

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yalınkat Meromorf Fonksiyonlar

Ahmet Dernek
Doktora Tezi

Ref
MTM
58
1983

1172

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR SINIFINDA DESTEK NOKTALARIN EKSTREMAL ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Ahmet Dernek

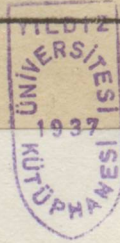
**İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü**

KASIM 1983

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

R 209

Kot : 62
Alındığı Yer : Fen Bil. Enst.
Tarih : 26/5/1987
Fatura : -
Fiatı : 1000Tl.
Ayniyat No : 1/6
Kayıt No : 44825
UDC : 517.5 378.242
Ek :



Coğrafya

İÇİNDEKİLER

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR SINIFINDA
DESTEK NOKTALARIN EKSTREMAL ÖZELLİKLERİ

Doktora Tezi

Ahmet DERNEK

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Kasım 1983

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ	1
1. YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI	4
1.1. S Sınıfında Ekstremal Özellikler	4
1.2. Yalınkat Meromorf Fonksiyonlar	8
2. $S(p)$ SINIFININ EKSTREMAL ÖZELLİKLERİ	13
2.1. $\sigma(p)$ Sınıfında Ekstremal Özellikler	13
2.2. Katsayı Problemleri	25
2.3. Meromorf Fonksiyonların Alt Sınıfları	31
LİTERATÜR	38

GİRİŞ

Birim daire $D = \{z : |z| < 1\}$ de analitik fonksiyonların cümlesi $H(D)$ olsun.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

açılımını haiz yalınkat $f \in H(D)$ fonksiyonlarının sınıfını S ile gösterelim. S nin iki alt cümlesini tanımlayalım: Birim daireyi, sonsuzda bir asimptotik doğrultuyu ve $\pi/4$ özelliğini haiz, tek bir γ analitik yayının bütünleyeni üzerine resmeden $f \in S$ fonksiyonlarının topluluğunu A ile gösterelim. $H(D)$ üzerinde sürekli bir L lineer fonksiyoneli için

$$\operatorname{Re} L(f) = \max_{g \in S} \operatorname{Re} L(g)$$

ekstremal problemini çözen f fonksiyonları, S nin destek noktaları adını alır. Destek noktalarının cümlesini σ ile gösterelim. Bu iki alt sınıf arasında $\sigma \subset A$ ilişkisi vardır. (Pfluger [7], Brickman ve Wilken [2]).

Hengartner ve Schober [3], $f \in \sigma$ fonksiyonlarının bazı ekstremal özelliklerini incelemiş ve katsayılar için alt sınırlar vermişlerdir. Daha sonra Kirwan ve Pell [5] $f \in A$ için bu alt sınırları daha da büyültmüşlerdir.

Bu tezin amacı, birim dairede sabit bir noktada kutbu olan yalınkat meromorf fonksiyonların ekstremal özelliklerini, yukarıdaki sonuçlardan hareketle incelemektir.

Birinci bölüm bu çalışmanın başlangıç noktasını oluşturan hazırlıkları kapsar.

Birinci bölümün ilk kısmında Hengartner ve Schober'in S nin destek fonksiyonları hakkındaki incelemeleri verilmiştir. Bir $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in \sigma$ için $\mathbb{C} - f(D)$ yayının sonsuz ve sonludaki

uç noktaları sırasıyla ζ ve η ($|\zeta| = 1$, $|\eta| = 1$) noktalarına karşı gelsin. Önce $f(z)$ nin katsayıları ile ζ ve η noktalarının gerçekledikleri bazı eşitsizlikler elde edilmiş, sonra da $f \in \sigma$ yardımıyla tanımlanan dört fonksiyonun yalınkat oldukları ve birim daireyi, u-doğrultusunda konveks ve sınırsız bir bölge üzerine resmettikleri gösterilmiştir. Daha sonra Kirwan ve Pell'in, bir $f \in A$ için Hengartner ve Schober'in sonuçlarını geliştiren çalışmaları özetlenmiştir.

Bölüm 1. in ikinci kısmında yalınkat meromorf fonksiyonların sınıfı tanıtılmakta ve Avcı [1] nin bazı sonuçları verilmektedir. $p \neq 0$ olmak üzere $F(0) = F'(0) - 1 = 0$, $F(p) = \infty$ koşullarıyla normalize edilmiş, birim daire üzerinde yalınkat ve meromorf $F(z)$ fonksiyonlarının sınıfını $S(p)$ ile gösterildiğine göre, önce S sınıfı ile $S(p)$ arasındaki ilişki ve bazı özdeşlikler hatırlatılmakta, daha sonra da bir lineer ekstremal problemi çözen $F \in S(p)$ destek noktalarının gerçekledikleri diferansiyel denklem ile S sınıfı için bilinen $\pi/4$ teoreminin $S(p)$ sınıfına genelleştirilmesi verilmektedir. Bunların sonucu olarak $S(p)$ nin destek noktalarının topluluğu $\sigma(p)$ ile gösterilirse, $\sigma(p)$ nin $F(z)$ elemanları

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \leq 0$$

diferansiyel denklemini gerçekler ve bu fonksiyonlar altında birim dairenin resmi, $\pi/4$ özelliğini haiz, sonlu, tek bir analitik yayın bütünleyeninden oluşur.

Çalışmamızın esasından oluşan ikinci bölümde $S(p)$ sınıfının destek fonksiyonlarının ekstremal özellikleri ve katsayı problemi incelenmekte ve meromorf fonksiyonlarının alt sınıflarına ait bazı sonuçlar verilmektedir.

Bölüm 2. nin birinci kısmında $S(p)$ nin destek noktaları incelenmektedir. Bir $F(z) \in \sigma(p)$ için $\mathbb{C} - F(D)$ yayının uç noktaları ζ ve η ($|\zeta| = 1$, $|\eta| = 1$) noktalarına karşı gelsin. $F(z) \in \sigma(p)$ yardımıyla tanımlanan, kapalı birim dairede analitik, pozitif reel kısmı haiz dört fonksiyon yardımıyla, $F(z) \in \sigma(p)$ in Taylor katsayıları ile p, ζ, η noktalarının, Hengartner ve Schober in sonuçlarına paralel olarak gerçekledikleri bir dizi eşitsizlik verilmektedir.

Bölüm 2. nin ikinci kısmında katsayı problemi incelenmektedir. Önce birim daireye yarıklı bir bölge üzerine resmeden $f(z) \in S$ fonksiyonlarının gerçekledikleri Löwner diferansiyel denkleminde

yararlanarak $F(z) \in S(p)$ nin $A_2(p)$ - Taylor katsayılarının sağladığı diferansiyel denklem elde edilmektedir. Daha sonra birinci kısımda elde edilen eşitsizliklerden de yararlanılarak, $A_2(p)$ ve $A_3(p)$ -Taylor katsayılarının salt değerleri için alt sınırlar verilmektedir.

Bölüm 2. nin son kısmında $S(p)$ nin alt kısımları tanımlanmakta, $F(z) \in \sigma(p)$ destek fonksiyonları yardımıyla tanımlanan iki fonksiyonun meromorf konvekse yakın oldukları gösterilmektedir.

Sonuç olarak, $S(p)$ sınıfının her elemanı S nin elemanlarından bir Möbiüs dönüşümü ile elde edilebileceği gözönüne alınırsa, ikinci bölümde elde edilen sonuçların, birinci bölümdekilerin bir genelleştirilmesi oldukları kolayca görülebilir.

1. YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI

1.1. S Sınıfının Ekstremal Özellikleri

Birim daire $D = \{z : |z| < 1\}$ üzerinde analitik fonksiyonların sınıfı $H(D)$ olsun. $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ açılımını haiz yalınkat $f \in H(D)$ fonksiyonlarının cümlesini S ile gösterelim. Birim daireyi, sonsuzda bir asimptotik doğrultuya sahip, $\pi/4$ özelliğini haiz, yani her hangi bir noktasındaki teğeti ile merkezden geçen ışının yaptığı açı salt değerçe $\pi/4$ den daha küçük olan tek bir γ analitik yayının bütünleyeni üzerine resmeden $f \in S$ fonksiyonlarının topluluğunu A ile gösterelim.

Tanım. $H(D)$ üzerinde sürekli bir L lineer fonksiyoneli için

$$\operatorname{Re} L(f) = \max_{g \in S} \operatorname{Re} L(g)$$

ekstremal problemini çözen $f \in S$ fonksiyonlarına S nin destek noktaları denir.

S nin destek noktalarının topluluğunu σ ile gösterelim. S nin yukarıda tanımlanan iki alt cümlesi arasındaki $\sigma \subset A$ ilişkisi Pfluger [7] ve daha sonra da Brickman ve Wilken [2] tarafından incelenmiştir.

Önce S sınıfının destek fonksiyonlarının Hengartner ve Schober [3] tarafından verilen ekstremal özelliklerini hatırlatalım.

