

Y.T.Ü. Kocaeli Mühendislik Fakültesi

Yüzey Gravite Dalgaları için
Korteweg-de Vries Denklemini

Fatma Şenyücel

Doktora Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ KOCAELİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

**YÜZEY GRAVİTE DALGALARI İÇİN
KORTEWEG-de VRIES DENKLEMINİN
TANIUTI-WEI YÖNTEMİ İLE ÇIKARILMASI VE
KARAKTERİSTİKLERLE ÇÖZÜMÜ**

Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Doktor"
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdır.

Fatma SENYÜCEL

Tezin F.B. Enstitüsüne Verildiği Tarih
Tezin savunulduğu tarih

: 29 Mart 1983
: 21 Ekim 1983

Doktorayı Yöneten Öğr. Üyesi
Diğer Jüri Üyeleri

: Doç. Dr. Talât TUNCER
: Doç. Behiç ÇAĞAL
: Doç. Akın TAŞDİZEN

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ MATBAASI

1983

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

D.B. No. 42727

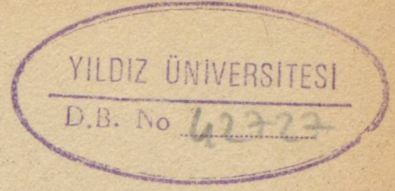
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

R 209

Kot : 55
Alındığı Yer : Fen Bil. Enst.
Tarih : 26/5/1987
Fatura :
Fiatı : 1000Tl.
Ayniyat No : 1/6
Kayıt No : 44818
UDC : 515.3 378.242
Ek :



Kcomp-



YÜZEY GRAVİTE DALGALARI İÇİN KORTEWEG-de VRIES
DENKLEMİNİN TANIUTI-WEI YÖNTEMİ İLE ÇIKARILMASI
VE KARAKTERİSTİKLERLE ÇÖZÜMÜ

Fatma SENYÜCEL
Yıldız Üniversitesi
Kocaeli Mühendislik Fakültesi

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
Özet	I
Summary	II

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ	1
1.1. Sürekli Ortamlarda Lineer Olmayan Dalgaların Yayılmaya Probleminin Gelişimi	1
1.2. Hiperbolik Denklemler	3
1.3. Dispersiyon ve Dissipasyon, Dispersif ve Dissipatif Denklemler	5
1.4. Konu ile İlgili Çalışmalar	10

BÖLÜM 2

2.1. İNCELENEN PROBLEM	11
2.2. Taniuti-Wei Genel İndirgeme Yöntemi	11
2.3. Yüzey Gravite Dalgaları İçin Korteweg-de Vries Denklemleri	14
2.4. Korteweg-de Vries Denklemleri İçin Karakteristikler Yöntemi	26
2.5. Sonuç	30
EKLER	33
KAYNAKLAR	50

Bu alışma süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirge-
meyen hocam Sayın Doç.Dr.Talāt TUNCER'e; konuya yönelmemi sağlayan
ve sürekli değerli fikirlerinden yararlandığım, yakın ilgi gördüğüm
Sayın Y.Doç.Dr. Mehmet CAN'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmayı büyük bir titizlikle daktilo eden Sayın Kadriye
TATLIPINAR'a teřekkür ederim.

Ö Z E T

T.Taniuti ve C.C.Wei, bazı lineer olmayan denklem sistemlerini çözümü daha kolay olan skaler lineer olmayan bir denkleme indirgemek için bir yöntem geliştirmişlerdir. Fakat lineer olmayan denklem sistemlerinin hangilerinin T.Taniuti ve C.C.Wei'in geliştirdiği yöntem kullanılarak skaler lineer olmayan bir denkleme indirgenebileceği konusunda kesin koşullar henüz saptanmamıştır. Ancak Taniuti-Wei ve Gardner-Su lineerleştirilmiş sistemden elde edilen dispersiyon bağıntısının şekline dayanan gerek fakat yeter olmayan bir koşul vermektedirler.

Bu çalışmada önce bir boyutlu yüzey gravite dalgalarının yayılması probleminin Taniuti-Wei şemasına uyduğu sonra da lineer dispersiyon bağıntısının Taniuti-Wei'in verdiği şekilde olduğu saptandı. Bu yöntemle lineer olmayan sistem, Korteweg-de Vries denklemine indirgendi. Böylece elde edilmiş olan Korteweg-de Vries denklemi, parametrelerin uygun seçimi halinde periyodik çözümlerin ve soliton tipi çözümlerin nasıl ortaya çıktığını göstermek amacı ile karakteristikler yöntemi ile çözüldü.

S U M M A R Y

T. Taniuti and C.C. Wei have developed a method to reduce certain nonlinear equations to a scalar nonlinear equation whose solution is more easy. But there is no general selection rule to determine whether or not a given system of nonlinear equations can be reduced to the nonlinear scalar equation. However, a necessary but not sufficient condition has been given by Taniuti-Wei and Gardner-Su concerning to the dispersion relation obtained from the linearized system.

In this thesis work, it is found that the problem of the propagation of one dimensional surface gravity waves can be reduced to Korteweg-de Vries equation by means of Taniuti Wei's scheme. Then by the use of a characteristic coordinate transformation, possibilities of periodic solutions and soliton solutions have been studied.

1. GİRİŞ*

1.1. Sürekli Ortamlarda Lineer Olmayan Dalgaların Yayılması Probleminin Gelişimi :

Sürekli ortamlarda lineer olmayan dalgaların yayılması lineer dalgaların yayılması olayından büyük ölçüde farklıdır. Birincide dış etkiler sonlu yerdeğiştirmelere yapısal ve geometrik veya yalnızca geometrik lineer olmayısa, ikincide ise sonsuz küçük yerdeğiştirmelere, yapısal ve geometrik lineerliğe sebep olurlar. Bu nedenle her iki olayın matematiksel formülasyonu sonucu elde edilen denklemler de farklı olur. Lineer dalgaların yayılması kısmî türevli lineer denklemlerle elde edilirken lineer olmayan dalgalar kısmî türevli lineer olmayan denklemlerle karakterize edilirler. Bunun sonucu olarak lineer olmayan hareketlerde çözüm süperpoze edilebilme özelliğini kaybeder. Lineer dalga yayılmalarında görülmeyen bazı yeni olaylar ortaya çıkar. Bunlardan en önemlisi şok cephesinin oluşmasıdır. Şok cephesi, alan niceliklerinde sıçramaların olduğu yerdir. Başlangıçta bütün alan nicelikleri sürekli olsalar bile, sonlu bir zamandan sonra şok cephesi ortaya çıkabilir. Bunun tam karşıtı olarak, bazı koşullar altında (viskozite, v.s.) başlangıçtaki süreksizlikler düzgünleşebilir. Her iki olay, temelde, hareket denklemlerinin lineer olmamaları ile ilgilidir.

Lineer olmayan dalgaların yayılması üzerinde çalışmaların başlangıcı ondokuzuncu yüzyılın ortalarına rastlar. Bu tarihten itibaren Stokes, Earnshaw, Riemann, Rankine, Hugoniot, Rayleigh ve daha sonra özellikle Hadamard bu araştırma alanını başlatan temel çalışmaları yayımlamışlardır [6]. Bu ilk çalışmalar akışkanlar mekanikğinde görülen lineer olmayan dalgaları kapsamaktadır.

* [16, 35]

Lineer olmayan dalgaları incelemek için bağımlı ve bağımsız değişkenlerin sayısına göre çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri, ilk olarak sıkıştırılabilir akışkanlarda dalga yayılmasını incelemek için geliştirilen basit dalga çözümüdür. Sabit bir hâle komşu bölgedeki çözüm "basit dalga"dır. Bunun iki bağımlı ve iki bağımsız değişkenli hiperbolik denklemlere ve buna bağlı olarak sıkıştırılabilir akışkanlara uygulanması Courant ve Friedrichs [6] de bulunabilir. Daha sonra Lax [24], Courant ve Friedrichs'in bu analizini n bağımlı ve iki değişkenli hiperbolik denklemlere genişletmiştir. Basit dalga çözümü teorisi sürekli ortamlar fizığının çeşitli dallarına uygulanmıştır. Örneğin su dalgalarına, magnetohidrodinamiğe, elastik katılarda dalga yayılmasına. Bu alanlarda yapılan çalışmalar hakkında geniş bilgi sıra ile, Stoker [30], Jeffrey ve Taniuti [17], Eringen ve Şuhubi [8] de bulunabilir.

Denklemlerde ikiden fazla, bağımsız değişken bulunması halinde diferansiyel geometriye dayandırılarak geliştirilen singüler yüzeyler teorisi etkin bir yöntemdir. Bununla karakteristik yüzeylerin (üzerinde çözümün kendisinin sürekli, normal türevinin sıçramaya sahip olduğu yüzeyler) yayılması incelenir. Bu yöntemi ilk olarak ortaya koyan Hadamard'dır. Daha sonraları sürekli ortamlar fizığının çeşitli dallarında kullanılmıştır. Elastik katılarda singüler yüzeylerin yayılması üzerinde yapılan çalışmalar hakkında geniş bilgi Eringen ve Şuhubi [8] de bulunabilir.

Yukarıdaki metodlar hiperbolik denklemler, yani gerçel karakteristiklere sahip sistemler için geçerlidir. Ortamda dissipasyon ve dispersiyonun bulunması halinde dalga yayılmasını karakterize eden denklemlerin gerçel karakteristikleri, genellikle bulunmaz. Bu halde ne singüler yüzeyler ne de, iki bağımsız değişken olması halinde, basit dalga çözümü teorisi uygulanabilir. Buna rağmen bazı

hallerde dissipasyonlu ortamlarda gerçel karakteristikler vardır ve dolayısı ile singüler yüzeyler teorisi uygulanabilir. Buna örnek olarak Coleman, Gurtin, Herrera ve Truesdell [5] tarafından incelenen dissipatif malzemelerde dalga yayılması verilebilir.

Dissipatif ve dispersif ortamlarda dalga yayılmasını belirten denklemlerin gerçel karakteristikleri olmaması halinde, yukarıda üzerinde durulanlar kadar gelişmiş inceleme yöntemleri yoktur. Bununla birlikte asimptotik açılımlara dayanılarak bir boyutlu zayıf lineer olmayan dissipatif-dispersif dalgaların yayılması incelenebilir. Bu yaklaşımlar, genellikle, asıl denklem yerine onu karakterize edebilecek yeni bir denklem elde etmeyi amaçlar. Elde edilecek denklemlerin eskisine göre daha kolay uğraşılabilir bir formda olmasına çalışılır. Bunlardan en tanınmışları dissipasyonlu ortamları karakterize eden Burgers [3] ve dispersiyonlu ortamları karakterize eden Korteweg-de Vries [23] denklemleridir. Bu denklemlerden birincisi ilk defa türbülans teorisi için bir matematik model olarak ortaya atılmıştır. Daha sonra Cole [4] bir boyutlu viskoz sıkıştırılabilir akışkanlarda şok dalgaları teorisi ile ilgisi üzerinde durmuştur. Hareket denklemleri, dissipasyonsuz denkleme ait Riemann invariant-ları cinsinden yeniden yazılıp buradan fiziksel argümanlar temel alınarak Burgers denkleminin ilk elde edilmesi Lighthill tarafından yapılmıştır [25]. Öte yandan ilk olarak su dalgaları için elde edilen ikinci denklem, daha sonraları plâzma ve kristâl yapı fizikinde (diğer örnekler için [16]) zayıf lineer olmayan dalga hareketlerini incelemek için kullanılmıştır.

