

Y.T.Ü. Kocaeli Mühendislik Fakültesi

Bir Ucu Serbest Diğer Ucundan
Harmonik Olarak

İsmail Dürayol

Doktora Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
KOCAELİ MÜHENDİSLİK
FAKÜLTESİ

BİR UCU SERBEST DİĞER UCUNDAN HARMONİK OLARAK
ZORLANAN TELİN LİNEER OLMAYAN REZONANS
SALINIMLARI

İSMAİL DÜZYOL
ARAŞTIRMA GÖREVLİSİ
DOKTORA TEZİ

Tez Yöneticisi Doç. Dr. TALÂT TUNCER

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ MATBAASI
İSTANBUL - 1984

Özge



İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET	I
ABSTRACT	II
1. GİRİŞ	1
2. İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM	4
3. FOURIER SERİSİ İLE ÇÖZÜM	15
4. g ZORLAMALARI ETKİSİNDE HAREKET	24
5. SONUÇ	31
6. EK-FOURIER ÇÖZÜMÜ	33
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	

YILDIZ UNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

R 209

Kot : 56
Alındığı Yer Pen Bil. Enat.
Tarih : 26/5/1987
Fatura :
Fiatı : 1000Tl.
Ayniyat No : 1/6
Kayıt No : 44819
UDC : 517.9 378.242
Ek :



Ö Z E T

Bu çalışmada, esas itibariyle Collins'e [1] ait olan ve başka yazarlar [2-3-4-5] tarafından çeşitli lineer olmayan sürekli ortam problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemle

$$\eta_{yy} - \eta_{tt} = \epsilon \eta^3$$

tipinde bir denkleme uyan, yenileme kuvveti lineer olmayan elastik tel üzerinde dalga yayılması periyodik çözümlerini aradık. Bunun için bir pertürbasyon yöntemi kullanılarak lineer olmayan problem, birbirini izleyen bir dizi lineer probleme indirgendi. Sıfıncı basamaktan çözümün bir integral koşul altında ideal zorlamalı Duffing denklemini sağladığı görüldü. Sıfıncı basamaktan probleme Fourier serileri ile çözüm araştırıldı ve elde edilen sonsuz lineer olmayan cebirsel denklem sistemi belli bilinmeyen sayılarında kesilerek bilgisayar yardımı ile çözüldü. Elde edilen çözümlerden yararlanılarak genlik-frekans grafikleri çizildi, Şekil-2. Çalışmanın ikinci kısmında integro-diferansiyel denklemin zorlaması yg olarak alındı. Böylece elde edilen ideal olmayan zorlamalı Duffing denkleminin çözümünün elliptik fonksiyonlarla ifade edilebileceği anlaşıldı. Integral koşulunu da sağlayan bazı çözüm profilleri Şekil-4 te verildi.

A B S T R A C T

In this thesis an asymptotic method which is essentially due to Collins, have been used to solve the differential equation

$$\eta_{yy} - \eta_{tt} = \epsilon \eta^3$$

This equation governs the phenomenon of wave propagation in an elastic string. By the use of a perturbative expansion, it has been shown that the zeroth order solution satisfies an ideally forced Duffing equation. Under an integral condition, the Fourier series solution of this equation has been obtained. In the second part of this work the forcing term is taken as proportional to the displacement. Thus it became possible to express the solution in Jacobian elliptic functions.

GİRİŞ

$$U_{ss} - U_{yy} - \epsilon F(u, u_y, u_{yy}, \dots) = 0$$

pindeki denklemleri, çeşitli sınır koşulları altında çözmek için B.Keller, L.Ting [2] tarafından bir yöntem verilmiş, bu yöntem H.Millman, J.B.Keller [3], W.D.Collins [1] ve M.S.Ablowitz, A.Aşkar, S.Çakmak, H.Engin [4] tarafından geliştirilmiştir. [3] nolu kay-
gın yazarları yukarıdaki yöntemi,

$$U_{ss} - U_{yy} - \epsilon U^3 = 0$$

nklemine, [1] ve [4] nolu kaynakların yazarları

$$U_{ss} - U_{yy} - \epsilon U_y^2 U_{yy} = 0$$

nklemine, M.Can da [5]

$$U_{yy} - U_{ss} + \epsilon (U U_y)_s = 0$$

$$U_{yy} - U_{ss} + \epsilon U_y U_{yy} = 0$$

bi denklemlere uygulamışlardır. Bu problemlerden, baştakiler, yü-
ri serbest ve tabanı harmonik olarak zorlanan, elastik bir orta-
ı, titreşimini temsil ederken, sonuncusu, bir boyutlu, sıg bir
alda, dalga yayılmasını karakterize etmektedir.

Dalga yayılması problemlerinde, lineer olmayan terimlerin
aba katılmasının sebebi, lineer teorilerin, rezonans bölgesinde
ında doğada var olmayan sonsuz genlikler vermesidir.

Bizde bu çalışmamızda, yukarıda söz edilen yöntemi,

$$U_{yy} - U_{ss} - \epsilon F(U, U_y, U_{yy}, \dots) = 0$$

tipinde bir denkleme uyguladık.

Bir ucu serbest, diğer ucundan harmonik olarak zorlanan telin, lineer olmayan rezonans salınımları problemi, lineer şekliyle, literatürde, yaygın olarak incelenmiştir.

Bir ucundan harmonik olarak zorlanan, öteki ucu serbest bırakılmış lineer olmayan yenileme kuvvetine sahip telin hareket denklemi

$$\eta_{yy} - \eta_{tt} = \epsilon F(\eta) \quad (1.1)$$

sınır koşulları da

$$\eta_y(0,t) = 0, \quad \eta(1,t) = A \cos \omega t \quad (1.2)$$

ile verilir.

Millman ve Keller [3], $F(\eta) = \eta^3$ olarak problemi enerji koşulu altında çözmüşlerdi. Ancak hareket sırasında sistemin toplam enerjisi sabit kalmadığından, enerji koşulunun burada kullanırlılığı tartışılabilir. Bu tezde aynı problemin, asıl itibari ile Collins'e [1] ait olan bir yöntemle çözümü amaçlandı. Bunun için (1.1) denkleminin, (1.2) sınır koşulları altında, $\eta(s+2\pi)=\eta(s)$ periyodiklik şartını sağlayan çözümlerini bulmak üzere, (1.1) denkleminin bir pertürbasyon uygulanarak, lineer olmayan denklem, bir dizi lineer denklem haline getirildi. Birinci basamaktan denklemin periyodik çözümlerinin bulunabilmesi için, durağan dalgalar ile ve karakteristik koordinatlarda verilen sıfırıncı basamak çözümün, bi-

rinci basamak denklemin ikinci yanına ortogonal olması gerektiği kullanılarak, sıfıncı basamak çözüm tarafından gerçekleştirilen bir integro-diferansiyel denklem bulundu.

Diğer taraftan pertürbasyon açılımı sonunda elde edilen lineer problem dizisine Fourier serileri ile çözüm arandı. Sıfıncı basamak Fourier serisi çözümün katsayılarını verecek denklemler, birinci basamak çözümdeki sekülerlikleri önleyen koşullar yardımı ile elde edildi. Bu denklemler, herbiri üçüncü dereceden sonsuz bir sistem oluşturur. Katsayıların sadece baştan belli N tanesinin sıfırdan farklı olduğu varsayılarak elde edilen sonlu sistemler, nümerik yollarla çözüldü. Böylece rezonans bölgesi genlikleri hakkında bilgi veren genlik-frekans grafikleri çizildi.

Çalışmanın ikinci kısmında, sıfıncı basamaktan çözümün sağladığı integro-diferansiyel denklemdeki $\cos q_0 \zeta$ zorlaması yerine γg şeklinde, yer değiştirme ile orantılı bir zorlama alındı, bu zorlama altında problemin çözümü, elliptik fonksiyonlarla ifade edildi.

2- İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM

$$\bar{\eta}_y \Big|_{y=0} = 0, \quad \bar{\eta} \Big|_{y=1} = \cos s \quad (2.1)$$

sınır şartları altında hareket denklemini,

$$\bar{\eta}_{yy} - q^2 \bar{\eta}_{ss} - \epsilon^3 \bar{\eta}^3 = 0 \quad (2.2)$$

olarak alalım. Burada $\bar{\eta}^3$, lineer olmayan yenileme kuvveti, ϵ ise telin özelliklerine bağlı bir parametreyi göstermektedir. Rezonans bölgesinde geçerli bir denklem elde etmek için $\bar{\eta}$ yı

$$\bar{\eta} = \eta / \epsilon \quad (2.3)$$

bağıntısı ile yeniden ölçekliyelim. Problemin bir çözümü varsa, bu çözüm

$$\eta = \eta(y, s, \epsilon)$$

şeklinde olacaktır. η yı ϵ un artan kuvvetlerine göre

$$\eta = \eta_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots \quad (2.4)$$

şeklinde seriye açalım. q nun sabit alınması halinde problemin çözümü olmadığından, q yu da, lineer problemin rezonans noktalarından biri olan $q_0 = \pi/2$ civarında

$$q^2 = q_0^2 (1 + \epsilon \lambda + \dots) \approx q_0^2 (1 + 2\lambda) \quad (2.5)$$

şeklinde seriye açmak gerekir. Burada λ , açısal frekansın q_0 dan kaymasını ifade etmektedir. (2.3) ve (2.5), (2.2) de yerlerine konur düzenlenirse,

$$\eta_{yy} - q_0^2 (1 + \epsilon \lambda) \eta_{ss} - \epsilon \eta^3 = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. Bu durumda sınır şartları da

$$\eta_y \Big|_{y=0} = 0, \quad \eta \Big|_{y=1} = \epsilon \cos s \quad (2.7)$$

olur. s ve $S = \epsilon s$ gibi iki zaman ölçeği varsa,

$$\eta_s = \eta_s + \eta_s \frac{\partial S}{\partial s} = \eta_s + \epsilon \eta_S \quad (2.8)$$

$$\eta_{ss} = \eta_{ss} + 2 \epsilon \eta_{sS} + \epsilon^2 \eta_{SS} \quad (2.9)$$

dir. (2.9) ifadesi (2.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \eta_{yy} - q_o^2 (1 + \epsilon \lambda) \eta_{ss} - 2 q_o^2 \epsilon (1 + \epsilon \lambda) \eta_{sS} - \\ - q_o^2 \epsilon^2 (1 + \epsilon \lambda) \eta_{SS} - \epsilon \eta^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

bulunur. Şimdi (2.10) denkleminde pertürbasyon uygulayalım. Bunun için η nın (2.4) ile gösterilen seri açılımını (2.10) da yerine koyalım.