Teorem 1.1. $f \in \sigma$ S bir destek noktası olsun. $\mathbb{C} - f(D)$ yayının sonsuz ve sonludaki uç noktaları sırasıyla $\zeta, \eta \in \partial D = \{z : |z| = 1\}$ noktalarına karşı gelsin. Bu halde

$$(1.1) \quad L(z) = -\frac{\eta}{\zeta} \left(\frac{z-\zeta}{z-\eta} \right)^2 \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2$$

fonksiyonu $\bar{D}$ kapalı birim dairesinde analitik ve D içinde $\operatorname{Re} L(z) > 0$ dir. Ayrıca

$$(1.2) \quad \operatorname{Re} \zeta \bar{\eta} < 0$$

ve $0 < |z| < 1$ için

$$(1.3) \quad \frac{1-|z|}{1+|z|} < \left| \frac{2}{1+(\zeta\bar{\eta})^2} \left(\frac{z-\zeta}{z-\eta} \right)^2 \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 + \frac{1-(\zeta\bar{\eta})^2}{1+(\zeta\bar{\eta})^2} \right| < \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

eşitsizlikleri vardır. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ise

$$(1.4) \quad |a_2 - \bar{\zeta} + \bar{\eta}| < -\operatorname{Re} \zeta \bar{\eta},$$

$$(1.5) \quad |4a_3 - a_2^2 - 4a_2(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) + \bar{\zeta}^2 - 4\bar{\zeta}\bar{\eta} + 3\bar{\eta}^2| < -2\operatorname{Re} \zeta \bar{\eta},$$

$$(1.6) \quad |a_2| > 1$$

eşitsizlikleri gerçekleşir.

Bu teoremin sonuçlarından (1.2) elemanter eşitsizliği ilginç bir geometrik özelliği haizdir : $\mathbb{C} - f(D)$ nin uç noktalarının karşı geldiği $\zeta, \eta \in \partial D$ noktaları 90° den daha büyük bir açıyla ayrılmışlardır. S sınıfındaki her fonksiyon için $|a_2| \leq 2$ olduğundan, S nin her bir destek noktası $1 < |a_2| \leq 2$ özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki teorem S nin destek noktaları hakkında bazı analitik ve geometrik bilgileri verir.

Teorem 1.2 f, S nin bir destek noktası ve $\mathbb{C}-f(D)$ yayının sonsuz ve sonludaki uç noktaları sırasıyla $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin. Bu takdirde

$$(1.7) \quad G(z) = \left(\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 + \frac{z-\zeta}{z-\zeta} \right) \frac{(z-\zeta)^2}{\zeta z}$$

ve

$$(1.8) \quad H(z) = \left(\left(\frac{f(z)}{zf'(z)} \right)^2 + \frac{z-\eta}{z-\eta} \right) \frac{(z-\eta)^2}{\eta z}$$

fonksiyonları $\bar{D}$ de analitik ve D içinde

$$(1.9) \quad \operatorname{Re} G(z) > 0 \quad \text{ve} \quad \operatorname{Re} H(z) > 0$$

dir. Özel olarak $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ise

$$(1.10) \quad \operatorname{Re} a_2 \zeta > 1, \quad \operatorname{Re} a_2 \eta < -1$$

$$(1.11) \quad |(4a_3 - a_2^2)\zeta - 4a_2 + 2\bar{\zeta}| < 4 \operatorname{Re}(a_2 \zeta) - 4$$

$$(1.12) \quad |(4a_3 - 5a_2^2)\eta - 4a_2 - 2\bar{\eta}| < -4 \operatorname{Re}(a_2 \eta) - 4$$

eşitsizlikleri vardır. Bundan başka

$$(1.13) \quad |4a_3 - a_2^2| > 2$$

ve

$$(1.14) \quad |a_3| > \frac{3}{8}$$

dir. Ayrıca

$$(1.15) \quad g_\zeta(z) = \int_0^z \left(\left(\frac{tf'(t)}{f(t)} \right)^2 - \frac{t-\zeta}{t} \right) \frac{dt}{t}, \quad h_\eta(z) = \int_0^z \left(\left(\frac{f(t)}{tf'(t)} \right)^2 - \frac{t-\eta}{t} \right) \frac{dt}{t}$$

$$g(z) = \int_0^z \left(\left(\frac{tf'(t)}{f(t)} \right)^2 - 1 \right) \frac{dt}{t}, \quad h(z) = \int_0^z \left(\left(\frac{f(t)}{tf'(t)} \right)^2 - 1 \right) \frac{dt}{t}$$

fonksiyonları yalınkattırlar ve D birim dairesini u-doğrultusunda konveks ve sınırsız (yani, her yatay doğru ile arakesiti ya boş veya pozitif doğrultuda bir yarım doğru olan) bir bölge üzerine resmederler.

S sınıfının bir $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ destek noktası için önceki iki teoremden verilen $|a_2| > 1^2$ ve $|a_3| > \frac{3}{8}$ alt sınırları

Kirwan ve Pell [5] tarafından daha da büyütülmüş ve $|a_2|$ için en iyi alt sınır verilmiştir.

Teorem 1.3. $f \in A$, $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ olsun. Bu takdirde $|a_2| > \sqrt{2}$ dir ve bu en iyi alt sınırdır.

Teoremin ispatı Löwner teorisi ve (1.10) daki ikinci eşitsizlikten yararlanılarak yapılır. $0 < \lambda < \frac{\pi}{4}$ için

$$f_\lambda(z) = z(1-z)^{-2e^{i\lambda} \cos \lambda}$$

şeklinde tanımlanan $f_\lambda(z)$ fonksiyonu için $\lambda = \frac{\pi}{4}$ iken

$|a_2| = \sqrt{2}$ alt sınırı alınır. Bu teoremin sonucu olarak alan teoreminden de yararlanılarak $|a_3| > 1$ alt sınırı elde edilir.

1.2. Yalınkat Meromorf Fonksiyonlar

Birinci kısımda S sınıfının destek fonksiyonları ile ilgili olarak verilen ekstremal özellikleri, birim dairede sabit bir noktada kutbu olan yalınkat meromorf fonksiyonlar sınıfına genelleştireceğiz. Bu amaçla önce yalınkat meromorf fonksiyonlar sınıfını tanıtalım. $p \in D - \{0\}$ olmak üzere $F(0) = F'(0) - 1 = 0$ ve $F(p) = \infty$ koşullarıyla normalize edilmiş, birim daire üzerinde yalınkat ve meromorf F fonksiyonlarının cümlesini $S(p)$ ile gösterelim. $S(p)$ sınıfının Avcı [1] tarafından verilen karakterizasyonunun ve bazı sonuçlarını hatırlatalım.

Bir $f \in S$ verildiğinde her $z, p \in D$ için

$$(1.16) \quad F(z, p) = \frac{f(p) f(z)}{f(p) - f(z)}$$

ile tanımlanan $F(z) = F(z, p)$ fonksiyonu sabit bir $p (p \neq 0)$ için $S(p)$ sınıfının bir elemanıdır. Tersine bir $F(z) \in S(p)$ verilsin. $F(z)$ yalınkat ve Riemann tasvir teoremine göre birim dairenin resmi bütün düzlem olamayacağından $F(z)$ fonksiyonu düzlemin her noktasını alamaz. Her $z \in D$ için $F(z) \neq w$ olacak şekilde bir $w \in C$ vardır. Bu nedenle

$$(1.16)' \quad f(z) = \frac{F(z)}{1 - \frac{1}{w} F(z)}$$

ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu S sınıfının bir elemanıdır ve $f(p) = -w$ olur. (1.16)' den $F(z)$ çekilirse (1.16) elde edilir. O halde her $F \in S(p)$ fonksiyonu bir $f \in S$ yardımıyla (1.16) biçiminde tanımlanır. $F(z)$ nin

$$F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(p) z^n \quad (|z| < |p|)$$

Taylor açılımıyla tanımlanan $A_n(p)$ fonksiyonuna f nin n -ci Taylor katsayı fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 1.1. Her $f \in S$ için $A_n(p)$ fonksiyonu birim dairede $z = 0$ noktasında $n-1$.ci mertebeden basit bir kutbu olan meromorf bir fonksiyondur.

İspat. (1.16) ile verilen F yardımı ile her $z, p \in D$ için

$$\frac{p-z}{pz} F(z,p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(p) z^k$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Sabit bir $f \in S$ için $C_k(p)$ fonksiyonunun, D birim daireesinde analitik olduğu tanımından kolayca görülür. Her iki yandaki katsayılar karşılaştırılırsa her k için

$$A_k(p) - \frac{1}{p} A_{k-1}(p) = C_{k-1}(p)$$

ve buradan da

$$p^{n-1} A_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(p) p^k$$

özdeşliği elde edilir. $C_k(p)$ lerin analitikliğinden yardımcı teoremin iddiasının doğruluğu çıkar.

Yardımcı Teorem 1.2. Her $z, p \in D$ için

$$F(z,p) = \frac{1}{A_2(z) - A_2(p)}$$

dir. Ayrıca $A_2(z) = \frac{1}{z} + b_1 z + \dots$ olmak üzere

$$A_2(z) A_n(z) = A_{n+1}(z) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k A_{n-k}(z)$$

özdeşliği vardır.

İspat. $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ olsun. $z=0$ civarındaki
 $F(z) = z + A_2(p) z^2 + \dots$ açılımı ve (1.16) tanımından
 $A_2(p) = a_2 + 1/f(p)$ elde edilir. Buna göre

$$F(z) (A_2(z) - A_2(p)) = 1$$

olur. Her iki yandaki katsayıların eşitliğinden yardımcı teoremden
 ki ikinci özdeşlik elde edilir.

Şimdi $S(p)$ sınıfının destek fonksiyonlarının gerçekledikleri
 diferansiyel denklemleri verelim.

B bir kompleks bölge olsun. $H(B)$ üzerindeki sürekli lineer
 fonksiyonların uzayını $H'(B)$ ile gösterelim. Aşağıdaki teorem
 iyi bilinmektedir :

Teorem 1.4. $L \in H'(B)$ olması için gerek ve yeter koşul her
 $f \in H(B)$ için

$$L(f) = \int_K f d\mu$$

olacak şekilde kompakt desteği $K \subset B$ olan sonlu bir μ kompleks
 Borel ölçüsünün var olmasıdır. (Schober [11]).

