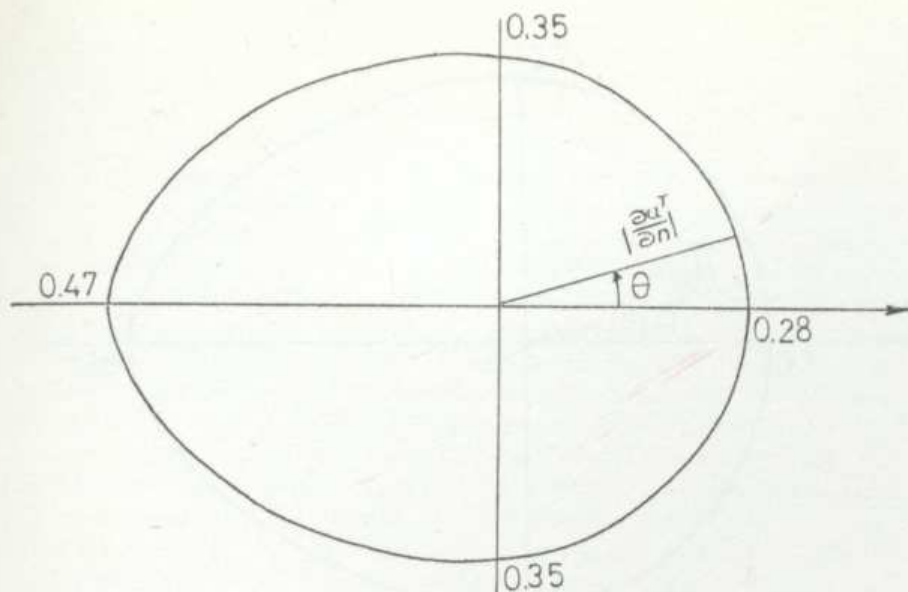




\*\*\*\*\* R= 1.0000000 K= 1.0000000  
 \*\*\*\*\* COND= 46.2095032 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

## SONUCLAR

NODE	TETA(DERECE)	STRESS(SINIRDA)
1	6	0.8265867230
2	18	1.1197652800
3	30	1.1930761300
4	42	0.8848699330
5	54	0.3316121100
6	66	0.3171954150
7	78	0.7970407010
8	90	1.1632394800
9	102	1.4789896000
10	114	1.8384313600
11	126	2.2803573600
12	138	2.7042675000
13	150	2.8580951700
14	162	2.4804706600
15	174	1.6312103300
16	186	1.3598909400
17	198	2.1958541900
18	210	2.7584266700
19	222	2.6640415200
20	234	2.1254291500
21	246	1.5147113800
22	258	1.1011285800
23	270	0.9296342130
24	282	0.8838700060
25	294	0.8672882320
26	306	0.8512643580
27	318	0.8568458560
28	330	0.8920972350
29	342	0.8675863740
30	354	0.7472070460

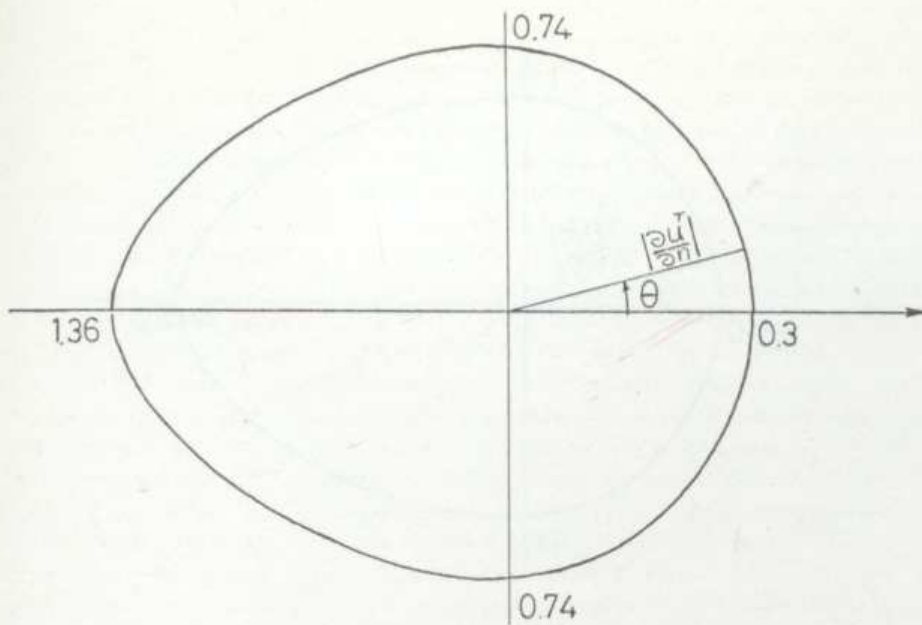


WAVE NUMBER= 0.100000024

R= 1.00000000

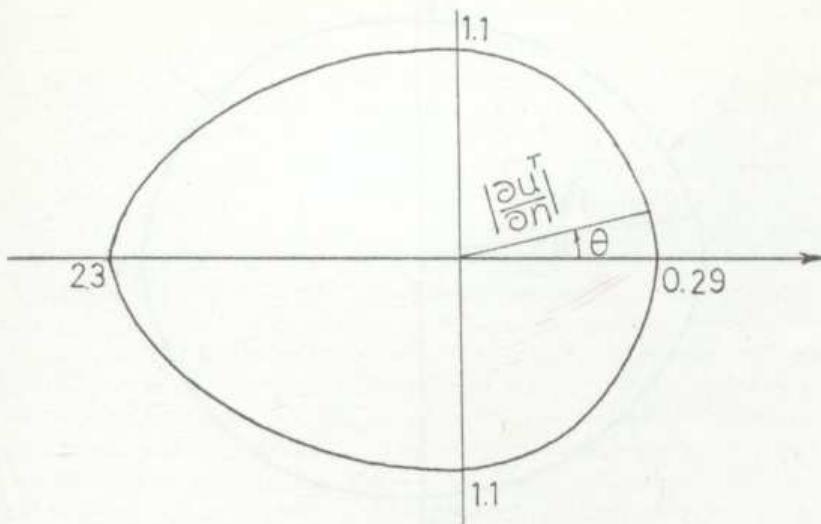
A= 1.00000

NODE	TETA(DERECE)	D <sup>2</sup> SPLACEMENT	STRESS
1	6.000	0.0000000000	0.2834821940
2	18.000	0.0000000000	0.2850450280
3	30.000	0.0000000000	0.2886091470
4	42.000	0.0000000000	0.2948966030
5	54.000	0.0000000000	0.3046399350
6	66.000	0.0000000000	0.3182743790
7	78.000	0.0000000000	0.3357125520
8	90.000	0.0000000000	0.3562840220
9	102.000	0.0000000000	0.3788379430
10	114.000	0.0000000000	0.4019337890
11	126.000	0.0000000000	0.4240400790
12	138.000	0.0000000000	0.4436972140
13	150.000	0.0000000000	0.4596328740
14	162.000	0.0000000000	0.4708384280
15	174.000	0.0000000000	0.4766185280
16	186.000	0.0000000000	0.4766185280
17	198.000	0.0000000000	0.4708385470
18	210.000	0.0000000000	0.4596329930
19	222.000	0.0000000000	0.4436974530
20	234.000	0.0000000000	0.4240403180
21	246.000	0.0000000000	0.4019339080
22	258.000	0.0000000000	0.3788381810
23	270.000	0.0000000000	0.3562842610
24	282.000	0.0000000000	0.3357126710
25	294.000	0.0000000000	0.3182744980
26	306.000	0.0000000000	0.3046399350
27	318.000	0.0000000000	0.2948966030
28	330.000	0.0000000000	0.2886091470
29	342.000	0.0000000000	0.2850450280
30	354.000	0.0000000000	0.2834821940



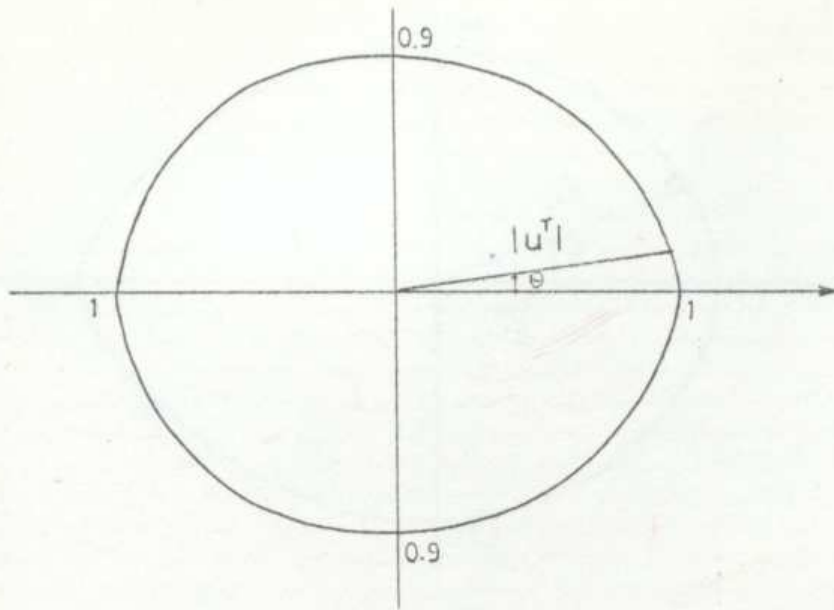
WAVE NUMBER= 0.500000000 K= 1.00000000 A= 1.0000

NODE	TETA(DERECE)	D <sup>2</sup> SPLACEMENT	STRESS
1	6.000	0.0000000000	0.3083664180
2	18.000	0.0000000000	0.3084543940
3	30.000	0.0000000000	0.3186912540
4	42.000	0.0000000000	0.3527129890
5	54.000	0.0000000000	0.4173847440
6	66.000	0.0000000000	0.5095987320
7	78.000	0.0000000000	0.6215473410
8	90.000	0.0000000000	0.7448935510
9	102.000	0.0000000000	0.8717403410
10	114.000	0.0000000000	0.9948076010
11	126.000	0.0000000000	1.1077537500
12	138.000	0.0000000000	1.2053384800
13	150.000	0.0000000000	1.2832241100
14	162.000	0.0000000000	1.3376979800
15	174.000	0.0000000000	1.3657980000
16	186.000	0.0000000000	1.3657980000
17	198.000	0.0000000000	1.3376989400
18	210.000	0.0000000000	1.2832231500
19	222.000	0.0000000000	1.2053394300
20	234.000	0.0000000000	1.1077547100
21	246.000	0.0000000000	0.9948085550
22	258.000	0.0000000000	0.8717410500
23	270.000	0.0000000000	0.7448948620
24	282.000	0.0000000000	0.6215485330
25	294.000	0.0000000000	0.5095993230
26	306.000	0.0000000000	0.4173849820
27	318.000	0.0000000000	0.3527134600
28	330.000	0.0000000000	0.3186916110
29	342.000	0.0000000000	0.3084541560
30	354.000	0.0000000000	0.3083665370