$$\begin{aligned} (\eta_{oyy} + \epsilon \eta_{1yy} + \epsilon^2 \eta_{2yy} + \dots) - q_o^2 (\eta_{oss} + \epsilon \eta_{1ss} + \epsilon^2 \eta_{2ss} + \dots) - \\ - q_o^2 \epsilon \lambda (\eta_{oss} + \epsilon \eta_{1ss} + \epsilon^2 \eta_{2ss} + \dots) - 2 q_o^2 \epsilon (\eta_{oss} + \epsilon \eta_{1ss} + \epsilon^2 \eta_{2ss} + \dots) - \\ - 2 q_o^2 \epsilon^2 \lambda (\eta_{oss} + \epsilon \eta_{1ss} + \epsilon^2 \eta_{2ss} + \dots) - q_o^2 \epsilon^2 (\eta_{oss} + \epsilon \eta_{1ss} + \epsilon^2 \eta_{2ss} + \dots) - \\ - q_o^2 \epsilon^3 \lambda (\eta_{oss} + \epsilon \eta_{1ss} + \epsilon^2 \eta_{2ss} + \dots) - \epsilon (\eta_o + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots)^3 = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

olur. Bu ifade, ϵ un kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \eta_{oyy} + \epsilon \eta_{1yy} + \epsilon^2 \eta_{2yy} + \dots - q_o^2 \eta_{oss} - q_o^2 \epsilon \eta_{1ss} - q_o^2 \epsilon^2 \eta_{2ss} - \dots - q_o^2 \epsilon \lambda \eta_{oss} - \\ - q_o^2 \epsilon \lambda \eta_{1ss} - q_o^2 \epsilon^3 \eta_{2ss} - \dots - 2 q_o^2 \epsilon \eta_{oss} - 2 q_o^2 \epsilon^2 \eta_{1ss} - 2 q_o^2 \epsilon^3 \eta_{2ss} - \dots - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2q_o^2 \epsilon^2 \lambda \eta_{oss} - 2q_o^2 \epsilon^3 \lambda \eta_{1ss} - 2q_o^2 \epsilon^4 \lambda \eta_{2ss} - \dots - q_o^2 \epsilon^2 \eta_{oss} - q_o^2 \epsilon^3 \eta_{1ss} - \\
 & - q_o^2 \epsilon^4 \eta_{2ss} - \dots - q_o^2 \epsilon^3 \lambda \eta_{oss} - q_o^2 \epsilon^4 \lambda \eta_{1ss} - q_o^2 \epsilon^5 \lambda \eta_{2ss} - \dots - \epsilon \eta_o^3 - \epsilon^4 \eta_1^3 - \\
 & - \epsilon^7 \eta_2^3 - \dots - 3\epsilon^2 \eta_o \eta_1 - 3\epsilon^3 \eta_o^2 \eta_1 - 3\epsilon^3 \eta_o^2 \eta_2 - \dots = 0 \\
 & (\eta_{oyy} - q_o^2 \eta_{lyy}) + (\eta_{lyy} - q_o^2 \eta_{1ss} - 2q_o^2 \eta_{oss} - q_o^2 \lambda \eta_{oss} - \eta_o^3) \epsilon + \dots = 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Özdeşlikten yararlanarak benzer kuvvetlerin katsayıları eşitlenirse, (2.6) diferansiyel denklemi, sıfıncı basamaktan lineer denklem,

$$\eta_{oyy} - q_o^2 \eta_{oss} = 0 \quad (2.12)$$

$$\eta_{oy}|_{y=0} = 0, \quad \eta_o|_{y=1} = 0 \quad (2.13)$$

Birinci basamaktan lineer denklem,

$$\eta_{lyy} - q_o^2 \eta_{1ss} = \lambda q_o^2 \eta_{oss} + 2q_o^2 \eta_{oss} + \eta_o^3 = F_1 \quad (2.14)$$

$$\eta_{ly}|_{y=0} = 0, \quad \eta_1|_{y=1} = \cos s \quad (2.15)$$

giderek, ikinci basamak, üçüncü basamak,, olmak üzere, sonsuz denklemden oluşan lineer denklem sistemine döneriz.

Biz problemin kararlı halini inceleyeceğimizden,

$$\eta_{os} = 0 \quad (2.16)$$

alalım. Bu durumda

$$\eta_{oss} = 0 \quad (2.17)$$

olur. (2.17) den dolayı (2.14) denklemi

$$\eta_{lyy} - q_o^2 \eta_{lss} = \lambda q_o^2 \eta_{oss} + \eta_o^3 = F_1 \quad (2.18)$$

şeklini alır.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + q_o^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \quad (2.19)$$

olmak üzere

$$\nabla^2 \eta = 0 \quad (2.20)$$

şeklindeki denklemlerin çözümleri,

$$\eta = F(x+y) + G(x-y) \quad (2.21)$$

şeklinde olduğundan, (2.12) denkleminin çözümü olan η_o 1,

$$\eta_o = g\left(\frac{s}{q_o} + y\right) + g\left(\frac{s}{q_o} - y\right) \quad (2.22)$$

durağan dalgası olarak alabiliriz. Bu çözüm

$$\eta_{oy} \Big|_{y=0} = 0$$

şartını sağlar.

$$\eta_o \Big|_{y=1} = 0$$

sınır şartı da,

$$g(x+2) = -g(x) \quad (2.23)$$

gibi bir simetri şartını getirir. Şimdi

$$W_y \Big|_{y=0} = 0, \quad W \Big|_{y=1} = 0 \quad (2.24)$$

sınır şartlarını sağlayan ve,

$$LW = 0 \quad (2.25)$$

denkleminin çözümü olan bir W fonksiyonunu gözönüne alalım. (2.20), (2.21) gereği bu fonksiyon

$$W = h\left(\frac{s}{q_0} + y\right) + h\left(\frac{s}{q_0} - y\right) \quad (2.26)$$

şeklindedir. Şimdi,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - q_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \quad (2.27)$$

gibi bir operatör tanımlayıp

$$L(W\eta_1) = W(L\eta_1) + (LW)\eta_1 \quad (2.28)$$

alalım. (2.25) den dolayı

$$(LW)\eta_1 = 0$$

olacağından

$$W(\eta_{1yy} - q_0^2 \eta_{1ss}) = WF_1 \quad (2.29)$$

bulunur. (2.29) eşitliğinin önce sol tarafını gözönüne alalım,

$$W(\eta_{1yy} - q_0^2 \eta_{1ss}) = A \quad (2.29-a)$$

olsun. (2.29-a) nın, y yönünde 0 dan 1 e, s yönünde de 0 dan 2π ye kadar iki katlı integrali

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(\eta_{1yy} - q_0^2 \eta_{1ss}) dy ds$$

dir.

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 W\eta_{1yy} dy ds - q_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 W\eta_{1ss} ds dy$$

kısmi integrasyonla

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ W\eta_{1y} \Big|_0^1 - \int_0^1 W_y \eta_{1y} dy \right\} ds - q_0^2 \int_0^{2\pi} \left\{ W\eta_{1s} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} W_s \eta_{1s} ds \right\} dy$$

olur. Burada W ve η_{1s} periyodik fonksiyonlar olup, periyodları 2π dir.

$$I_1 = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 W_y \eta_{1y} dy ds + q_o^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 W_s \eta_{1s} ds dy$$

Yine burada da W_s ve η_{1s} periyodik fonksiyonlar olup, periyodları 2π dir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_1 = - \int_0^{2\pi} \left[W_y \eta_{1y} \right]_0^1 ds + \int_0^{2\pi} \int_0^1 W_{yy} \eta_{1y} dy ds - q_o^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 W_{ss} \eta_{1s} ds dy + \\ + q_o^2 \int_0^{2\pi} \left[W_s \eta_{1s} \right]_0^{2\pi} dy$$

olur. İkinci ve üçüncü terimler toplamı, (2.25) ve (2.27) uyarınca

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \eta_{1y} (W_{yy} - q_o^2 W_{ss}) dy ds = 0$$

dır. Dördüncü terimde de, W_s ve η_{1s} in periyotları 2π olduğundan

$$W_s \eta_{1s} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

dır, dördüncü terim de sıfıra eşit olur. Bu durumda,

$$I_1 = - \int_0^{2\pi} W_y \eta_{1y} \Big|_{y=1} ds$$

elde edilir. (2.26) ve (2.15) den dolayı,

$$I_1 = - \int_0^{2\pi} \left[h' \left(\frac{s}{q_o} + 1 \right) - h' \left(\frac{s}{q_o} - 1 \right) \right] \cos s ds$$

olur.

$$\frac{s}{q_o} = \xi \quad s = 2\pi \rightarrow \xi = 4$$

$$ds = q_o d\xi \quad s = 0 \rightarrow \xi = 0$$

dönüşümü sonunda da,

$$I_1 = -q_0 \int_0^4 h'(\xi+1) \cos q_0 \xi d\xi + q_0 \int_0^4 h'(\xi-1) \cos q_0 \xi d\xi$$

elde edilir. Yine kısmî integrasyonla,

$$I_1 = -q_0 \left\{ h(\xi+1) \cos q_0 \xi \right\}_0^4 + q_0 \int_0^4 h(\xi+1) \sin q_0 \xi d\xi + \\ + q_0 \left\{ h(\xi-1) \cos q_0 \xi \right\}_0^4 + q_0 \int_0^4 h(\xi-1) \sin q_0 \xi d\xi$$

bulunur. Buradan da,

$$I_1 = q_0^2 \int_0^4 [h(\xi-1) - h(\xi+1)] \sin q_0 \xi d\xi$$

elde edilir.

$$h(\xi+2) = -h(\xi)$$

olduğundan

$$I_1 = -2q_0^2 \int_0^4 h(\xi+1) \sin q_0 \xi d\xi$$

bulunur.