$S(p)$ sınıfının bir genişlemesini gözönüne alalım. Bir
 $t \in (0,1)$ verildiğinde

$$U(t) = \{f \in S(p) : |p| = t\}$$

sınıfı tanımlansın ve $D_t = \{z : |z| < t\}$ olsun.

$C_t = \{z : |z| = t\}$ olmak üzere $U(t)$ sınıfı $H(D - C_t)$ analitik
 fonksiyonlar uzayının kompakt bir alt cümlesidir. Bu nedenle
 $h \in H'(D - C_t)$ verildiğinde

$$(1.17) \quad t_h(t) = \max_{f \in U(t)} \operatorname{Re} h(f)$$

ile tanımlanan $\tau_h(t)$ nin bulunması problemi gözönüne alınabilir. Bir lineer fonksiyonel ailesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(1.18) \quad H_t = \{h \in H'(D-C_t) \mid \tilde{h} \in H'(D_t) \text{ öyle ki } h = \tilde{h}|_{H(D-C_t)}\}$$

Örneğin, $f \in S$ verildiğinde

$$(1.21) \quad F(\eta, z) = \frac{f(z)f(\eta)}{f(z)-f(\eta)}$$

olmak üzere

$$h : F \rightarrow A_n(z)$$

şeklinde tanımlanan h lineer fonksiyoneli $H|_z$ cümlesinin elemanıdır. Ayrıca $\frac{1}{w} \in \mathbb{C}^{-f(K)}$ olmak üzere her $f \in S$ için

$$(1.19) \quad H(w) = h\left(\frac{f}{1-wf}\right) = \int_K \frac{f(z)d\mu(z)}{1-wf(z)} \quad (K \subset D)$$

w nun bir analitik fonksiyonudur. Örneğin $h \in H_t$ ise

$\frac{1}{w} \in \mathbb{C}^{-f(D_t)}$ için (1.19) ile tanımlanan $H(w)$ bir analitik fonksiyondur.

Teorem 1.5. $h \in H_t$ sabit olmayan bir lineer fonksiyonel ve $\tau_h(t)$, (1.17) ile tanımlanmış olsun. Bu koşullar altında $\tau_h(t)$, $(t, 1)$ aralığı üzerinde kesin olarak monoton azalan bir fonksiyondur.

$h \in H_t$ olmak üzere (1.17) ile tanımlanan ekstremal problem bir $f \in S(p)$ için gerçeklensin, $\tau_h(t) = \text{Re}h(f)$. w ekstremal resim bölgesinin sınırında olmak üzere

$$f^x(z) = f(z) + \frac{e^{i\alpha} \epsilon^2 f(z)^2}{w^2(f(z)-w)} + o(\epsilon^2) \quad (\epsilon > 0)$$

fonksiyonları ile f karşılaştırıldığında Schiffer'in genel varyasyonlar teorisinden

$$(1.20) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{w'}{w} \right)^2 \geq 0$$

elde edilir. Resim bölgesinin sınırı $w = f(e^{i\theta})$ ile parametrelendirilirse (1.20) eşitsizliği

$$(1.21) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 \leq 0$$

şeklini alır. O halde (1.17) ile tanımlanan lineer ekstremal problemi çözen $f \in S(p)$ destek noktalarının topluluğunu $\sigma(p)$ ile gösterirsek, $f \in \sigma(p)$ fonksiyonları (1.21) diferansiyel denklemini sağlar.

Teorem 1.6 $h \in H_t$ ve $f \in S(p)$ için

$$\operatorname{Reh}(f) = \max_{g \in U(t)} \operatorname{Reh}(g) \quad (|p| = t)$$

olsun. Bu halde ekstremal resim bölgesi $f(D)$ nin sınırı, başlangıç noktasından geçen herhangi bir yayı en çok $\pi/4$ radyanlık bir açı ile kesebilen, sonlu, tek bir analitik yarıktan oluşur.

Bu teorem S sınıfı için bilinen " $\pi/4$ Teoremi" ni $S(p)$ sınıfına genelleştirmektedir.

Bir $f \in S$ verildiğinde (1.16) ile tanımlanan $F(z, p) \in S(p)$ fonksiyonu $D' \times D'$ içinde analitiktir, $D' = D - \{0\}$. $f \in \sigma$ ise $f(\zeta) = \infty$ olmak üzere bir $\zeta \in \partial D$ noktası vardır. Bu nedenle

$$\lim_{p \rightarrow \zeta} F(z, p) = f(z) \text{ olur.}$$

O halde $f(z)$ fonksiyonunun katsayıları $F(z, p)$ nin Taylor katsayılarının $p \rightarrow \zeta$ için limitleridir, $\lim_{p \rightarrow \zeta} A_n(p) = a_n$.

Bu sonuç S ve $S(p)$ nin destek fonksiyonları hakkında bilinen bazı ekstremal özelliklerin karşılaştırılmasına yardımcı olur. Bu nedenle ikinci bölümde $F \in \sigma(p)$ fonksiyonları için vereceğimiz özelliklerin $f \in \sigma$ fonksiyonlarının birinci bölümde verilen özelliklerinin genelleştirilmesi oldukça kolayca görülebilir.

2. S(p) SINIFININ EKSTREMAL ÖZELLİKLERİ

2.1. $\sigma(p)$ Sınıfında Ekstremlal Özellikler

Birinci bölümün sonunda verilenlere göre bir $F \in \sigma(p) \subset S(p)$ fonksiyonu için (1.21) diferansiyel denklemini sağlar ve birim dairenin resmi $\pi/4$ -özellikliğini haiz, sonlu, tek bir analitik yayın bütünleyenidir. Bu kısımda $S(p)$ nin destek noktalarının bazı ekstremlal özelliklerini verebiliriz.

Teorem 2.1. $F \in \sigma(p)$ ve $\mathbb{C} - F(D)$ yayının uç noktaları $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin. Bu halde

$$(2.1) \quad K(z) = - \eta \zeta \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{(z-\zeta)^2(z-\eta)^2}$$

fonksiyonu $\bar{D}$ de analitik ve D içinde $\operatorname{Re} K(z) > 0$ dir. Ayrıca

$$(2.2) \quad \operatorname{Re} p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} < 0$$

$$(2.3) \quad \operatorname{Re} \{ p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} (\bar{p}\zeta - 1)(p\bar{\eta} - 1)^2 \} < 0$$

olur. $|z| < |p|$ için $F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ ise $x = 1 + |p|^2$ olmak üzere

$$(2.4) \quad |p^2 A_2 - p x + p^2 (\bar{\eta} + \bar{\zeta})| < - \operatorname{Re} p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta},$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & |(4A_3 - A_2^2)p^2 - 4xpA_2 + 4p^2(\bar{\eta} + \bar{\zeta})A_2 - 4xp(\bar{\eta} + \bar{\zeta}) \\ & + 3p^2(\bar{\eta} + \bar{\zeta})^2 + x^2 + 2|p|^2 - 2p^2\bar{\eta}\bar{\zeta}| < -2\text{Re}p^2\bar{\eta}\bar{\zeta} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. $K(z)$ fonksiyonunun $\bar{D}$ de analitik olduğu açıktır. $\zeta, \eta \in \partial D$ ve $z \in \partial D$ için kısaca $\bar{\zeta}z = e^{i\theta_0}$ ve $\bar{\eta}z = e^{i\theta}$ dersek

$$\frac{(z-\zeta)^2}{\zeta z} = \bar{\zeta}z - 2 + \zeta\bar{z} = -4\sin^2 \frac{\theta_0}{2},$$

$$\frac{(z-\eta)^2}{\eta z} = \bar{\eta}z - 2 + \eta\bar{z} = -4\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

ve $\left(\frac{(p-z)(1-\bar{p}z)}{z}\right)^2 = ((p\bar{z}-1)(1-\bar{p}z))^2 = |1-\bar{p}z|^4$

olur. $F \in \sigma(p)$ için (1.21) gerçeğlendiğinden, $z \in \partial D$ için

$$\begin{aligned} \text{Re}K(z) &= \text{Re} \left\{ -\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 \frac{\zeta z}{(z-\zeta)^2} \frac{\eta z}{(z-\eta)^2} \left(\frac{(p-z)(1-\bar{p}z)}{z}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{|1-\bar{p}z|^4}{16\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \text{Re} \left\{ -\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bir $z \in D$ noktasında $\text{Re}K(z) = 0$ olsaydı, bir analitik fonksiyonun reel kısmı olan harmonik $\text{Re}K(z)$ fonksiyonu için maksimum prensibine göre her $z \in D$ için $\text{Re}K(z) \equiv 0$ olurdu. Bu halde $K(z) = i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ dir. Özel olarak $K(o) = -p^2\bar{\eta}\bar{\zeta} = i\tau$ olur. Ayrıca $K(z) = i\tau$ dan $B = (p-\zeta)(p-\eta)p^{-1}(1-|p|^2)^{-1}$ olmak üzere

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1}{z} = p\bar{\eta}\bar{\zeta} \left(\frac{B}{p-z} - \frac{\bar{p}\eta\bar{\zeta} \bar{B}}{1-\bar{p}z} \right)$$

ve integre edersek

$$F(z) = z \exp(\log(p-z) \quad \begin{matrix} -p\bar{\eta}\bar{\zeta}B \\ +p\bar{B}\log(1-\bar{p}z)+p\bar{\eta}\bar{\zeta}B\log p \end{matrix}),$$

$$F(z) = +(p-z) \quad \begin{matrix} -p\bar{\eta}\bar{\zeta}B \\ z \exp(p\bar{B}\log(1-\bar{p}z)+p\bar{\eta}\bar{\zeta}B\log p) \end{matrix}$$

ve

$$(z-p)F(z) = \begin{matrix} 1-p\bar{\eta}\bar{\zeta}B \\ -(p-z) \end{matrix} z \exp(\dots)$$

elde edilir. $z \rightarrow p$ için sol yan $\alpha(f) =$ rezidü (F, p) olduğu halde sağ taraf 0 veya ∞ dur. Oysa bu

$$F(z) = \frac{\alpha(f)}{z-p} + \text{regüler} \in S(p)$$

ile çelişir. Bu nedenle $z \in D$ için $\text{Re } K(z) > 0$ olmalıdır. Özel olarak $\text{Re } K(0) > 0$ ve $\text{Re } K(p) > 0$ dan sırasıyla

$$\text{Re } p^2 \bar{\eta}\bar{\zeta} < 0$$

ve

$$\text{Re}(p^2 \bar{\eta}\bar{\zeta}(\bar{p}\bar{\zeta}-1)^2(\bar{p}\eta-1)^2) < 0$$

elde edilir.

