Y.T.Ü. Mühendislik Fakültesi

Konveks Fonksiyonların ve alt Sınıflarının İnc.

Yaşar Polatoğlu

Doktora Tezi

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ ▪ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

α - KONVEKS FONKSİYONLARIN VE ALT SINIFLARININ İNCELENMESİ

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Fen Bilimleri Enstitüsünce

" DR. RER. NAT "

Ünvanın verilmesi için kabul edilen tezdir

YAŞAR POLATOĞLU

Sözlü Sınav Günü : 28.3.1983

Doktorayı Yöneten Profesör : Prof. Dr. Suzan KAHRAMANER
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Bediz ASRAL
: Prof. Dr. Ahmet Yüksel ÖZEMRE
: Prof. Dr. Halil YÜKSEL

İSTANBUL
1982

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

α- KONVEKS FONKSİYONLARIN VE ALT SINIFLARININ İNCELENMESİ

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Fen Bilimleri Enstitüsünce
" DR.RER.NAT "
Ünvanın verilmesi için kabul edilen tezdir

YAŞAR POLATOĞLU

Sözlü Sınav Günü : 28.3.1983

Doktorayı Yöneten Profesör : Prof.Dr.Suzan KAHRAMANER
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Bediz ASRAL
: Prof.Dr. Ahmet Yüksel ÖZEMRE
: Prof.Dr.Halil YÜKSEL

İSTANBUL

1982

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmanın amacı 1969 yılında MOCANU tarafından tanımlanan α - konveks fonksiyonların bazı alt sınıflarını incelemektir. Birinci bölüm temel bilgileri kapsamaktadır.

İkinci bölümde α-konveks fonksiyonların α pozitif tam sayı olması halinde bazı özellikleri incelenmektedir. Bundan dolayı α-konveks fonksiyonların bu alt sınıfı M_p ile gösterilmektedir. İlk olarak M_p sınıfı için temel karakterizasyon p-fold konveks yalınkat fonksiyonlarından yararlanarak verilmekte, bu karekterizasyondan hareketle M_p sınıfına ait fonksiyonların $p-1/2p$ 'inci mertebeden konveks, $1/2$ 'inci mertebeden yıldızıl oldukları gösterilmektedir. Daha sonra M_p sınıfı ile yıldızıl fonksiyonlar sınıfı arasındaki ilgiyi kuran bir teorem ispatlanmakta ve bu teoremin sonulları olarak, M_p sınıfına ait fonksiyonların MARX-STROHACHE eşitsizliklerini gerçekledikleri ispatlanarak bir katsayı eşitsizliği verilmektedir. Yıldızıl fonksiyonlarla ilgiyi veren teorem ile yıldızıl fonksiyonlar için ROBERTSON tarafından verilen karakterizasyon M_p sınıfına uygulanarak, M_p sınıfına ait bazı eşitsizlikler, distorsiyon teoremleri ispatlanmaktadır. Daha sonra M_p sınıfı için SCHWARZİAN türev eşitsizliği verilmektedir. Bölümün son teoremi olarak M_α sınıfı için genel bir karakterizasyon ile bu karakterizasyonun sonulu olarak konveks fonksiyonların türevlerinin gerçekledikleri yeni bazı eşitsizlikler elde edilmektedir.

Üçüncü bölümde MILLER tarafından tanımlanan p-fold α-konveks fonksiyonların d_{p+1} ve d_{2p+1} katsayıları için kesin üst sınırlar verilerek $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ve $p = 2$ için özel durumlar incelenmektedir. İncelenen özel haller sırasıyla p-fold konveks, p-fold yıldızıl ve tek α-konveks sınıfına karşılık gelmekte olup, ilk iki sınıf için bilinen katsayı eşitsizlikleri elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde konvekslik yarıçapı ve MİLLER, MOCANU, READE tarafından tanımlanan -konvekslik yarıçapı kavramları p-fold yıldızıl fonksiyonlar sınıfına genişletilmektedir. Bu genişletilmenin $\alpha = 0$ ve $p = 1$ özel halleri için MİLLER, MOCANU, READE tarafından bulunan değerler elde edilmektedir.

GİRİŞ

Birim daire $|z|<1$ de analitik, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ koşullarıyla normalize edilmiş olan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonları $f'(z)\, f(z)/z \neq 0$ ve α reel bir sayı olmak üzere

$$(1) \qquad \mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\, z \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1+z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] > 0$$

eşitliğini gerçeklemeleri halinde α-konveks fonksiyon adını alırlar. Bu fonksiyonların sınıfını M_α ile göstereceğiz. (1) eşitsizliği $f(z)$ fonksiyonunun M_α sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşuldur. α- konveks fonksiyonların yıldızıl ve yalınkat oldukları S.S.Miller, P. Mocanu ve M.O. Reade [9] tarafından ispatlanmıştır. Daha sonra bu sınıf için distorsiyon teoreminden S.S.Miller [7], katsayıları için kesin sınır A.K. Kulshrestha [5] tarafından verilmiştir. Aynı yıllarda α-konveks fonksiyonların Bazileviç fonksiyonları ile ilgisi S.S.Miller, P.Mocanu ve M.D.Deade tarafından verilmiş olup her α-konveks fonksiyonu $1/\alpha$ ıncı mertebeden Bazileviç fonksiyonu olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bu fonksiyonların Hardy sınıfı S.S.Miller, P.J.Eeingenburg tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada α-konveks fonksiyonlar sınıfı α 'nın doğal bir sayı olması halinde incelenmekte, bu nedenle $\alpha = p$ alınarak, bu alt sınıfı M_p ile gösterilmektedir. İlk olarak M_p sınıfı için, p-fold konveks fonksiyonlardan yararlanarak temel bir karekterizasyon verilmektedir. (BÖLÜM II, TEOREM.1) K_p ile gösterilen p-fold konveks fonksiyonlar ilk defa ROBERTSON [14] tarafından incelenmiştir. Verilen bu temel karekterizasyondan hareketle M_p sınıfına ait fonksiyonların $p-1/2p$ 'inci mertebeden konveks 1/2 inci mertebeden yıldızıl oldukları gösterilmektedir. Daha sonra M_p sınıfı ile yıldızıl fonksiyonlar sınıfı arasındaki bağıntıyı veren bir teorem (BÖLÜM II, TEOREM 3) ispatlanmakta ve bunun sonuçları olarak M_p sınıfına ait fonksiyonlar için MARX-STROHACHER eşitsizlikleri, katsayı eşitsizlikleri ve bazı distorsiyon teoremleri elde edilmektedir. İkinci bölümün sonunda M_p sınıfına ait fonksiyonların SCHWAZIAN türevlerinin gerçekledikleri bir eşitsizlik ve M_α (α reel) sınıfı için genel bir karakterizasyondan (BÖLÜM II, TEOREM.6) hareketle konveks fonksiyonların gerçekledikleri bazı eşitsizlikler bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde p-fold α-konveks fonksiyonların a_{p+1}, a_{2p+1} katsayıları için kesin üst sınırlar verilerek, bunların özel halleri incelenmektedir.

Son bölümde p-fold yıldızıl fonksiyonların gerçekledikleri eşitsizlikler elde edilmekte, sonra bu sınıf için konvekslik ve α-konvekslik yarıçapları hesaplanmakta ve bunların özel halleri incelenmektedir.

I. YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI HAKKINDA TEMEL BİLGİLER

§.1. YALINKAT FONKSİYON TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

$\Omega \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlemde bir bölge olsun. Ω içinde meromorf ve injektif olan bir fonksiyona Ω içinde yalınkat fonksiyon denir. Dolayısıyla Ω içinde yalınkat olan $f(z)$ fonksiyonu Ω'da yalnız ve ancak basit bir kutup noktası hariç edilmek üzere analitik ve injektiflik koşulunu gerçekler. İnjektiflik koşulundan dolayı $f(\Omega)$ resim bölgesinin sınırı kendi kendini kesmez. Yalınkat fonksiyonlar için en basit ve önemli örnekler moebius dönüşümleridir.

Yalınkat fonksiyonlar için en önemli özellikler aşağıdaki şekilde sıralanabilir. $f(z)$ fonksiyonu Ω da yalınkat olsun.

(i) $g(z)$ fonksiyonu G'de yalınkat $f(\Omega) = \{f(z) \ z \ \Omega\} \subset G$ ise $g(f(z))$ bileşke fonksiyonu Ω da yalınkattır. Daha fazla olarak $1/f(z)$ fonksiyonu yalnız ve ancak $f(z)$ yalınkat ise yalınkattır.

(ii) Analitik bir fonksiyon yalnız ve ancak türevi bir noktada sıfırdan farklı ise bu nokta civarında injektiftir. $z \in \Omega$ için $f'(z) \neq 0$ olmalıdır [1]. Bunun tersi doğru değildir. Eğer $f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında basit bir kutbu varsa $1/f(z)$ fonksiyonu z_0'da analitik ve yalınkattır. Dolayısıyla z_0'da sıfırdan farklı bir türevi olmalıdır.

(iii) $f(z)$ fonksiyonu Ω bölgesini birebir olarak $f(\Omega)$ üzerine tasvir eder ve küresel metriğe göre süreklidir. Ters fonksiyonda meromorf olduğundan $f(z)$ fonksiyonu Ω nın $f(\Omega)$ üzerine bir homomorfizmasıdır. Böylece yalınkat-fonksiyonlarda yapılan tasvirlerde bağlantılı olma gibi bütün topolojik invaryantlar korunmuş olur.