1.2. Hiperbolik Denklemler :

Yapısal olarak dissipatif veya dispersif olmayan sürekli ortamlarda bir boyutlu dalgaların yayılması genel olarak

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + A(x, t, \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + B(x, t, \tilde{U}) = 0 \quad (1.2.1)$$

şeklinde bir kuazi-lineer hiperbolik diferansiyel denklem sistemi ile karakterize edilir [17]; burada $\tilde{A}$ elemanları a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) olan $(n \times n)$ matris, $\tilde{U}$ ve $\tilde{B}$ bileşenleri u_n ve b_n ($n = 1, 2, \dots$) olan sütun vektörlerdir. $\tilde{A}$ matrisi ve $\tilde{B}$ vektörü argümanlarına göre istenildiği kadar türetilabilir olsunlar. Sistem hiperbolik olduğu için tanım gereği $\tilde{A}$ matrisinin

$$\det(\tilde{A} - \lambda_i I) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.2)$$

ile belirlenen bütün özdeğerleri gerçel ve farklıdır. Bu nedenle λ_i özdeğerlerine karşı gelen ve

$$\tilde{\ell}_i \tilde{A} = \lambda_i \tilde{\ell}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.3)$$

denklemini sağlayan $\tilde{\ell}_i$ sol özvektörleri E_n uzayında bir baz teşkil ederler. Hiperbolik sistemlerde denklem sayısı kadar karakteristik eğri ailesi vardır ve

$$C_i : \frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t, \tilde{U}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.4)$$

denklemini ile hesaplanır. λ_i özdeğerleri dalgaların yayılma hızını göstermektedir ve n tane değişik dalga hızı olabileceği açıktır [7,17].

Lineer olmayan hiperbolik diferansiyel denklemleri inceleme yöntemlerinin ortaya çıkarılmaları lineer hiperbolik diferansiyel denklemler için geliştirilen metodların görüş açılarından faydalanılarak yapıldığı halde, çoğunlukla lineer ve lineer olmayan sistemler arasında tam karşılık yoktur. Buna da neden, çözümün süperpoze edilebilme özelliğini kaybetmesidir. Sonuç olarak lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin lineer denklemlerinkinden çok farklı özellikleri bulunacaktır.

Bu özellikler arasında en başta geleni; lineer denklemlerde bütün $t > 0$ için çözümün tek olarak bulunabilmesine karşılık, lineer olmayan denklemlerde başlangıç verileri düzgün olsa bile sonlu bir zamandan sonra (kritik zaman) çözümün çok değerli olabilmesidir. Bu durum başlangıç değerlerinin analitik olması halinde dahi doğrudur [14]. Bu halde çözüm ya türetilebilme özeliğini kaybeder, türevi sınırsız olur; veya kendisi sınırsız olur. İlk halde çözüm genelleştirilmiş anlamda devam ettirilebilir (zayıf çözüm), fakat ikinci halde kritik zamandan sonra bu mümkün değildir [15].

Fiziksel problemlerde (gaz dinamiğindeki şok dalgaları gibi) çözümün türevinin sınırsız olduğu, çözümün kendisinde süreksizliğin doğduğu hal ile karşılaşılır.

1.3. Dispersiyon ve Dissipasyon, Dispersif ve Dissipatif Denklemler :

İlkel dispersiyon kavramı gökkuşağının yedi rengi gibi bilinen olayları açıklayan ışık dalgalarının dispersiyonunda görülür. Bunun gibi bilinen olaylardan hareket ederek fizikçi ve matematikçiler bu tabiat olayının asıl yapı özelliklerini çıkarmışlardır ve içlerinde ses dalgaları, su dalgaları, elastik dalgalar, elektromagnetik dalgalar ve plazma dalgaları (v.b.) [26] da bulunmak üzere genel lineer dalgalar için dispersiyonun kesin bir tanımını elde etmişlerdir. Olayı karakterize eden diferansiyel denklemlerin lineerliğinden dolayı lineer dalgalarla ilgili alan nicelikleri Fourier bileşenlerine ayrılabilir. Kolaylık olsun diye lineer denklemlerden işe başlayarak bir boyutlu düzlem dalgaları gözönüne alalım. Bu durumda olayı karakterize eden denklemler

$$u(x,t) = a \exp [i(kx - \omega t)] \quad (1.3.1)$$

şeklinde elemanter çözümlere sahiptir. Burada x dalgaının yayılma

doğrultusunu, t zamanı, a genliği, k dalga sayısını, ω açısal frekansı göstermektedir. λ dalga boyu da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (1.3.2)$$

olarak tanımlanır. (1.3.1) çözüm formu, verilen denklemde yazılarak çözümün sıfırdan farklı olmasından hareketle ω ile k arasında dispersiyon bağıntısı denilen

$$D(\omega, k) = 0 \quad (1.3.3)$$

veya

$$\omega = \omega(k) \quad (1.3.4)$$

şeklinde bir fonksiyon elde edilir. Bu son yazılan form kullanılarak, faz hızı V_p ve grup hızı V_g

$$V_p = \frac{\omega}{k} \quad (1.3.5)$$

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (1.3.6)$$

bağıntıları ile tanımlanırlar [27]. V_p ile V_g nin birbirine eşit olmadığı (1.3.4) ten görülür. Başka bir deyişle faz hızı V_p dalga sayısına bağlıdır. Bu durum mevcutsa dalganın dispersif ya da daha genel anlamda dispersiyona sahip olduğu söylenir. Bu dalgaları karakterize eden denklemlere de dispersif denklemler denir.

Dispersif sistemlerde $\omega = \omega(k)$ dispersiyon bağıntısı genel olarak gerçel bir k değeri için karmaşık bir ω yı verir. Bu durumu gözönüne alalım. Bu tip hareketlerde dikkat edilirse faz hızı sadece dalga sayısına (boyuna) bağlı olmayacak fakat dalganın etkin genliği zamanla değişecektir. Eğer $\text{Im}(\omega) < 0$ olursa bir sönme olacak ve buna

dissipasyon diyeceğiz. Böyle dalgaları karakterize eden denklemleri de dissipatif denklemler olarak adlandıracağız. $\text{Im}(\omega) > 0$ halinde genlik zamanla sınırsız olarak artacaktır. Bu halde çözüm kararlı (stabil) olmayacaktır. Buna kararsızlık (instability) denir [31,33].

Eğer özellikle $\partial V / \partial k \neq 0$ olduğunda $\omega = \omega(k)$, k nın gerçel bir fonksiyonu (açısal frekansın gerçel dalga sayısı için gerçel olduğu hareketlerde) ise dissipasyon veya kararlı olmayış söz konusu (ne sönüm ne de kararsızlığa rastlanır) değildir, buna tam (sıfır) dispersiyon veya dar anlamda yalnızca dispersiyon ve böyle dalgaları karakterize eden denklemlere de dispersif denklemler diyeceğiz. Böylece lineer sistemler için dispersiyon tanımlanmış olur. Öte yandan lineer olmayan sistemlerde dalganın frekansı yalnız dalga sayısına bağlı değil, aynı zamanda genlik gibi lineer yaklaşımda küçük oldukları kabul edilen diğer parametrelerin de fonksiyonudurlar. Lineer sistemlerden farklı olarak lineer olmayan sistemler için dispersiyonun iyi bir tanımı henüz yapılmış değildir. Bununla birlikte birçok durumlarda aslında lineer olmayan denklemleri lineerleştirirerek lineer dispersif sisteme karşı gelen denklemler elde ederiz. Bu halde lineer olmayan dalgaların dispersiyonunu gözönüne alırız. Eğer lineerleştirilmiş şekli lineer dalgalar anlamında dispersiyonlu ise sisteme dispersif denir.

Yukarıda söylediklerimizi şu örnek üzerinde kısaca açıklayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^p u}{\partial x^p} = 0 \quad p \geq 2 \quad (1.3.7)$$

çözümü

$$u = u_0 \exp [i(kx - \omega t)] \quad (1.3.8)$$

formunda alalım. (1.3.7) den

$$[\omega - c_0 k - (i)^{p-1} \mu k^p] u_0 = 0 \quad (1.3.9)$$

elde edilir. Sıfırdan farklı bir çözüm için $u_0 \neq 0$ olması gerektiğinden

$$\omega = c_0 k + (i)^{p-1} \mu k^p \quad (1.3.10)$$

bulunur. (1.3.8) ve (1.3.10) dan çözümün

$$u = u_0 \exp [-(i)^p \mu k^p t] \exp [ik(x - c_0 t)] \quad (1.3.11)$$

olarak yazılabileceği açıktır. $p = 2$ olması halinde çözüm

$$u = u_0 \exp [\mu k^2 t] \exp [ik(x - c_0 t)] \quad (1.3.12)$$

dir. Eğer $\mu < 0$ ise sönme olacağını, $\mu > 0$ ise çözümün kararlı olmadığını söyleyebiliriz. Dikkat edilirse dalga aynı c_0 hızı ile öte-
lenecek ve dalga şeklinde bir distorsiyon (değişme) olmayacak fakat etkin genliği μ ye bağlı olarak azalacak veya çoğalacaktır. $p = 3$ için çözüm

$$u = u_0 \exp \{ik[x - (c_0 - \mu k^2)t]\} \quad (1.3.13)$$

dir. Bu ise dispersif haldir. Değişik hızlarla ilerleyecek dalga profilinde distorsiyon meydana gelecektir.

Dissipasyonlu ve dispersiyonlu ortamlarda bir boyutlu dalgaların yayılması (1.2.1) ile verilen denklemlerdeki terimlere ek olarak, dissipasyon veya dispersiyonla ilgili küçük bir katsayı ile birlikte $\underline{U}$ vektörünün daha yüksek mertebeden türevlerini de bulunduran bir denklem sistemi ile karakterize edilebilirler.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A}(x, t, \underline{U}) \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [H_{\alpha}^{\beta}(x, t, \underline{U}) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ \left. + K_{\alpha}^{\beta}(x, t, \underline{U}) \frac{\partial}{\partial x}] \right\} + \underline{B}(x, t, \underline{U}) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Burada H_{α}^{β} ve K_{α}^{β} matrislerinin elemanları x ve t 'ye göre p kere U vektörünün elemanlarına göre istenildiği kadar türetilabilir olsunlar. Yüksek mertebeden türevli terimlerin katsayıları zayıf dissipatif veya dispersif ortamlarda küçüktürler yani tipik bir katsayıyı v ile gösterirsek $v^2 \ll 1$ dir. Bu terimleri ihmal edersek denklem (1.2.1) formuna dönüşür. Bu tip bir denklemde ise başlangıç verileri düzgün olsa bile çözümde süreksizliklerin oluşabileceği bilinmektedir. Fakat (1.3.14) sistemindeki yüksek mertebeli terimler, süreksizlik doğmadan önce dalga profilinde dikleşme ortaya çıktığı zaman, etkilerini göstermeye başlarlar. Nonlineer terimlerin tesiri ile ortaya çıkan dikleşmeye karşı önleyici ve dengeleyici rol oynayarak bu süreksizliklerin oluşmasına engel olurlar; tipik örnekler, kararlı hal çözümleri, dissipatif ortamdaki şok ve dispersif ortamlardaki yalnız (solitary) dalga çözümleridir.

Genel dispersif sistemlerin geniş sınıfları arasında k nın küçük değerleri için lineerleştirilmiş dispersiyon bağıntısı

$$\omega = ak + bk^3 + \dots \quad (1.3.15)$$

şeklinde olduğu zaman eğer küçük fakat sonlu genlikli dalgalar gözönüne alınıyorsa lineer olmayan ilk denklem sistemi sıklıkla asimptotik olarak Korteweg-de Vries denkleminde indirgenebilir. Burada a, b gerçel sabitlerdir. Bundan ötürü önce lineerleştirilmiş durumdaki dispersiyon bağıntısını araştırmak iyi olur. Bununla birlikte modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemi ile tanımlanan çarpışmasız plazma içinde [20] lineer olmayan Alfvén dalgasında görüleceği gibi durumun her zaman böyle olmadığına dikkat etmek gerekir. Korteweg-de Vries denkleminin [2, 18, 19, 20, 22, 29, 37] modifiye edilmiş veya genelleştirilmiş şekli ile ifade edilen birçok örnek vardır. Genel dispersif denklem sistemlerinin Korteweg-de Vries denkleminde indirgenebilmesi için kesin şartlar henüz saptanmamıştır. Bununla birlikte Taniuti-Wei [34] ve Gardner-Su [10] tarafından öğretici bir yak-

laşım yapılmıştır. Bunlar birtakım lineer olmayan denklem sınıflarını Korteweg-de Vries denkleminde veya onun genelleştirilmiş biçimine indirgemek için asimptotik bir pertürbasyon yöntemi geliştirmişlerdir.