$$\xi + 1 = \xi$$

dönüşümü yapılırsa,

$$I_1 = -2q_0^2 \int_1^5 h(\xi) \sin q_0 (\xi-1) d\xi$$

olur. $h(\xi)$ nin periyodu 4 ve $q_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$I_1 = -2q_0^2 \int_0^4 h(\xi) \cos q_0 \xi d\xi \quad (2.30)$$

elde edilir. Bu ifade eşitliğin sol tarafı idi. Sağ taraf ise,

$$F_1 = \lambda q_0^2 \eta_{oss} + \eta_0^3$$

idi. (2.22) kullanılarak

$$F_1 = \lambda q_0^2 \left[g_{ss} \left(\frac{s}{q_0} + y \right) + g_{ss} \left(\frac{s}{q_0} - y \right) \right] + g^3 + 3g^2\bar{g} + 3g\bar{g}^2 + \bar{g}^3 \quad (2.31)$$

bulunur. Burada,

$$\bar{g} = g \left(\frac{s}{q_0} - y \right) \quad (2.32)$$

dir. Şimdi,

$$\frac{s}{q_0} + y = \xi, \quad \frac{s}{q_0} - y = \eta \quad (2.33)$$

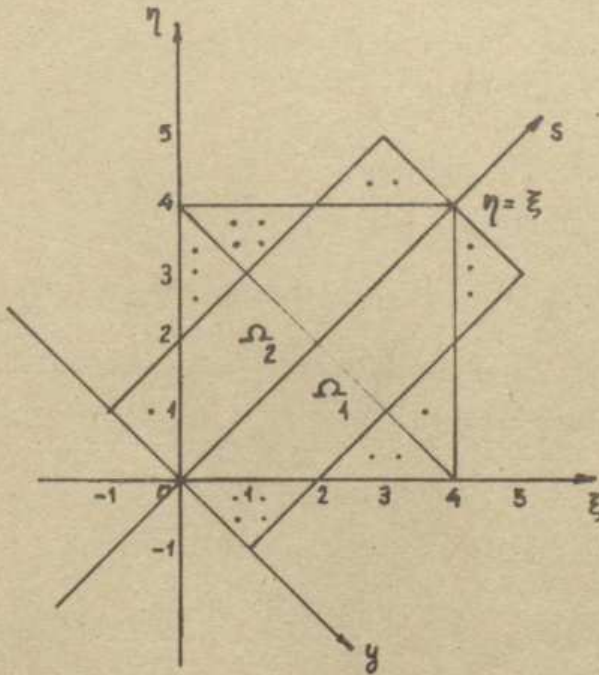
karakteristik koordinat dönüşümü yapalım.

$$\frac{ds}{q_0} + dy = d\xi, \quad \frac{ds}{q_0} - dy = d\eta \quad (2.34)$$

ve

$$-2 \frac{1}{q_0} dy ds = d\eta d\xi + dy ds = -\frac{q_0}{2} d\eta d\xi \quad (2.35)$$

bulunur.



Şekil - 1

$$\begin{aligned}
 s = 0, \quad y = 0 & \rightarrow \xi = \eta = 0 \\
 s = 2\pi, \quad y = 0 & \rightarrow \xi = 4, \eta = 4 \\
 s = 2\pi, \quad y = 1 & \rightarrow \xi = 5, \eta = 3 \\
 s = 0, \quad y = 1 & \rightarrow \xi = 1, \eta = -1
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 g_s &= g_\xi \cdot \frac{1}{q_0} + g_\eta \cdot \frac{1}{q_0} \\
 g_{ss} &= (g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta}) \frac{1}{q_0}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

dir. Şimdi (2.29) eşitliğinin sağ tarafını ele alalım.

Sağ taraf WF_1 idi. (2.26), (2.31), (2.37) değerleri WF_1 de yerlerine yazılırsa, karakteristik koordinatlar cinsinden

$$WF_1 = (h+\check{h}) [\lambda(g_{\xi\xi} + \check{g}_{\eta\eta}) + g^3 + 3g^2\check{g} + 3g\check{g}^2 + \check{g}^3] \tag{2.38}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
 \check{h} &= h\left(\frac{s}{q_0} - y\right) = h(\eta), & h &= h\left(\frac{s}{q_0} + y\right) = h(\xi) \\
 \check{g} &= g\left(\frac{s}{q_0} - y\right) = g(\eta), & g &= g\left(\frac{s}{q_0} + y\right) = g(\xi)
 \end{aligned} \tag{2.38-a}$$

dir. Şekil-1 den yararlanarak WF_1 in Ω_1 bölgesinde iki katlı integralini alalım. Bu integral I_2 ile gösterilsin. Bu durumda,

$$I_2 = \iint_{\Omega_1} WF_1 d\Omega_1$$

$$I_2 = -\frac{q_0}{2} \iint_{\Omega_1} [h+\check{h}] [\lambda(g_{\xi\xi} + \check{g}_{\eta\eta}) + g^3 + 3g^2\check{g} + 3g\check{g}^2 + \check{g}^3] d\eta d\xi$$

$$I_2 = -\frac{q_0}{2} \iint_{\Omega_1} h \cdot F_1(\xi, \eta) d\eta d\xi + \frac{q_0}{2} \iint_{\Omega_1} \check{h} \cdot F_1(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{q_0}{2} \iint_{\Omega_1} hF_1(\xi, \eta) d\eta d\xi - \frac{q_0}{2} \iint_{\Omega_2} hF_1(\eta, \xi) d\eta d\xi \\
 I_2 &= -\frac{q_0}{2} \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} hF_1(\xi, \eta) d\eta d\xi \\
 I_2 &= -\frac{q_0}{2} \int_0^4 \int_0^4 hF_1(\xi, \eta) d\eta d\xi \\
 I_2 &= -\frac{q_0}{2} \int_0^4 h(\xi) \left[\lambda g_{\xi\xi} \eta \Big|_{\eta=0}^4 + \lambda \check{g}_{\eta} \Big|_{\eta=0}^4 + g^3 \eta \Big|_{\eta=0}^4 + \right. \\
 &\quad \left. + 3g^2 \int_0^4 \check{g} d\eta + 3g \int_0^4 \check{g}^2 d\eta + \int_0^4 \check{g}^3 d\eta \right] d\xi \\
 T &= \int_0^4 \check{g}^2 d\eta
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

diyelim.

$$\lambda \check{g}_{\eta} \Big|_0^4 = 0, \quad \int_0^4 \check{g} d\eta = \int_0^4 \check{g}^3 d\eta = 0$$

bu durumda,

$$I_2 = -\frac{q_0}{2} \int_0^4 h(\xi) [4\lambda g_{\xi\xi} + 4g^3 + 3gT] d\xi \tag{2.40-a}$$

elde edilir. (2.30) ve (2.40-a) değerleri (2.29) da yerlerine yazılırsa

$$-2q_0^2 \int_0^4 h(\xi) \cos q_0 \xi d\xi = -\frac{q_0}{2} \int_0^4 h(\xi) [4\lambda g_{\xi\xi} + 4g^3 + 3gT] d\xi$$

çıkar. $h(\xi)$ keyfi bir fonksiyon olduğundan

$$-2q_0^2 \int_0^4 \cos q_0 \xi d\xi = -\frac{q_0}{2} \int_0^4 [4\lambda g_{\xi\xi} + 4g^3 + 3gT] d\xi$$

yazılabilir. (2.29) eşitliğinden

$$\lambda g_{\xi\xi} + \frac{3}{4} gT + g^3 = q_0 \cos q_0 \xi \tag{2.40}$$

integro-diferansiyel denklemi elde edilir.

(2.40) denklemi, Duffing denklemi olarak bilinmektedir. Sağ yandaki harmonik zorlama sebebiyle de ideal zorlamalı Duffing denklemi adını alır.

Duffing denkleminin yaklaşık çözüm yöntemlerinden gidilerek (2.40) integro-diferansiyel denklemi için yaklaşık çözüm elde edilebilir. Yine (2.40) denklemine nümerik integrasyon da uygulanabilir. Ancak burada,

$$T = \int_0^4 g^2 d\eta$$

integral koşulunu sağlamak zorunda olduğundan, (2.40) ın Fourier çözümünü aramak yeğlendi.

3- FOURIER SERİSİ İLE ÇÖZÜM

Sıfırıncı basamaktan denklemin Fourier serisi çözümünün katsayılarını verecek denklemleri, birinci basamaktan çözümün sekülerliklerini önleyecek koşullar yardımı ile elde etmek üzere,

$$\eta_0 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns \quad (3.1)$$

alalım. Bu η_0 ı birinci basamaktan denklemde yerine koyup, η_1 çözümünü bulmaya çalışalım. (3.1) den;

$$\eta_0^3 = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns \right)^3$$

dir. Bu ifade açılırsa,

$$\begin{aligned} \eta_0^3 = & -\frac{1}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos 3nq_0 y \cos 3ns \\ & -\frac{3}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos 3nq_0 y \cos ns \\ & -\frac{3}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos nq_0 y \cos 3ns \\ & -\frac{9}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos nq_0 y \cos ns \\ & +\frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i+j)q_0 y \cos(2i+j)s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i+j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i-j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i-j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i+j)q_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i-j)q_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cdot \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cdot \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cdot \cos(i-j+k)s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i+j-k)s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i-j-k)s
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

bulunur. Burada

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ ise} \\ 1, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

diğer taraftan (3.1) gereği,

$$\eta_{os} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n \cdot A_n \cos nq_0 y \sin ns \quad (3.3)$$

$$\eta_{oss} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n^2 A_n \cos nq_0 y \cos ns \quad (3.4)$$

dir. Birinci basamaktan denklemde (3.2) ve (3.4) yerlerine yazılır ve η_1 in çözümü, iki taraflı denklem çözümü gibi düşünülürse,

$$\eta_1 = \eta_{1H} + \eta_{1P} \quad (3.5)$$

olacaktır. Burada η_{1H} , η_1 in homogen çözümü, η_{1P} de η_1 in özel çözümüdür. Birinci basamaktan denklemin homogen çözümü,

$$\eta_{1H} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns \quad (3.6)$$

dir. Özel çözümü ise ikinci tarafı meydana getiren toplamın terimlerine göre bulunur. Denklemin ikinci tarafına bakıldığında, ikinci taraftaki terimlerin $\cos nq_0 y \cdot \cos ms$ li terimler olduğu görülür. Bu terimler için özel çözümler aranırken,

$$n = m \text{ ise } \eta_{1P_i} = y \cdot [C_n \sin nq_0 y + D_n \cos nq_0 y] \cos ns \quad (3.7)$$

$$n \neq m \text{ ise } \eta_{1P_j} = [C_n \sin nq_0 y + D_n \cos nq_0 y] \cos ns \quad (3.8)$$