(iv) $z_0 \in \Omega$ noktasından geçen iki Jordan eğrisi arasındaki açı $f(z)$ fonksiyonu ile elde edilen tasvir eğrileri arasındaki açıya eşittir. Dolayısıyla, yalınkat fonksiyon konform bir homomorfizmadır.

(v) S ve Σ sınıfları tanımı

$D = \{ z \mid |z| < 1 \}$ ile birim dairenin içi

$\Delta = \{ z \mid |z| > 1 \}$ ile birim dairenin dışı ve

∂D veya $\partial\Delta$ ile $|z| = 1$ birim dairenin çevresi gösterilecektir. Riemann tasvir teoremine göre [13] $f(o) = 0$, $f'(0) > 0$ koşulları

$$f : D \to f(D)$$

tasvirinin parametrelerini belirler.

TANIM 1.

$f(z)$ fonksiyonları birim dairede analitik, yalınkat

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n , \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = a_1 = 1$$

olacak şekilde normalize edilmiş iseler, bu fonksiyonlar normalize edilmiş sınırlı olmayan yalınkat fonksiyonların S sınıfını meydana getirirler.

$f(z) \in S$ için $|f(z)| < M$ ek koşulunu koyarsak, sınırlı fonksiyon elde ederiz. Sınırlı S fonksiyonları için $M > 1$ dir.

TANIM 2.

$g(z)$ fonksiyonları birim dairenin dışında yalınkat ve

$$(1) \qquad g(z) = z + b_o + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

olacak şekilde normalize edilmiş iseler, bu meroform fonksiyonlar sınıfını Σ ile gösterelim.

$$E = E(g) = \mathbb{C} / g(\Delta)$$

ile tasvir bölgesini tamamlayan bölgeyi gösterirsek $g(z) \in \Sigma$'nın (1) açılımındaki b_o katsayısına $E(g)$ nin konformluk merkezi adı verilir.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S \text{ ise}$$

$$g(z) = 1/f(1/z) = \frac{z}{1 + a_2 z^{-1} + \ldots} = z + \ldots$$

fonksiyonu Σ sınıfına aittir ve S sınıfındaki bir fonksiyonun kutbu olmadığından $g(z) \neq 0$ koşulu gerçeklenir.

Tersine olarak

$$g(z) \in \Sigma \quad \text{ve} \quad C \in E(g) \text{ ise;}$$

$$f(z) = \frac{1}{g(1/2)-C} = \frac{z}{1+(b_o-C)z+\ldots} = z + (c-b_o)z^2 + \ldots$$

fonksiyonu S sınıfına ait olur. Burada C 'yi tamamlayan bölgede seçmemiz gerekir. Aksi halde $f(z)$ fonksiyonunun bir kutbu olurdu. Σ sınıfının S sınıfından biraz daha genel olduğu görülür. Zira $f(z) \in S$ için ∞ değeri alınmayan bir değerdir, fakat $g(z) \in \Sigma$ için alınmayan değerler yoktur.

Aşağıdaki teorem Goodman [4] tarafından geliştirilmiş olup, bazı özel yalınkat fonksiyon sınıflarındaki katsayı problemlerinin çözümünde kullanılmıştır.

TEOREM 1 (GOODMAN [4]).

$$(1) \qquad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

olsun. p sıfırdan farklı pozitif veya negatif bir tam sayı olmak üzere

$$G(z) = (f(1/z^p))^{-1/p} = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{np-1}^{(p)}}{z^{np-1}}$$

açılımındaki katsayılar, $S(n)$ negatif olmayan $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$'n' liler cümlesini göstermek $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ n'lileri

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = m$$

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \ldots + nr_n = n$$

denklemlerini gerçeklemek ve $b_n = a_{n+1}$ olmak üzere

$$g_{np-1}^{(p)} = \sum_{S(n)} \frac{(-1)^m (p, m-1) b_1^{r_1} b_2^{r_2} \ldots b_n^{r_n}}{p^m r_1! \cdot r_2! \ldots r_n!}$$

formülü ile verilirler. Burada

$$\gamma(p,m) = (p+1)(p+2)(p+3)\ \ldots\ (mp+1)$$

$$\gamma(p,0) \equiv 1$$

dir.

TEOREM 2. (NEHARİ [11])

f(z) fonksiyonu birim dairede analitik, yalınkat olsun. $|z| = \rho$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant \frac{\rho^2-4\rho-1}{1-\rho^2}$$

dir.

TANIM 3.

Subordinasyon prensibi Schwarz lemmasının genelleştirilmiş halidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

f(z) ve g(z) fonksiyonları birim dairede analitik ve $\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleşen bir fonksiyon olmak üzere

$$(1) \qquad f(z) = g(\varphi(z))$$

koşulu gerçeklenirse f(z) fonksiyonu g(z) fonksiyonuna Subardinedir denir ve

$$(2) \qquad f(z) \prec g(z)$$

yazılır. $g(z) = z$ özdeş fonksiyon alınırsa subardinasyon prensibi Schwarz lemmasına indirgenir.

Aşağıdaki teoremler subordinasyon prensibi tanımından hemen ispatlanabilir.

TEOREM 3. (POMMERENKE [13]).

$$f(z) \prec g(z) \Rightarrow f(0) = g(0)\ ,\quad f(0) \subset g(D)$$

dir.

TEOREM 4 (NEHARİ [11]).

$f(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını gerçekliyorsa

$$|f'(z)| \leq \frac{1+|f(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad \left|\frac{f(z)+zf'(z)}{1+zf(z)}\right| \leq \frac{1}{1-|z|}$$

dir.

TEOREM 5. (NEHARİ [11]).

$f(z)$ fonksiyonu birim dairede analitik $|f(z)| < 1$, $f(0) = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) koşullarını gerçekliyorsa

$$\frac{|\alpha| - |z|}{1 - |\alpha z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|\alpha| + |z|}{1 + |\alpha z|}$$

dir.

TEOREM 6. (POMMERENKE [13]).

$g(z)$ birim dairede yalınkat ise, $f(z) \prec g(z)$ olması için gerek ve yeter koşul :

$$f(0) = g(0), \quad f(D) \subset g(D)$$

olmasıdır.

§.2. POZİTİF REEL KISMA HAİZ FONKSİYONLAR SINIFI

$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ fonksiyonu birim dairede analitik ve $\text{Re } p(z) > 0$ koşulunu gerçeklesin. Böyle fonksiyonların sınıfına pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı diyeceğiz ve bu sınıfı P ile göstereceğiz.

P sınıfına ait temel teoremler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM.1 (POMMERENKE [13]).

$P(z) \in P$ ise;

(i) $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |p(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

(ii) $$|P'(z)| \leqslant \frac{2}{1-|z|^2}, \quad \left| z \frac{p'(z)}{p(z)} \right| \leqslant \frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

(iii) $$\operatorname{Re} z \frac{p'(z)}{1+p(z)} \geqslant \frac{|z|}{1+|z|}$$

(iv) $|p_n| \leqslant 2$

dir.

Ayrıca $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu birim daireyi sağ yarım düzleme tasvir ettiğinden P sınıfı için aşağıdaki temel karakterizasyon çok önemlidir.

TEOREM 2. (POMMERENKE [13]).

$P(z) \in P$ olması için gerek ve yeter koşul

$$P(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

olmasıdır.

P sınıfına ek olarak, $p(z) = 1+p_1 \cdot z + p_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim dairede analitik $\operatorname{Re} p(z) > \rho$, $(0 \leqslant \rho < 1)$ koşulunu gerçeklerse $p(z)$ fonksiyonlarına ρ ıncı mertebeden pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar denir ve bu sınıf P_ρ ile gösterilir. Yukarıda P sınıfı için verilen teoremlere benzer teoremler P_ρ sınıfı için verilebilir. İkinci bölümde kullanacağımız P_ρ sınıfına ait teorem aşağıdaki şekildedir.

TEOREM 3. (SCHILD [16]).

$p(z) = 1+ p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \in P_\rho$ ise

$$|p_n| \leq \frac{2}{1-\rho} \qquad \text{dir.}$$

TEOREM 4. (SCHILD [16]).

$p(z) = 1+p_1 z+ p_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim dairede 1/2 'ci mertebeden pozitif reel kısma haiz bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul, $\phi(z)$ birim dairede analitik, $|\phi(z)| \leq 1$ olmak üzere

$$p(z) = \frac{1}{1+z\phi(z)}$$

şeklinde yazılmasıdır.

§.3. YILDIZIL YALINKAT FONKSİYONLAR SINIFI

Ω genişletilmiş düzlemde basit bağlantılı bir bölge olsun. $0 < t < 1$ olmak üzere $\forall z \in \Omega$ için $tz \in \Omega$ koşulu gerçeklenirse, Ω bölgesine başlangıç noktasına göre yıldızıl bölge denir. Bu tanımdan dolayı f(z) fonksiyonu birim dairede yalınkat ve f(D) resim bölgesi başlangıç noktasına göre yıldızıl bölge ise f(z) fonksiyonuna birim dairede yıldızıl yalınkat fonksiyon adı verilir. Yıldızıl yalınkat fonksiyonlar sınıfını S^* ile göstereceğiz.

Benzer şekilde yıldızıl yalınkat fonksiyonlar için temel teoremler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM 1. (POMMERENKE [13]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonunun birim dairede yıldızıl yalınkat fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır.

TEOREM 2 (POMMERENKE [13]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyon birim dairede yıldızıl yalınkat olsun. Buna göre

(i) $$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

(ii) $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \operatorname{Re} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

(iii) $$\operatorname{Re}\sqrt{f(z)/z} > \frac{1}{2} \qquad \left|\sqrt{z/f(z)} - 1\right| < 1$$

(iv) $|a_n| \leqslant n$

(v) $f(z)$ tek yıldızıl yalınkat fonksiyon ise

$$|a_n| \leqslant 1$$

dir.