1.4. Konu ile ilgili Çalışmalar :

Yukarıdaki açıklamalardan hareketle lineer olmamaya dissipasyon veya dispersiyonun etkilerini aynı mertebeden alarak bu tip ortamlarda yayılan dalgaların asimptotik özelliklerinin incelenileceği fikri oluşturulabilir. Akışkanlar mekaniğinde plazma ve kristal yapı fiziğinde bu yönde çalışmalar oldukça fazladır, [9, 12, 16, 21, 23, 28, 37]. Çeşitli pertürbasyon metodları ile (1.3.14) grubuna dahil sistemler Korteweg-de Vries, Burgers veya bunların genelleştirilmiş formlarında skaler lineer olmayan denklemlere indirgenirler. Bu sebep hem skaler lineer olmayan denklemlerle uğraşmanın daha kolay olma hem de bazı standart denklemlerin bilinen çözüm ve özelliklerinden yararlanabilme olanağıdır [4, 11, 13, 36].

Yukarıda belirtilen yazıların dışında bazı genel dissipatif ve dispersif denklem sınıflarının pertürbasyonu ile ilgili çalışmalar Gardner ve Su [32], Taniuti ve Wei [34] tarafından yapılmıştır.

Taniuti ve Wei

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [H_{\alpha}^{\beta}(U) \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta}(U) \frac{\partial}{\partial x}] U = 0 \quad (1.4.1)$$

denklem gurubu içinde benzer bir pertürbasyon metodu kullanmışlardır. Bu metodda Gardner-Morikawa transformasyonu adı verilen

$$\xi = \epsilon^a (x - \lambda_0 t), \quad \tau = \epsilon^{a+1} t, \quad a = \frac{1}{p-1} \quad (1.4.2)$$

şeklinde bir dönüşümle bağımsız değişkenler ξ ve τ ya dönüştürülmektedir.

2.1. İNCELENEN PROBLEM

Burada incelenen problem bir boyutlu yüzey gravite dalgalarının yayılması problemidir. Temel denklemler bir yatay koordinat ile zaman cinsinden ifade edilmiş ve Navier-Stokes denklemlerinin düşey koordinat boyunca integre edilip yatay koordinatlardan birinin düşürülmesi ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \mu u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + g \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \chi \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} &= 0 \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + h \frac{\partial u^*}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

olarak elde edilmiştir [1]. (2.1.1) gibi lineer olmayan bazı denklemler sistemlerini Korteweg-de Vries denklemleri veya onun genelleştirilmiş şekillerinden birine indirgemek için Taniuti-Wei [34] ve Gardner-Su [32] öğretici bir yaklaşım yapmışlardır. Biz çalışmamızda önce bu yaklaşımda verilen yöntemi özetleyecek sonra da kendi problemimize uygulayacağız.

2.2. Taniuti-Wei Genel İndirgeme Yöntemi :

n bileşenli $(u_1, u_2, \dots, u_n; n \geq 2)$ sütun vektörü için aşağıdaki denklem gözönüne alınsın.

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \left[\sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \right] \underline{U} = \underline{0} \quad (2.2.1)$$

$p \geq 2$

Burada $\underline{A}$, H_{α}^{β} , K_{α}^{β} lar yalnız $\underline{U}$ ya bağlı elemanlardan meydana gelen $n \times n$ matrislerdir ve $\underline{U}$ ya göre gerektiği kadar türetildikleri varsayılmaktadır.

Taniuti-Wei Yönteminin Dayandığı Varsayımlar Şunlardır :

(V.1.) Düzgün durum gösteren bir sabit çözüm vardır ve $\tilde{U}$ bu düzgün durum civarında ϵ ölçek parametresi cinsinden

$$\tilde{U} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \tilde{U}_j \quad (2.2.2)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir.

(V.2.) $A_0 (\equiv A(\tilde{U}_0))$ ın özdeğerleri gerçeldir ve bu özdeğerlerden en az biri dejenere değil (yozlaşmaz), sonlu ve sıfırdan farklıdır. Öz uzay hiç bir invaryant alt uzayı içermez.

(V.3.) $x \rightarrow -\infty$ iken $\tilde{U}, \tilde{U}_0$ düzgün durumuna gider, yani

$$x \rightarrow -\infty \text{ iken } \tilde{U}_j \rightarrow 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.2.3)$$

bu da

$$x \rightarrow -\infty \text{ iken } \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}_0 \quad (2.2.4)$$

demektir.

(V.1.) varsayımı ve $\tilde{A}, \tilde{H}_{\alpha}^{\beta}, \tilde{K}_{\alpha}^{\beta}$ nın türetililebilirliğinden dolayı $\tilde{A}, \tilde{H}_{\alpha}^{\beta}, \tilde{K}_{\alpha}^{\beta} \in$ civarında

$$\tilde{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \tilde{A}_j \quad (2.2.5a)$$

$$\tilde{H}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \tilde{H}_{\alpha j}^{\beta} \quad (2.2.5b)$$

$$\tilde{K}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \tilde{K}_{\alpha j}^{\beta} \quad (2.2.5c)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir. Burada $\tilde{A}_0 = \tilde{A}(\tilde{U}_0)$, $\tilde{A}_1 = \tilde{U}_1 (\nabla_{\tilde{U}} \tilde{A})_0$ dır. $\tilde{H}_{\alpha 0}^{\beta}, \tilde{K}_{\alpha 0}^{\beta}, \tilde{H}_{\alpha 1}^{\beta}, \tilde{K}_{\alpha 1}^{\beta}$ için de benzer tanımlar yapılabilir, $\tilde{A}_1$ ifa-

desindeki ∇u , $\tilde{u}$ ya göre gradient operatörünü göstermektedir. Lineer olmayan problem ele alınmadan önce lineer dispersiyon bağıntısı bulunur. $\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \tilde{u}$, $|\tilde{u}| \ll |\tilde{u}_0|$ alınır, (2.2.1) $\tilde{u}$ ya göre lineerleştirilir, $\tilde{u} \propto \exp [i(kx - \omega t)]$ varsayılarak, I birim matrisi, $V_p (= \frac{\omega}{k})$ faz hızını göstermek üzere lineer dispersiyon bağıntısı

$$\det \left[-V_p I + A_{\tilde{u}_0} + (ik)^{p-1} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-V_p H_{\tilde{u}_0}^{\beta} + K_{\tilde{u}_0}^{\beta}) \right] = 0 \quad (2.2.6)$$

olur. V_0 , $A_{\tilde{u}_0}$ in dejenere olmayan, sıfırdan farklı ve sonlu özdeğeri, a_1 ise

$$a_1 = i^{p-1} \tilde{u}_0 \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-V_0 H_{\tilde{u}_0}^{\beta} + K_{\tilde{u}_0}^{\beta}) \right\} \tilde{r}_0 / (V_0 \tilde{u}_0, \tilde{r}_0) \quad (2.2.7)$$

ile verilen sabit olmak üzere küçük k değerleri için V_p faz hızı k^{p-1} in kuvvet serisine

$$V_p = V_0 \{ 1 + a_1 k^{p-1} + O(k^{2(p-1)}) \} \quad (2.2.8)$$

biçiminde açılabilir. Burada a_1 ifadesindeki $\tilde{r}_0$ ve $\tilde{u}_0$ sırasıyla $A_{\tilde{u}_0}$ in normalize edilmiş sağ ve sol özvektörleridir.

$$kx - \omega t = k(x - V_0 t) - V_0 a_1 k^p t \quad (2.2.9)$$

olduğundan

$$\xi = \epsilon^a (x - V_0 t), \quad \tau = \epsilon^{a+1} t, \quad a \equiv (p-1)^{-1} \quad (2.2.10)$$

koordinat dönüşümleri yapılabilir ve yeni (ξ, τ) koordinatları cinsinden (2.2.1) ifadesi

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + (-V_0 I + A) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \epsilon \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [\epsilon H_{\tilde{u}_0}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + (-V_0 H_{\tilde{u}_0}^{\beta} + K_{\tilde{u}_0}^{\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi}] \right\} \tilde{u} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

şeklini alır. (2.2.2) ve (2.2.5), (2.2.11) de yerine konur ve ϵ nun kuvvetlerine göre düzenlenirse ϵ^1 için,

$$(-V_{0\sim} I + A_{\sim 0}) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0 \quad (2.2.12)$$

ve ε^2 için

$$\begin{aligned} (-V_{0\sim} I + A_{\sim 0}) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} = & -\frac{\partial U}{\partial \tau} - \{U_1 \cdot (\nabla_{u\sim} A)_{\sim 0}\} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \\ & - \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p \{(-V_0 H_{\sim \alpha 0}^\beta + K_{\sim \alpha 0}^\beta)\} \frac{\partial^p U_1}{\partial \xi^p} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

elde edilir. (2.2.12), (2.2.4) sınır şartı altında ξ ya göre integre edilirse

$$U_1 = r_{\sim 0} u^{(1)} \quad (2.2.14)$$

elde edilir. $u^{(1)}$, U_1 in bileşenlerinden biridir ve $r_{\sim 0}$ ın buna karşısı gelen bileşeni 1 olarak normalize edilmiştir. (2.2.14) de τ nun keyfi bir fonksiyonunun bulunmaması U nun $x \rightarrow -\infty$ iken $U_{\sim 0}$ düzgün durumuna gitmesindendir ve (2.2.10) dan dolayı $x \rightarrow -\infty$ olması $\xi \rightarrow -\infty$ u veya $j = 1, 2, \dots$ için $\xi \rightarrow -\infty$ iken $U_j \rightarrow 0$ ı gerektirir. (2.2.13), normalize edilmiş $\ell_{\sim 0}$ sol özvektörü ile çarpılarak ikinci derece çokluklar yok edildiğinde $u^{(1)}$ için

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + c_1 u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = c_2 \frac{\partial^p u^{(1)}}{\partial \xi^p} \quad (2.2.15)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} c_1 &= \ell_{\sim 0} \{r_{\sim 0} \cdot (\nabla_{u\sim} A)_{\sim 0}\} r_{\sim 0} / (\ell_{\sim 0} \cdot r_{\sim 0}) \\ c_2 &= -\ell_{\sim 0} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-V_0 H_{\sim \alpha 0}^\beta + K_{\sim \alpha 0}^\beta) r_{\sim 0} / (\ell_{\sim 0} \cdot r_{\sim 0}) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

dır. U_1 in diğer bileşenleri de (2.2.14) den dolayı (2.2.15) e benzer denklemlerle ifade edilir.

2.3. Yüzey Gravite Dalgaları İçin Korteweg-de Vries Denklemi :

Bölüm 2.2. de Taniuti-Wei genel indirgeme yöntemi anlatıldı. Bu bölümde ise yöntemin kendi problemimize uygulanması üzerinde durulacaktır. (2.1.1) i yeniden ele alalım.

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} - \mu u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + g \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \chi \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + h \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0$$

Burada g yerçekimi ivmesi, χ dispersiyon katsayısı, μ lineer olmayış ölçütü, h de suyun derinliğidir.

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \begin{bmatrix} u^* \\ \psi^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_t = \begin{bmatrix} u_t^* \\ \psi_t^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_x = \begin{bmatrix} u_x^* \\ \psi_x^* \end{bmatrix} \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -\mu u^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

olmak üzere (2.1.1);

$$\begin{bmatrix} u_t^* \\ \psi_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu u^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^* \\ \psi_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ \psi^* \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.2)$$

veya kapalı olarak

$$\tilde{U}_t + \tilde{A} \tilde{U}_x + \tilde{D} \tilde{U} = 0 \quad (2.3.3)$$

şeklinde gösterilebilir.