WAVE NUMBER= 1.00000000 R= 1.00000000 A= 1.00000

NODE	TETA(DERECE)	D`SPLACEMENT	STRESS
1	6.000	0.0000000000	0.2963193660
2	18.000	0.0000000000	0.2755310540
3	30.000	0.0000000000	0.3040637970
4	42.000	0.0000000000	0.4147446160
5	54.000	0.0000000000	0.5614182950
6	66.000	0.0000000000	0.7180157900
7	78.000	0.0000000000	0.8942364450
8	90.000	0.0000000000	1.1034202600
9	102.000	0.0000000000	1.3376789100
10	114.000	0.0000000000	1.5738132100
11	126.000	0.0000000000	1.7929153400
12	138.000	0.0000000000	1.9882535900
13	150.000	0.0000000000	2.1568794300
14	162.000	0.0000000000	2.2876339000
15	174.000	0.0000000000	2.3609008800
16	186.000	0.0000000000	2.3609027900
17	198.000	0.0000000000	2.2876339000
18	210.000	0.0000000000	2.1568794300
19	222.000	0.0000000000	1.9882555000
20	234.000	0.0000000000	1.7929153400
21	246.000	0.0000000000	1.5738191600
22	258.000	0.0000000000	1.3376317700
23	270.000	0.0000000000	1.1034221600
24	282.000	0.0000000000	0.8942384720
25	294.000	0.0000000000	0.7180168630
26	306.000	0.0000000000	0.5614186530
27	318.000	0.0000000000	0.4147459270
28	330.000	0.0000000000	0.3040658240
29	342.000	0.0000000000	0.2755308150
30	354.000	0.0000000000	0.2963199620

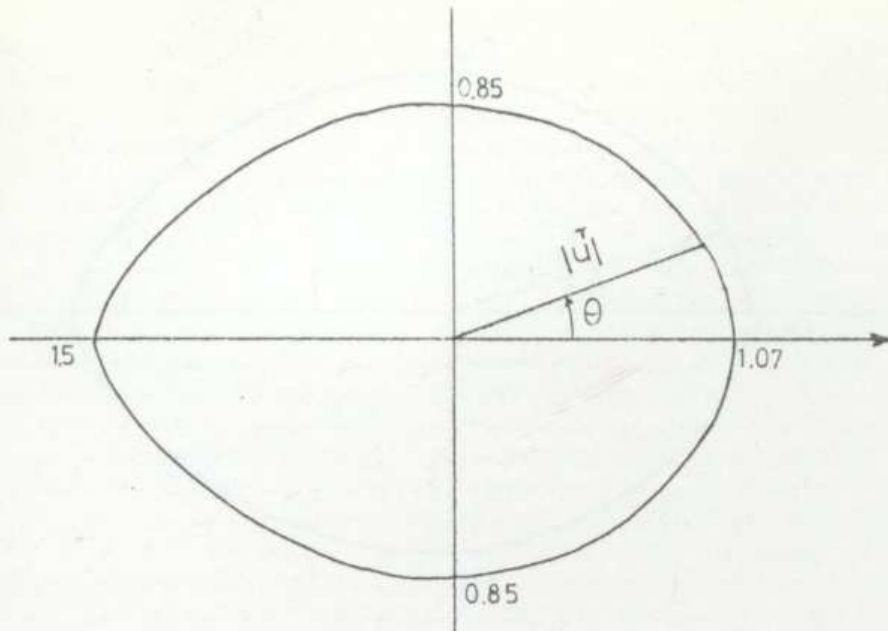


WAVE NUMBER= 0.100000024

R= 1.00000000

A= 1.00000001

NODE	TETA(DEGREE)	D <sup>T</sup> SPLACEMENT	STRESS
1	6.000	1.0027790100	0.0000000000
2	18.000	1.0011930500	0.0000000000
3	30.000	0.9983077050	0.0000000000
4	42.000	0.9946459530	0.0000000000
5	54.000	0.9908869270	0.0000000000
6	66.000	0.9877461190	0.0000000000
7	78.000	0.9858481880	0.0000000000
8	90.000	0.9856103660	0.0000000000
9	102.000	0.9871593710	0.0000000000
10	114.000	0.9903044700	0.0000000000
11	126.000	0.9945706130	0.0000000000
12	138.000	0.9992834330	0.0000000000
13	150.000	1.0036897700	0.0000000000
14	162.000	1.0070858000	0.0000000000
15	174.000	1.0089302100	0.0000000000
16	186.000	1.0089302100	0.0000000000
17	198.000	1.0070858000	0.0000000000
18	210.000	1.0036897700	0.0000000000
19	222.000	0.9992835520	0.0000000000
20	234.000	0.9945706130	0.0000000000
21	246.000	0.9903044700	0.0000000000
22	258.000	0.9871593710	0.0000000000
23	270.000	0.9856103660	0.0000000000
24	282.000	0.9858481880	0.0000000000
25	294.000	0.9877461190	0.0000000000
26	306.000	0.9908869270	0.0000000000
27	318.000	0.9946459530	0.0000000000
28	330.000	0.9983077050	0.0000000000
29	342.000	1.0011930500	0.0000000000
30	354.000	1.0027790100	0.0000000000

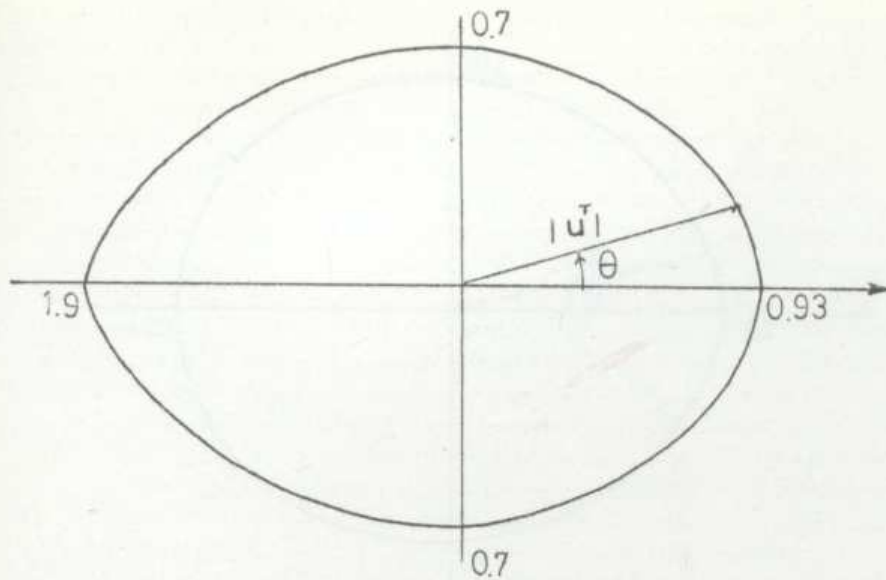


WAVE NUMBER= 0.500000000

R= 1.000000000

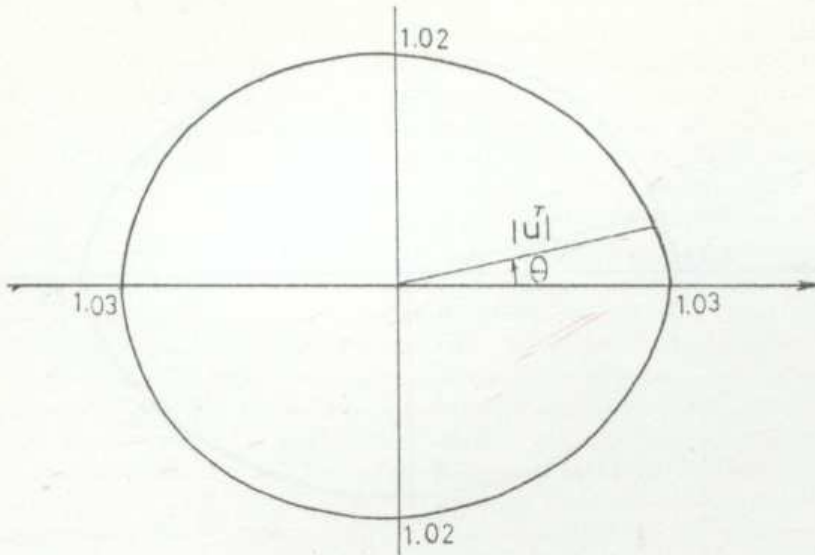
A= 1.000

NODE	TETA (DEGREES)	D <sup>2</sup> SPLACEMENT	STRESS
1	6.000	1.0728511800	0.0000000000
2	18.000	1.0445070300	0.0000000000
3	30.000	0.9922554490	0.0000000000
4	42.000	0.9254556890	0.0000000000
5	54.000	0.8590562340	0.0000000000
6	66.000	0.8131076100	0.0000000000
7	78.000	0.8079109190	0.0000000000
8	90.000	0.8537875410	0.0000000000
9	102.000	0.9445258380	0.0000000000
10	114.000	1.0627784700	0.0000000000
11	126.000	1.1894569400	0.0000000000
12	138.000	1.3085088700	0.0000000000
13	150.000	1.4077625300	0.0000000000
14	162.000	1.4785566300	0.0000000000
15	174.000	1.5153207800	0.0000000000
16	186.000	1.5153207800	0.0000000000
17	198.000	1.4785566300	0.0000000000
18	210.000	1.4077625300	0.0000000000
19	222.000	1.3085098300	0.0000000000
20	234.000	1.1894578900	0.0000000000
21	246.000	1.0627794300	0.0000000000
22	258.000	0.9445264340	0.0000000000
23	270.000	0.8537882570	0.0000000000
24	282.000	0.8079110380	0.0000000000
25	294.000	0.8131073710	0.0000000000
26	306.000	0.8590559960	0.0000000000
27	318.000	0.9254554510	0.0000000000
28	330.000	0.9922552110	0.0000000000
29	342.000	1.0445060700	0.0000000000
30	354.000	1.0728511800	0.0000000000



WAVE NUMBER= 1.0000000 R= 1.0000000 A= 1.000

NODE	TETA(DERECE)	D <sup>2</sup> SPLACEMENT	STRESS
1	6.000	0.9398282770	0.0000000000
2	18.000	0.8882211450	0.0000000000
3	30.000	0.7905269860	0.0000000000
4	42.000	0.6602969170	0.0000000000
5	54.000	0.5276705030	0.0000000000
6	66.000	0.4576163290	0.0000000000
7	78.000	0.5250763890	0.0000000000
8	90.000	0.7100156550	0.0000000000
9	102.000	0.9461451770	0.0000000000
10	114.000	1.1921863600	0.0000000000
11	126.000	1.4247016900	0.0000000000
12	138.000	1.6279544800	0.0000000000
13	150.000	1.7903366100	0.0000000000
14	162.000	1.9033289000	0.0000000000
15	174.000	1.9612531700	0.0000000000
16	186.000	1.9612531700	0.0000000000
17	198.000	1.9033298500	0.0000000000
18	210.000	1.7903366100	0.0000000000
19	222.000	1.6279563900	0.0000000000
20	234.000	1.4247045500	0.0000000000
21	246.000	1.1921873100	0.0000000000
22	258.000	0.9461466070	0.0000000000
23	270.000	0.7100179200	0.0000000000
24	282.000	0.5250777010	0.0000000000
25	294.000	0.4576162100	0.0000000000
26	306.000	0.5276699070	0.0000000000
27	318.000	0.6602965590	0.0000000000
28	330.000	0.7905261520	0.0000000000
29	342.000	0.8882203100	0.0000000000
30	354.000	0.9398282770	0.0000000000



