

763359

301

SFEROİDAL DAĞILIMLARIN ÇEŞİTLİ ETKİLEŞMELERİ VE ÖZENERJİLERİ

Osman G. Çağlayan

TÜRKİYE
BİLİMSEL VE TEKNİK
ARAŞTIRMA KURUMU
KÜTÜPHANESİ

Doktora Tezi

Yıldız Üniversitesi
İstanbul, Mart 1983

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, tez yöneticim Sayın Doç. Dr. Halûk Beker'in sürekli ve içten desteği sayesinde gerçekleştirilmiştir. Kendisine ve lisansüstü öğrenimim süresince yüksek bilgilerinden istifade ettiğim Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

ÖZET

İki unsur arasındaki etkileşme potansiyeli biliniyorsa, bu unsurlardan oluşmuş iki cisim arasındaki etkileşme potansiyeli altı katlı bir integral ile verilir. Bu işlem katlama integrallerinin özelliklerinden yararlanılarak Fourier Uzayına taşınır ve elde edilen ifade ters Fourier işlemi ile tekrar koordinat uzayına aktarılırsa büyük kolaylık sağlanır.

Bu yöntemle, tüm etkileşme türleri için geçerli olan potansiyel ve özenerji ifadeleri türetilmiştir.

Bu ifadeler önce küresel şekiller için Coulomb, Yukawa, Magnetik Dipol etkileşmeleri hallerinde hazır formüller haline getirilmiş ve bu formüller kullanılarak, yük ve dipol dağılımları için protonun noktasal olmayışının, taban seviyesindeki hidrojen atomu enerjisine katkısı hesaplanmıştır. Yukawa etkileşmesi yapan kürenin özenerjisi hesaplarından da yarı-empirik kütle formülünün dört terimi elde edilmiştir.

Yukarıda belirtilen uygulamalarda, küresel dağılımlar için türetilen potansiyel ve özenerji ifadelerinin bilinen sonuçlara uygun değerler vermesinden cesaret alınarak, daha genel bir hal olan sferoid incelenmiştir.

Bu dağılımlar için türetilen genel ifadelerden yola çıkılarak küçük bozulmalara uğramış küre ve tam küre problemlerinin de çözülebileceği gösterilmiştir.

Bulunan sonuçların makroskopik yapılara da uygulanabileceği, Yerküre, Güneş ve kuvvetli dipol etkileşmelerine sahip bulunan nötron yıldızı örnekleri incelenerek gözlenmiştir.

SUMMARY

INTERACTIONS AND SELF-ENERGIES OF SPHEROIDAL DISTRIBUTIONS

The interaction potential between two extended objects is given by a six-fold integral.

If this integral is transformed into Fourier Space a great simplification is obtained.

Thus the potential and self energy expressions relevant for a general interaction may be derived. Based on these, formulae for Coulomb, Yukawa, Magnetic Dipole interactions are determined. Using these formulae, the energy correction due to the spatial extent of the proton, in ground state hydrogen atom is calculated. It is also seen that, self energy calculation of Yukawa potential for spherical distributions yields four terms of semi-empirical mass formula.

The accomplishments of the above applications encourage one to investigate the more general case of a spheroid. The cases of a slightly deformed sphere and an ordinary sphere can be solved, starting with these general expressions.

The formalism is also applied to macroscopic bodies such as the Earth, the Sun and the neutron star.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ		1
A	GENEL HAL	2
1	POTANSİYEL	2
2	ÖZENERJİ	4
B	KÜRESEL DAĞILIMLAR	5
1	COULOMB ETKİLEŞMELERİ	5
2	YUKAWA ETKİLEŞMELERİ	7
3	DİPOL ETKİLEŞMELERİ	8
4	ÖZEL DURUMLAR	11
5	UYGULAMALAR	13
5.1	YÜK DAĞILIMLARI	13
5.1.a	KÜRENİN ÖZENERJİSİ	13
5.1.b	HİDROJEN TABAN SEVİYESİNDE PROTON HACMINİN KATKISI	13
5.2	YUKAWA ETKİLEŞMESİ YAPAN KÜRESEL DAĞILIMLARIN ÖZENERJİSİ	15
5.3	YARI EMİRİK KÜTLE İFADESİ	17
5.4	DİPOL DAĞILIMLARI	19
5.4.a	KÜRENİN ÖZENERJİSİ	19
5.4.b	HİDROJEN TABAN SEVİYESİNDE PROTON ETKİSİ	20
C	SFERİDAL DAĞILIMLAR	23
1	GENELDE ÖZENERJİ	23
2	MONOPOL ÖZENERJİSİ	26
3	DİPOL ÖZENERJİSİ	28
4	YUKAWA ÖZENERJİSİ	29
5	DÖNME ÖZENERJİSİ	31

6	SENTEZ	32
D	UYGULAMALAR	34
1	BÜYÜK HACIMLI SEYREK DAĞILIMLAR	35
	ÖRNEK 1:YERKÜRESİ	36
	ÖRNEK 2:GÜNEŞ	37
2	BÜYÜK HACIMLI SIK DAĞILIMLAR	38
	ÖRNEK : NÖTRON YILDIZI	38
	SONUÇ	41
	EKLER	
EK 1:	KATLAMA İNTEGRALLERİ	43
EK 2:	TABLO 2'DEKİ $I(x)$ DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI	44
EK 3:	YARI EMİRİK KÜTLE FORMÜLÜ	46
EK 4:	SFEROİDİN YAPI ÇARPANI	47
EK 5:	SFEROİDAL DAĞILIMLARIN ÖZENERJİLERİ HESABI	49
EK 6:	NÖTRON YILDIZLARI VE PULSARLAR	53
EK 7:	NOTASYON	54
	KAYNAKLAR VE NOTLAR	56

G İ R İ Ő

10^5 Fermi'den büyük boyutlarda çalışan atom ve molekül fiziğinde birkaç Fermi boyutlarındaki temel tanecikler noktasal olarak kabul edilebilirler. Fakat çekirdek ve özellikle parçacık fiziğinde, etkileşme menzillerine kıyasla büyük boyutlarda olan taneciklerin noktasal alınması, potansiyel ve özenjerji hesaplarında hatalara yol açmaktadır.

Deneyler de tüm kuvvetli etkileşen taneciklerin uzaysal yayılımları (hacimleri) olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.⁽¹⁾ Zaten taneciklerin noktasal alınması singülaritelere sebep olarak matematiksel güçlülere yol açmaktadır.⁽²⁾ Bu yüzden gerçekçi bir temel tanecik modeli, taneciklerin hacimlerinden kaynaklanan etkenleri de göz önünde bulundurmalıdır.⁽¹⁾

İki cisim arasındaki etkileşmeler incelenirken, cisimin geometrik şekline bağılı genel ifadeler türetilirse hem singülaritelerden kurtulunur, hem de tümden gelim ile nokta parçacık özel hali elde edilebilir.

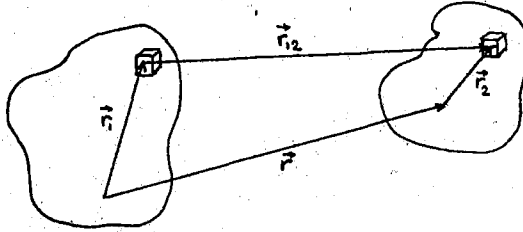
A GENEL HAL

1 POTANSİYEL

Uzayda aralarında etkileşme yapan herhangi bir geometrik şekile sahip iki cisimi gözönüne alalım. Bunların üzerinde seçeceğimiz iki ayrı koordinat sistemindeki yerleri Şekil 1'de görüldüğü gibi \vec{r}_1 ve \vec{r}_2 olan çok küçük iki unsur arasındaki etkileşme potansiyelini $V_{..}(\vec{r})$ ile göstereyim. Bu durumda sözkonusu unsurların cisimler içindeki dağılımları $\rho_1(\vec{r}_1)$ ve $\rho_2(\vec{r}_2)$ fonksiyonları ile verilirse, iki cisim arasındaki toplam potansiyel;

$$V_{..}(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) V_{..}(\vec{r}_{12})$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 1.

Unsurlar arasındaki uzaklık olan \vec{r}_{12} 'yi iki koordinat sisteminin merkezlerini ayıran \vec{r} uzaklığı cinsinden yazarsak ;

$$V_{..}(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) V_{..}(\vec{r} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad A 1$$

olduğunu görürüz.

Çoğu hallerde çözülmesi güç olan bu altı katlı integralin Fourier Dönüşümü yapılırsa Ek 1'de sunulduğu gibi katlama integrallerinin özelliklerinden yararlanılarak son derece basit bir hale indirgenebilir. (3)

$$\tilde{V}_{oo}(\vec{Q}) = F_1(\vec{Q}) F_2(-\vec{Q}) \tilde{V}_{..}(\vec{Q}) \quad A 2$$

Buradaki $F(\vec{Q})$ fonksiyonları, $\rho(\vec{r})$ yoğunluk fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olup,

$$F(\vec{Q}) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) \quad A 3$$

şeklinde tanımlanmakta ve yapı çarpanı (form factor) olarak adlandırılmaktadırlar.

2 ÖZENERJİ

Bir cismin özenerjisi, unsurlarının kendi aralarında etkileşmelerinin toplam enerjisidir. Bu enerji, özdeş bir cisim ile etkileşme potansiyelinin $\vec{r} = 0$ 'daki özel hali olarak düşünülebilir. Yalnız, her unsur iki kere sayılmış olacağı için $1/2$ çarpanını unutmamak gerekir. Böylece özenerji,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} V_{..}(0)$$

A 4

ifadesi ile verilir. Bunun momentum uzayındaki şekli, Fourier Dönüşümü yapılarak,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2(2\pi)^3/2} \int d\vec{Q} F^2(\vec{Q}) \tilde{V}_{..}(\vec{Q})$$

A 5

olarak bulunur. (4)

B KÜRESEL DAĞILIMLAR

Eğer incelenen cisimler küresel simetrik bir şekile sahip iseler, $\rho(\vec{r})$ fonksiyonları açıya bağlı olmazlar. Bu taktirde yapı çarpanları

$$F(\vec{Q}) = F(-\vec{Q}) = F(Q) = \frac{4\pi}{Q} \int_0^{\infty} r dr \sin(Qr) \rho(r) \quad B 1$$

şeklini alırlar. Bu da A 5 özenerji ifadesine yerleştirilirse

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} Q^2 dQ F^2(Q) \tilde{V}_{..}(Q) \quad B 2$$

elde edilir.