şeklinde özel çözümler aramak gerekir. (3.7), (3.8) şeklindeki özel çözümleri sağlayan C_n , D_n keyfî sabitleri tesbit edilerek yerlerine yazılırsa, ikinci tarafı meydana getiren terimlerden elde edilmesi gereken özel çözümler bulunur. Bu durumda, birinci basamaktan denklemin özel çözümü;

$$\eta_{1P} = \eta_{1P_i} + \eta_{1P_j} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.6) ve (3.9), (3.5) te yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns \\ &\quad \text{tek} \\ &- y \cdot \frac{\lambda q_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin nq_0 y \cos ns \\ &\quad \text{tek} \\ &- y \frac{1}{48q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n} \sin 3nq_0 y \cos 3ns \\ &\quad \text{tek} \\ &+ \frac{3}{64q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n^2} \cos 3nq_0 y \cos ns \\ &\quad \text{tek} \\ &- \frac{3}{64q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n^2} \cos nq_0 y \cos 3ns \\ &\quad \text{tek} \\ &- y \frac{9}{16q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n} \sin nq_0 y \cos ns \\ &\quad \text{tek} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + y \frac{3}{32q_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{2i+j} \sin(2i+j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & - \frac{3}{128q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i \cdot j} \cos(2i+j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{128q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i \cdot j} \cos(2i-j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{32q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{2i-j} \sin(2i-j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & - \frac{3}{32q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i-j)} \cos(2i+j)q_0 y \cos js \\
 & - \frac{3}{32q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i-j)} \cos(2i-j)q_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{16q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^3}{i} \sin iq_0 y \cos is \\
 & + \frac{3}{32q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i+j)} \cos jq_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{32q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i-j)} \cos jq_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{16q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^3}{i} \sin iq_0 y \cos is \\
 & + \frac{3}{8q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{j} \sin jq_0 y \cos js
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{32q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j+k} \sin(i+j+k) q_0 y \cos(i+j+k) s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i+j)} \cos(i+j+k) q_0 y \cos(i+j-k) s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i+k)} \cos(i+j+k) q_0 y \cos(i-j+k) s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j+k)} \cos(i+j+k) q_0 y \cos(i-j-k) s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i+j)} \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i+j+k) s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j-k} \sin(i+j-k) q_0 y \cos(i+j-k) s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j-k)} \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i-j+k) s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i-k)} \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i-j-k) s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i+k)} \cos(i-j+k) q_0 y \cos(i+j+k) s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j-k)} \cos(i-j+k) q_0 y \cos(i+j-k) s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j+k} \sin(i-j+k) q_0 y \cos(i-j+k) s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i-j)} \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j+k)} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i-k)} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i-j)} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \cdot y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j-k} \sin(i-j-k)q_0 y \cos(i-j-k)s
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

dir. Bu çözüme,

$$\eta_{1y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \eta_1 \Big|_{y=1} = \cos s
 \tag{3.11}$$

sınır şartları uygulanırsa, birinci sınır şartı kendiliğinden sağlanır. İkinci sınır şartını da uygulayıp, özdeşlikten yararlanırsak, her biri üçüncü dereceden lineer olmayan sonsuz tane denklemden oluşan, cebirsel bir sistem elde ederiz. Bu sonsuz sistemden, katsayıların sadece baştan üçünün sıfırdan farklı olduğunu varsayarak elde edilen sonlu sistem;

$$-\lambda \frac{q_0}{2} A_1 + \frac{9}{32q_0} A_1^3 + \frac{3}{32q_0} A_1^2 A_3 + \frac{3}{8q_0} A_3^2 A_1 + \frac{3}{32q_0} A_3^2 A_5 +$$

$$+ \frac{3}{8q_0} A_5^2 A_1 + \frac{3}{16q_0} A_1 A_3 A_5 = 1$$

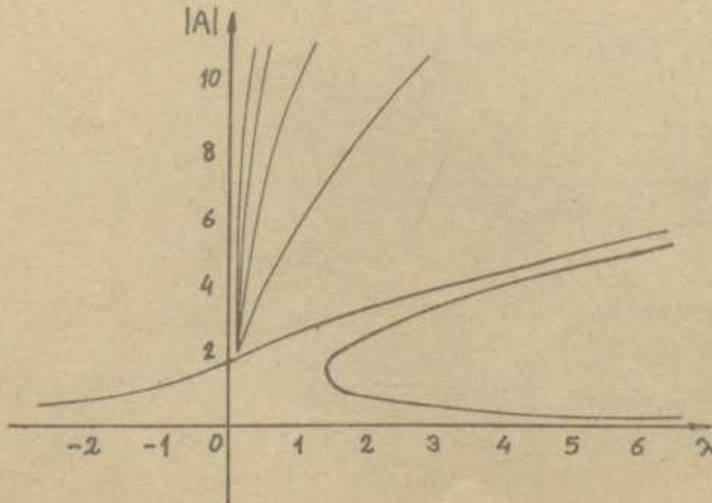
$$\frac{3\lambda q_0}{2} A_3 - \frac{1}{96q_0} A_1^3 - \frac{3}{32q_0} A_3^3 - \frac{1}{8q_0} A_1^2 A_3 - \frac{1}{32q_0} A_1^2 A_5 -$$

$$- \frac{1}{8q_0} A_5^2 A_3 - \frac{1}{16q_0} A_1 A_3 A_5 = 0$$

$$- \frac{5\lambda q_0}{2} A_5 + \frac{9}{160q_0} A_5^3 + \frac{3}{160q_0} A_1^2 A_3 + \frac{3}{40q_0} A_1^2 A_5 +$$

$$+ \frac{3}{160q_0} A_3^2 A_1 + \frac{3}{40q_0} A_3^2 A_5 = 0 \quad (3.12)$$

olur. Bu sistemin nümerik yollarla çözümünden, rezonans bölgesi genlikleri hakkında bilgi veren genlik-frekans grafikleri Şekil-2 de çizilmiştir.



Şekil - 2

4- g ZORLAMALARI ETKİSİNDE HAREKET

(2.40) daki integro-diferansiyel denkleminde zorlama terimini, yerdeğiştirme ile orantılı, yani γg biçiminde alırsak, (2.40) denklemi

$$\lambda g_{\xi\xi} + \frac{3}{4} Tg + g^3 = \gamma g \quad (4.1)$$

ideal olmayan zorlamalı Duffing denklemi haline gelir. Buradan,

$$\lambda g_{\xi\xi} + \frac{3}{4} Tg + g^3 - \gamma g = 0,$$

$$\lambda g_{\xi\xi} + \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)g + g^3 = 0$$

olur. Her iki tarafı g_{ξ} ile çarpalım,

$$\lambda g_{\xi\xi} g_{\xi} + \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)g g_{\xi} + g^3 g_{\xi} = 0$$

bulunur. Şimdi de her iki tarafın ξ ye göre integralini alalım.

$$\frac{\lambda}{2} (g_{\xi})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) g^2 + \frac{1}{4} g^4 = c$$

elde edilir. Buradan da,

$$\frac{dg}{d\xi} = \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) g^2 - \frac{1}{2\lambda} g^4 + c}$$

bulunur. $C = 1$ alınırca,

$$d\xi = \frac{dg}{\sqrt{-\frac{1}{2\lambda} g^4 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) g^2 + 1}} \quad (4.2)$$

elde edilir.

Şimdi kök içini çarpanlarına ayırmak için $g^2 = a$ diyelim. Buna göre,

$$\begin{aligned} G(g) &= -\frac{1}{2\lambda} g^4 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) g^2 \\ &= -\frac{1}{2\lambda} a^2 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) a + 1 \end{aligned} \quad (4.2-a)$$

olur. (4.2.a) nın kökleri

$$\begin{aligned} a_1 &= -\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda} \\ a_2 &= -\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda} \end{aligned}$$

olduğundan (4.2.a) ifadesi,

$$\begin{aligned} G(g) &= \left[g^2 - \left(-\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}\right)\right] \times \\ &\times \left[g^2 - \left(-\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

şeklinde çarpanlara ayrılır. Buradan da

$$\begin{aligned} G(g) &= \left[\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}\right] \times \\ &\times \left[-\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}\right] \times \\ &\times \left[1 - \frac{g^2}{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}}\right] \times \\ &\times \left[1 - \frac{g^2}{-\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}}\right] \end{aligned} \quad (4.2-b)$$

elde edilir.

$$z = \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}}}$$

diyelim.

$$\begin{aligned} g &= z \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}} \\ dg &= \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}} dz \end{aligned} \quad (4.3)$$

bulunur.

(4.2-b) ve (4.3), (4.2) de yerine yazılır, her iki tarafın integrali alınır,

$$\xi = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}} \int_0^g \frac{dz}{\left(1-z^2\right) \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}}{-\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}} z^2\right)} \quad (4.4)$$

elde edilir.

$$A = \frac{2\lambda}{\sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}}} \quad (4.5)$$

$$k = \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 - \left(\frac{3}{4} T - \gamma\right) \sqrt{\left(\frac{3}{4} T - \gamma\right)^2 + 2\lambda}}{\lambda}} \quad (4.6)$$

diyelim ve

$$\frac{3}{4} T - \gamma = \delta \quad (4.7)$$

alalım. (4.7) yi, (4.5) ve (4.6) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\delta - \sqrt{\delta^2 + 2\lambda}}} \\ k &= \sqrt{1 + \frac{\delta^2 - \delta \sqrt{\delta^2 + 2\lambda}}{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. Buna göre (4.4) ifadesi,

$$A.\xi = \int_0^{\xi} \frac{dz}{0[(1-z^2)(1-k^2z^2)]^{1/2}} \quad (4.9)$$

şekline dönüşür ki, bu bir eliptik integraldir. Bilindiği gibi,

$$u(y,k) \equiv u = \int_0^y \frac{dt}{0[(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{1/2}} \quad (4.10)$$

eşitliği ile tanımlanan, y fonksiyonuna Jacobi sn u eliptik fonksiyonu denir ve

$$y = \text{sn}(u,k)$$

ile de gösterilir. Sinüs eliptik fonksiyonu adını alır. Burada, k reeldir. Eğer k sanal ise,

$$y = \text{sn}(u,ik) = k'_1 \text{sd}(u \sqrt{1+k^2}, k_1) \quad (4.11)$$

dönüşümü kullanılır. Yine burada,

$$k_1 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k'_1 = \sqrt{1-k^2} \quad (4.12)$$

dir. (4.7) de, y yerine g , u yerine de $A\xi$ geldiğine göre,

$$g = \text{sn}(A\xi, k) \quad (4.13)$$

olmalıdır. Ancak δ ve λ nin çeşitli değerleri için gerçel çözümler arandığında, A nın Şekil-3 deki yalnız taramış bölgelerde reel olduğu ve reel çözümlerin, yalnız taramış bölgede bulunacağı görüldü. Yine bu taralı bölgede k sanal olduğundan, (4.11) dolayısıyla

$$g = k'_1 \text{sd}(A \sqrt{1+k^2} \xi, k_1) \quad (4.14)$$

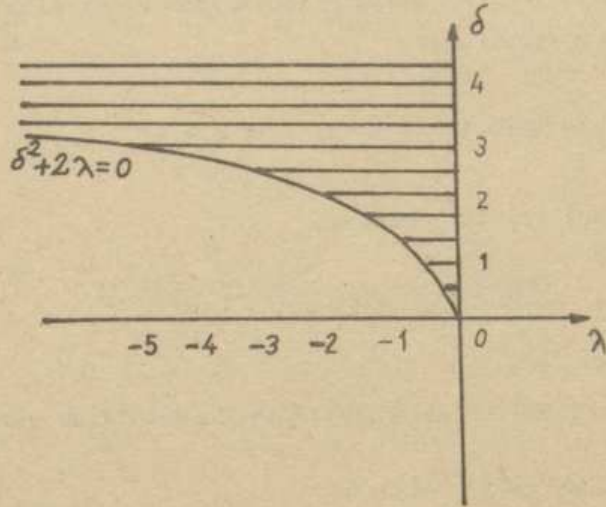
bulunur. Bu fonksiyonun ξ cinsinden periyodu,

$$T = \frac{4K}{A \sqrt{1 + k^2}} \quad (4.15)$$

dir. g fonksiyonunun periyodunun 4 olduğu gözönüne alınır, problemimize çözüm sağlayabilecek λ , δ değerlerinin, bu taralı bölgenin

$$\frac{4}{n} = \frac{4K}{A \sqrt{1 + k^2}} \quad (4.16)$$

koşulunu sağlayan bir alt bölgesinde bulunacakları görülür.