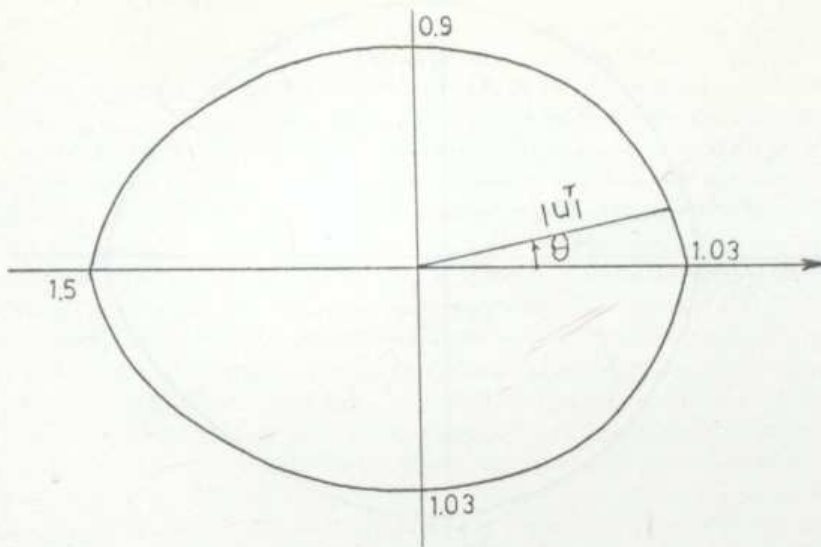
R= 1.00000000 K= 0.100000024

COND= 1.97829533

SONUCLAR

NODE	TETA(DERECE)	YERDEGISIMI
1	0.	1.0330152500
2	18.	1.0321435900
3	30.	1.0305595400
4	42.	1.0285759000
5	54.	1.0265893900
6	66.	1.0250301400
7	78.	1.0241956700
8	90.	1.0243291900
9	102.	1.0255505600
10	114.	1.0276937500
11	126.	1.0304870600
12	138.	1.0335083000
13	150.	1.0363550200
14	162.	1.0385379800
15	174.	1.0397748900
16	180.	1.0399036400
17	198.	1.0388441100
18	210.	1.0367822600
19	222.	1.0340433100
20	234.	1.0310564000
21	246.	1.0283021900
22	258.	1.0260791800
23	270.	1.0247860000
24	282.	1.0245609300
25	294.	1.0252323200
26	306.	1.0267305400
27	318.	1.0286426500
28	330.	1.0305986400
29	342.	1.0320911400
30	354.	1.0330123900



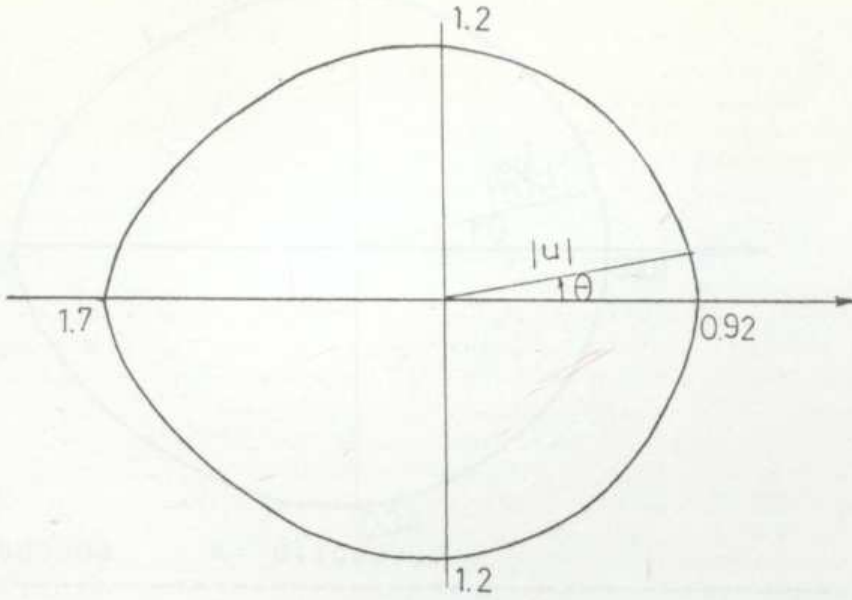


R= 1.00000000 K= 0.500000000

COND= 2.51500511

SONUCLAR

NOĐE	TETA(DERECE)	YERDEGISIMI
1	6.	1.0365047500
2	18.	1.0151739100
3	30.	0.9795506000
4	42.	0.9391744730
5	54.	0.9077632430
6	66.	0.9001416560
7	78.	0.9264497760
8	90.	0.9871820810
9	102.	1.0735626200
10	114.	1.1724319500
11	126.	1.2712011300
12	138.	1.3599634200
13	150.	1.4319477100
14	162.	1.4828624700
15	174.	1.5104818300
16	186.	1.5139608400
17	198.	1.4933481200
18	210.	1.4498109800
19	222.	1.3857250200
20	234.	1.3051185600
21	246.	1.2142458000
22	258.	1.1217641800
23	270.	1.0388603200
24	282.	0.9771035310
25	294.	0.9447340370
26	306.	0.9428582790
27	318.	0.9636543130
28	330.	0.9950484040
29	342.	1.0233593000
30	354.	1.0390567800

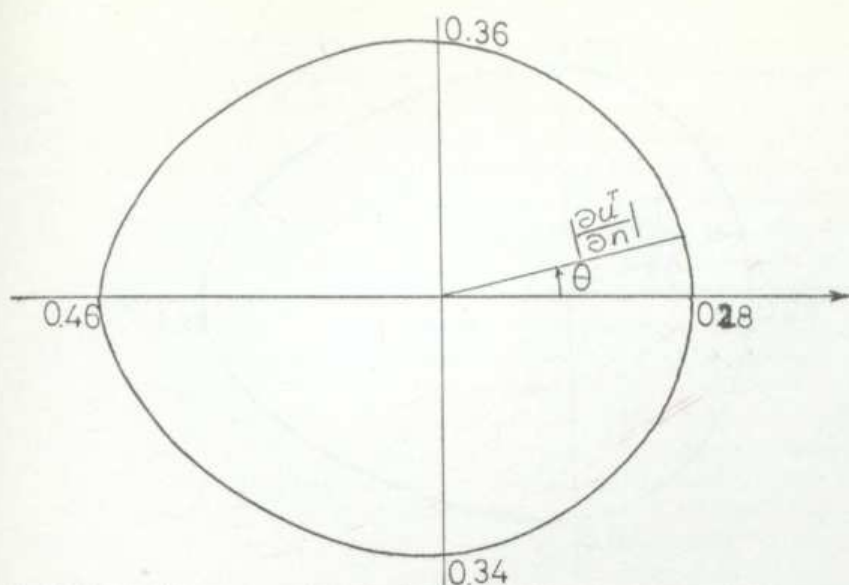


R= 1.00000000 K= 1.00000000

COND= 2.90940189

SÖNUCLAR

NODE	TETA(DERECE)	YERDEGISIMI
1	6.	0.9294639230
2	18.	0.8566267490
3	30.	0.7408399580
4	42.	0.6367557640
5	54.	0.6327367420
6	66.	0.7675856950
7	78.	0.9812974930
8	90.	1.2056553700
9	102.	1.4029245400
10	114.	1.5562257800
11	126.	1.6637496900
12	138.	1.7317581200
13	150.	1.7700195300
14	162.	1.7676520200
15	174.	1.7914066300
16	186.	1.7848491700
17	198.	1.7684488300
18	210.	1.7402467700
19	222.	1.6958665800
20	234.	1.6289072000
21	246.	1.5323782000
22	258.	1.4013557400
23	270.	1.2377319300
24	282.	1.0548372300
25	294.	0.8827307220
26	306.	0.7685615420
27	318.	0.7502455120
28	330.	0.8106818200
29	342.	0.8907126190
30	354.	0.9393721820



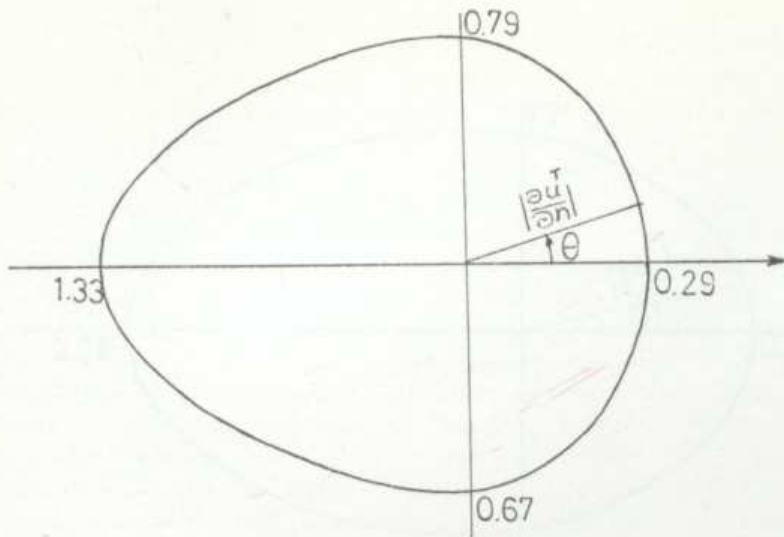
R= 1.00000000      K= 0.100000024

COND= 131.774689

SONUCLAR

-----  
 NODE    TEJA(DERECE)    STRESS  
 -----

1	6	0.2839555740
2	18	0.2864102130
3	30	0.2911543850
4	42	0.2988726260
5	54	0.3101166870
6	66	0.3250340220
7	78	0.3432729240
8	90	0.3639374970
9	102	0.3858325460
10	114	0.4075130220
11	126	0.4275677200
12	138	0.4446771140
13	150	0.4577554460
14	162	0.4659930470
15	174	0.4688531160
16	186	0.4661970140
17	198	0.4581584930
18	210	0.4452593330
19	222	0.4282964470
20	234	0.4083652500
21	246	0.3867549900
22	258	0.3648959400
23	270	0.3441900010
24	282	0.3258847000
25	294	0.3108447790
26	306	0.2994654180
27	318	0.2915813920
28	330	0.2866827250
29	342	0.2840770480
30	354	0.2832363840

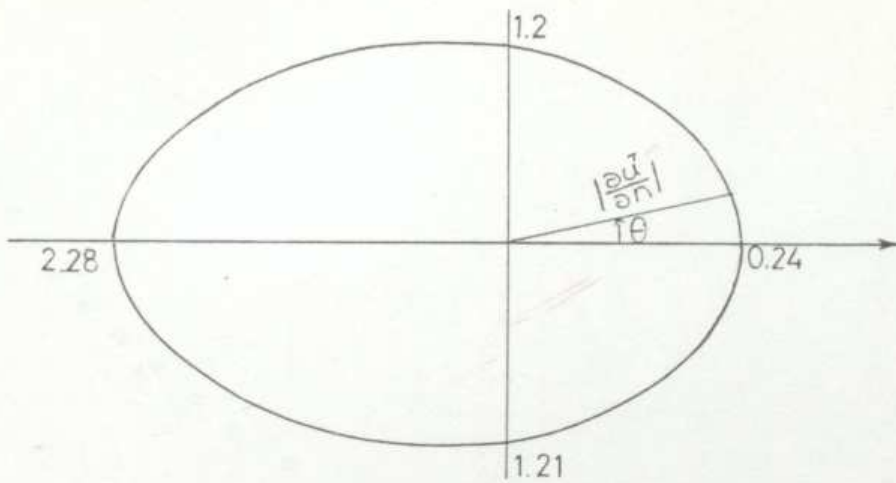


R= 1.00000000      κ= 0.50000000

COND= 76.3756256

SDNUCLAR

NDDE	TETA(DERECE)	STRESS
1	6	0.2994128470
2	18	0.3029404880
3	30	0.3235061170
4	42	0.3724532130
5	54	0.4515423770
6	66	0.5538964270
7	78	0.6703282590
8	90	0.7925100330
9	102	0.9136929510
10	114	1.0278968800
11	126	1.1299390300
12	138	1.2151716100
13	150	1.2793340700
14	162	1.3192682500
15	174	1.3329553600
16	186	1.3195037800
17	198	1.2800273900
18	210	1.2162370700
19	222	1.1319255800
20	234	1.0306530000
21	246	0.9175070520
22	258	0.7973377700
23	270	0.6759506460
24	282	0.5601825710
25	294	0.4579651360
26	306	0.3784452680
27	318	0.3283008340
28	330	0.3061518400
29	342	0.3008863930
30	354	0.3003234860