1 COULOMB ETKİLEŞMELERİ

Cisimlerin unsurları arasında $V_{..}(r) = \frac{e_1 \cdot e_2}{r}$ şeklindeki Coulomb etkileşme potansiyeli mevcut olsun. Bu ifadenin Fourier dönüşümü olan;

$$\tilde{V}_{..}(Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_1 \cdot e_2}{Q^2}$$

toplam etkileşme potansiyelini veren A 2 'ye yerleştirilirse,

$$\tilde{V}_{\bullet\bullet}(Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_1 \cdot e_2}{Q^2} F_1(Q) F_2(Q) \quad B 3$$

Küresel simetrik fonksiyonların Fourier dönüşümleri için

$$\tilde{f}(Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{Q} \int_0^{\infty} r dr \sin(Qr) f(r)$$

$$f(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} Q dQ \sin(Qr) \tilde{f}(Q)$$

bağıntıları kullanılıp,

$$I(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dQ}{Q} \sin(Qr) F_1(Q) F_2(Q)$$

B 4

olmak üzere, toplam etkileşme potansiyeli tekrar düzenlenirse,

$$V_{00}(r) = \frac{e_1 e_2}{r} I(r)$$

B 5

şeklindeki sade bir hale ulaşılır.

Böylece, etkileşen cisimler, elementer parçacık çalışmalarında yaygın olarak görüldüğü gibi noktasal alındıklarında "singüler" bir fonksiyon olan $V_{00}(r)$ potansiyeli, cisimler hacımlı alındığı takdirde "regüler" hale gelmektedirler. Tanımlanan bir $I(r)$ fonksiyonu sayesinde bütün küresel simetrik Coulomb etkileşmelerinde kullanılabilen basit bir potansiyel ifadesi elde edilmektedir. Aynı $I(r)$ fonksiyonu 3.kısımda dipol etkileşmelerinin regülarizasyonunda da kullanılacaktır.

Öte yandan B 5 potansiyelinin $r \rightarrow 0$ için limiti alınıp A 4 tanımında kullanılırsa,

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dQ F^2(Q)$$

B 6

şeklindeki özenerji ifadesi de elde edilir.

2 YUKAWA ETKİLEŞMELERİ

Eğer parçacıklar,

$$V_{..}(r) = -g^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

ile tanımlanan Yukawa potansiyeli ile etkileşiyorlarsa, bunun Fourier dönüşümü yapılarak,

$$\tilde{V}_{..}(Q) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g^2}{Q^2 + \lambda^2}$$

B 7

elde edilir. Bu ifade potansiyelin momentum uzayındaki değerini veren A 2 bağıntısında kullanılır,

$$\tilde{V}_{\bullet\bullet}(Q) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g^2}{Q^2 + \lambda^2} F_1(Q) F_2(Q)$$

ve bunun da ters Fourier dönüşümü yapılırsa, parçacıklar arasındaki

$$V_{\bullet\bullet}(r) = -\frac{2}{\pi} g^2 \int_0^{\infty} \frac{Q dQ}{Q^2 + \lambda^2} \sin(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \quad B 8$$

etkileşme potansiyeli bulunur.

Benzer şekilde B 7 ifadesi özenerjiyi veren B 7 eşitliğine yerleştirilirse,

$$\mathcal{E} = -\frac{g^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q^2}{Q^2 + \lambda^2} F^2(Q) dQ \quad B 9$$

elde edilir.

3 DİPOL ETKİLEŞMELERİ

İki noktasal dipol arasındaki etkileşme potansiyeli

$$V_{..}(\vec{r}) = \frac{(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2) - 3(\vec{r} \cdot \vec{\mu}_1)(\vec{r} \cdot \vec{\mu}_2)}{r^3} - \frac{8\pi}{3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2) \delta(\vec{r}) \quad \text{B 10}$$

şeklinde verilir. (5) Genellikle uzaklaşmadan $\vec{\mu}_1$ magnetik dipol momentini z-ekseni yönünde seçilebilir. Bu durumda $\vec{\mu}_1$ ile $\vec{\mu}_2$ arasındaki açı β ile gösterilirse

$$V_{..}(\vec{r}) = \mu_1 \mu_2 \left[\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} - \frac{8\pi}{3} \delta(\vec{r}) \right] \cos \beta \\ - \mu_1 \mu_2 \left[\frac{3 \cos \theta \sin \theta \cos \phi}{r^3} \right] \sin \beta$$

veya küresel harmonikler cinsinden,

$$V_{..}(\vec{r}) = -\mu_1 \mu_2 \left[\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \frac{Y_{20}(\theta)}{r^3} - \frac{2}{3} \frac{\delta(r)}{r^2} \right] \cos \beta \\ + \mu_1 \mu_2 \left[\sqrt{\frac{6\pi}{5}} \frac{Y_{21}(\theta, \phi)}{r^3} - \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \frac{Y_{21}(\theta, \phi)}{r^3} \right] \sin \beta$$

elde edilir.

Önce $V_{..}(\vec{r})$ 'nin Fourier dönüşümü yapılarak $\tilde{V}_{..}(Q)$ 'nin bulunması, sonra bunun $F_1(Q)F_2(Q)$ ile çarpılıp ters Fourier dönüşümü yapılarak $V_{\infty}(\vec{r})$ potansiyelinin elde edilmesinden oluşan regülarizasyon sürecinin lineer bir işlem olduğu görülmektedir. Böylece dipol-dipol potansiyelini terim terim regülarize etme olanağı vardır.

Önce $\frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}}$ genel terimi regülarize edilerek, Bessel fonksiyonları cinsinden,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(2\ell-1)!!} \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{Q^{2\ell-1}}{r} \right)^{1/2} dQ J_{\ell+1/2}(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

elde edilir. Dipol etkileşmelerinde görülen $\ell = 2$ özel halinde

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{Q^3}{r}} dQ J_{5/2}(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \right] Y_{2m}(\theta, \phi)$$

bulunur. İfadedeki integral terimi için

$$J_{5/2}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(\frac{3}{x^{5/2}} - \frac{1}{x^{3/2}} \right) \sin x - \frac{3}{x^{3/2}} \cos x \right]$$

özdeşliği kullanılarak

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{r^3} \int_0^{\infty} \frac{dQ}{Q} \sin(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \int_0^{\infty} dQ \cos(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3r} \int_0^{\infty} Q dQ \sin(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \right]$$

aline gelir. Görüldüğü gibi bu, B 4 ile tanımlanan $I(r)$ fonksiyonu ve r 'ye göre türevleri cinsinden,

$$\frac{I(r)}{r^3} - \frac{I'(r)}{r^2} + \frac{I''(r)}{3r}$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece $\frac{Y_{2m}(\theta, \phi)}{r^3}$ terimi

$$K(r) \equiv I(r) - r I'(r) + \frac{r^2}{3} I''(r) \quad \text{B 11}$$

olmak üzere,

$$\frac{Y_{2m}(\theta, \phi)}{r^3} \xrightarrow{\text{regülerizasyon}} \frac{Y_{2m}(\theta, \phi)}{r^3} K(r)$$

haline dönüşmektedir.

B 10 potansiyel ifadesindeki $\frac{\delta(r)}{r^2}$ terimi de aynı işlem sonucu, yine $I(r)$ cinsinden

$$\frac{\delta(r)}{r^2} \xrightarrow{\text{regülerizasyon}} - \frac{I''(r)}{r^2}$$

şekline girer.

O halde sonuç olarak iki dipol dağılımı arasındaki etkileşme potansiyeli;

$$V_{\bullet\bullet}(\vec{r}) = \left[\frac{(\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2) - 3(\vec{r} \cdot \vec{\mu}_1)(\vec{r} \cdot \vec{\mu}_2)}{r^3} \right] K(r) + \frac{2}{3} \frac{(\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2)}{r} \frac{I''(r)}{r} \quad \text{B 12}$$

olarak bulunur.

4 ÖZEL DURUMLAR

En çok rastlanan üç dağılım fonksiyonu için $\rho(\vec{r}), F(Q)$ fonksiyonları, ve daha sonraki bölümlerde yapılacak olan uygulamalarda büyük kolaylık sağladıkları görülecek $I(r)$ ve $K(r)$ fonksiyonları hesaplanarak aşağıda topluca sunulmuştur. Gerekli hesaplamalar ek 2'de verilmiştir.

Bu bölümde;

- ① : Noktasal dağılımı
 ② : R yarıçaplı bir kürede düzgün dağılımı
 ③ : a Bohr yarıçaplı, taban seviyesinde, hidrojen tipi dağılımı ifade edecektir.

Dağılım	$\rho(r)$	$F(Q)$
①	$\delta(\vec{r})$	1
②	$\frac{3}{4\pi R^3} \quad r < R$ 0 $r > R$	$3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(QR)}{(QR)^{3/2}}$
③	$\frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$	$\frac{1}{\left[1 + \frac{a^2 Q^2}{4}\right]^2}$

Tablo 1

Etkileşen çift	I(x)	K(x)
① ↔ ①	1	1
② ↔ ② $x = \frac{r}{R}$	$\frac{6}{5}x - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{16}x^4 - \frac{1}{160}x^6$; $x < 2$ 1 ; $x > 2$	$\frac{3}{16}x^4 - \frac{1}{32}x^6$; $x < 2$ 1 ; $x > 2$
③ ↔ ③ $x = \frac{2r}{a}$	$1 - e^{-x}(1 + \frac{11}{16}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)$	$1 - e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{144})$
① ↔ ② $x = \frac{r}{R}$	$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$; $x < 1$ 1 ; $x > 1$	0 ; $x < 1$ 1 ; $x > 1$
① ↔ ③ $x = \frac{2r}{a}$	$1 - e^{-x}(1 + \frac{x}{2})$	$1 - e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$

Tablo 2

5 UYGULAMALAR

5.1 YÜK DAĞILIMLARI

5.1.a KURENİN ÖZENERJİSİ

Coulomb etkileşmesi yapan, R yarıçaplı homojen, küresel yük dağılımları için türetilmiş olan

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty dQ F^2(Q) \quad \text{B 6}$$

özenerji ifadesi $I(r)$ cinsinden

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{2} I'(0)$$

şeklinde yazılabilir. Tablo 2'den bakılarak,

$$I'(0) = \frac{6}{5R}$$

ve

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R}$$

B 13

elde edilir⁽⁶⁾.

b HİDROJEN TABAN SEVİYESİNDE PROTON HACMİNİN KATKISI

Atomik fizikte noktasal olarak düşünülen protonun R yarıçaplı bir küre olduğu varsayılırsa, $R/a \ll 1$ olduğundan

$$F_1(Q) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(QR)}{(QR)^{3/2}} \cong 1 - \frac{Q^2 R^2}{10}$$

açılımı yapılabilir. Hidrojen taban seviyesindeki elektronun yapı çarpanı ise, tablo 1'de

$$F_2(Q) = - \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2 Q^2}{4}\right)^2}$$

olarak verilmektedir.