$F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ ($|z| < |p|$) açılımından $x = 1 + |p|^2$ olmak üzere

$$K(z) = -p^2 \bar{\eta}\bar{\zeta} - 2p\eta\bar{\zeta}(pA_2 - x + p(\bar{\eta} + \bar{\zeta}))z - 2\eta\bar{\zeta} \{ (4A_3 - A_2^2)p^2 - 2p^2 \bar{\eta}\bar{\zeta} + 2|p|^2 + x^2 - 4xpA_2 + 4p^2(\bar{\eta} + \bar{\zeta})A_2 + 3p^2(\bar{\eta} + \bar{\zeta})^2 - 4xp(\bar{\eta} + \bar{\zeta}) \} z^2 + \dots$$

dir. Pozitif reel kısmı haiz fonksiyonlar için iyi bilinen

$|K'(0)| < 2\operatorname{Re} K(0)$ ve $|K''(0)| < 4\operatorname{Re} K(0)$ eşitsizliklerinden sırasıyla (2.4) ve (2.5) eşitsizlikleri çıkar.

Sonuç 1. $F \in \sigma(p)$ ve $\mathbb{C} \setminus F(D)$ yayının uç noktaları sırasıyla $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin. Bu halde

$$(2.6) \quad \operatorname{Re} p^2 \bar{\zeta} A_2 > \operatorname{Re}(xp\bar{\zeta} - p^2 \bar{\zeta}^2)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. (2.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} &> |p^2 A_2 - xp + p^2(\bar{\eta} + \bar{\zeta})| \\ &= |-p^2 \bar{\zeta} A_2 + xp\bar{\zeta} - p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} - p^2 \bar{\zeta}^2| \end{aligned}$$

veya

$$|-p^2 \bar{\zeta} A_2 + xp\bar{\zeta} - p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} - p^2 \bar{\zeta}^2| + \operatorname{Re} p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} < 0$$

çıkar. O halde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p^2 \bar{\zeta} A_2 &> \operatorname{Re} p^2 \bar{\zeta} A_2 + |-p^2 \bar{\zeta} A_2 + xp\bar{\zeta} - p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} - p^2 \bar{\zeta}^2| + \operatorname{Re} p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} \\ &= \operatorname{Re}(p^2 \bar{\zeta} A_2 + p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta}) + |xp\bar{\zeta} - p^2 \bar{\zeta}^2 - p^2 \bar{\zeta} A_2 - p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta}| \\ &= \operatorname{Re} \omega + |c - \omega| \end{aligned}$$

dir. Her $c, \omega \in \mathbb{C}$ için $|c - \omega| > \operatorname{Re}(c - \omega)$ olduğundan

$$\operatorname{Re} p^2 \bar{\zeta} A_2 > \operatorname{Re}(xp\bar{\zeta} - p^2 \bar{\zeta}^2)$$

elde edilir.

Sonuç 2. $F \in \mathcal{O}(p)$ ve $\mathbb{C}-F(D)$ yayının uç noktaları $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin. Buna göre $0 < |z| < 1$ için

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} < \left| \frac{2}{\bar{p}^2 + (p\bar{\eta}\bar{\zeta})^2} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \left(\frac{(p-z)(1-\bar{p}z)}{(z-\zeta)(z-\eta)} \right)^2 + \frac{\bar{p}^2 - (p\bar{\eta}\bar{\zeta})^2}{\bar{p}^2 + (p\bar{\eta}\bar{\zeta})^2} \right| < \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $K(z)$, Teorem 2.1. de tanımlanan fonksiyon olsun. $K(z)$ yardımıyla

$$k(z) = \frac{K(z) - i \cdot \text{Im } K(0)}{\text{Re } K(0)}$$

şeklinde tanımlanan $k(z) = 1 + c_1 z + \dots$ fonksiyonu, normalize edilmiş pozitif reel kısmı haiz fonksiyonların P sınıfına aittir. $\omega = p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta}$ dersek

$$k(z) = \frac{-1}{\text{Re } \omega} (-\eta \zeta) \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \frac{(p-z)^2 (1-\bar{p}z)^2}{(z-\zeta)^2 (z-\eta)^2} - i \frac{\text{Im } \omega}{\text{Re } \omega}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\eta \zeta}{\text{Re } \omega} = \frac{2\eta \zeta}{p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} + \bar{p}^2 \eta \zeta} = \frac{2}{\bar{p}^2 + p^2 \bar{\eta}^2 \bar{\zeta}^2}$$

ve

$$-i \frac{\text{Im } \omega}{\text{Re } \omega} = - \frac{p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} - \bar{p}^2 \eta \zeta}{p^2 \bar{\eta} \bar{\zeta} + \bar{p}^2 \eta \zeta} = \frac{\bar{p}^2 - p^2 \bar{\eta}^2 \bar{\zeta}^2}{\bar{p}^2 + p^2 \bar{\eta}^2 \bar{\zeta}^2}$$

olduğundan

$$k(z) = \frac{2}{\bar{p}^2 + (p\bar{\eta}\bar{\zeta})^2} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{(z-\zeta)^2(z-\eta)^2} + \frac{p^2 - (p\bar{\eta}\bar{\zeta})^2}{\bar{p}^2 + (p\bar{\eta}\bar{\zeta})^2}$$

yazılabilir. $k(z) \in P$ için iyi bilinen

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} < |k(z)| < \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

eşitsizliğinden sonulun iddiası çıkar.

Açıklama. Birinci bölümün sonundaki açıklamaya göre $p \rightarrow \zeta$ özel halinde $K(z)$ fonksiyonu, bir $f \in \sigma$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan (1.1) fonksiyonu ile aynıdır. Teorem 2.1. in sonuçlarından (2.3) hariç diğerlerinin, Teorem 1.1. deki eşitsizliklerin genelleştirilmesi oldukları kolayca görülebilir.

Teorem 2.2. $F \in S(p)$ destek noktası olsun ve $\mathbb{C} - F(D)$ yayının uç noktaları $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin. Bu halde

$$(2.7) \quad G(z) = \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{\bar{\zeta}z(z-\zeta)^2} - \frac{p^2}{\zeta z} + \bar{p}^2 \zeta z$$

fonksiyonu $\bar{D}$ de analitik ve D içinde $\operatorname{Re} G(z) > 0$ dir. Ayrıca

$$(2.8) \quad \operatorname{Re} \frac{p\bar{\zeta}}{(p\bar{\zeta}-1)^2} > \frac{\operatorname{Re} p\bar{\zeta}}{1-|p|^2}$$

dir. $|z| < |p|$ için $F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ ise $x = 1 + |p|^2$ olmak üzere

$$(2.9) \quad \operatorname{Re} \{ p^2 \bar{\zeta} A_2 - x p \bar{\zeta} + p^2 \bar{\zeta}^2 \} > 0$$

$$(2.10) \quad |(4A_3 - A_2^2)p^2 - 4xpA_2 + 4p^2 \bar{\zeta} A_2 - 4xp \bar{\zeta} + 3p^2 \bar{\zeta}^2 + \bar{p}^2 \zeta^2 + x^2 + 2|p|^2| < 4 \operatorname{Re} \{ p^2 \bar{\zeta} A_2 - x p \bar{\zeta} + p^2 \bar{\zeta}^2 \}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir.