R= 1.00000000 K= 1.00000000

COND= 46.2094879

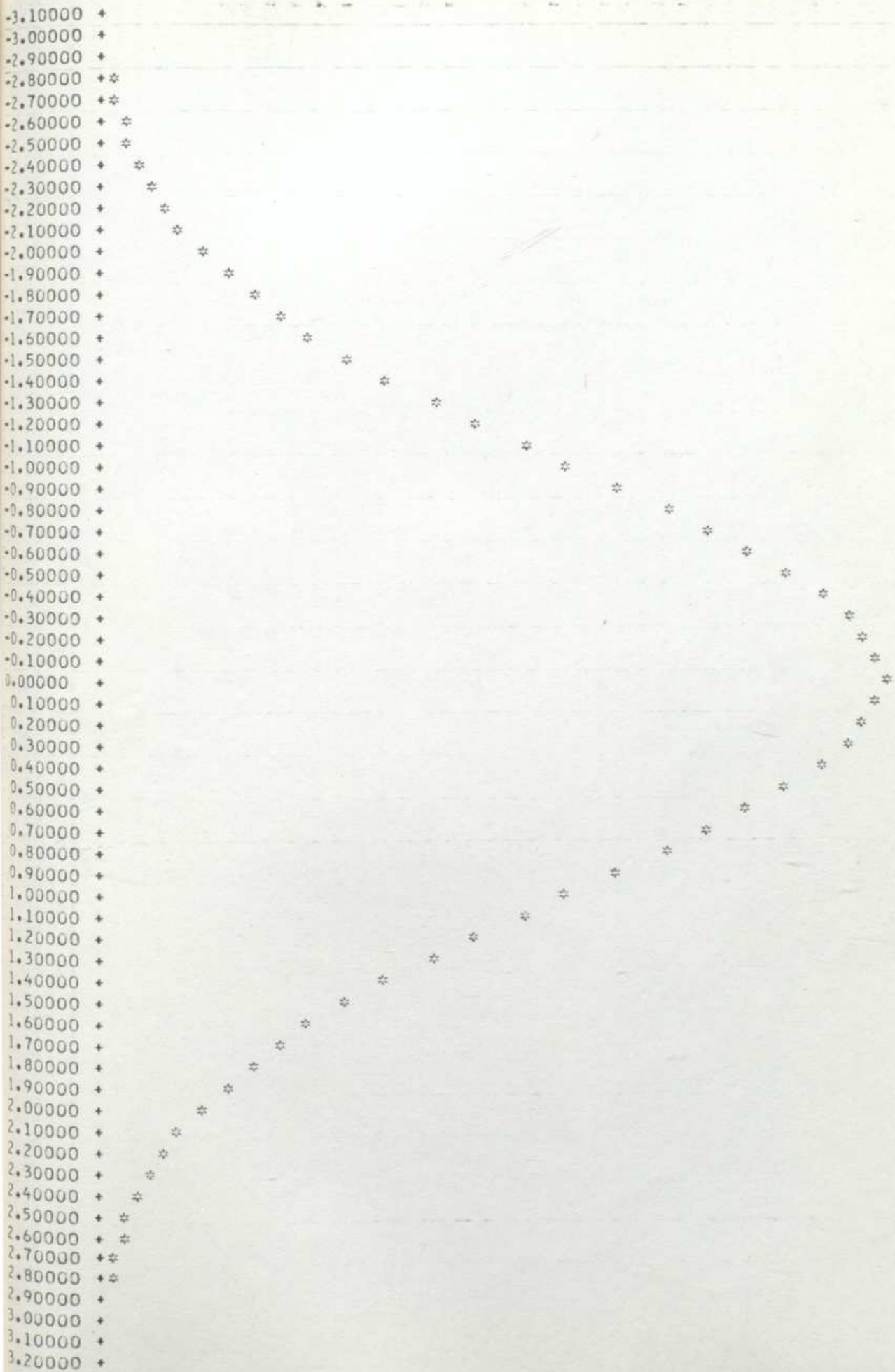
SONUCLAR		
NODE	TETA(DERECE)	STRESS
1	6	0.2497335670
2	18	0.2456123830
3	30	0.2970454690
4	42	0.4195977450
5	54	0.5681365540
6	66	0.7817966940
7	78	0.9904923440
8	90	1.2093887300
9	102	1.4335613300
10	114	1.6542711300
11	126	1.8597116500
12	138	2.0367603300
13	150	2.1725139600
14	162	2.2577247600
15	174	2.2860584300
16	186	2.2559280400
17	198	2.1700191500
18	210	2.0345954900
19	222	1.8597831700
20	234	1.6575365100
21	246	1.4405374500
22	258	1.2198600800
23	270	1.0037174200
24	282	0.7903978880
25	294	0.6044882540
26	306	0.4361923930
27	318	0.3121713400
28	330	0.2559298280
29	342	0.2543152570
30	354	0.2593442200

BAGIMSIZ DEGISKEN  
FUNCTION VALUES  
0.0000E+00

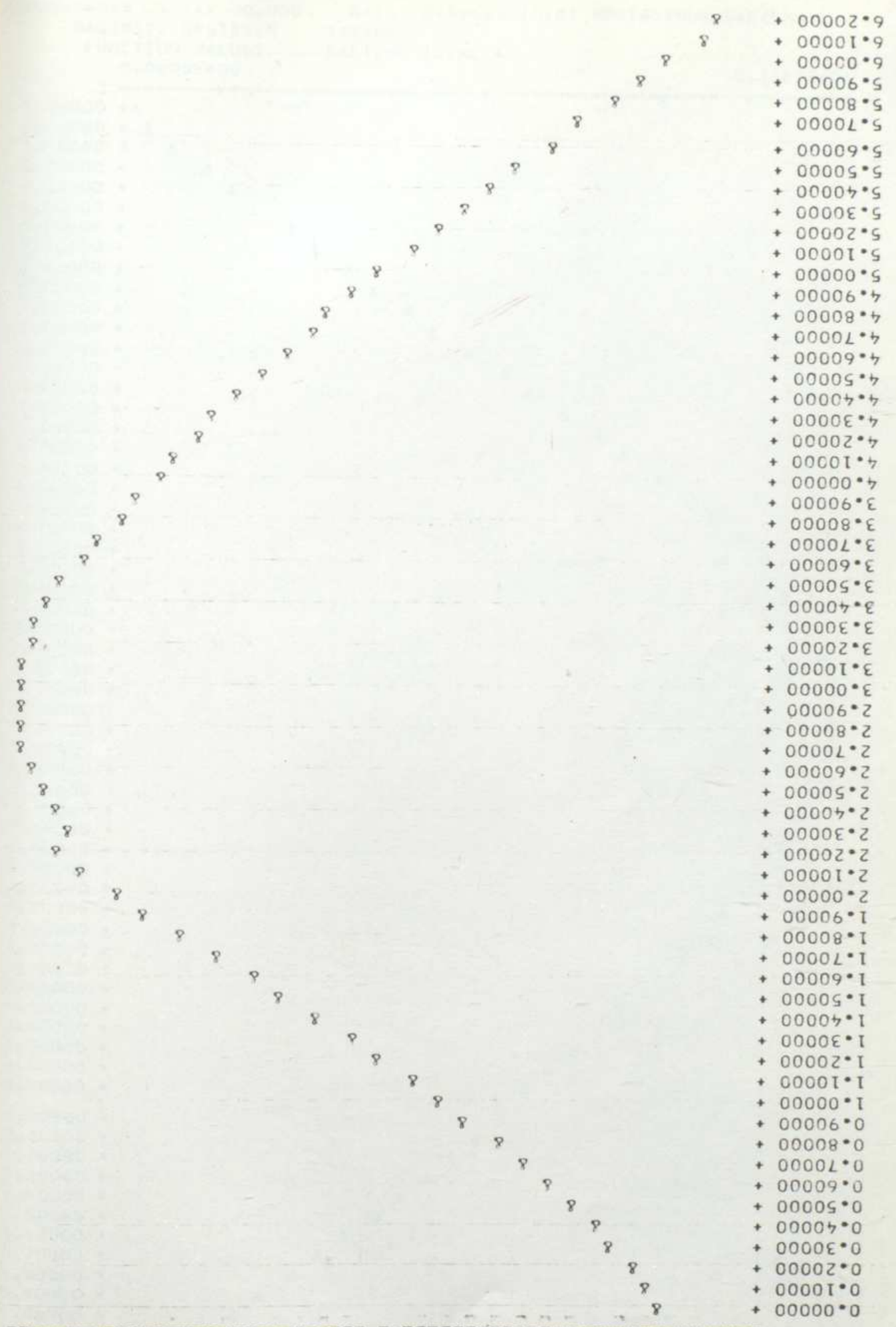
T(ZAMAN) SIG=1  
EXP(-T\*\*2/2\*SIG\*\*2)

0.1000E+01

68



00000	&			
04375	&			
08750	&			
13125	&			
17500	&			
21875	&			
26250	&			
30625	&			
35000	&			
39375	&			
43750	&			
48125	&			
52500	&			
56875	&			
61250	&			
65625	&			
70000	&			
74375	&			
78750	&			
83125	&			
87500	&+			
91875	&			
96250	&			
00625	&+			
05000	&			
09375	+&			
13750	&+			
18125	&			
22500	+&			
26875	&+			
31250	+	&		
35625	+		&	
40000	+			&
44375	+		&	
48750	+	&		
53125	&+			
57500	+&			
61875	&			
66250	&			
70625	&+			
75000	&			
79375	&+			
83750	&			
88125	&			
92500	&			
96875	&			
00000	&			
04375	&			
08750	&			
13125	&			
17500	&			
21875	&			
26250	&			
30625	&			
35000	&			
39375	&			
43750	&			
48125	&			
52500	&			
56875	&			
61250	&			
65625	&			
70000	&			
74375	&			
78750	&			
83125	&			
87500	&			
91875	&			
96250	&			
00625	&			
05000	&			
09375	&			
13750	&			
18125	&			
22500	&			
26875	&			
31250	&			
35625	&			
40000	&			
44375	&			



\*\*\*\*\* TETA= 0.000 R=1. X=R\*COS(TETA) NOKTASINDA SACILMA  
 BAGIMSIZ DEGISKEN T(ZAMAN)  
 SACILMA (GENLIK)  
 FUNCTION VALUES 0.0000E+00  
 -----  
 0.2536E+01