TEOREM 3. (ROBERTSON [15]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim dairede $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ koşullarıyla normalize edilmiş olsun. $f(z)$ fonksiyonunun birim dairede yıldızıl yalınkat olması için gerek ve yeter koşul

$$F_k(z) = \left[\frac{kf(z)}{f(kz)}\right]^{1/2}, \quad F_k(0) = 1, \quad F_o(z) = \left[\frac{f(z)}{z}\right]^{1/2}$$

denklemleri ile tanımlanan analitik $F_k(z)$ fonksiyonunun

$$\frac{1+kz}{1+z}$$

fonksiyonuna subordine olması ya da bu subordinasyona eşdeğer olan

$$\operatorname{Re} F_k(z) > \frac{1+k}{2}\ , \quad \left| \frac{1+k}{F_k(z)} - 1 \right| < 1$$

eşitsizliklerinin gerçeklenmesidir.

Burada $-1 < k < 1$ dir.

SONUL.1

$k = 0$ olduğu zaman TEOREM.2 nin (ii) eşitsizlikleri elde edilir.

SONUL.2

$k \to -1$ olduğu zaman, yıldızıl yalınkat fonksiyonlar için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{f(-z)} \right) > 0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

SONUL.3

$-1 < k < 1$ olmak üzere yıldızıl yalınkat fonksiyonlar için

$$|f(kz)| \leq |k| \left(\frac{1+|z|}{1+k|z|} \right)^2 \cdot |f(z)|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

SONUL.4

$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} \ z^{2n+1}$ fonksiyonu birim dairede

tek yıldızıl yalınkat fonksiyon ise $n = 2,3,\ldots$ için

$$|a_{2n-1}|^2 \cdot \left(\frac{1-k^n}{1-k}\right)^2 \leq 1 + \sum_{s=1}^{n} \frac{k^s(2-k^s-k^{s+1})}{1-k} \cdot |a_{2s+1}|^2$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$$

koşulunu gerçeklerse $f(z)$ fonksiyonuna birim dairede 1/2 inci mertebeden yıldızıl yalınkat fonksiyon adı verilir. 1/2 inci mertebeden yıldızıl yalınkat fonksiyonlar sınıfını $S^*_{1/2}$ ile göstereceğiz ve $S^*_{1/2}$ sınıfı ile ilgili teoremler konveks yalınkat fonksiyonlar sınıfı tanıtıldıktan sonra ifade edilecektir.

§.4. KONVEKS YALINKAT FONKSİYONLAR SINIFI

Ω genişletilmiş düzlemde basit bağlantılı bir bölge olsun. $0 < t < 1$ olmak üzere $z_1, z_2 \in \Omega$ için

$$tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$$

koşulu gerçeklenirse, Ω bölgesine konveks bölge denir. Konveks bölge tanımından dolayı $f(z)$ fonksiyonu birim dairede analitik, yalınkat ve $f(D)$ tasvir bölgesi konveks ise $f(z)$ fonksiyonuna konveks yalınkat fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyonlar sınıfını K ile göstereceğiz. Burada ayrıca dikkat edilmesi gereken durum konveks bir bölgenin her noktasına nazaran yıldızıl bir bölge olduğudur. Konveks yalınkat fonksiyonlar için temel teoremler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM 1 (POMMERENKE [13]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonunun birim dairede konveks yalınkat fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul

$$1 + z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)} \in P$$

olmasıdır.

TANIM.1

$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu birim dairede analitik, yalınkat ve

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > \rho \qquad (0 \leq \rho < 1)$$

koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna ρ ıncı mertebeden konveks fonksiyon adı verilir ve bu sınıfı K_ρ ile gösterilir.

TEOREM 2. (POMMERENKE [13]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim dairede konveks yalınkat fonksiyon olsun. Buna göre

$$(1) \qquad \mathrm{Re}\left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} \quad \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right\} > 0 \qquad (|z|<1\ ,\ |\zeta|<1)$$

$$(2) \qquad \mathrm{Re}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}\ ,\ \mathrm{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}\ ,\ \mathrm{Re}\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Yukarıdaki (1) eşitsizliği SHEIL-SMALL eşitsizliği olarak bilinir.(2) eşitsizlikleri MARX-STROHACHER eşitsizlikleridir.

TEOREM 3. (ROMMERENKE [13]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim dairede konveks yalınkat fonksiyon olsun. Buna göre;

$$(i) \qquad \frac{|z|}{1-|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$$

$$(ii) \qquad |a_n| \leq 1$$

(iii) $f(z)$ tek konveks yalınkat fonksiyon ise

$$|a_n| \leq \frac{1}{n}$$

dir.

TEOREM.4 (SCHILD [16]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu birim dairede konveks yalınkat fonksiyon olsun. $0 \leq \beta < 1/2$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left(1 + 2\beta z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 1-2\beta \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(1+z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

dır.

TEOREM 5. (POMMERENKE [13]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonunun birim dairede konveks yalınkat fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul

$$z . f'(z)$$

fonksiyonunun birim dairede yıldızıl yalınkat olmasıdır.

TEOREM 6. (SCHILD [16]).

$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu birim dairede konveks yalınkat bir fonksiyon, $0 < \beta \leq 1/2$ olsun.

$$G(z) = z \cdot \left(f'(z)\right)^{\beta}$$

şeklinde tanımlanan $G(z)$ fonksiyonu birim dairede 1/2 inci mertebeden yıldızıl yalınkat fonksiyondur.

SONUÇ.1

$G(z)$ fonksiyonunun birim dairede 1/2 inci mertebeden yıldızıl yalınkat fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul, $f(z)$ birim dairede konveks yalınkat fonksiyon olmak üzere

$$G(z) = z\left(f'(z)\right)^{1/2}$$

denkleminin gerçeklenmesidir.

YARDIMCI TEOREM 1 (POMMERENKE [13])

$$\operatorname{Re} w_1 > \frac{1}{2}\ , \ \operatorname{Re} w_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}\sqrt{w_1 . w_2} > \frac{1}{2}$$

dir.

§5. P-FOLD KONVEKS YALINKAT FONKSİYONLAR SINIFI

P pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} . z^{np+1}$$

fonksiyonu birim dairede analitik, konveks yalınkat olsun. Buna göre $f(z)$ fonksiyonuna birim dairede p-fold konveks yalınkat fonksiyon adı vereceğiz. p-fold konveks yalınkat fonksiyon sınıfı ilk defa ROBERTSON [14] tarafından incelenmiş ve bu sınıf için temel teoremler kendisi tarafından verilmiştir. Bu sınıfı K_p ile gösterelim.

TEOREM 1. (ROBERTSON [14]).

$f(z)$ fonksiyonu birim dairede p-fold konveks yalınkat fonksiyon olsun. Buna göre

(i) $$\int_0^r \frac{dr}{(1+r^p)^{2/p}} \leqslant |f(z)| \leqslant \int_0^r \frac{dr}{(1-r^p)^{2/p}}$$

(ii) $$(1+r^p)^{-2/p} \leqslant |f'(z)| \leqslant (1-r^p)^{-2/p}$$

(iii) $$|a_{np+1}| \leqslant \frac{1}{pn+1} \cdot \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k+\frac{2}{p}\right)$$

dir.

TEOREM 2. (ROBERTSON [14]).

$f(z)$ fonksiyonu birim dairede p-fold konveks yalınkat fonksiyon olsun. Buna göre

$$f(z) = \int_0^z \prod_{s=1}^{n} \left(1-\frac{t^p}{z_s^p}\right)^{-\alpha_s} dt$$

dir.

Burada ayrıca belirtmek gerekir ki $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$ fonksiyonu birim dairede yıldızıl yalınkat fonksiyon ise, f(z) fonksiyonuna p-fold yıldızıl yalınkat fonksiyon denir. p-fold yıldızıl yalınkat fonksiyonlar için benzer teoremler §.4 .TEOREM.5 den yararlanarak ispatlanabilir. Aşağıdaki teorem yine ROBERTSON [14] tarafından verilmiş olup p-fold yıldızıl yalınkat fonksiyonlar için önemli iki eşitsizlik içerir.

TEOREM 3. (ROBERTSON [14]).

f(z) fonksiyonu birim dairede p-fold yıldızıl yalınkat ise,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{p/2} > \frac{1}{2} \, ,$$

$$|a_{np+1}| \leq \frac{1}{n!} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{2}{p}\right)$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

§6. α-KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI

α-konveks fonksiyonlar sınıfı ilk defa MOCANU tarafından 1969 yılında tanımlanmıştır [9].

α-reel bir sayı olmak üzere $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu birim dairede analitik

$$(1) \qquad f(z).\, f'(z)/z \neq 0$$

$$(2) \qquad \mathrm{Re}\, J(\alpha, f(z)) = \mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] > 0$$

koşullarını gerçeklerse, f(z) fonksiyonuna birim dairede α-konveks fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfını M_α ile göstereceğiz.

Bugüne kadar bu fonksiyon sınıfı için verilen teoremler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM 1 (MILLER, MOCANU, READE [9]).

$-\infty \leqslant \alpha \leqslant \infty$ olmak üzere bütün α-konveks fonksiyonlar yalınkat ve yıldızıldır.

TEOREM 2. (MILLER [7]).