İspat. $K(z)$, Teorem 2.1 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$-\frac{(z-\eta)^2}{\eta z} K(z) = \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \cdot \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{\bar{\zeta}z(z-\zeta)^2}$$

fonksiyonu $z=0$ noktasındaki $\frac{p^2}{\zeta}$ rezidülü basit kutbu hariç $\bar{D}$ de analitiktir. Bu halde $K(z)$ yardımıyla

$$G(z) = -\frac{(z-\eta)^2}{\eta^2} K(z) - \frac{p^2}{\zeta z} - \bar{p}^2 \zeta z$$

şeklinde tanımlanan $G(z)$ fonksiyonu $\bar{D}$ de analitiktir. $z \in \partial D$ için $z \bar{\zeta} = e^{i\theta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(z) &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \left[\frac{(p-z)(1-\bar{p}z)}{z} \right]^2 \frac{\zeta z}{(z-\zeta)^2} - p^2 \bar{\zeta} z + \bar{p}^2 \zeta z \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 |1-\bar{p}z|^4 \frac{1}{-4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + 2 i \operatorname{Im}(\bar{p}^2 \zeta z) \right\} \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} |1-\bar{p}z|^4 \operatorname{Re} \left\{ - \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

olur. Bir $z \in D$ noktasında $\operatorname{Re} G(z) = 0$ olsaydı, harmonik fonksiyonlar için maksimum prensibine göre her $z \in D$ için $\operatorname{Re} G(z) \equiv 0$ olurdu. Buna göre $z = 0$ için $\operatorname{Re} G(0) = 2 \operatorname{Re} \{p^2 \bar{\zeta} A_2 - xp \bar{\zeta} + p^2 \bar{\zeta}^2\} = 0$ elde edilir. Oysa bu, Teorem 2.1 in Sonul.1. ile çelişir. O halde her $z \in D$ için $\operatorname{Re} G(z) > 0$ dir. Özel olarak $\operatorname{Re} G(p) > 0$ den

$$\operatorname{Re}\{p \bar{\zeta} (p \bar{\zeta} - 1)^{-2}\} > (1 - |p|^2)^{-1} \operatorname{Re} p \bar{\zeta}$$

eşitsizliği çıkar. $|z| < |p|$ için $F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ ve $x = 1 + |p|^2$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} G(z) &= 2p^2 \bar{\zeta} A_2 - 2xp \bar{\zeta} + 2p^2 \bar{\zeta}^2 \\ &+ [(4A_3 - A_2^2)p^2 - 4p(x - p \bar{\zeta})A_2 - 4xp \bar{\zeta} + 3p^2 \bar{\zeta}^2 + \\ &+ \bar{p}^2 \bar{\zeta}^2 + x^2 + 2|p|^2]z + \dots \end{aligned}$$

açılımı çıkar. $\operatorname{Re} G(0) > 0$ ve $|G'(0)| < 2 \operatorname{Re} G(0)$ dan sırasıyla (2.9) ve (2.10) eşitsizlikleri elde edilir.

Sonul. Teoremin koşulları altında

$$\operatorname{Re} \{ (4A_3 - A_2^2)p^2 - 4xpA_2 \} + x^2 + 2|p|^2 < 0$$

gerçeklenir.

İspat. (2.10) den $4 \operatorname{Re}\{p^2 \bar{\zeta} A_2 - xp \bar{\zeta} + p^2 \bar{\zeta}^2\} > |\dots| > \operatorname{Re}\{\dots\}$,

$$4 \operatorname{Re}\{p^2 \bar{\zeta} A_2 - xp \bar{\zeta} + p^2 \bar{\zeta}^2\} > \operatorname{Re}\{(4A_3 - A_2^2)p^2 - 4xpA_2 + x^2 + 2|p|^2 + 4(p^2 \bar{\zeta} A_2 - xp \bar{\zeta} + p^2 \bar{\zeta}^2)\}$$

$$\operatorname{Re}\{ (4A_3 - A_2^2)p^2 - 4xpA_2 + x^2 + 2|p|^2 \} < 0$$

Teorem 2.3. $F \in \sigma(p)$ ve $\mathbb{C}-F(D)$ yayının uç noktaları $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin. Bu takdirde

$$(2.12) \quad H(z) = \left(\frac{F(z)}{zF'(z)} \right)^2 \frac{(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}{\eta\zeta z(p-z)(1-\bar{p}z)} - \frac{\eta\zeta}{pz} + \frac{\bar{\eta}\bar{\zeta}}{\bar{p}} z$$

şeklinde tanımlanan $H(z)$ fonksiyonu $\bar{D}$ de analitik ve D içinde $\operatorname{Re} H(z) > 0$ dir. $|z| < |p|$ için $F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ ise, $x = 1 + |p|^2$,

$$(2.13) \quad \operatorname{Re}\{x \bar{p}^2 \eta \zeta - 2p\bar{p}^2(\eta + \zeta) - 2p\bar{p}^2 \eta \zeta A_2\} > 0$$

ve

$$(2.14) \quad |p| \cdot |(5A_2^2 - 4A_3)p^2 - 2xpA_2 - 4p^2(\bar{\eta} + \bar{\zeta})A_2 - 2xp(\bar{\eta} + \bar{\zeta}) + x + |p|^4 + \frac{1}{\bar{p}} p^3 \bar{\eta}^2 \bar{\zeta}^2 + p^2(\bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 + 4\bar{\eta}\bar{\zeta})| < 2 \operatorname{Re}\{x\bar{p}^2 \eta \zeta - 2p\bar{p}^2(\eta + \zeta) - 2p\bar{p}^2 \eta \zeta A_2\}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat.

$$\left(\frac{F(z)}{zF'(z)} \right)^2 \frac{(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}{\eta\zeta z(p-z)(1-\bar{p}z)}$$

fonksiyonu $z = 0$ noktasındaki $\frac{\eta\zeta}{p}$ residülü basit kutbu hariç D içinde analitiktir. Bu nedenle

$$H(z) = \left(\frac{F(z)}{zF'(z)} \right)^2 \frac{(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}{\eta\zeta z(p-z)(1-\bar{p}z)} - \frac{\eta\zeta}{pz} + \frac{\bar{\eta}\bar{\zeta}}{\bar{p}} z$$

fonksiyonu $\bar{D}$ içinde analitiktir. $z \in \partial D$ için $z\bar{\eta} = e^{i\theta}$ ve $z\zeta = e^{i\varphi}$ dersek

$$\operatorname{Re} H(z) = \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{F(z)}{zF'(z)} \right)^2 \frac{(z-\eta)^2}{\eta z} \frac{(z-\zeta)^2}{\zeta z} \frac{z}{(p-z)(1-\bar{p}z)} \right\}$$

$$= 16 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{-1}{|1-\bar{p}z|^2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{F(z)}{zF'(z)} \right)^2 \right\} \geq 0$$

olur. Bir $z \in D$ noktasında $\operatorname{Re} H(z) = 0$ olsaydı maksimum prensibi-ne göre $\operatorname{Re} H(z) \equiv 0$ olurdu. Bu nedenle $p \in D$ noktası için $p \neq 0$

$$0 = \operatorname{Re} H(p) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\eta\zeta}{p^2} + \frac{\bar{\eta}\bar{\zeta}}{\bar{p}} p \right\} = \frac{|p|^{2-1}}{p^4} \operatorname{Re}(\bar{p}^2 \eta\zeta)$$

elde edilir. Bu ise (2.2) eşitsizliği ile çelişir. O halde her

$z \in D$ için $\operatorname{Re} H(z) > 0$ olmalıdır. $|z| < |p|$ için $F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ açılımından

$$H(z) = H(0) + H'(0)z + \dots$$

olur, burada $H(0) = \frac{1}{p^2} \{ x\eta\zeta - 2p(\eta+\zeta) - 2p\eta\zeta A_2 \}$ ve

$$H'(0) = \frac{\eta\zeta}{p} (5A_2^2 - 4A_3) - \frac{2}{p^2} x\eta\zeta A_2 + \frac{4}{p} (\eta+\zeta) A_2 + \frac{\eta\zeta}{p^3} (x + |p|^4)$$

$$- \frac{2}{p^2} x(\eta+\zeta) + \frac{1}{p} (\eta\bar{\zeta} + \bar{\eta}\zeta + 4) + \frac{\bar{\eta}\bar{\zeta}}{\bar{p}}$$

dir. $\operatorname{Re} H(0) > 0$ ve $|H'(0)| < 2 \operatorname{Re} H(0)$ den (2.13) ve (2.14) eşitsizleri çıkar.

Açıklama. Teorem 2.2 ve 2.3 de tanımlanan $G(z)$ ve $H(z)$ fonksiyonları ve $p \rightarrow \zeta$ özel halinde Teorem 1.2 deki fonksiyonların aynıdır. Buradaki sonuçlar özel halde Teorem 1.2. de verilen eşitsizliklerin genelleştirilmesidir.

Teorem 2.4. $F \in \sigma(p)$ ve $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına $\mathbb{C}-F(D)$ yayının uç noktaları karşı gelsin. Bu halde

$$(2.15) \quad E(z) = -\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{z^2} + \frac{p^2}{z^2} - \frac{2}{z} p(x-pA_2) - \bar{p}^2 z^2 + 2\bar{p}(x-\bar{p}\bar{A}_2)z$$

şeklinde tanımlanan $E(z)$ fonksiyonu $\bar{D}$ de analitik ve D içinde $\operatorname{Re} E(z) > 0$ dir. Bundan başka

$$(2.16) \quad \operatorname{Re} p A_2 > 1$$

ve

$$(2.17) \quad \operatorname{Re}\{ (4A_3 - A_2^2)p^2 - 4xpA_2 \} + x^2 + 2|p|^2 < 0$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat.

$$E(z) = -\left(\frac{zF'(z)}{f(z)}\right)^2 \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{z^2}$$

fonksiyonu $z = 0$ noktasındaki $-p^2$ residülü 2. mertebeden kutbu hariç $\bar{D}$ de analitiktir. O halde

$$E(z) = - \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \frac{(p-z)^2(1-\bar{p}z)^2}{z^2} + \frac{p^2}{z^2} - \frac{2}{z} p(x-pA_2) - \bar{p}^2 z^2 + 2\bar{p}(x-\bar{p}\bar{A}_2)z$$

fonksiyonu $\bar{D}$ de analitikdir. $z \in \partial D$ için

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} E(z) &= \operatorname{Re} \left\{ - \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \left(\frac{(p-z)(1-\bar{p}z)}{z} \right)^2 + 2i \operatorname{Im}(p^2 \bar{z}^2 + 2\bar{p}z(x-\bar{p}\bar{A}_2)) \right\} \\ &= |1-\bar{p}z|^4 \cdot \operatorname{Re} \left\{ - \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^2 \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Bir $z \in D$ noktasında $\operatorname{Re} E(z) = 0$ olsaydı maksimum prensibine göre $\operatorname{Re} E(z) \equiv 0$ ve özel olarak $z = 0$ noktası için de

$$\operatorname{Re} E(0) = \operatorname{Re} \{ -x^2 - 2|p|^2 + 4xpA_2 - p^2(4A_3 - A_2^2) \} = 0$$

olurdu. Oysa bu Teorem 2. nin sonucu ile çelişir. O halde her $z \in D$ için $\operatorname{Re} E(z) > 0$ dir.