Şekil - 3

Belli bir λ frekansında çeşitli zorlama büyüklükleri için sistemin $g(\xi)$ tepkisinin profilini elde etmek için sn u, dn u fonksiyonlarının,

$$|U| < K', \quad K' = K(k') \quad (4.17)$$

bölgesinde geçerli

$$\operatorname{sn} u = u - (1+k^2) \frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{u^5}{5!} - (1+135k^2+135k^4+k^6) \frac{u^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + (4+k^2)k^2 \frac{u^4}{4!} - (16+44k^2+k^4)k^2 \frac{u^6}{6!} + \dots \quad (4.18)$$

$$\operatorname{sd} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

seri açılımlarını kullanabiliriz. Ancak, profili elde edilen $g(\xi)$ fonksiyonunun, bizim problemimizin çözümü olması için

$$\int_0^4 g^2 d\xi = T = \frac{4}{3} (\delta + \gamma) \quad (4.19)$$

koşulunu sağlaması gerekir. Belli bir λ frekansında, profilin elde edilebilmesi için

$$\delta = \frac{3}{4} T - \gamma \quad (4.20)$$

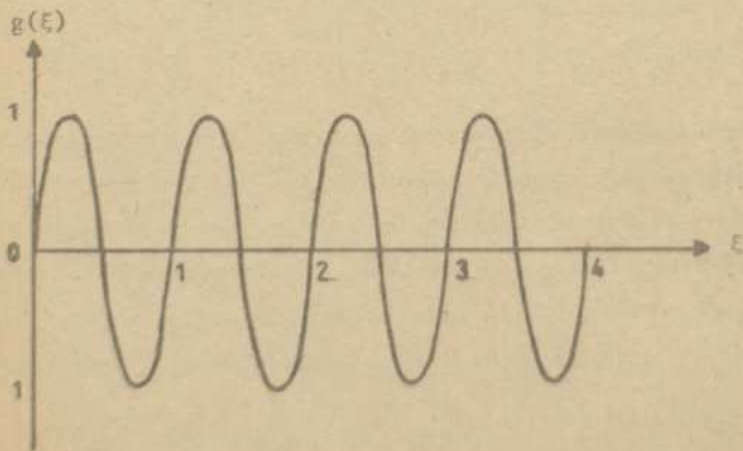
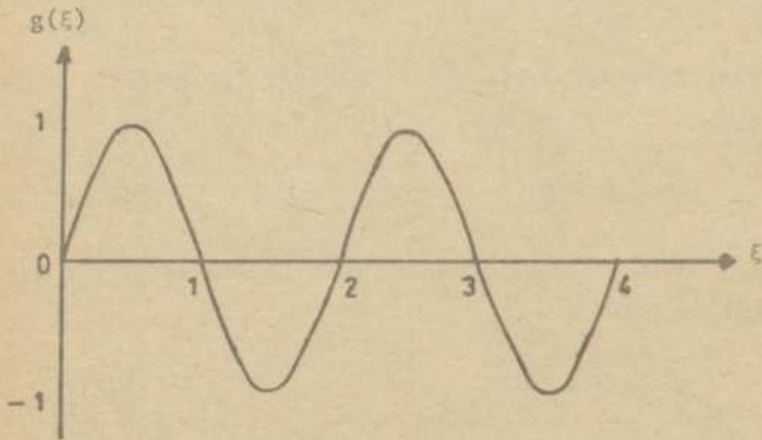
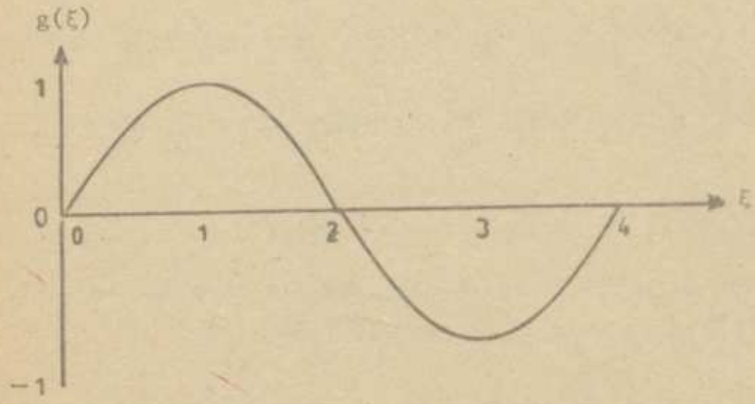
parametresine, (4.16) koşulunu sağlayan alt bölgeden belli bir değer gerekir. Elde edilen profilden

$$\int_0^4 g^2 d\xi = T \quad (4.21)$$

hesaplanır.

$$\gamma = \frac{3}{4} T - \delta \quad (4.22)$$

olduğu gözönüne alınırsa, elde edilen profilin, hangi γ için integral koşulunu sağlayacağı ortaya çıkar. Böylece bulunan profil belli λ ve hesaplanan γ zorlaması için problemimizin, integral şartını da sağlayan çözümü olur. Şekil-4 de bu şekilde elde edilen profiller görülmektedir.



Şekil - 4

5- SONUÇ

Tel üzerinde lineer olmayan dalga yayılması probleminin, esas itibariyle Collins'e ait olan asimptotik bir yöntemle ele alınışı, ilk defa bu çalışmamızda düşünülmüştür. Sıfırıncı basamaktan çözümün, karakteristik koordinatlar cinsinden ideal zorlamalı bir Duffing denklemini sağlaması ilginç bir sonuçtur. Duffing denkleminin Fourier serileri ile çözümleri genel olarak sonsuz sayıda mod bulundurdıkları halde, bizim problemimizde bir de ek integral şartı bulunması sebebiyle, çözümlerimizde, her frekansta, $g_1 = A_1 \cos q_0$, $g_3 = A_3 \cos q_0$, $g_5 = A_5 \cos q_0, \dots$ gibi hakim modlar bulunmakta, bir çözümde hakim modun dışındaki modlar integral koşulu sebebiyle erimektedir. Sistemin $\cos q_0 \xi$ zorlamasına karşı, bu zorlamanın frekansında ve onun harmoniklerinde tepki vermesi, aslında akustikte karşılığı olan bir olaydır. Öte yandan Şekil-2'deki genlik-frekans grafiğine baktığımızda, lineer problemde karşılaşılandan farklı iki özellik gözlemleriz:

(i) Lineer problemde zorlama frekansının her değerine karşılık sistemin tepkisi tek türlü olduğu halde, lineer olmayan analiz, bir zorlama frekansına karşılık, birden fazla genlikte tepki vermektedir. Ve bu durum, son yıllarda yapılan laboratuvar deneylerine uygun düşmektedir.

(ii) Lineer problemde rezonans noktasında, tabiiatta görülmeyen sonsuz genlikler çıkmaktadır. Lineer olmayan analizde ise lineer problemin rezonans frekanslarından birine karşılık gelen $\lambda = 0$ civarında genliklerin sonlu kaldığı görülmekte ve böylece fizik olaya daha iyi bir yaklaşım sağlanmış olmaktadır.

İdeal olmayan zorlama halinde de γ zorlama şiddetinin çeşitli değerleri için sonlu genlikli rezonans tepkileri elde edilebilmesi, lineer olmayan analizin, fizik olayı daha iyi açıkladığının kanıtlarındandır.

6. EK - FOURIER ÇÖZÜMÜ

(2.2) denklemine pertürbasyon uygulandığında, problemin kararlı hali için elde edilen lineer denklem sistemi;

$$\eta_{oyy} - q_o^2 \eta_{oss} = 0 \quad (6.1)$$

sıfıncı basamaktan,

$$\eta_{lyy} - q_o^2 \eta_{lss} = \lambda q_o^2 \eta_{oss} + \eta_o^3$$

birinci basamaktan,

.....
.....
.....

idi. Sistemden görüldüğü gibi, sıfıncı basamaktan denklem, homogen bir denklem olup, bu denklemin çözümü,

$$\eta_o = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \quad (6.2)$$

şeklindedir. Bu η_o çözümünü birinci basamaktan denklemin sağ yanındaki yerine koyup, η_1 i çözelim. Bunun için önce η_o^3 ü hesaplayalım. (6.2) den dolayı;

$$\eta_o^3 = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \right)^3$$

dir. Binom formülünün açılımından yararlanılarak, bu ifade açılırsa,

$$\begin{aligned}
 \eta_o^3 = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos^3 nq_o y \cos^3 ns \\
 & + (3A_1^2 \cos^2 q_o y \cos^2 s \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek} \\ n \neq 1}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \\
 & + 3A_3^2 \cos^2 3q_o y \cos^2 3s \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \\
 & + 3A_5^2 \cos^2 5q_o y \cos^2 5s \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 5 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns + \dots \\
 & + 3A_p^2 \cos^2 pq_o y \cos^2 ps \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns + \dots \\
 & + 6 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i,j,k \text{ tek}}}^{\infty} (1-\delta_{ij})(1-\delta_{ik})(1-\delta_{jk}) \cos iq_o y \cos is \cos jq_o y \cos js \cos kq_o y \cos ks
 \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (6.3)$$

dir.

$$\epsilon_{ij} = (1-\delta_{ij}) = \begin{cases} 0, & i = j \text{ ise} \\ 1, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (6.4)$$

dönüşümü yapılır, η_o^3 ü düzenleme işlemine devam edilirse;

$$\begin{aligned} \eta_o^3 = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos^3 nq_o y \cos^3 ns \\ & + (3A_1^3 \cos^3 q_o y \cos^3 s + 3A_1^2 \cos^2 q_o y \cos^2 s \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \\ & - 3A_1^3 \cos^3 q_o y \cos^3 s + 3A_3^3 \cos^3 3q_o y \cos^3 3s \\ & + 3A_3^2 \cos^2 3q_o y \cos^2 3s \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns - 3A_3^3 \cos^3 3q_o y \cos^3 3s \\ & + 3A_5^3 \cos^3 5q_o y \cos^3 5s + 3A_5^2 \cos^2 5q_o y \cos^2 5s \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 5 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \\ & - 3A_5^3 \cos^3 5q_o y \cos^3 5s + \dots \\ & + 3A_p^3 \cos^3 pq_o y \cos^3 ps + 3A_p^2 \cos^2 pq_o y \cos^2 ps \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns \\ & - 3A_p^3 \cos^3 pq_o y \cos^3 ps + \dots) \\ & + 6 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i,j,k \text{ tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos iq_o y \cos is \cos jq_o y \cos js \cos kq_o y \cos ks \end{aligned}$$

olur. Burada p bir tek doğal sayıdır.