$f(z)$ fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere birim dairede α-konveks ise;

(i) $-K(\alpha, -r) \leqslant |f(z)| \leqslant K(\alpha,r)$

(ii) $$\frac{\partial K(\alpha,-r)}{\partial r} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{\partial K(\alpha,r)}{\partial r}$$

dir. Burada

$$K(\alpha,r) = r\left[F(1/\alpha\ ,2/\alpha\ ,\ 1/\alpha + 1\ ;\ r)\right] \quad \text{olup,}$$

$F(1/\alpha\ ,\ 2/\alpha\ ,\ 1/\alpha +1\ ;\ r)$ hipergeometrik fonksiyondur.

TEOREM 3. (MILLER 7).

$f(z)$ fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere birim dairede α-konveks ise birim dairenin $f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirinde $f(D)$ resim bölgesi $|w| < \tilde{d}(\alpha)$ dairesini kapsar. Burada,

$$\tilde{d}(\alpha) = \begin{cases} (1/2)^2 & \alpha = 0 \quad \text{ise,} \\ \dfrac{1}{2\alpha} \cdot \dfrac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(2/\alpha)} & \alpha > 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir ve $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonudur.

TEOREM 4. (KULSHRESTHA [5]).

$f(z)$ fonksiyonu birim dairede $\alpha > 0$ olmak üzere α-konveks ise,

$$|a_{n+1}| \leqslant \sum_{s(n)} \frac{\gamma(\alpha,m-1)\, b_1^{r_1} . b_2^{r_2} \ldots b_n^{r_n}}{r_1! . r_2! \ldots r_n!}$$

dir. Eşitlik ancak ve yalnız

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\zeta)^{-2/\zeta} d_\zeta \right]^\alpha$$

fonksiyonu için vardır. Burada $b_n = c_{n+1}$ olmak üzere

$$C_n = \frac{1}{\alpha^n . n! (1+n\alpha)} \prod_{k=0}^{n-1} (2-k\alpha)$$

olup, toplam BÖLÜM I. TEOREM.1 deki S(n) üzerinden alınır ve

$$\gamma(\alpha,0) = \alpha$$

$$\gamma(\alpha,m-1) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(m-1))$$

dir.

TEOREM 5. (MILLER [7]).

$g(z) = z+b_2z^2+\ldots$ fonksiyonu birim dairede yıldızıl yalınkat fonksiyon olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$ fonksiyonunun birim dairede α-konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$g(z) = f(z) \cdot \left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right)^\alpha$$

denkleminin gerçeklenmesidir.

§.7. P-FOLD α- KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI

TANIM : 1. (MILLER [8]).

$$f(z) = z+a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \ldots + a_{np+1} . z^{np+1} + \ldots$$

fonksiyonu birim dairede analitik ve α reel bir sayı olmak üzere α -konveks ise $f(z)$ fonksiyonuna birim dairede p-fold α -konveks fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyonlar sınıfı $M_{\alpha}(p)$ ile gösterilir.

TEOREM 1 (MILLER [8]).

$g(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu αp konveks ise,

$$f(z) = \left(g(z^p)\right)^{1/p}$$

fonksiyonu p-fold α-konvekstir.

TEOREM 2 (MILLER [8]).

$\alpha > 0$ olmak üzere $f(z)$ 1fonksiyonu p-fold α-konveks ise

$$\left[-K(p\alpha,-r^p)\right]^{1/p} \leqslant |f(z)| \leqslant \left[K(\alpha p,r^p)\right]^{1/p}$$

dir. Burada

$$K(\alpha p,r) = r\left[F(1/\alpha p,\ 2/\alpha p,\ \frac{1}{\alpha p}+1\ ;\ r)\right]$$

olmak üzere,

$F(1/\alpha p,\ 2/\alpha p,\ \frac{1}{\alpha p}+1\ ;\ r)$ hipergeometrik fonksiyondur.

TEOREM 3. (MILLER [8]).

$f(z)$ fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere p-fold α-konveks ise, birim dairenin $f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirinde $f(D)$ resim bölgesi $|w| < \tilde{d}(\alpha p)$ dairesini kapsar. Burada,

$$\tilde{d}(\alpha p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{p/2} & \alpha = 0 \quad \text{ise} \\ \frac{1}{2p\alpha}\cdot\frac{\Gamma(1/p\alpha)}{\Gamma(2/p\alpha)} & \alpha > 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir ve $\Gamma(\alpha p)$ Gamma fonksiyonudur.

8. KONVEKSLİK VE α -KONVEKSLİK YAPI ÇAPI

TANIM 1. (MİLLER, MOCANU, READE [10])

$\mathcal{F}$ birim dairede analitik yalınkat olan fonksiyonların cümlesini göstersin $\alpha \geq 0$ bir reel sayı olsun.

$$R_\alpha(\mathcal{F}) = \operatorname{Sup} \{ R \,|\, \operatorname{Re}(j(\alpha, f(z))) > 0 \ , \ |z| < R, \ \ f(z) \in \mathcal{F} \}$$

sayısına $\mathcal{F}$ cümlesinin, α-konvekslik yarıçapı denir. $\alpha = 1$ olması halinde bu yarıçapa konvekslik yarıçapı denir.

Konvekslik ve α-konvekslik yarıçapları üzerine şimdiye kadar ispatlanmış teoremler kısaca aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

TEOREM 1. (MILLER, MOCANU, READE [10])

S.birim dairede analitik,yalınkat $f(z)$ fonksiyonlarının cümlesi olsun. Bu halde $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$R_\alpha(S) = (1+\alpha) - \sqrt{(1+\alpha)^2 - 1}$$

dir.

TEOREM 2. (MILLER, MACONU, READE [10]).

S^* birim dairede yalınkat analitik, yıldızıl fonksiyonların cümlesi olsun. Bu halde $\alpha > 0$ olmak üzere

$$R_\alpha(S^*) = (1+\alpha) - \sqrt{(1+\alpha)^2 - 1}$$

dir.

Yukarıdaki teoremlerde $\alpha = 1$ alınarak S ve S^* sınıflarının konvekslik yarıçaplarının eşit ve $2-\sqrt{3}$ olduğu görülür.

BÖLÜM II. M_p SINIFI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR:

Bu bölümde, p pozitif tam sayı olmak üzere $\alpha \equiv p$ alınarak p-konveks fonksiyonların özellikleri incelenmektedir.

TEOREM 1 (Temel Karakterizasyon).

$f(z)\in M_p$ olması için gerek ve yeter koşul $F(z)\in K_p$ olmak üzere

$$f(z) = \left[F(z^{1/p})\right]^p \Leftrightarrow F(z) = \left[f(z^p)\right]^{1/p}$$

eşitliklerinin gerçeklenmesidir.

İspat: $f(z)$ M_p olmak üzere $f(z) = \left[F(z^{1/p})\right]^p$ eşitliği gerçekleşsin. Eşitlikten logaritmik türev alınırsa,

$$(1) \quad z\frac{f'(z)}{f(z)} = z^{1/p}\cdot\frac{F'(z^{1/p})}{F(z^{1/p})}$$

veya

$$(2) \quad f'(z) = f(z)\cdot z^{1/p-1}\cdot\frac{F'(z^{1/p})}{F(z^{1/p})}$$

Bağıntıları elde edilir. (2) eşitliğinden tekrar logaritmik türev alınıp gerekli hesaplamalardan sonra

$$(3) \quad p\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = 1+pz\frac{f'(z)}{f(z)} + z^{1/p}\frac{F''(z^{1/p})}{F'(z^{1/p})} - z^{1/p}\frac{F'(z^{1/p})}{F(z^{1/p})}$$

eşitliği bulunur. Öte yandan (1) eşitliği (1-p) ile çarpılıp (3) bağıntısı ile taraf tarafa toplanır, her iki tarafın reel kısmı alınırsa,

$$(4) \quad \mathrm{Re}\left[(1-p)z\frac{f'(z)}{f(z)} + p\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] = \mathrm{Re}\left(1+z^{1/p}\frac{F''(z^{1/p})}{F'(z^{1/p})}\right)$$

çıkar. Fakat $F(z)\in K_p$ olduğundan (4)'ün sağ tarafı pozitif olacağından,

$$\operatorname{Re}\left[(1-p)\, z\,\frac{f'(z)}{f(z)} + p\left(1+z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] > 0$$

bulunur, bu $f(z)\in M_p$ olduğunu gösterir.

Tersine, $f(z)\in M_p$ olsun ve, $F(z) = \left[f(z^p)\right]^{1/p}$ eşitliği gerçekleşsin. Eşitlikten gerekli logaritmik türevler alınır, hesaplamalar yapılırsa;

$$(5)\quad \operatorname{Re}\left(1+z\,\frac{F''(z)}{F'(z)}\right) = \operatorname{Re}\left[(1-p)z^p.\,\frac{f'(z^p)}{f(z^p)} + p\left(1+z^p\,\frac{f''(z^p)}{f'(z^p)}\right)\right]$$

bulunur. (5)'in sağ tarafı $f(z)\in M_p$ olduğundan pozitiftir, dolayısıyla,

$$(6)\quad \operatorname{Re}\left(1+z\,\frac{F''(z)}{F'(z)}\right) > 0$$

bulunur, buda $F(z)\in K_p$ olduğunu gösterir.

TEOREM 2.

$f(z)\in M_p$ olsun. Bu taktirde $f(z)$ fonksiyonu $\frac{p-1}{2p}$ 'inci mertebeden konveks fonksiyondur.