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

olarak yazılır ve eşitliğin ikinci tarafındaki her matris ayrı ayrı ele alınır

$$\begin{bmatrix} \chi \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = \underset{\sim}{H}_1^1 \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_1^1 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = \underset{\sim}{H}_2^1 \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_2^1 \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = \underset{\sim}{H}_3^1 \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_3^1 \frac{\partial}{\partial x}$$

yukarıda görüldüğü gibi sembolize edilirse

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (\underset{\sim}{H}_1^1 \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_1^1 \frac{\partial}{\partial x}) (\underset{\sim}{H}_2^1 \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_2^1 \frac{\partial}{\partial x}) (\underset{\sim}{H}_3^1 \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_3^1 \frac{\partial}{\partial x}) \quad (2.3.6)$$

durumuna gelir. (2.3.6) daha kısa bir şekilde ifade edilmek istenirse

$$\underset{\sim}{D} = \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (\underset{\sim}{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \quad (2.3.7)$$

yazılabilir. (2.3.7), (2.3.3) te yerine konduğunda

$$\underset{\sim}{U}_t + \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{U}_x + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (\underset{\sim}{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \underset{\sim}{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \underset{\sim}{U} = 0 \quad (2.3.8)$$

elde edilir. Bu ifade ise (2.2.1) tipindedir. (2.3.5) ten de anlaşılacağı gibi

$$s = 1, \quad p = 3, \quad \underset{\sim}{H}_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad \underset{\sim}{K}_1^1 = \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{K}_2^1 = \underset{\sim}{K}_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. (2.3.8) deki $\tilde{A}, \tilde{H}_\alpha^\beta, \tilde{K}_\alpha^\beta$ yalnız $\tilde{U}$ ya bağlı ve $\tilde{U}$ ya göre istenildiği kadar türetilbildiği kabul edilen 2×2 matrislerdir.

(2.1.1) Taniuti-Wei yönteminin dayandığı varsayımları gerçekler. Şöyle ki

(V.1.) : Düzgün durumu temsil eden bir sabit çözüm vardır ve $\tilde{U}$ bu düzgün durum civarında ϵ ölçek parametresi cinsinden

$$\tilde{U} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \tilde{U}_j \quad (2.3.10)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir.

(V.2.) : $\tilde{A}_0 (\equiv \tilde{A}(\tilde{U}_0))$ ın özdeğerleri gerçeldir ve bu özdeğerlerden en az biri dejenere değil (yozlaşmaz), sonlu ve sıfırdan farklıdır. Öz uzay hiçbir invaryant alt uzayı içermez.

$$\tilde{U}_0 = \begin{bmatrix} u_0^* \\ \psi_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

alınsın.

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} -\mu u_0^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

$$|\tilde{A}_0 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & g \\ h & -\lambda \end{vmatrix} \quad (2.3.13)$$

$$|\tilde{A}_0 - \lambda I| = 0 \text{ dan}$$

$$\lambda^2 + \mu\lambda - hg = 0 \quad (2.3.14)$$

μ küçük bir parametre olduğundan ($\mu^2 \ll 1$) $\mu^2 = 0$ alındığında

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \\ \lambda_2 &= -\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg}\end{aligned}\tag{2.3.15}$$

olarak bulunur. λ_1, λ_2 özdeğerlerdir ve μ küçük bir parametre, g yerçekimi ivmesi, h suyun derinliği olduğuna göre bu özdeğerlerin gerçel oldukları görülmektedir.

$$\lambda_1 = V_0, \quad \mu^2 \ll 1 \rightarrow \mu^2 = 0$$

alınsın.

$$\lambda_1 = V_0 = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}\tag{2.3.16}$$

olsun. Bir özdeğerin dejenere olmaması şu şekilde tanımlanır:

λ , A kare ($n \times n$) matrisinin m katlı özdeğeri olduğuna göre,

$$N = n - \text{Rank}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{\lambda} I)$$

olmak üzere $N = m$ ise λ özdeğeri için dejenerasyon yok demektir.

Bunlara göre

$$|\underset{\sim}{A}_0 - \underset{\sim}{\lambda}_1 \underset{\sim}{I}| = -\frac{\mu^2}{4} + hg - hg = 0$$

$$\text{Rang} [\underset{\sim}{A}_0 - \underset{\sim}{\lambda}_1 \underset{\sim}{I}] \neq 2, \quad \text{Rang} [\underset{\sim}{A}_0 - \underset{\sim}{\lambda}_1 \underset{\sim}{I}] = 1$$

bulunur. λ_1 bizim problemimizde tek katlı özdeğerdir, yani $m=1$ dir.

$N = 2 - 1 = 1$, $m = N$ olduğundan $V_0 = \lambda_1 = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}$ için dejenerasyon yok demektir. λ_1 in sonlu ve sıfırdan farklı olduğu da açıktır.

Öz uzay ancak $\lambda_1 = 1$ olduğunda invaryant alt uzay içermektedir. Bu problemde $\lambda_1 \neq 1$ olduğundan öz uzay hiçbir invaryant alt uzay içermemektedir.

V.3. $x \rightarrow -\infty$ iken $\tilde{U}, \tilde{U}_0$ düzgün (üniform) durumuna gider, yani

$$x \rightarrow -\infty \text{ iken } \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}_0 \quad (2.3.17)$$

bu da

$$x \rightarrow -\infty \text{ iken } \tilde{U}_j \rightarrow 0 \quad (2.3.17.a)$$

olduğunu gösterir ($j = 1, 2, 3, \dots$).

(V.1.) varsayımı ve $\tilde{A}, \tilde{H}_\alpha^\beta$ ve $\tilde{K}_\alpha^\beta$ ların türetilirliği sebebiyle $\tilde{A}, \tilde{H}_\alpha^\beta, \tilde{K}_\alpha^\beta$ yı ε civarında kuvvet serisine açabiliriz.

Burada $\tilde{A} = A(\tilde{U}_0)$, $\tilde{A}_1 = \tilde{U}_1 \cdot (\nabla_{\tilde{U}_0} A)$ dır ve benzer ifadeler $\tilde{H}_{\alpha 0}^\beta, \tilde{K}_{\alpha 0}^\beta, \tilde{H}_{\alpha 1}^\beta, \tilde{K}_{\alpha 1}^\beta$ için tanımlanabilir. $\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}$ burada $\tilde{U}$ ya göre gradient operatörünü göstermektedir.

Bölüm (1.3) deki açıklamalara göre lineer olmayan problemi ele almadan önce lineer dispersiyon bağıntısını bulalım.

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \tilde{U} \quad (2.3.18)$$

olarak

$$|\tilde{U}| \ll |\tilde{U}_0| \quad (2.3.18.a)$$

varsayarak (2.2.1) denklemi $\tilde{U}$ vektörüne göre lineerleştirilirse,

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A}_{\alpha 0} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \left[\sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (\tilde{H}_{\alpha}^\beta \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{K}_{\alpha}^\beta \frac{\partial}{\partial x}) \right] \tilde{U} = 0 \quad (2.3.19)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünün

$$\tilde{U} = R \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.3.20)$$

olduğunu kabul edelim. (2.3.20), (2.3.19) da yerine konup gerekli işlemler yapıldığında

$$\left[-V_{p\approx} I + A_{\approx 0} + (ik)^{p-1} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (V_p H_{\approx \alpha}^{\beta} + K_{\approx \alpha}^{\beta}) \right] R = 0 \quad (2.3.21)$$

bulunur. Çözüm vektörünün sıfırdan farklı olması için bu denklemin çözümü olan R ün sıfırdan farklı olması gerekir. Bunun için de

$$\det \left[-V_{p\approx} I + A_{\approx 0} + (ik)^{p-1} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-V_p H_{\approx \alpha}^{\beta} + K_{\approx \alpha}^{\beta}) \right] = 0, \quad (2.3.22)$$

olmalıdır. Bu ise dispersiyon bağıntısı olarak bilinir. (2.3.22), yöntemi tanıtırken verilen (2.2.6) ile uygunluk içindedir.

I birim matris, $V_p = \frac{w}{k}$, $s = 1$, $p = 3$,

$$A_{\approx 0} = \begin{bmatrix} -\mu & g \\ h & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{\approx \alpha}^{\beta} = 0, \quad K_{\approx 1}^1 = \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\approx 2}^1 = K_{\approx 3}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.23)$$

olmak üzere; (2.3.23), (2.3.22) de yerine konduğunda lineer dispersiyon bağıntısı olarak

$$w = -\mu k - \chi k^3 \quad (2.3.24)$$

elde edilir. Bulunan lineer dispersiyon bağıntısının şekli bölüm (1.3) de açıklandığı gibi bize sistemimizin Korteweg-de Vries denkleminde indirgenebilir olduğunu gösterir.

k nın küçük değerleri için V_p faz hızı (2.2.8) de $p=3$ alınarak k^2 nin kuvvet serisine

$$V_p = V_0 \{1 + a_1 k^2 + O(k^4)\} \quad (2.3.25)$$

şeklinde açılabilir.

a_1 in (2.2.7) ile verilen ifadesinde $p=3$, $V_0 = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}$, $H_{\alpha 0}^B$, $K_{\alpha 0}^B$ lar yerlerine konduğunda

$$a_1 = -\ell_0 \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{r_0}{(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) \ell_0 \cdot r_0} \quad (2.3.26)$$

olur. r_0 ve ℓ_0 , A_0 in V_0 özdeğerine karşı gelen normalize edilmiş sağ ve sol özvektörlerdir.

Sağ ve sol özvektörler sırasıyla,

$$r_0 = [A_0 - \lambda_1 I] r_1, \quad (2.3.27)$$

$$\ell_0 = [A_0 - \lambda_1 I]^T \ell_1$$

dır. (2.3.27) den r_0

$$r_0 = \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (2.3.28)$$

ve buradan da r_0 in normalize edilmiş şekli

$$r_0 = \frac{1}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (2.3.29)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde sırasıyla ℓ_0 ve normalize edilmiş şekli aşağıdaki gibidir.

$$\ell_0 = \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (2.3.30)$$

$$z_0 = \frac{1}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (2.3.31)$$

(2.3.16), (2.3.28) ve (2.3.31); (2.3.26) da yerlerine konursa

$$a_1 = - \frac{1}{(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) (\mu \sqrt{hg} + hg)} \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.32)$$

işlemler yapılırsa,

$$a_1 = - \frac{\chi}{2 \sqrt{hg}} \quad (2.3.33)$$

olarak bulunur. Dalganın fazörü

$$kx - wt = k(x - \frac{w}{k} t) = k(x - V_p t) \quad (2.3.34)$$

$$kx - wt = k(x - V_p t)$$

dir. (2.2.8), (2.3.34) de yerine konduğunda

$$kx - wt = k[x - \{V_o [1 + a_1 k^{p-1} + O(k^{2(p-1)})] t\}]$$

$$kx - wt = k[(x - V_o t) - V_o a_1 k^{p-1} t]$$

$$kx - wt = k(x - V_o t) - V_o a_1 k^p t \quad (2.3.34.a)$$

şeklini alır. $p = 3$ alınarak (2.2.10) dakilere benzer dönüşümlerin

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x - V_o t), \quad \tau = \epsilon^{3/2} t \quad (2.3.35)$$

olduğu görülür. (2.3.35) dönüşümleri (2.2.1) de kullanıldığında

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial \tau} + (-V_o I + A_o) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [\epsilon H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} + (-V_o H_{\alpha}^{\beta} + K_{\alpha}^{\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi}] \right\} U = 0 \quad (2.3.36)$$

bulunur. $H_{\alpha}^{\beta} = 0$, $p = 3$, $s = 1$ olduğu gözönüne alınırsa (2.3.36)