Hidrojen atomundaki proton ve elektron dağılımlarının eşmerkezsel oldukları gözönüne alınarak, etkileşme potansiyelinin $r = 0$ haline bakılmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} V_{..}(0) &= \frac{2e^2}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{dQ}{Q} \sin(Qr) F_1(Q) F_2(Q) \\ &= \frac{2e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dQ F_1(Q) F_2(Q) \end{aligned}$$

B 14

bağıntısına yukarıda bulunan yapı çarpanları yerleştirilirse,

$$V_{..}(0) = - \frac{2e^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dQ}{\left(1 + \frac{a^2 Q^2}{4}\right)^2} + \frac{e^2 R^2}{5\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q^2 dQ}{\left(1 + \frac{a^2 Q^2}{4}\right)^2}$$

elde edilir. İntegraller çözümlere

$$V_{..}(0) = - \frac{e^2}{a} + \frac{2}{5} \frac{e^2 R^2}{a^3}$$

B 15

sonucuna varılır. Buradaki birinci terim noktasal proton ile elektronun potansiyel enerjisine, ikinci terim protonun hacımlı olmasından kaynaklanan birinci mertebe dü-

zeltmeye karşılık gelmektedir.

Proton küresel kabuk olarak alınsaydı

$$F(Q) = \frac{\sin(QR)}{QR} \cong 1 - \frac{Q^2 R^2}{6}$$

olacaktı. Bu yapı çarpanı kullanılarak yukarıdaki işlem tekrarlandığında ,protonun hacminden kaynaklanan düzeltme terimi,

$$\Delta E = \frac{2}{3} \frac{e^2 R^2}{a^3}$$

olarak bulunur (?).

5.2 YUKAWA ETKİLEŞMESİ YAPAN KÜRESEL DAĞILIMLARIN ÖZENERJİSİ

Unsurları aralarında Yukawa etkileşmesi yapan küresel dağılımların özenerji ifadeleri B 2 bölümünde bulunmuştu. Tablo 1'den bakarak,kürenin yapı çarpanı olan,

$$F(Q) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(QR)}{(QR)^{3/2}}$$

ifadesi, B 9 özenerji ifadesine yerleştirilirse, $k = \lambda R$ ve $x = QR$ olmak üzere

$$\mathcal{E}_Y = \frac{g g^2}{2R} \int_0^{\infty} \frac{J_{3/2}(x) J_{3/2}(x)}{x(x^2+k^2)} dx$$

elde edilir. Bu eşitlikteki Bessel fonksiyonları için

$$3 J_{3/2}(x) = x [J_{5/2}(x) + J_{1/2}(x)]$$

açılımı yapılırsa ifade,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y = & - \frac{g^2}{2R} \left[\int_0^{\infty} \frac{x J_{5/2}(x) J_{5/2}(x)}{x^2 + k^2} dx \right. \\ & + 2 \int_0^{\infty} \frac{x J_{5/2}(x) J_{1/2}(x)}{x^2 + k^2} dx \\ & \left. + \int_0^{\infty} \frac{x J_{1/2}(x) J_{1/2}(x)}{x^2 + k^2} dx \right] \end{aligned}$$

şekline gelir. İntegraller çözümlenip sadeleştirilirse, öz-enerjinin

$$\mathcal{E}_y = - \frac{9g^2}{4Rk^5} \left[(1 - k^2 + \frac{2}{3} k^3) - (1 + 2k + k^2) e^{-2k} \right] \quad \text{B 16}$$

olduğu görülür.

5.3 YARI-EMPIRİK KÜTLE İFADESİ

Çekirdek fiziğinde görüldüğü gibi, hem elektrostatik etkileşmelere hem Yukawa etkileşmelerine sahip küresel bir dağılımı ele alalım.

Bu durumda özenerji:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_c$$

şeklinde olacaktır. Buradaki B 13 ile verilen

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R}$$

B 13

elekrostatik özenerji terimindeki e yükü, çekirdekdeki proton sayısı çarpı elektron yüküdür.

B 16 ile verilen Yukawa özenerjisi ifadesinde ise eksponansiyel terim büyük R halinde 0'a gitmektedir. Bu terim çekirdek için ihmal edilebilir.

Toplam özenerji de

$$\mathcal{E} = \frac{9g^2}{4Rk^5} + \frac{9g^2}{4Rk^3} + \frac{3g^2}{2Rk^2} + \frac{3z^2e^2}{5R}$$

olarak elde edilir.

İfadedeki R çekirdek yarıçapı, r_0 : çekirdek yarıçap sabiti ve A : nükleon sayısı cinsinden,

$$R = r_0 A^{1/3}$$

şeklinde yazılarak⁽⁸⁾ özenerji,

$$E = a_0 - a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

B 17

olarak elde edilir.

Katsayılar ek 3'ten görüldüğü gibi hesaplanırsa

$$a_0 = \frac{9}{4} \frac{g^2}{r_0^6 \lambda^5} = 0,016 \text{ amu}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{g^2}{r_0^3 \lambda^2} = 0,01697 \text{ amu}$$

$$a_2 = \frac{9}{4} \frac{g^2}{r_0^4 \lambda^3} = 0,02187 \text{ amu}$$

$$a_3 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} = 0,00084 \text{ amu}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi atom çekirdeğinde yalnız Yukawa ve Coulomb etkileşmelerinin etkin olduğu kabul edilerek özenerji hesaplanırsa yarı-empirik kütle ifadesinin (ek 3) dört terimine ulaşılmaktadır. Bu terimlerin katsayıları da bilinen değerlere uygundur.⁽⁹⁾

4. DİPOL DAĞILIMLARI

KÜRENİN ÖZENERJİSİ

üm etkileşmeler için türetilmiş olan

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dQ F^2(Q) \tilde{V}..(Q) \quad \text{A 5}$$

ağıntısında

$$\tilde{V}..(Q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tilde{V}_{\ell m}^{\sim}(Q) Y_{\ell m}(\eta, \psi) \quad \text{B 18}$$

ok kutup açılımı yapılırsa $\tilde{V}_{00}^{\sim}(Q)$ haricindeki terimlerin sıfır verdiği görülür. Dipol etkileşme potansiyelindeki küresel simetrik

$$- \frac{8\pi}{3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2) \delta(\vec{r})$$

ariminin Fourier dönüşümü olan

$$- \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2)$$

ullanılarak özenerji,

$$\mathcal{E} = - \frac{2M^2}{3\pi} \int_0^\infty Q^2 dQ F^2(Q) \quad \text{B 19}$$

de edilir. Bu da B 4 ile tanımlanan $I(r)$ fonksiyon-cinsinden

$$\mathcal{E} = \frac{M^2}{3} I'''(0) \quad \text{B 20}$$

klinde ifade edilebilir.

Küre için tablo 1 kullanılarak

$$I'''(0) = - \frac{3}{R^3}$$

ve dolayısıyla,

$$\mathcal{E} = - \frac{\mu^2}{R^3}$$

olduğu görülür. (10)

Yüklerin tersine dipollerin bazı hallerde çekici oldukları ve doğada kararlı dipol dağılımlarının varolduğu gözönüne alınarak özenerji ifadesinin negatif oluşu yadırganmamalıdır.

b HİDROJEN TABAN SEVİYESİNDE PROTON ETKİSİ

Eşmerkezsiz durumlar için türetilmiş olan B 20 bağıntısına benzer şekilde, potansiyel ifadesi de $I(r)$ fonksiyonu cinsinden

$$V_{..}(0) = \frac{2}{3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2) I'''(0)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki

$$I'''(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q^2 dQ F_1(Q) F_2(Q)$$

B 21

integraline , a : Bohr yarıçapı olmak üzere

$$F_1(Q) = 1$$

$$F_2(Q) = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2 Q^2}{4}\right)^2}$$

TÜRKİYE
BİLİMSEL ve TEKNİK
ARAŞTIRMA KURUMU
KÜTÜPHANESİ

yerleştirilerek

$$I'''(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q^2 dQ}{\left(1 + \frac{a^2 Q^2}{4}\right)^2} = \frac{4}{a^3}$$

olduğu görülür. Bu durumda potansiyel,

$$V_{ee}(0) = \frac{8}{3a^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2)$$

olarak elde edilir.