$$\begin{aligned} \eta_o^3 = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos^3 nq_o y \cos^3 ns \\ & + (3A_1^2 \cos^2 q_o y \cos^2 s \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_o y \cos ns - 3A_1^3 \cos^3 q_o y \cos^3 s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 3A_3^2 \cos^2 3q_0 y \cos^2 3s \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns - 3A_3^3 \cos^3 3q_0 y \cos^3 3s \\
 & + 3A_5^2 \cos^2 5q_0 y \cos^2 5s \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns - 3A_5^3 \cos^3 5q_0 y \cos^3 5s \\
 & + \dots\dots\dots \\
 & + 3A_p^2 \cos^2 pq_0 y \cos^2 ps \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns - 3A_p^3 \cos^3 pq_0 y \cos^3 ps \\
 & + \dots\dots\dots) \\
 & + 6 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i,j,k \text{ tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos iq_0 y \cos is \cos jq_0 y \cos js \cos kq_0 y \cos ks
 \end{aligned}$$

bulunur. (-) işaretli terimlerin toplamı,

$$- 3 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos^3 nq_0 y \cos^3 ns$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
 \eta_0^3 = & - 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos^3 nq_0 y \cos^3 ns \\
 & + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \text{ tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos^2 iq_0 y \cos^2 is \cos jq_0 y \cos js \\
 & + 6 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i,j,k \text{ tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos iq_0 y \cos is \cos jq_0 y \cos js \cos kq_0 y \cos ks
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_o^3 = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} A_n^3 \left| \frac{1}{4} \cos 3nq_o y + \frac{3}{4} \cos nq_o y \right| \left| \frac{1}{4} \cos 3ns + \frac{3}{4} \cos ns \right| \\ & + 3 \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{i,j \text{ tek}} A_i^2 A_j \left| \frac{1}{4} (\cos 2iq_o y + 1) \right| \left| \frac{1}{4} (\cos 2is + 1) \right| \cos jq_o y \cos js \\ & + 6 \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \sum_{i,j,k \text{ tek}} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \left\{ \frac{1}{4} |\cos(i+j)q_o y + \cos(i-j)q_o y| \times \right. \\ & \left. \times \cos kq_o y \right\} \left\{ \frac{1}{4} |\cos(i+j)s + \cos(i-j)s| \cos ks \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_o^3 = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} A_n^3 \left(\frac{1}{16} \cos 3nq_o y \cos 3ns + \frac{3}{16} \cos nq_o y \cos ns \right. \\ & + \frac{3}{16} \cos nq_o y \cos 3ns + \frac{9}{16} \cos nq_o y \cos ns \\ & + 3 \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{i,j \text{ tek}} A_i^2 A_j \left\{ \frac{1}{4} (\cos 2iq_o y \cos 2is \cos jq_o y \cos js \right. \\ & + \cos 2iq_o y \cos jq_o y \cos js + \cos 2is \cos jq_o y \cos js \\ & + \cos jq_o y \cos js) + 6 \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \sum_{i,j,k \text{ tek}} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cdot \frac{1}{4} \cdot \\ & \left. (\cos(i+j)q_o y \cos kq_o y + \cos(i-j)q_o y \cos kq_o y \right. \\ & \left. + \cos(i+j)s \cos ks + \cos(i-j)s \cos ks) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_o^3 = & -\frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} A_n^3 \cos 3nq_o y \cos 3ns - \frac{3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} A_n^3 \cos 3nq_o y \cos ns \\ & - \frac{3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} A_n^3 \cos nq_o y \cos 3ns - \frac{9}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} A_n^3 \cos nq_o y \cos ns \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \text{ tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \left\{ \frac{1}{2} [\cos(2i+j)q_0 y + \cos(2i-j)q_0 y] \right. \\
 & \quad \cdot \frac{1}{2} [\cos(2i+j)s + \cos(2i-j)s] \} \\
 & + \frac{3}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \text{ tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \frac{1}{2} [\cos(2i+j)q_0 y + \cos(2i-j)q_0 y] \cos js \\
 & + \frac{3}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \text{ tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \frac{1}{2} [\cos(2i+j)s + \cos(2i-j)s] \\
 & + \frac{3}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \text{ tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i,j,k \text{ tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \left\{ \frac{1}{2} [\cos(i+j+k)q_0 y \cos(i+j-k)q_0 y] \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} [\cos(i-j+k)q_0 y + \cos(i-j-k)q_0 y] \} \left\{ \frac{1}{2} [\cos(i+j+k)s \right. \\
 & \quad + \cos(i+j-k)s] + \frac{1}{2} [\cos(i-j+k)s + \cos(i-j-k)s] \} \\
 \eta_0^3 = & - \frac{1}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos 3nq_0 y \cos 3ns - \frac{3}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos 3nq_0 y \cos ns \\
 & - \frac{3}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos nq_0 y \cos 3ns - \frac{9}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos nq_0 y \cos ns \\
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \text{ tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i+j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i+j)q_0 y \cos(2i-j)s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i-j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{16} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i-j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i+j)q_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos(2i-j)q_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_i^2 A_j \cos jq_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i-j-k)s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i+j+k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i+j-k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i-j+k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i+j-k) q_0 y \cos(i-j-k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k) q_0 y \cos(i+j+k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k) q_0 y \cos(i+j-k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k) q_0 y \cos(i-j+k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j+k) q_0 y \cos(i-j-k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k) q_0 y \cos(i+j+k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k) q_0 y \cos(i+j-k) s \\
 & + \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k) q_0 y \cos(i-j+k) s
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{48} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} A_i A_j A_k \cos(i-j-k) q_0 y \cos(i-j-k) s \quad (6.5)$$

bulunur. Diğer taraftan (6.2) den dolayı;

$$\eta_{os} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n A_n \cos n q_0 y \sin n s \quad (6.6)$$

$$\eta_{oss} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n^2 A_n \cos n q_0 y \cos n s \quad (6.7)$$

dir. (6.5) ve (6.7), (6.1) de verilen birinci basamaktan denklemde yerlerine yazılırsa, ikinci tarafılı, sabit katsayılı bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem;

$$\eta_{lyy} - q_0^2 \eta_{lss} = - \lambda q_0^2 \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n^2 A_n \cos n q_0 y \cos n s + \eta_0^3 \quad (6.8)$$

dir. (6.8) in çözümü;

$$\eta_1 = \eta_{1H} + \eta_{1P} \quad (6.9)$$

dir. Burada η_{1H} homogen çözümü, η_{1P} de özel çözümü göstermektedir.

$$\eta_{1H} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \bar{A}_n \cos n q_0 y \cos n s \quad (6.10)$$

dir. Özel çözüm ise ikinci tarafı meydana getiren toplamın terimlerine bağlı olarak bulunur. (6.8) in ikinci tarafına bakılınca bu terimlerin $\cos a q_0 y \cos b s$ biçiminde olduğu görülür. Bunun için, eğer: $a=b$ ise y ye bağlı özel çözüm için

$$\eta_{1P} = y [C_n \sin a q_o y + D_n \cos a q_o y] \cos bs \quad (6.11)$$

şeklinde, eğer: $a \neq b$ ise y ye bağlı özel çözüm için

$$\eta_{1P} = [C_n \sin a q_o y + D_n \cos a q_o y] \cos bs$$

biçiminde bir ifade seçilir. Denklemi sağlayan C_n , D_n katsayıları hesaplanır, yerlerine yazılarak her terim için özel çözümler bulunur. Her terim için bulunan özel çözümlerin toplamı η_{1P} ile gösterilen özel çözümü verir. Buna göre (6.8) in ikinci tarafının ilk terimi

$$- \lambda q_o^2 \sum_{n=1, \text{tek}}^{\infty} n^2 A_n \cos n q_o y \cos ns$$

olduğundan, n in her değeri için $a=b$ dir. Öyle ise ilk terim için özel çözüm olarak

$$\eta_{1P} = \sum_{n=1, \text{tek}}^{\infty} y [C_n \sin n q_o y + D_n \cos n q_o y] \cos ns \quad (6.12)$$

alınmalıdır. (6.12) den dolayı

$$\begin{aligned} \eta_{1P_1 y} &= \sum_{n=1, \text{tek}}^{\infty} [C_n \sin n q_o y + D_n \cos n q_o y] \cos ns \\ &+ \sum_{n=1, \text{tek}}^{\infty} y \cdot n q_o [C_n \cos n q_o y - D_n \sin n q_o y] \cos ns \\ \eta_{1P_1 yy} &= \sum_{n=1, \text{tek}}^{\infty} 2 n q_o [C_n \cos n q_o y - D_n \sin n q_o y] \cos ns \end{aligned}$$

$$-\sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} y \cdot n^2 q_0^2 [C_n \sin n q_0 y + D_n \cos n q_0 y] \cos ns$$

$$\eta_{1P_1s} = -\sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} y n [C_n \sin n q_0 y + D_n \cos n q_0 y] \sin ns$$

$$\eta_{1P_1ss} = -\sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} y n^2 [C_n \sin n q_0 y + D_n \cos n q_0 y] \cos ns$$

bulunur. Bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} 2n q_0 [C_n \cos n q_0 y - D_n \sin n q_0 y] \cos ns$$

$$-\sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} y n^2 q_0^2 [C_n \sin n q_0 y + D_n \cos n q_0 y] \cos ns$$

$$+\sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} y n^2 q_0^2 [C_n \sin n q_0 y + D_n \cos n q_0 y] \cos ns$$

$$\equiv -\lambda q_0^2 \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n^2 A_n \cos n q_0 y \cos ns$$

olur. Özdeşlik gözönüne alınırca,

$$D_n = 0, \quad C_n = \frac{-\lambda q_0 n A_n}{2}$$

bulunur. Böylece (6.8) in ikinci tarafının ilk terimi için

$$\eta_{1P_1} = -\frac{\lambda q_0 y}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n A_n \sin n q_0 y \cos ns$$

biçiminde bir özel çözüm elde edilir. $a=b$ şartına uyan diğer terimler için de özel çözüm arandığında daima $D_n = 0$ çıkmakta, C_n katsayısını bulmak için de, hangi terim için özel çözüm aranıyorsa, o terimin katsayısını $2q_0 a$ ya bölmek yeterlidir.