Özel olarak $\operatorname{Re} E(p) > 0$ den

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re} E(p) &= \operatorname{Re} \{ -(1-|p|^2)^2 + 1 - 2x + 2pA_2 - |p|^4 + 2x|p|^2 - 2|p|^2 \bar{p}\bar{A}_2 \} \\ &= 2(1-|p|^2) \operatorname{Re} pA_2 - 2(1-|p|^2), \end{aligned}$$

veya

$$\operatorname{Re} pA_2 > 1$$

çıkar. $\operatorname{Re} E(0) > 0$ den (2.17) eşitsizliği elde edilir.

2.2. Katsayı Problemleri

Burada bir $F \in \sigma(p)$ fonksiyonunun $A_2(p)$ ve $A_3(p)$ katsayılarını alttan sınırlamaya çalışacağız. Bu inceleme için önce, birim daireyi yarıklı bir bölge üzerine resmeden $f \in S$ fonksiyonlarının gerçekledikleri Löwner diferansiyel denklemini hatırlatalım.

Tanım 1. Her $t \in [0, \infty)$ için

$$(2.18) \quad f(z, t) = e^t \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n \right)$$

fonksiyonu D birim dairesinde analitik ve yalınkat, $0 \leq s < t < \infty$ için $f(z, s) \prec f(z, t)$ gerçekleşirse, $f(z, t)$ ye $[0, \infty)$ aralığı üzerinde bir Löwner zinciri denir. Her $t \in [0, \infty)$ için $e^{-t} f(z, t) \in A$ dir. $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} f(z, t)$ nin bir $z(1-\omega z)^{-2}$, $|\omega| = 1$, Koebe fonksiyonu olduğu biliniyor. ([4], s.176)

Teorem 2.5 ([9], s.159) Her $f \in S$ için $f(z, 0) = f(z)$ olmak üzere bir Löwner zinciri vardır.

Teorem 2.6. (Löwner) $f \in S$ için $f(z, t)$ bir Löwner zinciri olsun. $\eta(t)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlanmış, sonlu sayıda nokta hariç sürekli ve $|\eta(t)| = 1$ olmak üzere bir parametrik fonksiyon olsun. Bu koşullar altında $f(z, t)$,

$$(2.19) \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = z f'(z, t) \frac{1 + \overline{\eta(t)} z}{1 - \eta(t) z}, \quad f(z, 0) = f(z)$$

lineer diferansiyel denklemini sağlar.

$f(z, t)$ fonksiyonu $|z| = 1$ üzerindeki $\eta(t)$ noktasını $f(e^{i\theta}, t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) yarığının sonlu uç noktasına resmetsin ve

$$(2.20) \quad h(z, t) = \frac{1 + \overline{\eta(t)} z}{1 - \eta(t) z}$$

fönksiyonunu tanımlayalım, $\operatorname{Re} h(z,t) > 0$ açıktır. (2.19) diferansiyel denkleminde z^2 nin katsayılarının karşılaştırılmasından

$$(2.21) \quad \dot{a}_2(t) = a_2(t) + 2\eta(t)$$

elde edilir, buradaki nokta işareti t ye göre türevi göstermektedir.

$f \in S$ için $f(z,t)$ bir Löwner zinciri olsun. $e^t f(z,t) \in S$ fonksiyonu yardımıyla

$$(2.22) \quad F(z,p,t) = e^{-t} \frac{f(p,t) - f(z,t)}{f(p,t) - f(z,t)}$$

ile tanımlanan F fonksiyonu $S(p)$ sınıfına aittir ve

$F(z,p;0) = F(z,p)$ dir. $|z| < |p|$ için

$F(z,p;t) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(p,t) z^n$ ise (2.22) den

$$(2.23) \quad A_2(p,t) = a_2(t) + \frac{1}{e^{-t} f(p,t)} \quad (0 \leq t < \infty)$$

elde edilir. Her $z \in D$ için $A_2(z,t)$, $z=0$ noktasındaki bir basit kutbu hariç bir analitik fonksiyondur. (2.23) den her $z \in D - \{0\}$ için

$$(2.25) \quad \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = e^t \frac{A_2(z,t) - \dot{A}_2(z,t) + \dot{a}_2(t) - a_2(t)}{(A_2(z,t) - a_2(t))^2}$$

ve

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = e^t \frac{-\dot{A}_2'(z,t)}{(A_2(z,t) - a_2(t))^2}$$

elde edilir. Bunları (2.19) diferansiyel denkleminde yerine yazarsak, (2.20) ve (2.21) ile birlikte,

$$(2.24) \quad \dot{A}_2(z,t) = A_2(z,t) + 2\overline{\eta(t)} + zA_2'(z,t) h(z,t)$$

olur. Ayrıca (2.23) den

$$A_2'(z,t) = -e^t f'(z,t) \cdot f(z,t)^{-2}$$

çıkar. Bu halde (2.24) denklemi her $z \in D$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$\dot{A}_2(z,t) = A_2(z,t) + 2\overline{\eta(t)} - \frac{e^t f'(z,t)}{f(z,t)^2} zh(z,t)$$

şeklini alır. $F(z,p;t)$ fonksiyonunun $z = p$ noktasındaki rezidüsü $\alpha = \alpha(p)$ ise $F(z,p;t)$ nin tanımından

$$\alpha(f) = -e^{-t} \frac{f(p,t)^2}{f'(p,t)}$$

bulunur. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.7. $f \in S$ için $f(z,t)$ bir Löwner zinciri olsun ve $F(z,p;t)$ fonksiyonu (2.22) ile tanımlansın. Bu takdirde (2.19) diferansiyel denklemi her $p \in D - \{0\}$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$(2.25) \quad \dot{A}_2(p,t) = A_2(p,t) + 2\overline{\eta(t)} + \frac{1}{\alpha} ph(p,t) \quad (|\eta(t)| = 1)$$

şeklinde ifade edilir, burada $\alpha = \text{Res}(F, p)$ ve $h(z,t)$, (2.20) ile tanımlanan fonksiyondur.

Şimdi $\sigma(p)$ sınıfında bir katsayı problemini inceleyelim.
 $F(z,p;t) = z + A_2(p,t)z^2 + \dots$ bir destek noktası olduğunda

$$\inf_{0 \leq t < \infty} |A_2(p,t)|$$

problemini gözönüne alalım. $p = \rho e^{i\theta}$ ve $\omega = e^{i\theta}$ ($0 < \rho < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$) olsun. $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} f(z,t) = z(1-\omega z)^{-2}$ olduğu biliniyor. Bu nedenle (2.22) den

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(z,p;t) = \frac{pz}{(p-z)(1-\bar{p}z)}$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |A_2(p,t)| = |A_2(p)|$$

elde edilir. O halde

$$\inf_{0 < t < \infty} |A_2(p,t)| = |A_2(p,t_0)|$$

olmak üzere bir t_0 vardır. $\operatorname{Re} A_2(p,t_0) > 1$ olduğundan genellikle bozmaksızın $A_2(p,t_0) > 0$ varsayabiliriz. $A_2(p,t_0)$ nin minimal özelliğinden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \log |A_2(p,t)| \right)_{t=t_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{A}_2(p,t)}{A_2(p,t)} + \frac{\overline{\dot{A}_2(p,t)}}{\overline{A_2(p,t)}} \right)_{t=t_0} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\dot{A}_2(p,t_0)}{A_2(p,t_0)} \geq 0 \end{aligned}$$

ve $A_2(p,t_0) > 0$ varsayımı nedeniyle $\operatorname{Re} \dot{A}_2(p,t_0) \geq 0$ olur. O halde $t = t_0$ için (2.25) bağıntısından

$$A_2(p, t_0) = \operatorname{Re} A_2(p, t_0) \geq -2 \operatorname{Re} \overline{\eta(t_0)} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{p}{\alpha} h(p, t_0) \right\}$$

çıkar. Bu eşitsizlik $A_2(p, t_0) > 0$ ile çarpılırsa

$$(2.26) \quad A_2(p, t_0)^2 + A_2(p, t_0) \operatorname{Re} \left(\frac{p}{\alpha} h(p, t_0) \right) \geq -2 \operatorname{Re} \{ \overline{\eta(t_0)} A_2(p, t_0) \}$$

bulunur.