Magnetik dipol momentleri spinler cinsinden,

$$\vec{\mu}_1 = g_p \mu_N \vec{I} \quad ; \quad g_p \approx 2.8 \quad , \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2Mc}$$

$$\vec{\mu}_2 = g_e \mu_B \vec{S} \quad ; \quad g_e \approx 2 \quad , \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

şeklinde yazılıp, I.S operatörünün özdeğerinin

$$\vec{I} \cdot \vec{S} = \begin{cases} -3/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

olduğu gözönüne alınırsa spinlerin paralel ve antiparalel durumları arasındaki enerji farkı,

$$\Delta E = \frac{8}{3a^3} g_p g_e \mu_N \mu_B$$

B 22

olarak bulunur. Bu fark karmaşık çekirdeklerin spin değerlerinin deneysel olarak saptanmasına yardımcı olmaktadır. (11)

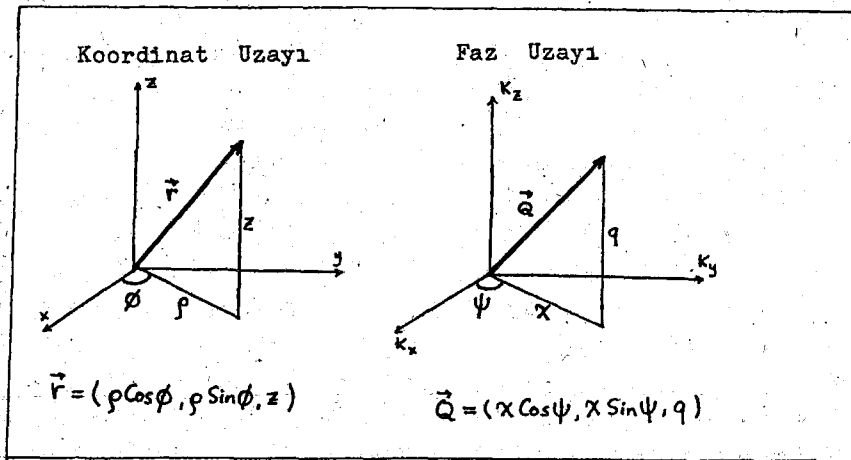
C SFEROİDAL DAĞILIMLAR

Geçen bölümde sferoidin bir özel hali olan küresel dağılımların etkileşimleri incelendi. Hesapların sferoid için genelleştirilmesi, daha geniş bir uygulama alanı sağlayacaktır.

1. GENELDE ÖZENERJİ

Sferoid için şekil 2'de gösterilen silindirik koordinatlar kullanıldığında

$$F(\vec{Q}) = \int d\vec{r} \vec{e}^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}} \rho(r)$$



Şekil 2 Koordinat ve faz Uzaylarında Silindirik Koordinatlar

şeklinde tanımlanan yapı çarpanına, sferoidin yoğunluğu olan

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi a b^2}$$

(Şekil 3, a: sferoidin yarı eksen uzunluğu, b: yarıçapı)
ve

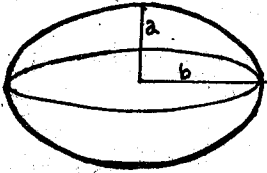
$$\vec{Q} \cdot \vec{r} = x \rho \cos(\phi - \psi) + qz$$

yerleştirilirse yapı çarpanı ifadesinin

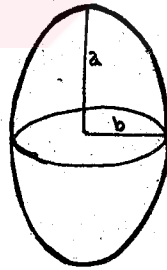
$$F(x, q) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{x^2 b^2 + q^2 a^2})}{(x^2 b^2 + q^2 a^2)^{3/4}}$$

C 1

olduğu görülür (ek 4).



Basık sferoid



Uzun sferoid

Şekil 3.

Burada karekök içindeki terim, koordinat sisteminin özelliklerinden yararlanılarak,

$$\sqrt{\chi^2 b^2 + q^2 a^2} = Q \sqrt{b^2 \sin^2 \eta + a^2 \cos^2 \eta}$$

olarak yazılabilir. $\Omega = \cos \eta$ olmak üzere

$$\alpha = \sqrt{(a^2 - b^2) \Omega^2 + b^2}$$

şeklinde bir α tanımlanırsa,

$$\sqrt{\chi^2 b^2 + q^2 a^2} = \alpha Q$$

şekline gelir. 0 halde yapı çarpanı,

$$F(Q) = 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^{3/2}}$$

C 2

şeklinde gösterilir. Bu ifade

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2} V_{\bullet\bullet}(0) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{Q} F_1(\vec{Q}) F_2(\vec{Q}) \tilde{V}_{\bullet\bullet}(\vec{Q}) \quad A 5$$

tanımına yerleştirilirse, özenerji,

$$\mathcal{E} = \frac{9}{8\sqrt{2\pi}} \int d\vec{Q} \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^3} \tilde{V}_{\bullet\bullet}(\vec{Q}) \quad C 3$$

şeklinde elde edilir.

2 MONOPOL ÖZENERJİSİ

Urusları arasında Coulomb etkileşmesi olan bir sferoidal yük dağılımını gözönüne alalım. Coulomb potansiyelinin Fourier dönüşümü, B 1 bölümünde

$$\tilde{V}_c(Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{Q^2}$$

olarak bulunmuştur. Bu ifade C 3 eşitliğine yerleştirilip integral çözüldüğünde özenerjinin,

Basık sferoid ($a < b$) için,

$$\xi_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{b} \left[\frac{\text{Arcsin} \sqrt{1 - a^2/b^2}}{\sqrt{1 - a^2/b^2}} \right] \quad \text{C 4a}$$

uzun sferoid ($a > b$) için

$$\xi_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{b} \left[\frac{\text{Arcsinh} \sqrt{a^2/b^2 - 1}}{\sqrt{a^2/b^2 - 1}} \right] \quad \text{C 4b}$$

olduğu görülür (ek 5).

a - Minimum Hal :

Bir dağılımın en küçük özenerjisi, dağılımın geometrik şeklini göstermesi bakımından önemlidir. Yukarıda bulunan özenerjinin minimize edilmesi bilinen sonuçlarla kıyas imkânı verecektir.

İncelediğimiz sferoidin, R yarıçaplı bir kürenin hacmi sabit tutularak uzun sferoid yönünde bozulmasından oluştuğu varsayılırsa C 4b özenerji ifadesi $x = a/R$ değişkenine göre

$$\epsilon_c = \frac{3e^2}{5R} x^{1/2} \frac{\text{Arcsinh} \sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3-1}} \quad C5$$

olarak düzenlenebilir. Türevlerine bakılarak x'in 1 olduğu durumda özenerjinin minimum olduğu görülebilir. O halde yalnız Coulomb potansiyeline sahip bir sferoidal dağılım, yarıçapı R olan bir küre şeklini alacaktır.

b - Küçük Deformasyon Hali :

İlginç bir konu da sferoidlerin $a \rightarrow b$ limitinde incelenmesidir. Bu durumda elde edilecek özenerji ifadesi deforme olmuş küre uygulamalarında kolaylık sağlayacaktır.

Basık sferoid için $x = a/R$ değişkeni cinsinden türetilmiş olan C 5 özenerji ifadesinde δ : çok küçük bir sayı olmak üzere

$$a/R = 1 - \delta$$

alındığında

$$\epsilon_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} \left(1 + \frac{1}{5} \delta^2\right)$$

C 6

olduğu görülür.

$\delta = 0$ durumunda kürenin özenerjisinin elde edileceği tabiidir.

3 DİPOL ÖZENERJİSİ

Dipol çiftlerinin etkileşme potansiyeli momentum uzayında

$$\tilde{V}_{..}(\vec{Q}) = -\mu^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \Omega^2)$$

şeklindedir. Bu terim,

$$\mathcal{E} = \frac{9}{8} \int d\vec{Q} \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^3} \tilde{V}_{..}(\vec{Q}) \quad C 3$$

ile verilen özenerji ifadesinde yerleştirilip integre edilirse, basık sferoid için,

$$\mathcal{E}_D = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{b^3} \left[\frac{\text{Arcsin} \sqrt{1 - a^2/b^2}}{(1 - a^2/b^2)^{3/2}} - \frac{a/b}{1 - a^2/b^2} \right] \quad C 7a$$

uzun sferoid için,

$$\mathcal{E}_D = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{b^3} \left[\frac{a/b}{a^2/b^2 - 1} - \frac{\text{Arcsinh} \sqrt{a^2/b^2 - 1}}{a^2/b^2 - 1} \right] \quad C 7b$$

elde edilir (ek 5).

a - Minimum Hal :

Dipol dağılımları için de monopol dağılımları için yapılan minimizasyona benzer şekilde işlem yapılarak en küçük değer bulunabilir. C 7b özenerji ifadesi yine $x = a/R$ değişkenine göre düzenlenirse,

$$\mathcal{E}_D = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{R^3} x^{3/2} \left[\frac{x^{3/2}}{x^3-1} - \frac{\text{Arcsinh} \sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3-1}} \right] \quad \text{C 8}$$

olduğu görülür. Bu değeri minimum yapan x değeri sonsuzdur. Bu da dipol dağılımlarının çizgisel olması gerektiğini gösterir.

b - Küçük Deformasyon Hali

Basık sferoidal dipol dağılımları için türetilmiş olan C 8 özenerji ifadesinin $x = 1 - \delta$ için limiti alınarak

$$\mathcal{E}_D = -\frac{\mu^2}{R^3} \left(1 + \frac{3}{5} \delta\right) \quad \text{C 9}$$

elde edilir.

4 YUKAWA ÖZENERJİSİ

Aralarında $V_{..} = -g^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}$ şeklindeki Yukawa potansiyeli ile etkileşen unsurlardan oluşmuş bir sferoidal dağılımın özenerjisi de, söz konusu potansiyelin Fourier dönüşümü yapılarak bulunan

$$\tilde{V}_{..}(Q) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g^2}{Q^2 + \lambda^2} \quad \text{B 7}$$

ve sferoidin yapı çarpanı olan

$$F(Q) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^{3/2}} \quad \text{C 2}$$

ifadeleri, özenerji için genel hal olan,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{Q} F^2(\vec{Q}) \tilde{V}..(Q) \quad A 5$$

eşitliğinde kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y = & -\frac{g}{2} \frac{g^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{4\lambda^3} \frac{a^2+b^2}{a^4b^4} - \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{(a+b)ab} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\lambda^3 R^6} \frac{e^{-2\lambda R x} - x^6 e^{-2\lambda \frac{R}{x^{1/2}}}}{x^3(x^3-1)} + \frac{1}{2\lambda^2 R^5} \frac{e^{-2\lambda R x} - x^{3/2} e^{-2\lambda \frac{R}{x^{1/2}}}}{x^2(x^3-1)} \right] \quad C 10 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (ek 5). $x = a/R$ cinsinden de,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y = & -\frac{g}{2} \frac{g^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{4\lambda^3 R^6} \frac{x^3+1}{x^3} - \frac{1}{2\lambda R^4} \frac{1}{x} - \frac{2}{3R^3} \frac{x}{x^2+1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\lambda^3 R^6} \frac{e^{-2\lambda R x} - x^6 e^{-2\lambda \frac{R}{x^{1/2}}}}{x^3(x^3-1)} + \frac{1}{2\lambda^2 R^5} \frac{e^{-2\lambda R x} - x^{3/2} e^{-2\lambda \frac{R}{x^{1/2}}}}{x^2(x^3-1)} \right] \quad C 11 \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Küçük Deformasyon Hali:

$x = 1 - \delta$ limitinde ,enerji ifadesi, $k = \lambda R$ cinsinden,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y = & -\frac{g}{4} \frac{g^2}{R k^5} \left[1 - k^2 + \frac{2}{3} k^3 - (1 + 2k + k^2) e^{-2k} \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} - k^2 + k^3 \right) \delta - \left(\frac{31}{8} + \frac{3}{2} k + \frac{2}{4} k^2 \right) e^{-2k} \delta \right] \quad C 12 \end{aligned}$$

şeklini alır.