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial \tau} + (-V_o I + A_o) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon \left(\prod_{\alpha=1}^3 K_{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) U = 0 \quad (2.3.37)$$

haline gelir. (2.2.2) ve (2.2.5.a), (2.3.36) da yerlerine konur ve ϵ nın kuvvetlerine göre düzenlenirse ϵ^1 i bulunduran terimlerden

$$(-V_o I + A_o) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0 \quad (2.3.38)$$

ϵ^2 yi bulunduran terimlerden de

$$\begin{aligned} (-V_o I + A_o) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} = & - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - U_1 \cdot (\nabla_{u_o} A_o) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \\ & - \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-V_o H_{\alpha o}^{\beta} + K_{\alpha o}^{\beta}) \frac{\partial^3 U_1}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

olarak bulunur. $s = 1$, $p = 3$ olmak üzere, $H_{\alpha o}^{\beta}$ ve $K_{\alpha o}^{\beta}$ ların değerleri (2.3.39) da yerlerine konduğunda

$$(-V_o I + A_o) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} = - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - U_1 (\nabla_{u_o} A_o) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 U_1}{\partial \xi^3} \quad (2.3.40)$$

veya $A_1 = U_1 \cdot (\nabla_{u_o} A_o)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$(-V_o I + A_o) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} = - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - A_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 U_1}{\partial \xi^3} \quad (2.3.41)$$

bulunur. (2.3.38) yeniden ele alınsın

$$(-V_o I + A_o) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0,$$

ξ ye göre integre edilirse,

$$(-V_o I + A_{\sim c}) U_{\sim 1} = F(\tau) \quad (2.3.42)$$

bulunur. (V.3) kullanıldığında,

$$(-V_o I + A_{\sim o}) U_{\sim 1} = 0 \quad (2.3.43)$$

elde edilir. (2.3.43) ün çözümü de

$$U_{\sim 1} = r_o u_1^* \quad (2.3.44)$$

dır. u_1^* , $U_{\sim 1}$ in bileşenlerinden biridir ve r_o in buna karşı gelen bileşeni 1 olarak normalize edilmiştir. r_o in, u_1^* a karşı gelen bileşenin bir olarak normalize edilmiş şekli ile $U_{\sim 1}$,

$$U_{\sim 1} = \frac{1}{(1 + h + \frac{\mu}{g} \sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{\frac{\mu}{2g} + \frac{\sqrt{hg}}{g}} \right] u_1^* \quad (2.3.45)$$

dır. (2.3.40) ele alınıp bilinenler yerlerine konduktan sonra ℓ_o sol özvektörü ile çarpılırsa,

$$\ell_o (-V_o I + A_{\sim o}) \frac{\partial U_{\sim 2}}{\partial \xi} = \ell_o \left[r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} - A_{\sim 1} r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} \right] \quad (2.3.46)$$

ve (2.3.46) dan da

$$-\ell_o r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} - \ell_o A_{\sim 1} r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \ell_o \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.3.47)$$

bulunur, düzenlenirse,

$$-\ell_o \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} = \ell_o r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} + \ell_o A_{\sim 1} r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \quad (2.3.48)$$

olur.

$$\begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{h \chi g}{(h + g)(hg + \mu \sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.49)$$

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r_0 = \frac{\mu \sqrt{hg} + 2 hg}{(h + g)(hg + \mu \sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.50)$$

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r_0 = \frac{-2 \mu hg^2}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}} (g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)} u_1^* \quad (2.3.51)$$

olarak bulunur ve bu son üç ifade (2.3.48) de yerlerine konup gerekli işlemler yapıldığında

$$-\frac{hg \chi}{(\mu \sqrt{hg} + 2 hg) \partial \xi^3} \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \tau} = \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} - \frac{2 \mu hg^2}{(\mu \sqrt{hg} + 2 hg)(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} u_1^* \quad (2.3.52)$$

bulunur.

$$c_1 = -\frac{2 \mu hg^2}{(\mu \sqrt{hg} + 2 hg)(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.53)$$

$$c_2 = -\frac{hg \chi}{\mu \sqrt{hg} + 2 hg} \quad (2.3.54)$$

denirse (2.3.52)

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} + c_1 u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} = c_2 \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} \quad (2.3.55)$$

şeklini alır.

$$u_1^* = \frac{1}{c_1} u^{(1)} \quad (2.3.56)$$

$$-c_2 = \gamma \quad (2.3.57)$$

dönüşümü yapıldığında denklemimiz Korteweg-de Vries denkleminin alışılacelmiş biçimi olan

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.3.58)$$

durumuna gelir. (2.3.58) deki dispersiyon parametresi γ nın küçük olması gerekmez, pozitif veya negatif te olabilir. γ negatif olursa $u \rightarrow -u$, $\tau \rightarrow \tau$, $\xi \rightarrow -\xi$ dönüşümü yapılarak denklem (2.3.58) durumuna getirilebilir.

Bu denklemin çeşitli çözüm yolları vardır. Bundan sonraki bölümde periyodik ve soliton tipi çözümlerin varlığının parametre değerlerine bağıllığını göstermek amacı ile bu denklem karakteristikler yöntemi ile çözülecektir.

2.4. Korteweg-de Vries Denklemi İçin Karakteristikler Yöntemi :

(2.3.58) deki Korteweg-de Vries denklemini aşağıdaki biçimde ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.4.1)$$

λ sabit kalmak üzere

$$\zeta = x - \lambda t \quad (2.4.2)$$

karakteristik koordinatı cinsinden

$$u(x, t) = u(\zeta) \quad (2.4.3)$$

şeklinde bir çözüm aramaktayız. (2.4.3) ten

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\lambda \frac{du}{d\zeta} \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\zeta}$$

bulunur. (2.4.4), (2.4.1) de yerine konur ve ζ ya göre iki kere integre edilirse

$$3\gamma\left(\frac{du}{d\zeta}\right)^2 = -u^3 + 3\lambda u^2 + 6Au + 6B \equiv f(u) \quad (2.4.5)$$

bulunur. (2.4.5) deki A, B integrasyon sabitleridir. Burada $f(u)$ fonksiyonunun üç gerçel sıfırı olduğu varsayılacaktır, yani

$$d_1 < d_2 < d_3 \quad (2.4.6)$$

olmak üzere

$$f(u) = (u - d_1)(u - d_2)(d_3 - u) \quad (2.4.7)$$

olarak alınır. Bu ise

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3} (d_1 + d_2 + d_3) \\ A &= -\frac{1}{6} (d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1) \\ B &= \frac{1}{6} d_1 d_2 d_3 \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

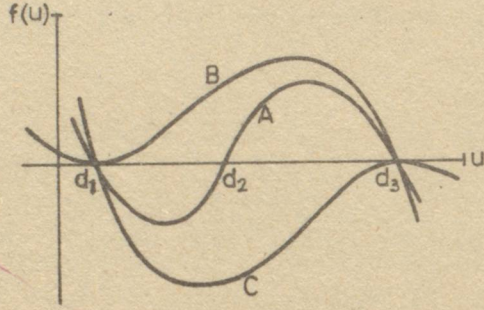
olmasını gerektirir. d_1, d_2, d_3 ün gerçel olması için

$$\lambda^2 + 2A > 0$$

ve

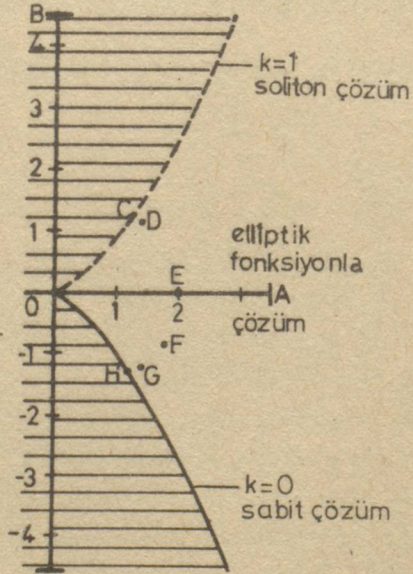
$$|(\lambda^3 + 3A\lambda + 3B)| \leq (\lambda^2 + 2A)^{3/2} \quad (2.4.9)$$

koşulları gerçekleşmelidir. $f(u)$ fonksiyonu ile u nun genel davranışı şekil (2.4.1) de şematik olarak verilmiştir. (2.4.5) in gerçel çözümü d_2 ile d_3 arasında lineer olmayan bir salınımı gösterir. İki özel durum vardır. Bunlardan biri $d_2 \rightarrow d_1$ (B eğrisi) durumu solitary (yalnız) dalgaya tekabül eder, diğeri ise $d_2 \rightarrow d_3$ (C eğrisi) hali $u = d_3$ ile verilen sabit bir çözüm verir ki bu da lineer sinüzoidal dalgalarla ilgilidir. Eğer d_1, d_2, d_3 sıfırları çakışırsa tekrar bu üç sifıra karşı gelen sabit bir çözüm elde edilir.



Şekil - 2.4.1

Bir örnek olmak üzere λ nın sıfır değerine karşı gelen ve (2.4.9) koşullarını sağlayan parametre bölgeleri şekil (2.4.2) de taranmamış kısım ile gösterilmiştir.



Şekil - 2.4.2.

(2.4.5) i yeniden ele alalım.

$$3\gamma \left(\frac{du}{d\zeta}\right)^2 = -u^3 + 3\lambda u^2 + 6Au + 6B \equiv f(u)$$

dan

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{3\gamma}} [(u - d_1)(u - d_2)(d_3 - u)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.10)$$

$$\int_0^{\zeta} d\zeta = \sqrt{3\gamma} \int_y^{d_3} \frac{du}{[(u - d_1)(u - d_2)(d_3 - u)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.4.11)$$

$$\zeta = \sqrt{3\gamma} \int_y^{d_3} \frac{du}{[(u - d_1)(u - d_2)(d_3 - u)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.4.12)$$

bulunur; d_1, d_2, d_3 (2.4.6) koşulunu sağlamak üzere (2.4.5) in açık çözümü

$$k^2 = \frac{d_3 - d_2}{d_3 - d_1} \quad (2.4.13)$$

olmak üzere (2.4.12) den Jakobi elliptikfonksiyonu cn (elliptik cosinüs) cinsinden

$$u = d_2 + (d_3 - d_2) cn^2 \left[\left(\frac{d_3 - d_1}{12\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \zeta; k \right] \quad (2.4.14)$$

şeklinde ifade edilir. Bu periyodik dalga cnoidal dalga olarak isimlendirilir. cn^2 fonksiyonunun gerçel periyodu $2K(K, \text{birinci türden tam elliptik integral})$ dır. Bundan dolayı buradaki cnoidal dalganın periyodu

$$T = 4K \left(\frac{3\gamma}{d_3 - d_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.15)$$

şeklindedir. (2.4.14) ile ifade edilen cnoidal dalganın iki özel hali vardır.

(i) $d_2 \rightarrow d_1$: Bu da $k \rightarrow 1$ olması demektir, bu durumda cosinüs elliptik fonksiyonu cn , $sech$ 'e dönüşür ve

$$u = d_1 + (d_3 - d_1) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{d_3 - d_1}{12\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \zeta \quad (2.4.16)$$

olur.

(ii) $d_2 \rightarrow d_3 : k \rightarrow 0$ olur, bu kez ise elliptik fonksiyon cn , trigonometrik fonksiyon $\cos$ ine dönüşür. Ancak trigonometrik $\cos$ inüs fonksiyonunu çarpan $(d_3 - d_2)$ sıfıra gittiğinden

$$u = d_3$$

ile verilen sabit bir çözüm elde edilir.

Şekil (2.4.3) de, şekil (2.4.2) de gösterilen altı noktadan alınan parametre değerleri için elde edilen dalga profilleri görülmektedir.