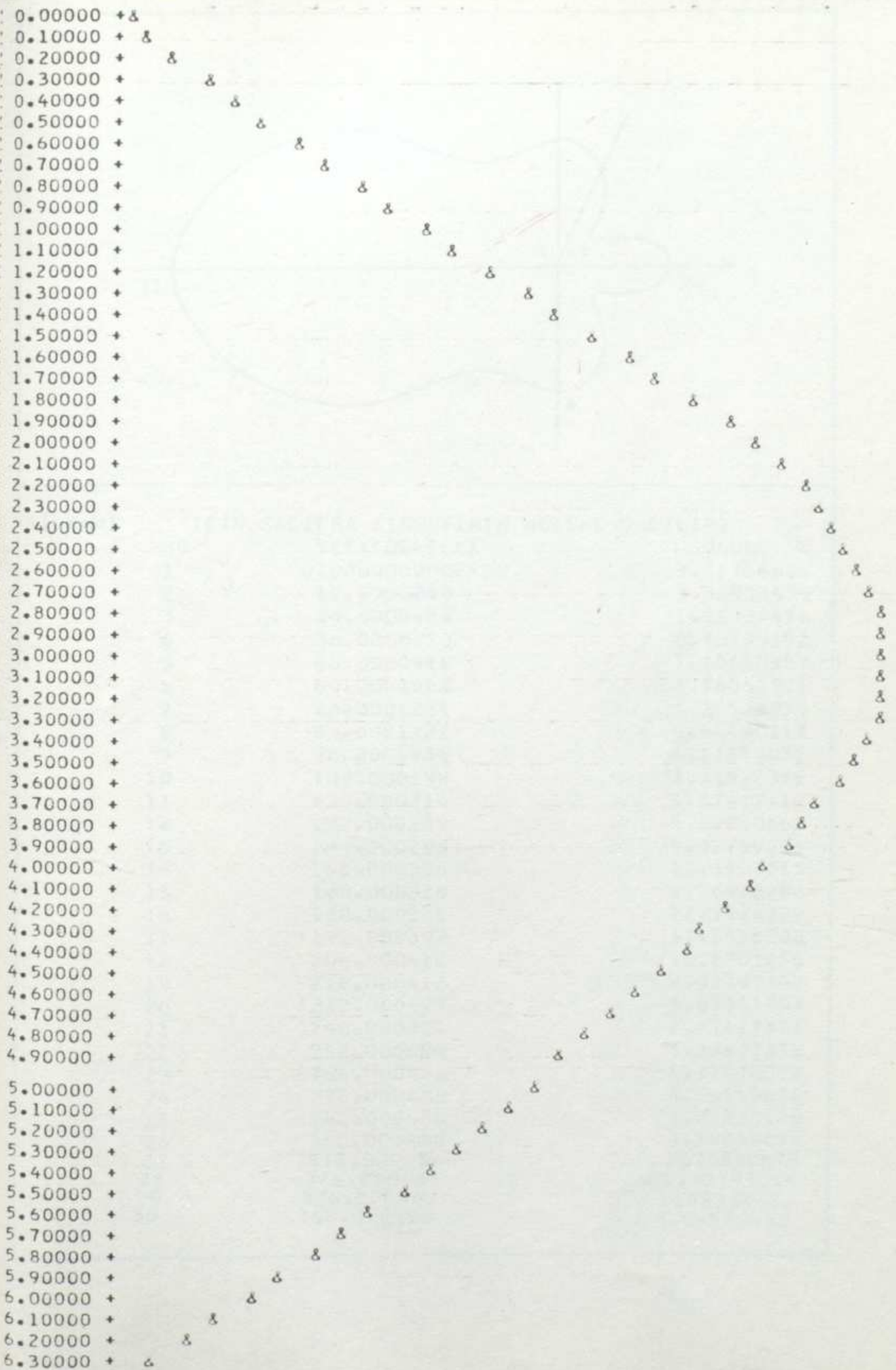
\*\*\*\*\* TETA= 30.000 R=1. X=R\*cos(TETA) NOKTASINDA SACILMA

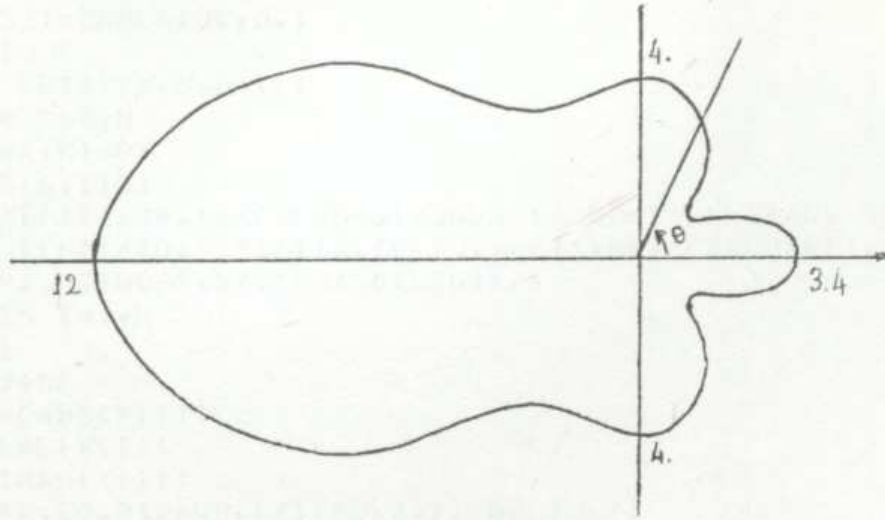
BAGIMSIZ DEGISKEN T(ZAMAN)

FUNCTION VALUES SACILMA (GENLIK)

0.0000E+00

0.1182E+01





SIGMA=1

ICIN SACILMA SIDDETININ ACISAL DAGILIMI

NO	TETA(DERECE)	SONUC
1	0.000000000E+00	3.41766644
2	12.0000248	3.03533459
3	24.0000458	1.98384476
4	36.0000610	0.73799192
5	48.0000916	1.70650387
6	60.0001068	3.18852901
7	72.0001221	4.22528934
8	84.0001221	4.54440117
9	96.0001984	4.11470032
10	108.000198	3.33422375
11	120.000214	3.87417412
12	132.000229	5.69800663
13	144.000290	8.02799034
14	156.000305	10.1703815
15	168.000320	11.6476288
16	180.000336	12.1724329
17	192.000397	11.6476288
18	204.000412	10.1703854
19	216.000412	8.02799702
20	228.000427	5.69801903
21	240.000504	3.87417507
22	252.000504	3.33422375
23	264.000488	4.11470032
24	276.000488	4.54440022
25	288.000488	4.22529125
26	300.000488	3.18853092
27	312.000488	1.70650673
28	324.000488	0.73799014
29	336.000488	1.98384666
30	348.000488	3.03533459

N=64

DT=0.1

DTN=DT\*N

DF=1./DTN

T=-DT

DO 114 I=1,32

T=T+DT

R=EXP(-T)

X(I)=CMPLX(R,0.)

X(I+32)=CMPLX(0.,0.)

114 CONTINUE

CALL FFTAY(X,6,64,1)

DO 88 K=1,N

88 X(K)=X(K)\*DT

WRITE(6,115)

115 FORMAT('1',7X,'EXP FONKSIYONUN 64 NOKTA FREKANS SPEKTRUMU'  
 \* (FFT 1LE)'/70(' ')/12X,'FREQ.(HZ)',5X,'REALPART',7X,'IMAG PART',  
 \*7X,'MAGNITUDE',5X,'PHASE( DEG)'/)

DO 116 I=1,N

J=I-1

DFN=J\*DF

AMAG=CABS(X(I))

XR=REAL(X(I))

XI=AIMAG(X(I))

IF((XR.EQ.0).AND.(XI.EQ.0.)) GO TO 71

ANGLE=57.2959\*ATAN2(XI,XR)

GO TO 116

71 ANGLE=0.

116 WRITE(6,119) J,DFN,X(I),AMAG,ANGLE

119 FORMAT(' ',15,1X,F13.6,2X,F13.6,2X,F13.6,2X,F13.6,2X,F13.9)

CALL FFTAY(X,6,64,-1)

PRINT\*,'-----TERS FOURIER DONU M -----'

PRINT\*,' NODE', ' REEL KISIM ', ' SANAL KISIM'

DO 78 I=1,N

J=I-1

X(I)=X(I)/DT

WRITE(6,120) J,X(I)

120 FORMAT(5X,15,2X,F13.6,2X,F13.6)

78 CONTINUE

STOP

END

SUBROUTINE FFTAY(X,M,N,KOT)

COMPLEX X(64),U,W,BB,T

IF(KOT.EQ.1) GO TO 109

DO 110 I=1,N

X(I)=CONJG(X(I))

110 CONTINUE

109 PI=3.14159265

NV2=N/2

NM1=N-1

DO 21 L=1,M

ML1=M-L+1

LE=2\*\* (ML1)

LE1=LE/2

U=CMPLX(1.,0.)

ARG=PI/LE1

CC=COS(ARG)

SS=-SIN(ARG)

W=CMPLX(CC,SS)

DO 20 J=1,LE1

DO 19 I=J,N,LE

IKIZ=1+LE1

BB=X(I)

X(I)=X(I)+X(IKIZ)

19 X(IKIZ)=U\*(BB-X(IKIZ))

20 U=U\*W

21 CONTINUE

J=1

DO 7 I=1,NM1

IF(I.GE.J) GO TO 5

T=X(J)

X(J)=X(I)

X(I)=T

5 K=NV2

6 IF(K.GE.J) GO TO 7

J=J-K

K=K/2

GO TO 6

7 J=J+K

IF(KOT.EQ.1) RETURN

DO 113 I=1,N

X(I)=CONJG(X(I))

X(I)=(1./N)\*X(I)

113 CONTINUE

RETURN

END

FFTAY YORDAMI ve KULLANIMI:  $e^{-x}$  FONKSIYONUNUN FOURIER ve TERS  
 FOURIER DÖNÜŞÜMÜ.