$\delta = 0$ durumunda ise kürenin özenerjisinin elde edileceği tablidir.

5 DÖNME ENERJİSİ

Dönmekte olan bir cisimin özenerjisi, L : açısal momentum, I : eylemsizlik momenti olmak üzere,

$$\mathcal{E}_R = \frac{L^2}{2I}$$

şeklindedir. Bu da sferoidin a eksenine göre eylemsizlik momentinin

$$I = \frac{2}{5} Mb^2$$

olduğu⁽¹²⁾ ve açısal momentumun korunduğu gözönünde tutularak

$$\mathcal{E} = \frac{5}{4} \frac{L^2}{Mb^2}$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce tanımlanan x değişkeni cinsinden ise,

$$\mathcal{E} = \frac{5}{4} \frac{L^2}{MR^2} x$$

C 13

olduğu görülür.

Küçük Deformasyon Hall:

Eğer sözkonusu cisim küçük deformasyona uğramış küre şeklinde ise, $x = 1 - \delta$ olacağından, enerji;

$$\mathcal{E} = \frac{5}{4} \frac{L^2}{MR^2} (1 - \delta)$$

C 14

olarak elde edilir.

6 SENTEZ

Çoğu zaman geçen bölümlerde incelenen etkileşme türlerinden birkaçı birarada görülürler. Bu yüzden uygulama yapmadan önce bu etkileşmelerin hepsine sahip ve dönmekte olan bir kütle dağılımını ele almak yararlı olacaktır.

Böyle bir sistemin enerjisi

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_G$$

'dir. Buradaki \mathcal{E}_G Gravitasyonel çekim enerjisi, Coulomb enerjisine benzer şekilde, G: gravitasyonel çekim sabiti, M: toplam kütle olmak üzere,

$$\mathcal{E}_G = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{b} \frac{\text{Arcsin} \sqrt{1 - a^2/b^2}}{\sqrt{1 - a^2/b^2}} \quad \text{C 15}$$

ve x cinsinden

$$\mathcal{E}_G = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} x \frac{1}{2} \frac{\text{Arcsin} \sqrt{1 - x^3}}{\sqrt{1 - x^3}} \quad \text{C 16}$$

'dir. Yine Coulomb etkileşmelerine benzer şekilde küçük deformasyon için,

$$\mathcal{E}_G = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \left(1 + \frac{1}{5} \delta^2\right) \quad \text{C 17}$$

olduğu görülür.

0 halde özenerji, C 5, C 8, C 11, C 13, C 16 ifadelerini kullanarak ve

$$C_C \equiv \frac{3e^2}{5R}, \quad C_Y \equiv \frac{9g^2}{2\lambda}, \quad C_D \equiv \frac{3M^2}{2R^3}$$

C 18

$$C_R \equiv \frac{5}{4} \frac{L^2}{MR^2}, \quad C_G \equiv \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

sabitleri tanımlanarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & C_C x^{1/2} \frac{\text{Arcsin}\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}} - C_Y \left[\frac{1}{4\lambda^3 R^6} \frac{x^3+1}{x^3} - \frac{1}{2\lambda R^4} \frac{1}{x} \right. \\ & + \frac{2}{3R^3} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4\lambda^3 R^6} \frac{e^{-2\lambda R x} - x^6 e^{-2\lambda \frac{R}{x^{1/2}}}}{x^3(x^3-1)} + \\ & \left. \frac{1}{2\lambda^4 R^5} \frac{e^{2\lambda R x} - x^{3/2} e^{-2\lambda \frac{R}{x^{1/2}}}}{x^2(x^3-1)} \right] + C_D x^{3/2} \left[\frac{x^{3/2}}{x^3-1} - \frac{\text{Arcsinh}\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3-1}} \right] \\ & - C_R x + C_G x^{1/2} \frac{\text{Arcsin}\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}} \end{aligned} \quad \text{C 19}$$

şeklinde elde edilir.

Küçük Deformasyon Limiti:

Daha önce küçük deformasyonlar için bulunmuş olan C 6, C 9, C 12, C 14 ve C 17 enerji ifadeleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & C_C \left(1 + \frac{1}{5} \delta^2\right) - \frac{1}{2R^2 k^4} C_Y \left[1 - k^2 + \frac{2}{3} k^3 - (1+2k+k^2) e^{-2k}\right] \\ & + \left(\frac{3}{2} - k^2 + k^3\right) \delta - \left(\frac{31}{3} + \frac{3}{2} k + \frac{3}{4} k^2\right) \delta e^{-2k} \\ & + \frac{2}{3} C_D \left(1 + \frac{3}{5} \delta\right) - C_R (1-\delta) + C_G \left(1 + \frac{1}{5} \delta^2\right) \end{aligned} \quad \text{C 20}$$

olduğu görülür.

$\delta = 0$, yani küre halinde,

$$\mathcal{E} = C_C - \frac{1}{2R^2 k^4} C_Y \left[1 - k^2 + \frac{2}{3} k^3 - (1+2k+k^2) e^{-2k}\right] + \frac{2}{3} C_D - C_R + C_G \quad \text{C 21}$$

olduğu görülür.

D

UYGULAMALAR

Geçen bölümde türetilmiş olan C 15 özenerji ifadesi, homojen olmak şartıyla hem atomik yapılara hem makroskopik yapılara uygulanabilir. Fakat tabiidir ki bazı hallerde enerjinin bir veya birkaç terimi etkili olacak, diğerleri ise ihmal edilebilecektir. Bunu görebilmek için hepsi enerji boyutunda olan, C 14 ile tanımlanmış katsayıları, n: toplam unsur sayısı, m: tek unsur kütlesi olmak üzere,

$d = \frac{n}{V}$ sayı yoğunluğu, ve V hacımı cinsinden düzenlenirse,

$$C_C = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{3e^2}{5} V^{5/3} d^2, \quad C_G = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{3Gm}{5} V^{5/3} d^2,$$

$$C_R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{m\omega^2}{2} V^{5/3} d, \quad C_D = 2\pi^2 V d^2,$$

$$C_Y = \frac{16\pi^2}{5} \frac{g^2}{\lambda^5} d^2$$

oldukları görülür. Aşağıdaki tablo 3'den görüleceği gibi, sayı yoğunluğunun büyük olduğu hallerde Yukawa, hacımın büyük olduğu hallerde Gravitasyon ve Coulomb etkileşmelerinin etkin olması beklenir.

		d
Yukawa	Dipol	Coulomb Gravitasyon
		Dönme
		V

Tablo 3

Bu hallerin görüldüğü örnekler ise tablo 4 'de verilmiştir.

Bunlardan atom çekirdeği, B 5.2 kısmında incelenmişti. Diğer örnekler de aşağıda incelenecektir.

ν \ d	Küçük	Büyük
Küçük	(kararsız)	Çekirdek
Büyük	Yerküre Güneş	Nötron yıldızı

Tablo 4

1 BÜYÜK HACIMLI SEYREK DAĞILIMLAR

Yalnızca dönme ve gravitasyonel çekim kuvvetlerinin etkin olduğu bu tür dağılımlarda C 15 ifadesi,

$$E = C_R x - C_G x^{1/2} \frac{\text{Arcsin} \sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}}$$

şeklini alacaktır. Böyle bir sistemi, daha kuvvetli olan Gravitasyon kuvvetleri, Coulomb çekimine benzer şekilde (bkz.C 2 kısmı) küresel, dönme kuvvetleri ise düzlemsel yapacağından, dağılımın küreye yakın basık sferoid olması beklenir. Bu durumda δ küçük bir sayı olmak üzere

$$x = 1 - \delta$$

olacağından, C 6 kullanılarak,

$$E = C_R - C_G - C_R \delta + \frac{1}{5} C_G \delta^2$$

D 1

elde edilir.

Bu enerjiyi minimum yapan değer ise,

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{db} = 0$$

eşitliğinden

$$s = \frac{5}{2} \frac{C_R}{C_G}$$

olarak bulunur. Adı geçen katsayılar açık yazılarak (bkz.C 14)

$$\frac{C_R}{C_G} = \frac{25 L^2}{12 GM^3 R}$$

elde edilir. Burada,

$$L = I\omega = \frac{2MR^2}{5} \omega$$

değeri kullanılarak,

$$\frac{C_R}{C_G} = \frac{1}{3} \frac{R^3}{MG} \omega^2$$

bulunur.

ÖRNEK 1 : YERKÜRESİ

Bulduğumuz bu değerleri uygulamak için, çok bilinen bir örneęi; Yerküresini seçebiliriz.

Her ne kadar Dünya, şartlarımızdan biri olan homojenliği sağlamıyorsa da hesapların geçerliğini sınamak açısından yararlı olacaktır.

Dünya için bilinen sayılar⁽¹³⁾ D 3 ifadesine yerleş-

tirilirse,

$$\frac{C_R}{C_G} = 0.0011391$$

ve

$$\delta = \frac{R-d}{R} = 0.0028477$$

elde edilir. Bu sonuç Dünya'nın basıklığı olarak tanımlanmakta olup, doğrudan ölçülerek bulunan

$$b = 0.0023682$$

değerine, homojen olmayıştan kaynaklanan bir miktar hata ile yaklaşmaktadır (13).

ÖRNEK 2 : GÜNEŞ

Güneş, yerküreye göre daha homojen ve elastik olması bakımından incelenmeye değer bir örnektir. Fakat bu defa Güneşi oluşturan katmanların nerede başlayıp nerede bittiği tam tespit edilemediğinden, ortalama yoğunluk ve fotosfer boyutları kullanılarak yapılan bu hesapta da biraz hata beklenir. (17)

Güneş için bilinen sayılar (14) D 3 ifadesinde kullanıldığında,

$$\frac{C_R}{C_G} = 7.327 \cdot 10^{-6}$$

ve

$$\delta = \frac{R-d}{R} = 1.831 \cdot 10^{-5}$$

olduğu görülür.