İspat : TEOREM 1'den $F(z)\in K_p$ ise,

$$(1)\quad f(z) = \left[F(z^{1/p})\right]^{p}$$

fonksiyonu M_p sınıfına aittir. Öte yandan $F(z)\in M_p$ olduğundan 1/2 ci mertebeden yıldızıl ve konvekstir.

$$(2)\quad \operatorname{Re} z^{1/p}.\,\frac{F'(z^{1/p})}{F(z^{1/p})} > \frac{1}{2}$$

$$(3)\quad \operatorname{Re}\left(1+z^{1/p}.\,\frac{F''(z^{1/p})}{F'(z^{1/p})}\right) > 0$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. (1) bağıntısından gerekli logaritmik türevler alınır ve hesaplar yapılırsa,

$$(4)\ \operatorname{Re}\left[(1-p)z^{1/p}\frac{F'(z^{1/p})}{F(z^{1/p})}+p\left(1+z^{1/p}\frac{F''(z^{1/p})}{F'(z^{1/p})}\right)\right]$$

$$=\operatorname{Re} p.\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)$$

bulunur. (2) ve (3) eşitsizlikleri (4) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>\frac{p-1}{2p}$$

elde edilir. Bu $f(z)$'nin $\frac{p-1}{2p}$ 'inci mertebeden konveks olduğunu gösterir.

SONUL 1.

$f(z)\in M_p$ olsun. Bu taktirde $f(z)$ 1/2'inci mertebeden yıldızıl fonksiyondur.

İspat : TEOREM 1 ve TEOREM 2'den

$$\operatorname{Re}\ z\frac{f'(z)}{f(z)}=\operatorname{Re} z^{1/p}.\frac{F'(z^{1/p})}{F(z^{1/p})}>\frac{1}{2}$$

bulunurki bu da iddiayı ispatlar.

SONUL 2.

$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)\in M_p$ olsun. Bu taktirde,

$$(1)\quad G(z)=\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(z)\right]^{1/n}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon birim dairede 1/2'inci mertebeden yıldızıl fonkiyondur.

İspat: (1) ifadesinden logaritmik türeve alınıp gerekli hesaplamalardan sonra

$$(2)\quad \operatorname{Re} z\frac{G'(z)}{G(z)}=\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}$$

eşitliği elde edilir. Sonul 1. (2) eşitliğine uygulanırsa iddianın doğruluğu görülür.

TEOREM 3.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu taktirde $G(z)$ birim dairede yıldızıl fon-fonksiyon olmak üzere,

$$(f(z))^2 = z\,G(z)$$

denklemini gerçekler.

İspat : $f(z) \in M_p$ ise, TEOREM 2'nin SONUL 1'ne göre $f(z)$ fonksiyonunun 1/2 ci mertebeden yıldızıl olduğunu ispatlamıştık. Diğer taraftan, BÖLÜM I. §.4. TEOREM 6 SONUL 1'e göre $K(z)$ konveks fonksiyon olmak üzere

$$(1)\quad f(z) = z\,[K'(z)]^{1/2} \quad \text{veya} \quad (2)\quad (f(z))^2 = z^2.K'(z)$$

denklemlerini yazabiliriz. $K(z)$ fonksiyonu konveks olduğundan $ZK'(z) = G(z)$ fonksiyonu yıldızıldır. Bu gerçeği (2) denkleminde kullanırsak,

$$(f(z))^2 = z\,G(z)$$

bulunurki, bu da teoremi ispatlar.

SONUL 1.

$f(z) = z+a_2z^2+ \dots +a_nz^n+\dots$ fonksiyonu M_p sınıfına ait ise,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, a_{n-\nu}\right| \leq n$$

dir. Bundan başka TEOREM 3'de ifade edilen denklemde $G(z)$ fonksiyonu tek yıldızıl ise,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, a_{n-\nu}\right| \leq 1$$

dir.

Ispat : TEOREM 3'den

$$(f(z))^2 = z\,G(z)$$

denkleminde $G(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ açılımı ile $f(z)$'nin açılımı gözönüne alınır ve her iki tarafta z^n'nin katsayıları karşılaştırılıp BÖLÜM I. § 3 TEOREM 2'nin (iv) ve (v) cü şıkları kullanılırsa, sonunda ifade edilen eşitsizlikler elde edilir.

SONUL 2.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu taktirde $f(z)$ MARX-STROHACHER eşitsizliklerini gerçekler.

İspat : TEOREM 3'de

$$(f(z))^2 = zG(z)$$

denkleminde, $G(z)$ birim dairede yıldızıl fonksiyon olduğundan BÖLÜM I. §4 TEOREM 5 kullanılırsa,

$$(1)\quad \mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{z} = \mathrm{Re}\,\sqrt{F'(z)}$$

eşitliği elde edilir. (1) eşitliğinde BÖLÜM I. §4. TEOREM 2.'nin ikinci eşitsizlikleri kullanılsa,

$$(2)\quad \mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$$

bulunur. Öte yandan BÖLÜM II. TEOREM 2'nin SONUL 1'den dolayı,

$$(3)\quad \mathrm{Re}\, z\,\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$$

dir. (2) ve (3) eşitsizliklerine BÖLÜM I. §4. YARDIMCI TEOREM 1 uygulanırsa

$$(4)\quad \mathrm{Re}\,\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$$

bulunur. (2) ve (4) eşitsizlikleri MARX- STROHACHER eşitsizlikleridir.

TEOREM 4.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu taktirde $-1 < k < 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{f(kz)} > \frac{1+k}{2k}, \left| \frac{(1+k)f(kz)}{f(z)} - 1 \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(z)}{f(kz)} \prec \frac{1+kz}{k+kz}$$

bağıntıları gerçeklenir.

İspat: BÖLÜM II. TEOREM 3'de $f(z) \in M_p$ olması halinde $G(z)$ birim dairede yıldızıl fonksiyon olmak üzere,

$$(f(z))^2 = zG(z)$$

denkleminin gerçekleneceğini göstermiştik. Dolayısıyla bu denklemden $G(z)$ fonksiyonu

$$G(z) = \frac{(f(z))^2}{z}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade BÖLÜM I. §3. TEOREM 3'de yerine konulup gerekli hesaplar yapılırsa, teoremde ifade edilen eşitlikler bulunur.

SONUL 1.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu taktirde

$$\operatorname{Re}\frac{-f(z)}{f(-z)} > 0 \quad \text{veya} \quad \operatorname{Re}\frac{f(z)}{f(-z)} < 0$$

dır.

İspat : TEOREM 4'de

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{f(kz)} > \frac{1+k}{2k}$$

eşitsizliğinde $k \to -1$ alınması halinde sonul'da ifade edilen eşitsizlikler elde edilir.

SONUL 2.

$f(z) \in M_p$. olsun. Bu taktirde

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$$

dir.

İspat : TEOREM 4'de

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{f(kz)} > \frac{1+k}{2k}$$

eşitsizliğinde $k = 0$ alınarak gerekli işlemler yapılırsa, Sonul'da ifade edilen eşitsizlik elde edilir; bu ise aynı zamanda BÖLÜM II. TEOREM 3'ün SONUL 2'sinde ispatlanmış eşitsizliktir.

SONUL 3.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu taktirde,

$$\left|(k-1)\, z\,\frac{f'(z)}{f(z)} - (k-1)kz\,\frac{f'(kz)}{f(kz)}\right| \leq \frac{1}{1-|z|^2}\left|2(1-k)-(1-k^2)\,\frac{f(kz)}{kf(z)}\right|$$

dir.

İspat : TEOREM 4'deki

$$\frac{f(z)}{f(kz)} \prec \frac{1+kz}{k+kz}$$

Subordinasyon gözönüne alınır ve tanımı kullanılırsa,

$$(1)\quad \frac{f(z)}{f(kz)} = \frac{1+k\,\varphi(z)}{k-k\,\varphi(z)}$$

eşitliği ve buradan,

$$(2)\quad \varphi(z) = \frac{f(kz) - kf(z)}{kf(z) - kf(kz)}$$

bulunur. (2) bağıntısından türev alınarak,

$$(3)\quad \varphi'(z) = \frac{(k-k^2)\ f'(kz).\ f(z)+(k-1)\ f'(z).f(kz)}{k^2(f(z) - f(kz))^2}$$

diğer taraftan $\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden BÖLÜM I. § 1. TEOREM 4 (3) eşitliğine uygulanır ve gerekli hesaplar yapılırsa Sonul'da ifade edilen eşitsizlik elde edilir.

SONUL 4.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu takdirde,

$$\left| 1 - z\frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{1-|z|^2} \left| 2 - \frac{f(z)}{z} \right|$$

dir.

İspat :

Sonul 3'de $k = 0$ alınırsa Sonul 4'ün eşitsizliği bulunur.

SONUL 5.

$f(z) \in M_p$ olsun. Bu taktirde

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} + \left(-z\frac{f'(-z)}{f(-z)}\right) \right| \leq \frac{2}{1-|z|^2}$$

dir.

İspat : Sonul 3'de $k \to -1$ alınırsa, Sonul 5'de ifade edilen eşitsizlik bulunur.

SONUL 6.

$f(z) \in M_p$ olsun. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < k < 1$ olmak üzere

$$\frac{|k|\,(1-|z|)}{1-|z(k^2+k-1)|} \leq \left| \frac{f(kz)}{f(z)} \right| \leq \frac{|k|\,(1+|z|)}{1+|z(k^2+k-1)|}$$

dir.

İspat : TEOREM 4'deki

$$(1) \quad \left| \frac{(1-k)\, f(kz)}{f(z)} - 1 \right| < 1$$

eşitsizliğinden

$$\phi(z) = \frac{(1+k)\, f(kz)}{f(z)} - 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (1) eşitsizliğinden dolayı $|\phi(z)|<1$ dir. Öte yandan $\phi(0)=k^2+k-1$ olduğundan, $\phi(z)$ fonksiyonu BÖLÜM I §1. TEOREM 5'in koşullarını gerçekler. Bundan dolayı,

$$\frac{|k^2+k-1|-|z|}{1-|z(k^2+k-1)|}\leqslant\left|\frac{(1+k)f(kz)}{f(z)}-1\right|\leqslant\frac{|k^2+k-1|+|z|}{1+|(k^2+k-1)z|}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılarak gerekli hesaplar yapılırsa Sonul'da ifade edilen eşitsizlik bulunur.