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
PRINT*, '      X      ' , '      ' , '      ' , '      ' , '      ' , '      ' , '      ' , '      ' , '      ' , '      '
DO 2 J=1,100
T=J*0.1
CALL BES(T,BJO,BYO,BJ1,BY1)
WRITE(6,10)T,BJO,BYO,BJ1,BY1
10 FORMAT(5X,F4.1,2X,F7.4,2X,F7.4,2X,F7.4,2X,F7.4)
2 CONTINUE
STOP
END
SUBROUTINE BES(T,BJO,BYO,BJ1,BY1)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
IF(T.LT.0) GO TO 1000
A=T/3.
B=3./T
IF(T.LT.3) GO TO 20
F0=.79788456-.00000077*B-.0055274*B**2-.00009512*B**3+
*.00137237*B**4-.00072805*B**5+.00014476*B**6
T0=T-.76539616-.04166397*B-.00003954*B**2+.00262573*B**3-
*.00054125*B**4-.00029333*B**5+.00013558*B**6
H1=1./SQRT(T)
H=H1*F0
BJO=H*DCOS(T0)
BYO=H*DSIN(T0)
F1=.79788456+.00000156*B+.01659667*B**2+.00017105*B**3-.00249511
**B**4+.00113653*B**5-.00020033*B**6
T1=T-2.35619449+.12499612*B+.00005650*B**2-.00637879*B**3
**+.00074348*B**4+.00079824*B**5-.00029168*B**6
H2=H1*F1
BJ1=DCOS(T1)*H2
BY1=DSIN(T1)*H2
RETURN
20 BJO=1.-2.2499997*A**2+1.2656208*A**4-.3163866*A**6+.0444479*A**8
**-.0039444*A**10+.000210*A**12
BYO=(2./3.1415)*DLOG(T/2.)*BJ0+.36746691+.60559365*A**2-.7435035*
*A**4+.25300117*A**6-.04261214*A**8+.00427916*A**10-.0002485*A**12
BJ1=(.5-.56249965*A**2+.21093573*A**4-.03954289*A**6+
*.00443319*A**8-.00031761*A**10+.00001109*A**12)*T
BY1=((2/3.141589)*T*DLOG(.5*T)*BJ1-.6366198+.2212091*A**2+
*2.1682709*A**4-1.3164827*A**6+.3123951*A**8-
*.0400976*A**10+.0027873*A**12)/T
GO TO 1100
1000 PRINT*, ' *** VARIABLE OF BESSEL IS LESS THAN ZERO!!! ***'
1000 RETURN
END

```

RES YORDAMI ve KULLANILMASI: BİLGİSAYAR ÇIKIŞLARI TABLO ve GRA-  
 FİK OLARAK ARKA SAHİFEDE VERİLMİŞTİR. (Bu sonuçlar  $J_0, J_1, Y_0, Y_1$   
 tablolarıyla aynen uyduğu görülmüştür.)

## TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, lineer elastisiteden seri formunda analitik çözümleri bilinen harmonik dalga için saçılma problemi ele alınmıştır. Seri formundaki analitik çözümler, serinin baskın terimleri toplanarak, yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Aynı problem Sınır İntegrali Yöntemi (BİEM) ile de çözülmüş ve yukardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuçların uyduğu gözlemlendikten sonra, problemin genelleştirilmesi cihetine gidilmiş ve herhangi bir dalga fonksiyonu için saçılma problemi, BİEM'le çözümlenmiştir.

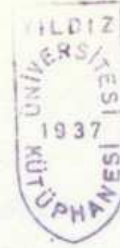
Bu sayısal çözümleri değerlendirmek için; çalışmamızın bundan sonraki kısmında, FFT yordamı kullanılmak suretiyle, problem, yukarıdaki harmonik dalganın saçılması problemine indirgenerek çözümlenmiştir.

Bu metodların, avantajlarını ve dezavantajlarını şöylece özetleyebiliriz : BİEM'in en önemli bir avantajı, problemin boyutunun bir boyut düşürmesidir. Bunun çözümde kazandırdığı zaman ve işlem sayısı önemlidir. Ayrıca bu metod, sonsuz bir bölgede veya sonlu bir bölge olup çözüme sonlu sayıda noktada ihtiyaç duyulması durumunda da, büyük bir avantaja sahiptir. Bunlara ilaveten; eliptik, parabolik ve hiperbolik lineer kısmi türevli denklemlerin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Bu metodun, Değişkenlerine Ayırma Metodu'nun istediği, basit geometrik yapıya bağımlı olmayışı, bir başka üstünlüğünü göstermektedir.

Bugün, Sınır İntegrali Yöntemi ile çözülmeye çalışılan mühendislik problemlerinin ve uygulama alanlarının, giderek arttığını görmekteyiz. Şu anda üzerinde çalışılan çok önemli konulardan bazıları şunlardır : Akustikte, iki veya üç boyutlu dış bölge saçılma problemlerinde uygun baz fonksiyonlarının seçimi Keyfi yüzeylerden saçılma. İç bölge problemlerinde özdeğerlerin bulunması. Akustikte ortamın homojen olmamasına karşı gelen su dalgalarındaki derinliğin faz hızına etkilemesi problemleri vb.

İkinci metodumuz ise, önce analitik çözümü bilinen bir boyutlu dalga problemlerinde denenmiş ve gerçek analitik sonuçlarla tamamen uyduğu görülmüştür. FFT yordamının kazandırdığı zaman ve işlem azlığı avantajı ve Fourier integrallenebilir her fonksiyonun bu şekilde temsili ; bu yöntemin, ilerde sayısal hesaplamalarda daha fazla kullanılabileceği kanısını vermektedir.

## KAYNAKLAR



1. Eringen, A.C., Suhubi, E.S., "Elastodynamics II: Linear Theory" Academic Press, New York, 1975..
2. Morse, P.M., and Feshbach, H. "Methods of Theoretical Physics" Mc Graw Hill, New-York, 1953.
3. Pao, Y.-H., and Mow, C.C., "Diffraction elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations", Crone Russak, New-York, 1973.
4. Brebbia, C.A., "The Boundary Element method for Engineers" Pentech Press, 1978.
5. Banaugh, R.P., and Coldsmith, W., "Diffraction of steady acoustic waves by Surfaces of arbitrary Shape", J.Acoustical soc. Amer., Vol. 35, 1963, p.1590.
6. Chu, L.L., Çakmak, A.S., Aşkar, A., "Born Approximation for Wave scattering in Elastodynamics", ASME paper, 1980.
7. Chu, L.L., "An Approximate Method for scattering in Elastodynamics: the Born Approximation", Ph. D.thesis, Dep. of CE, Princeton University 1980.
8. Jas Won, M.A. and Symm, G.T., "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics", Academic Press, New-York, 1977.
9. Shaw, R.P., "Boundary Integral Equation Method Applied to wave problems", "Developments in Boundary element Methods Vol.I.P.K. Banerjee and R.Butterfield, (Eds.), Applied science Publishers Ltd., London, 1976, Chapter 6.
10. Soenarko, B., "An Advanced Boundary Element Formulation, For Acoustic Radiation and Scattering in Three Dimensions", Ph. D.dissertation, Department of Mechanical Engineering University of Kentucky, 1983.

11. Seybert A.F., Soenarko B., Rizzo J.F. Shippy, D.J.  
"Application of the BIE Method to Sound Radiation Problems Using  
an isoparametric Element", College of Engineering, Lexington, KY,  
40506
12. Long, U., K-T. Schleicher and W.L. Wendland.  
The Fast Fourier Transform and the numerical Solution of one-  
dimensional Boundary Integral Equations.  
Numerische Mathematic springer-verlag 1985.
13. Wendland, W.L. Asymptotic accuracy and convergence in progress in  
boundary Element method (C.A. Brebbia, ed) pp. 289-313 London,  
Plymouth Pentech Press 1981.
14. Bringham, E.D., The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, inc  
Englewood Cliffs, W.J., 1974.
15. Helms, H.D., J.F.Kaiser, and L.R. Rabiner (eds.):  
Literature in Digital Signal Processing: Author and Permuted  
Title index (Revised and Extended edition), IEEE Press, New-York,  
1977.
16. Salazar, A.C.(ed.): Digital Signal Computers and Processors,  
IEEE Press, New.York, 1977.
17. BRACEWELL, R., The Fourier Transform and its Applications.  
New York: Mc Graw-Hill, 1965.
18. Ian Sneddon. Elements of Partial differential equation London, 1957
19. Aitkensan Numerical Analysis.



## ÖZGEÇMİŞ

1951 yılında Yahyalı'nın Yerköy köyünde doğdum.

İlk öğrenimimi Yerköy ilkokulunda, orta öğrenimimi Yahyalı Ortaokulu ve Sivas İlköğretmen Okulunda, yüksek öğrenimimi ise 1968 - 1972 yıllarında Ankara Yükseköğretmen Okulu - Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümünde yaptım.

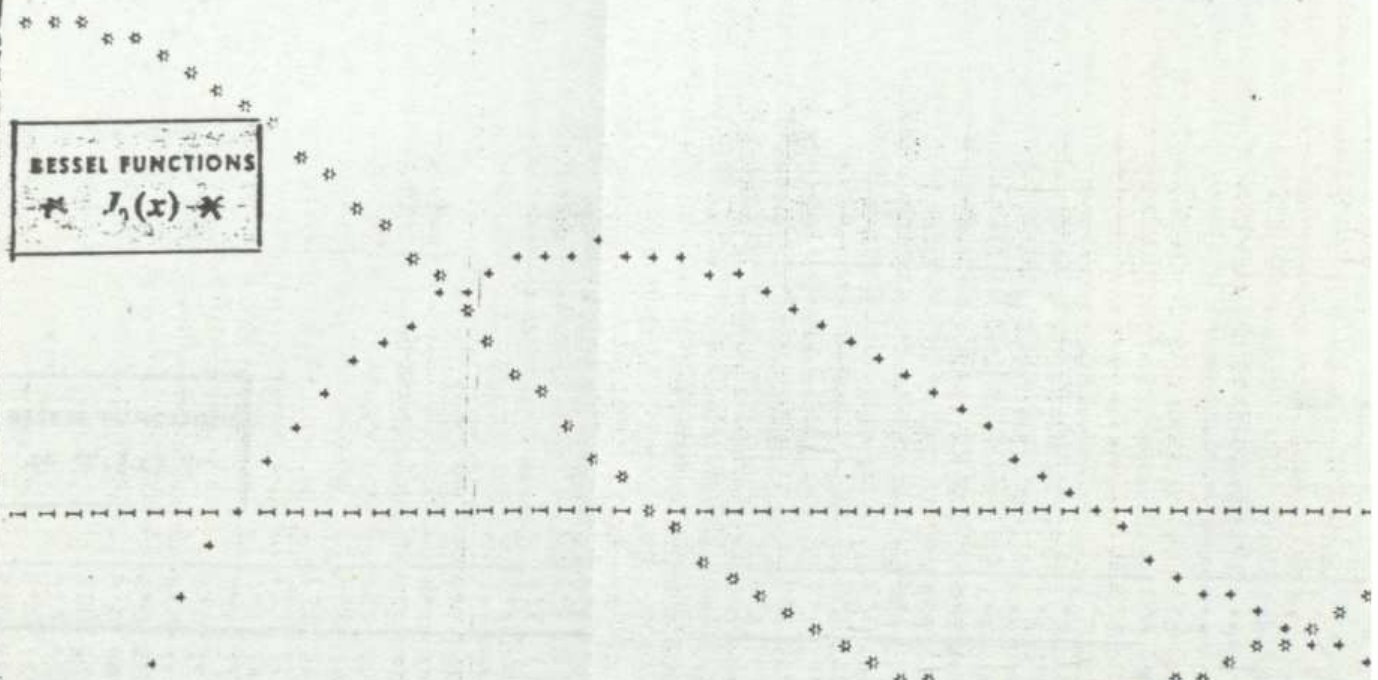
Malatya Kız İlköğretmen Okulu ve Ankara Fen Lisesi'nde toplam beş yıl matematik öğretmenliği yaptıktan sonra 1977'de İ.D.M.M.Akademisi Matematik bölümüne asistan olarak atandım. Yüksek lisans öğrenimimi ise Boğaziçi Üniversitesi matematik bölümünde tamamladım.

Evli ve üç çocuk babası olup, halen Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım.

Main Display  
 FUNCTION VALUES  
 :0.1081E+01

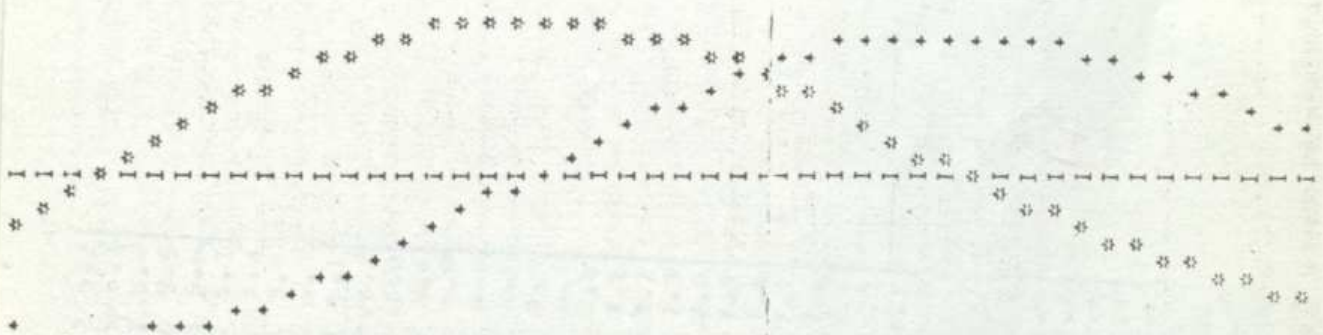
BJ, BY

0.9975E+00



x	J <sub>0</sub> (x)	Y <sub>0</sub> (x)
0.1	0.9999	-1.0111
0.2	0.9976	-0.9977
0.3	0.9914	-0.9691
0.4	0.9814	-0.9335
0.5	0.9682	-0.8912
0.6	0.9512	-0.8423
0.7	0.9301	-0.7974
0.8	0.9052	-0.7558
0.9	0.8769	-0.7174
1.0	0.8456	-0.6821
1.1	0.8116	-0.6499
1.2	0.7754	-0.6207
1.3	0.7365	-0.5944
1.4	0.6954	-0.5709
1.5	0.6527	-0.5499
1.6	0.6080	-0.5313
1.7	0.5620	-0.5150
1.8	0.5154	-0.5007
1.9	0.4680	-0.4882
2.0	0.4206	-0.4773
2.1	0.3730	-0.4679
2.2	0.3251	-0.4599
2.3	0.2768	-0.4532
2.4	0.2281	-0.4477
2.5	0.1790	-0.4433
2.6	0.1295	-0.4399
2.7	0.0796	-0.4375
2.8	0.0293	-0.4360
2.9	-0.0214	-0.4353
3.0	-0.0728	-0.4353
3.1	-0.1247	-0.4359
3.2	-0.1770	-0.4371
3.3	-0.2297	-0.4388
3.4	-0.2828	-0.4410
3.5	-0.3362	-0.4437
3.6	-0.3899	-0.4468
3.7	-0.4439	-0.4503
3.8	-0.4982	-0.4542
3.9	-0.5528	-0.4584
4.0	-0.6076	-0.4630
4.1	-0.6626	-0.4679
4.2	-0.7178	-0.4731
4.3	-0.7732	-0.4785
4.4	-0.8288	-0.4842
4.5	-0.8846	-0.4901
4.6	-0.9406	-0.4962
4.7	-0.9968	-0.5025
4.8	-1.0532	-0.5090
4.9	-1.1098	-0.5157

5.2	0.0755	0.3374
5.3	0.0412	0.3402
5.4	0.0053	0.3395
5.5	0.0270	0.3354
5.6	0.0537	0.3292
5.7	0.0917	0.3177
5.8	0.1220	0.3044
5.9	0.1506	0.2892
5.1	0.1773	0.2574
6.2	0.2017	0.2483
6.3	0.2233	0.2251
6.4	0.2433	0.1999
6.5	0.2601	0.1742
6.6	0.2740	0.1452
6.7	0.2851	0.1162
6.8	0.2931	0.0864
6.9	0.2981	0.0563
7.0	0.3071	0.0253
7.1	0.2991	0.0042
7.2	0.2951	0.0339
7.3	0.2832	0.0628
7.4	0.2796	0.0907
7.5	0.2653	0.1177
7.6	0.2516	0.1424
7.7	0.2345	0.1657
7.8	0.2154	0.1872
7.9	0.1944	0.2055
8.0	0.1717	0.2235
8.1	0.1475	0.2391
8.2	0.1222	0.2501
8.3	0.0950	0.2530
8.4	0.0632	0.2592
8.5	0.0413	0.2702
8.6	0.0165	0.2715
8.7	0.0125	0.2700
8.8	0.0332	0.2637
8.9	0.0653	0.2532
9.0	0.0973	0.2403
9.1	0.1162	0.2243
9.2	0.1357	0.2045
9.3	0.1577	0.1835
9.4	0.1764	0.1597
9.5	0.1939	0.1312
9.6	0.2070	0.1002
9.7	0.2218	0.1277
9.8	0.2323	0.1045
9.9	0.2403	0.0204



0.0755 0.3374  
0.2403 0.0204

IMSIZ ØEIGISKEN  
 ACTION VALUES  
 324E+01

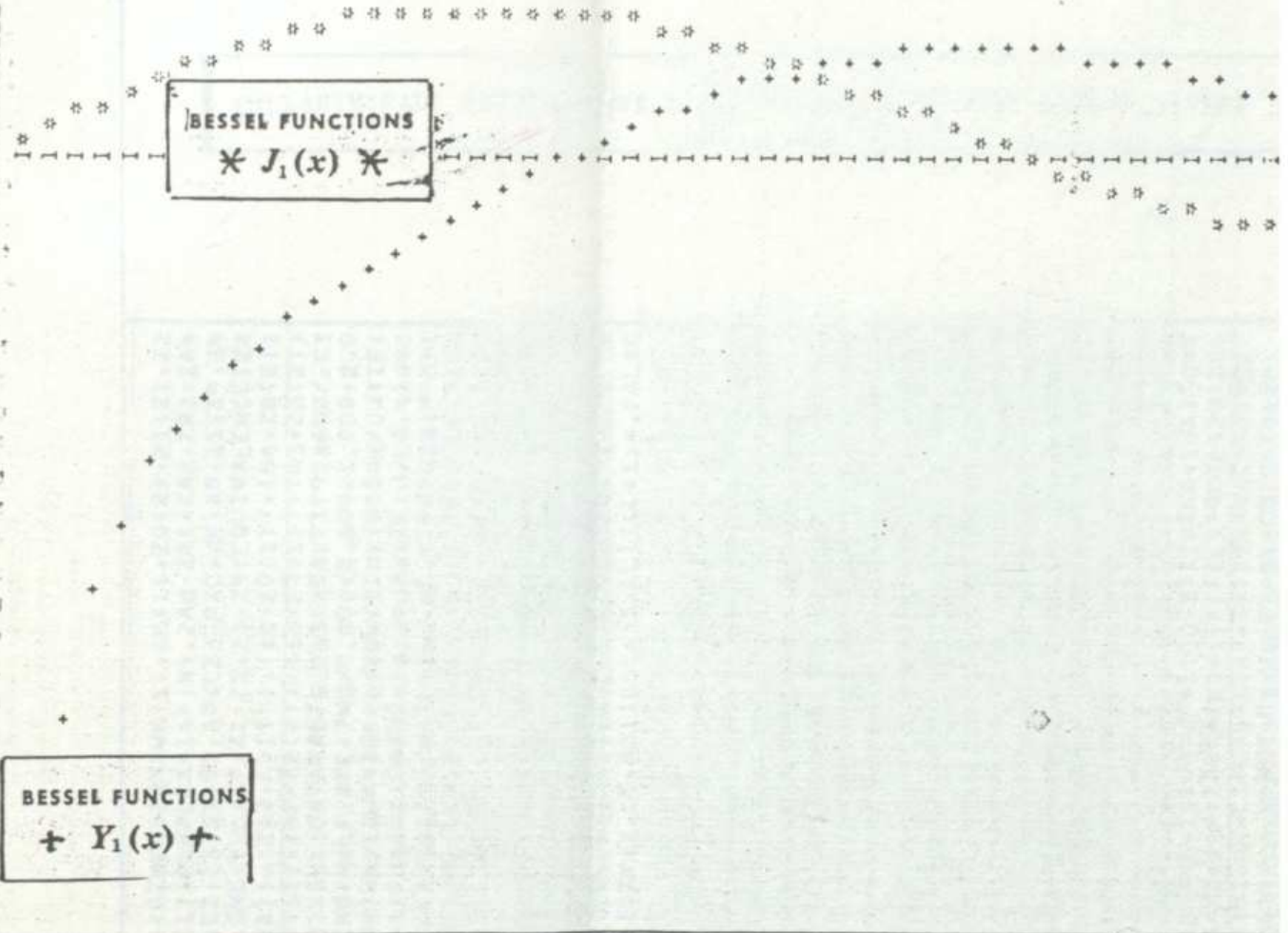
X  
 BJ+BY

0.5815E+00

$J_0(x)$	$Y_1(x)$	$x$
0.0477	-0.4590	0.1
0.0772	-0.3236	0.2
0.1433	-2.2931	0.3
0.1760	-1.7809	0.4
0.2423	-1.4715	0.5
0.2997	-1.2604	0.6
0.3290	-1.1032	0.7
0.3666	-0.9781	0.8
0.4054	-0.8731	0.9
0.4401	-0.7812	1.0
0.4709	-0.6961	1.1
0.4983	-0.6211	1.2
0.5220	-0.5485	1.3
0.5419	-0.4791	1.4
0.5577	-0.4123	1.5
0.5697	-0.3476	1.6
0.5773	-0.2847	1.7
0.5815	-0.2237	1.8
0.5812	-0.1644	1.9
0.5767	-0.1070	2.0
0.5683	-0.0517	2.1
0.5560	0.0015	2.2
0.5397	0.0523	2.3
0.5202	0.1005	2.4
0.4971	0.1459	2.5
0.4708	0.1864	2.6
0.4416	0.2276	2.7
0.4097	0.2635	2.8
0.3754	0.2957	2.9
0.3391	0.3247	3.0
0.3007	0.3496	3.1
0.2613	0.3707	3.2
0.2207	0.3879	3.3
0.1792	0.4010	3.4
0.1374	0.4102	3.5
0.0952	0.4154	3.6
0.0533	0.4167	3.7
0.0122	0.4141	3.8
-0.0272	0.4076	3.9
-0.0670	0.3979	4.0
-0.1033	0.3846	4.1
-0.1386	0.3680	4.2
-0.1715	0.3484	4.3
-0.2026	0.3260	4.4
-0.2311	0.3016	4.5
-0.2558	0.2757	4.6
-0.2771	0.2445	4.7
-0.2955	0.2136	4.8
-0.3117	0.1812	4.9

BESSEL FUNCTIONS  
 +  $Y_1(x)$  +

BESSEL FUNCTIONS  
 \*  $J_1(x)$  \*





KULLANIM: CALL FFTP(A,N,IWK,WK,LL) A:KOMPLEKS VERİ DİZİSİ,N:VERİ SAYISI POZİTİ