2 BÜYÜK HACİMLİ SIK DAĞILIMLAR

Bu tür dağılımlarda Gravitasyonel kuvvetlerin en etkin kuvvet olduğu tablo 3'den anlaşılmaktadır. İkinci derecede etkili olup deformasyona sebep olan kuvvetin ne olabileceği ise ilk bakışta görülmemektedir. Bunu görmek için bir örnek incelemek gerekir.

ÖRNEK : NÖTRON YILDIZI

Nötron yıldızını oluşturan nötronlar, aralarında elektrostatik etkileşmeler yapmamakta, fakat spinlerinden kaynaklanan kuvvetli dipol etkileşmeleri yapmaktadırlar. (bkz.ek 6) Nötronlar arasındaki Yukawa etkileşmeleri de gözönüne alınarak ve magnetik dipol momentlerinin aynı yönde oldukları varsayılarak, bir nötron yıldızı için özenerji,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_Y + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_G + \mathcal{E}_R \quad D 4$$

şeklinde yazılır. Buradaki hangi terimin ne derece etkili olduğunu anlamak için C 14 ile tanımlanmış olan sabitlerin oranlarına bakalım.

Dönme enerjisi sabitinin, gravitasyonel enerji sabitine oranı, D 3 ifadesine ρ : yoğunluk olmak üzere,

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

yerleştirilerek,

$$\frac{C_R}{C_G} = \frac{\pi}{G T^2 \rho}$$

olarak bulunur. Nötron yıldızı için ölçülmüş olan bu sayılar (15)

$$T = 0,65 \text{ s (ortalama)} , \rho = 4,4 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

değerleri konarak

$$\frac{C_R}{C_G} = 25 \cdot 10^{-8}$$

olduğu görülür.

Yukawa etkileşmesi için tanımlanmış katsayının gravitasyon katsayısına oranı,

$$\frac{C_Y}{C_G} = \frac{g g^2}{2 \lambda^2} \frac{5R}{3GM^2} = \frac{135}{32} \frac{g^2}{\pi^2 G \rho R^5 \lambda^2}$$

ifadesinden, $R = 10^4 \text{ m}$ kullanılarak (15)

$$\frac{C_Y}{C_G} \approx 10^{-22}$$

bulunur.

Son olarak dipol katsayısının oranına bakarsak,

$$\frac{C_D}{C_G} = \frac{5}{2} \frac{\mu^2}{GM^2 R^2}$$

ve $\mu = N \cdot \mu_N$ (N :Nötron sayısı, μ_N :Nötronun mag.dipol momenti) yazarak,

$$\frac{C_D}{C_G} = 1,372 \cdot 10^{-3}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi gravitasyonel çekim kuvveti yanında magnetik dipol kuvvetleri, diğerlerine kıyasla etkin olmaktadır. O halde Yukawa ve dönme enerjilerini ihmal ederek C.15 özenerji ifadesi yazılırsa,

$$\mathcal{E} = C_G x^{\frac{1}{2}} \frac{\text{Arcsinh} \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3-1}} + C_D \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x^{\frac{3}{2}} \frac{\text{Arcsinh} \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3-1}} \right)$$

olduğu görülmür. Dipol dağılımlarının çizgisel olma meyili yüzünden (bkz C 3 kısmı) yıldızın küresel şeklinin a) R yönünde deforme olması beklenir.

$$x = 1 + \delta$$

için yukarıdaki ifadenin limiti alınarak özenerji,

$$\mathcal{E} = C_G + \frac{2}{3} C_D + \frac{2}{5} C_D \delta - \frac{1}{5} C_G \delta^2 - \frac{1}{20} C_D \delta^2$$

şekline getirilir.

Bu değeri minimum yapan δ değeri ise

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{d\mathcal{E}}{d\delta} = 0$$

bağıntısıyla,

$$\delta \approx \frac{C_D}{C_G}$$

Yukarıda hesaplanan bu değer,

$$\delta \approx 1,372 \cdot 10^{-3}$$

olarak bulunmuştur.

Görüldüğü gibi nötron yıldızları ve dönen nötron yıldızı oldukları sanılan pulsarlar (bkz. ek 6), magnetik dipol momentleri aynı yönde olsaydı, dipol kuvvetlerinin etkisi ile yukarıda hesaplandığı kadar deforme olacaklardı.

S O N U Ç

Geçen bölümlerde, unsurları aralarında Coulomb, Yukawa Dipol etkileşmeleri yapan ve dönmekte olan sferoidal dağılımlar için özenerji ifadeleri türetilmiştir. Tablo 5'te verilen sonuçlardan, daha özel durumlar olan deforme küre ve gerçek kürelerin özenerjileri de gözlenebilmektedir.

Bu ifadeler değişik hacim ve yoğunluk rejimlerinde incelenmiş, atomik ve makroskopik problemlere uygulanabileceği örneklerle gösterilmiştir.

Kullanılan yöntemin nispeten basit oluşu, çözülmemiş diğer statik problemlerin tablo 5 ile verilen ifadeler kullanılarak çözülmesi yönünde ümit vermektedir.

Tablo 5 : Özennergiler.

Etkileşim	Sferoid	Deforme küre	Küre
Coulomb	$\frac{3e^2}{5R} x^{1/2} \frac{\text{Arccsin}\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3-1}}$	$\frac{2}{5} \frac{e^2}{R} (1 + \frac{1}{5} \delta^2)$	$\frac{2}{5} \frac{e^2}{R}$
Gravitasyon	$\frac{3GM^2}{5R} x^{1/2} \frac{\text{Arccsin}\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}}$	$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} (1 + \frac{1}{5} \delta^2)$	$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$
Yukawa	$-\frac{g^2}{2} \frac{x^2}{4\pi R^3} \left[\frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{2AR^2 x} + \frac{1}{3R^3} \frac{x}{x^3+1} \right]$ $+\frac{1}{4\pi R^3} \frac{e^{-2Ax}}{x^3} - \frac{e^{-2Ax}}{x^3(x^3-1)}$ $+\frac{1}{2\pi R^3} \frac{e^{-2Ax}}{x^2(x^3-1)} - \frac{e^{-2Ax}}{x^2(x^3-1)} \frac{9/2 e^{-2Ax} \frac{R}{2x}}{x^2(x^3-1)}$	$-\frac{g^2}{4} \frac{g^2}{Rk^5} \left[1 - k^2 + \frac{2}{3} k^3 + (\frac{2}{3} - k^2 + k^2) \delta \right]$ $-(1+2k+k^2)e^{-2k}$ $-\left(\frac{21}{8} + \frac{2}{3}k + \frac{3}{4}k^2\right)\delta e^{-2k}$	$-\frac{g^2}{4} \frac{g^2}{Rk^5} [1 - k^2 + \frac{2}{3} k^3 + (1+2k + k^2) e^{-2k}]$
Dipol	$-\frac{2}{2} \frac{M^2}{R^3} x^{3/2} \left[\frac{x^{3/2}}{x^3-1} - \frac{\text{Arccsin}\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3-1}} \right]$	$-\frac{M^2}{R^3} (1 + \frac{2}{5} \delta - \frac{3}{40} \delta^2)$	$-\frac{M^2}{R^3}$
Dönme	$\frac{5}{4} \frac{L^2}{MR^2} x$	$\frac{5}{4} \frac{L^2}{MR^2} (1 - \delta)$	$\frac{5}{4} \frac{L^2}{MR^2}$

$x = a/R, k = \lambda R, \delta = 1-x$

E K L E R

EK 1: KATLAMA İNTEGRALLERİ (16)

İki cisim arasındaki etkileşme potansiyeli,

$$V_{..}(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) V_{..}(\vec{r} - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

olarak verilmektedir (bkz. bölüm A 1).

$$\langle \phi(r) | \psi(r) \rangle \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r$$

şeklinde tanımlanan Dirac notasyonu cinsinden,

$$\langle \vec{r} | V_{..} \rangle = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \langle \vec{r}_1 | \rho_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | \rho_2 \rangle \langle \vec{r} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2 | V_{..} \rangle$$

yazılabilir. $|Q\rangle \langle Q| dQ = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | V_{..} \rangle &= \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{Q} \langle \vec{r}_1 | \rho_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | \rho_2 \rangle \langle \vec{r} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2 | \vec{Q} \rangle \langle \vec{Q} | V_{..} \rangle \\ &= \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{Q} \langle \vec{r}_1 | \rho_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | \rho_2 \rangle \langle \vec{r}_1 | \vec{Q} \rangle \langle -\vec{r}_1 | \vec{Q} \rangle \langle \vec{r}_2 | \vec{Q} \rangle \langle \vec{Q} | V_{..} \rangle \\ &= \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{Q} \langle \vec{Q} | \vec{r}_1 \rangle \langle \vec{r}_1 | \rho_1 \rangle \langle -\vec{Q} | \vec{r}_2 \rangle \langle \vec{r}_2 | \rho_2 \rangle \langle \vec{r}_1 | \vec{Q} \rangle \langle \vec{Q} | V_{..} \rangle \\ &= \int d\vec{Q} \langle \vec{Q} | \rho_1 \rangle \langle -\vec{Q} | \rho_2 \rangle \langle \vec{r} | \vec{Q} \rangle \langle \vec{Q} | V_{..} \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\langle \vec{Q} | \vec{r} \rangle$ ile çarpılarak

$$\langle \vec{Q} | V_{..} \rangle = \langle \vec{Q} | \rho_1 \rangle \langle -\vec{Q} | \rho_2 \rangle \langle \vec{Q} | V_{..} \rangle$$

ve buradan da,

$$V_{..}(Q) = F(\vec{Q}) F_2(-\vec{Q}) V_{..}(Q)$$

olduğu görülür ki bu da $V_{..}(r)$ potansiyelinin Fourier dönüşümüdür.