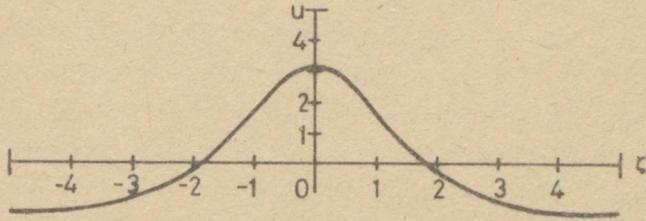
Bu şekillerden de görüldüğü gibi bölgenin üst sınırından alt sınırına doğru gidildikçe çözüm tipleri solitondan, elliptik fonksiyonlara ve daha aşağıda trigonometrik fonksiyonlar üzerinden sabite doğru değişmektedir.

2.5. SONUÇ

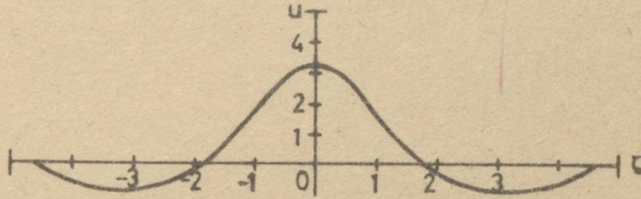
Literatürde lineer olmayan dalga yayılması problemleri üzerinde Korteweg-de Vries denkleminin doğrudan çıkarılması için çalışmalar yapılmaktadır [16]. Diğer taraftan hangilineer olmayan alan denklemlerinin Korteweg-de Vries denklemi haline getirilebileceği konusunda kesin bir bilgi yoksa da, Taniuti-Wei'in çalışmalarında hiç olmazsa lineer dispersiyon bağıntılarının genel görünümü

$$\omega = ak + bk^3 + \dots \quad (2.5.1)$$

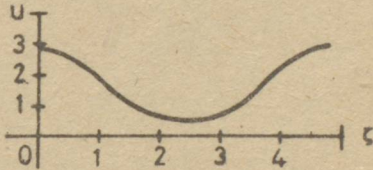
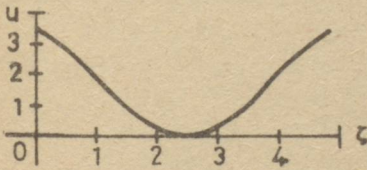
şeklinde olan lineer olmayan alan denklemlerinin Korteweg-de Vries denklemine indirgenebileceğine dair öğretici bir yöntem tanıtılmıştır.



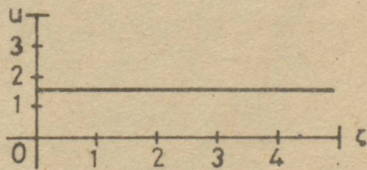
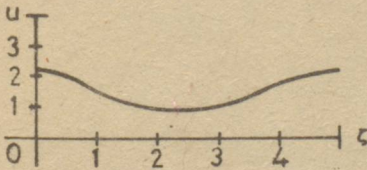
a. C noktasındaki dalga profili



b. D noktasındaki dalga profili



c. E noktasındaki dalga profili d. F noktasındaki dalga profili



e. G noktasındaki dalga profili f. H noktasındaki dalga profili

Bu çalışma Taniuti-Wei indirgeme yönteminin yüzey gravite dalgalarına başarı ile uygulanabileceğini göstermiştir. Çalışmanın katkılarından biri de çözüm tiplerinin integrasyon sabitleri üzerinden alan denklemlerinin parametrelerine yani dispersiyon katsayısı, lineer olmayış ölçütü, su derinliği ve yer çekimi ivmesine bağlı olduğunu göstermesi ve bu arada soliton tipi dalgaların oluşumu için çevre ve yapı koşullarının ne olması gerektiği sorusunun aydınlatılabileceğinin gösterilmesidir.

EK - 1

Ek 1.1. Lineer Dispersiyon Bağıntısının Bulunuşu :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} - \mu u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + g \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \chi \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.1})$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + h \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0$$

sistemi gözönüne alınsın. Bu sistem genel olarak

$$\underset{\sim}{U}_t + A \underset{\sim}{U}_{\sim x} + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \underset{\sim}{U} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.2})$$

şeklinde ifade edilebilir. (Ek 1.1.1) ile verilen sistemde (Bölüm 2.3. ten de bilindiği gibi)

$$s = 1, \quad p = 3, \quad H_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad K_{\sim 1}^1 = \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\sim 2}^1 = K_{\sim 3}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek 1.1.3)

olduğu gözönüne alınırsa (Ek 1.1.2)

$$\underset{\sim}{U}_t + A \underset{\sim}{U}_{\sim x} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{U} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.4})$$

şeklini alır. Lineer dispersiyon bağıntısını bulmak için önce lineer olmayan (Ek 1.1.4) lineerleştirilir. Bunun için de

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}_0 + \underset{\sim}{U}$$

ve

$$|\underset{\sim}{U}| \ll |\underset{\sim}{U}_0| \quad (\text{Ek 1.1.5})$$

varsayılarak (Ek 1.1.5) ten $\underset{\sim}{U}_t$ ve $\underset{\sim}{U}_x$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{U}}{\partial t} = \frac{\partial \underset{\sim}{U}_0}{\partial t} + \frac{\partial \underset{\sim}{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underset{\sim}{U}}{\partial t} = \frac{\partial \underset{\sim}{U}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \quad (\text{Ek 1.1.6})$$

olarak bulunur. $\tilde{U}$, $\tilde{U}_t$, $\tilde{U}_x$; bileşenleri cinsinden

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} u_o^* + \tilde{u}^* \\ \psi_o^* + \tilde{\psi}^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_t = \begin{bmatrix} u_t^* \\ \psi_t^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_x = \begin{bmatrix} u_x^* \\ \psi_x^* \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.1.7})$$

şeklindedir. $u^* = u_o^* + \tilde{u}^*$, A matrisinde de yerine konursa

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\mu(u_o^* + \tilde{u}^*) & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.1.8})$$

olur. (Ek 1.1.7) ve (Ek 1.1.8), (Ek 1.1.4) te yerlerine konduğunda

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_t^* \\ \tilde{\psi}_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu(u_o^* + \tilde{u}^*) & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x^* \\ \tilde{\psi}_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o^* + \tilde{u}^* \\ \psi_o^* + \tilde{\psi}^* \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{Ek 1.1.9})$$

ve buradan da

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_t^* \\ \tilde{\psi}_t^* \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu \tilde{u}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x^* \\ \tilde{\psi}_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_o^* \\ \psi_o^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{u}^* \\ \tilde{\psi}^* \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.10})$$

elde edilir. Çarpma işlemi yapılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_t^* \\ \tilde{\psi}_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x^* \\ \tilde{\psi}_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu \tilde{u}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x^* \\ \tilde{\psi}_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o^* \\ \psi_o^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}^* \\ \tilde{\psi}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.11})$$

bulunur. $\tilde{u}^*$ çok küçük varsayıldığından $\tilde{u}^* \cdot \tilde{u}_x^* \rightarrow 0$ gider ve dolayısı ile

$$\begin{bmatrix} -\mu \tilde{u}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x^* \\ \tilde{\psi}_x^* \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.12})$$

ve $\tilde{u}_0$ sabit vektör olduğundan

$$\begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^* \\ \tilde{\psi}_0^* \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.13})$$

olur. Böylece (Ek 1.1.11) den

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_t^* \\ \tilde{\psi}_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu \tilde{u}_0^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x^* \\ \tilde{\psi}_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}^* \\ \tilde{\psi}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.14})$$

kalır. (Ek 1.1.14) ise

$$\tilde{U}_{\sim t} + A_{\sim 0} \tilde{U}_{\sim x} + D_{\sim} \tilde{U}_{\sim} = 0 \quad (\text{Ek 1.1.15})$$

şeklinde yazılabilir ve (ek 1.1.14) ten de açıkça görüldüğü gibi (Ek 1.1.15) lineerleştirmek istenilen (Ek 1.1.4) ün lineerleşmiş durumudur. (Ek 1.1.15) in çözümünün $\tilde{R}$ sabit vektör olmak üzere

$$\tilde{U} = \tilde{R} \exp[i(kx - \omega t)] \quad (\text{Ek 1.1.16})$$

yapısında olduğu varsayılır ve (Ek 1.1.5) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = (-i\omega) \tilde{R} \exp[i(kx - \omega t)] \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = (ik) \tilde{R} \exp[i(kx - \omega t)] \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.1.17})$$

olur. (Ek 1.1.17), $A_{\sim 0}$ ve $D_{\sim}$, (Ek 1.1.15) te yerine konduğunda

$$(-iw)_{\sim} R e^{i(kx-wt)} + \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} (ik)_{\sim} R e^{i(kx-wt)} + \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\sim} R e^{i(kx-wt)}$$

(Ek 1.1.18)

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$[(-iw) + (ik) \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} + (ik)^3 \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}]_{\sim} R = 0 \quad (\text{Ek 1.1.19})$$

elde edilir. Çözüm vektörünün sıfırdan farklı olması için bu denklemin çözümü olan $R_{\sim}$ ün sıfırdan farklı olması gerekir, bunun için de I birim matris olmak üzere

$$\det[-iwI_{\sim} + ik \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} + (ik)^3 \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}] = 0 \quad (\text{Ek 1.1.20})$$

olmalıdır. Bu ise lineer dispersiyon bağıntısıdır. $V_p = w/k$ ($w = kV_p$) faz hızını göstermek üzere bu bağıntı sadeleştirilirse

$$\det[-ik V_p I_{\sim} + ik \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} + (ik)^3 \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}] = 0, (\text{Ek 1.1.21})$$

ve buradan da

$$\det[-V_p I_{\sim} + A_o + (ik)^2 \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}] = 0 \quad (\text{Ek 1.1.22})$$

bulunur. (Ek 1.1.22) sırayla

$$\det \begin{bmatrix} -V_p & 0 \\ 0 & -V_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu u_o^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ (Ek 1.1.23)}$$

ve

$$\det \begin{bmatrix} -V_p - \mu - k^2 \chi & g \\ h & -V_p \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(Ek 1.1.24)}$$

şeklını alır. Bu determinant açıldığında

$$V_p^2 + \mu V_p + k^2 \chi V_p - hg = 0 \quad \text{(Ek 1.1.25)}$$

olur. V_p ler yerine $\frac{w}{k}$ konduğunda

$$\frac{w^2}{k^2} + \mu \frac{w}{k} + k^2 \chi \frac{w}{k} - hg = 0 \quad \text{(Ek 1.1.26)}$$

ve k^2 ile kısaltma yapılırsa

$$w^2 + \mu kw + k^3 \chi w - k^2 hg = 0 \quad \text{(Ek 1.1.27)}$$

elde edilir. (Ek 1.1.27), w ile kısaltıldığında

$$w + \mu k + \chi k^3 = 0 \quad \text{(Ek 1.1.28)}$$

ve sonuçta lineer dispersiyon bağıntısı olarak

$$w = -\mu k - \chi k^3 \quad \text{(Ek 1.1.29)}$$

bulunur.

Ek 1.2. a_1 in hesabı :

a_1 sabiti

$$a_1 = i^{p-1} \ell_o \left[\sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-V_o H_{\alpha o}^{\beta} + K_{\alpha o}^{\beta}) \right] r_o / (V_o \ell_o \cdot r_o) \quad \text{(Ek 1.2.1)}$$

ile verilmektedir. Burada, incelenen problem için a_1 bulunacaktır.

(2.1.1) sisteminde

$$s = 1, \quad p = 3, \quad V_0 = \lambda_1 = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}$$

(Ek 1.2.2)

$$H_{\alpha 0}^{\beta} = 0, \quad K_{\alpha 0}^{\beta} = \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. (Ek 1.2.2), (Ek 1.2.1) de yerine konduğunda (Ek 1.2.1)

$$a_1 = -\frac{\ell_0}{\chi} \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_0 / (-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) \ell_0 \cdot r_0 \quad (\text{Ek 1.2.3})$$

şeklini alır. r_0 ve ℓ_0 sırasıyla A_0 in V_0 özdeğerine karşı gelen normalize edilmiş sağ ve sol özvektörlerdir.