```
SUBROUTINE FFTP(A,N,IWK,WK,LL) DIMENSION IWK(1),WK(1),Z0(2),Z1(2),Z2
*(2),Z3(2),Z4(2) LOGICAL LL(1) COMPLEX*16 A(N),ZA0,ZA1,ZA2,ZA3,ZA4
** AK2 IDURPRECISION CM,S1,C2,C3,S1,S2,S3,C30,RAD,WK,A0,A1,A4,B4
** A2,A3,B0,B1,B2,B3,ZERO,HALF,ONE,TWO,Z0,Z1,Z2,Z3,Z4,EQUIVALENCE(ZA
*0,Z0(1)),(ZA1,Z1(1)),(ZA2,Z2(1)),(ZA3,Z3(1)),(A0,Z0(1)),(B0,Z0(2))
** (A1,Z1(1)),(B1,Z1(2)),(A2,Z2(1)),(B2,Z2(2)),(A3,Z3(1)),(B3,Z3(2))
** (ZA4,Z4(1)),(Z4(1),A4),(Z4(2),B4) DATARAD/6.28318530717958600/.C3
*0/.866025403784438600/DATAZERO,HALF,ONE,TWO/0.000,0.500,1.000,2.0
*00/IF(N.EQ.1)GOTO90051K=NIM=0J=2IJJ=4IJJF=0IWK(I)=I+I5:I=K/JJIF(
** I*JJ.NF.K)GOTO10I=M+1IWK(M+1)=JIK=IIGOTO510:J=J+2IF(J.EQ.4)J=3
JJ=J+JIF(JJ.LE.K)GOTO5IKY=M+J=2I15:I=K/JIIF(I*J.NE.K)GOTO20I=M+1
IWK(M+1)=JIK=IIGOTO15I20:J=J+IIF(J.EQ.3)GOTO15I30:J=J+IIF(J.LE.K)GO
*TO15:K=IWK(M+1)IF(IWK(KT+1).GT.IWK(M+1))K=IWK(KT+1)IF(KT.LE.0)GO
*TO30IKTP=KT+2IN025I=1,KT:J=KTP-I,M=M+1IWK(M+1)=IWK(J)I25:CONTINUE
30 MP=M+1:IC=MP+1:ID=IC+MPIILL=ID+MPIIRO=ILL+MP+1:ICC=IRD+MPIISS=ICC+
*MP:ICK=ISS+MPI:TSK=ICK+K:ICF=ISK+K:ISF=ICF+K:IAF=ISF+K:KD2=(K-1)/2+
*1IBP=IAP+KD2:IAM=IBP+KD2:I8M=IAM+KD2:MM1=M-1I1=1I35:L=MP-I:J=IC-I
LL(ILL+L)=(IWK(J-1)+IWK(J)).EQ.4IYF(.NOT.LL(ILL+L))GOTO40IY=I+1IL=
*L-1ILL+L)=.FALSE.I40:I=I+1IIF(I.LE.MM1)GOTO35ILL(ILL+1)=.FALSE
** ILL(ILL+MP)=.FALSE.IWK(IC)=IWK(ID)=NIDO45J=1,MK=IWK(J+1)IWK(
*IC+J)=IWK(IC+J-1)*KIWK(ID+J)=IWK(ID+J-1)/KIWK(IRD+J)=RAD/IWK(IC+J
*)IC1=RAD/KIIF(K.LE.2)GOTO45IWK(IC+J)=DCOS(C1)IWK(ISS+J)=DSIN(C1)
45. CONTINUE:MM=M+1IF(LL(ILL+M))MM=M-1IF(MM.LE.1)GOTO50ISM=IWK(IC+MM-2
*)WK(IRD+M):CM=DCOS(SM):SM=DSIN(SM):50:KB=0:KN=N:JJ=0:I=1:CI=ONE:I5
*1=ZERO:I1=1:65:TSP=IWK(ID+I)IF(LL(ILL+I+1))GOTO60IKF=IWK(I+1)GOTO65I
60 KF=4I=I+1:70:IF(KF.GT.4)GOTO140IGOTO(75,75,90,115),KF:75:K0=K
*8+ISP:K2=K0+ISPIIF(LL)GOTO85:80:K0=K0-1IIF(K0.LT.KB)GOTO190IK2=K2-
*1ZA4=A(K2+1)IA0=A4+C1-B4*S1IB0=A4*S1+B4*C1A(K2+1)=A(K0+1)-ZA0:IA(
*K0+1)=A(K0+1)+ZA0IGOTO80:85:K0=K0-1IIF(K0.LY.KB)GOTO190IK2=K2-1IAK
*2=A(K2+1)IA(K2+1)=A(K0+1)-AK2:IA(K0+1)=A(K0+1)+AK2IGOTO85:90:IF(LL)
*60TO95:IC=C1*C1-S1*S1:S2=B2+A4*S2+B4*C2IGOTO105:100:ZA1=A(K1+1):ZA2=A(
*1)IAA=IA+ID01:0I=IKB:IAJAK0=KA-I+1IK1=K0+ISPIK2=KI+ISPIZA0=A(K0
**+1)IF(LL)GOTO100:104=A(K1+1)IA1=A4+C1-B4*S1IB1=A4*S1+B4*C1:ZA4=A(
*K2+1):ZA2=A4+C2-B4*S2:B2=A4*S2+B4*C2IGOTO105:100:ZA1=A(K1+1):ZA2=A(
*K2+1):05:A(K0+1)=DCMPLX(A0+A1+A2,B0+B1+B2)IA0=-HALF*(A1+A2)+A0:IA1
**=(A1-A2)*C30IB0=-HALF*(B1+B2)+B0IB1=(B1-B2)*C30IA(K1+1)=DCMPLX(A0-
*B1,B0+A1)IA(K2+1)=DCMPLX(A0+B1,B0-A1)I10:CONTINUEIGOTO190:115:IF(
*LL)GOTO120:122=C1*C1-S1*S1:S2=TWO*C1*S1IC3=C1+C2-S1*S2IS3=S1*C2+C1*
*S2I120:JA=KB+ISP-1IKA=JA+KBIKB=KR+1IJA=JA+1ID0135II=IKB:IAJAK0=K
*A-I+1IK1=K0+ISPIK2=K1+ISPIK3=K2+ISPIZA0=A(K0+1)IF(LL)GOTO125IZA4
**=A(K1+1)IA1=A4+C1-B4*S1IB1=A4*S1+B4*C1:ZA4=A(K2+1)IA2=A4+C2-B4*S2
B2=A4*S2+B4*C2:ZA4=A(K3+1)IA3=A4+C3-B4*S3IB3=A4*S3+B4*C3IGOTO130I
125 ZA1=A(K1+1):ZA2=A(K2+1):ZA3=A(K3+1)I130:A(K0+1)=DCMPLX(A0+A2+A1+A3
**+B0+B2+B1+B3)IA(K1+1)=DCMPLX(A0+A2-A1-A3,B0+B2-B1-B3)IA(K2+1)=DCMP
*LX(A0-A2-B1+B3,B0-B2+A1-A3)IA(K3+1)=DCMPLX(A0-A2+B1-B3,B0-B2-A1+A3
*)I135:CONTINUEIGOTO190:140:JK=KF-1IKH=JK/2:K3=IWK(ID+I-1)IK0=KB+IS
*PIIF(LL)GOTO150IK=JK-1IWK(ICF+1)=C1IWK(ISF+1)=S1ID0145J=1,K1WK(ICF
**+J+1)=WK(ICF+J)*C1-WK(ISF+J)*S1IWK(ISF+J+1)=WK(ICF+J)*S1+WK(ISF+J)
**C1I145:CONTINUEI150:IF(KF.EQ.JF)GOTO160IC2=WK(ICC+I)IWK(IRK+1)=C2
```