EK 2 : TABLO 2' DEKİ I(x) DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI

Küre-Küre Etkileşmeleri:

B 4 ile verilen

$$I(r) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dQ}{Q} \sin(Qr) F_1(Q) F_2(Q)$$

tanımına, kürenin yapı çarpanı olan

$$F(Q) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(QR)}{(QR)^{3/2}} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin(QR)}{(QR)^2} - \frac{\cos(QR)}{QR} \right]$$

yerleştirilirse $x \equiv r/R$ ve $z = QR$ olmak üzere,

$$I(x) = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin xz}{z^7} - \frac{\cos 2z \sin xz}{z^7} - \frac{2 \sin 2z \sin xz}{z^6} + \frac{\sin xz}{z^5} + \frac{\cos 2z \sin xz}{z^5} \right) dz$$

elde edilir. İntegraller de çözülerek,

$$I(x) = 1 \quad x > 2$$

$$I(x) = -\frac{x^6}{160} + \frac{3x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{6x}{5} \quad x < 2$$

sonucuna varılır.

Hidrojen-Hidrojen Etkileşmeleri:

$$F(Q) = \frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha^2 Q^2}{4} \right]}$$

Yapı çarpanı, B 4' e yerleştirilirse, $x = \frac{2r}{a}$ ve $\frac{aQ}{2} = z$ olmak üzere,

$$I(x) = \int \frac{\sin(xz)}{z(1+z^2)^2} dz$$

elde edilir. Bu da,

$$I(x) = 1 - e^{-x} \left(1 - \frac{11}{16}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3 \right)$$

olarak çözülür. (18)

Nokta-Nokta etkileşmesi:

$x = \frac{z}{R}$ ve $z = QR$ olmak üzere,

$$I(x) = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xz)}{z} \left(\frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \right) dz$$

Bu integral de çözümlenerek,

$$I(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3 \quad x < 1$$

$$I(x) = 1 \quad x > 1$$

bulunur.

Nokta-Hidrojen Etkileşmesi:

$x = \frac{2r}{a}$ ve $z = \frac{aQ}{2}$ olmak üzere

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{z(1+z^2)^2} dz$$

integrali çözüldüğünde; (19)

$$I(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{2} \right)$$

olduğu görülür.

EK 3 : YARI EMİRİK KÜTLE FORMÜLÜ

C.F.V.Weizsacker, Z.Physic, 96,431 (1935) eserinde çekirdeğin damla modeli için teoriden bulunamayan, ancak empirik bilgilere dayanarak elde edilebilen dört sabite bağlı yedi terimden oluşan bir kütle formülü verilir. Bu formül;

$$M = M_N N + M_H Z - \alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{T_f^2}{A} + \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \frac{e^2}{r_0 \text{Coul}} + \delta(A, Z)$$

şeklindedir. Buradaki M_N ve $M_H Z$ terimleri, çekirdeği oluşturan elementer taneciklerin kütleleridir.

$\frac{T_f^2}{A}$ terimi ise simetri terimi olup, atomun bilinen izotoplarının kıyaslanması ile elde edilir.

Son terim olan $\delta(A, Z)$ ise çiftleşme etkilerini açıklayan terimdir.

Bizim, hesaplarımızda a_1 ile gösterdiğimiz katsayıya sahip A terimi, çekirdek kuvvetlerinin doymasından kaynaklanan etki, a_2 katsayılı $A^{2/3}$ terimi, çekirdeğin yüzeye yakın parçacıklarının yüzey gerilimi, a_3 katsayılı $Z^2/A^{1/3}$ terimi ise Coulomb itmesi terimidir.

Bu katsayılar ayrı ayrı yöntemlerle hesaplanmış ve az çok yakın fakat tam uymayan sonuçlar elde edilmiştir. Bu farklılığın sebebi de Yukawa etkileşme potansiyelindeki g etkileşme sabiti ve λ etkileşme menziline sayısal değerleri üzerinde farklı görüşler bulunmasıdır.

Bu çalışmada biz, $g^2/\hbar c$ terimi için deneylere yakınlık sağlayan 0,008⁽¹³⁾, λ için de 1,06 l/F ve $r_0 = 1,1 F$ ⁽¹⁴⁾ sayılarını kullandık.

Bu durumda E.Fermi, Nuclear Physics, University of Chicago Press, 1950 eserinde verilen sonuçlara büyük yakınlık sağlanmıştır.

EK 4 : SFEROİDİN YAPI ÇARPANI

Bir elipsin, eksenini etrafında dönmesinden oluşan sferoid (dönel elipsoid) a yarı-eksen uzunluğunun, b yarıçapına oranına bakarak iki çeşittir: $a/b > 1$ ise, uzun sferoid, $a/b < 1$ ise basık sferoid. (bkz şekil 3).

Sferoidlere ait bazı çokluklar aşağıda verilmiştir: (21)

Yoğunluk:
$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi ab^2}$$

Hacim:
$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Yüzey:
$$\frac{\rho^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

Buradaki yoğunluk fonksiyonu,

$$F(Q) = \int d\vec{r} e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})$$

A 3

şeklinde tanımlanan yapı çarpanı fonksiyonuna yerleştirilirse, şekil 2'de belirtilen parametreler cinsinden,

$$F(Q) = \frac{3}{4\pi ab^2} \int_0^b \rho d\rho \int_{-z(\rho)}^{z(\rho)} dz \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}}$$

yazılır. Burada $z(\rho)$ fonksiyonu yüzey ifadesinden çekilerek,

$$z(\rho) = a\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{b^2}}$$

elde edilir.

$$\vec{Q} \cdot \vec{r} = (x \cos \psi, x \sin \psi, q) \cdot (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = x \rho \cos(\phi - \psi) + qz$$

olduğundan yapı çarpanı,

$$\begin{aligned} F(Q) &= \frac{3}{4\pi ab^2} \int_0^b \rho d\rho \int_{-a\sqrt{1-\rho^2/b^2}}^{a\sqrt{1-\rho^2/b^2}} dz \int_0^{2\pi} d\phi e^{-iqz} e^{-ix\rho \cos(\phi-\psi)} \\ &= \frac{3}{ab^2} \int_0^b \rho d\rho J_0(x\rho) \int_0^{a\sqrt{1-\rho^2/b^2}} dz e^{-iqz} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{ab^2 q} \int_0^b \rho d\rho J_0(x\rho) \sin[qa\sqrt{1-\rho^2/b^2}]$$

$$= \frac{3}{2q} \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{b}\right) \cdot \frac{\rho}{b} J_0(xb\frac{\rho}{b}) \sin[qa\sqrt{1-\rho^2/b^2}] \quad (22)$$

$$F(x, q) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{Q^2 b^2 + q^2 a^2})}{(Q^2 b^2 + q^2 a^2)^{3/4}}$$

olarak bulunur.

EK 5 : SFEROİDAL DAĞILIMLARIN ÜZENERJİLERİ HESABI

Monopol Üzenerjisi:

$$\mathcal{E}_c = \frac{9e^2}{8\pi} \int d\vec{Q} \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{Q^2 (\alpha Q)^3} = \frac{9e^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\Omega \int_0^\infty dQ \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^3}$$

$$\alpha = \sqrt{(a^2 - b^2)\Omega^2 + b^2}, \quad z = \alpha Q$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{9e^2}{2} \int_0^1 d\Omega \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)\Omega^2 + b^2}} \int_0^\infty dz \frac{J_{3/2}(z) J_{3/2}(z)}{z^3}$$

$$= \frac{3e^2}{5} \int_0^1 d\Omega \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)\Omega^2 + b^2}}$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{b^2} \left[\frac{\text{Arcsin}(\sqrt{1 - a^2/b^2})}{\sqrt{1 - a^2/b^2}} \right] \quad a < b$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{b^2} \left[\frac{-\text{Arcsinh}(\sqrt{a^2/b^2 - 1})}{\sqrt{a^2/b^2 - 1}} \right] \quad a > b$$

Dipol Üzenerjisi:

$$\mathcal{E}_D = -\frac{9}{8\pi} \mu^2 \int_{-1}^1 d\Omega \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty Q^2 dQ \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^3} (1 - \Omega^2)$$

$$z = \alpha Q$$

$$\mathcal{E}_D = -\frac{g}{4} \mu^2 \int_{-1}^1 \frac{d\Omega (1-\Omega^2)}{[(a^2-b^2)\Omega^2+b^2]} \int_0^\infty \frac{dz}{z} J_{3/2}(z) J_{3/2}(z) \quad (23)$$

$$\mathcal{E}_D = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{b^3} \left[\frac{a/b}{a^2/b^2 - 1} - \frac{\text{Arcsin} \sqrt{a^2/b^2 - 1}}{(a^2/b^2 - 1)^{3/2}} \right] \quad a > b$$

$$\mathcal{E}_D = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{b^3} \left[\frac{\text{Arcsin} \sqrt{1 - a^2/b^2}}{(1 - a^2/b^2)^{3/2}} - \frac{a/b}{1 - a^2/b^2} \right] \quad a < b$$

Yukawa Özenerjisi:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_Y &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{Q} \cdot g \frac{\pi}{2} \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{(\alpha Q)^3} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g^2}{Q^2 + \lambda^2} \right) \\ &= -\frac{g^2}{4} \int_0^1 d\Omega \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{(\alpha Q)^3} \frac{J_{3/2}(\alpha Q) J_{3/2}(\alpha Q)}{Q^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

$x \equiv \alpha Q$ ve $\beta \equiv \lambda \alpha$ dönüşümü yapılarak,

$$\mathcal{E}_Y = -\frac{g^2}{4} \int_0^1 \frac{d\Omega}{\alpha} \int_0^\infty g \frac{J_{3/2}(x) J_{3/2}(x)}{x(x^2 + \beta^2)} dx$$