SONUL 7.

$f(z)\in M_p$ olsun. Bu taktirde $n=2,3,\ldots$ için

$$|a_n|\leqslant\sum_{s=2}^{n-1}\frac{2\,k^{s-1}}{(1-k)(1-k^n)}|a_s|$$

dir.

İspat : TEOREM 4'deki

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{f(kz)}>\frac{1+k}{2k}$$

eşitsizliği ve BÖLÜM I. §2 . TEOREM 3 kullanılarak,

$$(1)\quad \mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{f(kz)}=\mathrm{Re}\;p(z)>\frac{1+k}{2k}=\rho$$

bağıntısı yazılabilir. Bundan dolayı (1) bağıntısı aynı zamanda

$$(2)\quad f(z)=f(kz).\,p(z)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$$

açılımı ile birlikte (2) eşitliğinin her iki tarafında z^n'nin katsayıları hesaplanır ve gerekli işlemler yapılırsa, sonul'da ifade edilen eşitsizlik bulunur.

TEOREM 5.

$f(z)$ $\quad M_p$ olsun. Bu taktirde SCHWARZİAN türev ifadesi

$$|\{f(z),z\}| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)}(-4\rho^2+3\rho+1) \quad (0<\rho<1)$$

eşitsizliğini gerçekler.

İspat : BÖLÜM II. TEOREM 2'den dolayı $f(z)$ fonksiyonu $\frac{p-1}{2p}=\rho$ 'ınu mertebeden konveks fonksiyondur. Dolayısıyla, $p(z) \in P$ olmak üzere,

$$(1) \qquad 1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} = (1-\rho)\,p(z)+\rho$$

şeklinde ifade edilebilir. (1) bağıntısından

$$(2) \qquad \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(1-\rho)\,(p(z)-1)}{z}$$

elde edilir. (2) bağıntısından,

$$(3) \qquad \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' = \frac{(1-\rho)\,zp'(z)-(1-\rho)(p(z)-1)}{z^2}$$

ifadesi yazılabilir. Öte yandan SCHWARZİAN türev tanımı:

$$(4) \qquad \{f(z),z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

olduğu göz önüne alınır ve (2) ve (3) bağıntılarından gerekli hesaplar yapılırsa,

$$(5) \qquad |\{f(z),z\}| = \left|\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\right| \leq$$

$$\frac{(1-\rho)}{2|z|^2}\,|2zp'(z)-(p(z))^2+1| + \frac{\rho(1-\rho)}{2|z|^2}|p(z)-$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat,

$$(6)\quad \left|2zp'(z)-(p(z))^2+1\right| \leqslant \frac{4|z|^2}{(1-(z)^2)^2}$$

$$(7)\quad |p(z)-1| \leqslant \frac{4|z|^2}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizlikleri (5) eşitsizliğinde kullanılsa, gerekli işlemlerden sonra

$$\left|\left\{f(z),z\right\}\right| \leqslant \frac{2}{(1-|z|^2)^2}(-4\rho^2+3\rho+1)$$

bulunur, bu da teoremin ispatıdır.

Aşağıdaki teorem - konveks fonksiyonlar için bir karakterizasyondur.

TEOREM 6.

f(z) fonksiyonu birim dairede analitik, $f(o)=0$, $f'(o)=1$ koşulları ile normalize edilmiş olsun. f(z) fonksiyonunun birim dairede α- konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul:

$$\Phi_{k\alpha}(z)=\left[\frac{kf(z)\cdot\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}}{f(kz)\left(kz\frac{f'(kz)}{f(kz)}\right)^{\alpha}}\right]^{1/2},\quad \Phi_{k\alpha}(o)=1,\ \Phi_{k\alpha}(z)=$$

$$=\left[\frac{f(z)\cdot\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}}{z}\right]^{1/2}$$

denklemleri ile tanımlanan $\Phi_{k\alpha}(z)$ fonksiyonunun $\frac{1+kz}{1+z}$ fonksiyonuna subordine olması veya bu subordinasyona eşdeğer olan

$$\operatorname{Re}\Phi_{k\alpha}(z) > \frac{1+k}{2},\qquad \left|\frac{1+k}{\Phi_{k\alpha}(z)}-1\right|<1$$

eşitsizliklerinin gerçeklenmesidir. Burada $-1<k<1$ dir.

İspat: f(z) fonksiyonun birim dairede α- konveks olması için gerek ve yeter koşul $g(z)$ birim dairede yıldızıl bir fonksiyon olmak üzere

$$(1) \quad f(z) \cdot \left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha} = g(z)$$

denkleminin ferçeklenmesidir. (1) denklemi BÖLÜM I. §3. TEOREM 3' e (ROBERTSON KARAKTERİZASYONU) uygulansa, ispat elde edilir.

SONUL 1.

$\alpha = o$ için $f(z) = g(z)$ olduğundan BÖLÜM I TEOREM 3 bulunur.

SONUL 2.

$\alpha = 1$ olduğu zaman konveks fonksiyonlar için;

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{f'(kz)}\right]^{1/2} > \frac{1+k}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

SONUL 3.

Sonul 2'de $k \to -1$ olduğunda konveks fonksiyonlar için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{f(-z)}\right] > 0$$

eşitsizliği elde edilir.

SONUL 4.

$f(z)$ birim dairede α- konveks ise;

$$|f(kz)| \cdot \left|\frac{f'(kz)}{f(kz)}\right|^{\alpha} \leq |k|^{1-\alpha}\left(\frac{1+|z|}{1-k|z|}\right)^{2} \cdot |f(z)| \cdot \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

dir.

İspat :

$$\Phi_{k\alpha}(z) \prec \frac{1+kz}{1+z}$$

subordinasyonundan ($|\varphi(z)|$ 1, $\varphi(o) = 0$)

$$(1)\quad \Phi_{k\alpha}(z) = \frac{1 + k\varphi(z)}{1 - \varphi(z)}$$

yazılabilir. (1) bağıntısı aynı zamanda,

$$(2)\quad \varphi(z) = \frac{1 - \Phi_{k\alpha}(z)}{\Phi_{k\alpha}(z) - k}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2) bağıntısında $|a| - |b| \leq |a-b|$ eşitsizliği kullanılarak

$$(3)\quad |\Phi_{k\alpha}(z)| \geq \frac{1+k|z|}{1+|z|}$$

eşitsizliği elde edilir. $\Phi_{k\alpha}(z)$'nin ifadesi (4) eşitsizliğinde yerine konsa Sonul'da ifade edilen eşitsizlik bulunur.

SONUL 5

Sonul 4'de $\alpha=0$ alınırsa, BÖLÜM I. §3 TEOREM 3'ün Sonul 2'si bulunur.

SONUL 6.

Sonul 4'de $\alpha=1$ alınırsa, konveks fonksiyonlar için

$$|f'(kz)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-k|z|}\right)^2 . |f'(z)|$$

eşitsizliği elde edilir.

SONUL 7

Sonul 6 'da $k \to -1$ olduğu zaman konveks fonksiyonlar için

$$|f'(-z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 . |f'(z)|$$

eşitsizliği bulunur.

BÖLÜM III. P-FOLD α- KONVEKS FONKSİYONLARDA KATSAYI PROBLEMİ

$g(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonu birim dairede αp - konveks olsun yani,

$$\mathrm{Re}\left[(1-\alpha p) z \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha p \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \right] > 0$$

eşitsizliğini gerçekleşsin. Bu taktirde $g(z)$ fonksiyonu

$$(1) \quad g(z) = \left[\frac{1}{\alpha p} \int_0^z \xi^{-1} (G(\xi))^{1/\alpha p} \, d\xi \right]^{\alpha p}$$

şeklinde bir integral gösterilimi haizdir. Bu gösterilişte

$$G(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonu alınırsa,

$$(2) \quad g_o(z) = \left[\frac{1}{\alpha p} \int_0^z \xi^{1/\alpha p - 1} (1-\xi)^{-2/\alpha p} \, d\xi \right]^{\alpha p}$$

fonksiyonu elde edilir. Öte yandan, kısaca,

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$$

$$(b)_n = b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)$$

$$(c)_n = c(c+1)(C+2)\ldots(c+n-1)$$

olmak üzere

$$F(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{1!\,c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)} z^2 + \ldots + \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n\, n} z^n + \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b).\Gamma(c.b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-\alpha} dt$$

hipergeometrik fonksiyonu gözönüne alınır ve

$$a = \frac{2}{\alpha p}, \quad b = \frac{1}{\alpha p}, \quad c = \frac{1}{\alpha p} + 1$$

olarak tanımlanırsa (2) yazılışında parantez içindeki ifadenin bir hipergeometrik fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$H(z) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right]^{\alpha p}$$

olmak üzere (2) yazılışı

$$(3) \quad g_o(z) = ZH(z)$$

şeklinde ifade edildiği halde c_n katsayıları için

$$(4) \quad c_n = \frac{1}{n!\,\alpha^n p^n (1+\alpha p)} \prod_{k=o}^{n-1} (2+kp\alpha)$$

bulunur. BÖLÜM I. § 3 TEOREM 4'den dolayı

$$(5) \quad b_{n+1} = \sum_{S(n)} \frac{(\alpha p, m-1)\, c_1^{r_1}\, c_2^{r_2} \ldots c_n^{r_n}}{r_1!\,.\, r_2! \ldots r_n!}$$

dir. Burada toplam

$$r_1 + r_2 + \ldots r_n = m$$

$$r_1 + 2r_2 + \ldots nr_n = n$$

denklemlerini gerçekleyen $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ n'lileri üzerinden alınır.

$$\gamma(\alpha p, m-1) = \alpha p(\alpha p-1)(\alpha p-2)\ldots(\alpha p-(m-1))$$

$$\gamma(\alpha p, o) \equiv \alpha p$$

dir. Şimdi sırasiyla (4) ve (5) ifadelerinden katsayıları hesaplayalım.