```

*PIF(L1)GOTO150IK=JK-1IWK(ICF+1)=C1IWK(ISF+1)=S1ID0145J=1,KIWK(ICF
*+J+1)=WK(ICF+J)*C1-WK(ISF+J)*S1IWK(ISF+J+1)=WK(ICF+J)*S1+WK(ISF+J)
**C1I145:CONTINUEI150:IF(KF*EQ.JF)GOTO160I2=C2IWK(ICC+I)IWK(ICK+1)=C2
WK(ICK+JK)=C2I2=S2=WK(ISS+I)IWK(ISK+I)=S2IWK(ISK+JK)=S2ID0155J=1,KH
K=JK-JIWK(ICK+K)=WK(ICK+J)*S2+WK(ICK+J)*S2IWK(ICK+J+1)=WK(ICK+K)IW
*K(ISK+I+1)=WK(ICK+J)*S2+WK(ICK+J)*S2IWK(ICK+K)=WK(ICK+J+1)
155 CONTINUEI160:K0=K0-1I1=K1+K0I2=K0+K3I2A0=AK0+I1I2A3=A0I83=B0ID0175J
*=1,KHIK1=K1+ISPICK2=K2-ISP:IF(L1)GOTO165IK=KF-JI2A4=A(K1+1)I1A1=A4*W
*K(ICF+J)-B4*WK(ISF+J)I1B1=A4*WK(ISF+J)+B4*WK(ICF+J)I2A4=A(K2+1)I2A2=
*A4*WK(ICF+K)-B4*WK(ISF+K)I2B2=A4*WK(ISF+K)+B4*WK(ICF+K)IGOTO170I
165 ZAI=A(K1+1)I2A2=A(K2+1)I170:WK(IAP+J)=A1+A2IWK(IAM+J)=A1-A2IWK(IBP
*+J)=B1+B2IWK(IRM+J)=B1-B2I2A3=A1+A2+A3I2B3=B1+B2+B3I175:CONTINUE:AK
*0+1)=DCMPLX(A3,B3)IK1=K0I2=K0+K3ID0185J=1,KHIK1=K1+ISPICK2=K2-ISP
JK=JIA1=A0I81=R0I2=ZEROI2B2=ZEROID0180K=1,KHIAI=A1+WK(IAP+K)*WK(IC
*K+JK)I2A2=A2+WK(IAM+K)*WK(ISK+JK)I1B1=B1+WK(IBP+K)*WK(ICK+JK)I2B2=
*WK(IBM+K)*WK(ISK+JK)IJK=JK+JIF(JK,GE,KF)JK=JK-KF:180:CONTINUE:AK
*1+1)=DCMPLX(A1-B2,B1+A2)IA(K2+1)=DCMPLX(A1+B2,B1-A2)I185:CONTINUE
IF(K0,GT,KB)GOTO160I2F=KF+190:IF(I,GE,MM)GOTO195II=I+1IGOTO55I
195 I=MMII=-FALSE.IKB=IWK(ID+I-1)+KB:IF(KB,GE,KN)GOTO215:200:JJ=IWK(I
*K+I-2)+J:JIF(JJ,LT,IWK(IC+I-1))GOTO205II=-I-IJ=JJ-IWK(IC+I)IGOTO2
*00I205:IF(I,NE,MM)GOTO210I2=C2=C1IC1=CM+C1-SM*S1I2=S1+SM+C2+CM*S1IGOTO
*70I210:IF(ILL+I)I=I+1IGOTO55I215:I=1:JA=KT-1:KA=JA+1:IF(JA,LT,
*1)GOTO225ID0220II=1,JA:J=KA-IIIWK(J+1)=IWK(J+1)-1II=IWK(J+1)+1I
220 CONTINUE:225:IF(KT,LE,0)GOTO270I2=I+1I=0:KB=0I230:K2=IWK(ID+J)+KB:K
*3=K2I2J=IWK(IC+J-1)IJK=JJ:K0=KB+JJ:ISP=IWK(IC+J)-JJ:235:K=K0+JJ:
240 Z4=A(K0+1)IA(K0+1)=A(K2+1)IA(K2+1)=Z4:K0=K0+1I2=K2+1:IF(K0,LT,K
*1)GOTO240IK0=K0+ISPICK2=K2+ISP:IF(K0,LT,K3)GOTO235:IF(K0,GE,K3+ISP)G
*0I245:Kn=K0-IWK(ID+J)+JJIGOTO235I245:K3=IWK(ID+J)+K3:IF(K3-K8,GE,
*IWK(ID+J-1))GOTO250I2=K3+JK:JK=JK+JJ:K0=K3-IWK(ID+J)+JKIGOTO235I
250 IF(J,GF,KT)GOTO260IK=IWK(J+1)+I:J=J+1I255:I=I+1IWK(ILL+I)=J:IF(I,
*LT,K)GOTO255IGOTO230I260:KB=K3:IF(I,LE,0)GOTO265:J=IWK(ILL+I)I=I-
*1IGOTO230I265:IF(KB,GE,N)GOTO270I2=IWK(ID+J)+K2:K2=K2+1:IF(K0,LT,K
**=IWK(IN+KT)IM=M-KT:KB=ISP/JM-2:IF(KT,GE,M-1)GOTO9005:ITA=ILL+KB+1
*(IDM1+J)/JK:IDM1=ID-1:IKT=KT+1:IM=M+1ID0275J=IKT,IM:IWK(IDM1+J)=IWK
*JJ:IF(I,LT,IWK(ID+K))GOTO285:JJ=JJ-IWK(ID+K)IK=K+1IGOTO280I
285 IWK(ILL+J)=JJ:IF(JJ,EQ,J)IWK(ILL+J)=-J:290:CONTINUE:ID0300J=1,KB:IF
*(IWK(ILL+J),LE,0)GOTO300;K2=J:295:K2=IABS(IWK(ILL+K2))IF(K2,EQ,0)
*GOTO300IWK(ILL+K2)=-IWK(ILL+K2)IGOTO295I300:CONTINUE:II=0:KB=0
KN=N:305:J=J+1:IF(IWK(ILL+J),LT,0)GOTO305:K=IWK(ILL+J)IK0=JK+K+KB
310 Z4=A(K0+1)IWK(ITA+I)=A1IWK(ITB+I)=B4:II=I+1:IF(I,LT,JK)GOTO310II
*=0I315:K=-IWK(ILL+K)IJJ=K0IK0=JK+K+KB:320:A(JJ+I+1)=A(K0+I+1)II=I+
*1:IF(I,LT,JK)GOTO320II=0:IF(K,NE,J)GOTO315:325:A(K0+I+1)=DCMPLX(IWK
*(ITA+I)+K(ITB+I))II=I+1:IF(I,LT,JK)GOTO325II=0:IF(J,LT,K2)GOTO305
J=0:KB=KR+ISPIF(KB,LT,KN)GOTO305:9005:RETURN:END

```