$3J_{3/2}(x) = x [J_{5/2}(x) + J_{1/2}(x)]$ açılımı yapılarak,

$$\begin{aligned} g \int_0^\infty \frac{J_{3/2}(x) J_{3/2}(x)}{x(x^2 + \beta^2)} dx &= \int_0^\infty \frac{x J_{5/2}(x) J_{5/2}(x)}{(x^2 + \beta^2)} dx \\ &+ 2 \int_0^\infty \frac{x J_{5/2}(x) J_{1/2}(x)}{(x^2 + \beta^2)} dx + \int_0^\infty \frac{x J_{1/2}(x) J_{1/2}(x)}{(x^2 + \beta^2)} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} x \frac{[J_\nu(x)]^2}{x^2 + a^2} dx = I_\nu(a) K_\nu(a) \quad (24)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-\mu+1+2n}}{x^2 + a^2} J_\nu(x) J_\mu(x) dx = (-1)^n a^{\nu-\mu+2n} I_\mu(a) K_\nu(a) \quad (25)$$

bağantıları kullanılarak,

$$9 \int_0^{\infty} \frac{J_{3/2}(x) J_{3/2}(x)}{x(x^2 + \beta^2)} dx = I_{5/2}(\beta) K_{5/2}(\beta) + I_{1/2}(\beta) K_{1/2}(\beta) - 2 I_{3/2}(\beta) K_{3/2}(\beta)$$

ve

$$I_{5/2}(\beta) = I_{1/2}(\beta) - \frac{3}{\beta} I_{3/2}(\beta)$$

$$K_{5/2}(\beta) = K_{1/2}(\beta) + \frac{3}{\beta} K_{3/2}(\beta)$$

açılımları yapılarak,

$$I_{1/2}(\beta) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \frac{\sinh \beta}{\beta}$$

$$I_{3/2}(\beta) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \left(\frac{\cosh \beta}{\beta} - \frac{\sinh \beta}{\beta^2} \right)$$

$$K_{1/2}(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} e^{-\beta}$$

$$K_{3/2}(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} e^{-\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$$

tanımları kullanılır, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$9 \int_0^{\infty} \frac{J_{3/2}(x) J_{3/2}(x)}{x(x^2 + \beta^2)} dx = \frac{9}{2\beta^5} \left[\left(\frac{2}{3}\beta^3 - \beta^2 + 1 \right) - (1 + 2\beta + \beta^2) e^{-2\beta} \right]$$

elde edilir. Böylece enerji ifadesi,

$$\mathcal{E} = -\frac{g}{4} \int_0^1 \frac{d\Omega}{\alpha} \frac{1}{\beta^5} \left[\left(\frac{2}{3}(\beta^3 - \beta^2 + 1) - (1 + 2\beta + \beta^2)e^{-2\beta} \right) \right]$$

Haline gelir. Buradaki

$$\alpha = \sqrt{(a^2 - b^2)\Omega + b^2} \quad \text{oluşu gözönüne alınarak,}$$

$$d\Omega = \frac{2\beta d\beta}{\lambda^2(a^2 - b^2)} \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{\beta}{\lambda} \quad \text{kullanılarak,}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{g^2}{2\lambda(a^2 - b^2)} \int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{\lambda a}{b}} d\beta \left[\frac{2}{3\beta^2} - \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^5} - \left(\frac{1}{\beta^5} + \frac{2}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^3} \right) e^{-2\beta} \right].$$

Bu integral de kısmi integrasyon yöntemi ile çözümlenerek,

$$\mathcal{E} = -\frac{g}{2} \frac{g^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{4\lambda^3} \frac{a^2 + b^2}{a^4 b^4} - \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{a^2 b^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{(a+b)ab} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\lambda^3} \frac{b^4 e^{-2\lambda a} - a^4 e^{-2\lambda b}}{a^4 b^4 (a^2 - b^2)} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{b^3 e^{-2\lambda a} - a^3 e^{-2\lambda b}}{a^3 b^3 (a^2 - b^2)} \right]$$

elde edilir.

EK-6 : NÖTRON YILDIZLARI VE PULSARLAR

Bir ilâ üç Güneş kütlesi arasında kütleyle sahip yıldızların evrimindeki son aşama olan nötron yıldızları, gravitasyonel çekim nedeni ile yoğunluğun çok büyümesi sonucu gerçekleşen



reaksiyonundan çıkan nötronların araların aki uzaklığın 10^8 'ye ulaşması ile dengelenmesinden oluşur. Söz konusu yıldızlar, yukarıdaki reaksiyon sonucu çıkan anti-nötrinoların kaçması sebebiyle sadece nötron içerirler.

Ortalama bir Nötron yıldızı 10 km yarıçapında, 10^{13} g/cm³ yoğunluğundadır. Bu yıldızlar Dünya'dan gözlenebilecek kadar kuvvetli ışık yaymadıklarından, ancak dönen bir nötron yıldızından oluştukları sanılan ve çok muntazam radyo sinyalleri gönderen pulsarlar sayesinde varlıkları ispatlanabilmektedir.

Radyoteleskopik verilere göre nötron yıldızları ile aynı özelliklere sahip pulsarların periyodları⁽²⁶⁾

$0,033 \leq T \leq 4$ saniyedir. Bu yıldızların önemli bir özelliği de $B = 10^{12}$ Gauss gibi çok yüksek bir magnetik alana sahip bulunmalarıdır.⁽²⁷⁾

EK 7: NOTASYON

A	:	Atom numarası
a	:	Bohr yarıçapı
a	:	Sferoidin yarı eksen uzunluğu
$a_{0,1,..}$:	Metinde tanımlanan bazı sabitler
b	:	Sferoidin yarıçapı
c	:	Işık hızı
$C_{C,R,D,G,Y}$:	Metinde tanımlanan enerji sabitleri
$e_{1,2}$:	Elektrik yükleri
$F(Q)$:	Yapı çarpanı (Form factor)
G	:	Gravitasyonel çekim sabiti
g	:	Yukawa etkileşme sabiti
g_p, g_e	:	Proton ve elektron jromagnetik çarpanları
I	:	Eylemsizlik momenti
\vec{I}, \vec{S}	:	Spin vektörleri
$J_{n/2}(x)$:	Bessel fonksiyonları
k	:	λR parametresi
L	:	Açısal momentum
M	:	Toplam kütle
M	:	Protonun kütlesi
m	:	Elektronun kütlesi
Q	:	Momentum uzayında yer vektörü
r	:	Koordinat uzayında yer vektörü
r_0	:	Çekirdek yarıçap sabiti
T	:	Periyod
x	:	a/R parametresi
Z	:	Atom ağırlığı

α, β	:	Metinde tanımlanan parametreler
δ	:	Küçük sayı
$\delta(\vec{r})$:	Dirac delta fonksiyonu
$\epsilon_{c,g,d,y,r}$:	Özenerji
η, ψ	:	Momentum uzayında küresel koordinatlar
λ	:	Yukawa etkileşme menzili
$\vec{M}_{1,2}$:	Magnetik dipol momentleri
M_N	:	Nükleer magneton
M_B	:	Bohr magnetonu
$\rho(\vec{r})$:	Dağılım fonksiyonu (yoğunluk)
θ, ϕ	:	Küresel koordinatlar
q, χ, ψ	:	Momentum uzayında silindirik koordinatlar
ω_z	:	Açısal hız
z, ρ, ϕ	:	Silindirik koordinatlar

KAYNAKLAR VE NOTLAR

- 1 A.O.Barut, R.Raczka, Lett. Math. Phys. 1(1976)315.
- 2 H.Beker, "Hadron Modelleri", (1975).
- 3 H.Beker, B.Ü.Dergisi, 6(1978)9.
- 4 O.G.Çağlayan, H.Beker, B.Ü.Dergisi, 8-9(1981)
- 5 J.D.Jackson, "Classical Electrodynamics" 2nd Ed. John Wiley, (1975)184.
- 6 H.A.Bethe, R.F.Bacher, Rev.Mod.Phys. 8(1936)82.
- 7 H.A.Bethe, E.Salpeter, "Quantum Mechanics of One and Two Electron Systems", Academic Press (1957)100.
- 8 E.H.Wichmann, "Quantum Physics", Berkeley Phys.Course, 4(1971)69.
- 9 S.De Benedetti, "Nuclear Interactions", John Wiley 2nd Ed. (1966)97.
- 10 $V_{\cdot}(\vec{r})$ ifadesinde $\delta(\vec{r})$ terimi hesaba katılmazsa $\vec{E} \cdot \vec{O}$ olduğu yanlışına düşülebilir. W.Panofsky, M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", Addison Wesley (1962) kitabının (1.59) denklemi ve 2.Bölüm 3.Problemi buna örnektir.
- 11 Bu sonuç, başka yöntemler kullanarak H.Bethe ve E.Salpeter tarafından da aynen elde edilmiştir. "Quantum Mechanics of One and Two Electron Systems" Academic Press, (1957)111.
- 12 C.Nordling, J.Österman, "Physics Handbook", Chartwell-Bratt Ltd. (1980)138.
- 13 G.C.Flammarion and A.Danjon, "The Flammarion Book of Astronomy", Simon and Schuster Co. (1964)
- 14 G.Abell, "Exploration of the Universe", Holt, Rinehart and Winston Inc.Press, (1964)415.

- 15 R.N.Manchester and J.H.Taylor, "Pulsars", W.H.Freeman Co. (1977).
- 16 Bu terim ingilizce "Folding" karşılığıdır.
- 17 L.Rudaux and G.De Vaucouleurs, "Astronomy", Batchwoth Press Ltd. (1959)260.
- 18 L.S.Gradshstein, I.M.Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products", Academic Press, (1965), 3.737.3 .
- 19 S.De Benedetti, "Nuclear Interactions", 2nd Ed. (1966)450 .
- 20 R.Hofstadter, "Rev.Mod.Phys." ,28(1956)215 .
- 21 Çetin Cansoy, Ç.N.A.E.M.Yayınları No:166, (1977)34.
- 22 A.Erdélyi, "Tables of Integral Transforms", Mc Graw Hill, (1953) 2.13.54 .
- 23 18 no'lu kaynak, 6.575.1 .
- 24 18 no'lu kaynak, 6.535 .
- 25 18 no'lu kaynak, 6.577.1
- 26 R.N.Manchester and J.H.Taylor, " Pulsars", W.H.Freeman Co., (1977)169 .
- 27 M.A.Alpar, "Pulsarlar ve Nötron Yıldızları" (1980).

ÖZGEÇMİŞİM

1955 yılında İstanbul'da doğdum. İlkokulu Ankara'da, Ortaokul ve Liseyi İstanbul'da bitirdim.

1972 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümüne kayıt oldum. Buradan 1977 yılında mezun olup Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümü Lisansüstü Programına girdim. Aynı tarihte, Kocaeli D.M.M.Akademisinde, halen sürdürmekte olduğum Fizik Asistanlığı görevime başladım. 1980 Şubat ayında Fizik Master derecesi alarak Kocaeli D.M.M.Akademisi'nde (sonradan Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fak.) Doktora çalışmalarına başladım.