$p = \rho e^{i\theta}$ olmak üzere $0 < p\bar{\zeta} = \rho$ olsun. Bu varsayım altında (2.13) eşitsizliğini tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} 0 &< \operatorname{Re} \{ x \bar{p}^2 \eta \zeta - 2\rho^2 \bar{p}(\eta + \zeta) - 2\rho^2 \bar{p} \eta \zeta A_2 \} \\ &= \rho \operatorname{Re} \{ x \bar{p} \eta - 2\rho \bar{p} \eta - 2\rho^2 - 2\rho^2 \eta A_2 \} \end{aligned}$$

veya

$$-2 \operatorname{Re} \eta(t_0) A_2(p, t_0) > 2 - \rho^{-2} (1 - \rho)^2 \operatorname{Re} \bar{p} \eta(t_0)$$

olur. (2.26) eşitsizliğinden

$$A_2(p, t_0)^2 + A_2(p, t_0) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha} p h(p, t_0) \right\} > 2 - \rho^{-2} (1 - \rho)^2 \operatorname{Re} \bar{p} \eta$$

çıkar. $2b = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha} p h(p, t_0) \right\}$ ve $c = 2 - \rho^{-2} (1 - \rho)^2 \operatorname{Re} \bar{p} \eta$ dersek son eşitsizlik

$$A_2(p, t_0)^2 + 2b A_2(p, t_0) - c > 0$$

şeklini alır. $0 < p\bar{\zeta} = \rho$ varsayımı ile (2.2) den $\operatorname{Re} \bar{p} \eta < 0$ ve bu nedenle de $c = 2 - \rho^{-2} (1 - \rho)^2 \operatorname{Re} \bar{p} \eta > 0$ dir. O halde son eşitsizliğin çözümü olarak

$$A_2(p, t_0) > \sqrt{(b^2+c)} - b$$

bulunur. $A_2(p, t)$ nin minimal özelliği ile

$|A_2(p)| = |A_2(p, 0)| \geq A_2(p, t_0)$ olduğundan $|A_2(p)| > \sqrt{(b^2+c)} - b$ elde edilir. O halde sonuç olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.2. $F \in \sigma(p) \subset S(p)$ bir destek noktası olsun. $\mathbb{C} - F(D)$ yayının uç noktaları $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı gelsin ve $0 < p\bar{\zeta} = \rho$ varsayalım. Bu takdirde $F(z) = z + A_2(p)z^2 + \dots$ ($|z| < |p|$) ise

$$(2.27) \quad |A_2(p)| > \sqrt{(b^2+c)} - b$$

dir, burada $\alpha = \text{rezidü}(F, p)$ olmak üzere $2b = \text{Re}\left\{-p \frac{1+\bar{\eta}p}{\alpha(1-\bar{\eta}p)}\right\}$ ve $c = 2-\rho^{-2}(1-\rho)^2 \text{Re } \bar{p}\eta$ dir.

Sonul. Teoremin koşulları altında

$$(2.28) \quad |A_3(p)| > 2b^2+c-1-2b\sqrt{(b^2+c)}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Alan teoreminden $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$ olmak üzere $|a_3 - a_2^2| \leq 1$ olduğunu biliyoruz. Yardımcı Teorem 1.2 deki özdeşlikten $n=2$ için $A_3(p) - A_2(p)^2 = a_3 - a_2^2$ çıkar. O halde (2.27) sizliği gözönüne alındığında

$$|A_3(p)| \geq |A_2(p)|^2 - 1 > 2b^2+c-1-2b\sqrt{(b^2+c)}$$

bulunur.

Açıklama. $p \rightarrow \zeta$ özel halinde $\frac{1}{\alpha} = \frac{f'(p)}{f(p)^2} \rightarrow 0$ ve $C \rightarrow 2$ olduğundan (2.27) ve (2.28) den sırasıyla $|a_2| > \sqrt{2}$ ve $|a_3| > 1$ çıkar. Oysa bu sonuçlar Kirwan ve Pell'in [5] S nin destek noktası için verdikleri alt sınırdır.

2.3. Meromorf Fonksiyonların Alt Sınıfları

Birim daire üzerinde yalınkat, $0 < \rho < 1$ olmak üzere $f(\rho) = \infty$ ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarıyla normalize edilmiş meromorf fonksiyonların cümlesini $S(\rho)$ ile gösterelim. $S(\rho)$ nin alt sınıflarını tanımlayalım [6,8].

Tanım. 2.2. $0 < \rho < \rho_0 < 1$ olmak üzere $|z| < r$ ($r > \rho_0$) dairesi ni bir konveks cümle nin bütünleyeni üzerine resmeden $f \in S(\rho)$ fonksiyonuna konveks denir. Meromorf konveks fonksiyonların cümlesi $K(\rho)$ olsun. Yalnız ve ancak $f \in S(\rho)$ ve her $z, \rho_0 < |z| < 1$ için

$$(2.29) \quad \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} < 0$$

gerçeklenmek üzere bir ρ_0 ($\rho < \rho_0 < 1$) varsa $f \in K(\rho)$ dir. Ayrıca $f \in K(\rho)$ ise her $z \in D$ için

$$(2.30) \quad \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{2\rho}{z-\rho} - \frac{2\rho z}{1-\rho z} \right\} < 0$$

gerçeklenir. (2.30) eşitsizliğini sağlayan $f \in S(\rho)$ fonksiyonlarının cümlesini $M(\rho)$ ile gösterelim. $\rho < 2 - \sqrt{3}$ için $K(\rho) = M(\rho)$ ve $\rho \geq 2 - \sqrt{3}$ için $K(\rho) \subset M(\rho)$ olduğu Royster [10] tarafından gösterildi.

Tanım 2.3. Her $z \in D - \{\rho\}$ için regüler, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ ve

$$(2.31) \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} > 0$$

gerçeklenmek üzere bir $g \in M(\rho)$ varsa $f(z)$ fonksiyonuna meromorf konvekse yakın denir. Meromorf konvekse yakın fonksiyonların sınıfını $C(\rho)$ ile gösterelim.

Birinci bölüm Teorem 1.2 de görüldüğü gibi bir $f \in \sigma$ destek fonksiyonu yardımıyla birim dairede yalınkat ve konveks olan $g_\zeta(z)$, $h_\eta(z)$ $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları tanımlanmıştı. Benzer sonucu meromorf fonksiyonlar sınıfı için incelemek istiyoruz.

$F(z, p) \in S(p)$ olsun. Teknik nedenle değişkenin bir dönmesini gözönüne alalım. $p = \rho e^{i\theta}$ ($0 < \rho < 1$) olmak üzere bir $F(z, p) \in S(p)$ verildiğinde

$$(2.32) \quad f(z, \rho) = e^{-i\theta} F(e^{i\theta} z, \rho)$$

şeklinde tanımlanan $f(z) = f(z, \rho)$ fonksiyonu $S(\rho)$ sınıfının bir elemanıdır. $\omega = e^{i\theta} z \in D$ için $F'(\omega, p) = f'(z, \rho)$ olduğundan $F(z, p) \in S(p)$ bir destek noktası iken (2.32) ile tanımlanan $f(z) \in S(\rho)$ fonksiyonu için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 \leq 0$$

diferansiyel denklemi gerçekleşir.

Şimdi $F \in \sigma(p) \subset S(p)$ olsun ve $\mathbb{C} \setminus F(D)$ yayının uç noktalarının $\zeta, \eta \in \partial D$ noktalarına karşı geldiğini varsayalım. $p = \rho e^{i\theta}$ ($0 < \rho < 1$) ve $a, b \in \partial D$ olmak üzere $\zeta = e^{i\theta} a$ ve $\eta = -e^{i\theta} b$ diyelim. $G(e^{i\theta} z) = G^*(z)$ ve $H(e^{i\theta} z) = H^*(z)$ dersek, $f(z)$ (2.32) ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$(2.33) \quad G^*(z) = \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - \frac{(\rho-z)^2(1-\rho z)^2}{\bar{a}z(a-z)^2} - \frac{\rho^2}{az} + \rho^2 az$$

ve

$$(2.34) \quad H^*(z) = - \left(\frac{f(z)}{zf'(z)} \right)^2 - \frac{(b+z)^2(a-z)^2}{abz(\rho-z)(1-\rho z)} + \frac{ab}{\rho z} - \frac{z}{\rho ab}$$

olur. Her $z \in D$ için $G^{\times}(z)$ ve $H^{\times}(z)$ fonksiyonları analitik ve her $z \in D$ için

$$\operatorname{Re} G^{\times}(z) > 0, \quad \operatorname{Re} H^{\times}(z) > 0$$

dir. $G^{\times}(z)$ ve $H^{\times}(z)$ fonksiyonları yardımıyla tanımlanan iki fonksiyonun $C(\rho)$ sınıfına ait olduklarını göstermeye çalışalım.

Teorem 2.9. $f(z)$, (3.4) ile tanımlanan fonksiyon olsun. Bu halde

$$(2.35) \quad g(z) = \int_0^z \left[\left(\frac{tf'(t)}{f(t)} \right)^2 + \rho^2 \frac{(t^2 - \bar{a}^2)(a-t)^2}{(\rho-t)^2(1-\rho t)^2} \right] \frac{dt}{t}$$

fonksiyonu meromorf konvekse yakındır.

$$\text{İspat. } k'(z) = \frac{\bar{a}(a-z)^2}{(\rho-z)^2(1-\rho z)^2} \quad \text{fonksiyonu gözönüne alalım.}$$

Logaritmik türevle

$$1 + \frac{zk''(z)}{k'(z)} = 1 + \frac{2z}{\rho-z} + \frac{2\rho z}{1-\rho z} - \frac{2z}{a-z}$$

ve buradan

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zk''(z)}{k'(z)} + \frac{2\rho}{z-\rho} - \frac{2\rho z}{1-\rho z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z+a}{z-a} \right\} < 0$$

elde edilir. O halde $k(z) \in M(\rho)$ dir. $G^{\times}(z)$, (2.33) ile tanımlanan fonksiyon ise (2.35) den

$$\operatorname{Re} \frac{g'(z)}{k'(z)} = \operatorname{Re} G^{\times}(z) > 0$$

ve Tanım 23'e göre $g \in C(\rho)$ olur.