Diğer taraftan $a \neq b$ şartına uyan, (6.8) in ikinci tarafının üçüncü terimi ele alınıp özel çözüm aranırsa, üçüncü terim

$$-\frac{3}{8} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} A_n^3 \cos 3nq_0 y \cos ns$$

ve $\forall n$ tek sayısı için $3n \neq n$ olacağından, $a \neq b$ dir. Buna göre

$$\eta_{1P_3} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} [C_n \sin 3nq_0 y + D_n \cos 3nq_0 y] \cos ns \quad (6.13)$$

alınırsa,

$$\eta_{1P_3y} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} 3nq_0 [C_n \cos 3nq_0 y - D_n \sin 3nq_0 y] \cos ns$$

$$\eta_{1P_3yy} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} 9n^2 q_0^2 [C_n \sin 3nq_0 y + D_n \cos 3nq_0 y] \cos ns$$

$$\eta_{1P_3s} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n [C_n \sin 3nq_0 y + D_n \cos 3nq_0 y] \sin ns$$

$$\eta_{1P_3ss} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} n^2 [C_n \sin 3nq_0 y + D_n \cos 3nq_0 y] \cos ns$$

bulunur. Bu değerler de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} 9n^2 q_0^2 [C_n \sin 3nq_0 y + D_n \cos 3nq_0 y] \cos ns \\
 & \quad \text{tek} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_0^2 [C_n \sin 3nq_0 y + D_n \cos 3nq_0 y] \cos ns \\
 & \quad \text{tek} \\
 & \equiv - \frac{3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^3 \cos 3nq_0 y \cos ns. \\
 & \quad \text{tek}
 \end{aligned}$$

olur. Özdeşlikten yararlanarak

$$C_n = 0, \quad D_n = \frac{-\frac{3}{8} A_n^3}{[n^2 - (3n)^2] q_0^2}$$

bulunur. Bu değerler η_{1p_3} de yerlerine yazılırsa,

$$\eta_{1p_3} = - \frac{3}{64 q_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n^2} \cos 3nq_0 y \cos ns$$

tek

elde edilir. $a \neq b$ şartını taşıyan diğer terimlerde de özel çözümler aranır, görülür ki, alınan terime ait özel çözümün C_n katsayısı daima sıfır, D_n katsayısını bulmak için ise, seçilen terimin katsayısını $[b^2 - a^2] q_0^2$ ye bölmek yeterlidir.

Bütün bu bilgilerin ışığı altında η_1 in genel çözümüne gidilirse, (6.9) dan dolayı

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nq_0 y \cos ns \\
 & \quad \text{tek} \\
 & - y \frac{\lambda q_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin nq_0 y \cos ns \\
 & \quad \text{tek}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - y \frac{1}{48q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n} \sin 3nq_0 y \cos 3ns \\
 & + \frac{3}{64q_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n^2} \cos 3nq_0 y \cos ns \\
 & - \frac{3}{64q_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n^2} \cos nq_0 y \cos 3ns \\
 & - y \frac{9}{16q_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n} \sin nq_0 y \cos ns \\
 & + y \frac{3}{32q_0} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{2i+j} \sin(2i+j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & - \frac{3}{128q_0^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i \cdot j} \cos(2i+j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{128q_0^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i \cdot j} \cos(2i-j)q_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{32q_0} y \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{2i-j} \sin(2i-j)q_0 y \cos(2i-j)s \\
 & - \frac{3}{32q_0^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i-j)} \cos(2i+j)q_0 y \cos js \\
 & - \frac{3}{32q_0^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i-j)} \cos(2i-j)q_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{16q_0} y \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i^3}{i} \sin iq_0 y \cos is
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{32q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i+j)} \cos jq_0 y \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{32q_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{i(i-j)} \cos jq_0 y \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{16q_0} y \sum_{\substack{i=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^3}{i} \sin iq_0 y \cos is \\
 & + \frac{3}{8q_0} y \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{j} \sin jq_0 y \cos js \\
 & + \frac{3}{32q_0} y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j+k} \sin(i+j+k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i+j)} \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i+k)} \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(i+k)} \cos(i+j+k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i+j)} \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j-k} \sin(i+j-k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j-k)} \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i-j+k)s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i-k)} \cos(i+j-k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i+k)} \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j-k)} \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j+k} \sin(i-j+k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & - \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i-j)} \cos(i-j+k)q_0 y \cos(i-j-k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i(j+k)} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{j(i-k)} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{1}{64q_0^2} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{k(i-j)} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} y \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j-k} \cos(i-j-k)q_0 y \cos(i-j-k)s
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

elde edilir.

Şimdi bu çözüme sınır şartlarını uygulayarak Fourier açılımının ilk üç terimi için özel çözümü bulalım. Birinci basamaktan denklemin sınır şartları (2.15) de;

$$\eta_{1y}|_{y=0} = 0, \quad \eta_1|_{y=1} = \cos s \quad (6.15)$$

ile verilmişti. (6.15) ile verilen ilk sınır şartı

$$\eta_{1y}|_{y=0} = 0$$

η_1 e uygulandığında kendiğiliğinden sağlanmakta, ikinci şart

$$\eta_1|_{y=1} = \cos s$$

uygulandığında ise, $\cos a_0 y \cos bs$ biçimindeki terimler sıfır olmakta, $\sin a_0 y \cos bs$ biçimindeki terimler ise kalmaktadır. Buna göre ikinci sınır şartlarını (6.14) e uygularsak;

$$\begin{aligned} \cos s \equiv & -\frac{\lambda q_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos ns \\ & -\frac{1}{48q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n} (-1)^{\frac{3n-1}{2}} \cos 3ns \\ & -\frac{9}{16q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^3}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos ns \\ & +\frac{3}{32q_0} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{2i+j} (-1)^{\frac{2i+j-1}{2}} \cos(2i+j)s \\ & +\frac{3}{32q_0} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{2i-j} (-1)^{\frac{2i-j}{2}} \cos(2i-j)s \\ & +\frac{3}{16q_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i^3}{i} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cos is \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{16q_0} \sum_{\substack{i=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^3}{i} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cos is \\
 & + \frac{3}{8q_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \frac{A_i^2 A_j}{j} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \cos js \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j+k} (-1)^{\frac{i+j+k-1}{2}} \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j-k} (-1)^{\frac{i+j-k-1}{2}} \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j+k} (-1)^{\frac{i-j+k-1}{2}} \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^{\infty} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j-k} (-1)^{\frac{i-j-k-1}{2}} \cos(i-j-k)s
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

elde edilir. Fourier açılımının ilk üç terimini içeren özel çözümü bulmak için n, i, j, k indislerinin, 1, 3, 5 değerlerini almaları gerekir. Buna göre (6.16) ifadesi,

$$\begin{aligned}
 \cos s & \equiv - \frac{\lambda q_0}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^5 n A_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos ns \\
 & - \frac{1}{48q_0} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_n^3}{n} (-1)^{\frac{3n-1}{2}} \cos 3ns \\
 & - \frac{9}{16q_0} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_n^3}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos ns
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{32q_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_i^2 A_j}{2i+j} (-1)^{\frac{2i+j-1}{2}} \cos(2i+j)s \\
 & + \frac{3}{32q_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_i^2 A_j}{2i-j} (-1)^{\frac{2i-j-1}{2}} \cos(2i-j)s \\
 & + \frac{3}{16q_0} \sum_{\substack{i=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_i^3}{i} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cos is \\
 & + \frac{3}{16q_0} \sum_{\substack{i=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_i^3}{i} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cos is \\
 & + \frac{3}{8q_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{tek}}}^5 \frac{A_i^2 A_j}{j} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \cos js \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^5 \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j+k} (-1)^{\frac{i+j+k-1}{2}} \cos(i+j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^5 \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i+j-k} (-1)^{\frac{i+j-k-1}{2}} \cos(i+j-k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^5 \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j+k} (-1)^{\frac{i-j+k-1}{2}} \cos(i-j+k)s \\
 & + \frac{1}{32q_0} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{tek}}}^5 \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \epsilon_{jk} \frac{A_i A_j A_k}{i-j-k} (-1)^{\frac{i-j-k-1}{2}} \cos(i-j-k)s
 \end{aligned}$$

olur. Şimdi bu özdeşliğin sağ yanındaki toplamaları açık olarak yazalım. Buna göre,