Sağ özvektör

$$r_0 = [A_0 - \lambda_1 I] r_1 \quad (\text{Ek 1.2.4})$$

olarak ifade edilir ve bileşenleri ile elde edilmesi için aşağıdaki yol izlenir.

$$[A_0 - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} -\mu - (-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) & g \\ h & -(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} & g \\ h & \frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} \end{bmatrix}$$

(Ek 1.2.5)

(Ek 1.2.4) ten

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} & g \\ h & \frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Ek 1.2.6)

buradan da

$$(-\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg}) r_{11} + g r_{12} = 0$$

(Ek 1.2.7)

$$h r_{11} + (\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg}) r_{12} = 0$$

$r_{11} = g$ denirse $r_{12} = \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}$ olur ve

$$\tilde{r}_0 = \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.8})$$

dır. Normalize edilmiş sağ özvektör ise $\mu^2 \rightarrow 0$ gözönüne alınır

$$\tilde{r}_0 = \frac{1}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.9})$$

olur. (Ek 1.2.9) un birinci bileşeninin bir olarak normalize edilmiş şekli de

$$\tilde{r}_0 = \frac{g}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mu}{2g} + \sqrt{\frac{h}{g}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.10})$$

dır. Sol öz vektör ise

$$\tilde{l}_0 = [\tilde{A}_0 - \lambda_1 \tilde{I}]^T \tilde{l}_1 \quad (\text{Ek 1.2.11})$$

ile bulunur.

$$[\tilde{A}_0 - \lambda_1 \tilde{I}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} & h \\ g & \frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.12})$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} & h \\ g & \frac{\mu}{2} - \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.13})$$

buradan da

$$(-\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg}) l_{11} + h l_{12} = 0$$

$$g \ell_{11} + \left(\frac{\mu}{2} - \sqrt{hg}\right) \ell_{12} = 0 \quad (\text{Ek 1.2.14})$$

olur. $\ell_{11} = h$ denirse $\ell_{12} = \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}$ ve

$$\tilde{\ell}_0 = \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.15})$$

bulunur. Normalize edilmiş sol özvektör ise

$$\tilde{\ell}_0 = \frac{1}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.2.16})$$

dır. (Ek 1.2.10) ve (Ek 1.2.16) ile ifade edilmiş olan $\tilde{r}_0$ ve $\tilde{\ell}_0$, (Ek 1.2.3) deki a_1 de yerlerine konacak olursa

$$a_1 = - \frac{\frac{1}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix}}{(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) \frac{1}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \frac{1}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix}} \quad (\text{Ek 1.2.17})$$

elde edilir. Kısaltma yapıldığında

$$a_1 = - \frac{\begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix}}{(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) \begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix}} \quad (\text{Ek 1.2.18})$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$a_1 = - \frac{\begin{bmatrix} h \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xg \\ 0 \end{bmatrix}}{(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}) [hg + (\frac{\mu}{2} + \sqrt{hg})^2]} \quad (\text{Ek 1.2.19})$$

şeklını alır. (Ek 1.2.19) da $\mu^2 = 0$ yazılırsa

$$a_1 = - \frac{h X g}{2 hg \sqrt{hg}} \quad (\text{Ek 1.2.20})$$

ve sonuçta

$$a_1 = - \frac{X}{2 \sqrt{hg}} \quad (\text{Ek 1.2.21})$$

olarak bulunur.

Ek 1.3. (2.3.8) in ξ , τ Cinsinden İfadesi ve (2.3.56) daki Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries Denkleminin Elde Edilmesi İçin Yapılan İşlemler :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \left[\sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \right] U = 0 \quad (2.3.8)$$

ifadesindeki $U(x,t)$ yi incelenen probleme göre $U(\xi,\tau)$ cinsinden yazabilmek için

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} (x - V_0 t) \\ \tau &= \varepsilon^{3/2} t \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

şeklinde bir dönüşüm yapılacağı bölüm 2.3. te belirtildi.

$$U = U(\xi, \tau) \quad (\text{Ek 1.3.1})$$

den

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = -V_o \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (\text{Ek 1.3.2})$$

bulunur. (Ek 1.3.2), (2.3.8) de yerine konduğunda

$$\begin{aligned}-V_o \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial U}{\partial \tau} + A \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [H_{\alpha}^{\beta} (-V_o \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau}) + K_{\alpha}^{\beta} (\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi})] \right\} U = 0\end{aligned}\quad (\text{Ek 1.3.3})$$

elde edilir ve buradan da

$$\begin{aligned}\epsilon^{3/2} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \epsilon^{\frac{1}{2}} (-V_o I + A) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [H_{\alpha}^{\beta} \epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + \epsilon^{\frac{1}{2}} (-V_o H_{\alpha}^{\beta} + K_{\alpha}^{\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi}] \right\} U = 0\end{aligned}\quad (\text{Ek 1.3.4})$$

olur. $p=3$ olduğu gözönüne alınırsa (Ek 1.3.4) aşağıdaki duruma gelir.

$$\begin{aligned}\epsilon^{3/2} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \epsilon^{\frac{1}{2}} (-V_o I + A) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [(-V_o H_{\alpha}^{\beta} + K_{\alpha}^{\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \\ + \epsilon H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau}] U = 0\end{aligned}\quad (\text{Ek 1.3.5})$$

bu da $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ ile kısaltıldığında (2.3.8)

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{\partial U}{\partial \tau} + (-V_o I + A) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p [(-V_o H_{\alpha}^{\beta} + K_{\alpha}^{\beta}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \\ + \epsilon H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau}] U = 0\end{aligned}\quad (\text{Ek 1.3.6})$$

şeklini alır. $H_{\alpha}^{\beta} = 0$ ve $\beta = 1, \alpha = 3$ olduğuna göre (Ek 1.3.6)

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial \tau} + (-V_o I + A) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon \left(\prod_{\alpha=1}^3 K_{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) U = 0\quad (\text{Ek 1.3.7})$$

olarak bulunur ve $\tilde{D}$ matrisinin (ξ, τ) ya göre ifadesi

$$\prod_{\alpha=1}^3 K_{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} = D' = \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.3.8})$$

olacağından (Ek 1.3.7)

$$\epsilon \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau} + (-V_0 I + A) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + \epsilon \begin{bmatrix} \chi \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{U} = 0 \quad (\text{Ek 1.3.9})$$

durumuna gelir. Bölüm 2.2. de

$$\tilde{U} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \tilde{U}_j \quad (2.2.2)$$

ve

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j A_j \quad (2.2.5.a)$$

verildi. (2.2.2) den

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tau} + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tau} + \dots \quad (\text{Ek 1.3.10})$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \xi} + \dots \quad (\text{Ek 1.3.11})$$

(2.2.5.a) dan da

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j A_j = A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots \quad (\text{Ek 1.3.12})$$

yazılabilir. (Ek 1.3.10), (Ek 1.3.11), (Ek 1.3.12); (Ek 1.3.9) da yerlerine konursa (Ek 1.3.7)

$$(-V_{O\sim} I + A_{\sim O}) \frac{\partial U_{\sim 2}}{\partial \xi} = -\frac{\partial U_{\sim 1}}{\partial \tau} - A_{\sim 1} \frac{\partial U_{\sim 1}}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 U_{\sim 1}}{\partial \xi^3} \quad (\text{Ek 1.3.17})$$

şeklinde düzenlenebilir. $A_{\sim O} = A(U_{\sim O})$, $A_{\sim 1} = U_{\sim 1} \cdot (\nabla_{u_{\sim}} A)_{\sim O}$ olduğu bölüm 2.2. de belirtilmişti. $A_{\sim 1}$ in bu ifadesi (Ek 1.3.17) de yerine konursa

$$(-V_{O\sim} I + A_{\sim O}) \frac{\partial U_{\sim 2}}{\partial \xi} = -\frac{\partial U_{\sim 1}}{\partial \tau} - U_{\sim 1} \cdot (\nabla_{u_{\sim}} A)_{\sim O} \frac{\partial U_{\sim 1}}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 U_{\sim 1}}{\partial \xi^3} \quad (\text{Ek 1.3.18})$$

olur. (Ek 1.3.15) yeniden ele alınsın

$$(-V_{O\sim} I + A_{\sim O}) \frac{\partial U_{\sim 1}}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{Ek 1.3.15})$$

ξ ya göre integre edilirse

$$(-V_{O\sim} I + A_{\sim O}) U_{\sim 1} = F(\tau) \quad (\text{Ek 1.3.19})$$

olur ve (2.2.4) koşulu ($x \rightarrow -\infty$ iken $U \rightarrow U_{\sim O}$) kullanılırsa

$$(-V_{O\sim} I + A_{\sim O}) U_{\sim 1} = 0 \quad (\text{Ek 1.3.20})$$

bulunur. (Ek 1.3.20) nin çözümü

$$U_{\sim 1} = r_{\sim O} u_1^* \quad (\text{Ek 1.3.21})$$

dır. u_1^* , $U_{\sim 1}$ in bileşenlerinden biridir ve $r_{\sim O}$ in buna karşı gelen bileşeni 1 olarak normalize edilmiştir. (Ek 1.3.21) de τ nun keyfi bir fonksiyonunun bulunmaması $x \rightarrow -\infty$ iken $U \rightarrow U_{\sim O}$ düzgün durumuna gitmesindendir. $x \rightarrow -\infty$ olması da (2.3.35) den dolayı $\xi \rightarrow -\infty$ olmasını gerektirir veya $j = 1, 2, \dots$ için $\xi \rightarrow -\infty$ iken $U_{\sim j} \rightarrow 0$ olur.

(Ek 1.3.18) yeniden ele alınsın

$$(-\nabla_{\tilde{0}} I + A_{\tilde{0}}) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} - \tilde{u}_1 \cdot (\nabla_{\tilde{u}} A)_{\tilde{0}} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial \xi^3}$$

(Ek 1.3.18)

$\tilde{u}_1 = \tilde{r}_0 u_1^*$ olduğu (Ek 1.3.21) de verildi ((Ek 1.3.21) de τ nun keyfi bir fonksiyonunun bulunmadığı da belirtildi). (Ek 1.3.21) den

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial \tau} u_1^* + \tilde{r}_0 \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} \quad (\text{Ek 1.3.22})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial \xi} u_1^* + \tilde{r}_0 \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \quad (\text{Ek 1.3.23})$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial \xi^3} = \tilde{r}_0 \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} \quad (\text{Ek 1.3.24})$$

olduğu bulunur. $A_{\tilde{1}} = \tilde{u}_1 (\nabla_{\tilde{u}} A)_{\tilde{0}} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi}$ ifadesinde (Ek 1.3.21) ve (Ek 1.3.23) yerine konursa

$$A_{\tilde{1}} = \tilde{r}_0 u_1^* (\nabla_{\tilde{u}} A)_{\tilde{0}} \tilde{r}_0 \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \quad (\text{Ek 1.3.25})$$

olur. Yukarıda bulunanlar (Ek 1.3.18) de yerlerine yazılırsa

$$(-\nabla_{\tilde{0}} I + A_{\tilde{0}}) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} = -\tilde{r}_0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} - \tilde{r}_0 u_1^* (\nabla_{\tilde{u}} A)_{\tilde{0}} \tilde{r}_0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{r}_0 \frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial \xi^3}$$

(Ek 1.3.26)

bulunur. Bu ifade ise $\tilde{\ell}_0$ sol özvektörü ile çarpıldığında birinci taraf sıfır olur ve (Ek 1.3.26)

$$-\tilde{\ell}_0^T \cdot \tilde{r}_0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} - \tilde{\ell}_0^T \tilde{r}_0 u_1^* (\nabla_{\tilde{u}} A)_{\tilde{0}} \tilde{r}_0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} - \tilde{\ell}_0^T \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{r}_0 \frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial \xi^3} = 0$$