Bunun için ilk önce $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ n'liler çümlesinin ilk bir kaç tanesini bulmamız lazımdır.

$$n=1 \quad \text{için:} \left.\begin{array}{l} r_1 = m \\ r_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1\ , \quad S(1) = \left\{ r_1 \mid r_1 = 1 \right\}$$

$$n = 2 \quad \text{için:} \left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 = m \\ r_1 + 2r_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 2,\ r_1 = 2\ ,\quad r_2 = 0 \\ m = 1,\ r_1 = 0\ ,\quad r_2 = 1 \end{array}$$

$$S(2) = \left\{ (r_1, r_2) \mid (2,0),\ (0,1) \right\}$$

$$n = 3 \quad \text{için :} \left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 = m \\ r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 3\ ,\ r_1 = 3\ ,\ r_2 = 0\ ,\quad r_3 = 0 \\ m = 1\ ,\ r_1 = 0,\ r_2 = 0,\quad r_3 = 1 \\ m\ \ 2\ ,\ r_1\ \ 1,\ r_2\ \ 1,\quad r_3\ \ 0 \end{array}$$

$$S(3)\ \left\{ (r_1, r_2, r_3) \mid (3,0,0)(0,0,1),(1,1.0) \right\}$$

$$n = 4 \quad \text{için:} \left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = m \\ r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 4,\ r_1 = 4,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0,\quad r_4 = 0 \\ m = 2,\ r_1 = 1,\ r_2 = 0,\ r_3 = 1,\quad r_4 = 0 \\ m = 1,\ r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0,\quad r_4 = 1 \\ m = 3,\ r_1 = 2,\ r_2 = 1,\ r_3 = 0,\quad r_4 = 0 \end{array}$$

$$S(4) = \left\{ (r_1, r_2, r_3, r_4) \mid (4,0,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1),(2,1,0,0) \right\}$$

(4) bağıntısından

$$c_1 = \frac{2}{p\alpha(1+p\alpha)}\ , \qquad c_2 = \frac{2+p\alpha}{p^2\alpha^2(1+2p\alpha)}$$

$$c_3 = \frac{(2+2p\alpha)(2+2p\alpha)}{3p^3.\alpha^3(1+3p\alpha)}\ , \qquad c_4 = \frac{(2+p\alpha)(2+2p\alpha)(2+3p\alpha)}{12p^4\alpha^4(1+4p\alpha)}$$

bulunur. Bu katsayıları yukarıda bulduğumuz n'liler ile birlikte (S) ifadesinde kullanırsak

$n=1$ için:

$$b_2=\sum_{s(1)}\frac{\gamma(p\alpha,m-1)C_1^{r_1}}{r_1!}=\frac{\gamma(p\alpha,1-1)C_1^1}{1!}=\gamma(p\alpha,0)C_1$$

$$(6)\quad b_2=\frac{2}{p\alpha+1}$$

$n=2$ için;

$$b_3=\sum_{s(2)}\frac{\gamma(p\alpha,m-1)C_1^{r_1}.C_2^{r_2}}{r_1!.\,r_2!}=\sum_{\{(2.0),(0.1)\}}\frac{\gamma(\alpha p,m-1)C_1^{r_1}\,C_2^{r_2}}{r_1!.\,r_2!}$$

$$=\frac{\gamma(p\alpha,2-1)C_1^2.C_2^0}{2!.\,0!}+\frac{\gamma(p\alpha,1-1)C_1^0.C_2^1}{0!.\,1!}$$

$$(7)\quad b_2=\frac{3+8\alpha p+\alpha^2p^2}{(1+2\alpha p)(1+\alpha p)^2}$$

bulunur. Şimdi;

$$f(z)=(g(z^p))^{1/p}=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{np+1}\,z^{np+1}$$

fonksiyonunu düşünüyoruz. BÖLÜM I. TEOREM 1'de p yerine $-p$ alınırsa,

$$a_{np+1}=\sum_{S(n)}\frac{\gamma(p,m-1)d_1^{r_1}.d_2^{r_2}\ldots d_n^{r_n}}{p^m.r_1!\,.r_2!\ldots.r_n!}$$

dir. Burada $d_n=b_{n+1}$ olup, $S(n)$ cümlesi yukarıda ifade edildiği gibidir. Ve,

$$\gamma(p,m-1)=(1-p)(1-2p)(1-3p)\ldots.(1-(m-1)p)$$

$$\gamma(p,0)\equiv 1$$

dir. Şimdi ilk iki katsayıyı hesaplayalım:

$n=1$ için,

$$a_{p+1}=\sum_{S(n)}\frac{\gamma(p,m-1)d_1^{r_1}}{p^m r_1!}=\frac{\gamma(p,0)\,b_2^1}{p\,.\,1!}=\frac{1}{p}\cdot b_2$$

$$a_{p+1}=\frac{1}{p}\,b_2$$

bulunur.

$n=2$ için;

$$a_{2p+1}=\sum_{s(n)}\frac{\gamma(p,m-1)d_1^{r_1}\,d_2^{r_2}}{p^m\,r_1!\,r_2!}=\frac{\gamma(p,1)d_1^2\,d_2^0}{p^2.\,2!\,0!}+\frac{\gamma(p,0)d_1^0,d_2^1}{p\;0!\;1!}$$

$$=\frac{1-p}{2p^2}\,b_2^2+\frac{1}{p}\,b_3$$

bulunur.

TEOREM 1. $f(z)$ fonksiyonu birim dairede p-fold α -konveks olsun. Bu halde

$$|a_{p+1}|\leq\frac{2}{p(1+\alpha p)}$$

$$|a_{2p+1}|\leq\frac{\alpha^2p^3+4\alpha p^2+4\alpha p+p+2}{p^2(1+2\alpha p)(1+\alpha p)^2}$$

dir. Eşitlik hali (1) bağıntısında $G(z)$ yerine Koebe fonksiyonu alınarak elde edilen (2) bağıntısındaki $g_o(z)$ fonksiyonu yardımı ile,

$$f_o(z)=(g_o(z^p))^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan $f_o(z)$ fonksiyonu için vardır.

İspat : f(z) birim dairede p-fold α-konveks olduğundan tanımdan dolayı, $\alpha>0$ olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\, z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right]>0$$

koşulunu gerçekler. Dolayısıyla $(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha(1-z\frac{f''(z)}{f'(z)})$ ifadesinin katsayıları majarizanyon prensibinden dolayı 2'den küçüktür. Bu adımda gerekli hesaplar yapılır ve yukarıda bulunan ifadeler kullanılırsa teoremda ifade edilen eşitsizlikler elde edilir.

SONUL 1.: $p=2$ için

$$|a_3|\leq\frac{1}{1+2\alpha}\qquad |a_5|\leq\frac{2\alpha^2+6\alpha+1}{(1+2\alpha)^2(1+4\alpha)}$$

eşitsizlikleri tek α-konveks fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleridir.

Bu eşitsizliklerde

$$\alpha=0 \text{ için}\quad |a_3|\leq 1\qquad |a_5|\leq 1$$

$$\alpha=1 \text{ için}\quad |a_3|\leq\frac{1}{3}\qquad |a_5|\leq\frac{1}{5}$$

eşitsizlikleri elde edilir,bunlarda sırasıyla tek yıldızıl ve tek konveks fonksiyonlar için bilinen eşitsizliklerdir.

SONUL. 3

$\alpha=1$ ise p-fold konveks fonksiyonları elde edileceğinden, teoremde $\alpha=1$ alınırsa,

$$|a_{p+1}|\leq\frac{2}{p(1+p)},\quad |a_{2p+1}|\leq\frac{p^3+4p^2+5p+2}{p^2(1+p)^2(1+2p)}=\frac{p+2}{p^2(1+2p)}$$

bulunur. Bu eşitsizlikler BÖLÜM I §5. TEOREM 1 de $n=1$ ve $n=2$ için elde edilen eşitsizliklerdir.

$\alpha=0$ için p-fold yıldızıl fonksiyonlar elde edileceğinden, teoremde $\alpha=0$ alınırsa;

$$|a_{p+1}|\leq\frac{2}{p},\quad |a_{2p+1}|\leq\frac{p+2}{p^2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler BÖLÜM I. §6TEOREM.3 de $n=1$ ve $n=2$ için elde edilen eşitsizliklerdir.

BÜLÜM IV- P-FOLD KONVEKSLİK, P-FOLD α-KONVEKSLİK YARIÇAPI

YARDIMCI TEOREM 1. $ReE_2 > 0$ ve z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olsun, aynı zamanda

$$z_1 = z_2 + z_3$$

ise,

$$Rez_1 \geqslant Rez_2 - |z_3|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Ispat : z herhangi bir kompleks sayı ise;

(1) $\quad -|z| \leqslant Rez \leqslant |z|$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla,

(2) $\quad -|z_3| \leqslant Re\, z_3 \leqslant z_3$

(3) $\quad Rez_1 = Rez_2 + Rez_3$

(4) $\quad Re\, z_2 > 0$

denkleminden

$$Re\, z_1 \geqslant Re\, z_2 - |z_3|$$

bulunur ki, bu da iddianın ispatını verir.