$$\cos s \equiv -\frac{\lambda q_0}{2} A_1 \cos s + \frac{3\lambda q_0}{2} A_3 \cos 3s - \frac{5\lambda q_0}{2} A_5 \cos 5s$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{48q_0} A_1^3 \cos 3s - \frac{1}{48q_0} \frac{A_3^3}{3} \cos 9s + \frac{1}{48q_0} \frac{A_5^3}{5} \cos 15s \\
 & - \frac{9}{16q_0} A_1^3 \cos s + \frac{3}{16q_0} A_3^3 \cos 3s - \frac{9}{16q_0} \frac{A_5^3}{5} \cos 5s \\
 & - \frac{1}{32q_0} A_1^3 \cos 3s + \frac{3}{32q_0} \frac{A_1^2 A_3}{5} \cos 5s - \frac{3}{32q_0} \frac{A_1^2 A_5}{7} \cos 7s \\
 & - \frac{3}{32q_0} \frac{A_3^2 A_1}{7} \cos 7s + \frac{3}{32q_0} \frac{A_3^3}{9} \cos 9s - \frac{3}{32q_0} \frac{A_3^2 A_5}{11} \cos 11s \\
 & - \frac{3}{32q_0} \frac{A_5^2 A_1}{11} \cos 11s + \frac{3}{32q_0} \frac{A_5^2 A_3}{13} \cos 13s + \frac{3}{32q_0} \frac{A_5^3}{15} \cos 15s \\
 & + \frac{3}{32q_0} A_1^3 \cos s + \frac{3}{32q_0} A_1^2 A_3 \cos s - \frac{3}{32q_0} \frac{A_1^2 A_5}{3} \cos 3s \\
 & + \frac{3}{32q_0} \frac{A_3^2 A_1}{5} \cos 5s - \frac{3}{32q_0} \frac{A_3^3}{3} \cos 3s + \frac{3}{32q_0} A_3^2 A_5 \cos s \\
 & + \frac{3}{32q_0} \frac{A_5^2 A_1}{9} \cos 9s - \frac{3}{32q_0} \frac{A_5^2 A_3}{7} \cos 7s + \frac{3}{32q_0} \frac{A_5^3}{5} \cos 5s \\
 & + \frac{3}{16q_0} A_1^3 \cos s - \frac{3}{16q_0} \frac{A_3^3}{3} \cos 3s + \frac{3}{16q_0} \frac{A_5^3}{5} \cos 5s \\
 & + \frac{3}{16q_0} A_1^3 \cos s - \frac{3}{16q_0} \frac{A_3^3}{3} \cos 3s + \frac{3}{16q_0} \frac{A_5^3}{5} \cos 5s \\
 & + \frac{3}{8q_0} A_1^3 \cos s - \frac{3}{8q_0} \frac{A_1^2 A_3}{3} \cos 3s + \frac{3}{8q_0} \frac{A_1^2 A_5}{5} \cos 5s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{8q_0} A_3^2 A_1 \cos s - \frac{3}{8q_0} \frac{A_3^3}{3} \cos 3s + \frac{3}{8q_0} \frac{A_3^2 A_5}{5} \cos 5s \\
 & + \frac{3}{8q_0} A_5^2 A_1 \cos s - \frac{3}{8q_0} \frac{A_5^2 A_3}{3} \cos 3s + \frac{3}{8q_0} \frac{A_5^3}{5} \cos 5s \\
 & + 6 \frac{3}{16q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{9} \cos 9s \\
 & + \frac{1}{32q_0} A_1 A_3 A_5 \cos s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{3} \cos 3s + \frac{1}{32q_0} A_1 A_3 A_5 \cos s \\
 & - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{7} \cos 7s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{3} \cos 3s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{7} \cos 7s \\
 & - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{3} \cos 3s + \frac{1}{32q_0} A_1 A_3 A_5 \cos s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{7} \cos 7s \\
 & + \frac{1}{32q_0} A_1 A_3 A_5 \cos s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{7} \cos 7s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{3} \cos 3s \\
 & - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{7} \cos 7s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{7} \cos 7s - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{3} \cos 3s \\
 & - \frac{1}{32q_0} \frac{A_1 A_3 A_5}{3} \cos 3s + \frac{1}{32q_0} A_1 A_3 A_5 \cos s + \frac{1}{32q_0} A_1 A_3 A_5 \cos s
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu özdeşliğin sağ tarafı, cosns lere göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
 \cos s \equiv & \left(-\frac{\lambda q_0}{12} A_1 + \frac{9}{32q_0} A_1^3 + \frac{3}{32q_0} A_1^2 A_3 + \frac{3}{8q_0} A_3^2 A_1 + \frac{3}{32q_0} A_3^2 A_5 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{8q_0} A_5^2 A_1 + \frac{3}{16q_0} A_1 A_3 A_5 \right) \cos s + \left(-\frac{3\lambda q_0}{2} A_3 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{96} A_1^3 - \frac{3}{32q_0} A_3^3 - \frac{1}{8q_0} A_1^2 A_3 - \frac{1}{32q_0} A_1^2 A_5 - \frac{1}{8q_0} A_5^2 A_3 \\
 & - \frac{1}{16q_0} A_1 A_3 A_5 \cos 3s + \left(- \frac{5\lambda q_0}{2} A_5 + \frac{9}{160q_0} A_5^3 + \frac{3}{160q_0} A_1^2 A_3 \right. \\
 & + \frac{3}{40q_0} A_1^2 A_5 + \frac{3}{160q_0} A_3^2 A_1 + \frac{3}{40q_0} A_3^2 A_5 \left. \right) \cos 5s \\
 & + (\dots\dots\dots) \cos 7s + (\dots\dots\dots) \cos 9s + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

elde edilir. Özdeşlikten yararlanırsak A_1, A_3, A_5 e bağlı denklemler;

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda q_0}{2} A_1 + \frac{9}{32q_0} A_1^3 + \frac{3}{32q_0} A_1^2 A_3 + \frac{3}{8q_0} A_3^2 A_1 + \frac{3}{32q_0} A_3^2 A_5 \\
 & + \frac{3}{8q_0} A_5^2 A_1 + \frac{3}{16q_0} A_1 A_3 A_5 = 1 \\
 & - \frac{3\lambda q_0}{2} A_3 + \frac{1}{96q_0} A_1^3 + \frac{3}{32q_0} A_3^3 + \frac{1}{8q_0} A_1^2 A_3 + \frac{1}{32q_0} A_1^2 A_5 \\
 & + \frac{1}{8q_0} A_5^2 A_3 + \frac{1}{16q_0} A_1 A_3 A_5 = 0 \\
 & - \frac{5\lambda q_0}{2} A_5 + \frac{9}{160q_0} A_5^3 + \frac{3}{160q_0} A_1^2 A_3 + \frac{3}{40q_0} A_1^2 A_5 \\
 & + \frac{3}{160q_0} A_3^2 A_1 + \frac{3}{40q_0} A_3^2 A_5 = 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1]. W.D.Collins, Forced Oscillations of Systems Covered by One Dimensional Nonlinear Wave Equations, Quart Journ. Mech. and Applied Math., 26, 129 (1971).
- [2]. J.B.Keller and L.Ting, Periodic Vibrations of Systems Governed by Nonlinear Partial Differential Equations. Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966).
- [3]. M.H.Millman, J.B.Keller, Nonlinear Boundary Value Problems, J.Math.Phys, 10, p. 342 (1969).
- [4]. M.J.Ablowitz, A.Aşkar, A.S.Çakmak, H.Engin, Resonant Nonlinear Vibrations in Continuous Systems I : Non-Damping Case, Int.J. Nonlinear Mechanics, Vol.14, pp. 223-233 (1979).
- [5]. H.Engin, M.J.Ablowitz, A.Aşkar, A.S.Çakmak, Resonant Nonlinear Vibrations in Continuous Systems II : Damping and Transient Behaviour, Int.J.Nonlinear Mechanics, Vol.14, pp.235-246 (1979).
- [6]. M.Can, Resonant Waves in Finite Domains : Application to Elasticity and Hydrodynamics, Doctora Tesis, Boğaziçi Üniversitesi, 1981.
- [7]. Ali H, Neifeh D.T.Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, New York (1979).
- [8]. L.A.Pipes, Applied Mathematics for Engineers and Physicists.
- [9]. K.F.Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Ohio State University Press (1975) Mc Graw-Hill New York.
- [10]. W.Chester, Resonant Oscillations in Closed Tubes. J. Fluid Mech. 18, pp. 44-64 (1964).

- [11]. R.Thom, Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models, Reading: Benjamin, 1975.
- [12]. A. Woodcock, M.Davis, Catastrophe Theory, Avon Books, New York, 1980.
- [13]. A. Aşkar, A.S.Çakmak, Studies on Finite Amplitude Waves in Bounded Water Bodies, Advances in Water Resources, Vol. 1, No. 4, 1978.
- [14]. H.Buggisch, Nonlinear Waves, IUTAM (International Union of Theoretical and Applied Mechanics) 1980.
- [15]. J.C.J. Nihoul, Modelling of Marine Systems, Elviesier Publ. Amsterdam (1975).
- [16]. J.J.Connor, et. al., Mathematical Models of the Massachusett Bay, Part 1 and Part 2, TR 172, R.M. Parsons Laboratory, MIT (1973).
- [17]. R.Beckett, J.Hurt, Numerical Calculations and Algorithms, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- [18]. W.S.Dorn, D.D.McCracken, Numerical Methods with Fortran IV Case Studies, John Wiley, New York, 1972.
- [19]. ArtJeffrey, T.Taniuti, Non-Linear Wave Propagation With Applications to Physics and Magnetohydrodynamics, Academic Press, New York, 1966.
- [20]. S.Leibovich, A.R.Seebass, Editors; Nonlinear Waves, Cornell University Press, New York, 1977.
- [21]. J.J.Stoker, Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers Inc. N.Y. (1950).
- [22]. Mortel, M.P., Varley, E., Finite Amplitude Waves in Bounded Media: Nonlinear Free Vibrations of an Elastic Panel, Proc. Roy. Soc. London A 318 (1970) 169-196.
- [23]. Kruskal, M.D., Zabusky, N.J., Stroboscopic Perturbation Procedure for Treating a Class of Nonlinear Wave Equations, J.Math. Phys. 5 (1964) 231-244.

- [24]. J.Lighthill, Waves in Fluids, Cambridge University Press, 1978.
- [25]. H.M.Çekirge, E.Varley, Large Amplitude Waves in Bounded Media
I. Phil. Trans. R. Soc. London A 273, 261, 1973.
- [26]. J.J.Keller, Resonant Oscillations in Closed Tubes, The Solution
of Chester's Equation, J.Fluid Mech. 77, 279, 1976.
- [27]. M.P.Mortell, B.R.Seymour, Nonlinear Forced Oscillations in a
Closed Tube: Continuous Solutions of a Functional Equation,
Proc. Roy. Soc. London A 367, 253, 1979.
- [28]. N.Minorsky, Nonlinear Oscillations. Van Nostrand, Princeton,
N.J. 1962.
- [29]. M.D.Kruskal, The Korteweg-de Vries Equation and Related
Evaluation Equations, Lectures in Applied Mathematics Vol. 15,
(Edited by A.C.Newell) American Mathematical Society Providence,
R.I.
- [30]. A.Aşkar, Dispersion Relation and Wave Solution for Anharmonic
Lattices and Korteweg-de Vries Continua, Proc. Roy. Soc. Lond.
A334, 83, 1974.
- [31]. Ali Nayfeh, Perturbation Methods, Pure and Applied Mathematics,
Wiley Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts,
N.Y. 1973.

ÖZGEÇMİŞ

1946 yılında İzmir'de doğdum. Sırası ile Deniz Bostanlısı İlkokulu, Karşıyaka Lisesi ve Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü bitirdim. 1972 yılı Eylül ayında İzmit Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım. Bu arada Modern Matematik Programlarını tamamladım. 1978 Mart'ında Kocaeli D.M.M.Akademisi'ne Matematik Asistanı olarak atandım. O.D.T.Ü., T.B.T.A.K. ve K.T.Ü.'nin ortaklaşa düzenledikleri Yüksek Lisans Matematik Yaz Okullarına devam ettim. 1982 Eylül'ünde düzenlenen Uluslararası Nazım TERZİOĞLU Matematik Sempozyumu'na bir bildiri ile katıldım.

Hâlen Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.

Evli ve bir çocuk babasıyım.

Doktora tezime başladığım günden beri yakın destek ve yardımları için değerli tez yöneticim Sayın Doç.Dr.Talât TUNCER'e, çalışmalarım boyunca çalışmalarımda bilgileri ile yardımcı olup benimle yakından ilgilendiği için İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi Sayın Yard.Doç.Dr.Mehmet CAN'a, tezimin yazılmasını titizlikle tamamlayan İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Mekanik Kürsüsü Sekreteri Sayın Kadriye TATLIPINAR'a teşekkür ederim.