(Ek 1.3.27)

şeklini alır. Düzenlenirse

$$-\tilde{\ell}_o^T \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} = \tilde{\ell}_o^T \cdot r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} + \tilde{\ell}_o^T \cdot r_o u_1^* (\nabla_{u_1} A) o r_o \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \quad (\text{Ek 1.3.28})$$

olur. r_o ve $\tilde{\ell}_o$ in (Ek 1.2.9), (Ek 1.2.16) daki eşitleri de kullanılarak buradaki türevlerin katsayıları tek tek ele alındığında

$$\tilde{\ell}_o^T \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o = \frac{1}{(h^2 + \mu\sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \left[h, \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \right] \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(g^2 + \mu\sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.3.29})$$

$$\tilde{\ell}_o^T \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o = \frac{1}{(h^2 + \mu\sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}} (g^2 + \mu\sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} [h\chi, 0] \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.3.30})$$

$$\tilde{\ell}_o^T \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_o = \left[\frac{hg\chi}{(h+g)(hg + \mu\sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{Ek 1.3.31})$$

$$\tilde{\ell}_o^T r_o = \frac{1}{(h^2 + \mu\sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \left[h, \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \right] \frac{1}{(g^2 + \mu\sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 1.3.32})$$

$$\tilde{\ell}_o^T r_o = \left[\frac{2hg + \mu\sqrt{hg}}{(h+g)(hg + \mu\sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{Ek 1.3.33})$$

$$\ell_{\sim o}^T \cdot r_{\sim o} u_1^* (\nabla_{u_{\sim o}} A)_{\sim o} r_{\sim o} = \frac{1}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} [h, \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg}] \frac{1}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial u}^*, \frac{\partial}{\partial \psi}^* \right\} \begin{bmatrix} -\mu u^* & g \\ h & 0 \end{bmatrix} \right]_{\sim o} \cdot \frac{1}{(g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} u_1^*$$

(Ek 1.3.34)

$$\ell_{\sim o}^T \cdot r_{\sim o} u_1^* (\nabla_{u_{\sim o}} A)_{\sim o} r_{\sim o} = \frac{2hg + \mu \sqrt{hg}}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}} (g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)} \left\{ [-\mu, 0] \begin{bmatrix} g \\ \frac{\mu}{2} + \sqrt{hg} \end{bmatrix} u_1^* \right\}$$

(Ek 1.3.35)

$$\ell_{\sim o}^T \cdot r_{\sim o} u_1^* (\nabla_{u_{\sim o}} A)_{\sim o} r_{\sim o} = \frac{(2hg + \mu \sqrt{hg})(-\mu g)}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}} (g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)} u_1^* \quad (\text{Ek 1.3.36})$$

$$\ell_{\sim o}^T \cdot r_{\sim o} u_1^* (\nabla_{u_{\sim o}} A)_{\sim o} r_{\sim o} = \frac{-2\mu hg^2}{(h^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)^{\frac{1}{2}} (g^2 + \mu \sqrt{hg} + hg)} u_1^* \quad (\text{Ek 1.3.37})$$

olur. (Ek 1.3.31), (Ek 1.3.33), (Ek 1.3.37), (Ek 1.3.28) de yerleri-
ne konursa

$$\begin{aligned} & - \frac{hg\chi}{(h+g)(hg+\mu\sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} = \frac{2hg+\mu\sqrt{hg}}{(h+g)(hg+\mu\sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} - \\ & - \frac{2hg^2\mu}{(h^2+\mu\sqrt{hg}+hg)^{\frac{1}{2}}(g^2+\mu\sqrt{hg}+hg)} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.3.38})$$

bulunur. Her iki taraf

$$\frac{2hg+\mu\sqrt{hg}}{(h+g)(hg+\mu\sqrt{hg})^{\frac{1}{2}}}$$

ile bölünürse

$$-\frac{hg\chi}{2hg+\mu\sqrt{hg}} \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} = \frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} - \frac{2hg^2\mu}{(2hg+\mu\sqrt{hg})(g^2+\mu\sqrt{hg}+hg)} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi}, \quad (\text{Ek 1.3.39})$$

elde edilir.

$$c_1 = -\frac{2hg^2\mu}{(2hg+\mu\sqrt{hg})(g^2+\mu\sqrt{hg}+hg)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{Ek 1.3.40})$$

$$c_2 = -\frac{hg\chi}{2hg+\mu\sqrt{hg}} \quad (\text{Ek 1.3.41})$$

denirse (Ek 1.3.39)

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \tau} + c_1 u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} = c_2 \frac{\partial^3 u_1^*}{\partial \xi^3} \quad (\text{Ek 1.3.42})$$

olur.

$$u_1^* = \frac{1}{c_1} u^{(1)}, \quad -c_2 = \gamma \quad (\text{Ek 1.3.43})$$

dönüşümü yapıldığında (Ek 1.3.42) Korteweg-de Vries denkleminin alı-
şılmış şekli olan

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\text{Ek 1.3.44})$$

durumuna gelir.

KAYNAKLAR

1. Aşkar, A. and Çakmak, A.Ş., : Studies on Finite Amplitude Waves in Bounded Water Bodies. Advances in Water Resources, Vol.1, No.4, pp. 229-246, 1978.
2. Benney, D.J. : Long Waves on Liquid Films, J. Math. and Phys., 45, pp. 150-155, 1966.
3. Burgers, J. : A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Advances in Applied Mechanics, Vol.1, Academic Press, 1948.
4. Cole, J.D. : On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occuring in Aerodynamics. Quart. Appl. Math., Vol.9, pp.225-236, 1957.
5. Coleman, B.D., Gurtin, M.E., Herrera, I., Truesdell, C. : Waves Propagation in Dissipative Materials, Springer-Verlag, New York, 1965.
6. Courant, R., Friedrichs, K.O. : Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience, New York, 1948.
7. Courant, R., Hilbert, D. : Methods of Mathematical Physics, Vol.2, Interscience, New York, 1966.
8. Eringen, A.C., Şuhubi, E.S. : Elastodynamics, Vol. 1, Finite Motions, Academic Press, New York, 1974.
9. Freeman, N.C., Johnson, R.S. : Shallow Water Waves on Shear Flows. J. Fluid Mech., 42, 401-409, 1970.
10. Gardner, C.S. and Su, C.H. : Derivation of the Korteweg-de Vries Equation, Annual Rep., Princeton Univ. Plasma Phys. Lab., Matt Q 24, Princeton, 1967.
11. Gardner, C.S., Green, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M. : A Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation, Phys. Rev. Lett., 19, pp. 1095-1097, 1967.
12. Halabisky, L., Sironovich, L. : Evaluation of Finite Disturbances in Dissipative Gasdynamics, The Physics of Fluids, 16, pp.360-368, 1973.

13. Hopf, E. : The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$,
Comm. Pure. Appl. Math., 3, pp. 201-230, 1950.
14. Jeffrey, A. : The Evolution of Discontinuities in Solutions of
Homogeneous Nonlinear Hyperbolic Equations Having Smooth Initial
Data., J. Math. Mech., Vol. 15, pp. 331-352.
15. Jeffrey, A. : Breakdown of the Solitons to a Completely Exceptional
Family of Hyperbolic Equations. Anal. and Applications, Vol. 45,
pp. 375-381, 1974.
16. Jeffrey, A., Kakutani, T. : Weak Nonlinear Dispersive Waves :
A Discussion Centered Around the Korteweg-de Vries Equation.
Siam-Review, Vol. 14, pp. 582-643, 1972.
17. Jeffrey, A., Taniuti, T. : Nonlinear Wave Propagation. Academic
Press, New York, 1964.
18. Johnson, R.S. : Nonlinear Waves in Fluid Filled Elastic Tubes
and Related Problems, Doctoral Thesis, Univ. of London, London,
1969.
19. Kakutani, T. and Kawahara, T. : Weak Ion Acoustic Shock Waves,
Ibid., 29, pp. 1068-1073, 1970.
20. Kakutani, T. and Ono, H. : Weak Nonlinear Hydromagnetic Waves
in a Cold Collision Free Plasma, Ibid., Vol.26, pp. 1305-1318, 1969.
21. Kakutani, T., Ono, H. Taniuti, T., Wei, C.C. : Reductive
Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II : Application
to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma, J.Phys. Soc. Japan, 24,
pp. 1159-1166, 1968.
22. Kawahara, T. : Weak Nonlinear Magneto-Acoustic Waves in a Cold
Plasma in the Presence of Effective Electron Ion Collisions,
Ibid., pp. 1321-1329, 1970.
23. Korteweg, D.J., De Vries, G. : On the Change of Form of Long
Waves Advancing in a Rectangular Channel and on a New Type of
Long Stationary Waves, Philos. Mag., Vol. 10, pp.422-443, 1895.
24. Lax, P.D. : Hyperbolic Systems of Conservation Laws II. Commun.
Pure and Appl. Math., Vol. 10, pp. 537-566, 1957.

25. Lighthill, M.J. : Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude, *Surveys in Mechanics*, pp. 255-351, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.
26. Lighthill, M.J. : On Waves Generated in Dispersive Systems To Travelling Effects, With Applications to the Dynamic of Rotating Fluids, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 725-752.
27. Lighthill, M.J. : Group Velocity, *J. Inst. Math. Appl.*, Vol. 1, pp. 1-28, 1963.
28. Moran, J.P., Shen, S.F. : On The Formation of Weak Plane Shock Waves by Impulsive Motion of a Piston. *J. Fluid Mech.*, 25, pp. 705-718, 1966.
29. Ott, E. and Sudan, R.L. : Nonlinear Theory Ion Acoustic Waves With Landau Damping, *Ibid.*, 12, 2388-2394, 1969.
30. Stoker, J.J. : *Water Waves*, Interscience, New York, 1957.
31. Sturrock, P.A. : Kinematics of Growing Waves, *Phys. Rev.*, Vol. 112, pp. 1488-1503, 1958.
32. Su, C.H., Gardner, C.S. : Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries and Burgers Equation. *J. Math. Phys.*, Vol. 10, pp. 536-539, 1969.
33. Sudan, R.N. : Classification of Instabilities From Their Dispersion Relations, *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 1899-1904.
34. Taniuti, T. and Wei, C.C. : Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation. *I.J. Phys. Soc. Japan*, 24, 941-946, 1968.
35. Teymur, Mevlüt : Dissipatif veya Dispersif Nonlinear Ortamlarda Dalga Yayılması. Doktora Tezi, 1975.
36. Walsh, R.A. : Initial Value Problems Associated With $u_t(x,t) = \delta u_{xx}(x,t) + u(x,t) u_x(x,t)$. *J. Math. Anal. and Applications*, Vol. 26, pp. 235-247.
37. Zabusky, N.J. : A Synergetic Approach to Problems of Nonlinear Dispersive Wave Propagation and Interaction, *Proc. Symp., Nonlinear Partial Differential Equation*. W. Ames, Ed., Academic Press, New York, pp. 223-258, 1967.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma SENYÜCEL, 1948 yılında Urfa'nın Birecik ilçesinde doğmuş, ilköğrenimini Hobyarlı Ahmet Paşa İlkokulu'nda yaptıktan sonra, Çemberlitaş Kız Ortaokulu'nda başladığı orta öğrenimini 1968 yılında İstanbul Kız Lisesi'nde tamamlamıştır. Aynı sene girdiği İ.Ü.F.F. Matematik-Fizik Bölümü'nü 1973 yılında bitirmiştir. 1973-1975 yıllarında özel bir öğretim kurumunda matematik öğretmeni olarak çalışmıştır. 1975-1978 tarihleri arasında ise İ.D.M.M.A.'ne bağlı Vatan Mühendislik Yüksek Okulu'nda matematik asistanlığı yapmış, 1978 yılında aynı görevle Kocaeli D.M.M.A.'ne geçmiştir. Şimdi de Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