TEOREM 1.

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1}\, z^{np+1}$$

fonksiyonu birim dairede p- fold yıldızıl yalınkat fonksiyon olsun, bu halde

$$\frac{p+(p-2)\,|z|}{p(1+|z|)} \leqslant Re\, z\,\frac{f'(z)}{f(z)} \leqslant \frac{p+(2-p)\,|z|}{p(1-|z|)}$$

dir.

İspat : BÖLÜM I §4. TEOREM 3 den dolayı

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{p/2} > \frac{1}{2}$$

dir. Dolayısıyla BÖLÜM I §2. TEOREM 4 'den dolayı

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{p/2} = \frac{1}{1+z\Phi(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklemden gerekli logaritmik türevler alınır, hesaplar yapılırsa, BÖLÜM I §1. TEOREM 3 ve 2 TEOREM 1'in (ii),(iii) şıklarıyla birlikte yardımcı TEOREM 1'in kullanılmasıyla gerekli hesaplardan sonra teoremde ifade edilen eşitsizlik elde edilir.

TEOREM 2. $$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$$

fonksiyonu birim dairede p-fold yıldızıl yalınkat fonksiyon olsun bu halde

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq \frac{(2-p)|z|^2-2(p+1)|z|+p}{p(1-|z|^2)}$$

dir.

Ispat : f(z) birim dairede yıldızıl olduğundan $\mathrm{Re}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} > 0$ dir. Dolayısıyla p(z) pozitif reel kısıma haiz fonksiyon olmak üzere

$$p(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$$ şeklinde yazılabilir. Bu ifadeden gerekli logaritmik türevler alınır ve yardımcı teorem 1 ve BÖLÜM I §2. TEOREM 1 nin (ii) cü şıkkı kullanılıp hesapları yapılırsa

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(zR}\right) \geq \mathrm{Re}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} - \left|z\frac{p'(z)}{p(z)}\right|$$

bulunur. TEOREM 1. Bu adımda kullanılırsa

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq \frac{p+(p-2)|z|}{p(1+|z|)} - \frac{2z}{1-|z|^2}$$

ifadesinden

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant \frac{(2-p)|z|^2-2(p+1)|z|+p}{p\,(1-|z|)^2}$$

bulunur ki bu da teoremin ispatıdır.

SONUL 1. $p = 1$ için

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant \frac{|z|^2-4|z|+1}{1-|z|^2}$$

bulunur ki bu da BÖLÜM 1 §1. TEOREM 2. dir.

SONUL 2. $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$ fonksiyonu birim dairede p-fold yıldızıl yalınkat fonksiyon olsun. Bu halde f(z) fonksiyonunun konvekslik yarıçapı

$$\frac{(1+p)-\sqrt{1+2p^2}}{2-p}$$

dir.

İSPAT : TEOREM 2 'DEN

$$(2-p)|z|^2-2(1+p)|z|+p=0$$

$$|z|=\rho$$

$$\rho=\frac{(1+p)-\sqrt{1+2p^2}}{2-p}$$

bulunur.

SONUL.3. Sonul 2'de p=1 alınırsa $=2-\sqrt{3}$ bulunur.

buda BÖLÜM.I. .8. TEOREM 1.dir. Buda yıldızıl fonksiyonların konvekslik yarıçapıdır.

TEOREM 3.

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1}$$

fonksiyonu birim dairede p-fold yıldızıl yalınkat fonksiyon olsun bu halde f(z) fonksiyonun α-konvekslik yarı çapı

$$\rho = \frac{(1+\alpha p) - \sqrt{(1+\alpha^2)p^2+2(\alpha-1)p+1}}{2-p}$$

dir.

İspat : TEOREM 1. ve TEOREM 2'deki ifadeler α ve $(1-\alpha)$ ile çarpılıp toplanırsa

$$\mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\, z\frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha(1+z\frac{f''(z)}{f'(t)})\right] > \frac{(2-p)\ |z|^2-2(1+\alpha p)\ |z| +p}{p\ (1-|z|^2)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(2-p)\ |z|^2 - 2(1+\alpha p)\ |z| + p = 0$$

$|z| = \rho$ dan

$$\rho = \frac{(1+\alpha p) - \sqrt{(1+\alpha^2)p^2 + 2(\alpha-1)p+1}}{2-p}$$

bulunur.

SONUL: 1. $p = 1$ için $\rho = \sqrt{(1+\alpha)} - \sqrt{(1-\alpha)^2-1}$
bulunurki buda BÖLÜM I 8. TEOREM 2'dir.

SONUL: 2. Sonul 1 de $\alpha = 1$ alınırsa $\rho = 2 - \sqrt{3}$
bulunurki buda BÖLÜM I § 8 TEOREM 1 dir.

BİBLİOGRAFYA

[1] AHLFORS. L.V. Complex Analysis 2,nd.ed. McGraw-Hill N.Y. (1966)

[2] GOEL. R.M. Functions Starlike and Convex of order J.London Math.Soc.(2) 9 (1974/1975) 128-130

[3] GOLUZIN, G.M. Geometrical theory of functions of Complex variable, Second Ed.İzdat "NAKUA" MOSCOW 1966, 628 pp. Amer.Math.Soc.Transl.of Mathematics Monograph, Vol.26, 1969, 678 pp.

[4] GOODMAN. A.W. Coefficients for the area theorem Proc.Amer.Math.Soc. Vol.33, 1972, 338-343

[5] KULSHRESTHA.P.K. Coefficient problem for alpha-Convex Functions Arch.Rational Mech.Anal. 54(1974). 205-211

[6] MARX. A. Unteruchungen über schlichte Abbildungen Mat.Ann. 107(1932) 40-67

[7] MİLLER. S.S. Distortion properties of α-utarlike functions Proc.Amer.Math. Soc., vol.38 (1973) 311-318

[8] MİLLER. S.S. Distortion properties of p-fold symmetric -starlike functions. Proc.Amer.Math.Soc. vol.44 (1974). No.2

[9] MİLLER.S.S., MOCANU.P.T. and MAXWELL. G.R. All α -Convex functions are univalent and utarlike, Proc.Amer.Math.Soc., Vol.37 (1973), 553-554.

[10] MİLLER. S.S., MOCANU. P.T. and MAXWELL D.R. Bazilevic functions and generalized convexity Rev.Roum.Math.Pures Appl.Tome XIX No.12 p.213-224, Bucarest (1974).

[11] NEHARİ, Z. Conformal mapping Dover Publications Inc.N.Y.

[12] NEHARI, Z. The Schwarzian derivative and Schlicht functions, Bull Amer.Math. Soc., vol. 545-555.

[13] POMMERENKE.C.H. Univalent functions. Vanderhseck Ruprecht in Göttingen (1975)

[14] ROBERTSON.M.S. Theory of univalent functions Annals of Mathematics Vol.37 (1936) 356-380

[15] ROBERTSON.M.S. A Characterization of the class of starlike univalent functions. Michigan Math.J. 26(1979)

[16] SCHILD. A. On a class of univalent utor-shaped mappings Proc.Amer.Math.Soc. Vol.9 (1955) 751-757

[17] STROHACHER,E. Beitrage zur Theorie der uchlichten Funktionen Math.Z. 37 (1933) 356-380.

ADAYIN ÖZGEÇMİŞİ

1950 Yılında Van'da doğdum. İlk ve Orta tahsilimi sırasıyla Van Atatürk İlkokulu ve Van Atatürk Lisesi Orta okulunda tamamladıktan sonra, lise öğrenimine Kabataş Erkek Lisesinde devam ederek, buradan mezun oldum. Daha sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Fizik Bölümüne girerek 1976 yılında mezun olup aynı yıl Bursa Üniversitesi Makina Fakültesi Yüksek Matematik asistanlığına atandım. 1976 Yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü Analiz ve Nümerik Analiz kürsüsünde Yüksek lisans çalışmalarına Prof.Dr.Suzan Kahramaner yönetiminde başlayarak, bu çalışmamı 1980 tarihinde tamamladım. Aynı tarihte lisans üstü çalışmalarımı yöneten hocanın teşviki ile doktora çalışmalarına başlayarak 1982 tarihinde bu çalışmamı bitirdim. Halen Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesinde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

Bu çalışmaya başlamamı öneren, çalışmalarımı yöneten ve her türlü yardımını esirgemeyen hocam sayın Prof.Dr.Suzan Kahramaner'e ayrıca sık sık fikirlerine başvurduğum Prof.Dr.Bediz Asral'a ve Doç.Dr. Yusuf Avcı'ya en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tezin basılmasını sağlayan Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Yönetim Kurulu üyelerine ve Üniversite Matbaa personeline teşekkür ederim.

S U M M A R Y

The purpese of this work is to study the subclasses of α-convex functions which were introduced by Mocanu in 1969.

The firs chapter is devoted to the preparations and include some fundamental definitions and theorems. In the second chapter the properties of α - convex functions are studied where istaken to be a positive integer. These classes are denoted by Mp. First, a fundamental characterization is obtained for the classes Mp. Then, using this characterizaton, it is show that the functions in Mp are convex of order p-1/2p and starlike of order 1/2. later, the connection between the classes Mp and starlike functions is established. As corrollaries of this, it is show that, functions in Mp satisfy several inequalities.

In the third chapter sharp bounds are obtained for the coefficients ap+1 and a_{2p+1} of p-fold α-convex functions. Several know results are obtained as corollaries of this.

In the last chapter the radius of convexity which was defined by Miller, Mocanu and Reade is extended to the class of p-fold starlike functions.