Yardımcı Teorem 2.1. $S(r, \theta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{z-\rho} - \frac{z}{1-\rho z} \right\}$
 olsun, burada $z = re^{i\theta}$ ve $0 < \rho < 1$ dir. Bu takdirde
 $2 - \sqrt{3} < \rho < r < 1$ için $S(r, \theta)$ fonksiyonu maksimum değerini $z=r$
 noktasında alır.

İspat. Belirli bir r için $A(\theta) = r^2 - 2r\rho \cos\theta + \rho^2$ ve
 $B(\theta) = 1 - 2\rho r \cos\theta + \rho^2 r^2$ dersek

$$S(r, \theta) = \frac{r \cos\theta - \rho}{A(\theta)} - \frac{r \cos\theta - \rho r^2}{B(\theta)}$$

ve

$$\frac{dS(r, \theta)}{d\theta} = \frac{r \sin\theta \cdot q(r, \theta)}{A(\theta)^2 \cdot B(\theta)^2}$$

olur, burada

$$q(r, \theta) = (1 - \rho^2 r^2) A(\theta)^2 - (r^2 - \rho^2) B(\theta)^2$$

dir. $2 - \sqrt{3} < \rho < r < 1$ için

$$\cos\alpha = \frac{2\rho^2(1+r^2) - (1-\rho^2) \sqrt{(r^2-\rho^2)(1-\rho^2 r^2)}}{2\rho r(1+\rho^2)}$$

olmak üzere $q(r, \alpha) = 0$ ve bu nedenle de $S'_\theta(r, \theta) = 0$ denkleminin
 kökleri $\theta = 0, \pi$ ve α dir. Kolayca görülür ki $S''_\theta(r, 0) < 0$,
 $S''_\theta(r, \pi) < 0$ ve $S''_\theta(r, \alpha) > 0$ eşitsizlikleri gerçekleşir. $S(r, \theta)$
 nin tanımından, $2 - \sqrt{3} < \rho < r < 1$ için

$$S(r, 0) = \frac{1-r^2}{(r-\rho)(1-\rho r)} > 0$$

ve

$$S(r, \pi) = - \frac{1-r^2}{(r+\rho)(1+\rho r)} < 0$$

çıkar. Buradan $\max_{0 \leq \theta < \pi} S(r, \theta) = S(r, 0)$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) olmak üzere $P(r, \theta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z} \right\}$ ise $\max_{0 \leq \theta < 2\pi} P(r, \theta) = \frac{1+r}{1-r}$ dir.

İspat. Belirli bir r için $C(\theta) = 1 + 2r \cos(\theta - \alpha) + r^2$ olsun. Bu halde

$$\frac{dP(r, \theta)}{d\theta} = 2r(1-r^2) \frac{\sin(\theta - \alpha)}{C(\theta)^2}$$

olur. $P'_\theta(r, \theta) = 0$ denkleminin kökleri $\theta = \alpha$ ve $\theta = \alpha + \pi$ dir. $P''_\theta(r, \alpha) > 0$ ve $P''_\theta(r, \pi - \alpha) < 0$ olduğundan $P(r, \theta)$ fonksiyonu maksimum değerini $z = -re^{i\alpha}$ noktasında alır.

Teorem 2.10. $f(z)$ fonksiyonu (2.32) ile tanımlansın. Bu takdirde $2 - \sqrt{3} < \rho < |z| < 1$ için

$$h(z) = \int_0^z \left[\left(\frac{f(t)}{tf'(t)} \right)^2 - \frac{(a^2b^2 - t^2)(\rho - t)(1 - \rho t)}{\rho(t+b)^2(t-a)^2} \right] \frac{dt}{t}$$

fonksiyonu meromorf konveksé yakındır.

İspat. $\phi'(z) = -ab \frac{(\rho-z)(1-\rho z)}{(z+b)^2(z-a)^2}$ fonksiyonunu gözönüne

alalım. Logaritmik türevle

$$\frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} = \rho \left\{ \frac{1}{z-\rho} - \frac{z}{1-\rho z} \right\} + \frac{b-z}{b+z} + \frac{a+z}{a-z}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ve 2.2 den, $2 - \sqrt{3} < \rho < r < 1$,
 $z = re^{i\theta}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} \right\} = \rho S(r, \theta) + \operatorname{Re} \frac{b-z}{b+z} + \operatorname{Re} \frac{a+z}{a-z}$$

$$< \rho \max_{\theta} S(r, \theta) + \max_{\theta} \operatorname{Re} \frac{b-z}{b+z} + \max_{\theta} \operatorname{Re} \frac{a+z}{a-z}$$

$$= \frac{\rho(1-r^2)}{(r-\rho)(1-\rho r)} + \frac{2(1+r)}{1-r}$$

$$= (1+r) \frac{-\rho r^2 + 2(1-\rho + \rho^2)r - \rho}{(1-r)(r-\rho)(1-\rho r)}$$

bulunur.

$$r_1 = r_1(\rho) = \frac{1}{\rho} [1 - \rho + \rho^2 + (1-\rho) \sqrt{1+\rho^2}]$$

olmak üzere $\rho < r_1 < r$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ 1+z \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} \right\} < 0$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu nedenle $\phi(z) \in K(\rho)$ ve $2 - \sqrt{3} < \rho$ için $K(\rho) \subset M(\rho)$ olduğundan, $h(z)$ nin tanımından (2.34) ile birlikte

$$\operatorname{Re} \frac{h'(z)}{\phi'(z)} = \operatorname{Re} H^{\mathbf{x}}(z) > 0$$

elde edilir.

- [2] L. Brickman and D.R. Wilken, Support Points of the Set of Univalent Functions, Proc. Amer. Math. Soc. 42(1974), 523-528.
- [3] W. Mangart, On the Support Points for Certain Families of Univalent Functions in the Unit Disk, Michigan Math. J. 23(1976), 207-216.
- [4] L. Ahlf, Lectures on Variational Methods in the Theory of Univalent Functions Lecture Notes 8, University of Maryland Department of Mathematics, College Park, Maryland, 1972.
- [5] W.E. Kirwan and R. Pell, Extremal Properties of a Class of Slit Conformal Mappings, Michigan Math. J. 25 (1978), 223-232.
- [6] J. Miller, Convex Meromorphic Mappings and Related Functions, Proc. Amer. Math. Soc. 25(1970), 220-228.
- [7] A. Pflüger, Lineare Extremalprobleme bei schlichten Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 No. 489 (1971), 32 pp.
- [8] J.A. Pfaltzgraff and S. Pinchuk, A Variational Method for Classes of Meromorphic Functions, J. Anal. Math. 24(1971), 101-150.
- [9] Ch. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck-Reprint, Göttingen (1975).
- [10] W.C. Royster, Convex Meromorphic Functions, Mathematical Essays Dedicated to A. J. Marinkya, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio, 1970, pp. 331-339.
- [11] G. Scheiber, Univalent Functions-Selected Topics, Lec. Notes in Math. Vol. 478, Springer-Verlag, Berlin (1975).

LİTERATÜR

- |1| Y.Avcı, Birim Dairede Yalınkat Meromorf Fonksiyonlar, Doçentlik Tezi, İstanbul Univ.İstanbul, (1982).
- |2| L.Brickman and D.R.Wilken, Support Points of the Set of Univalent Functions. Proc.Amer.Math.Soc. 42(1974), 523-528.
- |3| W.Hengartner and G.Schober, Some new Properties of Support Points for Compact Families of Univalent Functions in the Unit disk. Michigan Math.J.23(1976,207-216
- |4| J.A.Hummel, Lectures on Variational Methods in the Theory of Univalent Functions Lecture Note 8. University of Maryland Department of Mathematics, College Park, Maryland, 1972.
- |5| W.E.Kirwan and R.Pell, Extremal Properties of a Class of Slit Conformal Mappings. Michigan Math.J.25 (1978),223-232.
- |6| J.Miller, Convex Meromorphic Mappings and Related Functions, Proc. Amer.Math.Soc. 25(1970), 220-228.
- |7| A.Pfluger, Lineare Extremalprobleme bei schlichten Funktionen. Ann.Acad.Sci.Fenn.Ser. AI No.489 (1971), 32 pp.
- |8| J.A. Pfaltzgraff and B.Pinchuk,-A Variational Method for Classes of Meromorphic Functions, J.Analyses Math. 24(1971), 101-150.
- |9| Ch.Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck-Ruprecht, Göttingen (1975).
- |10| W.C.Royster, Conveks Meromorphic Functions, Mathematical Essays Dedicated to A.J.Macintyre, Ohio Univ.Press,Athens, Ohio, 1970, pp. 331-339.
- |11| G.Schober, Univalent Functions-Selected Topics, Lec.Notes in Math. Vol. 478, Springer-Verlag, Berlin (1975).

Çalışmalarım süresince kendilerinden unutulmaz yardım ve teşvik gördüğüm, doktoramı yöneten hocalarım Prof.Dr. Suzan Kahramaner ve Prof.Dr.Bediz Asral'a, ayrıca çalışmalarımı destekleyen Doç.Dr. Yusuf Avcı'ya en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Bu tezi büyük bir itina ile daktilo eden Sayın Güngör Gür'e teşekkür ederim.

